EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATIK FÜR BIOLOGEN UND CHEMIKER

Einführung in die Mathematik

für Biologen und Chemiker

Einführung in die Mathematik

für Biologen und Chemiker

Von

Prof. Dr. Leonor Michaelis
Privatdozent an der Universität Berlin

Mit 96 Textfiguren

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1912

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1967

ISBN 978-3-662-35971-6 ISBN 978-3-662-36801-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36801-5

Vorwort.

Schritt für Schritt werden immer weitere Gebiete der Biologie durch Vervollkommnung der messenden Methoden den exakten Wissenschaften angereiht und damit einer mathematischen Behandlung erschlossen. Dadurch wird die Notwendigkeit eines mathematischen Vorstudiums für alle Biologen ganz allmählich immer dringender. Noch pflegt dieses über Gebühr vernachlässigt zu werden. Aus eigener Erfahrung konnte ich beobachten, daß die exakten messenden Methoden zwar mechanisch von allen Schülern erlernt werden können, aber in fruchtbarer Weise nur von denjenigen ausgenutzt werden, die eine mathematische Vorbildung haben, für die die Zahl etwas Lebendes ist. So ist dieses Büchlein ganz allmählich aus praktischen Bedürfnissen beim Unterricht entstanden.

Obwohl nämlich ein Mangel an guten Einführungen in die Mathematik für Naturwissenschaftler nicht besteht, so hat mich doch die Erfahrung gelehrt, daß diese gerade den Bedürfnissen der Biologen nicht völlig entsprechen. Erstens ist die überwiegende Erläuterung der mathematischen Sätze an Beispielen der theoretischen Physik nicht die dem Biologen am meisten adäquate, und dann ist in den bestehenden Lehrbüchern in der Regel ein gewisser Schatz von Kenntnissen der elementaren Mathematik vorausgesetzt, über den nun einmal die Mehrzahl der heutigen Biologen wenigstens in lebendiger, gebrauchsfähiger Form nicht verfügt.

Wenn diese „Einführung“ dazu beitragen sollte, das mathematische Niveau der Jünger der biologischen Wissenschaften zu heben oder gar das Verlangen bei ihnen zu erwecken, nach ausführlicheren Lehrbüchern der Mathematik zu greifen, so würde ich den Zweck dieses anspruchlosen Büchleins für erfüllt halten.

Berlin, im August 1912.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Rekapitulation der elementaren Mathematik.

I. Geometrie.

1. Zwei Körper schneiden sich in einer Ebene, zwei Ebenen in einer Linie, zwei Linien in einem Punkte.

Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie die kürzeste Verbindung.

2. Lehre von den Winkeln.

Ein Winkel entsteht durch die Drehung einer geraden Linie um einen festen Punkt derselben, den Scheitel des Winkels. Die Größe des Winkels wird nach Maßgabe dieser Drehung gemessen und ist unabhängig von der Länge der Schenkel. Eine volle Umdrehung teilt man in 360 Grade, eine halbe Drehung oder ein gestreckter Winkel beträgt demnach 180^0, eine Vierteldrehung oder ein rechter Winkel beträgt 90^0. Die Schenkel eines rechten Winkels stehen senkrecht aufeinander, oder der eine Schenkel bildet ein Lot auf den anderen. Ein Winkel, welcher kleiner als $1R$ ist, heißt spitz, ein Winkel, der $> R$ aber $< 2R$ ist, stumpf. Ein Winkel, der $< 2R$ ist, heißt konkav, ein Winkel, der $> 2R$ ist, konvex.

Nebenwinkel sind zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinsam haben, während die anderen Schenkel die geradlinigen Verlängerungen voneinander sind. Ihre Summe ist stets $= 2R$ oder $= 1$ gestrecktem Winkel. Das folgt aus dem Begriff des gestreckten Winkels, dessen beide Schenkel eine einzige Gerade bilden. Zwei Winkel, die zusammen $2R$ betragen, nennt man Supplementwinkel; zwei Winkel, die zusammen $1R$ betragen, Komplementwinkel.

Scheitelwinkel sind zwei Winkel von solcher Lage, daß der Scheitel beiden gemeinsam ist und die Verlängerungen der Schenkel des einen Winkels die Schenkel des anderen sind. Scheitelwinkel sind einander gleich. $\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, \gamma$, weil beide $= 2R - \beta$ sind (Fig. 1).

Zwei gerade Linien schneiden sich, hinreichend verlängert, im allgemeinen unter einem bestimmten Winkel.

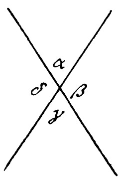

Fig. 1.

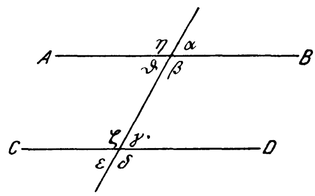

Fig. 2.

Wenn sie sich, soweit man sie auch nach beiden Richtungen verlängert, im Endlichen niemals schneiden, nennt man sie parallel.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten unter gleichem Winkel geschnitten werden, sind sie parallel.

α' und γ sind Gegenwinkel, ebenso β und δ (Fig. 2).

α und δ sind entgegengesetzte Winkel, ebenso β und γ.

α und ε sind Wechselwinkel, ebenso ϑ und γ.

Ist AB parallel CD, so sind Gegenwinkel einander gleich, entgegengesetzte Winkel betragen zusammen $2R$. Wechselwinkel sind einander gleich.

Umgekehrt: wenn zwei Gegenwinkel einander gleich sind, so sind die Linien, an denen sie liegen, parallel usw.

3. Das Dreieck.

Die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks beträgt $2R$.

Beweis: Man ziehe in Fig. 3 $AD \parallel BC$. Dann ist $\sphericalangle\, \gamma' = \sphericalangle\, \beta$ und $\sphericalangle\, \beta' = \sphericalangle\, \gamma$ als Wechselwinkel. Also

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 2R.$$

Ein Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Winkel, denn (Fig. 4) $\delta = 2R - \gamma$, andererseits auch $\alpha + \beta = 2R - \gamma$.

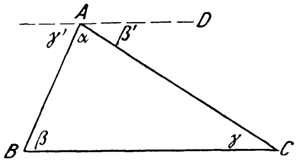

Fig. 3.

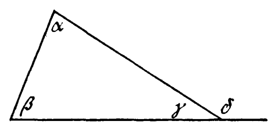

Fig. 4.

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Schenkel des rechten Winkels die Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse.

Ein Dreieck, in welchem alle drei Winkel spitz sind, heißt ein spitzwinkliges Dreieck; ein solches, in welchem ein Winkel stumpf ist, ein stumpfwinkliges. Es kann höchstens ein Winkel im Dreieck stumpf sein, weil die Summe schon zweier stumpfer Winkel auf jeden Fall $> 2R$ ist.

Ein Dreieck, in dem 2 Seiten einander gleich sind, heißt ein gleichschenkliges, ein solches, in dem alle 3 Seiten einander gleich sind, ein gleichseitiges Dreieck. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich, in einem gleichseitigen Dreieck daher alle 3 Winkel einander gleich, und daher jeder $= 60^0$.

In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

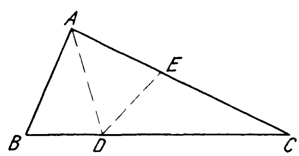

Fig. 5.

Beweis: AC sei $> AB$. (Fig. 5.) Halbiert man $\sphericalangle BAC$ durch AD und klappt das Dreieck ABD um AD als Achse nach rechts um, so fällt B auf E, und $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED$.

Da nun $\sphericalangle AED$ Außenwinkel an $\triangle DEC$ ist, muß

$$\sphericalangle AED > \sphericalangle ACD, \quad \text{folglich auch} \quad \sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$$

sein.

Da im rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel größer als jeder der beiden anderen ist, so ist jede Kathete stets kürzer als die Hypotenuse.

Als Umkehrung obigen Satzes folgt ferner, daß auch dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, und ferner die schon erwähnte Tatsache, daß im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel einander gleich sind. Denn gleichen Seiten müssen auch gleiche Winkel gegenüberliegen.

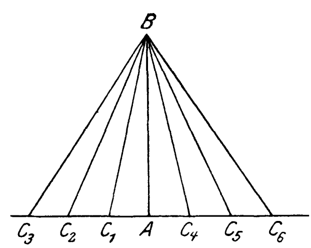

Fig. 6.

In der Schar von rechtwinkligen Dreiecken ABC_1, ABC_2, ABC_3 usw. ist also die Hypotenuse BC_1, BC_2 usw. stets größer als die Kathete BA. Folglich ist von allen Geraden, die man vom

Punkte B nach einer Geraden C_3C_5 ziehen kann, das Lot die kürzeste. Das Lot von einem Punkte auf eine Gerade nennt man die Entfernung des Punktes von der Geraden.

4. Kongruenz.

Zwei Figuren nennt man kongruent, wenn man sie durch Verschiebung und Drehung so aufeinander legen kann, daß sie sich vollkommen decken.

Erster Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

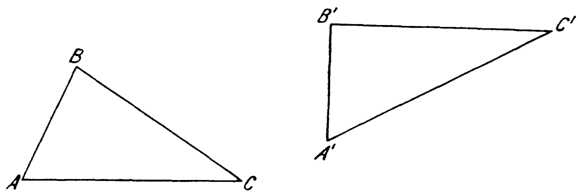

Fig. 7.

Voraussetzung:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Beweis: Verschiebt und dreht man (Fig. 7) $\triangle ABC$ so, daß AB auf $A'B'$, BC auf $B'C'$ und $\sphericalangle ABC$ auf $A'B'C'$ fallen, so muß auch AC auf $A'C'$ fallen, weil zwischen zwei Punkten A' und C' nur eine Gerade gezogen werden kann. Somit decken sich alle 3 Seiten und Winkel.

Zweiter Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln von gleicher Lage, d. h. entweder den beiden anliegenden oder in einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Voraussetzung: $AB = A'B'$ (Fig. 7),

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C',$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

Beweis: Verschiebt und dreht man $\triangle ABC$ so, daß AB auf $A'B'$ fällt, so muß auch C auf C' fallen, da die beiden Schenkel der zusammenfallenden Winkel sich nur in einem Punkte, nämlich C', schneiden können.

Wäre die Voraussetzung:

$$AB = A'B',$$
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C',$$
$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A',$$

so folgert man zunächst, daß, wenn zwei Winkel zweier Dreiecke übereinstimmen, dies auch die dritten tun müssen, also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, und fährt wie oben im Beweis fort.

D r i t t e r K o n g r u e n z s a t z. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

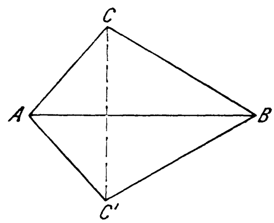

Fig. 8.

Man verschiebe und drehe die beiden Dreiecke (Fig. 8) so zueinander, daß eine Seite AB zusammenfällt, so daß, wenn das feststehende Dreieck ACB ist, das verschobene die Lage $AC'B$ hat. Zieht man nun CC', so ist in dem gleichschenkligen

$$\triangle ACC' \sphericalangle ACC' = \sphericalangle AC'C,$$

und ebenso $\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BC'C$, also auch durch Addition $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B$. Dann sind die beiden Dreiecke nach dem ersten Kongruenzsatz kongruent.

V i e r t e r K o n g r u e n z s a t z. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

V o r a u s s e t z u n g: (Fig. 9)

$$AC = A'C',$$
$$AB = A'B',$$
$$AC > AB,$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

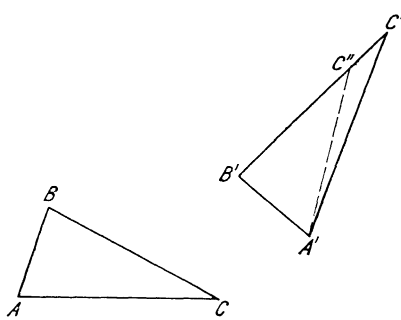

Fig. 9.

Man verschiebe und drehe die Dreiecke so, daß $\sphericalangle ABC$ auf $\sphericalangle A'B'C'$ fällt. Dann muß nach der Voraussetzung auch A auf A' fallen. Angenommen nun, C fiele nicht auf C', sondern etwa auf C'', so müßte $\triangle B'A'C'' \cong BAC$ sein, weil diese Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmten. Dann müßte auch $A'C'' = AC$ sein, also auch $A'C'' = A'C'$, d. h. das $\triangle A'C''C'$ müßte gleichschenklig sein und $\sphericalangle A'C''C' = A'C'C''$. Da nun $\sphericalangle A'C''C'$ als Außenwinkel $> \sphericalangle A'B'C''$ ist, muß auch $\sphericalangle A'C'C'' > \sphericalangle A'B'C''$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß also C' und C'' zusammenfallen, womit die Kongruenz der Dreiecke bewiesen ist.

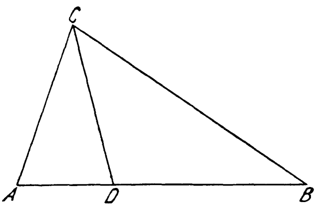

Fig. 10.

Wenn dagegen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so brauchen sie nicht kongruent zu sein: (Fig. 10) $\triangle ABC$ und $\triangle DBC$ stimmen überein in zwei Seiten: $BC = BC$, $AC = CD$, und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA$, und sind doch nicht kongruent.

5. Das Viereck.

Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Sind die Winkel Rechte, ist es ein Rechteck. Ein Parallelogramm, dessen Seiten einander gleich sind, ist ein gleichseitiges Parallelogramm, und, zwar wenn die Winkel Rechte sind, ein Quadrat, andernfalls ein Rhombus.

In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich, halbieren die Diagonalen einander, sind die gegenüberliegenden Winkel gleich (mit Hilfe der Kongruenzsätze leicht zu beweisen).

Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem zwei Seiten einander parallel sind. Sind die beiden nicht parallelen Seiten einander gleich, so ist es ein gleichschenkliges Trapez.

Die Summe der 4 Winkel eines Vierecks beträgt stets 4 R.

Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

6. Der Kreis.

Der geometrische Ort ist eine Figur, deren einzelne Punkte jeder einer gemeinsam gegebenen Bedingung genügen.

Der Kreis ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung haben.

Der gegebene Punkt heißt der Mittelpunkt, die gegebene Entfernung der Halbmesser oder Radius, r.

Eine Sehne ist die geradlinige Verbindung zweier Punkte des Kreises. Die beiden Endpunkte der Sehne und der Mittelpunkt des Kreises bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck. Die Halbierungslinie des Zentriwinkels, d. h. desjenigen Winkels dieses Dreiecks, der dem Mittelpunkt des Kreises entspricht, halbiert auch die Sehne und den Kreisbogen, der von der Sehne abgeschnitten wird, und steht senkrecht auf der Sehne.

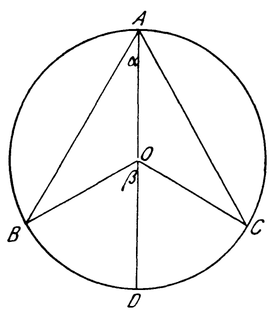

Fig. 11.

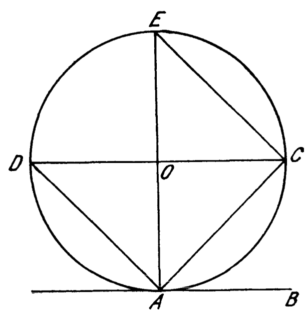

Fig. 12.

Eine Tangente ist eine Gerade, welche den Kreis nur in einem Punkte berührt. Die Tangente des Kreises steht senkrecht auf dem zu dem Berührungspunkt gezogenen Radius.

Der Winkel, den zwei in der Peripherie sich schneidende Sehnen miteinander bilden, heißt der Peripheriewinkel. Er ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

Denn zieht man in Fig. 11 AO, so ist $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle BAO$ und $\sphericalangle DOC = 2 \cdot \sphericalangle OAC$, als Außenwinkel an gleichschenkligen Dreiecken, daher $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$. Alle Peripheriewinkel über der Sehne BC (alle Peripheriewinkel, deren Schenkel durch B und C gehen) sind daher einander gleich, weil sie einen gemeinschaftlichen Zentriwinkel, BOC, haben. Jeder Peripheriewinkel über dem Halbmesser ist daher ein rechter.

Der Winkel, den die Tangente mit einer Sehne im Berührungspunkt der Tangente bildet, heißt ein Tangentenwinkel. Er ist ebenso groß wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne. In Fig. 12 ist $\sphericalangle CAB$ der Tangentenwinkel, $\sphericalangle ADC$ der Peripheriewinkel. Zieht man AE durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist $EA \perp AB$. Ferner ist auch $\sphericalangle ECA = 1\,R$ als Peripheriewinkel über dem Halbmesser, also ist $\sphericalangle CEA = 1\,R - \sphericalangle EAC$, und ebenso $\sphericalangle CAB = 1\,R - \sphericalangle EAC$, daher $\sphericalangle CAB = AEC$. Da alle Peripheriewinkel über AC einander gleich sind, ist auch $\sphericalangle CAB = CDA$.

Jedes reguläre Polygon hat einen umgeschriebenen Kreis, welcher durch alle Ecken des Polygons geht und einen eingeschriebenen Kreis, welcher alle Seiten des Polygons zu Tangenten hat.

7. Der Flächeninhalt ebener Figuren.

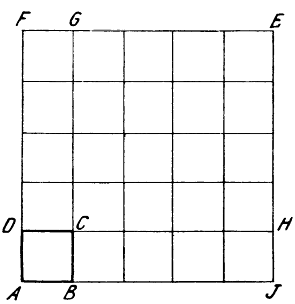

Fig. 13.

Die Einheit des Flächeninhalts ist der Inhalt eines Quadrates, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Ist $AB = 1$ cm, so ist $\square ABCD = 1$ qcm. Durch Betrachtung der Fig. 13 ergibt sich folgendes:

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der Längen seiner beiden verschiedenen Seiten, der eines beliebigen Quadrates gleich dem Quadrat seiner Seite. Ferner ergibt sich aus Fig. 13:

$$(\overline{AB} + \overline{BJ})^2 = ABCD + GCHE + FDCG + BCHJ$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{BJ}^2 + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{BJ}.$$

D. h. das Quadrat über der Summe zweier Seiten ist gleich der Summe der Quadrate über jeder einzelnen Seite, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden Seiten.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Flächeninhalt.

(Unter der Höhe eines Rechtecks versteht man die Länge des auf die Grundlinie gefällten Lotes. Parallelogramme von gleicher Höhe liegen daher zwischen Parallelen ($DE \parallel AB$) (Fig. 14.)

Beweis $\square ABCD = AFCB + ADF$,

$\square AFEB = AFCB + BCE$.

Da $\triangle ADF \cong BCE$, so ist $ABCD = ABEF$. Daraus folgt, daß der Inhalt eines jeden Parallelogramms gleich dem Produkt aus einer Grundlinie und der zugehörigen Höhe ist.

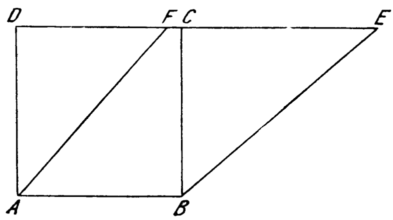

Fig. 14.

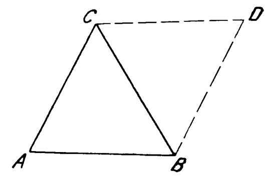

Fig. 15.

Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes von gleicher Grundlinie und Höhe. Gegeben sei das $\triangle ABC$ (Fig. 15). Zieht man $CD \parallel AB$ und $BD \parallel AC$, so ist $ABDC$ ein Parallelogramm, welches durch die Diagonale BC halbiert wird. Daher ist der Inhalt eines Dreiecks gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie und der zugehörigen Höhe. Jede Seite des Dreiecks kann als Grundlinie betrachtet werden.

8. Der pythagoräische Lehrsatz.

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Einer der zahlreichen Beweise ist folgender: Man ziehe $AN \perp EB$, $HK \parallel BC$ und $EL \parallel AB$. Dann ist Parallelogramm

$BALE \cong HKCB$,

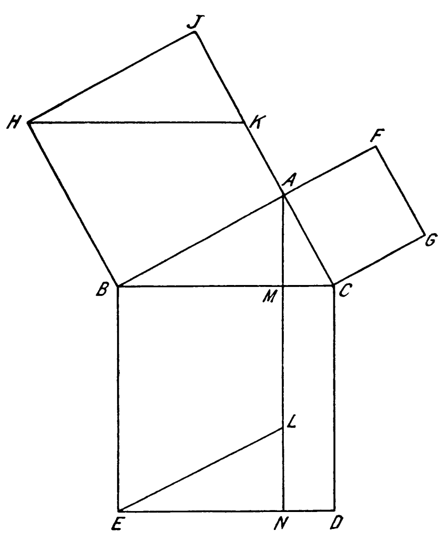

Fig. 16.

weil beide Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen (vgl. S. 6).

Als Parallelogramme zwischen Parallelen ist ferner

$$
\begin{array}{ll}
\text{Parallelogramm} & BALE = BMNE \\
\text{und} & \underline{HKCB = HJAB} \\
\text{also} & HJAB = BMNE\,.
\end{array}
$$

Durch entsprechende Hilfslinie auf der anderen Seite der Figur läßt sich beweisen, daß

$$AFGC = MCDN\,.$$

Durch Summation ergibt sich

$$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2\,.$$

9. Höhensatz.

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse.

Denn nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist

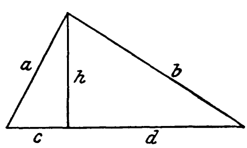

Fig. 17.

$$
\begin{array}{ll}
 & h^2 = a^2 - c^2 \\
\text{und} & \underline{h^2 = b^2 - d^2} \\
 & 2\,h^2 = a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)\,.
\end{array}
$$

Da

$$a^2 + b^2 = (c + d)^2 = c^2 + 2\,c\,d + d^2\,,$$

so folgt

$$2\,h^2 = (c^2 + 2\,c\,d + d^2) - (c^2 + d^2)\,,$$

$$h^2 = c \cdot d\,.$$

10. Der erweiterte pythagoräische Lehrsatz.

Für jedes beliebige Dreieck gilt der Satz:

Das Quadrat über einer (der „ersten") Dreieckseite, die einem spitzen (bzw. stumpfen) Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über der zweiten und der dritten Seite, vermindert (bzw. vermehrt) um das doppelte Rechteck aus der zweiten und der Projektion der dritten auf die zweite Seite.

(Unter der Projektion einer Seite auf eine zweite versteht man die Strecke zwischen den Fußpunkten der beiden Lote, die man von den Endpunkten der ersten Seite auf die zweite oder deren Verlängerung fällt. Liegt der Anfangspunkt der zu projizierenden Seite in der anderen Seite, so ist dementsprechend die Projektion der ersten Seite auf die zweite die Strecke von diesem Anfangspunkte bis zu dem Fußpunkte des vom Endpunkte der ersten auf die zweite Seite gefällten Lotes.)

Beweis. a) Für das spitzwinklige Dreieck (Fig. 18).

$\sphericalangle ACB$ sei spitz. Fällt man die Höhe h, so ist

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a - p)^2 \\ &= h^2 + a^2 + p^2 - 2\,a\,p\,. \end{aligned}$$

Da

$$h^2 + p^2 = b^2\,,$$

so ist

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,a\,p\,.$$

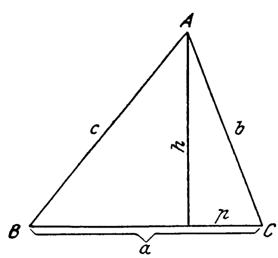

Fig. 18.

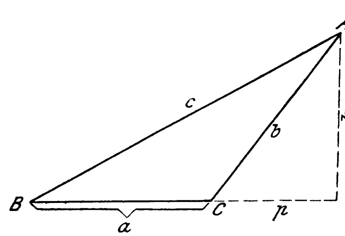

Fig. 19.

b) Für das stumpfwinklige Dreieck (Fig. 19).

$\sphericalangle ACB$ sei stumpf. Dann ist

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a + p)^2 \\ &= h^2 + a^2 + p^2 + 2\,a\,p \\ &= b^2 + a^2 + 2\,a\,p\,. \end{aligned}$$

11. Inhalt und Umfang des Kreises.

Gegeben sei ein reguläres, in einen Kreis vom Radius r eingeschriebenes Polygon von der Seitenzahl n. Seine Seite sei $= s$. Man berechne nun die Seite s' des regulären, in denselben Kreis eingeschriebenen Polygons von der Seitenzahl $2n$.

Nach dem erweiterten pythagoräischen Lehrsatz ist (Fig. 20)

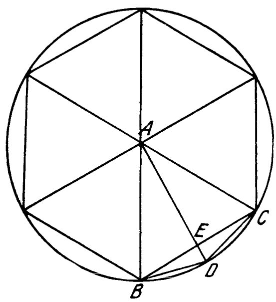

Fig. 20.

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{AE}$$
$$= 2\,r^2 - 2\,r \cdot AE\,.$$

AE läßt sich aus $\triangle AEC$ berechnen:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$$
$$= r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$
$$AE = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}\,.$$

Also

$$\overline{CD}^2 = 2\,r^2 - 2\,r^2\sqrt{1 - \left(\frac{s}{2\,r}\right)^2}\,,$$

$$s' = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{s^2}{4\,r^2}}}\,.$$

Die Seite des regulären eingeschriebenen Sechsecks ist $= r$, also folgt für die Seite des Zwölfecks s_{12}.

$$s_{12} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.$$

Hieraus kann man fortschreitend die Seite des 24-Ecks, 48-Ecks usw. berechnen und aus dieser durch Multiplikation mit der Seitenzahl n den Umfang des Polygons.

Bei fortgesetzter Verdoppelung von n nähert man sich immer mehr dem Wert für den Umfang des Kreises, den man jedoch, solange n endlich ist, niemals vollkommen erreicht.

Ganz analog läßt sich ein Verfahren ausarbeiten, um aus dem Umfang des regulären, umgeschriebenen Polygons bei fortgesetzter Vermehrung der Seitenzahl den Wert des Kreisumfanges von oben her zu erreichen. So hat man zwei Grenzen, innerhalb deren der wahre Umfang des Kreises liegt. Der Umfang u_n des eingeschriebenen, und U_n des umschriebenen Polygons von der Seitenzahl n ist

$$\begin{array}{llll} u_6 & = 6{,}000\,00 & U_6 & = 6{,}928\,20 \\ u_{12} & = 6{,}211\,63 & U_{12} & = 6{,}430\,78 \\ u_{24} & = 6{,}265\,26 & U_{24} & = 6{,}319\,32 \\ u_{48} & = 6{,}278\,70 & U_{48} & = 6{,}292\,18 \\ u_{96} & = 6{,}282\,06 & U_{96} & = 6{,}285\,42 \\ u_{192} & = 6{,}282\,91 & U_{192} & = 6{,}283\,57 \\ u_{384} & = 6{,}283\,11 & U_{384} & = 6{,}283\,33\,. \end{array}$$

Der Grenzwert, dem sich u und U schließlich nähern, ist 6,283 18 ... Dieses bezeichnet man als 2π, so daß

$$\pi = 3{,}141\,59 \ldots$$

und der Umfang des Kreises wird $2\pi \cdot r$.

Der Inhalt des regulären Polygons mit der Seite s ist $= n \cdot \frac{s \cdot h}{2}$, wo h die Höhe des Teildreiecks bezeichnet.

Je größer n wird, um so mehr nähern sich die Werte von h und r einander, so daß für ein sehr großes n der Inhalt $= n \cdot s \cdot \frac{r}{2}$ wird.

Da $n \cdot s$ nach dem soeben Gesagten sich dem Wert $2\pi \cdot r$ nähert so ist der Inhalt des Kreises $= \pi \cdot r^2$.

Folgende Brüche stellen der Reihe nach immer bessere Näherungswerte für π dar:

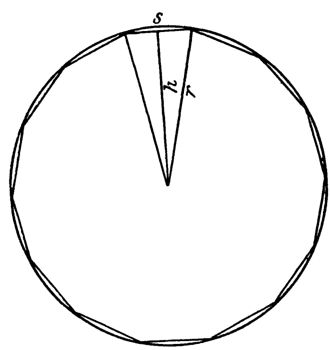

Fig. 21.

$$\frac{3}{1}\,; \quad \frac{22}{7}\,; \quad \frac{333}{106}\,; \quad \frac{355}{113}\,; \quad \frac{103993}{33102} \ldots$$

12. Proportionalität und Ähnlichkeit.

Zwei Strecken p und q können in folgendem Größenverhältnis zueinander stehen

a) Die Strecke q ist ein Vielfaches der Strecke p (z. B. $q = 2$, $p = 1$).

b) Die Strecke q ist zwar nicht ein einfaches Vielfaches *von* p, *aber* ein Vielfaches eines aliquoten Teiles von p (z. B. $q = 3$, $p = 2$).

In diesen beiden Fällen spricht man von kommensurablen Strecken.

c) p und q haben kein gemeinsames Vielfaches (z. B. $p = 1$, $q = \sqrt{2}$).

Dieses nennt man inkommensurable Strecken. Statt $\sqrt{2}$ können wir aber mit einer je nach dem Bedürfnis abgestuften Näherung an die Wahrheit die kommensurable Größe 1,4 oder 1,41 oder 1,414 oder 1,4142 ... usw. schreiben und so die inkommensurablen Strecken genau so wie die kommensurablen behandeln.

Wenn das Verhältnis zweier Strecken p und q, also $\frac{p}{q}$, gleich dem Verhältnis zweier anderer Strecken p' und q', also $= \frac{p'}{q'}$ ist, so sagt man, die 4 Strecken sind proportional und schreibt

$$p : q = p' : q',$$

daraus folgt, daß auch

$$p : p' = q : q'$$

und

$$p = q \cdot \frac{p'}{q'},$$

$$q = p \cdot \frac{q'}{p'};$$

ferner ist dann auch

$$p + q : q = p' + q' : q',$$

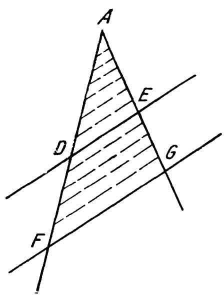

Fig. 22.

wie sich aus Betrachtung von Fig. 22 ergibt.

Wenn die Scheitel eines Winkels A von 2 Parallelen geschnitten werden, DE und FG, so sind die dadurch abgeschnittenen Strecken proportional, d. h.

$$AD : DF = AE : EG.$$

Beweis: Angenommen, AD enthalte die Streckeneinheit siebenmal, DF fünfmal, so lege man die entsprechenden 12 Parallelen. Diese schneiden AG und teilen AE ebenfalls in 7, EG in 5 gleiche Teile, folglich $\frac{AE}{EG} = \frac{AD}{DF}$.

Ist AD und DF inkommensurabel, so läßt sich der Beweis wenigstens für eine von DF äußerst wenig verschiedene

Strecke erbringen, welche kommensurabel ist. Den Grad der Annäherung kann man durch Verkleinerung des gemeinschaftlichen Maßes beliebig weit treiben, so daß bei der Wahl eines unendlich kleinen gemeinschaftlichen Maßes die Annäherung beliebig groß gemacht werden kann und der Beweis auch für inkommensurable Strecken gilt.

Ferner verhalten sich dann auch die abgeschnittenen Stücke der Parallelen, $DE : FG$, zu einander wie $AD : AF$. Der Beweis ist ähnlich wie soeben, indem man zu AG zahlreiche Parallelen zieht.

Wenn eine Strecke in zwei Teile geteilt ist, so daß die kleinere zur größeren sich wie die größere zur ganzen verhält, so nennt man das eine stetige Proportion oder den goldenen Schnitt:

$a : b = b : a + b$ und $b^2 = a(a + b)$.

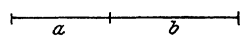

Fig. 23.

Zwei Polygone heißen **ähnlich**, wenn sämtliche entsprechenden Winkel des einen denen des anderen gleich und die Seiten einander proportional sind.

Kongruente Polygone sind gleichzeitig einander ähnlich und flächengleich.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich,

1. wenn zwei Seiten des einen zwei Seiten des anderen proportional und die eingeschlossenen Winkel gleich sind,

2. wenn zwei Winkel des einen zwei Winkeln des andern gleich sind,

3. wenn die drei Seiten des einen denen des anderen proportional sind,

4. wenn zwei Seiten des einen zwei Seiten des anderen proportional und die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

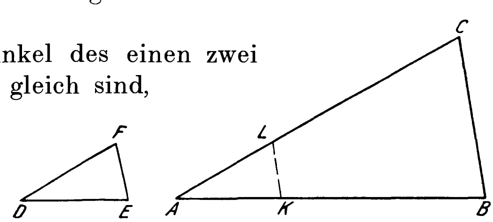

Fig. 24.

Der Beweis dieser Sätze wird beispielsweise für den ersten Ähnlichkeitssatz folgendermaßen geführt:

Voraussetzung: $AC : AB = DF : DE$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$.

Behauptung: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis: Man trage auf AB die Strecke $AK = DE$, und auf AC die Strecke $AL = DF$ ab. Dann ist $\triangle ALK \cong \triangle DFE$, nach dem ersten Kongruenzsatz. Nun ist $\triangle ALK \sim \triangle ACB$, denn es stimmen alle drei Winkel überein, und von den entsprechenden Seiten ist auf Grund der Voraussetzung $AL : AC = AK : AB$, folglich muß auch $KL : BC = AK : AB$ sein. Folglich ist auch $\triangle DEF \sim ABC$.

13. Einiges von den Körpern.

Die von Ebenen begrenzten Körper teilt man in Trieder, Tetraeder usw. ein, deren allgemeiner Name Polyeder ist.

Das reguläre Hexaeder ist der Würfel. Hat seine Kante die Länge a, so ist seine Oberfläche $= 6a^2$, sein Inhalt $= a^3$.

Ein Hexaeder, dessen gegenüberliegende Flächen je einander parallel sind, nennt man ein Parallelepipedon. Der Inhalt eines Parallelepipedons, dessen Grundfläche den Inhalt $a \cdot b$ hat, und dessen Höhe h ist, beträgt $a \cdot b \cdot h$. Ein Parallelepipedon mit lauter rechten Winkeln heißt ein Prisma.

Ein reguläres Polyeder von unendlich großer Flächenzahl ist die Kugel. Ihre Oberfläche ist, wenn r der Radius ist, $= 4\pi \cdot r^2$, und ihr Inhalt $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Zur Ableitung dieser Formeln bedarf es eines ähnlichen Verfahrens, wie es in der ebenen Geometrie für den Kreis entwickelt wurde.

Der Inhalt eines Zylinders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und der Höhe h. Ist die Grundfläche ein Kreis, so ist sie $= \pi r^2$, der Inhalt des Zylinders also $= \pi r^2 h$.

Der Inhalt eines Kegels ist ein Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe, $\frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$.

Die Entwicklung dieser Formeln s. später S. 195 ff.

II. Arithmetik und Algebra.

14. Man teilt die Zahlen ein in:

1. Natürliche Zahlen, positive und negative:

$$1, 2, 3, 4, \ldots; \quad -1, -2, -3, -4, \ldots$$

2. Gebrochene Zahlen, positive und negative:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{5}, \ldots; \quad -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{5} \ldots,$$

Man kann sie auch als Dezimalbrüche schreiben, und als solche sind sie entweder endliche Dezimalbrüche

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5\,; \qquad \tfrac{1}{8} = 0{,}125$$

oder unendliche, aber periodische Dezimalbrüche:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}\bar{3}33\ \ldots\,; \qquad \tfrac{1}{12} = 0{,}08\bar{3}\,333\ \ldots\,; \qquad \tfrac{23}{33} = 0{,}\overline{69}69\ \ldots$$

3. Irrationale[1]) Zahlen, positive und negative:

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,; \qquad -\sqrt{2}\,,\ -\sqrt{3}\,; \qquad \pi\,; \qquad e\ ^{2)}.$$

Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie mit vollkommener Genauigkeit durch keine natürliche oder gebrochene Zahl, sei es in Form eines Bruches oder eines Dezimalbruches, ausgedrückt werden können. Sie lassen sich durch gebrochene Zahlen oder aperiodische Dezimalbrüche nur mit einer allerdings beliebig weitgehenden Annäherung darstellen, z. B.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ \ldots$$

Wenn zwei geometrische Größen, z. B. die Längen zweier geraden Linien, in einem irrationalen Verhältnis stehen, so nennt man sie inkommensurabel. In einem rechtwinkligen, gleichseitigen Dreieck, dessen Hypothenuse gleich der Längeneinheit ist, beträgt die Länge einer Kathete $= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, sie ist irrational. Trotzdem ist die Länge der Kathete etwas durchaus Bestimmtes, Reelles. Daß wir sie durch keine natürliche oder gebrochene Zahl ausdrücken können, ist nur in der willkürlichen Wahl der Längeneinheit begründet. Wir können ebensogut die Länge einer Kathete als die Längeneinheit festsetzen, und dann ist die Länge der Hypotenuse irrational, nämlich $= \sqrt{2}$. Die Kathete und die Hypotenuse haben nur kein gemeinschaftliches Maß, es gibt keine noch so kleine Maßeinheit, von der sowohl die Hypotenuse wie die Kathete ein ganzes Vielfaches wäre.

4. Imaginäre Zahlen, positive und negative:

$$\sqrt{-1}\ \text{ oder } i\,; \qquad -\sqrt{-1} = -i\,; \qquad \sqrt{-5}\ \text{ oder } 5\,i \quad \text{usw.}$$

---

[1]) ratio bedeutet das „Verhältnis", irrational sind Zahlen, die in keinem durch natürliche Zahlen genau angebbaren Verhältnis zu einer natürlichen Zahl stehen.

[2]) Vgl. S. 98.

Sie lassen sich auf keine Weise durch reelle Zahlen wiedergeben. Die Summe einer imaginären und einer rationalen Zahl nennt man eine komplexe Zahl, z. B. $a + bi$. Wenn zwei komplexe Zahlen einander gleich sind, so ist das nur möglich, wenn die reellen und die imaginären Anteile jede für sich einander gleich ist. Wenn

$$a + bi = c + di ,$$

so muß $a = c$, und $bi = di$ oder $b = d$ sein.

Die imaginären Zahlen treten bei der Lösung quadratischer Gleichungen in Erscheinung. Sie haben keine reelle Bedeutung, d. h. wenn die Lösung einer Gleichung zu einer imaginären Größe führt, so heißt das, daß diese Lösung objektiv nicht existiert. Rein mathematisch hat die Gleichung

$$x^3 - x^2 + x = 1$$

drei Lösungen:

$$x_1 = 1 ; \qquad x_2 = i ; \qquad x_3 = -i .$$

Sollte aber irgendein naturwissenschaftliches Problem auf obige Gleichung für x führen, so ist ihre einzige Lösung

$$x = 1 .$$

An einer einzigen Stelle (S. 236) werden wir durch die Einführung imaginärer Größen eine rechnerische Vereinfachung gewisser mathematischer Aufgaben erfahren und an dieser Stelle die Eigenschaften der imaginären Zahlen näher betrachten.

15. Die Regeln der Rechnungsarten.

Rechnungsarten erster Stufe: Addition und Subtraktion.

$$a + b = b + a$$
$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (-b) = a - b$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c .$$

Rechnungsarten zweiter Stufe: Multiplikation und Division.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot b + a \cdot c = a\,(b + c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a\,(b - c)$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

$$(+a) \cdot (+b) = +a\,b$$

$$(+a) \cdot (-b) = -a\,b$$

$$(-a) \cdot (+b) = -a\,b$$

$$(-a) \cdot (-b) = +a\,b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d)$$

oder

$$= (a + b)\,c + (a + b)\,d$$

$$= a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$$

$$\frac{(a + b)}{(c + d)} = \frac{a}{c + d} + \frac{b}{c + d}\,.$$

Rechnungsarten dritter Stufe: Potenzieren und Radizieren.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}.$$

Die Definition

$$a^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

hat ihre Begründung in folgender Überlegung.

Ausgehend von der Potenz a^n, finden wir den Wert der Potenz a^{n-1}, indem wir a^n durch a dividieren. Gehen wir z. B. von a^3 aus, so ist

$$a^2 = \frac{a^3}{a}$$

$$a^1 = \frac{a^2}{a} = a$$

$$a^0 = \frac{a^1}{a} = 1$$

$$a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{\frac{1}{a}}{a} = \frac{1}{a^2}$$

usw. Man präge sich demgemäß folgende Schreibweise ein, welche an Stelle der unübersichtlichen Zahlen mit vielen Nullen gebräuchlich ist:

$$\begin{aligned} 10^{-1} &= 0{,}1 \\ 10^{-5} &= 0{,}00001 \\ 2 \cdot 10^{-4} &= 0{,}0002 \\ 0{,}2 \cdot 10^{-4} &= 0{,}00002 \\ 0{,}35 \cdot 10^{-4} &= 0{,}000035 \\ 0{,}35 \cdot 10^{+4} &= 3500\,. \end{aligned}$$

Die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe haben je nur eine Umkehrung:

Addieren — Subtrahieren, Multiplizieren — Dividieren.

Die Rechnungsarten dritter Stufe haben zwei Umkehrungen:

Potenzieren — Radizieren — Logarithmieren,

z. B.

$$10^2 = 100\,; \quad \sqrt[2]{100} = 10\,; \quad \log^{10} 100 = 2\,.$$

16. Logarithmen.

Wenn $10^2 = 100$, so ist

$\log^{10} 100 = 2$ (sprich: Logarithmus von 100 für die Basis 10). Wo keine besondere Aufgabe über die Basis gemacht ist, wird stets die Basis 10 angenommen.

$\log 1$	$= 0$	$\log 0{,}1$	$= \log 10^{-1} = -1$
$\log 10$	$= 1$	$\log 0{,}0001$	$= \log 10^{-4} = -4$
$\log 100$	$= 2$	$\log 0{,}00001$	$= \log 10^{-5} = -5$
$\log 100\,000$	$= 5$	log(1, davor n Nullen, einschließlich der Null vor dem Komma)	$= \log 10^{-n} = -n$.
log(1 mit n Nullen)	$= n$		

Wenn $\log^{10} 20 = 1{,}30103$ ist, so ist 20 der Numerus, 1 die Kennziffer, 30103 die Mantisse.

Der Numerus zu

$$\begin{aligned} 0{,}30103 &= 2 \\ 1{,}30103 &= 20 \\ 2{,}30103 &= 200 \\ 0{,}30103 - 1 &= 0{,}2 \\ 0{,}30103 - 3 &= 0{,}002 \\ -0{,}30103\,(= +0{,}698\,97 - 1) &= 0{,}5 = 5 \cdot 10^{-1} \\ -2{,}30103\,(= +0{,}698\,97 - 3) &= 0{,}005 = 5 \cdot 10^{-3} \\ -4{,}30103\,(= +0{,}698\,97 - 5) &= 0{,}00005 = 5 \cdot 10^{-5}\,. \end{aligned}$$

Der Numerus eines Logarithmus ist aus den Logarithmentafeln nur dann zu ersehen, wenn der Logarithmus eine positive Mantisse hat. Negative Logarithmen müssen daher erst in positiven Mantissen mit negativer Kennziffer verwandelt werden. Z. B. $-2{,}54123$ wird erst verwandelt in $+0{,}45877-3$. Ist die Kennziffer $+n$, so enthält der Numerus $n+1$ Stellen vor dem Komma. Ist die Kennziffer $-n$, so enthält der Numerus n Nullen vor der ersten Ziffer, und hinter der ersten Null steht das Komma.

$$\begin{aligned}
\log(a\cdot b) &= \log a + \log b \\
\log(a:b) &= \log a - \log b \\
\log(a^n) &= n\cdot\log a \\
\log\sqrt[n]{a} &= \frac{1}{n}\cdot\log a \\
\log\frac{1}{a} &= -\log a\,.
\end{aligned}$$

17. Das Interpolieren.

Gesucht sei $\log 2{,}061\,4$.

In den 5stelligen Logarithmentafeln findet sich:

$$\begin{aligned}
\log 2{,}061 &= 0{,}31408 \\
\log 2{,}062 &= 0{,}31419\,.
\end{aligned}$$

Der gesuchte Logarithmus liegt zwischen diesen beiden. Wir können nun ohne merklichen Fehler annehmen, daß das Anwachsen des Logarithmus in einem so kleinen Intervall wie von 0,31408 bis 0,31429 gleichförmig mit dem Numerus erfolgt. Wenn der Numerus von 2,061 bis 2,062 wächst, also um 1 Einheit der 4. Stelle (d. h. hier der 3. Dezimalen) oder um 10 Einheiten der 5. Stelle (d. h. hier der 4. Dezimalen), so wächst der Logarithmus im ganzen um 0,00021. Also wächst er für 1 Einheit der 5. Stelle (der 4. Dezimalstelle) um 0,000021, daher für 4 Einheiten dieser Stelle um $4\cdot 0{,}000021 = 0{,}000084$ oder abgekürzt um 0,000 08. Daher ist

$$\log 2{,}061\,4 = 0{,}31416\,.$$

Gesucht sei der Numerus zu 1,73040.

Man findet aus der Tafel

$$\begin{aligned}
\text{num}\cdot\log 1{,}730\,38 &= 53{,}75 \\
\text{num}\cdot\log 1{,}730\,46 &= 53{,}76\,.
\end{aligned}$$

Die ganze Differenz der Logarithmen ist 0,00008, also entspricht einem Zuwachs des Logarithmus um 8 Einheiten der 5. Mantissenstelle ein Zuwachs von einer Einheit der 4. Numerusstelle, daher ein Zuwachs des Logarithmus um je 1 Einheit der 5. Mantissenstelle einem Zuwachs von $\frac{1}{8}$ Einheit der 4. Numerusstelle, ein Zuwachs von 2 Einheiten der 5. Mantissenstelle daher einem Zuwachs von $\frac{2}{8} = 0{,}25$ Einheiten der 4. Numerusstelle oder 2,5 Einheiten der 5. Numerusstelle. Es ist also

$$\text{num} \cdot \log 1{,}730\,40 = 53{,}7525 \,.$$

Beispiele zur Anwendung der Logarithmen.

I. Addition und Subtraktion zweier Zahlen kann durch Rechnen mit Logarithmen nicht vereinfacht werden.

II. Multiplikation und Division zweier Zahlen wird durch Logarithmen dadurch vereinfacht, daß diese Rechnungsarten auf die Addition bzw. Subtraktion der Logarithmen zurückgeführt werden können.

Beispiele.

1.
$$\begin{aligned}
x &= 2 \cdot 3 \\
\log x &= \log 2 + \log 3 \\
&= 0{,}30103 \\
&+ \underline{0{,}47712} \\
\log x &= 0{,}77815 \\
x &= 6 \,.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
x &= 142{,}3 \cdot 0{,}00041 \\
\log x &= \log 142{,}3 \quad = 2{,}15320 \\
&+ \log 0{,}00041 = \underline{0{,}61278 - 4} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad 2{,}76598 - 4 \\
&\qquad\qquad \text{oder} \quad 0{,}76598 - 2 \\
x &= 0{,}05833 \,.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
x &= \frac{1{,}2}{0{,}00244} \\
\log x &= \log 1{,}2 \qquad = 0{,}07918 \qquad = \quad 1{,}07918 - 1 \\
&- \log 0{,}00244 = \qquad\qquad\quad = -\underline{(0{,}38739 - 3} \\
\log x &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; = \quad 0{,}69179 + 2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \quad 2{,}69179 \\
x &= 491{,}8 \,.
\end{aligned}$$

4. $$x = \frac{2{,}40 \cdot 10^{-5}}{0{,}84 \cdot 10^{-14}}$$

$$\begin{aligned}
\log x &= \log(2{,}40 \cdot 10^{-5}) \\
&= \quad \log 2{,}40 = 0{,}38021 \\
&\quad\; +\log 10^{-5} = \underline{-5 \qquad\quad} \\
&\qquad\qquad\quad = \qquad\qquad 0{,}38021 - 5 \\
&\quad\; -\log(0{,}84 \cdot 10^{-14}) \\
&= -\begin{bmatrix} \log 0{,}84 \\ +\log 10^{-14} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0{,}92428 - 1 \\ \underline{-14 \qquad\qquad} \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad\quad = \qquad\qquad 0{,}92428 - 15
\end{aligned}$$

$$\log x = \left.\begin{matrix} 0{,}38021 - 5 \\ -\, 0{,}92428 - 15 \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 1{,}38021 - 6 \\ \underline{-\,(0{,}92428 - 15)} \\ 0{,}45593 + 9 \end{matrix}$$

$$x = 2{,}8571 \cdot 10^{+9} = 285\,710\,000\,.$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß der erhaltene Wert auf 4 Stellen genau, die fünfte Stelle schon durch Interpolation gewonnen ist und die angehängten Nullen zwar einen Stellenwert, nicht aber einen Ziffernwert haben. Der genaue Wert wäre nämlich

$$285\,714\,285{,}714\,285\,.\,.\,.\,.\,.$$

5. $$x = \frac{1{,}4 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}6}{14{,}3 \cdot 12{,}6 \cdot 100}$$

$$\begin{aligned}
\log x = \;& \log 1{,}4 && = +0{,}14613 \\
& +\log 2{,}3 && = +0{,}36173 \\
& +\log 2{,}6 && = +0{,}41497 \\
& +\log \frac{1}{14{,}3} = [-\log 14{,}3 = -1{,}15534] && = +0{,}84465\,^{1)} - 2 \\
& +\log \frac{1}{12{,}6} = [-\log 12{,}6 = -1{,}10037] && = +0{,}89963 \quad - 2 \\
& +\log \frac{1}{100} = [-\log 100 \;\; = -2 \qquad\quad] && = \underline{+0 \qquad\qquad - 2} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \log x && = \quad 2{,}66711 \quad - 6 \\
& && = \quad 0{,}66711 \quad - 4
\end{aligned}$$

$$x = 0{,}00046453\,.$$

III. **Potenzieren** und **Radizieren** wird durch Logarithmen dadurch vereinfacht, daß diese Rechnungsarten auf eine Multiplikation bzw. Division zurückgeführt werden.

---

[1]) 84 465 entsteht aus 12 534, indem man jede einzelne Ziffer zu 9 ergänzt, die letzte zu 10.

Beispiele:

1. $$x = \sqrt[3]{8{,}2}$$
$$\log x = \tfrac{1}{3} \cdot \log 8{,}2 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}91381 = 0{,}30460$$
$$x = 2{,}0165\,.$$

2. $$x = 2^8$$
$$\log x = 8 \cdot \log 2 = 8 \cdot 0{,}30103 = 2{,}40824$$
$$x = 256\,.$$

3. $$x = \sqrt{0{,}0041}$$
$$\log x = \tfrac{1}{2} \cdot \log 0{,}0041 = \tfrac{1}{2} \cdot (0{,}61278 - 3)$$

Jetzt wird die Kennziffer durch 2 teilbar gemacht: $= \tfrac{1}{2} \cdot (1{,}61278 - 4)$
$$= \quad 0{,}80139 - 2$$
$$x = 0{,}063298 \quad \text{oder} \quad 0{,}063299\,.$$

4. $$x = \sqrt[3]{0{,}6^2} = 0{,}6^{\frac{2}{3}}$$
$$\log x = \tfrac{2}{3} \cdot \log 0{,}6 = \tfrac{2}{3} \cdot (0{,}77815 - 1),$$

Gang der Rechnung:

a) Multiplikation mit 2 $= \tfrac{1}{3}(1{,}55630 - 2)$

b) Kennziffer wird durch 3 teilbar gemacht $= \tfrac{1}{3}(2{,}55630 - 3)$

c) Division durch 3 $= \quad 0{,}85210 - 1$
$$x = 0{,}71138 \quad \text{oder} \quad 0{,}71139\,.$$

5) $$x = \sqrt[5]{10}$$
$$\log x = \tfrac{1}{5} \cdot \log 10 = \tfrac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}20000$$
$$x = 1{,}5849\,.$$

18. Beziehung der verschiedenen Logarithmensysteme zueinander.

Neben dem dekadischen Logarithmensystem, welches im praktischen Rechnen allein angewendet wird, spielt in der Mathematik das sog. natürliche Logarithmensystem die wichtigste Rolle. Während die Basis der dekadischen Logarithmen 10 ist, ist die Basis der natürlichen Logarithmen die Zahl $e = 2{,}71\,828$. Warum gerade diese Zahl gewählt worden ist, werden wir erst später verstehen (S. 99). Wenn der dekadische Logarithmus der Zahl x bekannt ist ($\log x$), kann man den natürlichen Logarithmus von x, $\ln x$, daraus berechnen und umgekehrt. Ist $\log x = a$, so folgt daraus, daß $10^a = x$. Nun können wir eine gewisse Zahl p bestimmen, welche derartig beschaffen ist, daß $e^p = 10$. Diese Zahl p ist $= 2{,}302585$. Dann ist $(e^p)^a = x$ oder $e^{p \cdot a} = x$. Daraus folgt: $\ln x = p \cdot a$ oder $\ln x = p \cdot \log x$. Der natürliche Logarithmus jeder Zahl kann also aus dem dekadischen durch Multiplikation mit 2,3026 berechnet werden. Umgekehrt wird der dekadische Logarithmus jeder Zahl aus dem natürlichen durch Division mit 2,3026 bzw. durch Multiplikation mit 0,43429 erhalten. Die Zahl 2,3026 heißt der **Modulus** des natürlichen Logarithmensystems.

19. Kombinationslehre.

Eine Anzahl Elemente **permutieren** heißt, sie in alle mögliche Reihenfolgen bringen. So sind die Permutationen der drei Elemente a, b, c:

$$abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\ cab,\quad cba.$$

Die mögliche Anzahl der Permutationen von n Elementen ist $= n!$ (Sprich: n Fakultät.)

$$\begin{aligned}
1! & & &= 1\\
2! &= 1\cdot 2 &&= 2\\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3 &&= 6\\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 &&= 24\\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 &&= 120
\end{aligned}$$

usw.

Sind unter den zu permutierenden Elementen zwei oder mehrere gleich, so verringert sich die Zahl der Permutationen, z. B. aus den 3 Elementen a, a, b lassen sich nur folgende Permutationen herstellen:

$$aab,\quad aba,\quad baa.$$

Im allgemeinen ist die Zahl der möglichen Permutationen aus n Elementen, wobei α gleiche Elemente der einen Sorte, β gleiche Elemente einer zweiten Sorte, γ einer dritten ... vorhanden sind, gleich

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

Eine Anzahl von Elementen **kombinieren**, heißt von diesen Elementen, insgesamt n an der Zahl, eine bestimmte Anzahl p **ohne Rücksicht auf die Reihenfolge** zusammenzustellen.

Wenn von n Elementen p zusammengestellt werden, so nennt man das eine Kombination der p ten Klasse: $C_{(n)}^p$. So sind für die 4 Elemente a, b, c, d Kombinationen

1. Klasse:	a,	b,	c,	d,		
2. „	ab,	ac,	ad,	bc,	bd,	cd,
3. „	abc,	abd,	acd,	bcd,		
4. „	$abcd$.					

Im allgemeinen ist die Anzahl der Kombinationen von n Elementen der p ten Klasse:

$$C_{(n)}^p = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p},$$

also z. B.

$$C_{(4)}^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6,$$

$$C_{(4)}^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4,$$

$$C_{(4)}^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1.$$

Man schreibt den Bruch $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ auch $\binom{4}{3}$ (sprich: „4 über 3“).

So bedeutet also z. B.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2},$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Demnach schreibt man auch $C_{(n)}^p = \binom{n}{p}$ (sprich: n über p).

Der binomische Lehrsatz. Diese Kombinationszahlen haben eine hohe Bedeutung, weil die **Binomialkoeffi-**

zienten durch sie ausgedrückt werden können. Es ist nämlich

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 \ldots + b^n.$$

Also z. B.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\,,$$
$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4\,, + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}\,.$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen kann man sich durch schrittweises Ausmultiplizieren der Potenzen von $(a+b)$ überzeugen.

20. Gleichungen mit einer Unbekannten.

x sei die Unbekannte, $a, b, c \ldots$ bekannte Größen.

1. $ax + b = c$ Gang der Rechnung:

$$x + \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$$ (Division der ganzen Gleichung durch den Koeffizienten, mit dem x behaftet ist.)

$$x = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$ (Die neben x stehengebliebenen Glieder[1]) werden unter Wechsel des Vorzeichens auf die andere Seite gebracht.)

2. Quadratische Gleichungen.

a) Vollständige:

I. $x^2 = a\,.$

Resultat: $x = \pm\sqrt{a}\,.$

---

[1]) Unter den „Gliedern“ versteht man diejenigen einzelnen Ausdrücke, welche durch ein + oder — Zeichen miteinander verbunden sind. Z. B. sind die Glieder der Formel

$$a + b \cdot c - d \cdot e$$

erstens a, zweitens $b \cdot c$, drittens $d \cdot e$.

II. $$x^2 + 2ax + a^2 = b\,,$$
$$(x + a)^2 = b\,,$$
$$x + a = \pm\sqrt{b}\,,$$
$$x = -a \pm \sqrt{b}\,.$$

b) Unvollständige:

$$x^2 + ax + b = 0\,.$$

(Auf diese Form läßt sich jede quadratische Gleichung bringen, indem man sie nötigenfalls durch den Koeffizienten, mit dem x^2 behaftet ist, dividiert.)

Lösung: Man schreibe

$$x^2 + ax = -b\,.$$

Man vervollständige die linke Seite zu einem Quadrat, indem man $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ dazu addiert. Dasselbe muß man natürlich auch rechts addieren:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -b + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = -b + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$
$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\,.$$

Es empfiehlt sich, diese Formel dem Gedächtnis einzuprägen.

Entsprechend ergibt

$$x^2 - ax + b = 0$$

die Lösung

$$x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\,.$$

Beispiele:

1. $$x^2 - 4x + 3 = 0\,,$$
$$x_1 = 1\,,\quad x_2 = 3\,.$$

2.
$$x^2 + 3x + \tfrac{5}{2} = 0\,,$$
$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}}$$
oder
$$-\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\,.$$

Diese Wurzeln sind imaginär, d. h. es gibt keinen reellen Wert von x, welcher dieser Gleichung genügt.

Die quadratische Gleichung selbst läßt sich stets in zwei Faktoren zerlegen von der Form $(x - x_1)(x - x_2)$.

Z. B. Gleichung 1:

$$(x^2 - 4x + 3) = (x - 1)(x - 3) = 0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn entweder $x = 1$ oder $= 3$ ist.

Gleichung 2:

$$x^2 + 3x + \tfrac{5}{2} = (x + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} i)(x + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} i) = 0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $x = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} i$ ist.

21. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Wenn n Unbekannte gegeben sind, so bedarf es zu ihrer eindeutigen Definition n voneinander unabhängiger Gleichungen, also für zwei Unbekannte x und y bedarf es zweier Gleichungen:

$$ax + by = c\,, \tag{1}$$
$$dx + ey = f\,. \tag{2}$$

Lösung: a) durch Elimination:

Aus (1) folgt:

$$ax = c - by\,,$$
$$x = \frac{c - by}{a}\,.$$

Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung ein,

$$d\frac{(c - by)}{a} + ey = f,$$

so hat man eine einfache Gleichung für y, dessen Wert sich jetzt ermitteln läßt:

$$\frac{dc}{a} - \frac{dby}{a} + ey = f\,,$$

$$y\left(e - \frac{db}{a}\right) = f - \frac{dc}{a}\,,$$

$$y = \frac{f - \dfrac{dc}{a}}{e - \dfrac{db}{a}}\,. \tag{3}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, so erhält man x.

Z. B. $\quad 2x + 5y = 19\,,\quad a = 2\,,\quad c = 19\,,\quad e = 2\,,$

$\qquad 3x + 2y = 12\,,\quad b = 5\,,\quad d = 3\,,\quad f = 12\,.$

Nach (3) ist

$$y = \frac{12 - \dfrac{3 \cdot 19}{2}}{2 - \dfrac{3 \cdot 5}{2}} = 3\,,$$

$$x = 2\,.$$

b) In geeigneten Fällen kann man die eine oder beide Gleichungen mit je einem geeigneten Faktor multiplizieren, so daß nach Addition oder Subtraktion beider Gleichungen x oder y fortfällt, z. B.

$$2x + 5y = 19\,, \tag{1}$$

$$3x + 2y = 12\,. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit 3, (2) mit 2, so ist

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = 57 \\ \underline{6x + 4y = 24} \end{array}$$

Durch Subtraktion: $\qquad 11y = 33$

$$y = 3\,.$$

Dieses in (1) eingesetzt gibt $x = 2$.

22. Transzendente Gleichungen.

Die Gleichung

$$\log x = 0{,}30103$$

läßt sich mit den Mitteln der elementaren Mathematik nicht auf irgendeine allgemein gültige Methode nach x auflösen. Wir wissen mit Hilfe der Logarithmentafeln, daß $x = 2$ ist, haben aber kein rechnerisches Mittel, sie zu lösen.

Noch weniger haben wir ein Mittel, die Gleichung zu lösen:

$$x + \log x = 2 .$$

Wir können diese Gleichung nur durch Probieren annähernd lösen. Versuchen wir z. B. $x = 1$ zu setzen, ist $x + \log x = 1$, die Gleichung entspricht also nicht der Bedingung. Setzen wir $x = 10$, so ist

$$x + \log x = 10 + 1 = 11 .$$

Im ersten Fall war der willkürlich eingesetzte Wert zu klein, im zweiten Fall zu groß. Er muß also zwischen 1 und 10 liegen.

Probieren wir die dazwischenliegenden Werte aus, so ist

für x	$x + \log x$
1	1
2	2,30103
3	3,47712 .

Wir sehen also, daß x zwischen 1 und 2 liegen muß, damit $x + \log x = 2$ werde. Probieren wir weiter, so ist

für x	$x + \log x$
1,6	1,80412
1,7	1,93045
1,8	2,05527 .

Probieren wir zwischen 1,7 und 1,8 weiter:

für x	$x + \log x$
1,72	1,95553
1,74	1,98055
1,75	1,99304
1,76	2,00551 .

Und so können wir zwischen 1,75 und 1,76 weiter probieren, bis der gewünschte Grad von Genauigkeit erreicht ist.

Wenn in einer Gleichung die Unbekannte als log, sin, cos, tg, ctg oder als Exponent vorkommt, so befinden wir uns stets in dieser Lage. Wir nennen diese Gleichungen transzendente Gleichungen.

Befindet sich in der Gleichung das x nur hinter dem Logarithmuszeichen, so haben wir in den Logarithmentafeln ein einfaches Mittel zur Lösung. Befindet sich aber ein Multiplum von x als besonderes Glied neben dem Logarithmus von x, so bleibt nur Probieren übrig, wozu wir die Logarithmentafeln natürlich auch benötigen.

III. Trigonometrie.

23. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC sei α der rechte Winkel, a die Hypotenuse, b und c die Katheten. Da alle rechtwinkligen Dreiecke, welche in je einem ihrer spitzen Winkel übereinstimmen, einander ähnlich sind, so muß das Verhältnis je zweier entsprechender Seiten in solchen Dreiecken gleich sein. Man definiert nun

$$\sin\beta = \frac{b}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}.$$

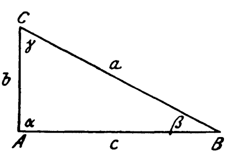

Fig. 25.

Der Sinus und Kosinus kann nur zwischen 0 und 1 liegen, tg und ctg können jeden Wert annehmen. Aus dem Pythagoras folgt:

$$(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1,$$

oder auch geschrieben:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1,$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta, \qquad \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta,$$

$$\sin\beta = \cos\gamma, \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\gamma,$$

$$\sin 0^0 = 0, \qquad \cos 0^0 = 1,$$

$$\sin 90^0 = 1, \qquad \cos 90^0 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 0^0 = 0, \qquad \operatorname{ctg} 0^0 = \infty,$$

$$\operatorname{tg} 90^0 = \infty, \qquad \operatorname{ctg} 90^0 = 0.$$

Bei der Darstellungsweise der Fig. 26 ist $\sin\alpha = \dfrac{AB}{AC}$ usw.

$AC = r =$ Radius des Kreises.

Wählen wir r so groß, daß es gleich der Längeneinheit wird, so ist einfach

$$\sin\alpha = AB\,,$$
$$\cos\alpha = BC\,.$$

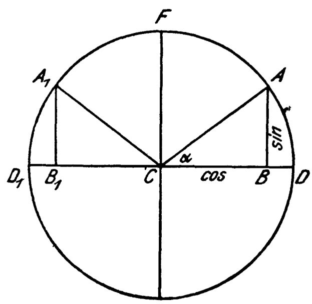

Fig. 26.

In der höheren Mathematik mißt man die Winkel nicht nach Graden, sondern nach der Länge des Bogens, den sie von dem Kreise mit Radius $r = 1$ abschneiden.

$$\sphericalangle 0^0 = 0\,, \qquad \sphericalangle 270^0 = \tfrac{3}{2}\pi\,,$$
$$\sphericalangle 90^0 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \sphericalangle 360^0 = 2\pi\,,$$
$$\sphericalangle 180^0 = \pi\,, \qquad \sphericalangle 720^0 = 4\pi\,,$$
$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1CD &= 90^0 + \sphericalangle A_1CF \\ &= 180^0 - \sphericalangle A_1CD_1\,, \end{aligned}$$
$$\sin\sphericalangle A_1CD = A_1B_1 = AB\,,$$
$$\cos\sphericalangle A_1CD = CB_1 = CB$$

letzteres aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

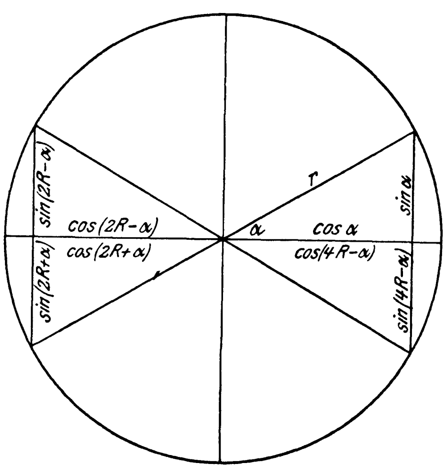

Fig. 27.

Also (vgl. dazu Fig. 27):

$$\begin{aligned} \sin(2R - \alpha) &= \sin\alpha\,, \\ \cos(2R - \alpha) &= -\cos\alpha\,, \\ \operatorname{tg}(2R - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha\,, \\ \operatorname{ctg}(2R - \alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha\,. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \sin(2R + \alpha) &= -\sin\alpha\,, \\ \cos(2R + \alpha) &= -\cos\alpha\,, \\ \operatorname{tg}(2R + \alpha) &= +\operatorname{tg}\alpha\,, \\ \operatorname{ctg}(2R + \alpha) &= +\operatorname{ctg}\alpha\,, \\ \sin(4R - \alpha) &= -\sin\alpha\,, \\ \cos(4R - \alpha) &= \cos\alpha\,, \\ \operatorname{tg}(4R - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha\,, \\ \operatorname{ctg}(4R - \alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha\,. \end{aligned}$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ABC ist (Fig. 25)

$$b = a \cdot \sin\beta\,,$$
$$c = a \cdot \cos\beta\,,$$
$$b = c \cdot \operatorname{tg}\beta\,,$$
$$c = b \cdot \operatorname{ctg}\beta\,,$$
$$a = \frac{b}{\sin\beta}\,,$$
$$a = \frac{c}{\cos\beta}\,.$$

24.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \tag{1}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,, \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \tag{3}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,. \tag{4}$$

Als Beispiel für die Art der Beweisführung dieser Sätze werde $\sin\alpha + \sin\beta$ geometrisch entwickelt (Fig. 28).

$$\sphericalangle AOB \text{ sei } \alpha\,, \qquad \sphericalangle BOC \text{ sei } \beta\,.$$

Man halbiere $\sphericalangle AOC = (\alpha + \beta)$, dann ist

$$\sphericalangle AOG = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

und

$$\sphericalangle GOB = \left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Nun ist, wenn der Radius $OA = 1$ gesetzt wird,

$$\sin\alpha = AD\,, \qquad \sin\beta = CH\,.$$

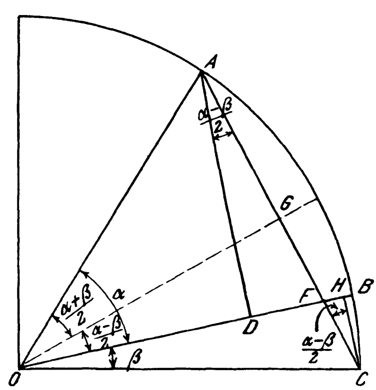

Fig. 28.

Nun ist

$$AD = AF \cdot \cos\sphericalangle DAF\,,$$
$$CH = FC \cdot \cos\sphericalangle HCF\,.$$

Da

$$\sphericalangle DAF = HCF = GOB = \frac{\alpha - \beta}{2}\,,$$

(weil $\sphericalangle DAF$ ebenso wie $\sphericalangle GOB = 1\,R - \sphericalangle GFO$ ist und $\sphericalangle HCF$ ebenso wie $\sphericalangle GOB = 1\,R - \sphericalangle GFD$ bzw. HFC ist), so ist

$$AD + CH = \sin\alpha + \sin\beta = (AF + FC)\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,.$$

Nun ist

$$AF + FC = AC = 2 \cdot AG = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\,,$$

also

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,.$$

Auf ähnliche Weise werden die Werte für $\cos\alpha + \cos\beta$ usw. entwickelt.

Setzen wir in Gleichung (1) und (2)

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = u \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha - \beta}{2} = v\,,$$

so wird

$$\alpha = u + v \qquad \text{und} \qquad \beta = u - v$$

und

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2\sin u \cdot \cos v\,,$$
$$\sin(u + v) - \sin(u - v) = 2\sin v \cdot \cos u\,.$$

Hieraus erfolgt durch Addition:

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v\,,$$
$$\sin(u - v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v\,,$$

und ähnlich läßt sich aus Gleichung (3) und (4) erweisen, daß

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v\,,$$
$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v\,.$$

25. Einige Beispiele für die Anwendung der elementaren Mathematik.

1. Wieviel Gramm Zucker sind in 14 ccm einer 4,2 proz. Zuckerlösung enthalten?

Der Ansatz ist

$$4{,}2 : 100 = x : 14\,,$$

$$x = \frac{4{,}2 \cdot 14}{100} = 0{,}588\,\mathrm{g}.$$

2. Ein Quadrat enthält soviel qcm, wie sein Umfang cm mißt. Wie groß ist die Seite dieses Quadrates?

Ist x diese Seite, so ist

$$x^2 = 4\,x\,,$$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 4\,.$$

3. Ein Quadrat enthält 12 qcm mehr, als sein Umfang cm beträgt. Wie groß ist die Seite des Quadrates?

$$x^2 - 12 = 4\,x\,,$$

$$x_1 = 6\,;$$

($x_2 = -2$ hat keine geometrische Bedeutung).

4. Wie groß ist die Kathete eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $= 1$ ist.

Lösung:

Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist

$$2\,x^2 = 1\,,$$

also

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}70694\,.$$

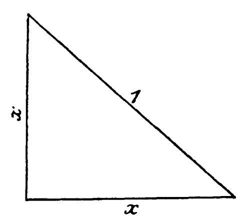

Fig. 29.

5. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks, dessen Kathete $= 1$ ist?

Lösung:

$$= \sqrt{2} = 1{,}4142\,.$$

6. Ein Meßzylinder hat eine Höhe von 10 cm und einen Inhalt von 20 ccm. Wie groß ist der Durchmesser des Zylinders?

7. Die Wasserstoffionenkonzentration, $[H^{\cdot}]$, einer Essigsäurelösung von der Konzentration c zu berechnen, wo c, wie immer in der physikalischen Chemie, in Gramm-Mol pro Liter ausgedrückt ist.

Die Essigsäure dissoziiert nach dem Massenwirkungsgesetz unter Hinzuziehung der Theorie der elektrolytischen Dissoziation von Arrhenius in folgender Weise:

$$CH_3COOH = CH_3COO' + H^{\cdot} \tag{1}$$

oder kürzer: $$\underset{\text{Essigsäure}}{EH} = \underset{\text{Acetation}}{E'} + \underset{\text{Wasserstoffion}}{H^{\cdot}}$$

Daraus folgt nach dem Massenwirkungsgesetz

$$k \cdot [EH] = [E'] \cdot [H^{\cdot}], \tag{2}$$

oder da in einer reinen Essigsäurelösung

$$[E'] = [H^{\cdot}]$$

ist,

$$k[EH] = [H^{\cdot}]^2. \tag{2a}$$

Hier bedeuten die Klammern [] die Konzentration der eingeklammerten Molekülgattung, immer in Gramm-Mol. pro Liter ausgedrückt[1]). Wenn wir eine bestimmte Menge Essigsäure, $\bar{E}$, in Wasser lösen, so zerfällt diese zum Teil in die Ionen, zum anderen Teil bleibt sie undissoziiert. Es muß natürlich

$$[EH] + [E'] = [\bar{E}] \tag{3}$$

sein, oder

$$[EH] = [\bar{E}] - [E']$$

oder ebensogut

$$[EH] = [\bar{E}] - [H^{\cdot}], \tag{4}$$

denn $[H^{\cdot}]$ muß $= [E']$ sein.

Setzen wir das in (2a) ein, so ist

$$k \cdot ([\bar{E}] - [H^{\cdot}]) = [H^{\cdot}]^2$$

$$k \cdot [\bar{E}] - k \cdot [H^{\cdot}] = [H^{\cdot}]^2$$

$$[H^{\cdot}]^2 + k[H^{\cdot}] - k[\bar{E}] = 0.$$

Durch Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich

$$[H^{\cdot}] = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + k \cdot [\bar{E}]}.$$

Von den beiden mathematisch möglichen Lösungen hat physikalisch nur die mit dem $+$-Zeichen einen Sinn, da $[H^{\cdot}]$ niemals negativ werden kann.

---

[1]) Ein Ausdruck wie $[H^{\cdot}]$ u. dgl. bedeutet also nur eine Zahl, nicht eine Sache! Er entspricht den Zahlensymbolen der Algebra. Dagegen bedeutet in Gleichung (1) ein Ausdruck wie $H^{\cdot}$ das Wasserstoffion selbst.

k ist für Essigsäure (bei 18° C) $1{,}86 \cdot 10^{-5}$. Setzen wir $[\mathrm{E}] = 1$, d. h. haben wir eine $^1/_1$n-Essigsäure vor uns, so ist

$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = -0{,}93 \cdot 10^{-5} + \sqrt{(0{,}93 \cdot 10^{-5})^2 + 1{,}86 \cdot 10^{-5}}$$

oder

$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = -0{,}93 \cdot 10^{-5} + \sqrt{0{,}86 \cdot 10^{-10} + 1{,}86 \cdot 10^{-5}}$$
$$= -0{,}93 \cdot 10^{-5} + \sqrt{(0{,}0000086 + 1{,}86) \cdot 10^{-5}}$$
$$= -0{,}93 \cdot 10^{-5} + \sqrt{1{,}8600 \cdot 10^{-5}}$$

(wenn wir nämlich nur mit 5ziffrigen Zahlen rechnen wollen.)

$$= 0{,}93 \cdot 10^{-5} + \sqrt{18{,}600} \cdot \sqrt{10^{-6}}$$
$$= 0{,}93 \cdot 10^{-5} + 4{,}1940 \cdot 10^{-3}$$
$$= (0{,}0093 + 4{,}3128) \cdot 10^{-3}$$
$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = 4{,}3221 \cdot 10^{-3}$$

d. h. in 1 Liter norm. Essigsäure sind 0,0043221 g $\mathrm{H}^{\cdot}$-Ionen.

Zu diesem Resultat können wir nun noch einfacher kommen, wenn wir einen kleinen absichtlichen Fehler begehen; einen so kleinen, daß er erst in den späteren Dezimalen zur Geltung kommt. Diese Art der Näherungsrechnung kommt sehr häufig vor, und es kann dieses Beispiel als ein typisches betrachtet werden.

Gehen wir zurück zur Gleichung (2a):

$$k \cdot [\mathrm{EH}] = [\mathrm{H}^{\cdot}]^2 \tag{2a}$$

und beachten wieder, daß

$$[\mathrm{EH}] = [\overline{\mathrm{E}}] - [\mathrm{H}^{\cdot}] \tag{4}$$

ist. Wie wir nun aus dem definitiven Resultat der fertigen Rechnung sehen, und wie wir schon an sich vermuten konnten, ist in einer $^1/_1$n-Essigsäurelösung $[\mathrm{H}^{\cdot}]$ ganz außerordentlich klein gegenüber $[\overline{\mathrm{E}}]$; während nämlich

$$[\overline{\mathrm{E}}] = 1\,,$$

ist

$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = 0{,}0043\,.$$

Wir begehen also nur einen minimalen Fehler, wenn wir (4) in verkürzter Form schreiben:

$$[\mathrm{EH}] = [\overline{\mathrm{E}}]\,. \tag{5}$$

Setzen wir dieses angenäherte Resultat in (2a) ein, so ist

$$k[\overline{\mathrm{E}}] = [\mathrm{H}^{\cdot}]^2 \tag{6}$$

oder

$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = \sqrt{k \cdot [\overline{\mathrm{E}}]}\,. \tag{7}$$

Für unseren Fall, wo

$$[\bar{E}] = 1\,,$$

ist also

$$[H^\cdot] = \sqrt{1{,}86 \cdot 10^{-5}} = \sqrt{18{,}6} \cdot \sqrt{10^{-6}}$$

$$[H^\cdot] = 4{,}3128 \cdot 10^{-3}\,.$$

Vorher hatten wir bei der genaueren Rechnung gefunden

$$[H^\cdot] = 4{,}3221 \cdot 10^{-3}\,.$$

Die beiden Resultate unterscheiden sich also nur um etwa $^1/_4\,^0/_0$ des Gesamtwertes, was für die allermeisten Untersuchungen schon kaum mehr in Frage kommt.

Es ist also allgemein für schwache Säuren, d. h. für Säuren mit einer Dissoziationskonstante etwa von 10^{-3} abwärts, angenähert

$$[H^\cdot] = \sqrt{k \cdot [\text{Säure}]}$$

und für schwache Basen

$$[OH'] = \sqrt{k \cdot [\text{Base}]}\,.$$

8. Ein in P befindlicher Körper, welcher die Masse 1 besitzt, sei in der Höhe h über dem Punkt A. Es sei nun PAB ein solider Körper, welcher das direkte Herabfallen von P nach A verhindert, so daß der Körper nur auf der schiefen Linie PB herabgleiten kann. Er hat dann beim Eintreffen in B die Höhe des Punktes A erreicht, wenn AB eine Horizontale darstellt. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie muß nun die Arbeit die gleiche sein, ob der Körper P auf dem Wege PA oder PB die Horizontale AB erreicht. Denn da die (reibungslose) horizontale Bewegung des Körpers von A nach B keine Arbeit erfordert, so ist die Arbeit bei der Zurücklegung der Strecke PB die gleiche wie die bei der Zurücklegung der Strecke PAB. Wäre nämlich z. B. die Arbeit, die der Körper auf der Strecke PB leistet, größer als

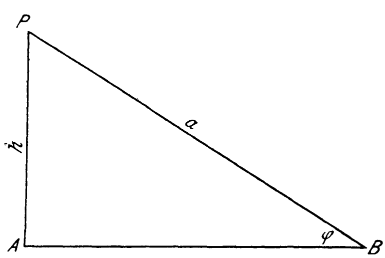

Fig. 30.

die andere, so brauchte man den Körper nur auf dem Wege PB fallen zu lassen und auf dem anderen Wege PAB zu heben, und man würde so einen Arbeitsgewinn nach Abschluß dieses Kreisprozesses haben, den man bei beliebiger Wiederholung des ganzen Vorgangs ins Ungemessene steigern könnte, d. h. man hätte ein Perpetuum mobile, dessen Möglichkeit aller Erfahrung widerspricht.

Es ist also die Arbeit, den der Massenpunkt P beim Fallen nach A oder beim Gleiten nach B leistet, dieselbe. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Kraft zu berechnen, mit welcher der Körper von P nach B gleitet.

Die Arbeit, die die Masse 1 leistet, wird gemessen als das Produkt der Kraft und des Weges. Die Kraft beim senkrechten Fall nach A ist die Schwerkraft g, und der Weg ist h, also ist die Arbeit A_1 beim senkrechten Fall

$$A_1 = g \cdot h .$$

Die gesuchte Kraft auf dem Weg PB sei x; der Weg PB selbst sei $= a$. Dann ist die Arbeit A_2 auf dem Gleitwege

$$A_2 = x \cdot a .$$

Da nun

$$A_1 = A_2 ,$$

so ist

$$g \cdot h = x \cdot a$$

oder

$$x = g \cdot \frac{h}{a} = g \cdot \sin\varphi .$$

Wenn also ein Körper unter dem Neigungswinkel φ gleitet, so wirkt auf ihn eine „Komponente der Schwerkraft“ ein, welche sich zur gesamten Schwerkraft wie $\sin\varphi : 1$ verhält. Man beweise ferner, daß der Weg $PB = \frac{h}{\sin\varphi}$ ist.

9. Eine Flüssigkeit habe in einer senkrecht stehenden Kapillare die Steighöhe h (Fig. 30). Welche Strecke steigt sie in eine unter dem Neigungswinkel φ stehende Kapillare?

Die Physik lehrt, daß die senkrecht gerechnete Steighöhe bei gleicher Kapillarweite unabhängig von der Neigung der Kapillare ist.

Ist (in Fig. 30) $AP = h$ die senkrechte Steighöhe, so ist die Steigweite in der unter Winkel φ schrägen Kapillare $= PB = a$.

Da nun

$$\frac{PA}{PB} = \sin\varphi\,,$$

so ist

$$a = \frac{h}{\sin\varphi}\,.$$

IV. Reihen.

26. Unter einer Reihe versteht man die Aufeinanderfolge von Zahlen, welche einem bestimmten Bildungsgesetze gehorchen. Vorläufig werden wir vor allem die arithmetische und die geometrische Reihe kennen lernen, und werden erst in einem viel späteren Kapitel die Mac Laurinsche und die Taylorsche Reihe als neue Typen von Reihen kennen lernen.

Eine arithmetische Reihe ist eine Folge von Zahlen, von denen jede folgende um einen bestimmten Betrag größer ist als die vorangehende. Die Differenz zweier benachbarter Zahlen sei d, das Anfangsglied a, dann lautet die Reihe

Glied Nr.	1	2	3	4	n
	a,	$a + d$,	$a + 2d$,	$a + 3d$,	$a + (n-1)d$.

Die Summe einer arithmetischen Reihe von n Gliedern findet man, indem man die Reihe zweimal untereinander schreibt, einmal von vorn, einmal von hinten. Das letzte Glied heiße z:

$$s = a + a + d + a + 2d + \ldots a + (n-1)d\,,$$

$$s = z + z - d + z - 2d + \ldots z - (n-1)d\,.$$

Durch Addition der beiden Reihen findet man:

$$2s = n(a + z)$$

oder

$$s = \frac{n}{2}\cdot(a + z)\,.$$

27. Eine geometrische Reihe ist eine Folge von Zahlen, von denen jede folgende aus der vorangehenden durch Multiplikation mit einem bestimmten Faktor entsteht. Diesen Faktor nennt man den Quotienten der Reihe, p. Ist das Anfangsglied a, so lautet also die Reihe:

$$a\,, \quad a \cdot p\,, \quad a \cdot p^2\,, \quad a \cdot p^3 \ldots, \quad a \cdot p^{n-1}.$$

Die Summe der geometrischen Reihe findet man, indem man unter diese Reihe nochmals die mit p multiplizierte Reihe schreibt:

$$\begin{aligned} s &= a + a p + a p^2 + a p^3 + \ldots + a \cdot p^{n-1}\,, \\ s \cdot p &= \phantom{a + {}} a p + a p^2 + a p^3 + \ldots + a p^{n-1} + a p^n\,. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt:

$$s.(p - 1) = a p^n - a\,,$$

also

$$s = a \cdot \frac{(p^n - 1)}{p - 1}\,.$$

Statt dessen kann man auch, indem man Zähler und Nenner mit -1 multipliziert, schreiben:

$$s = a \cdot \frac{(1 - p^n)}{1 - p}\,.$$

Die erste Form wird man mit Vorteil anwenden, wenn $p > 1$, die zweite, wenn $p < 1$.

Eine geometrische Reihe ist steigend, wenn ihr Quotient > 1, fallend, wenn er < 1 ist:

2, 4, 8, 16, 32 ... steigend,

2, 1, 0,5, 0,25, 0,125 ... fallend.

Die Summe einer fallenden geometrischen Reihe konvergiert zu einem Grenzwert, d. h. wenn eine solche Reihe aus unendlich vielen Gliedern besteht, so ist ihre Gesamtsumme doch ein endlicher Wert, und auch, wenn man nur eine endliche, genügende Anzahl von Gliedern summiert, erhält man einen Wert, der sich dem wirklichen Wert stark nähert. Durch Vermehrung der addierten Glieder kann man die Näherung auf jeden gewünschten Grad der Genauigkeit bringen. Z. B. ist die Summe der Reihe

$$1, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000} \ldots \text{ ad infinitum}$$

auf 4 Dezimalen berechnet bei Summierung von

$$\begin{aligned} &1 \text{ Glied} &&= 1{,}0000\,, \\ &2 \text{ Gliedern} &&= 1{,}1000\,, \\ &3 \text{ Gliedern} &&= 1{,}1100\,, \\ &4 \text{ Gliedern} &&= 1{,}1110\,, \\ &5 \text{ Gliedern} &&= 1{,}1111\,. \end{aligned}$$

Vom 6. Glied an ändert sich, auf 4 Dezimalen berechnet, die Summe durch Hinzufügen neuer Glieder nicht mehr.

Die Summe einer unendlichen konvergierenden geometrischen Reihe erhält man, wenn man in der soeben entwickelten Summenformel $n = \infty$ setzt.

$$s = \frac{a(1 - p^\infty)}{1 - p}.$$

Nun war die Voraussetzung, daß $p < 1$ ist. Dann ist aber $p^\infty = 0$, also

$$s = \frac{a}{1 - p}.$$

Umgekehrt, wenn ein Bruch in der Form $\frac{a}{1-p}$ dargestellt werden kann, wo $p < 1$, so ist er gleich der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$a, \quad a \cdot p, \quad a \cdot p^2 \ldots \quad \text{ad infinitum.}$$

Beispiel: Zu summieren die unendlichen geometrischen Reihen:

a) $$3, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{8} \ldots,$$

$$s = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6\,.$$

b) $$1, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000} \ldots,$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1{,}111 \ldots,$$

c) $$1\,,\quad \frac{9}{10},\quad \frac{81}{100},\quad \frac{729}{1000}\ldots,$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 10\,.$$

In geometrische Reihen zu verwandeln:

a) $$\frac{4}{3}\,.$$

Wir bemühen uns, den Bruch auf die Form $\frac{a}{1-p}$ zu bringen, wobei a jeden beliebigen Wert haben kann, p aber < 1 sein muß. Nun ist

$$\frac{4}{3} = \frac{0{,}4}{0{,}3} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}7}, \quad \text{wo} \quad 0{,}4 = a \quad \text{und} \quad 0{,}7 = p$$

gesetzt werden kann. Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}7^2 \ldots \\ &= 0{,}4 + 0{,}28 + 0{,}176 + \ldots\end{aligned}$$

b) $$\frac{1}{6} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}4} = 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}0016 + 0{,}000064\ldots,$$

oder

$$\frac{1}{6} = \frac{0{,}15}{0{,}9} = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}1} = 0{,}15 + 0{,}015 + 0{,}0015\ldots$$

c) $$\frac{1}{3} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}7} = 0{,}1 + 0{,}07 + 0{,}0049\ldots,$$

oder

$$\frac{1}{3} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots,$$

oder

$$\frac{1}{3} = \frac{0{,}33}{0{,}99} = \frac{0{,}33}{1 - 0{,}01} = 0{,}33 + 0{,}0033 + 0{,}000033 + \ldots$$

28. Anwendung von Reihen.

Es sei in irgendeiner tierischen Flüssigkeit die Konzentration eines Ferments zu bestimmen, z. B. die Diastase im Darmsaft, der hämolytische Ambozeptor in einem Kaninchenserum oder dgl. Zu diesem Zweck wird man, um bei dem ersten Beispiel zu bleiben, in eine Reihe von Gläsern die gleiche Menge Stärke, abfallende Menge des Darmsaftes und Wasser bis zur Herstellung eines überall gleichen Volumens einfüllen und z. B. nach einer Stunde durch Zusatz von Jodlösung den Gang der Stärkeumwandlung feststellen. Es sei beispielsweise die Konvention getroffen, diejenige Fermentmenge als die Einheit zu bezeichnen, welche nach 1 Stunde eben gerade das Verschwinden der Jodstärkereaktion hervorruft. Man findet durch einen rohen Vorversuch, daß von dem zu untersuchenden Darmsaft eine der Fermenteinheit gleiche Leistung vollbracht wird, wenn man nahezu 1 ccm anwendet und zwar mit der vorläufigen Maßgabe, daß 1 ccm sicher zuviel, 0,1 ccm sicher zuwenig sind. Die genauere Zahl soll nunmehr durch den Versuch festgestellt werden. Wir werden also eine Reihe von Versuchen ansetzen, welche von den Saftmengen 0,1 bis zu 1 ccm mit einer Anzahl von Zwischenwerten reicht. Es fragt sich nun, in welcher Weise die einzelnen Röhrchen abgestuft werden sollen. **Eine** Anordnung wäre eine arithmetische Reihe, etwa:

$$0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7 \quad 0{,}9 \quad 1{,}1 \ldots$$

Wenn nun in einem Fall 0,3 experimentell als der zutreffendste Wert gefunden wird, so heißt das: Von einem Werte, welcher um 67 % größer (nämlich 0,5) oder kleiner (nämlich 0,1) ist als der experimentell gefundene, können wir aussagen, daß er zu groß bzw. zu klein ist. Finden wir in einem anderen Falle, daß 0,9 der beste Wert ist, so ist 0,7 sicher zu klein und 1,1 sicher zu groß. In diesem Falle können wir daher schon von einem Werte, der von dem wirklich gefundenen sich nur um rund 22 % unterscheidet, mit Bestimmtheit aussagen, daß er falsch sei. Wir verlangen aber, daß die Genauigkeit einer Messung möglichst um einen b e s t i m m t e n, der erreichbaren Genauigkeit entsprechenden Wert unsicher sei. Nehmen wir z. B. an, daß eine solche Bestimmung an sich um $\pm 50\,\%$

unsicher sei. Dann würden wir nicht irgendeine arithmetische Reihe wählen dürfen, sondern eine geometrische Reihe, und zwar mit dem Quotienten $\frac{150}{100}$ oder $\frac{3}{2}$, also:

0,1; 0,15; 0,225; 0,3375; 0,50625; 0,759375; 1,1390625;
oder gekürzt:

0,10; 0,15; 0,23; 0,34; 0,51; 0,76; 1,14.

Hier ist jedes Glied um die Hälfte größer als das vorangehende, die relative Genauigkeit der Reihe ist also in jedem Punkt dieselbe.

Wenn wir geometrische Reihen konstruieren wollen, welche das Interwall 0,1 bis 1,0 umfassen, so werden wir das in folgender Weise machen[1]):

1.	Quotient $\sqrt{10}$	0,10	0,32	1,00							
2.	Quotient $\sqrt[3]{10}$	0,10	0,12	0,46	1,00						
3.	Quotient $\sqrt[4]{10}$	0,10	0,18	0,32	0,56	1,00					
4.	Quotient $\sqrt[5]{10}$	0,10	0,16	0,25	0,40	0,63	1,00				
5.	Quotient $\sqrt[6]{10}$	0,10	0,15	0,21	0,32	0,46	0,68	1,00			
6.	Quotient $\sqrt[7]{10}$	0,10	0,14	0,19	0,27	0,37	0,52	0,72	1,00		
7.	Quotient $\sqrt[8]{10}$	0,10	0,13	0,18	0,24	0,32	0,42	0,56	0,75	1,00	
8.	Quotient $\sqrt[9]{10}$	0,10	0,13	0,17	0,21	0,28	0,36	0,46	0,60	0,77	1,00.

Je nach dem Genauigkeitsgrade, den die jeweilige Bestimmungsmethode zuläßt, wird man eine feinere oder gröbere Reihe wählen, oder man beginnt mit einer gröberen und versucht dann immer feinere Reihen, so lange, bis ein Unterschied zwischen 2—3 benachbarten Gliedern im Ergebnis nicht mehr zu erkennen ist.

29. Einiges über die Konvergenz der Reihen.

Die arithmetische und die geometrische Reihe bilden nur besonders einfache Fälle von Reihen. Wir werden z. B. später noch genauer die Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots \text{ ad infinitum}$$

[1]) Diese Reihen wurden von E. Fuld in Vorschlag gebracht.

kennen lernen, welche weder eine arithmetische, noch eine geometrische ist. Für alle unendlichen Reihen ist es nun von großer Wichtigkeit, festzustellen, ob sie konvergieren, d. h. ob die Summe ihrer Glieder einem bestimmten, endlichen Grenzwert zustrebt, der auch bei der Summierung unendlich vieler Glieder nicht überschritten wird, oder ob sie divergiert, d. h. ob die Summe unendlich vieler Glieder der Reihe einem Grenzwert nicht zustrebt, sondern $= \infty$, bzw. $-\infty$ wird.

Daß eine Reihe mit unendlich vielen Gliedern nicht $= \infty$ zu werden braucht, sahen wir schon an denjenigen unendlichen geometrischen Reihen, bei denen der Quotient < 1 ist.

Im allgemeinen ist die Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, daß die einzelnen Glieder immer mehr dem Wert 0 zustreben. Dies ist bei fallenden geometrischen Reihen stets der Fall. In der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots$$

ist das 1000 ste Glied $= \frac{1}{2^{1000}}$, also schon fast $= 0$ im Vergleich zum Anfangsglied, und die ferneren Glieder streben der 0 immer mehr zu.

Aber diese Bedingung ist nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe. In der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

streben die Glieder dem Wert $\frac{1}{\infty} = 0$ zu, und doch divergiert diese Reihe. Das erkennt man, wenn man ihre Glieder folgendermaßen zusammenfaßt:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Die eingeklammerten Ausdrücke sind nun einzeln größer als

$$2 \cdot \frac{1}{4}, \quad 4 \cdot \frac{1}{8}, \quad 8 \cdot \frac{1}{16}, \quad 16 \cdot \frac{1}{32},$$

d. h. sie sind jedes einzelne $> \frac{1}{2}$.

Also ist auch die Summe der ganzen Reihe größer als

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots \text{ad infinitum.}$$

Aber schon die Summe dieser Reihe ist unendlich, um so mehr also obige Reihe.

Die bloße Abnahme der Glieder genügt also zur Konvergenz nicht, was man auch z. B. an folgender Reihe sieht:

$$1{,}2 + 1{,}02 + 1{,}002 + 1{,}0002 + \dots$$

deren Summe natürlich $= \infty$ ist, obwohl die Glieder stetig an Größe abnehmen.

Es gibt ganz bestimmte Kriterien, an denen man die Konvergenz einer Reihe erkennen kann, von denen wir nur zwei erwähnen wollen.

1. Die Glieder der Reihe seien abwechselnd positiv und negativ. Dann konvergiert die Reihe, wenn die Glieder mehr und mehr abnehmen und dem Grenzwert Null zustreben. Z. B. konvergiert die Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots,$$

unter allen Umständen. Denn wie groß x auch sein mag, irgend wann muß es ein Glied geben, bei dem der Zähler kleiner als der Nenner wird, und von diesem Gliede an werden die folgenden kleiner und kleiner und auch der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Glieder wird stets kleiner. Da diese abwechselnd addiert und subtrahiert werden, so muß die Summe der Reihe, wenn man sie immer weiter um ein Glied verlängert, um einen endlichen Wert herumpendeln, und die Grenzen, zwischen denen die Summe pendelt, werden mit zunehmender Gliederzahl immer enger.

2. Die Glieder der Reihe haben alle gleiches Vorzeichen. Hier wollen wir nur ein Beispiel geben.

Betrachten wir die Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

und vergleichen sie mit der um 1 vermehrten geometrischen Reihe

$$1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots\right),$$

so wissen wir von der eingeklammerten geometrischen Reihe, daß sie konvergiert, weil ihr Quotient < 1 ist. Da nun jedes Glied der gegebenen Reihe, vom vierten an bis zu jedem beliebigen höheren Glied kleiner als das entsprechende Glied dieser (eingeklammerten) geometrischen Reihe ist, so muß unsere Reihe erst recht konvergieren.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Funktionen.

30. Ein überwiegender Teil aller Naturwissenschaften beschäftigt sich damit, den Einfluß eines wirksamen Agens auf den Zustand irgendeines Systems nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu erkennen. Z. B. kann die Aufgabe gestellt werden, den Einfluß der Temperatur auf die Länge eines Metallstabes festzustellen. Wir beobachten, daß bei einer ganz bestimmten Temperatur der Stab eine ganz bestimmte Länge hat, daß er sich bei Erwärmung ausdehnt, bei Abkühlung wieder zusammenzieht. Bei diesem Experiment haben wir es mit zwei veränderlichen Größen zu tun, der Länge des Stabes l, und der Temperatur t. Die eine verändern wir im Experiment willkürlich, die Temperatur. Sie heißt die unabhängige Veränderliche. Die andere ändert sich gezwungermaßen mit der Temperatur: sie ist die abhängige Veränderliche.

Man sagt dann: „die Länge des Stabes ist eine Funktion der Temperatur“ und schreibt

$$l = f(t)\,,$$

(sprich: l gleich f von t).

Welcher Art diese Funktion ist, das zu erforschen, ist eine Aufgabe der Naturwissenschaften.

Aber auch viel abstrakter begegnet uns die „Funktion“. Gegeben sei die Gleichung $y = 3x + 2$, wo x eine unabhängige Variable darstellt. Dann ist y die abhängige Variable. Denn welche Bedeutung wir auch x erteilen mögen, immer ist die Bedeutung von y an die von x gebunden. Ist z. B. $x = 1$, so ist $y = 5$; ist $x = \frac{1}{3}$, so ist $y = 3$ usw. Es ist also stets

$$y = f(x)\,.$$

Im allgemeinen wird im folgenden das Symbol x für die unabhängige, y für die abhängige Variable beibehalten. Natürlich ist es stets Sache der Darstellung oder Auffassung, welche von beiden Variablen die unabhängige ist. Wir können auch einen Metallstab als Thermometer benutzen und aus seiner Länge seine Temperatur erschließen.

Dann ist

$$t = \varphi(l)\,,$$

wo φ wieder ein Funktionssymbol bedeutet; es ist also dann die Länge die unabhängige, die Temperatur die abhängige Variable.

31. Man teilt die Funktionen in algebraische und transzendente ein. Algebraische Funktionen sind solche, bei denen zur Berechnung der Variablen die vier Grundoperationen der Arithmetik, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren, ferner Potenzieren und Radizieren, wenn der Exponent eine konstante Zahl ist, genügen. Z. B.

$$y = ax + b\,,$$
$$y = x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + \sqrt{x}.$$

Das sind also alles Funktionen, in denen nur (ganze, gebrochene, positive, negative) Potenzen von x vorkommen. Algebraische Funktionen, in denen die Veränderlichen unter einem Wurzelzeichen auftreten, nennt man irrationale Funktionen, die anderen algebraischen Funktionen heißen rational. Alle anderen Funktionen nennt man transzendente.

Dahin gehören

1. die exponentiellen Funktionen. Es sind solche, bei denen x im Exponenten vorkommt, z. B.

$$y = a^x$$

und die sich daraus ergebende Umkehrung, die logarithmische Funktion

$$\log^a y = x\,,$$

2. die goniometrischen Funktionen und die daraus durch Umkehrung entstehenden zyklometrischen Funktionen.

$y = \sin x$	und	die	Umkehrung	dazu,	$x = \arcsin y$
$y = \cos x$	„	„	„	„	$x = \arccos y$
$y = \mathrm{tg}\, x$	„	„	„	„	$x = \mathrm{arctg}\, y$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	„	„	„	„	$x = \mathrm{arcctg}\, y$

Die Definition der hier zum erstenmal erwähnten zyklometrischen Funktionen ist also: eine zyklometrische Funktion ist die Umkehrung der dazugehörigen goniometrischen (trigonometrischen) Funktion.

Bisher schrieben wir die Funktionen immer so, daß auf der linken Seite nur die unabhängige Variable y stand. Es kann aber auch eine Gleichung bestehen zwischen y und x, welche noch nicht nach y aufgelöst ist, z. B.

$$y - x^2 = x - y \quad \text{oder z. B.} \quad xy = a\,.$$

Solches nennt man unentwickelte Funktionen. Löst man sie nach y auf, so gehen sie in entwickelte Funktionen über, also

$$y = \frac{x^2 + x}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{x}\,.$$

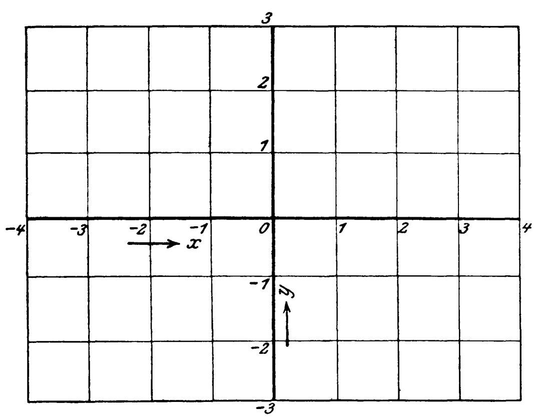

Fig. 31.

32. Graphische Darstellung der Funktionen. Die hier beschriebene Abhängigkeit einer Variablen von einer anderen können wir auf folgende Weise nach Descartes graphisch darstellen. Man zieht eine beliebige Gerade und in irgendeinem Punkte senkrecht zu ihr eine zweite. Man teile nun diese beiden Linien oder Achsen nach einem willkürlichen, für beide Linien aber gleichen Maßstab in gleiche Abschnitte, indem man den Kreuzungspunkt der beiden Linien für beide als Nullpunkt ansetzt, und zerlege die von den beiden Linien bestimmte Ebene durch Ziehen von Parallelen in lauter gleich große Quadrate. Man betrachte nun die horizontale Achse als Maßstab für die unabhängige Variable x und die vertikale Achse als Maßstab für die abhängige Variable y. Man setzt nun graphisch jeden Wert von y mit dem zugehörigen Wert von x auf folgende Weise in Verbindung. Man zieht durch den Punkt der horizontalen Achse, welcher irgendeinen in Betracht gezogenen Wert von x darstellt, eine Vertikale, und durch denjenigen Punkt der vertikalen Achse, welcher den zugehörigen Wert von y darstellt, eine Horizontale. Diese beiden Linien schneiden sich in einem bestimmten Punkte. Dieses macht man mit möglichst vielen korrespondierenden Werten von y und x. Sämtliche Schnittpunkte, miteinander verbunden, ergeben so eine für die betreffende Funktion charakteristische Kurve. Die horizontale Achse nennt man die Abszisse, die einzelnen Vertikalen die Ordinaten. Jeder Kurvenpunkt ist somit durch zwei Koordinaten in seiner Lage bestimmt.

Diese Methode nennt man das rechtwinklige Koordinatensystem. Es ist nicht die einzige mögliche, aber die verbreitetste Methode der graphischen Darstellung einer Funktion.

Die Kurven einiger wichtiger Funktionen.

33. Funktionen ersten Grades: die gerade Linie.

Betrachten wir nunmehr das Kurvenbild einiger Funktionen. Es sei zunächst die Funktion gegeben

$$y = a x + b .$$

Für die Konstanten a und b seien für unseren vorliegenden Fall die Werte 2 und 3 gegeben, so daß also die Gleichung die Form annimmt

$$y = 2 x + 3 .$$

Setzen wir nun zunächst	$x = 0$,	so ergibt sich	$y = 3$.
Setzen wir	$x = 1$,		$y = 5$
	$x = 2$,		$y = 7$
	$x = 3$,		$y = 9$
	$x = 4$,		$y = 11$
	$x = 5$,		$y = 13$.

Tragen wir nun diese Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so sehen wir, daß die Werte für y auf einer geraden Linie liegen (Fig. 32). Dasselbe ist stets der Fall, welchen Wert wir a und b auch zuerteilen.

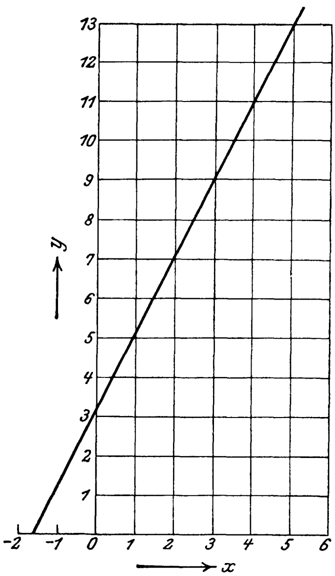

Fig. 32.
Die gerade Linie $y = 2x + 3$.

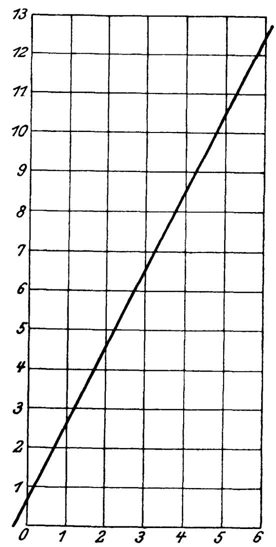

Fig. 33.
Die gerade Linie $y = 2x + 0{,}5$.

Geben wir ein zweites Mal der Konstanten a denselben Wert wie eben, 2, der Konstanten b aber einen anderen, sagen wir $\frac{1}{2}$, so ergibt sich folgende Berechnung für die korrespondierenden Werte von x und y:

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad & y &= 0{,}5 \\ x &= 1 & y &= 2{,}5 \\ x &= 2 & y &= 4{,}5 \\ x &= 5 & y &= 10{,}5\,. \end{aligned}$$

Zeichnet man diese Werte in ein Koordinatensystem ein, so sieht man (Fig. 33), daß die daraus entstehende gerade Linie der anderen parallel ist, daß sie aber die Abszisse an einer anderen Stelle schneidet. Eine Änderung der Konstanten b verändert somit nur den Schnittpunkt der Geraden mit der Abszisse, nicht aber den Winkel, den die Gerade mit der Abszisse bildet.

Wenn wir aber den ursprünglichen Wert von b lassen und a verändern, so bleibt zwar der Schnittpunkt der Geraden mit der Abszisse unverändert, aber der Neigungswinkel der Geraden zu der Abszisse ändert sich. Wir können nun den Neigungswinkel in folgender Weise mit der ihn bestimmenden Konstanten in Beziehung bringen. Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall an, b sei gleich 0, so fällt der Schnittpunkt unserer Linie mit dem Nullpunkt des Koor-

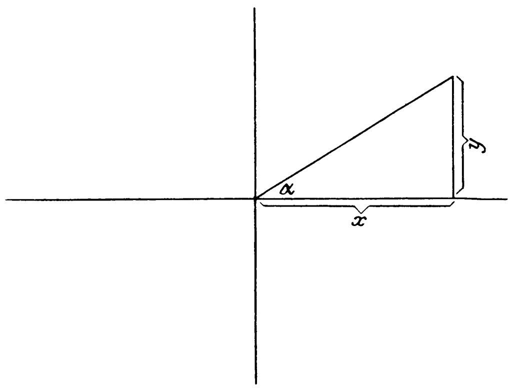

Fig. 34. Die gerade Linie $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha < 1\,R)$.

dinatensystems zusammen, und es ist in dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 34) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, welchen Wert von y und x wir auch in Betracht ziehen mögen. Es ist daher

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha = a \,.$$

Aus der Gleichung

$$y = a x$$

folgt also, daß die Gerade, die den Verlauf von y angibt, die x-Achse unter demjenigen Winkel schneidet, dessen Tangente $= a$ ist.

Ist a negativ, so folgt daraus, daß der Winkel α größer als ein Rechter ist (Fig. 35), denn für den stumpfen Winkel α ist

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) \,,$$

und daraus folgt weiterhin, daß die Gerade (von links nach rechts gerechnet) ansteigt, wenn a positiv, und abfällt, wenn a negativ ist (Fig. 35), und drittens parallel zur x-Achse verläuft, wenn $a = 0$ ist.

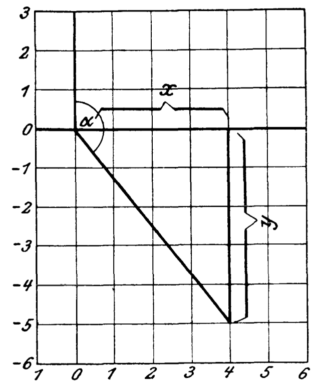

Fig. 35. Die gerade Linie $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha > 1R)$.

Nehmen wir ferner an, daß der Schnittpunkt unserer Geraden und der Nullpunkt des Achsensystems nicht zusammenfallen, daß also b verschieden von 0 ist, so ergibt sich aus der Fig. 36, daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \sphericalangle BCD = \frac{y - b}{x} .$$

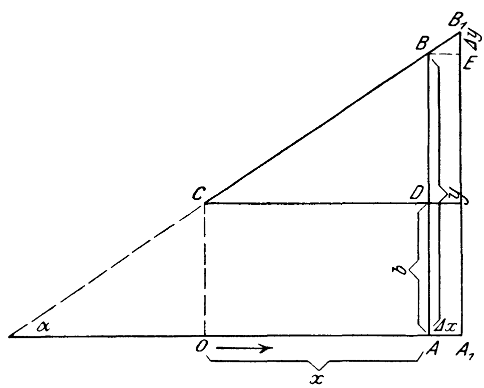

Fig. 36.

Es ist also in diesem allgemeinen Falle

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b ,$$

welches somit die allgemeinste Form der „Gleichung der geraden Linie“ darstellt und sich von der oben gegebenen Gleichung derselben Bedeutung nur dadurch unterscheidet, daß a durch $\operatorname{tg} \alpha$ ersetzt ist.

Wir legen uns nun folgende Frage vor, welche uns auf ein späteres Kapitel vorbereiten soll. Es sei die Gleichung gegeben

$$y = ax + b$$

und es habe z. B. y und x die in der Fig. 36 dargestellen Werte. Ich frage jetzt: wenn ich von einem beliebigen Punkt der Geraden ausgehend, x um ein kleines Stück wachsen lasse, wie verhält sich dann die Zunahme von y zur Zunahme von x?

In Fig. 36 ist

$$OA = x\,, \qquad BA = y\,,$$

also

$$CO = DA = b$$

und

$$\frac{BD}{CD} = \operatorname{tg}\alpha = a\,.$$

Denke ich mir jetzt x um das kleine Stück $AA_1 = \Delta x$ gewachsen, so wächst y um das Stück $B_1E = \Delta y$. Das gesuchte Verhältnis ist also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nun ist

$$\sphericalangle B_1BE = \alpha \qquad \text{und} \qquad BE = AA_1 = \Delta x\,.$$

In dem Dreieck BB_1E ist also

$$\operatorname{tg}(B_1BE) = \frac{B_1E}{BE}$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Es ist also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = a\,,$$

und somit ganz unabhängig von b, es ist aber $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auch von dem jeweiligen Betrage von y und x unabhängig und eine Konstante. Dieses ist ein singuläres Ergebnis für die gerade Linie. Da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$, so bedeutet das weiter nichts, als daß der Neigungswinkel, den eine gerade Linie mit der x-Achse bildet, immer derselbe bleibt.

Eine durch eine Gleichung der allgemeinen Form

$$y = ax + b$$

oder

$$y - ax = b$$

bestimmte Kurve nennt man eine Kurve erster Ordnung. Sie ist also stets eine gerade Linie.

Beispiel: Das Volumen v einer abgeschlossenen Gasmenge betrage bei 0^0 C 150 ccm bei Atmosphärendruck. Messungen unter gleichem Druck und bei verschiedenen Temperaturen t ergeben nun folgende zusammengehörige Werte für v und t.

t	v
0^0	150,00
10^0	155,49
20^0	160,99
30^0	166,48
40^0	171,78 .

Wir zeichnen nun v graphisch als Funktion von t auf Millimeterpapier auf, erkennen die Funktion als geradlinig und bestimmen durch graphische Ausmessung die Konstanten a und b der Gleichung

$$v = a \cdot t + b\,.$$

Man überzeuge sich, daß $a = \frac{150}{273}$ ist und $b = 150$, so daß die Gleichung lautet:

$$v = 150 \cdot \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

oder allgemein

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right),$$

wo v_t bzw. v_0 das Volumen bei t bzw. 0^0 C bedeutet. Man nennt $\frac{1}{273}$ den Ausdehnungskoeffizienten.

34. Funktionen zweiten Grades: Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Eine Funktion zweiten Grades ist eine solche, bei der die Variablen oder eine der Variablen auch in der zweiten Potenz auftritt.

Die allgemeinste Form einer unentwickelten Funktion zweiten Grades ist daher

$$Ay^2 + By + Cx^2 + Dx + Exy + F = 0\,,$$

wo A, B, C, D, E, F Konstanten darstellen, die jeden beliebigen, positiven oder negativen Wert haben können. Wir betrachten nur die einfacheren Fälle:

1. Den Fall, daß

$$A = 1$$
$$B = C = E = F = 0$$
$$D = -a\,,$$

d. h. also den Fall, daß

$$y^2 - a\,x = 0\,;$$

2. den Fall, daß

$$A = 1$$
$$B = D = E = 0$$
$$C = \text{ entweder } a \text{ oder } = -a$$
$$F = -b\,;$$

d. h. daß entweder

$$y^2 + a\,x^2 - b = 0$$

oder

$$y^2 - a\,x^2 - b = 0$$

ist.

35. Die Parabel.

Es sei zunächst die Gleichung gegeben

$$y^2 = a\,x\,.$$

Aus ihr folgt zunächst

$$y = \pm\sqrt{a\,x}\,,$$

d. h. für jeden Wert von x existieren 2 Werte von y, die dem absoluten Betrage nach einander gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind. Setzen wir z. B. $a = 1$, und berechnen die zugehörigen Werte von y und x, so ist bei

$x = -1$	$y = \sqrt{-1}$, imaginär (es existiert kein y)
$x = 0$	$y = 0$
$x = 1$	$y = \pm 1$
$x = 2$	$y = \pm 1{,}414\ldots$
$x = 3$	$y = \pm 1{,}732\ldots$
$x = 4$	$y = \pm 2$
$x = 9$	$y = \pm 3$
$x = 16$	$y = \pm 4\,.$

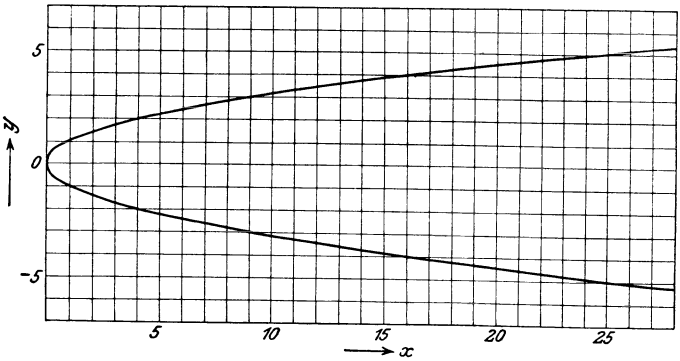

Fig. 37. Die Parabel $y = \pm\sqrt{x}$.

Man bezeichnet diese Kurve als eine Parabel. Charakteristisch ist für sie zunächst ihr symmetrischer Verlauf ober- und unterhalb der x-Achse; die Werte von y werden immer größer, je weiter man sie nach rechts verfolgt, aber ihr relativer Zuwachs wird immer kleiner; der Neigungswinkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet, wird immer kleiner, aber erst im Unendlichen wird die Tangente vollkommen parallel der Abszisse.

Wenn nun

$$y = f(x)\,,$$

so muß auch umgekehrt x eine Funktion von y sein.

Wenn wir in obiger Gleichung y und x vertauschen, so erhalten wir eine neue Funktion

$$x^2 = a\,y$$

oder

$$y = b\,x^2,$$

wenn

$$b = \frac{1}{a}$$

ist.

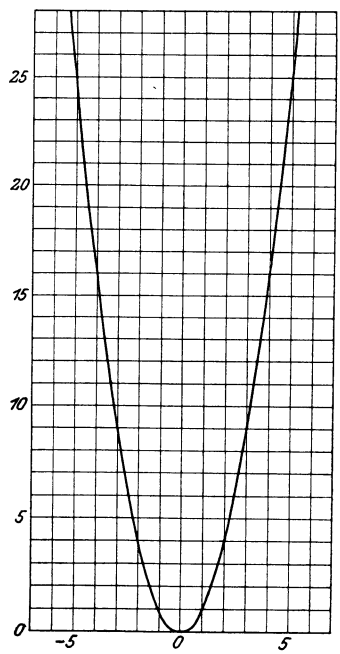

Fig. 38. Die Parabel $y = x^2$.

Berechnen wir hier die zueinandergehörigen Werte, so ergibt sich für $b = 1$

$$\begin{array}{ll} x = -10 & y = +100 \\ x = -2 & y = +4 \\ x = 0 & y = \pm 0 \\ x = 1 & y = +1 \\ x = 2 & y = +4 \\ x = 10 & y = +100\,. \end{array}$$

Wir erhalten so ebenfalls das Bild einer Parabel (Fig. 38), aber mit anderer Lage zur x-Achse.

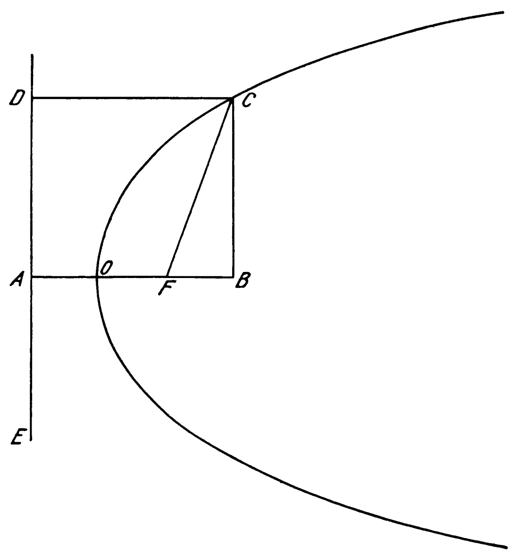

Fig. 39. Die Parabel als geometrischer Ort.

Nun kann man die Parabel auch noch anders, in geometrischer Weise definieren. Sie ist nämlich der „geometrische Ort“ aller Punkte, die von einem festen Punkt und einer gegebenen *geraden* Linie die gleiche Entfernung haben. Der feste Punkt (Fig. 39), auch Brennpunkt genannt, sei F, die gerade Linie DE, dann hat der beliebig gewählte Parabelpunkt C eine derartige Lage, daß

$$CD = CF\,.$$

Betrachten wir AB als x-Achse, O als den Anfangspunkt derselben, DE als y-Achse, A als den Anfangspunkt derselben, so ist zunächst

$$AO = OF\,,$$

weil O als ein Punkt der Parabel diese Bedingung erfüllen muß. Bezeichnen wir AF mit p (Parameter der Parabel) so ist

$$OF = \frac{p}{2}\,.$$

Nun ist

$$y = CB$$

und

$$x = OB\,.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck FBC folgt

$$CF^2 = CB^2 + BF^2\,,$$

CB ist aber $= y$, und

$$BF = BO - OF = x - \frac{p}{2}\,.$$

Also ist

$$CF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Anderseits ist, nach der Parabelbedingung

$$CF = DC = x + \frac{p}{2}\,,$$

also ist

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + p\,x + \frac{p^2}{4} = y^2 + x^2 - p\,x + \frac{p^2}{4}$$

oder

$$y^2 = 2\,p\,x\,.$$

Setzen wir

$$2\,p = a\,,$$

so wird daraus

$$y^2 = a\,x\,,$$

die obige Parabelgleichung.

Es führt also in der Tat die geometrische Definition der Parabel zu der geforderten algebraischen Beziehung.

36. Die Ellipse.

Ein zweiter Typus einer Funktion zweiten Grades ist

$$y^2 = a x^2 + b ,$$

in der sowohl y wie x quadratisch vorkommen. Aus ihr folgt

$$y = \pm \sqrt{a x^2 + b} ,$$

woraus ersichtlich ist, daß auch hier jedem Werte von x zwei Werte von y entsprechen.

Die Form dieser Kurve ist nun verschieden, je nachdem a positiv oder negativ ist. Betrachten wir a immer als positiv so hätten wir also 2 Fälle zu betrachten:

$$y^2 = b + a x^2 , \tag{1}$$

$$y^2 = b - a x^2 . \tag{2}$$

Rechnen wir die zueinander gehörigen Werte der Gleichung

$$y^2 = b - a x^2$$

aus.

Zunächst folgt daraus

$$y = \pm \sqrt{b - a x^2} .$$

Da nur die Wurzel aus einer positiven Größe eine reelle Bedeutung hat, so ist diese Kurve nur in dem Bereich denkbar, wo

$$b > a x^2 .$$

D. h. nicht jedem beliebigen Wert von y entspricht ein Wert von x, sondern nur so lange gibt es reelle Werte, als $b > a x^2$ bleibt. Aber wo es einen Wert von y gibt, gibt es sofort auch einen zweiten, von gleicher Größe, aber umgekehrtem Vorzeichen. Berechnen wir z. B. die zugehörigen Werte von y und x für $b = 2$ und $a = 1$.

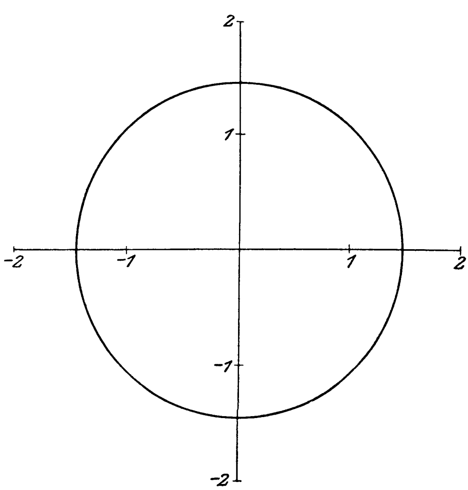

Fig. 40. Der Kreis als Spezialfall einer Ellipse, $y = \pm \sqrt{2 - x^2}$.

$$\begin{array}{lll}
x = 2 & y = \pm\sqrt{2-4} & = \text{imaginär} \\
x = 1{,}3 & y = \pm\sqrt{2-1{,}69} & = \pm 0{,}557 \\
x = 1 & y = \pm\sqrt{2-1} & = \pm 1 \\
x = 0{,}3 & y = \pm\sqrt{2-0{,}09} & = \pm 1{,}38 \\
x = 0 & y = \pm\sqrt{2} & = \pm 1{,}414 \\
x = -1 & y = \pm\sqrt{2-1} & = \pm 1 \\
x = -1{,}3 & y = \pm\sqrt{2-1{,}69} & = \pm 0{,}557 \\
x = -2 & y = \pm\sqrt{2-4} & = \text{imaginär.}
\end{array}$$

Es ergibt sich (Fig. 40) ein Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{b}$ ist. Es ist also $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Dies ist aber nur ein spezieller Fall. Wenn der Koeffizient von x^2 nicht gerade 1 ist, sondern z. B. 0,5, so daß also

$$y^2 = 2 - 0{,}5\,x^2 \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2 - 0{,}5\,x^2}\,,$$

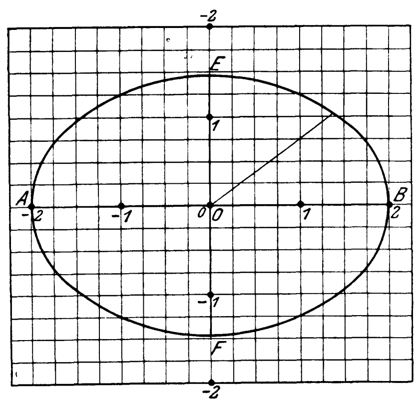

Fig. 41. Die Ellipse $y = \pm\sqrt{2 - \frac{1}{2}x^2}$.

so ist (Fig. 41)

$$\begin{array}{lll}
x = 3 & y = \pm\sqrt{2-4{,}5} & = \text{imaginär} \\
x = 2 & y = \pm\sqrt{2-2} & = 0 \\
x = 1 & y = \pm\sqrt{2-0{,}5} & = \pm 1{,}235 \\
x = 0 & y = \pm\sqrt{2} & = \pm 1{,}414 \\
x = -1 & y = \pm\sqrt{2-0{,}5} & = \pm 1{,}235 \\
x = -1{,}5 & y = \pm\sqrt{2-1{,}125} & = \pm 0{,}938
\end{array}$$

usw.

Die so definierte Kurve ist die Ellipse. Der Nullpunkt der Abszisse, O, ist der Mittelpunkt der Ellipse. Betrachten wir den Punkt B und A, so ist hier $y = 0$, also

$$\sqrt{b - a x^2} = 0\,,$$
$$b - a x^2 = 0\,,$$
$$b = a x^2\,,$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

OB ist aber der „große Halbmesser der Ellipse“; nennen wir ihn m, so ist also

$$m = \sqrt{\frac{b}{a}}\,,$$

und es ist

$$m^2 = \frac{b}{a}\,. \tag{α}$$

Betrachten wir die Punkte E und F, so ist $x = 0$; es ist also hier

$$y = \pm\sqrt{b}\,.$$

EO ist aber der kleine Halbmesser der Ellipse und es ist dieser

$$n = \sqrt{b}\,,$$

oder

$$b = n^2\,. \tag{1}$$

Dies in (α) eingesetzt, ist

$$m^2 = \frac{n^2}{a}$$

und

$$a = \frac{n^2}{m^2}\,. \tag{2}$$

Führen wir diese Bezeichnung in die obige Gleichung der Ellipse ein, so ist

$$y^2 = n^2 - \frac{n^2}{m^2} \cdot x^2\,,$$

oder, durch n^2 dividiert

$$\frac{y^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{m^2},$$

$$\frac{y^2}{n^2} + \frac{x^2}{m^2} = 1,$$

die übliche Form der Ellipsengleichung. Der Kreis ist eine Ellipse, bei der der große und der kleine Halbmesser einander gleich sind, wo also $m = n = r$ (dem Radius) ist. Die Gleichung des Kreises ist daher

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

was durch die Betrachtung der Fig. 40 oder Fig. 26 (S. 34) ohne weiteres bestätigt wird.

37. Die Hyperbel.

Betrachten wir ferner die zweite Gleichung

$$y^2 = b + a x^2$$

und rechnen die zugehörigen Werte aus, so ist zunächst

$$y = \pm\sqrt{b + a x^2},$$

also z. B. für den besonderen Fall, daß

$$b = 2,$$

$$a = 1,$$

entsprechen sich folgende Werte von x und y:

$$\begin{array}{ll}
x = 10 & y = \pm\sqrt{2 + 100} = \pm 10{,}10 \\
x = 5 & y = \pm\sqrt{2 + 25} = \pm 5{,}20 \\
x = 2 & y = \pm\sqrt{2 + 4} = \pm 2{,}45 \\
x = 1{,}5 & y = \pm\sqrt{2 + 2{,}25} = \pm 2{,}11 \\
x = 1 & y = \pm\sqrt{2 + 1} = \pm 1{,}73 \\
x = 0 & y = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}41 \\
x = -1 & y = \pm\sqrt{2 + 1} = \pm 1{,}73 \\
x = -2 & y = \pm\sqrt{2 + 4} = \pm 2{,}45
\end{array}$$

usw.

Diese Kurve ist die Hyperbel. Sie besteht aus 2 symmetrischen Hälften, die ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegen. Jede der Hälften ist dadurch ausgezeichnet, daß sie aus zwei ins Unendliche verlaufenden Schenkeln besteht. Durch den Nullpunkt des Koordinatensystems lassen sich nun zwei sich kreuzende gerade Linien derart ziehen, daß die Schenkel der Hyperbel sich in ihrem Verlauf dieser Linie ständig nähern, ohne sie jemals völlig zu erreichen. Diese Linien nennt man die Asymptoten der Hyperbel. Wir können ihre Beschaffenheit noch genauer definieren. Die Asymptote ist eine gerade Linie, welche wir als den graphischen Ausdruck einer Funktion ersten Grades betrachten können. Die Gleichung der Asymptoten ist nämlich:

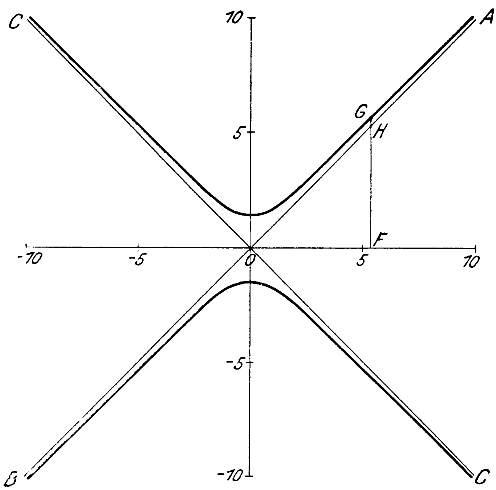

Fig. 42. Die Hyperbel $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$.

$$y' = x \cdot \sqrt{a} \qquad (y' = FH)\,,$$

wo a dieselbe Bedeutung hat wie in der Hyperbelgleichung

$$y = \sqrt{b + a x^2}\,.$$

Man sieht, daß $\sqrt{b + a x^2}$ stets $> x\sqrt{a}$ sein muß, denn quadriert ergibt das eine $b + a x^2$, das andere $a x^2$. Da diese Gleichung für jeden beliebigen Punkt gilt, so ist überall die Ordinate dieser Geraden kleiner als die der Hyperbel, d. h. die Gerade $y' = x \cdot \sqrt{a}$ stellt die Asymptote der Hyperbel dar.

Die beiden Asymptoten können sich unter einem beliebigen Winkel schneiden. Ist $a = 1$, so daß

$$y = \sqrt{x^2 + b}\,,$$

so schneiden sich die Asymptoten rechtwinklig. Diese Hyperbel nennt man die gleichseitige Hyperbel. Die Fig. 42 stellt eine solche dar. Mit dieser wollen wir uns in § 40 noch etwas näher beschäftigen und bei dieser Gelegenheit das Prinzip von der Verlegung der Koordinaten kennen lernen.

38. Die Verlegung des Koordinatensystems.

Die Kurve CD (Fig. 43) sei die graphische Darstellung irgendeiner Funktion, wobei das Koordinatensystem mit den Achsen OA und OB gewählt ist. Diese Wahl ist eine willkürliche, und wir können uns zur Aufgabe stellen, dieselbe Kurve auf irgendein anderes Koordinatensystem zu beziehen. Dieses neue Koordinatensystem kann entweder durch Verschiebung oder durch Drehung aus dem ursprünglichen entstehen. Z. B. entsteht das Koordinatensystem $B'O'A'$ aus BOA durch Verschiebung. Ist $OA = x$, $AD = y$, so ist in dem neuen System $O'A' = x'$ und $DA' = y'$.

Die Beziehungen zwischen beiden Systemen sind einfach

$$x' = x + O'F;$$
$$y' = y + AA'.$$

Da $O'F$ und AA' konstant sind und durch die Art der Verschiebung des Systems ein für allemal definiert sind, so sind die Beziehungen zwischen diesen beiden Koordinatensystemen höchst einfach.

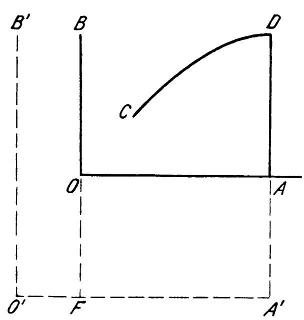

Fig. 43.

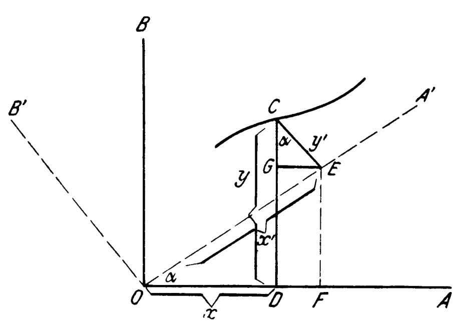

Fig. 44.

Etwas komplizierter gestalten sich diese Beziehungen, wenn die beiden Systeme durch Drehung auseinander entstehen.

Es sei (Fig. 44) BO, OA das ursprüngliche Koordinatensystem einer Kurve, in welcher der Punkt C liegt, und $B'O$, OA' das neue System, welches aus dem alten durch Drehung um den Winkel α entstanden ist. Die Koordinaten des Punktes C in dem alten System sind $CD = y$ und $OD = x$, in dem neuen System $EC = y'$ und $OE = x'$. Die Beziehungen zwischen diesen Größen sind nun folgende:

$$y = CD = CG + GD.$$

Nun ist, wie aus dem rechtwinkligen Dreieck CGE sich ergibt, $CG = CE \cdot \cos\alpha$ und $GD = EF$ ist, wie aus dem rechtwinkligen Dreieck OEF hervorgeht, gleich $OE \cdot \sin\alpha$. Es ist also

$$y = y' \cdot \cos\alpha + x' \cdot \sin\alpha .$$

Und durch ähnliche Betrachtung ergibt sich

$$x = OD = OF - DF = OF - GE,$$

$$x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha .$$

Um also die beiden Systeme miteinander in Beziehung zu bringen, haben wir die beiden Gleichungen

$$\boldsymbol{x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha ,}$$

$$\boldsymbol{y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha .}$$

Ist ein Koordinatensystem aus dem anderen durch gleichzeitige Verschiebung und Drehung entstanden, kombiniere man diese beiden Rechnungen; zunächst verschiebe man das System und dann drehe man es. Das bedarf keiner weiteren Erörterung.

39. Beispiel: Die schräg verlaufende Gerade AB stelle die Funktion $y = a + x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ dar, wo $AO = a$ ist. Es sei die Aufgabe gestellt, das Koordinaten system um den Winkel φ zu drehen und die Gleichung der Geraden AB auf das neue Koordinatensystem zu beziehen. Während also zunächst die Lage z. B. des Punktes P auf die Achsen CO und OD bezogen wurde, und PD und OD die Koordinaten des

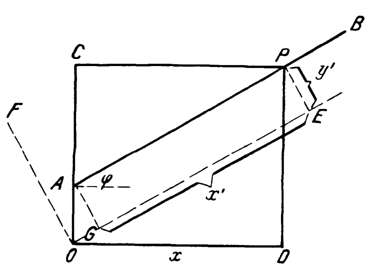

Fig. 45.

Punktes P für dieses Achsensystem waren, soll nunmehr die Lage des Punktes P auf das Koordinatensystem FO und OE bezogen werden. Nach S. 70 ist

$$x = x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi\,,$$
$$y = x' \cdot \sin\varphi - y' \cdot \cos\varphi\,.$$

Setzen wir für y seinen Wert $a + x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ ein und multiplizieren die erste Gleichung mit $\operatorname{tg}\varphi$, so lauten diese zwei Gleichungen:

$$x \cdot \operatorname{tg}\varphi = x' \cdot \sin\varphi - y' \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,,$$
$$a + x \cdot \operatorname{tg}\varphi = x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi\,.$$

Diese beiden Gleichungen von einander subtrahiert, ergeben

$$a = y'\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = y'\left(\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{y'}{\cos\varphi}$$

oder

$$y' = a \cdot \cos\varphi\,.$$

D. h. in der neuen Gleichung ist y' unabhängig von x, y' ist konstant. Das ist ohne weiteres einleuchtend, weil AB der neuen x-Achse parallel geht. Daß die Größe dieses konstanten Wertes von y gerade $= a \cdot \cos\varphi$ ist, ergibt die Betrachtung der Figur sofort, weil in dem $\triangle AGO$ $AG = AO \cdot \cos\varphi$.

40. Beispiel: **Die gleichseitige Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Achsensystem.** Wir stellen uns nun folgende Aufgabe. Bei einer gleichseitigen Hyperbel soll die Gleichung gefunden werden, bei der die Asymptoten die Achsen des Koordinatensystems darstellen. Wir haben also die Aufgabe, das Koordinatensystem der Hyperbel um 45^0 zu drehen und die Hyperbel auf dieses neue Koordinatensystem zu beziehen. Die Koordinaten des Punktes C sind (Fig. 46) im alten System $x = AB$, bzw. $y = BC$, im neuen System $CD = y'$ und $AD = x$.

Wenden wir nun die soeben gewonnene Beziehung (S. 70) zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen an, so erhalten wir

$$x = x' \cdot \cos 45^0 - y' \cdot \sin 45^0\,, \qquad (1)$$
$$y = x' \cdot \sin 45^0 + y' \cdot \cos 45^0\,. \qquad (2)$$

Es ist nun nach der Gleichung der gleichseitigen Hyperbelgleichung

$$y = \sqrt{a + x^2}\,.$$

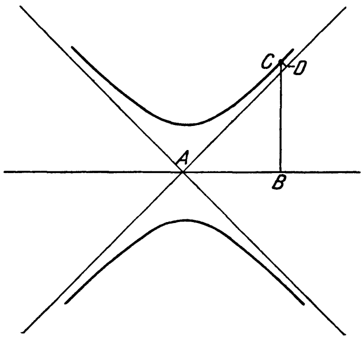

Fig. 46.

Ferner ist

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir können daher die beiden letzten Gleichungen in der Form schreiben

$$x \cdot \sqrt{2} = x' - y',$$

$$\sqrt{a + x^2} \cdot \sqrt{2} = x' + y'.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x' = \frac{\sqrt{a + x^2} + x}{\sqrt{2}},$$

$$y' = \frac{\sqrt{a + x^2} - x}{\sqrt{2}}.$$

Wollen wir aus diesen zwei Gleichungen die direkten Beziehungen von x' zu y' ermitteln, so braucht man nur die beiden Gleichungen miteinander zu multiplizieren, dann wird: $x' \cdot y' = \frac{a}{2}$ oder das Produkt aus den beiden Koordinaten ist konstant. Wenn also das Produkt zweier Variablen konstant ist, so gibt die eine Variable, als Funktion der anderen graphisch dargestellt, eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen darstellen (Fig. 47).

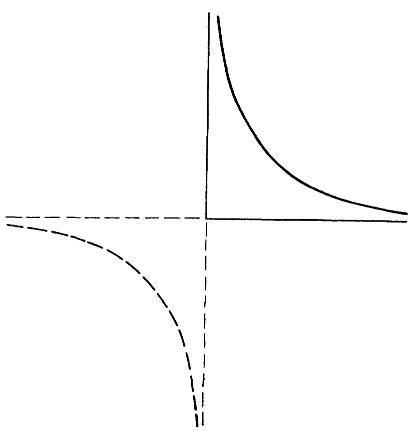

Fig. 47.
Die gleichseitige Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Koordinatensystem.

Eine solche Beziehung ist z. B. das Mariotte-Gay-Lussacsche Gasgesetz, welches aussagt, daß bei einem Gase bei gegebener Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen konstant ist. Trägt man den Druck als Funktion des Volumens in ein Koordinatensystem ein, so erhält man eine Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen des Koordinatensystems sind (Fig. 47). Da ein „negatives Volumen“ keine physikalische Bedeutung hat, so kommt der punktierte Schenkel der Hyperbel physikalisch nicht in Betracht.

Ein anderes Beispiel ist die Dissoziation des Wassers. Für diese gilt das Gesetz, daß stets das Produkt der $H^{\cdot}$-Konzentration und der OH'-Konzentration konstant ist. Diese Beziehung läßt sich ebenso graphisch ausdrücken wie die soeben besprochene.

41. Funktionen höherer Ordnung.

Eine Funktion $n$ter Ordnung ist eine solche, bei der die abhängige Variable höchstens in der $n$ten Potenz auftritt. Also z. B. eine (entwickelte) Funktion 5. Ordnung hat ganz allgemein die Form

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f. \qquad (1)$$

wo a, b, c, d, e, f beliebige konstante Größen darstellen, welche auch negativ oder gleich Null sein können. Man nennt solche Funktion ein Polynom. Eine interessante Beziehung zur Algebra hat diese Art der Funktion auf folgende Weise.

Gegeben sei die Funktion

$$x^2 - 2x - 3 = 0\,. \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist nur ein spezieller Fall der allgemeinen Funktionsgleichung

$$x^2 - 2x - 3 = y\,. \qquad (3)$$

Tragen wir die Funktion (3) graphisch in ein Koordinatensystem ein (Fig. 48), so stellt Gleichung (2) offenbar den Punkt der Kurve dar, in dem sie die x-Achse schneidet. Denn in diesem Fall ist ja $y = 0$. Solcher Punkte muß es aber bei einer quadratischen Gleichung zwei geben, für unseren Fall den einen bei $x = 3$, den anderen bei $x = -1$ (Fig. 48). Es stellen also die Schnittpunkte irgendeines Polynoms $y = f(x)$ die Lösungen oder „Wurzeln“ der Gleichung

$$f(x) = 0$$

dar. Solcher Wurzeln gibt es in einer Gleichung $n$ten Grades n, worunter allerdings auch imaginäre Wurzeln sein können.

Im allgemeinen entsteht ein Polynom von der Form

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} \ldots + p x + q$$

durch Multiplikation von n Faktoren in folgender Art

$$(x + f)(x + g)(x + h) \ldots ,$$

wo f, g, h ... dadurch bestimmt sind, daß beim Ausmultiplizieren die vorige Gleichung herauskommt; z. B.

$$x^3 - 8x^2 - 13x - 10 = (x - 1)(x - 2)(x - 5) .$$

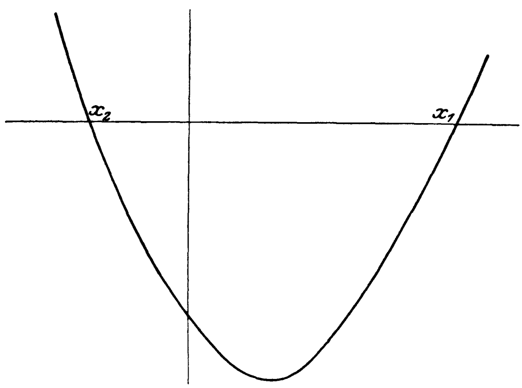

Fig. 48.

Hätten wir nun die Aufgabe, die Gleichung

$$x^3 - 8x^2 - 13x - 10 = 0$$

zu lösen, so können wir zunächst dafür schreiben

$$(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 0 .$$

Offenbar wird dieser Gleichung genügt, wenn irgendeiner der drei Faktoren $= 0$ gesetzt wird, also wenn $x = 1$, oder $= 2$, oder $= 5$ ist.

Die Lösung einer Gleichung höheren Grades fällt also, nachdem man sie auf die Form $f(x) = 0$ gebracht hat, mit der Aufgabe zusammen, sie in einzelne Faktoren von der Form

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots = 0$$

zu zerlegen. Dann sind die Wurzeln der Gleichung

$$x_1 = -a$$
$$x_2 = -b$$

usw.

Da man eine Gleichung $n$ten Grades in n solcher Faktoren zerlegen kann, so muß eine Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln haben, von denen einige oder alle allerdings auch imaginär sein können. Es ist ferner auch nicht notwendig, daß die Wurzeln alle voneinander verschieden sind.

Betrachten wir z. B. die 4 Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 10x^3 + 27x^2 + 20x + 50 = 0\,,$$

d. h.

$$(x+5)(x+5)(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) = 0\,.$$

Die Gleichung hat in Wirklichkeit nur eine Wurzel, -5. Die zweite Wurzel fällt mit dieser zusammen, und die beiden anderen sind imaginär.

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = -5$$
$$x_3 = -\sqrt{-2}$$
$$x_4 = +\sqrt{-2}\,.$$

Einfache Regeln zur Zerlegung eines Polynoms in dieser Weise gibt es nur für die quadratische Gleichung. Die Lösung quadratischer Gleichungen ist aber schon besprochen worden. Schon für die Gleichung 3. Grades sind diese Regeln sehr kompliziert, und für Gleichungen 5. oder höheren Grades gibt es überhaupt keine allgemein anwendbaren Regeln für die exakte Lösung.

42. Die transzendenten Funktionen.

a) Die trigonometrischen Funktionen.

Denken wir uns einen Kreisradius von der Länge $= 1$ im positiven Sinne (also „links herum“) allmählich gedreht und verfolgen den Sinus des Winkels für jede einzelne Lage. Wir bemerken, daß $\sin 0 = 0$, daß der Sinus anwächst bis zu $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, dann wieder abfällt bis $\sin\pi = 0$. Weiterhin

(Fig. 49) kehrt sich die Richtung des Sinus um, wir nennen jetzt den Sinus negativ. Ist also

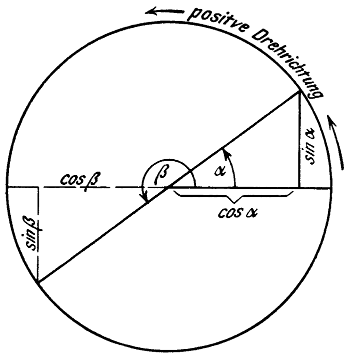

Fig. 49.

$$\beta = \pi + \alpha \,,$$

so ist

$$\sin\beta = -\sin\alpha \,.$$

Bei $\frac{3}{2}\pi$ wird

$$\sin\tfrac{3}{2}\pi = -1$$

und erreicht schließlich bei 2π wieder den Wert

$$\sin 2\pi = 0 \,.$$

Dreht man weiter, so wiederholen sich die Werte des Sinus bei jeder Umdrehung. Man nennt den Sinus deshalb eine p e r i o d i s c h e F u n k t i o n.

Es ist allgemein

$$\sin\alpha = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \alpha) = \sin(n \cdot 2\pi + \alpha) \,,$$

wo n jede ganze Zahl bedeuten kann.

Der Kosinus hat einen etwas anderen Gang.

$$\cos 0 = 1 \,, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \,, \qquad \cos\pi = -1 \,,$$

weil seine Richtung hier entgegengesetzt ist,

$$\cos\tfrac{3}{2}\pi = 0 \,, \qquad \cos 2\pi = \cos 0 = 1 \,.$$

Die Periodizität ist hier ebenfalls vorhanden. Graphisch dargestellt, sieht die Sinusfunktion so aus:

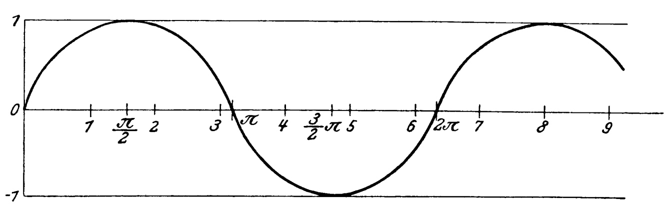

Fig. 50. Die Sinuslinie.

Verschiebt man den Punkt 0 der Abszisse an die Stelle, wo in der Fig. 50 $\frac{\pi}{2}$ steht, so stellt die Kurve die Kosinuslinie dar.

Sinus- und Kosinuslinie unterscheiden sich daher nur durch die Lage des Anfangspunktes der Abszisse. Wir erhalten also eine Wellenlinie von sehr charakteristischer Gestalt.

43. Der Wert für $\operatorname{tg}\beta$ läßt sich aus der Definition $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ jederzeit berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 0 &= 0 \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} &= \infty \\ \operatorname{tg}\pi &= 0 \\ \operatorname{tg}\tfrac{3}{2}\pi &= \infty \\ \operatorname{tg} 2\pi &= 0\,. \end{aligned}$$

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ steigt also der tg-Wert von 0 bis ∞. Man könnte nun bei oberflächlicher Betrachtung meinen, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π falle er einfach von ∞ wieder auf 0. Das ist aber falsch. Z. B.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\text{positive Zahl}}{\text{negative Zahl}}\,.$$

Mit anderen Worten Die Tangente hat im zweiten Quadranten einen negativen Wert, sie kann also nicht einfach von ∞ auf 0 abfallen. Verfolgen wir deshalb graphisch, wie der Wert der Tangente sich in Wirklichkeit ändert. Zwischen 0 und π steigt die Tangente von 0 auf ∞. Betrachten wir den Verlauf der Kurve von π an rückwärts, so fällt sie zwischen π und $\frac{\pi}{2}$ von 0 bis $-\infty$. Im Punkte $\frac{\pi}{2}$ ist die

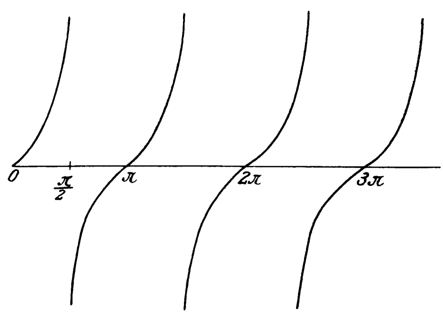

Fig. 51. Die Tangentenlinie.

Tangente daher sowohl $+\infty$ wie $-\infty$, d. h. sie hat gar keinen bestimmten Wert. In unendlich kleiner Entfernung links von $\frac{\pi}{2}$ ist sie aber fast $= +\infty$, in unendlich kleiner Entfernung rechts von $\frac{\pi}{2}$ ist sie fast $= -\infty$. Es hat daher in der Umgebung des Punktes $\frac{\pi}{2}$ eine unendlich kleine Änderung der unabhängigen Variablen eine unendlich große Veränderung der abhängigen zur Folge. Man sagt in solchem Fall: Die Kurve der Tangente ist im Punkt $\frac{\pi}{2}$ unstetig, und definiert einen Unstetigkeitspunkt einer Kurve als einen Punkt, bei dem eine unendlich kleine Änderung der unabhängigen Variablen eine endliche (oder sogar unendlich große) Änderung der abhängigen zur Folge hat.

Eine Kurve ist dagegen stetig, wenn überall eine unendlich kleine Änderung von x auch nur eine unendlich kleine Änderung von y im Gefolge hat.

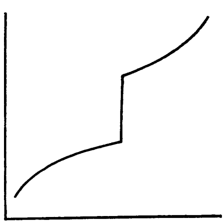
Fig. 52. Kurve mit Unstetigkeitspunkt.

Die Art der Unstetigkeit der Tangentenfunktion besteht darin, daß y an einer Stelle (bzw. mehreren Stellen) $= \infty$ wird und im nächsten Augenblick wieder einen endlichen Wert mit verkehrtem Vorzeichen hat. Es kann aber sonst eine Unstetigkeit auch durch einen einfachen, endlichen Sprung in der Kurve entstehen. Eine solche Unstetigkeitsstelle ist dadurch charakterisiert, daß ein Stück der Kurve durch eine genau senkrecht zur x-Achse verlaufende Gerade dargestellt wird. Zwischen einem Punkt der Abszisse unmittelbar vor dieser Stelle und einem solchen unmittelbar hinter dieser Stelle wächst y durch einen Sprung (Fig. 52).

b) Die Exponentialfunktion und der Logarithmus.

44. Unter einer Exponentialfunktion versteht man eine solche, bei der die eine Variable als Exponent auftritt, z. B.

$$y = 2^x \quad \text{(dargestellt in Fig. 53).}$$

Ist eine Funktion

$$y = a^x$$

gegeben, so kann man dafür auch schreiben

$$y = (e^p)^x \quad \text{oder} \quad e^{p \cdot x},$$

wenn man $e^p = a$ setzt. Hier ist e irgend eine, von a verschiedene Zahl, und p derjenige Exponent, der die Bedingung

$$e^p = a$$

erfüllt. Man könnte also sämtliche Exponentialfunktionen auf eine einzige Basis beziehen, wenn es irgendwie vorteilhaft sein sollte. Das ist nun in der Tat der Fall, aber wir werden erst später sehen, welches diese bevorzugte Basis ist

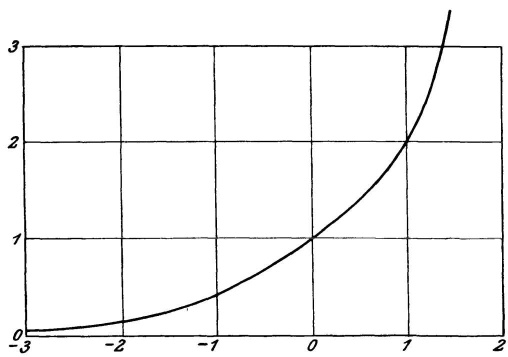

Fig. 53. $y = 2^x$.

Die logarithmische Funktion

$$y = \log^a x$$

ist eine Umkehrung der Exponentialfunktion $x = a^y$, wo a eine Konstante ist und als die Basis des Logarithmensystems bezeichnet wird. Aus äußeren Gründen, infolge der dekadischen Beschaffenheit unseres Ziffernsystems, nehmen im praktischen Rechnen die Logarithmen mit der Basis 10 (die dekadischen oder Briggschen Logarithmen) eine bevorzugte Stellung ein, während rein mathematisch die schon bei der Exponentialfunktion erwähnte Basis e bevorzugt ist, deren Größe und Definition erst später gegeben werden kann.

45. Umformung von Funktionen zwecks einfacherer graphischer Darstellung.

Gegeben sei die Funktion $p = a \cdot q^n$.

Die als Exponent fungierende Konstante n mag jeden beliebigen Wert annehmen können. Ist $n = 1$, so erhalten wir eine Gerade, ist $n = 2$, erhalten wir eine Parabel. Bei allen anderen Werten erhalten wir irgendwie gekrümmte Kurven. Durch eine kleine Umformung der Gleichung können wir aber zu einer Funktion gelangen, deren Darstellung viel einfacher ist.

Logarithmiert man nämlich obige Gleichung, so wird

$$\log p = \log a + n \log q .$$

Hier sind $\log a$ und n Konstanten, und die beiden Variablen heißen nunmehr $\log p$ und $\log q$. Die Gleichung hat nunmehr die allgemeine Form

$$y = A + Bx$$

und stellt demnach eine Gerade dar. Demnach ist in dieser Darstellungsweise A die Höhe der Ordinate y, wenn $x = 0$, und B ist die Tangente des Neigungswinkels der Geraden.

Es sei z. B. gegeben die Funktion

$$p = \frac{2}{3} \cdot q^{\frac{1}{2}} .$$

Diese Funktion, graphisch dargestellt, ergibt folgendes Bild (Fig. 54):

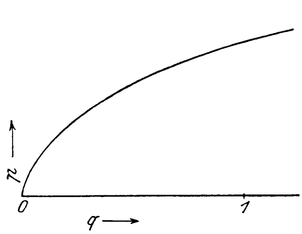

Fig. 54.

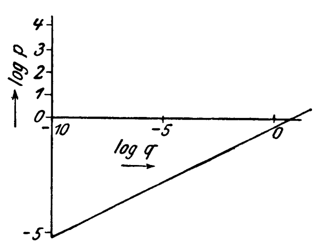

Fig. 55.

Logarithmiert, ergibt sich (Fig. 55)

$$\log p = \log \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log q$$

$$= -0{,}176 + \frac{1}{2} \log q .$$

Diese Darstellungsweise bietet in der Praxis große Vorteile.

Ebenso wird aus der Hyperbel

$$xy = c \quad \text{oder} \quad y = \frac{c}{x}$$

durch Logarithmieren

$$\log y = \log c - \log x$$

ebenfalls eine Gerade.

Beispiel. Es werden je v ccm (z. B. je 50 ccm) einer Lösung von a Millimol Azeton auf den Liter mit m g Kohle geschüttelt. Dabei wird ein Teil des Azetons von der Kohle adsorbiert. Es sei x die Menge des adsorbierten Azetons, so ist also $\frac{x}{m}$ die von der Gewichtseinheit der Kohle (1 g) adsorbierte Menge Azeton. Dann ist $\frac{a-x}{v}$ die Konzentration des Azetons in der zurückbleibenden Lösung. Es fanden sich nun in einem Versuch folgende korrespondierende Zahlen für verschiedene Bedingungen.

Adsorbierte Menge des Azetons dividiert durch die Kohlenmenge $\frac{x}{m}$	Nicht adsorbierte Menge des Azetons pro ccm $\frac{a-x}{v} = y$
0,208	0,234
0,618	1,465
1,075	4,103
1,499	8,862
2,081	17,759
2,882	26,897

Wir wollen nun aus diesen Daten sehen, ob die von der Kohleneinheit adsorbierte Menge, $\frac{x}{m}$, sich zu der frei gebliebenen Menge y, in irgendeine gesetzmäßige Beziehung bringen läßt. Wir stellen y als Funktion von x graphisch dar und finden eine Kurve ähnlich wie Fig. 54, deren Form uns nicht geläufig ist. Wir versuchen jetzt, ob nicht die Logarithmen der gefundenen Werte in einer leichter erkennbaren Beziehung zueinander stehen. Die dekadischen Logarithmen sind:

$\log \frac{x}{m}$	$\log \frac{a-x}{v}$
— 0,682	— 0,631
— 0,209	+ 0,166
+ 0,027	+ 0,613
+ 0,176	0,947
+ 0,318	1,249
+ 0,460	1,430

Tragen wir nunmehr $\log \frac{x}{m}$ als Funktion von $\log \frac{a-x}{v}$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhalten wir folgende Kurve (Fig. 56).

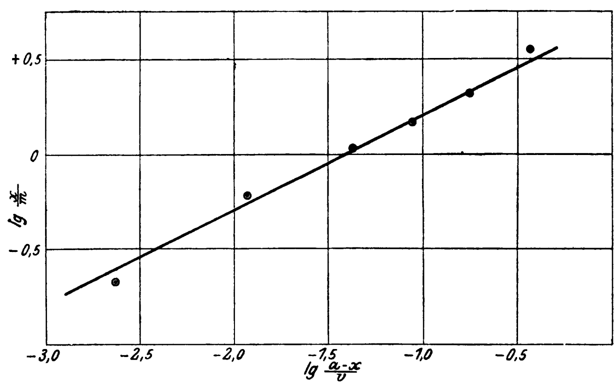

Fig. 56.

Alle Punkte liegen mit einer Genauigkeit, wie es in Anbetracht der Versuchsfehler nicht besser erwartet werden kann, auf einer Geraden. Daraus folgt sofort:

$$\log \frac{x}{m} = n + b \cdot \log \frac{a-x}{v}.$$

Hier ist n die Höhe der Ordinate im Nullpunkt der Abszisse, und $b = \operatorname{tg} \alpha$.

Für die Konstante n können wir natürlich auch den Logarithmus einer anderen Konstanten ν schreiben

$$\log \frac{x}{m} = \log \nu + b \cdot \log \frac{a-x}{v},$$

wodurch die Gleichung noch einfacher wird. Jetzt folgt nämlich aus derselben

$$\frac{x}{m} = \nu \cdot \left(\frac{a-x}{v}\right)^b,$$

b ergibt sich aus der Figur durch graphische Ausmessung $= 0{,}52$, und $\log \nu = 0{,}709$, also $\nu = 5{,}12$.

Daher heißt das Gesetz, welches die beiden Variablen miteinander in Beziehung bringt, nunmehr

$$\frac{x}{m} = 5{,}12 \cdot \left(\frac{a-x}{v}\right)^{0,52}.$$

Ein derartiges Gesetz

$$c_1 = a \cdot c_2^b,$$

wo $c_1 = \frac{x}{m}$ und $c_2 = \frac{a-x}{v}$ ist, gilt für alle Adsorptionen. Die Konstante a, die man auch den Adsorptionskoeffizienten nennen kann, wird um so größer, je leichter adsorbierbar der betreffende Stoff ist. Die Konstante b, der Adsorptionsexponent, ist in der Regel etwa $= 0{,}5$, bald ein wenig größer, bald kleiner.

46. Andere graphische Darstellungen der Funktionen.

Das rechtwinklige Koordinatensystem ist nur eine der unendlich mannigfaltigen möglichen Darstellungsweisen mathematischer Funktionen. Es mögen hier noch zwei andere Arten geschildert werden.

a) Darstellung durch Flächen.

Die unabhängige Variable, x, werde wieder auf der Abszisse AB (Fig. 57) in gewohnter Weise eingetragen. Die abhängige Variable y werde dagegen durch den Flächeninhalt ABC, der also von zwei Geraden und einer Kurve begrenzt wird, wiedergegeben. Im allgemeinen ist es schwierig, diese Art der Darstellung praktisch durchzuführen. Ein besonders einfacher Fall ist z. B. die Funktion

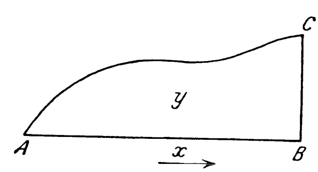

Fig. 57.

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

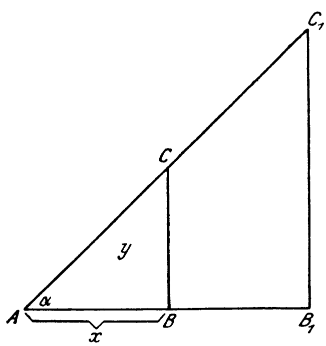

Fig. 58.

Sie wird, auf diese Weise dargestellt, folgende Gestalt haben (Fig. 58:

$$\alpha = 45^0 .$$

Dann ist $\triangle ABC = \frac{\overline{AB^2}}{2}$.

Also $y = \frac{x^2}{2}$.

In anderen Fällen ist es sehr kompliziert, diejenige Kurve graphisch zu konstruieren, die die Bedingungen der Funktion erfüllt. Trotzdem werden wir auf diese theoretisch höchst bedeutungsvolle Darstellungsweise bei Gelegenheit der Differential- und besonders der Integralrechnung zurückgreifen müssen.

b) Darstellung durch Polarkoordinaten.

Die unabhängige Variable wird durch die Größe des Winkels (Fig. 59) BOA bzw. $B'OA = \varphi$ dargestellt, gemessen an der Größe des Kreisbogens, den dieser Winkel umspannt, indem der Radius des Kreises $=1$ gesetzt wird (das übliche Winkelmaß in der höheren Mathematik). Dann wird die abhängige Variable durch die Länge des zugehörigen Strahles OB bzw. OB_1 ausgedrückt.

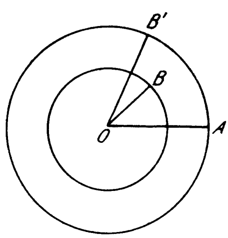

Fig. 59.

Diese Darstellungsweise hat unter anderem für die Astronomie große Vorteile.

Ein Beispiel soll die Darstellung einer Funktion in Polarkoordinaten erläutern. Wir wählen die Funktion

$$y = a\varphi .$$

Wir stellen (Fig. 60) φ als Winkel, y als Strahl dar. Der Pol des Systems ist O, auf der Achse OB findet sich eine Streckenteilung. Die Figur stellt die Funktion $y = \varphi$ dar (a ist also $= 1$). Betrachten wir z. B. den Strahl OD, so ist dieser, an der Achse OB gemessen, $= \frac{3}{4}\pi$, und der zugehörige Winkel BOC ist ebenfalls $= \frac{3}{4}\pi$, d. h. $135°$. Man kann aber den Winkel COB auch als $2\pi + \frac{3}{4}\pi$ auffassen, und dann gehört ihm der Strahl OE zu. Ebenso kann man $\sphericalangle BOC$ als $4\pi + \frac{3}{4}\pi$, als $8\pi + \frac{3}{4}\pi$ usw. auffassen, und jedem dieser Winkel, welche in Wirklichkeit nur ein einziger Winkel sind, entspricht ein besonderer Wert von y. Es entsprechen also jedem Wert von φ in Wirklichkeit unendlich viele Werte von y, und die Endpunkte aller y-Strahlen stellen eine endlose Spirale dar. Man nennt sie die Archimedessche Spirale.

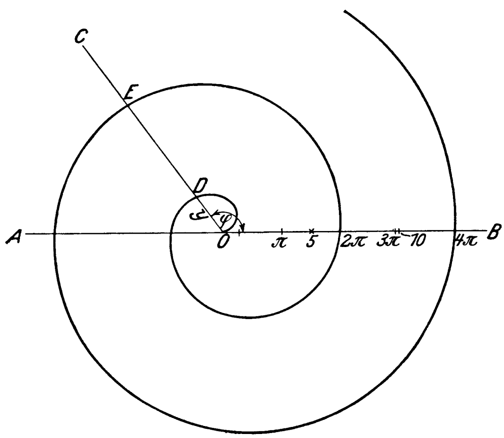

Fig. 60.

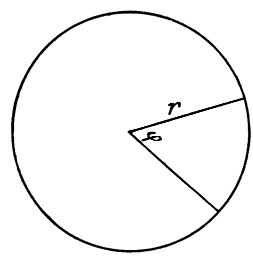

Fig. 61.

Sehr einfach wird die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten; es ist nämlich

$$y = r\,,$$

wo r eine Konstante ist, d. h. y ist unabhängig von φ (Fig. 61).

Schließlich wollen wir noch das allgemeine Verfahren kennen lernen, um eine geometrische Kurve, deren Gleichung uns in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist, in Polarkoordinaten auszudrücken.

Gegeben seien (Fig. 62) die rechtwinkligen Achsen OB als x-Achse und AO als y-Achse. Die gezeichnete Kurve entspreche der Bedingung, daß an jedem beliebigen Punkte $y = f(x)$, d. h. $CE = f(DC)$ oder $= f(OE)$.

Unsere Aufgabe ist es jetzt, die Lage des Punktes C so zu definieren, daß er durch die Entfernung von einem gegebenen Punkt und durch den Winkel, den die Verbindungslinie dieser zwei Punkte mit einer gegeben Achse bildet, bestimmt wird.

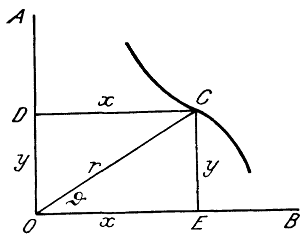

Fig. 62.

Der gegebene Punkt, der Pol des neuen Koordinatensystems, soll mit dem Anfangspunkt des alten, gewöhnlichen zusammenfallen und O sein. Die Achse soll mit der x-Achse des rechtwinkligen Systems zusammenfallen und OB sein. Dann wäre die Lage des Punktes C in Polarkoordinaten definiert, wenn wir $CO = r$ als Funktion des Winkels $COB = \vartheta$ darstellen.

Es ist nun, wie aus der Figur ersichtlich, $\sin\vartheta = \frac{y}{r}$ und $\cos\vartheta = \frac{x}{r}$.

Folglich ist $y = r \cdot \sin\vartheta$ und $x = r \cdot \cos\vartheta$.

Hiermit sind die Beziehungen zwischen dem alten und dem neuen Koordinatensystem gegeben.

Beispiel: Die Gleichung des Kreises in rechtwinkligen Koordinaten ist

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Wie lautet die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten? Nach der soeben entwickelten Regel ist

$$y = r \cdot \sin\vartheta,$$
$$x = r \cdot \cos\vartheta.$$

Dies ergibt, in die vorige Gleichung eingesetzt:

$$r^2 \cdot \sin^2\vartheta = a^2 - r^2 \cdot \cos^2\vartheta,$$
$$r^2(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = a^2,$$
$$r^2 = a^2,$$
$$r = a$$

als Gleichung des Kreises, welche mit der (S. 85) abgeleiteten übereinstimmt, wenn man die Buchstabenbezeichnung entsprechend ändert.

Dritter Abschnitt.

Differentialrechnung.

47. Es stelle die Kurve $MCC'N$ irgendeine Funktion dar, so daß also

$$y = f(x).$$

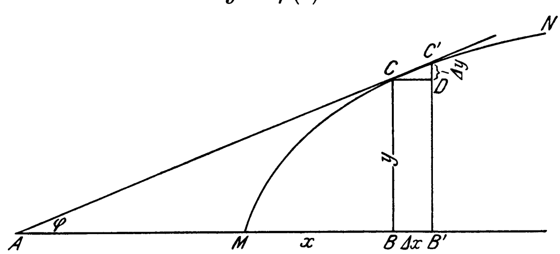

Fig. 63.

Dann ist, wenn wir x die Größe MB erteilen, $y = BC$; und wenn $x = MB'$, so ist $y = B'C'$. Im allgemeinen ist jede Kurve eine irgendwie gekrümmte Linie. Wir denken uns aber, daß C und C' so dicht beieinanderliegen, daß das Kurvenstück CC' als beinahe geradlinig betrachtet werden darf. Wir legen uns nunmehr folgende wichtige Frage vor:

„Wie verhält sich der **Zuwachs von y** zu dem entsprechenden **Zuwachs von x**?"

Der Zuwachs von x ist einfach $= BB'$. Wir nennen ihn Δx. Der entsprechende Zuwachs von y wird graphisch dadurch kenntlich, daß wir CD parallel AB ziehen. Dann ist $DB' = CB = y$, und DC' ist der Zuwachs von y, den wir Δy nennen wollen. Die gesuchte Größe ist also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Es ist also zunächst

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{DC'}{BB'}, \quad \text{also auch} \quad = \frac{DC'}{CD},$$

da $BB' = CD$.

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck CDC'

$$\operatorname{tg} \sphericalangle C'CD = \frac{DC'}{CD},$$

welches gerade die gesuchte Größe ist. Verlängern wir das (beinahe) geradlinige Stückchen der Kurve, CC', durch Ausziehen einer geraden Linie in gleicher Richtung, oder, was dasselbe ist, legen wir die Tangente an die Kurve in dem Punkt C bzw. C' (was dasselbe ist, weil wir ja C und C' so nahe beieinander liegend denken, daß die Tangente für beide Punkte dieselbe Richtung hat), welche die x-Achse im A schneiden möge, so ist $\sphericalangle CAB$, den wir φ nennen, $= \sphericalangle C'CD$. Es ist daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi .$$

Wir nahmen nun bisher an, das Stück CC' sei zwar klein, aber doch von endlicher Größe. Nichts steht im Wege, dieses Stück *gedanklich* immer kleiner werden zu lassen, so daß es schließlich unendlich klein, niemals jedoch völlig gleich Null wird. Dann ist die bisher nur grob angenäherte Annahme, die Tangente in Punkt C sei dieselbe wie in C', mit viel größerer Annäherung zutreffend, und zwar um so strenger, je kleiner wir Δx annehmen. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nähert sich daher, wenn wir Δx kleiner und kleiner werden lassen, einem ganz bestimmten Grenzwert, den es nicht überschreitet, wenn auch Δx unendlich klein wird. Denken wir uns die Zunahme von x unendlich klein, so nennen wir den Zuwachs von x nicht mehr Δx, sondern bezeichnen es nach *Leibniz* mit dem Symbol dx und nennen es ein *Differential*; ebenso ist dy das Differential von y, und die gesuchte Größe $\frac{dy}{dx}$ ist der *Differentialquotient*.

Es ist also dieser

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$$

oder in Worten:

Der Differentialquotient einer jeden Funktion ist die (trigonometrische) Tangente des Winkels, den die in dem betreffenden Punkt an die Kurve gelegte (geometrische) Tangente mit der x-Achse bildet.

48. Im allgemeinen ist also der Differentialquotient einer Funktion von Punkt zu Punkt verschieden; nur wenn die Kurve eine gerade Linie ist, ist der Differentialquotient stets derselbe; die geometrische Tangente ist dann diese gerade Linie selbst.

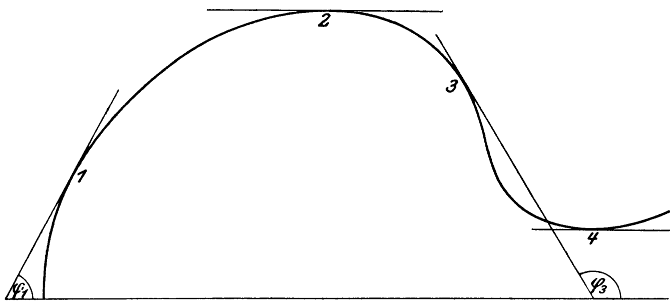

Fig. 64.

Betrachten wir nun eine Kurve von nebenstehender Form (Fig. 64). Der Differentialquotient im Punkt *1* ist $= \mathrm{tg}\,\varphi_1$. Da dieser Winkel ein spitzer ist, so ist $\mathrm{tg}\,\varphi$ eine positive Zahl. Das ist immer der Fall, wenn die Kurve ansteigt. Im Punkt *2* hat die Kurve eine besondere Eigenschaft. Hier wird die Tangente parallel zur x-Achse, sie bildet also den Winkel 0 mit ihr, und der Differentialquotient ist hier $\mathrm{tg}\,0 = 0$. Legen wir die Tangente an einen absteigenden Teil der Kurve, so bekommen wir den stumpfen Winkel φ_3; nun ist $\mathrm{tg}\,\varphi_3 = -\mathrm{tg}(180^0 - \varphi_3)$, und der Wert wird negativ gezählt. Im Punkt *4* ist wieder ein besonderer Punkt und $\mathrm{t}\varphi = 0$. Solange eine Kurve ansteigt, ist ihr Differentialquotient positiv, solange sie abfällt, ist er negativ.

Ausgenommen also bei der geraden Linie ist der Diffentialquotient von Punkt zu Punkt veränderlich und daher selbst eine Funktion von x. In diesem Sinne, als Funktion von x gedacht, nennen wir den Differentialquotienten die Ableitung von x und schreiben diese $f'(x)$ oder y'.

Ist also

$$y = f(x),$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

Je größer die Krümmung eines Kurvenstückes ist, um so schneller ändert sich die Größe des Differentialquotienten von Punkt zu Punkt. Immer aber wird einer unendlich kleinen Änderung von x auch eine unendlich kleine Änderung von $\frac{dy}{dx}$ entsprechen.

Nur wenn die Kurve an einem Punkte eine (nicht abgerundete) Ecke hat, so hat eine unendlich kleine Änderung von x an dieser Stelle eine endliche Änderung von $\frac{dy}{dx}$ zur Folge. Z. B. in Fig. 64, welche die Kurve BAC darstellt, ist die Richtung der Tangente unmittelbar links von $A = AO$, unmittelbar rechts von $A = AP$. In A selbst hat die Tangente überhaupt keine bestimmte Richtung, sondern der Punkt A ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihm die Tangente von der Richtung nach O plötzlich in die nach P umspringt. Man nennt A einen Unstetigkeitspunkt. Wir gewinnen hier also eine zweite Definition (vgl. S. 78) der Unstetigkeit:

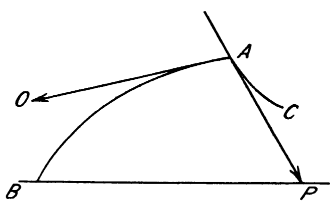

Fig. 65.

Ein Unstetigkeitspunkt ist ein solcher, in dem der Differentialquotient unbestimmt ist.

1. Differenzierung der Potenzen von x.

49. Es ist nunmehr unsere Aufgabe, die Differentialquotienten für die wichtigsten Funktionen wirklich rechnerisch zu entwickeln.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall. Es sei

$$y = ax + b ,$$

also eine geradlinige Funktion. Die Tangente der Kurve ist die gerade Linie selbst und

$$\operatorname{tg} \varphi = a ,$$

nach dem S. 58 Gesagten.

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = a\,.$$

Hier ist zunächst zu beachten, daß der Wert von $\frac{dy}{dx}$ erstens unabhängig von b und zweitens konstant ($= a$) ist.

50. Wir wollen jetzt den Differentialquotienten für die Funktion

$$y = x^2$$

bilden. Es ist hier (Fig. 66)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C'D}{CD}\,.$$

Um dies auszuwerten, vergegenwärtigen wir uns, daß

$$BC = (AB)^2$$

und

$$B'C' = (AB')^2$$

nach der allgemeinen Bedingung der Funktion ist.

Nun sei

$$BC = y\,;$$

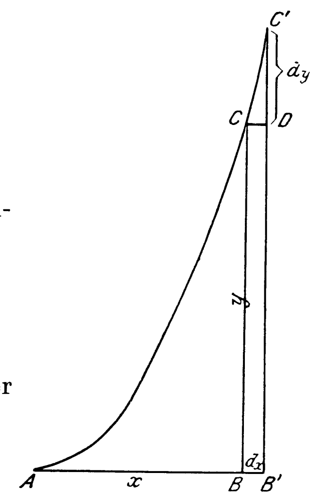

Fig. 66.

dann ist

$$B'C' = y + dy$$

und es sei

$$AB = x\,;$$

dann ist

$$AB' = x + dx\,.$$

Es ist also

$$y = x^2$$

und

$$y + dy = (x + dx)^2\,.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen können wir den gesuchten Wert berechnen. Wenn wir ausmultiplizieren, so ist

$$y = x^2\,,$$

$$\underline{y + dy = x^2 + 2x\,dx - (dx)^2\,.}$$

Die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, gibt:

$$dy = 2\,x\,dx - (dx)^2\,. \qquad (1)$$

Nun müssen wir uns erinnern, daß dx eine sehr kleine Größe ist. Dann ist aber $(dx)^2$ noch viel kleiner. Ist z. B. $dx = 0{,}0001$, so ist $(dx)^2$ nur noch 0,00000001; und wir können daher $(dx)^2$, wenn es als Summand neben dx steht, ohne wesentlichen Fehler vernachlässigen. Denken wir uns dx *unendlich* klein, so wird diese Vernachlässigung nicht *fast* richtig, sondern *vollkommen* richtig sein.

Wir können hier ein allgemeines Gesetz formulieren. Bezeichnen wir

y	und	x	als endliche Größen,			
dy	und	dx	als unendlich	kleine	Größen	erster Ordnung,
$(dy)^2$	und	$(dx)^2$	„ „	„	„	zweiter Ordnung,
$(dy)^n$	und	$(dx)^n$	„ „	„	„	n ter Ordnung,

so können wir eine Größe höherer Ordnung vernachlässigen, wenn sie neben einer Größe niederer Ordnung als *Summand* (oder *Subtrahendus*) steht. Es ist also

$x + dx$ nicht zu unterscheiden von x,

$dx + (dx)^2$ „ „ „ „ dx.

(Dagegen ist $\frac{dy}{dx}$ eine *endliche* Größe.)

In diesem Sinne können wir die Gleichung (1) einfach schreiben

$$dy = 2\,x\,dx$$

oder

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2\,x\,.}$$

Also: Wenn

$$y = x^2\,,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,,$$

oder wie wir schreiben können

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2\,x\,.$$

51. Es sei nun allgemein

$$y = x^n .$$

Um daraus $\frac{dy}{dx}$ zu berechnen, erinnern wir uns zunächst wieder daran, daß dann auch

$$y + dy = (x + dx)^n$$

ist.

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz allgemein

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \ldots,$$

weiter brauchen wir die Reihe nicht zu entwickeln. Es ist also

$$y + dy = x^n + n\, x^{n-1} \cdot dx + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (dx)^2 \ldots$$

Aus demselben Grunde wie oben verschwindet das letzte ausgeschriebene Glied, welches $(dx)^2$ enthält, und alle folgenden, die gar noch höhere Potenzen von dx enthalten. Es ist also

$$y + dy = x^n + n \cdot x^{n-1} dx .$$

Da

$$y = x^n ,$$

so ist

$$dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$$

und

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}}$$

oder

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1} .$$

Aus dieser allgemeinen Gleichung können wir schon vieles einzelne folgern.

Es ist z. B.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} .$$

Wenn also

$$y = \frac{1}{x^n} ,$$

so können wir schreiben

$$y = x^{-n}$$

und es folgt

$$\frac{dy}{dx} = -n\,x^{-n-1}$$

oder

$$= -\frac{n}{x^{n+1}}\,.$$

Ist ferner

$$y = \frac{1}{x^2} \qquad \text{oder} \qquad = x^{-2}\,,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = -2\,x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\,.$$

Ferner ist

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,,$$

also für

$$y = \sqrt[n]{x}$$

ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Wenn

$$y = \sqrt{x}\,,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

usw.

Die Anwendung der allgemeinen Formel $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ für negative oder für gebrochene Werte von n bedarf noch einer besonderen Begründung, denn zur Ableitung der allgemeinen Formel benutzten wir den binomischen Lehrsatz, und dieser ist in der elementaren Mathematik bisher nur für ganze und positive Werte von n entwickelt worden (S. 28). Wir wollen an zwei Beispielen zeigen, daß die direkte Entwicklung des Differentialquotienten zu dem gleichen Resultat führt, wie ihn die verallgemeinerte Formel verlangen würde. Z. B. Gegeben sei

$$y = \frac{1}{x} \, (= x^{-1}) \, ,$$

dann ist

$$\frac{y + dy = \dfrac{1}{x + dx} \, ,}{}$$

$$dy = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - dx}{x^2 + x\,dx} \, ,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + x\,dx} \, .$$

Das unendlich kleine Glied $x\,dx$ können wir als Summand neben x^2 vernachlässigen, und es ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \, (= -x^{-2}) \, ,$$

das gleiche Resultat wie es aus der Funktion $y = x^{-1}$ mit Hilfe der allgemeinen Formel sich ergeben würde.

Ferner sei gegeben

$$y = x^{\frac{2}{3}} .$$

Dann ist

$$y^3 = x^2 \, ,$$

$$(y + dy)^3 = (x + dx)^2 \, .$$

Durch Subtraktion der ersten von der ausmultiplizierten zweiten Gleichung ergibt sich

$$3\,y^2\,dy + 3\,y\,(dy)^2 + (dy)^3 = 2\,x\,dx + (dx)^2 \, .$$

Auf der linken Seite vernachlässigen wir das zweite und dritte Glied, auf der rechten das zweite und erhalten

$$3\,y^2\,dy = 2\,x\,dx \, ,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x}{3\,y^2} \, .$$

Setzen wir für y seinen Wert $x^{\frac{2}{3}}$ ein, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x}{3 \cdot x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \, ,$$

welches dasselbe Resultat ist, wie es die Anwendung der allgemeinen Formel verlangen würde. Diese Entwicklung ist allgemein anwendbar und damit die Berechtigung erwiesen, die allgemeine Formel von S. 93 auch für negative und gebrochene Werte von n zu benutzen.

52. Es sei

$$y = x^n + a\,,$$

wo a eine Konstante ist, so unterscheidet sich die Kurve von der durch die Funktion

$$y = x^n$$

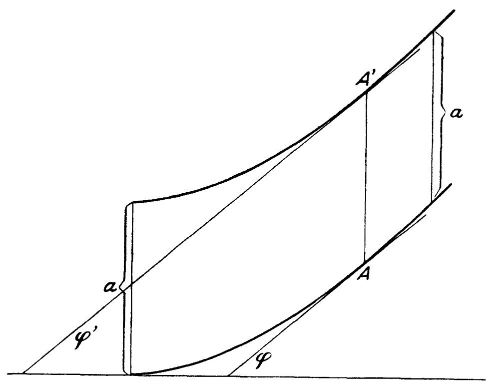

Fig. 67.

dargestellten nur dadurch, daß sie um das Stück a höher liegt als die andere. Folglich ist die in dem beliebigen Punkt A gelegte Tangente parallel mit der durch den senkrecht darüber gelegenen Punkt A' gelegten Tangente, und $\sphericalangle\, \varphi = \varphi'$. Es ist daher der Differentialquotient in beiden Fällen gleichgroß. Allgemein ist die Ableitung von

$$y = f(x)$$

dieselbe wie die von

$$y = f(x) + a\,.$$

Also ist, wenn

$$y = x^n + a\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

usw.

53. Differenzierung von e^x und $\log x$.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Ableitung von $\log x$ zu bilden. Es ist also

$$y = \log x \tag{1}$$

und daher

$$y + dy = \log(x + dx). \tag{2}$$

Die Definition des Logarithmus ist folgende.

Wenn

$$a^b = c,$$

so ist

$$b = \overset{a}{\log} c.$$

Wir bezeichnen a als die Basis des Logarithmus. Wir lassen die Basis des Logarithmus in unserer Gleichung (1) und (2) zunächst unbestimmt.

Durch Subtraktion von (2) und (1) erhalten wir

$$dy = \log(x + dx) - \log x.$$

Da

$$\log a - \log b = \log\frac{a}{b},$$

so ist

$$dy = \log\frac{x + dx}{x},$$

$$dy = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx}\cdot\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Nun ist

$$c\cdot\log b = \log b^c,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}}.$$

Wir wollen nun die (in der Formel nicht unmittelbar vorkommende) Größe $\frac{x}{dx}$ mit n bezeichnen.

Es ist dann

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{dx} = \frac{n}{x},$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Es handelt sich nun zunächst darum, den Wert $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zu berechnen, wenn dx unendlich klein, also n unendlich groß wird. Ist

$n = 1$, so ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$= 2$
$n = 2$, so ist	$= 2{,}225$
$n = 10$	$= 2{,}594$
$n = 100$	$= 2{,}705$
$n = 1000$	$= 2{,}717$
$n = 10000$	$= 2{,}718$.

Auf 3 Dezimalen berechnet, ändert sich also der Wert fast nicht mehr, wenn wir $n = 1000$ oder beliebig viel größer setzen, und es ist daher der Näherungswert von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ auf 3 Dezimalen $= 2{,}718$.

Ebenso können wir, weiter fortfahrend, den Wert mit jeder beliebigen Annäherung auf jede Zahl von Dezimalstellen genau berechnen und finden ihn z. B. auf 7 Dezimalen $= 2{,}7182818$. Wir nennen diese Zahl e. Wir definieren sie durch die Formel

$$e = \lim_{n=\infty} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

lim = Grenzwert, Limes, und lesen diese Formel

$$e = \text{Grenzwert von} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{für } n = \infty.$$

Wir wollen bei dieser Gelegenheit nicht versäumen, den Begriff des Näherungswertes oder Grenzwertes noch einmal zu erläutern. Der Näherungswert eines Ausdrucks ist nicht etwa eine Zahl, welche angenähert oder ungefähr ihm gleichkommt, sondern eine ganz bestimmte Größe, welche der Ausdruck unter einer bestimmten Bedingung erreicht. Diese Bedingung ist in der Regel die, daß eine Veränderliche durch andauernde Verkleinerung schließlich $= 0$ wird, oder durch andauernde Vergrößerung schließlich $= \infty$ wird.

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e .$$

Diese Formel nimmt nun eine besonders einfache Form an, wenn wir es mit Logarithmen der Basis e selbst zu tun haben. Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \overset{e}{\log} e .$$

Nun ist allgemein $\overset{a}{\log} a = 1$, also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} .$$

Wir bezeichnen die Logarithmen mit der Basis e als natürliche Logarithmen und schreiben sie log. nat. oder ln.

Ist also $y = \ln x$, so ist

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

oder

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} .$$

54. Es sei gegeben

$$y = e^x .$$

Gesucht ist $\frac{dy}{dx}$.

Aus $y = e^x$ folgt $x = \ln y$.

Es ist also dieselbe Beziehung wie im vorigen Paragraphen, nur hat y die Bedeutung wie vorher x, und umgekehrt.

Es ist also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} .$$

Folglich

$$\frac{dy}{dx} = y .$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = e^x .$$

Wenn also

$$y = e^x ,$$

so ist auch

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = e^x .}$$

Diese Funktion ist die einzige, bei der die Ableitung gleich der Funktion selbst ist. Sie heißt die Exponentialfunktion.

55. Die Zahl e wurde definiert als

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ für } n = \infty .$$

Sie kann aber auch definiert werden

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots \text{ ad infinitum.}$$

Es bedeutet $n!$ (gesprochen n Fakultät) das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n .$$

Der Zusammenhang dieser beiden Definitionen ergibt sich, wenn man $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, worauf wir hier vorläufig nur hinweisen wollen (vgl. darüber S. 209).

Schließlich kann e auch als ein unendlicher Kettenbruch

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{\ldots}}}}$$

aufgefaßt werden, was wir hier ohne Beweis nur erwähnen wollen. Die Zahl e ist transzendent, d. h. ebensowenig wie die Zahl π durch irgendeine rationale Zahl mit absoluter Genauigkeit darstellbar.

56. Der Differentialquotient der Exponentialfunktion e^x kann noch auf andere Weise abgeleitet werden, welche gleichzeitig eine gute Anschauung von dem Wesen dieser Funktion gibt.

Es werde das Kapital von C Mark zu $p\,\%$ jährlichen Zinsen verzinst und die Zinsen am Schluß eines jeden Jahres dem Kapital zugeschlagen. Dann beträgt das Kapital

$$\text{nach 1 Jahr} \quad C\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

$$\text{nach 2 Jahren} \quad C\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,$$

$$\text{nach } x \text{ Jahren} \quad C\left(1+\frac{p}{100}\right)^x.$$

Nehmen wir nun an, daß bei gleichem Zinssatz, also $p\,\%$, auf das Jahr berechnet, die Zinsen schon alle halben Jahre dem Kapital zugeschlagen werden, so beträgt das Kapital

$$\text{nach } {}^1/_2 \text{ Jahr} \quad C\left(1+\frac{p}{200}\right),$$

$$\text{nach 1 Jahr} \quad C\left(1+\frac{p}{200}\right)^2,$$

$$\text{nach } x \text{ Jahren} \quad C\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2x}.$$

Denken wir uns das Intervall, nach welchem die Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden, immer weiter verkürzt, also etwa auf 1 Sekunde $= \frac{1}{31\,536\,000}$ Jahr, welchen Bruch wir $\frac{1}{\delta}$ nennen wollen, so beträgt das Kapital

$$\text{nach 1 Jahr} \quad C\left(1+\frac{p}{\delta\cdot 100}\right)^{\delta},$$

$$\text{nach } x \text{ Jahren} \quad C\left(1+\frac{p}{\delta\cdot 100}\right)^{\delta\cdot x}.$$

Bezeichnen wir $\frac{p}{100}$ mit q, so ist das Kapital y nach x Jahren

$$y = C\left(1 + \frac{q}{\delta}\right)^{\delta x}$$

und bezeichnen wir $\frac{q}{\delta}$ mit $\frac{1}{n}$, so daß $\delta = q \cdot n$, so ist

$$y = C\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot q \cdot x}$$
$$= C\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{qx}.$$

Hier ist also x, die Anzahl der Jahre, die unabhängige Variable und y, das nach x Jahren vorhandene Gesamtkapital, die abhängige Variable. C, das Anfangskapital, ist eine Konstante, ebenso q. Wenn wir nun die Zeit, nach welcher die Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden, immer weiter verkürzen, bis auf einen unendlich kleinen Wert, so nähert sich δ dem Wert ∞, also wird $\frac{q}{\delta}$ oder $\frac{1}{n}$ gleich 0 und $\frac{\delta}{q}$ oder n gleich ∞. Der in eckiger Klammer stehende Ausdruck ist also $= \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ für $n = \infty$, ist also $= e$ und

$$y = C \cdot e^{q \cdot x}.$$

Nun fragen wir nach der Bedeutung von dy, d. i. der Zuwachs des Kapitals nach einem sehr kurzen Zeitintervall. Nach der Voraussetzung der Zinsrechnung entsteht das zur Zeit $x + dx$ vorhandene Kapital $y + dy$ dadurch, daß wir das zur Zeit x vorhandene Kapital y mit $(1 + q \cdot dx)$ multiplizieren. Hier bedeutet dx ein äußerst kurzes Zeitintervall und dy die demselben entsprechende Kapitalvermehrung. Es ist also

$$y + dy = y(1 + q \cdot dx)$$
$$= y + yq \cdot dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = q \cdot y,$$

d. h. der Differentialquotient von y ist der Funktion y proportional.

Setzen wir für y seinen Wert $C \cdot e^{qx}$ ein, so ist

$$\frac{d\,(C \cdot e^{qx})}{dx} = q \cdot C \cdot e^{qx}.$$

Für $C = 1$ ist

$$\boldsymbol{\frac{d\,(e^{qx})}{dx} = q \cdot e^{qx}},$$

wovon ein spezieller Fall der ist, daß $q = 1$, und dann ist

$$\boldsymbol{\frac{d\,(e^{x})}{dx} = e^{x}},$$

welches Resultat mit dem obigen übereinstimmt.

In der Natur kommen nun häufig Fälle vor, bei denen ein gegebener Anfangswert sich nicht, wie bei der Verzinsung eines Kapitals, ständig vermehrt, sondern ständig vermindert, und bei denen die Art der Verminderung der Verzinsung eines Kapitals analog ist. Z. B. in einer Rohrzuckerlösung, welche nach Zusatz einer Säure mit der Zeit immer mehr Rohrzucker verliert und dafür Invertzucker bildet, oder bei der Radiumemanation, welche spontan zerfällt. Die Menge des Rohrzuckers vermindert sich also andauernd. Die in einem sehr kleinen Zeitteilchen verschwindende Menge Rohrzucker ist nun stets ein gewisser Bruchteil der in diesem Augenblick überhaupt vorhandenen Rohrzuckermenge, und das ist das Analoge mit der Verzinsung eines Kapitals, nur daß es sich beim Kapital um eine ständige Vermehrung, beim Zucker um eine ständige Verminderung handelt. Dieser Bruchteil, welcher bei der Zinsrechnung mit $\frac{p}{100}$ oder q bezeichnet worden war, sei hier k, und die zur Zeit $t = 0$, d. h. zu Anfang des Versuchs vorhandene Zuckermenge sei a. Dann ist nach Ablauf des Zeitteilchens dt eine Zuckermenge y_{dt} vorhanden, welche kleiner ist als a, und diese kann man sich dadurch berechnen, daß man von a das k-fache der Größe a abzieht, pro Zeiteinheit gerechnet. Für die Zeit dt gerechnet, muß man also das $k \cdot dt$-fache von a abziehen:

$$y_{dt} = a\,(1 - k \cdot dt).$$

Wir wollen uns unter dt einmal $\frac{1}{1000}$ Minute vorstellen. Dann ist also die Zuckermenge

$$
\begin{array}{r|l}
\text{nach } \frac{1}{1000} \text{ Minute} & = a\left(1 - \frac{1}{1000} \cdot k\right), \\
\text{nach } \frac{2}{1000} \text{ Minute} & = a\left(1 - \frac{1}{1000} \cdot k\right)^2, \\
\text{nach } \frac{1000}{1000} \text{ oder 1 Minute} & = a\left(1 - \frac{1}{1000} \cdot k\right)^{1000}, \\
\text{nach } t \text{ Minuten} & = a\left(1 - \frac{1}{1000} \cdot k\right)^{1000 \cdot t}
\end{array}
$$

oder allgemein ausgedrückt:

Nach der Zeiteinheit (einer Minute) ist die Zuckermenge y_1

$$y_1 = a(1 - k\,dt)^{\frac{1}{dt}}$$

und allgemein für die Zeit t ist die Zuckermenge y

$$y = a \cdot (1 - k\,dt)^{\frac{t}{dt}}.$$

Der Ausdruck $(1 - k\,dt)^{\frac{t}{dt}}$ ist wiederum Grenzwert einer bestimmten Funktion

$$\left(1 - \frac{k}{\delta}\right)^{t \cdot \delta} \text{ für } \delta = \infty.$$

wobei dt durch $\frac{1}{\delta}$ ersetzt ist.

Bezeichnen wir $\frac{k}{\delta}$ mit $\frac{1}{n}$, also δ mit $k \cdot n$, so ist dieser Ausdruck

$$= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{k \cdot t}$$

für $n = \infty$. Wenn man $\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ berechnet, so findet man, daß abgerundet 0,368, d. i. $= \frac{1}{e}$ oder e^{-1} herauskommt. Die Ursache dafür werden wir erst viel später verstehen (S. 209), hier sei es einfach als Resultat der Rechnung hingestellt. Man überzeuge sich von der Richtigkeit, indem man für n nacheinander immer größere Werte einsetzt, und den Wert des Ausdrucks ausrechnet. Dieser ist für

$n = 2$	0,250
$n = 3$	0,296
$n = 5$	0,328
$n = 10$	0,349
$n = 100$	0,358
$n = 1000$	0,368 .

Demnach ist die Zuckermenge y zur Zeit t

$$\boldsymbol{y = a \cdot e^{-kt}},$$

wo also a die Zuckermenge zur Zeit $t = 0$, zu Beginn des Versuchs, darstellt.

57. Wir wollen nun auch für diese Funktion den Differentialquotienten entwickeln. Zunächst erkennen wir, daß $\frac{dy}{dt}$ negativ sein muß. Oder auch $y + dy$ muß kleiner sein als y. Denn die Zuckermenge y nimmt mit zunehmender Zeit ab. Im übrigen aber ist die Betrachtung dieselbe wie bei der Zinseszinsrechnung. Die Zuckermenge $y + dy$ entsteht aus der Zuckermenge y dadurch, daß man diese Menge y pro Zeiteinheit um einen bestimmten Bruchteil von y, nämlich um $y \cdot k$, vermindert, also für die Zeit dt um $y \cdot k \cdot dt$ vermindert. Es ist also

$$y + dy = y - y \cdot k\,dt$$

oder

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -k \cdot a e^{-kt}}.$$

Es ist also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ wiederum der Funktion y proportional, und für den Fall, daß $k = 1$, der Funktion mit verkehrtem Vorzeichen gleich.

58. Man kann natürlich auch umgekehrt, als wir es vorher getan hatten, aus dieser Exponentialfunktion den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus berechnen:

Gegeben sei

$$u = \ln v ,$$

d. h. nach der Definition

$$v = e^u .$$

Folglich ist auch

$$\frac{dv}{du} = e^u = v$$

und

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{v} ,$$

dasselbe Resultat wie oben.

59. Differenzierung der trigonometrischen Funktionen.

Es sei $y = \sin x$, gesucht $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{array}{r} y = \sin x \\ y + dy = \sin(x + dx) \\ \hline dy = \sin(x + dx) - \sin x . \end{array}$$

Nun ist

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} .$$

Also

$$dy = 2\cos\frac{x + dx + x}{2} \cdot \sin\frac{x + dx - x}{2}$$

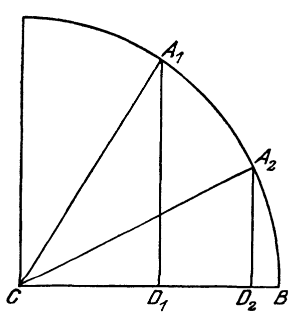

Fig. 68.

und

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos\frac{2x + dx}{2} \cdot \frac{\sin\frac{dx}{2}}{dx} .$$

Nun ist der Sinus eines sehr kleinen Winkels angenähert gleich dem Winkel selbst.

Das ergibt sich aus folgender Betrachtung. Nach der oben gegebenen Definition ist der Sinus des Winkels $A_1CB = A_1D_1$, und der Winkel selbst gleich dem Kreisbogen A_1B. Bei dem kleineren Winkel A_2CB ist der Winkel $= \frown A_2B$, der Sinus $= A_2D_2$.

Der Kreisbogen unterscheidet sich vom zugehörigen Sinus in seiner Länge schon viel weniger als bei dem größeren Winkel. Je kleiner ein Winkel ist, um so mehr nähert sich der Kreisbogen dem Sinus in seiner Größe, bei unendlich kleinen Winkeln verschwindet der Unterschied zwischen Kreisbogen und Sinus.

Folgende kleine Tabelle zeigt, wie sich das Verhältnis von $\sin x$ zu x der 1 immer mehr nähert, je kleiner x wird:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1{,}58\ldots} = 0\,,$$

$$\frac{\sin 1}{1} = \frac{0{,}841\ldots}{1} = 0{,}841\ldots,$$

$$\frac{\sin 0{,}1}{0{,}1} = \frac{0{,}0998}{0{,}1} = 0{,}998\ldots,$$

$$\frac{\sin 0{,}01}{0{,}01} = \frac{0{,}0099998}{0{,}01} = 0{,}99998\ldots$$

Also ist

$$\sin\frac{dx}{2} = \frac{dx}{2}\,,$$

und

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\cos\frac{2x+dx}{2}\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Nun kann man noch dx neben $2x$ als Summand vernachlässigen, und es ist

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \cos x\,.}$$

Durch ähnliche Überlegung findet sich, wenn

$$y = \cos x\,,$$

so ist

$$y + dy = \cos(x + dx)\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+dx) - \cos x}{dx}\,.$$

Da

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\,.\,\sin\frac{u-v}{2}\,,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot \sin\frac{x + dx + x}{2} \cdot \sin\frac{x + dx - x}{2}}{dx}.$$

Hier kann wieder bei dem ersten Sinusausdruck dx als Summand neben $2x$ vernachlässigt werden, und der zweite Sinusausdruck, $\sin\frac{dx}{2}$, kann, für unendlich kleine Werte von dx, $= \frac{dx}{2}$ gesetzt werden, so daß

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\sin x}\,.$$

60. Differenzierung der zyklometrischen Funktionen.

Wenn $a = \sin b$, so können wir dafür umgekehrt schreiben $b = \arcsin a$ (sprich: „arcus sinus von a“), d. h. b ist derjenige Kreisbogen, dessen zugehöriger Sinus $= a$ ist.

Wir wollen nun die Funktion

$$y = \arcsin x$$

differenzieren.

Aus der Definition folgt:

$$x = \sin y\,,$$

also ist

$$\frac{dx}{dy} = \cos y\,.$$

Da

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1\,,$$

so ist

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

und

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}\,,$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Auf genau die gleiche Weise läßt sich erweisen, daß, wenn

$$y = \arccos x\,, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ist; $d(\arcsin x)$ ist daher gleich $d(\arccos x)$, nur mit vertauschtem Vorzeichen. Über Differenzierung von $\operatorname{arctg} x$ s. S. 116.

61. Differenzieren von Summen und Produkten.

Bisher haben wir gelernt, Funktionen von dem allgemeinen Typus

$$y = f(x)$$

zu differenzieren, wo $f(x)$ nur die Variable x, und zwar nur einmal enthielt. Konstante Größen kamen daneben als Summanden oder Faktoren nicht vor. Das Resultat der Differenzierung konnten wir mit dem allgemeinen schematischen Ausdruck schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\,.$$

Es sei nun

$$y = f(x) + a\,.$$

Das Resultat der Differenzierung kennen wir schon (vgl. S. 96):

$$\frac{d[f(x) + a]}{dx} = \frac{d f(x)}{dx}$$

oder: eine konstante Größe, die neben der Variablen als Summand (oder Subtrahend) steht, wird beim Differenzieren nicht berücksichtigt.

Z. B.

$$\frac{d(x^2 + a)}{dx} = 2\,x\,; \qquad \frac{d(\ln x + a)}{dx} = \frac{1}{x}$$

usw.

Eine konstante Größe kann aber auch als Faktor neben der Variablen stehen, also:

$$y = b \cdot f(x)\,.$$

Stellt die Kurve AB (Fig. 69) eine Funktion

$$u = f(x)$$

dar, so ist die Kurve AB' derart gewählt, daß

$$u_1 = b \cdot f(x)$$

ist, und zwar hat in der Zeichnung b der Anschaulichkeit halber den Wert 2. Es ist also jede beliebige Ordinate der Kurve AB', also z. B. CE, zweimal so groß wie die betreffende Ordinate der Kurve AB, also wie CD. Lassen wir nun $AC = u$ um das sehr kleine Stück CC_1 wachsen, so ist für die Kurve AB der Differentialquotient $= \frac{D_2 D_1}{D_1 D}$; und für die Kurve AB' ist derselbe $= \frac{E_2 E_1}{E_1 E}$. Da nun $EE_1 = DD_1$, so verhalten sich die beiden Differentialquotienten wie $E_2 E_1 : D_2 D_1$. Da nun

$$C_1 D_1 : C_1 E_1 = CD : CE \quad \text{oder} \quad = 1 : 2$$

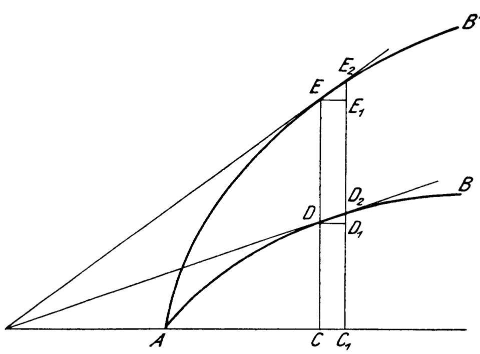

Fig. 69.

(allgemein $= 1 : b$) ist, so muß auch

$$D_1 D_2 : E_1 E_2$$

wie $1 : 2$ sein, sonst könnte nicht

$$C_1 D_2 : C_1 E_2$$

auch $= 1 : 2$ sein, was ja unsere Voraussetzung war. Da nun $D_1 D_2$ und $E_1 E_2$, wie wir eben sahen, sich zueinander wie unsere gesuchten Differentialquotienten verhalten, so ist der Differentialquotient der Kurve AB' im Punkte E doppelt so groß (allgemein $b$mal so groß) als der Differentialquotient der Kurve AB in dem entsprechenden Punkte D. Oder

$$\frac{du_1}{dx} = b \cdot \frac{du}{dx}.$$

Diese Entwicklung gilt natürlich ganz allgemein, und es ist, wenn allgemein

$$y = b u,$$

wo u irgendeine Funktion von x ist,

$$\frac{dy}{dx} = b \cdot \frac{du}{dx}.$$

Daraus folgt die Regel: Ein Produkt aus einer Konstanten und einer variablen Größe wird differenziert, indem man nur die variable Größe differenziert und sie mit dem konstanten Faktor multipliziert.

Beispiel: War nach Früherem, wenn $y = x^2$,

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

so ist jetzt, wenn $y = ax^2$,

$$\frac{dy}{dx} = 2ax.$$

62. Es kann aber eine Größe in doppelter oder mehrfacher Weise von einer unabhängigen Variablen abhängig sein, z. B.

$$y = ax + bx^2 \tag{1}$$

oder

$$y = ax + \ln x \tag{2}$$

oder

$$y = x^2 \cdot \ln x \tag{3}$$

oder

$$y = x \sin x + x^2 \cdot \cos x. \tag{4}$$

Wir haben da zunächst zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder es sind mehrere Glieder vorhanden, und jedes enthält die Variable x nur einmal, wie in Beispiel (1) und (2), oder es ist nur ein Glied vorhanden, welches zwei verschiedene Funktionen von x als Produkt enthält, wie in Beispiel (3), oder beide Fälle sind kombiniert, wie in Beispiel (4).

Erster Fall.

$$y = u + v, \quad \text{wo} \quad u = f(x) \quad \text{und} \quad v = f_1(x),$$

wo u und v also zwei verschiedene Funktionen von x darstellen [Beispiel (1) und (2)].

Est ist dann

$$\begin{array}{l} y + dy = u + du + v + dv \\ \underline{y \qquad\;\; = u \qquad\;\; + v \qquad\quad} \end{array}$$

folglich

$$dy = du + dv$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Man differenziere also erst u nach x, dann v nach x, und addiere beide Differentialquotienten. Das Resultat des Beispiels (1) ist daher:

$$\frac{dy}{dx} = a + 2bx,$$

des Beispiels (2):

$$\frac{dy}{dx} = a + \frac{1}{x}.$$

63. Zweiter Fall.

$$y = u\,v\,, \qquad \text{wo} \qquad u = f(x)\,, \qquad v = f_1(x)\,.$$

Dann ist

$$y + dy = (u + du) \cdot (v + dv)$$

und durch Subtraktion ergibt sich

$$dy = u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv\,.$$

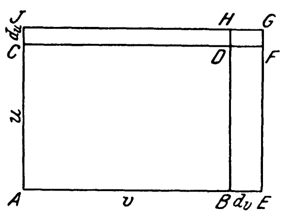

Fig. 70.

Das kann man sich graphisch darstellen, indem man das Produkt $u\,v$ als ein Rechteck mit den Seiten u und v zeichnet. Der Inhalt dieses Rechteckes, $u\,v$, ist dann $= y$. Nun denke man sich y um ein sehr kleines Stück vergrößert, indem sowohl u um das Stück du als auch v um das Stück dv wächst. Dann ist

$$dy = \square DFEB + \square JCDH + \square HGFD$$

oder

$$dy = u\,dv + v\,du + du \cdot dv$$

und

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + du \cdot \frac{dv}{dx}\,.$$

$\frac{dv}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ sind gewöhnliche Differentialquotienten und haben einen endlichen Wert. Das dritte Glied enthält aber als Faktor dazu noch das unendlich kleine du. Daher ist $du \cdot \frac{dv}{dx}$ eine unendlich kleine Größe, welche neben den beiden endlichen Gliedern vernachlässigt werden kann. Es ist also, wenn $y = u \cdot v$,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}}\,.$$

64. Beispiel: Oben war schon das Beispiel (3) gegeben:

$$y = x^2 \cdot \ln x .$$

Wir setzen

$$u = x^2 , \quad v = \ln x ;$$

dann ist

$$\frac{du}{dx} = 2x , \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} ,$$

also, da ja

$$y = uv ,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

oder unter Einsetzung der Werte für u und v:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot 2x = x + 2x \ln x = x(1 + 2 \ln x)$$

oder das Beispiel:

$$y = x \cdot \sin x ,$$

dann ist

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \cos x + \sin x .$$

Der dritte Fall erledigt sich jetzt von selbst. Es sei

$$y = x \cdot \sin x - x^2 + a \cdot \cos x .$$

Man differenziere die einzelnen Summanden nacheinander, und man erhält

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \sin x - 2x - a \cdot \sin x .$$

65. Die Einführung neuer Variabler.

Jetzt gibt es nur noch einen Fall, der beim Differenzieren Schwierigkeiten machen kann. Es sei

$$y = \ln(a - x) .$$

Wir sehen sofort, daß wir mit den bisherigen Regeln y nicht nach x differenzieren können. Hätten wir die Aufgabe, es nicht nach x, sondern nach $(a - x)$ zu differenzieren, so ginge das sofort. Wir tun das deshalb zunächst und führen statt der vorgeschriebenen Variablen x die uns angenehmere neue Variable $a-x$ ein, die wir u nennen wollen. Dann ist

$$y=\ln u \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{du}=\frac{1}{u}. \tag{1}$$

Nun müssen wir aber wieder Beziehung zu x bekommen. Es war

$$u=a-x, \qquad \text{also} \qquad \frac{du}{dx}=-1 \qquad \text{oder} \qquad du=-dx.$$

Setzen wir also in (1) statt du den Wert $-dx$, und auch für u gleich seinen richtigen Wert, so ist

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{a-x}.$$

Wir können also allgemein schreiben:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

und ebenso, unter Einführung noch einer neuen Variablen,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}}.$$

Dies benutzen wir z. B. in folgender Aufgabe:

$$y=\ln(a-x^2).$$

Nun ist

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\ln(a-x^2)}{d(a-x^2)}\cdot\frac{d(a-x^2)}{d(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}$$
$$=\frac{1}{(a-x^2)}\cdot(-1)\cdot 2x=-\frac{2x}{a-x^2}.$$

Hier haben wir zweimal hintereinander von der Einführung einer neuen Variablen Gebrauch gemacht.

66. Ein besonderer Fall, in dessen Lösung gleichzeitig die Regeln § 62 und § 65 notwendig sind, ist die Differenzierung der Funktion

$$y=\frac{u}{v},$$

wo u und v je eine Funktion von x sind. Wir setzen $\frac{1}{v}=w$ und haben dann

$$y=u\cdot w,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dw}{dx} + w \cdot \frac{du}{dx}.$$

Setzen wir für w seinen Wert ein, so ist

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Nun ist

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Der Symmetrie halber multiplizieren wir das zweite Glied mit $\frac{v}{v}$ und bringen auf gleichen Nenner, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-u\frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}}{v^2},$$

wo wir das positive Glied noch besser voranstellen. So erhalten wir also:

Wenn

$$y = \frac{u}{v},$$

so ist

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}.$$

67. Z. B. Es sei

I. $y = \operatorname{tg} x$	II. $y = \operatorname{ctg} x$.
Dann ist	
$y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
und	
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x^2 + \cos x^2}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Wir benutzen diese Gelegenheit zur Vervollständigung des § 60.

Die Umkehrung der Tangentenfunktion ist der arctg. Es sei $y = \operatorname{arctg} x$. Dann ist nach der vorangehenden Entwicklung $x = \operatorname{tg} y$ und daher $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$. Nun ist $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$, was man einsieht, indem man in die letzte Formel für $\operatorname{tg} y$ seinen Wert $\frac{\sin y}{\cos y}$ einsetzt. Ferner ist nach der Voraussetzung $\operatorname{tg} y = x$, so daß schließlich folgt: Wenn $y = \operatorname{arctg} x$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Man leite auf die gleiche Weise folgendes ab:

Wenn $y = \operatorname{arcctg} x$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

68. Nunmehr sind wir in den Stand gesetzt, jede beliebige Funktion zu differenzieren. Es kann manchmal Mühe machen, komplizierte Differenzierungen durchzurechnen, aber stets ist das Differenzieren eine Aufgabe, die sich mit Hilfe der bisher gegebenen Regeln glatt lösen läßt. Es sei nun an einem Beispiel der ganze Gang einer etwas komplizierten Differenzierungsaufgabe noch einmal erläutert.

$$y = ax + bx^2 \ln(x^2 - 1).$$

Wir setzen

$$u = ax$$
$$v = bx^2 \ln(x^2 - 1).$$

Dann ist unsere Aufgabe, $\frac{dy}{dx}$ zu berechnen, zunächst dadurch gelöst, daß wir setzen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \tag{1}$$

Nunmehr gehen wir an die Auswertung der einzelnen Glieder. Die erste Aufgabe ist, $\frac{du}{dx}$ zu berechnen.

$$u = ax,$$

also

$$\frac{du}{dx} = a. \tag{2}$$

Jetzt berechnen wir $\frac{dv}{dx}$.

$$v = b \cdot x^2 \cdot \ln(x^2 - 1) .$$

Da dieser Ausdruck selbst zusammengesetzt ist, so zerlegen wir ihn wiederum in Partialfunktionen, und zwar

$$w = b x^2$$

$$z = \ln(x^2 - 1) .$$

Also ist

$$v = w \cdot z$$

und

$$\frac{dv}{dx} = z \cdot \frac{dw}{dx} + w \cdot \frac{dz}{dx} . \tag{3}$$

$\frac{dw}{dx}$ ist leicht zu berechnen:

$$\frac{dw}{dx} = 2bx .$$

$\frac{dz}{dx}$ ist nicht ohne weiteres überblickbar. Das liegt daran, daß hinter dem Logarithmuszeichen nicht einfach x, sondern eine Funktion von x steht. Wir führen deshalb diese Funktion von x als neue Variable ein. Dann ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d \ln(x^2 - 1)}{d(x^2 - 1)} \cdot \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x .$$

Jetzt haben wir alle nötigen Werte, um die Gleichung (3) auszufüllen. Es ist jetzt

$$\frac{dv}{dx} = 2bx \cdot \ln(x^2 - 1) + \frac{2bx^3}{x^2 - 1} . \tag{4}$$

Und jetzt können wir auch die Gleichung (1) ausfüllen:

$$\frac{dy}{dx} = a + 2bx \cdot \ln(x^2 - 1) + \frac{2bx^3}{x^2 - 1} .$$

69. Das Differential.

Bisher stellten wir uns stets die Aufgabe, den Wert $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen. Und in der Tat hat ja weder dy, noch dx an sich eine endliche und dem Verständnis zugängliche Bedeutung, sondern nur das Verhältnis beider. Wir schrieben früher z. B.

$$\frac{dy}{dx} = a\,. \tag{1}$$

Statt dessen können wir aber auch schreiben

$$dy = a \cdot dx\,. \tag{2}$$

Hier haben wir die an sich bedeutungslosen Ausdrücke dy und dx. Diese gewinnen aber sofort dadurch ihre gewohnte Bedeutung, wenn wir auch in der Gleichung (2), wie bisher stets in (1), unter dy nicht einen irgendwie beliebigen, sehr kleinen Zuwachs von y verstehen, sondern denjenigen (sehr kleinen) Zuwachs von y, welcher dem Zuwachs von x, also dx, entspricht. Die letztere Schreibweise wurde auch im Vorangehenden schon gelegentlich angewendet, es soll aber hier auf ihre Bedeutung noch besonders hingewiesen werden. Sie hat einen erheblichen Vorteil bei der Differenzierung der sog. unentwickelten Funktionen, zu deren Verständnis wir durch folgende Betrachtungen allmählich gelangen wollen.

Zunächst wollen wir in dieser Schreibweise eine kleine Übersichtstabelle über die bisher entwickelten Regeln der Differentialrechnung geben:

Übersichtstabelle.

$d(x^n) = n \cdot x^{n-1} \cdot dx\,,$	$d(\ln x) = \frac{1}{x} \cdot dx\,,$
$d(\sin x) = \cos x \cdot dx\,,$	$d(e^x) = e^x \cdot dx\,,$
$d(\cos x) = -\sin x \cdot dx\,,$	$d(e^{px}) = p \cdot e^{px} \cdot dx\,,$
$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}\,,$	$d(a \cdot x) = a \cdot dx\,,$
$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}\,,$	$d(a + x) = dx\,,$
$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx\,,$	$d(a - x) = -dx\,,$
$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx\,,$	$d(uv) = u\,dv + v\,du$
	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}\,.$

70. Haben wir die Aufgabe, die Gleichung

$$y = x + \ln x$$

zu differenzieren, so können wir jetzt ganz einfach von jedem einzelnen Summanden das Differential bilden und direkt schreiben:

$$dy = dx + \frac{1}{x} \cdot dx = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx .$$

Das können wir aber auch, wenn eine solche Gleichung nicht in der gewohnten Form, nach y aufgelöst, geschrieben ist, sondern eine unentwickelte Funktion darstellt, z. B.

$$y^2 + xy = \tfrac{1}{2} x^2 - \ln x .$$

Wir differenzieren, indem wir von jedem Glied das Differential bilden, ohne vorher die Gleichung aufzulösen:

$$2y\,dy + x\,dy + y\,dx = x\,dx - \frac{1}{x}\,dx$$

und können nunmehr, wo es verlangt wird, aus dieser Differentialgleichung durch einfache Rechnung, wie man eine Gleichung löst, $\frac{dy}{dx}$ ausrechnen. Dies ist in der Regel die bequemste Form der Differenzierung.

Also in unserem Fall:

$$dy(2y + x) = dx\left(-y + x - \frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - \frac{1}{x} - y}{2y + x} .$$

Zwei weitere Beispiele:

1. Beispiel

$$x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = a ,$$

$$x \cdot \cos y \cdot dy + \sin y\, dx + y \cos x\, dx + \sin x\, dy = 0 ,$$

$$dy(x \cdot \cos y + \sin y) = -dx(\sin y + y \cdot \cos x) ,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y \cdot \cos x}{\sin y + x \cdot \cos y} .$$

2. Beispiel

$$y = x \cdot \ln x - x ,$$

$$dy = x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx + (\ln x) \cdot dx - dx ,$$

$$dy = dx(1 - 1) + (\ln x) \cdot dx ,$$

$$dy = dx \cdot \ln x \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{dx} = \ln x .$$

71. Häufig ist es eine Vereinfachung der Differenzierung unentwickelter Funktionen, wenn man die Gleichung zuerst logarithmiert. Ist z. B. gegeben

$$y = u \cdot v\,,$$

so folgt daraus

$$\ln y = \ln u + \ln v\,,$$

wo u und v Funktionen von x sind, und wenn man jetzt differenziert, so folgt

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx}\,,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{y}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = v\cdot\frac{du}{dx} + u\cdot\frac{dv}{dx}\,,$$

welches Resultat oben auf andere Weise schon abgeleitet wurde.

Ist

$$y = x\sqrt{a + x}\,,$$

so folgt

$$\ln y = \ln x + \tfrac{1}{2}\ln(a + x)\,,$$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(a + x)}\,,$$

$$= \frac{2\,a + 3\,x}{2\,x(a + x)}\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\,a + 3\,x)\sqrt{a + x}}{2\,x(a + x)} = \frac{2\,a + 3\,x}{2\sqrt{a + x}}\,.$$

72. Übungsbeispiele.

Zu differenzieren:	Lösung: $\frac{dy}{dx} =$
$y = 5\,x + 4\,x^2 + 3\,x^3\,,$	$5 + 8\,x + 9\,x^2\,;$
$y = x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\,,$	$1 + x + x^2\,;$
$y = 1 + x + x^2\,,$	$1 + 2\,x\,;$

$y = \dfrac{x}{a+x}$,	$\dfrac{a}{(a+x)^2}$;
$y = \dfrac{x}{a-x}$,	$\dfrac{a}{(a-x)^2}$;
$y = \dfrac{a+x}{a-x}$,	$\dfrac{2a}{(a-x)^2}$;
$y = \dfrac{a-x}{a+x}$,	$-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$;
$y = \dfrac{1}{x} \cdot \ln x$,	$\dfrac{1-\ln x}{x^2}$;
$y = x \cdot \ln x$,	$1 + \ln x$;
$y = x \ln x - x$,	$\ln x$;
$y = e^x + e^{-x}$,	$e^x - e^{-x}$;
$y = \ln(\sin x)$,	$\operatorname{ctg} x$;
$y = \ln(\cos x)$,	$-\operatorname{tg} x$;
$y = \frac{1}{2} x^2 + \ln x$,	$x + \dfrac{1}{x}$;
$y = k \ln \dfrac{a}{a-x}$,	$\dfrac{k}{a-x}$;
$y = a \sin x + b \sin 2x + c \cdot \sin 3x$,	$a \cdot \cos x + 2b \cdot \cos 2x + 3c \cdot \cos 3x$;
$y = \dfrac{a+bx}{c+gx}$,	$\dfrac{bc-ag}{(c+gx)^2}$;
$y = \dfrac{a+bx^2}{c+gx^2}$,	$\dfrac{2x(bc-ag)}{(c+gx^2)^2}$;
$y = \dfrac{a+b \cdot e^x}{a-b \cdot e^x}$,	$\dfrac{2ab \cdot e^x}{(a-be^x)^2}$;
$y = \dfrac{e^{px}}{a-e^{px}}$,	$\dfrac{ap \cdot e^{px}}{(a-e^{px})^2}$.

73. Die höheren Differentialquotienten.

Wenn $y = f(x)$, so ist auch $\dfrac{dy}{dx}$ oder y' eine Funktion von x, wir nannten sie als solche $f'(x)$ oder die Ableitung von x.

Wir können nun auch den Differentialquotienten dieser Funktion nach x bilden. Wir nennen ihn y'' oder $= f''(x)$. Es ist der „zweite Differentialquotient“, und er wird als solcher geschrieben: $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ebenso kann man von diesem wiederum einen dritten Differentialquotienten $\frac{d^3y}{dx^3}$ bilden und so fort.

Es ist also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

und

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}.$$

B e i s p i e l. Es sei

$$y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\,,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2\,,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 + 24x + 6\,,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120x + 24\,,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 120\,,$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = 0\,.$$

B e i j e d e r r a t i o n a l e n a l g e b r a i s c h e n Funktion sind *die Differential*quotienten „höherer Ordnung“ $= 0$, und zwar sind bei einer Funktion n·ten Grades vom $(n + 1)$ten Differentialquotient an alle $= 0$.

Bei irrationalen und transzendenten Funktionen ist das nicht der Fall. Z. B.

$$y = \sin x\,,$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos x\,,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x\,,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x\,,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x = y\,,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{dy}{dx} \quad \text{usw.}$$

Es tritt also eine Periodizität der Differentialquotienten auf. Ähnlich ist es mit $y = \cos x$.

Bei
$$y = e^x$$
ist
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} \ldots = e^x.$$

Bei
$$y = e^{-x}$$
ist
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^5y}{dx^5} \ldots = -e^{-x}$$
und
$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^4y}{dx^4} \ldots = e^{-x}.$$

Für $y = e^{px}$ ist

$$\frac{dy}{dx} = p e^{px}\,,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2 e^{px}\,,$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = p^n \cdot e^{px}\,, \quad \text{denn:}$$
$$\frac{de^{px}}{dx} = \frac{de^{px}}{px} \cdot \frac{d(px)}{dx} = p\,e^{px} \text{ usw. Daher:}$$
$$e^{px} = \frac{1}{p} \cdot \frac{de^{px}}{dx}$$
usw.

Für $y = \log x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\,,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{x^3}\,,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{2\cdot 3}{x^4}\,,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = +\frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$$
usw.

74. Maximum- und Minimumrechnung.

Der Differentialquotient ändert bei einer jeden Kurve, außer bei einer Geraden, von Punkt zu Punkt seinen Wert. Erreicht eine Kurve irgendwo ein Maximum, so ist in diesem Punkt der Wert des Differentialquotienten $= 0$. Denn die an die Kurve in diesem Punkte gelegte Tangente läuft unter allen Umständen parallel zur x-Achse, schließt also den Winkel 0 mit ihr ein, und $\operatorname{tg} 0^0 = 0$. Ebenso ist es bei einem Minimumpunkt.

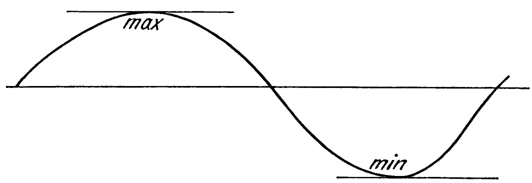

Fig. 71.

Umgekehrt können wir die Lage eines Maximums oder Minimums daraus berechnen, daß wir den Differentialquotienten gleich 0 setzen. Es sei z. B.

$$y = ax^2 + bx + c ,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b .$$

Aus dem eben Gesagten ergibt sich, daß y einen Maximum- oder Minimumwert hat, wenn

$$2ax + b = 0$$

oder wenn

$$x = -\frac{b}{2a} .$$

Oder es sei

$$y = \sin x .$$

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \cos x .$$

Maximum oder Minimum von y ist, wenn

$$\cos x = 0$$

mit anderen Worten, wenn

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Oder es sei

$$y = x^3 - x^2 - x\,,$$

dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1\,.$$

Ist dieses $= 0$, so ist

$$x_1 = 1\,; \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

die Maximum- bzw. Minimumbedingung. Es gibt also hier zwei Werte von x, die ein Maximum bzw. Minimum darstellen.

75. Die Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, ist hier noch offen gelassen. Um hier weiter zu kommen, überlegen wir folgendes:

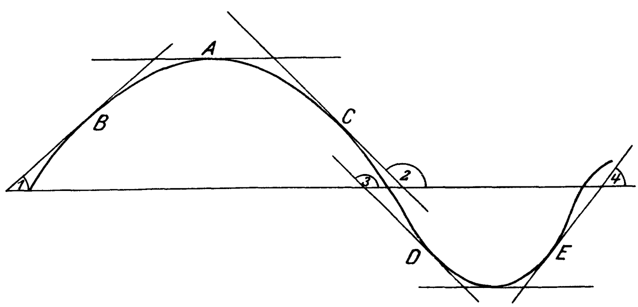

Fig. 72.

Im Punkt A habe die Kurve ein Maximum. Die Tangente der Kurve geht hier parallel zur Abszisse. Betrachten wir einen Punkt der Kurve vor A, also etwa B, so hat die Tangente in B eine solche Lage, daß sie den spitzen Winkel *1* mit der x-Achse bildet. Der Differentialquotient ist also positiv. Dagegen bildet die an den Punkt C gelegte Tangente, jenseits des Punktes A, den stumpfen Winkel *2*, der Differentialquotient ist also negativ. Denken wir uns also die Ableitung von x als Funktion von x dargestellt, so ist sie vor A positiv, bei $A = 0$, hinter A negativ. Die Ableitung nimmt also ständig ab, d. h. der Differentialquotient der Ableitung, d. h. der zweite Differentialquotient von x, ist im Punkt A negativ.

Dagegen schneidet, wenn wir von dem Minimumpunkt unserer Figur ausgehen, die Tangente in dem vor demselben gelegenen Punkte D die x-Achse stumpfwinklig, unter dem Winkel 3, in dem hinter dem Minimumpunkte gelegenen Punkte E spitzwinklig, unter dem Winkel 4. Die Ableitung ist also vor dem Minimum < 0, im Minimum selbst $= 0$, hinter dem Minimum > 0, d. h. der zweite Differentialquotient ist im Minimumpunkt positiv.

Um also zu entscheiden, ob der Nullwert der ersten Ableitung einem Maximum oder einem Minimum entspricht, bilde man die zweite Ableitung und setze den Wert von x, welcher der Maximum- bzw. Minimumbedingung entspricht, in diese zweite Ableitung ein. Ist der Wert der zweiten Ableitung dann positiv, handelt es sich um ein Minimum, ist er negativ, um ein Maximum.

[Anmerkung. Es gibt Fälle, in denen die soeben gegebenen Kriterien des Maximums oder Minimums nicht genügen. Ein allgemein sicheres Kriterium für ein Maximum ist, daß der Differentialquotient gleich Null ist, daß er ferner unmittelbar vorher positiv, unmittelbar nachher negativ ist. Das ergibt sich durch Betrachtung von Fig. 72. Ein allgemein sicheres Kriterium für ein Minimum ist, daß der Differentialquotient gleich Null ist, daß er ferner unmittelbar vorher negativ, unmittelbar nachher positiv ist. Im Maximum oder Minimum muß daher der Differentialquotient sein Vorzeichen wechseln. Ist das nicht der Fall, so bedeutet das Verschwinden des Differentialquotienten allein noch kein Maximum oder Minimum, sondern nur, daß die Kurve einen Augenblick parallel zur Abszisse verläuft. Man zeichne sich die Funktion $y = x^3$ auf. Setzen wir den Differentialquotienten $3x^2 = 0$, so könnte man geneigt sein, für $x = 0$ ein Maximum oder Minimum anzunehmen, während das doch nicht der Fall ist. Die Ursache dafür ist, daß der Differentialquotient in diesem Punkt sein Vorzeichen nicht wechselt.]

76. Beispiel 1. Wo liegt das Maximum bzw. Minimum für

$$y = x^2 - x \, .$$

Wir bilden die erste Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

und setzen diese $= 0$:

$$2x - 1 = 0\,,$$

d. h. $x = \frac{1}{2}$. Dies ist die Maximum- bzw. Minimumbedingung. Um zu entscheiden, ob Maximum oder Minimum, bilden wir die 2. Ableitung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

und finden sie positiv. Es ist also bei $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum. (Siehe Fig. 73).

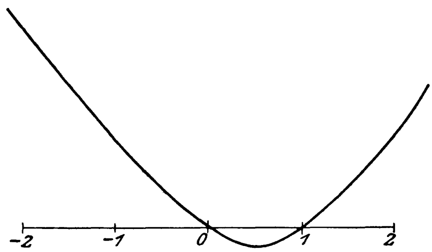

Fig. 73.

Wenn $x = \frac{1}{2}$, ist

$$y = (\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2}\,,$$

$$y = -\tfrac{1}{4}\,,$$

$-\frac{1}{4}$ ist also der Minimumwert, unter den y nicht heruntergehen kann. Machen wir eine Stichprobe.

Für $x = -2$	ist	$y =$	6
$x = -1$	ist	$y =$	2
$x = -\frac{1}{2}$	ist	$y =$	$\frac{3}{4}$
$x = 0$	ist	$y =$	0
$x = +\frac{1}{2}$	ist	$y =$	$-\frac{1}{4}$
$x = +1$	ist	$y =$	0
$x = +2$	ist	$y =$	2.

Beispiel 2.

$$y = x^3 - x^2 - x\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1 = 0\,,$$

$$x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} = 0\,,$$

$$x = \tfrac{1}{3} \pm \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}}\,,$$

$$x = \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{2}{3}\,,$$

$$x_1 = 1\,; \qquad x_2 = -\tfrac{1}{3}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2\,.$$

Setzen wir den Wert $x_1 = 1$ ein, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +4\,;$$

$x_1 = 1$ ist also ein Minimum.

Setzen wir den Wert $x = -\frac{1}{3}$ ein, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\,;$$

$x_2 = -\frac{1}{3}$ ist also ein Maximum.

Aufgabe: Ein Rechteck, dessen Umfang $2s$ gegeben ist, so zu konstruieren, daß der Flächeninhalt möglichst groß ist.

Der Inhalt des Rechtecks sei J, die Seiten des Rechtecks x und y.

$$J = x \cdot y .$$

Da

$$y = s - x ,$$

so ist

$$J = x(s - x) ,$$

$$J = xs - x^2 ,$$

$$\frac{dJ}{dx} = s - 2x ,$$

Maximumbedingung:

$$s - 2x = 0 ,$$

$$x = \frac{s}{2} .$$

D. h. $x = y$; das Rechteck ist also das Quadrat mit der Seite $\frac{s}{2}$.

Aufgabe: Ein Rechteck, dessen Inhalt $= a^2$ gegeben, so zu konstruieren, daß der Umfang $2s = 2x + 2y$ möglichst klein wird.

$$a^2 = xy = x(s - x) ,$$

$$a^2 = xs - x^2 ,$$

$$s = \frac{a^2 + x^2}{x} ,$$

$$s = \frac{a^2}{x} + x ,$$

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{a^2}{x^2} + 1 ,$$

Minimumbedingung:

$$a^2 = x^2 ,$$

$$x = a ,$$

also auch

$$y = a ,$$

d. h. das Rechteck ist das Quadrat mit der Seite a.

Aufgabe: **Das Ionenminimum des Wassers.** Bei welcher Azidität bildet die Summe der Ionen des Wassers, $H^{\cdot}$ und OH', in der Volumeinheit des Wassers ein Minimum?

Sei x die Konzentration der $H^{\cdot}$-Ionen, y die der $OH^{\cdot}$-Ionen, so gilt das Gesetz:

$$x \cdot y = k_w ,$$

k_w ist die Dissoziationskonstante des Wassers (bei $25^0 = 10^{-14}$).

Gesucht ist also die Minimumbedingung für die Funktion $x + y$, die wir mit u bezeichnen wollen.

Aus der Voraussetzung folgt, daß $y = \frac{k_w}{x}$ ist.

Also ist

$$u = x + \frac{k_w}{x} .$$

Wir können also u als eine Funktion von x darstellen. Differenzieren wir u nach x, so ist

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{k_w}{x^2} .$$

Setzen wir dies gleich Null, so haben wir die Bedingung für das Maximum oder Minimum von u:

$$1 - \frac{k_w}{x^2} = 0 .$$

Daraus folgt

$$x^2 = k_w$$

oder

$$x = \sqrt{k_w} . \tag{1}$$

Wollen wir erfahren, ob dies ein Maximum oder ein Minimum darstellt, so differenzieren wir noch einmal

$$\frac{d^2u}{dx^2} = + \frac{2\,k_w}{x^3} .$$

Dieses hat unter allen Umständen einen positiven Wert, also ist Gleichung (1) die Minimumbedingung. Wenn aber $x = \sqrt{k_w}$ ist, so folgt aus der Voraussetzung, daß auch $y = \sqrt{k_w}$ ist. Die Ionen des Wassers sind also ein Minimum, wenn die Konzentration der Wasserstoffionen gleich der der Hydroxylionen ist, also bei neutraler Reaktion.

Beispiel: **Das Ionenminimum eines amphoteren Elektrolyten.** Bei welcher H-Ionenkonzentration ist die Ionenmenge einer Aminosäure am geringsten im Verhältnis zum nicht dissoziierten Anteil der Aminosäure?

Die Aminosäure A dissoziiert erstens in

$$A^{\cdot} + OH',$$

zweitens in

$$A' + H^{\cdot}.$$

Daraus folgt nach dem Massenwirkungsgesetz

$$k_b \cdot [A] = [A^{\cdot}] \cdot [OH'],$$
$$k_a \cdot [A] = [A'] \cdot [H^{\cdot}].$$

k_b bedeutet die Dissoziationskonstante der Aminosäure als Base, k_a diejenige als Säure. Daraus folgt

$$[A^{\cdot}] = \frac{k_b \cdot [A]}{[OH']} \qquad \text{und} \qquad [A'] = \frac{k_a \cdot [A]}{[H^{\cdot}]}.$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{[A^{\cdot}] + [A']}{[A]};$$

es werde als u bezeichnet.

Setzen wir die Werte für $[A^{\cdot}]$ und $[A']$ ein, so ist

$$u = \frac{\frac{k_b \cdot [A]}{[OH']} + \frac{k_a [A]}{[H^{\cdot}]}}{[A]},$$

$$u = \frac{k_b}{[OH']} + \frac{k_a}{[H^{\cdot}]}.$$

Da

$$[H^{\cdot}] \cdot [OH'] = k_w \qquad \text{und} \qquad [OH'] = \frac{k_w}{[H^{\cdot}]},$$

so ist

$$u = \frac{k_b}{k_w} \cdot [H^{\cdot}] + \frac{k_a}{[H^{\cdot}]}.$$

Hier ist u eindeutig als Funktion von $[H^{\cdot}]$ ausgedrückt.

Differenzieren wir u nach $H^{\cdot}$:

$$\frac{du}{d[H^{\cdot}]} = \frac{k_b}{k_w} - \frac{k_a}{[H^{\cdot}]^2} \tag{1}$$

und setzen wir dies $= 0$, so erhalten wir als Minimumbedingung:

$$\frac{k_b}{k_w} - \frac{k_a}{[\mathrm{H}^{\cdot}]^2} = 0$$

oder

$$\frac{[\mathrm{H}^{\cdot}]^2}{k_w} = \frac{k_a}{k_b}.$$

Setzen wir für $\frac{[\mathrm{H}^{\cdot}]}{k_w}$ wieder $[\mathrm{OH}']$, so ist schließlich

$$\frac{[\mathrm{H}^{\cdot}]}{[\mathrm{OH}']} = \frac{k_a}{k_b}.$$

Die Ionen der Aminosäure sind ein Minimum, wenn in der Lösung die Konzentration der H$^{\cdot}$-Ionen zu der der OH-Ionen gleich dem Verhältnis der beiden Dissoziationskonstanten der Aminosäure ist. Daß es sich um ein Minimum und kein Maximum handelt, erkennt man, wenn man (1) noch einmal nach $[\mathrm{H}^{\cdot}]$ differenziert:

$$\frac{d^2 u}{d[\mathrm{H}^{\cdot}]^2} = \frac{2\,k_a}{[\mathrm{H}^{\cdot}]^3}.$$

Da $[\mathrm{H}^{\cdot}]$ immer positiv sein muß, so ist der ganze Ausdruck sicher positiv, d. h. es liegt ein Minimum vor und kein Maximum.

Beispiel. **Das Brechungsgesetz.** Von dem Punkt A, welcher in dem Medium I liegt, gelangen Lichtstrahlen in das Medium II, und es gibt einen Lichtstrahl, der an der Trennungsfläche der Medien gerade so gebrochen wird, daß er durch den Punkt B geht. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in I und II sei verschieden groß, v_1 und v_2. Durchläuft das Licht die Strecke AC in der Zeit t_1, die Strecke CB in der Zeit t_2, so ist

$$v_1 = \frac{AC}{t_1} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{CB}{t_2}.$$

Es ist daher

$$t_1 = \frac{AC}{v_1} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{CB}{v_2},$$

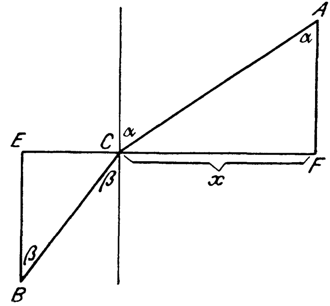

Fig. 74.

und die gesamte Zeit, die der Lichtstrahl braucht, um von A nach B zu gelangen,

$$T = t_1 + t_2 = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}\,. \tag{1}$$

Der Punkt C ist in der Zeichnung willkürlich gewählt. Seine Lage ist durch die Größe des Winkels α definiert, welcher ebenfalls willkürlich gezeichnet ist. Die Frage lautet jetzt: Wo muß der Punkt C liegen, oder wie groß muß der Winkel α sein, damit die Zeit T ein Minimum wird?

Wir werden diese Frage so in Angriff nehmen, daß wir T zunächst als Funktion der Strecke $CF = x$ darzustellen suchen.

Es ist nun

$$AC = \sqrt{\overline{AF}^2 + x^2}\,,$$

$$CB = \sqrt{\overline{BE}^2 + (p-x)^2}\,, \qquad \text{wo} \qquad p = EF\,.$$

Daher

$$T = \frac{\sqrt{\overline{AF}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\overline{BE}^2 + (p-x)^2}}{v^2}\,.$$

Jetzt ist T als reine Funktion von x dargestellt; alle andere Größen der Gleichung sind Konstanten. T ist daher ein Minimum, wenn $\frac{dT}{dx} = 0$ ist.

Wir bilden

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{\overline{AF}^2 + x^2}} - \frac{(p-x)}{v_2\sqrt{\overline{BE}^2 + (p-x)^2}}\,.$$

Es ist daher T ein Minimum, wenn

$$\frac{x}{v_1\sqrt{\overline{AF}^2 + x^2}} = \frac{(p-x)}{v_2\sqrt{\overline{BE}^2 + (p-x)^2}}\,.$$

Betrachten wir dieses Resultat geometrisch, so bemerken wir, daß

$$\sqrt{\overline{AF}^2 + x^2} = AC\,,$$

daher

$$\frac{x}{\sqrt{\overline{AF}^2 + x^2}} = \sin\alpha\,,$$

und entsprechend

$$\frac{p - x}{\sqrt{\overline{BE}^2 + (p - x)^2}} = \sin\beta$$

ist. Also ist die Minimumbedingung

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta_2}{v_2}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

d. h. der Sinus des Einfallswinkels verhält sich zum Sinus des Ausfallswinkels wie die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien: das Brechungsgesetz.

Das Brechungsgesetz sagt also folgendes aus: Vom Punkt A wird derjenige Lichtstrahl dem Punkt B zugebrochen, welcher mit der größten Geschwindigkeit zum Punkt B gelangen kann.

Aufgabe: Eine gerade Linie in zwei Teile zu teilen, so daß das Rechteck aus beiden Teilen dieser Linien ein Maximum ist.

Das Rechteck, gebildet aus den beiden Teilstücken a und b der Geraden u ist $= a \cdot b$, und $a + b$ ist $= u$; also ist der Inhalt des Rechtecks

$$v = a \cdot (u - a)$$

oder

$$v = a u - a^2 .$$

Folglich ist

$$\frac{dv}{da} = u - 2a .$$

Setzen wir dieses $= 0$, so ist die Maximumbedingung:

$$u - 2a = 0$$

oder

$$u = 2a$$

oder

$$a = b ,$$

d. h. die Linie muß halbiert werden.

Diese Aufgabe kann man auch so ausdrücken:

Von allen Rechtecken mit gegebenem Umfang dasjenige zu finden, welches das größte Volumen hat. Es ist also das Quadrat.

Daß es ein Maximum und kein Minimum ist, ergibt sich daraus, daß der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 v}{d a^2} = -2$$

einen negativen Wert hat.

77. Wendepunkte.

Ebenso wie die Funktion selbst, kann aber auch ihre Ableitung Maxima und Minima haben. Es fragt sich nun, wie hebt sich derjenige Punkt einer Kurve hervor, für den nicht die Funktion selbst, sondern ihre Ableitung ein Maximum oder Minimum hat.

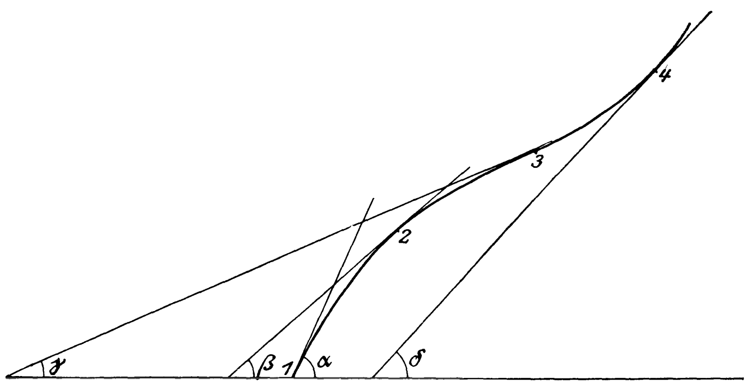

Fig. 75.

Die Funktion (Fig. 75) hat in ihrem ganzen gezeichneten Verlauf kein Maximum oder Minimum, sie steigt stetig, wenn auch ungleichförmig. Betrachten wir aber den Gang der Ableitung. Im Punkt *1* ist die Ableitung $= \operatorname{tg}\alpha$, hat also einen gewissen, positiven Betrag. Im Punkt *2* ist $\operatorname{tg}\beta$ schon kleiner. Im Punkt *3* ist $\operatorname{tg}\gamma$ noch kleiner. In *4* ist $\operatorname{tg}\delta$ wiederum größer geworden. Die Ableitung hat also in 3 ein Minimum. Der Punkt *3* ist aber dadurch ausgezeichnet, daß er den nach oben konvexen Teil der Kurve von dem nach oben konkaven abgrenzt. Solchen Punkt nennt man einen Wendepunkt.

Um also zu bestimmen, wo eine Kurve einen Wendepunkt hat, untersuche man, wo ihre Ableitung ein Maximum oder Minimum hat.

Um dieses Maximum oder Minimum zu finden, braucht man nur die zweite Ableitung nach x zu bilden, y'', und diese $= 0$ zu setzen.

Beispiel I. Es sei gegeben

$$y = x^3 + x^2 + x\,,$$

dann ist

$$y' = 3\,x^2 + 2\,x + 1\,,$$

$$y'' = 6\,x + 2\,.$$

Wenn

$$6\,x + 2 = 0\,,$$

oder

$$x = -\tfrac{1}{3}\,,$$

hat y einen Wendepunkt.

Beispiel II: **Verlauf und Wendepunkt der Dissoziationsrestkurve.** Die gesamte Kohlensäure (wie auch jede andere, schwache Säure) ist in den Flüssigkeiten des Organismus zum Teil als freie Kohlensäure, CO_2, enthalten, zum anderen Teil als Natriumsalz, $NaHCO_3$. (Das sekundäre Natriumsalz Na_2CO_3 ist nur bei stark alkalischer Reaktion existenzfähig und daher im Körper als solches nicht vorhanden.) Das Natriumkarbonat ist nun fast vollkommen dissoziiert in $Na^{\cdot}$ und HCO_3', dagegen ist die freie Kohlensäure nur zu einem verschwindend kleinen Bruchteil in $H^{\cdot} + HCO_3'$ dissoziiert. Es sei nun die gesamte Konzentration an Kohlensäure durch chemische Analyse bekannt, sie sei $[C]$. Man bezeichnet nun das Verhältnis der HCO_3'-Ionen-Menge zur Gesamtmenge der Kohlensäure als den Dissoziationsgrad, α, der Kohlensäure, und andererseits das Verhältnis der undissoziierten, freien Kohlensäure, $[CO_2]$, zur Gesamtmenge $[C]$ als den Dissoziationsrest, ϱ, der Kohlensäure. Natürlich ist $\alpha + \varrho = 1$.

Wenn nun die Gesamtmenge [C] gegeben ist, so läßt sich α oder ϱ berechnen, sobald man die Wasserstoffionenkonzentration der Flüssigkeit [H˙] kennt oder durch Messung bestimmt. Denn nach dem Massenwirkungsgesetz ist

$$[H^{\cdot}] \cdot [HCO_3'] = K \cdot [CO_2]$$

oder

$$[H^{\cdot}] \cdot [HCO_3'] = K([C] - [HCO_3']) ,$$

wo K die Dissoziationskonstante der Kohlensäure ($= 3 \cdot 10^{-7}$) ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$[H^{\cdot}] \cdot [HCO_3'] = K[C] - K[HCO_3'] ,$$

$$[HCO_3']([H^{\cdot}] + K) = K[C] ,$$

$$\frac{[HCO_3']}{[C]} = \varrho = \frac{K}{[H^{\cdot}] + K} . \qquad [1]$$

Hiermit ist ϱ als Funktion von [H˙] dargestellt.

Es hat nun in der Praxis große Vorteile, wenn man als unabhängige Variable nicht [H˙] selbst wählt, sondern den dekadischen Logarithmus von [H˙], den wir mit x bezeichnen wollen. Dann ist also

$$\varrho = \frac{K}{10^x + K} .$$

Nun haben wir schon (§ 44 u. § 56) gelernt, daß es zum Zweck des Differenzierens vorteilhafter ist, als Basis der Exponentialfunktion stets e anzuwenden. Wir tun das auch hier, indem wir $10 = e^p$ setzen, wo p der „Modulus des natürlichen Logarithmensystems" (S. 26) ist. Dann ist

$$\boldsymbol{\varrho = \frac{K}{e^{p \cdot x} + K}} .$$

Der Verlauf dieser Kurve ist aus Fig. 76 ersichtlich. Die Kurve entspringt asymptotisch aus der Abszisse und nähert sich asymptotisch einer Geraden, welche im Abstand 1 parallel zu der Abszisse gezogen werden kann. In der Mitte dazwischen hat die Kurve irgendwo einen W e n d e p u n k t; links davon ist sie nach oben konkav, rechts davon nach oben konvex. Wir stellen uns nun die Aufgabe:

Wo hat die Funktion

$$\varrho = \frac{K}{K + e^{px}}$$

ihren Wendepunkt? Wir differenzieren zweimal hintereinander nach x und finden

$$\varrho' = -\frac{K\,p\,x^{p\,x}}{(K + e^{p\,x})^2},$$

$$\varrho'' = \frac{-(K + e^{p\,x})^2 \cdot K\,p^2\,e^{p\,x} + 2\,K\,p^2 \cdot e^{2\,p\,x}(K + e^{p\,x})}{(K + e^{p\,x})^4}.$$

ϱ'' wird nun Null unter der Bedingung, daß

$$K = e^{p\,x}.$$

Setzen wir nämlich in obige Gleichung

$$e^{p\,x} = K,$$

so wird

$$\varrho'' = \frac{-4\,p^2 \cdot K^4 + 4\,p^2 \cdot K^4}{16\,K^4} = 0.$$

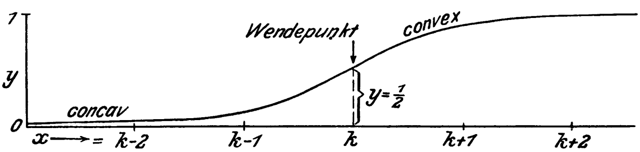

Fig. 76. k bedeutet $\log K$.

Wir sehen aus dieser Rechnung, daß die Kurve kein Maximum oder Minimum besitzt, denn es gibt keinen endlichen Wert von x, für den die erste Ableitung, ϱ', gleich Null wird. Wir sehen ferner, daß die Kurve einen Wendepunkt hat, wenn

$$e^{p\,x} = K$$

oder unter Einsetzung des Wertes für $e^{p\,x}$, wenn

$$[\mathrm{H}^{\cdot}] = K \quad \text{oder} \quad \log[\mathrm{H}^{\cdot}] = x = \log K.$$

Setzen wir diesen Wert von $[\mathrm{H}^{\cdot}]$ in die Gleichung [1] ein, so ergibt sich als Charakteristikum des Wendepunktes:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}$$

(d. h. die Säure ist zur Hälfte dissoziiert). Dasselbe läßt sich für jede andere Säure ebenso durchführen. Die Form der Kurve wird nicht dadurch geändert, wir brauchen nur jedesmal in der Abszisse den der betreffenden Säure zukommenden Wert von k einzutragen.

Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist folgendes: Wenn wir in einer Flüssigkeit (Blut, Harn) die Gesamtmenge einer Säure durch Analyse bestimmt haben und nun erfahren wollen, wie groß das Verhältnis ϱ der nicht dissoziierten Säuremenge zur Gesamtmenge der Säure ist, so müssen wir die Wasserstoffionenkonzentration $[H^\cdot]$ der Flüssigkeit messen. Alsdann ist $\varrho = \frac{K}{[H^\cdot] + K}$.

Stellen wir graphisch ϱ als eine Funktion des Logarithmus von $[H^\cdot]$ dar, so hat diese Kurve einen Wendepunkt, wenn $\log[H^\cdot] = \log K$ ist, und ϱ ist dann $= \frac{1}{2}$, d. h. die Säure ist zur Hälfte dissoziiert, wenn die Wasserstoffionenkonzentration ihrer Lösung gleich ihrer Dissoziationskonstanten ist.

Beispiel III. Die Funktion

$$y = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$$

hat die Ableitung

$$y' = a\,e^x - b \cdot e^{-x},$$

$$y'' = a\,e^x + b \cdot e^{-x},$$

y' verschwindet, wenn

$$e^x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}: \text{ Maximum- bzw. Minimumbedingung,}$$

y'' verschwindet, wenn

$$e^x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}: \text{ Wendepunkt,}$$

ist nun $\frac{b}{a}$ positiv, so existiert y'' nicht; es wäre imaginär. Ist aber $\frac{b}{a}$ negativ, so existiert zwar y'', aber nicht y', welches dann imaginär wäre.

Vierter Abschnitt.

Integralrechnung.

78. Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens; Integrieren und Differenzieren steht in derselben Beziehung zu einander wie Addieren und Subtrahieren oder wie Multiplizieren und Dividieren.

Während aber das Differenzieren eine leicht erlernbare, unter allen Umständen ausführbare, nach festen Regeln vor sich gehende Rechenmanipulation ist, liegt die Sache beim Integrieren nicht so einfach. Nicht jede Integrationsaufgabe ist lösbar, und auch bei den lösbaren spielt die Übung und das Geschick des Rechnenden eine große Rolle. Die geschickte Einführung neuer Variablen kann manche scheinbar unlösbare Aufgabe ermöglichen. Das Integrieren ist daher eine große Kunst und in gewissem Sinne dem Schachspiel verwandt, indem man oft vor der Aufgabe steht, von zahlreichen, im Bereich der Möglichkeit liegenden Manipulationen diejenige herauszukombinieren, welche die Lösung der Aufgabe ermöglicht. Aber immerhin gibt es für die meisten Integrationsaufgaben viele feststehende Regeln, die meist zum Ziele führen. In Anbetracht der Schwierigkeiten, welche manche rein mathematische Probleme des Integrierens bieten, sind die für uns in Betracht kommenden Integrationsprozesse meist einfach und auf einige typische Fälle reduzierbar.

Ist eine Funktion gegeben

$$y = f(x) ,$$

so hat die Differentialrechnung die Aufgabe, den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

zu bilden. Ist dagegen das Gegebene der Differentialquotient, so nennt man die Berechnung der zugehörigen Funktion „integrieren“. Die schriftlichen Symbole hierfür sind folgende: Gegeben die Funktion

$$y = f(x) .$$

Die Differentialrechnung gibt:

$$dy = f'(x) \cdot dx .$$

Ist aber gegeben

$$dy = f'(x) dx ,$$

so lehrt die Integralrechnung:

$$y = \int f'(x) \cdot dx = f(x) .$$

Das von Leibniz herrührende Zeichen des Integrals $\int$ ist ein großes S und bedeutet eigentlich ein Summenzeichen. Den Sinn dieser Bezeichnung werden wir noch kennen lernen.

Ist die Differentialgleichung gegeben

$$dy = x\,dx ,$$

so ist ihr Integral

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 . \tag{1}$$

Denn in der Tat, wenn man $\frac{1}{2} x^2$ nach x differenziert, erhält man

$$dy = x\,dx .$$

Aber auch, wenn man

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 \pm a \tag{2}$$

differenziert, erhält man

$$y = x\,dx .$$

Die Differentialgleichung läßt also nicht erkennen, ob sie der Funktion (1) oder (2) entspricht. Ganz allgemein ist der Wert eines Integrals bis auf eine (additive) konstante Größe unbestimmt. Das Integral von

$$dy = x\,dx$$

hat also den ganz unbestimmten Wert

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 + C ,$$

wo C, die „Integrationskonstante“, jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen kann. Die Integralgleichung beginnt also erst dann eine verwertbare Bedeutung zu bekommen, wenn es auf irgendeine Weise gelingt, dieser

Integrationskonstante C für einen speziellen Fall eine bestimmte Bedeutung zu erteilen.

Für die einfachsten Differentiale ergibt sich das Integral in nunmehr ohne weiteres verständlicher Weise, und es soll zunächst eine Übersicht der einfachsten Integrale gegeben werden.

79. Die Grundformen der Integrale.

	Beweis: Nach den Regeln der Differentialrechnung ist:
$\int dx = x + C\,,$	$d(x + C) = dx\,,$
$\int x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 + C\,,$	$d(\frac{1}{2} x^2 + C) = x\,dx\,,$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C\,,$	$d\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C\right) = x^n\,.$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C\,.$	$d(\ln x + C) = \frac{1}{x}\,dx\,.$
Die Konstante C kann man als den natürlichen Logarithmus einer anderen Konstante, γ, auffassen. Dann ist $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + \ln\gamma = \ln\gamma x\,.$	
$\int e^x \cdot dx = e^x + C\,,$	$d(e^x + C) = e^x \cdot dx\,,$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C\,,$	$d(-\cos x + C) = \sin x\,dx\,,$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C\,,$	$d(\sin x + C) = \cos x \cdot dx\,.$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \text{(vgl. S. 115)},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \text{(vgl. S. 115)},$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C \quad \text{(vgl. S. 116)},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \quad \text{(vgl. S. 116)}.$$

75. Ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen mit einem konstanten Faktor multipliziert, so können wir diesen Faktor vor das Integralzeichen setzen. Z. B.

$$\int a x \cdot dx = a \cdot \int x \, dx = \frac{a}{2} x^2 + C .$$

Der Beweis wird wie oben geführt, indem man das erhaltene Resultat nach x differenziert und das Resultat mit dem unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck vergleicht. So ist z. B. auch

$$\int \frac{x^2}{a} \cdot dx = \frac{1}{a} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3a} + C ,$$

oder ferner

$$\int \frac{a}{x} \, dx = a \int \frac{1}{x} \cdot dx = a \ln x + C .$$

In der letzten Gleichung können wir

$$C = a \ln \gamma$$

setzen, dann ist das Resultat

$$a (\ln x + \ln \gamma) = a \ln (x \cdot \gamma) .$$

Ferner:

$$\int a \cdot \cos x \cdot dx = a \int \cos x \, dx = a \cdot \sin x ,$$

$$\int -x \cdot dx = -\int x \, dx = -\frac{x^2}{2} + C .$$

Hier betrachten wir -1 als den konstanten Faktor, den wir vor das Integralzeichen setzen dürfen. Allgemein ist daher

$$\int - u \cdot dx = - \int u \cdot dx ,$$

z. B. auch

$$\int -3 x^2 \, dx = -3 \int x^2 dx = -x^3 + C .$$

80. Steht unter dem Integralzeichen eine Summe oder eine Differenz als Faktor des stets vorhandenen dx, so kann man das Integral der Summe (oder der Differenz) in eine Summe (oder Differenz) zweier Integrale zerlegen, z. B.

$$\int (a + b) dx = \int a \cdot dx + \int b \, dx .$$

Wenn man nämlich die linke Seite differenziert, erhält man $a + b$. Denn die Definition des Integrals schließt ja in sich, daß der unter dem Integralzeichen stehende, mit dx multiplizierte Ausdruck der Differentialquotient ist. Ebenso ergibt die Differenzierung der rechten Seite, wenn man jedes Integral einzeln differenziert und die Resultate addiert, $a + b$. Hierbei ist es gleichgültig, ob a und b Konstanten sind oder selbst Funktionen von x.

81. Integration durch Einführung neuer Variabler.

Beispiele: I. Es sei zu integrieren

$$\int \frac{dx}{a + x}.$$

Dieses Integral läßt sich durch unmittelbare Anwendung der Grundformeln nicht berechnen. Betrachten wir aber $(a + x)$ als die Variable und bezeichnen sie als u, so ist

$$a + x = u,$$

also

$$dx = du,$$

und es ist

$$\int \frac{dx}{a + x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C$$
$$= \ln(a + x) + C.$$

II. $\int \frac{dx}{a - x}$.

Es sei

$$a - x = u,$$

also

$$-dx = du,$$

oder

$$dx = -du.$$

Folglich

$$\int \frac{dx}{a - x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C,$$
$$= -\ln(a - x) + C.$$

III. $\int (a + 2x)^2 dx$.

Es sei

$$a + 2x = u,$$

also

$$du = 2\,dx$$

oder

$$dx = \tfrac{1}{2}\,du.$$

Dann ist

$$\int (a + 2\,x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int u^2\,du = \frac{u^3}{6} + C$$
$$= \frac{(a + 2\,x)^3}{6} + C\,.$$

IV. $\int \cos(a - x)\,dx$.

Es sei

$$a - x = u\,,$$

also

$$-dx = du$$

oder

$$dx = -du\,,$$

so ist

$$\int \cos(a - x)\,dx = -\int \cos u \cdot du = -\sin u + C$$
$$= -\sin(a - x) + C$$

Wenn man den Sinn dieser Methode erfaßt hat, wird man oft die schriftliche Einführung einer neuen Variablen umgehen können. Z. B.

$$\int (a + x)\,dx\,.$$

Wir sehen sofort, daß dieses Integral leicht lösbar ist, sobald wir nicht x, sondern $(a + x)$ als die Variable betrachten; wir sehen auch sofort, daß $dx = d(a + x)$. Das Integral nimmt also die Form an

$$\int (a + x)\,d(a + x)$$

und ergibt demnach

$$\frac{(a + x)^2}{2} + \mathrm{C}\,.$$

Ferner:

$$\int (a - x)\,dx\,.$$

Betrachten wir $(a - x)$ als Variable, so ist $dx = -d(a - x)$, das Integral nimmt also die Form an

$$-\int (a - x)\,d(a - x) = -\frac{(a - x)^2}{2}\,.$$

Oder das Beispiel:

$$\int (a + 2x)\cdot dx\,.$$

Nehmen wir $(a + 2x)$ als Variable, so ist

$$d(a + 2x) = 2\,dx$$

und

$$dx = \tfrac{1}{2}\, d(a + 2x)\,.$$

Das Integral lautet dann:

$$\frac{1}{2}\int (a + 2x)\, d(a + 2x) = \frac{(a + 2x)^2}{4} + C\,.$$

82. Methode der partiellen Integration.

Eine sehr wichtige, häufig angewandte Regel ist die folgende:

Es seien u und v zwei verschiedene Funktionen von x, so ist nach S. 112 und S. 118

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du\,.$$

Integriert man, so ist

$$\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v\,du$$

oder

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du\,.$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{\int u \cdot dv = uv - \int v\,du}\,.$$

Mit Hilfe dieser Regel sind wir nun schon in den Stand gesetzt, eine ganze Reihe von Integralen zu berechnen.

Als ein typisches Beispiel möge folgen:

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx\,.$$

Auf direkte Weise ist dieses Integral nicht auszuwerten. Ich gebe nun dem Integral die Form

$$\int u \cdot dv\,,$$

indem ich

$$u = \ln x\,,$$
$$dv = x \cdot dx$$

setze. Warum nicht z. B. $u = x$ und $dv = \ln x \cdot dx$ gesetzt wird, dafür gibt es keine allgemeine Regel. Es muß diejenige Form ausprobiert werden, welche für die weitere Rechnung Vorteile bietet. In diesem Probieren liegt die

Schwierigkeit der Integralrechnung. So feststehende Regeln wie bei der Differentialrechnung gibt es nicht. Also

$$u = \ln x\,; \quad \text{differenziert:} \quad du = \frac{1}{x}\cdot dx\,,$$

$$dv = x\,dx\,; \quad \text{integriert}^{1)}\text{:} \quad v = \tfrac{1}{2}x^2\,.$$

Nun ist

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Setzen wir die soeben gewonnenen Werte ein, so ist

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{x}{2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C\,,\end{aligned}$$

wo C wieder die Integrationskonstante ist, die wir zum Endresultat wieder zufügen müssen. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Wertes wird dadurch geliefert, daß das Resultat, nach x differenziert, das richtige Differential ergibt:

$$\begin{aligned}d\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\right) &= \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot dx + x\cdot\ln x\cdot dx - \frac{1}{2}x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x\,dx + x\ln x\,dx - \tfrac{1}{2}x\,dx\\ &= x\ln x\,dx\,.\end{aligned}$$

Ein zweites Beispiel:

$$\int \ln x\cdot dx\,.$$

Es sei

$$u = \ln x\,; \quad \text{differenziert:} \quad du = \frac{1}{x}\,dx\,,$$

$$dv = dx\,; \quad \text{integriert:} \quad v = x\,.$$

Nach dem Satz

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

[1]) Die Integrationskonstante kann bei dieser Integration fortgelassen werden, weil es nur darauf ankommt, irgend einen bestimmten Wert des Integrals zu finden, den wir dann im Verlauf der Rechnung festhalten. Wir wählen dann einfach denjenigen Wert, für den die Integrationskonstante $= 0$ ist.

ist

$$\int \ln x \cdot dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$= x \ln x - \int dx\,,$$
$$\boldsymbol{\int \ln x \cdot dx = x \ln x - x + C\,.}$$

In der Tat ist, wenn man differenziert,

$$d[x \ln x - x] = d(x \ln x) - dx$$
$$= x \cdot \frac{1}{x} dx + \ln x \cdot dx - dx$$
$$= \ln x \cdot dx\,.$$

Ein drittes Beispiel:

$$\int \sin^2 x \cdot dx\,.$$

Wir setzen

$$u = \sin x; \qquad \text{differenziert: } du = \cos x \cdot dx,$$
$$dv = \sin x \cdot dx; \qquad \text{integriert: } v = -\cos x\,.$$

Da wiederum

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,,$$

so ist

$$\int \sin^2 x \cdot dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \cdot dx\,,$$
$$\int \sin^2 x \cdot dx = -\tfrac{1}{2} \cdot \sin 2x + \int (1 - \sin^2 x) \cdot dx\,,$$
$$2 \int \sin^2 x\,dx = -\tfrac{1}{2} \cdot \sin 2x + x\,,$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \mathrm{C}\,.$$

Ein viertes Beispiel:

$$\int \cos^2 x \cdot dx\,.$$

Es sei

$$u = \cos x; \qquad \text{differenziert: } du = -\sin x \cdot dx,$$
$$dv = \cos x \cdot dx; \qquad \text{integriert: } v = \sin x\,.$$

Also

$$\int \cos^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx\,,$$
$$2 \int \cos^2 x \cdot dx = \tfrac{1}{2} \sin 2x + x\,,$$
$$\int \cos^2 x \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \mathrm{C}\,.$$

83. Integrierung durch Zerlegung in Partialbrüche.

Eine allgemeine Regel läßt sich ferner für das Integrieren solcher Ausdrücke angeben, bei denen x im Nenner in einer höheren Potenz enthalten ist als im Zähler, z. B.

$$\int \frac{1}{(a+x)(b+x)} \cdot dx .$$

Charakteristisch ist, daß x im Nenner in der 0. Potenz, im Zähler in der 2. Potenz vorkommt, wie man durch Ausmultiplizieren des Nenners erkennt. Die Integration gelingt durch das Zerlegen in Partialbrüche. Während man in der niederen Mathematik häufig die Aufgabe hat, zwei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen und in einen Bruch zu verwandeln, stellen wir uns hier die umgekehrte Aufgabe, den Bruch

$$\frac{1}{(a+x)(b+x)} \tag{1}$$

in zwei Brüche zu zerlegen.

Ganz allgemein wird diese Zerlegung die Form haben müssen:

$$\frac{n}{a+x} + \frac{m}{b+x} . \tag{2}$$

Wenn wir diese Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, so wird daraus

$$\frac{nb + nx + ma + mx}{(a+x)(b+x)} .$$

Damit unser obiger Ausdruck (1) damit identisch wird, müssen wir also m und n so wählen, daß

$$nb + nx + ma + mx = 1$$

oder

$$ma + nb + (m+n)x = 1$$

wird. Das ist nun der Fall, wenn wir

$$ma + nb = 1 \tag{3}$$

und

$$m + n = 0 \tag{4}$$

setzen. Diese beiden letzten Gleichungen stellen nun zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten m und n dar, und sie lassen sich nach m und n auflösen; es wird nämlich

$$m = \frac{1}{a-b},$$

$$n = \frac{-1}{a-b}.$$

Setzen wir die so ermittelten Werte für m und n in (2) ein, so wird daraus

$$\frac{-\frac{1}{a-b}}{a+x} + \frac{\frac{1}{a-b}}{b+x}.$$

In der Tat wird, wenn wir diese Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, (1) daraus.

Nunmehr lautet das Integral

$$\int \left[\frac{-\frac{1}{a-b}}{a+x} + \frac{\frac{1}{a-b}}{b+x} \right] dx$$

oder

$$\int \frac{-\frac{1}{a-b}}{a+x}\, dx + \int \frac{\frac{1}{a-b}}{b+x}\, dx$$

und dieses ergibt nunmehr

$$-\frac{1}{a-b} \ln(a+x) + \frac{1}{a-b} \ln(b+x) + C$$

oder mit leichter Umformung:

$$\boldsymbol{\frac{1}{a-b} \ln \frac{b+x}{a+x} + C}.$$

Dieses ist die Lösung des gesuchten Integrals.

Zweites Beispiel.

$$\int \frac{x}{(a+x)(b-x)}\, dx.$$

Wir zerlegen in Partialbrüche und setzen

$$\frac{x}{(a+x)(b-x)} = \frac{n}{a+x} + \frac{m}{b-x}.$$

Letzterer Ausdruck ergibt, auf gemeinsamen Nenner gebracht:

$$= \frac{n(b-x) + m(a+x)}{(a+x)(b-x)} = \frac{nb + ma + x(m-n)}{(a+x)(b-x)} .$$

Es muß also sein

$$nb + ma + x(m-n) = x ,$$

d. h.

$$nb + ma = 0 ,$$

$$m - n = 1 .$$

Die Lösung dieser zwei Gleichungen für die Unbekannten m und n ergibt

$$m = \frac{b}{a+b} ,$$

$$n = -\frac{a}{a+b} .$$

Es fragt sich nun, wie wir im allgemeinen den Ansatz für die zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten m und n zu machen haben. Der ausmultiplizierte Zähler hatte im ersten Beispiel die Form

$$(ma + nb) + (m+n)x = 1 , \tag{1}$$

im zweiten Fall die Form

$$(ma + nb) + (m+n)x = x . \tag{2}$$

Es könnte in einem dritten Fall, z. B. wenn man den Bruch $\dfrac{c + 4x}{(a+x)(b+x)}$ zu zerlegen hätte, die Form haben

$$(ma + nb) + (m+n)x = c + 4x . \tag{3}$$

Wir haben auf der linken Seite ein Glied, welches x enthält, und ein zweites, welches x nicht enthält; ebenso im allgemeinen auf der rechten, nur kann hier das eine oder das andere $= 0$ sein. Die beiden Gleichungen für m und n werden nun in der Weise angesetzt, daß man die beiden Glieder ohne x einander gleich setzt, und ebenso die beiden Glieder mit x, also z. B. aus (1) würde man ableiten

$$ma + nb = 1 ,$$

$$(m+n)x = 0 ; \quad \text{d. h.} \quad m + n = 0 .$$

Aus (2) würde man ableiten

$$m\,a + n\,b = 0\,,$$
$$(m + n)\,x = x\,; \qquad \text{d. h.} \qquad m + n = 1\,.$$

Aus (3) würde man ableiten

$$m\,a + n\,b = c$$
$$(m + n)\,x = 4\,x\,; \qquad \text{d. h.} \qquad m + n = 4\,.$$

Kehren wir zu unserer speziellen Aufgabe zurück und setzen die erhaltenen Werte für m und n ein, so wird unser Integral

$$\int \frac{x}{(a + x)(b - x)} \cdot dx = \int \frac{\frac{b}{a+b}}{a + x} \cdot dx - \int \frac{\frac{a}{a+b}}{b - x} \cdot dx$$
$$= \frac{b}{a + b} \ln(a + x) + \frac{a}{a + b} \ln(b - x) + C\,.$$

Drittes Beispiel.

$$\int \frac{x\,dx}{(a^2 - x^2)}\,.$$

In einem solchen Falle wird man den Nenner erst in Faktoren auflösen und schreiben:

$$\int \frac{x\,dx}{(a + x)\,(a - x)}\,.$$

Nunmehr verfährt man wie oben und setzt

$$\frac{x}{(a + x)\,(a - x)} = \frac{m}{a + x} + \frac{n}{a - x}\,,$$

so daß

$$x = m\,(a - x) + n\,(a + x) = (m\,a + n\,a) + x\,(-m + n)\,.$$

Wir setzen also

$$m\,a + n\,a = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad m + n = 0\,,$$
$$-m + n = 1\,,$$

woraus folgt,

$$m = -\tfrac{1}{2}\,, \qquad n = +\tfrac{1}{2}\,,$$

so daß das Integral die Form erhält:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{a+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{a-x}=-\frac{1}{2}\ln(a+x)-\frac{1}{2}\ln(a-x)+C$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)+C\,.$$

84. Integration durch Reihenentwicklung.

Läßt sich eine Funktion von x als Summe einer Reihe darstellen, so kann man natürlich auch jedes Glied der Reihe für sich integrieren.

Es sei zu berechnen

$$\int\frac{1}{1+x}\cdot dx\,.$$

Wir können den Grundformen der Integrale unter Einführung der neuen Variablen $u = 1 + x$ schon entnehmen, daß dieses Integral $= \ln(1 + x) + C$ ist. Wir können aber auch $\frac{1}{1+x}$ als die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe auffassen, nämlich

$$1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots$$

Das kann man natürlich nur unter der Bedingung, daß $x < 1$ ist. Andernfalls konvergiert die Reihe nicht, sondern ihre Summe ist $= \infty$. Es ist also, wenn $x < 1$,

$$\int\frac{1}{1+x}\cdot dx=\int 1\cdot dx-\int x\cdot dx+\int x^2\,dx-\int x^3\cdot dx$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots+C_1\,.$$

Da anderseits dieses Integral $= -\ln(1 - x) + C$ war, so folgt daraus das interessante Resultat:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots+C_1-C\,.$$

Den Wert von $C_1 - C$ können wir leicht berechnen. Ist nämlich $x = 0$, so ergibt dieses, eingesetzt in diese Gleichung,

$$\ln 1 = C_1 - C\,.$$

Da $\ln 1 = 0$ ist, so ist $C_1 - C = 0$. Über das Gültigkeitsbereich dieser Reihe werden wir später noch zu sprechen haben, wenn wir sie auf andere Weise noch einmal ableiten werden. (S. 206).

Wir erhalten also einen interessanten Nebenbefund unserer Aufgabe:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

oder, wenn $1 + x = u$

$$\ln u = (u - 1) - \frac{(u-1)^2}{2} + \frac{(u-1)^3}{3} - + - + \cdots$$

Auf genau dieselbe Weise durch Integration von $\int \frac{1}{1-x} dx$ ergibt sich für dieselben Intervalle von x

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

Zu diesem Resultate werden wir mit Hilfe der Taylorschen Reihe noch auf ganz andere Weise kommen.

85. Die Eliminierung der Integrationskonstanten.

Bisher lernten wir das Integral nur in seiner unbestimmten Form kennen, stets behaftet mit der unbestimmten Integrationskonstanten C. Einen zahlenmäßigen Inhalt erhält das Integral erst dadurch, daß wir durch irgendeinen Umstand in der Lage sind, diese Konstante für den einzelnen Fall zu ermitteln. Wir haben beispielsweise die Differentialgleichung

$$dy = \frac{1}{x} dx ,$$

so ist ihr Integral

$$y = \ln x + C .$$

Nun sei gleichzeitig gegeben: wenn $y = 0$, so ist auch $x = a$ (irgendeine Zahl). Hierdurch ist die Bedeutung sofort geklärt. Denn da das Integral für jeden Punkt der Kurve gültig ist, so muß es auch gelten, wenn $y = 0$ ist, und wir finden durch Einsetzen von 0 für y und von a für x in die vorige Gleichung:

$$0 = \ln a + C .$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der vorigen, so ist

$$y = \ln x - \ln a$$

und die Integrationskonstante fällt heraus, und an ihrer Stelle erscheint die uns gegebene Größe a.

Beispiel: Für die Inversion des Rohrzuckers durch Säuren gilt folgendes Integral (Entwicklung desselben s. S. 170)

$$kt = -\ln(a - x) + C.$$

Hier bedeutet k eine Konstante, x die zur Zeit t invertierte Zuckermenge, a die Anfangsmenge des Rohrzuckers. Nun ist es selbstverständlich, daß ganz zu Beginn des Versuchs noch gar kein Zucker invertiert ist, es ist also für $t = 0$ auch $x = 0$; also ist

$$0 = -\ln a + C.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$kt = -\ln(a - x) + \ln a$$

oder

$$kt = \ln \frac{a}{a - x}.$$

86. Erläuterung der Bedeutung der Integrationskonstanten.

Welche wichtige Bedeutung die Integrationskonstante haben kann, werde an einem Beispiel erläutert. Gegeben sei die Funktion

$$y = \frac{x}{a + x}. \tag{1}$$

Es ergibt sich daraus durch Differenzieren

$$dy = \frac{a \cdot dx}{(a + x)^2}. \tag{1a}$$

Integrieren wir diese Gleichung, so muß notwendig die obige Funktion wieder herauskommen. Es ist aber

$$\int \frac{a\,dx}{(a + x)^2} = -\frac{a}{a + x} + C. \tag{2}$$

Wie ist (1) mit (2) zu vereinbaren? Die Lösung dieses Problems liegt in folgendem. Es ist nämlich

$$\frac{a}{a+x} = 1 - \frac{x}{a+x},$$

also können wir der Gleichung (2) auch die Form geben

$$\int \frac{a\,dx}{(a+x)^2} = -1 + \frac{x}{a+x} + C\,.$$

Da -1 eine konstante Zahl ist, können wir es mit C als eine neue Konstante zusammenfassen, und wir setzen $C - 1 = C_1$, und zwar brauchen wir C_1 für unseren Zweck nur $= 0$ anzunehmen, so ergibt sich

$$\int \frac{a\,dx}{(a+x)^2} = \frac{x}{a+x}$$

und wir sehen, daß Gleichung (1) in der Tat ein Integral der Gleichung (1a) ist. Es ist eben (2) die allgemeine Form des Integrals von (1a), von der (1) nur einen speziellen Fall darstellt, nämlich denjenigen Fall, wo $C = 1$ ist. Man unterscheidet so das allgemeine Integral von jedem einzelnen partikulären Integral.

87. Geometrische Bedeutung des Integrals.

Der Begriff des Integrals bekommt nun eine ganz neue Gestalt, wenn man von einer etwas anderen graphischen Darstellung ausgeht wie bisher. Wir arbeiteten stets mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem, welches ja nur eine der unendlich mannigfaltigen geometrischen Darstellungsweisen von Funktionen ist. Wir wählen nun eine zweite Art der Darstellung. Während wir, wenn in Fig. 77 A den Nullpunkt der Abszisse darstellt, gewöhnlich AB als x und BC als y bezeichneten, wollen wir jetzt AB als x und den Flächeninhalt der Figur ABC als y betrachten. Diese Fläche ist ja auch eine Funktion von x, denn sie ändert sich mit ihr. Denken wir uns x um das Stück $BB_1 = dx$ gewachsen, so wächst die

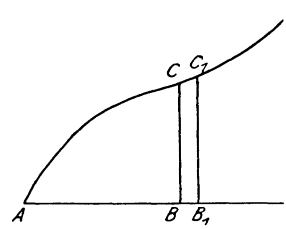

Fig. 77.

Fläche y um das schmale Flächenstück BB_1C_1C, welches wir mit um so größerer Genauigkeit als ein Rechteck auffassen dürfen, je schmaler es ist. Dieses ist also in unserem Fall $= dy$, und der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist etwas $> BC$ und etwas $< B_1C_1$. Die Verschiedenheit von BC und B_1C_1 verschwindet, sobald wir BB_1 als unendlich klein annehmen. Dann ist das Rechteck

$$\square\, BB_1C_1C = \overline{BC} \times \overline{BB_1},$$

also ist

$$\frac{\square\, BB_1C_1C}{BB_1} = BC .$$

Bei dieser Darstellungsweise ist also der Differentialquotient, geometrisch gedeutet, dasselbe, was bei unserer früher üblichen Darstellungsweise die Funktion y selber ist.

Und umgekehrt: Wenn wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ einer Funktion $y = f(x)$ selbst als eine Funktion von x auffassen und sie $= f'(x)$ setzen, und wenn wir diese Funktion in üblicher Weise in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen, so ist ihr Integral, also $\int y\, dx$, gleich der von dem Kurvenstück, der Anfangs- und der Endordinate, sowie von dem zugehörigen Abszissenstück eingeschlossenen Flächenstück. Ist also $x = AB$, und ist $y = BC$, so ist

$$\int y \cdot dx = \text{Fläche}\, ABC .$$

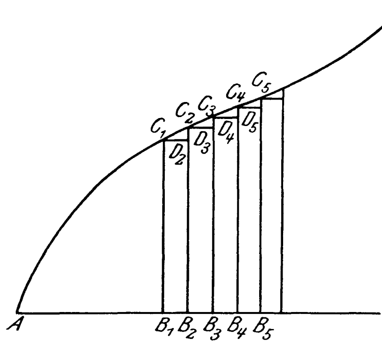

Fig. 78.

Das können wir auch noch auf andere Weise verstehen. Jedes der kleinen Rechteckchen $B_1B_2D_2C_1$ usw. der Fig. 78 stellt den Zuwachs des Inhaltes der von uns betrachteten Fläche dar. Summieren wir alle diese kleinen Rechtecke, so erhalten wir die ganze Fläche. So ist also das Integral die Summe unendlich vieler, aber lauter unendlich kleiner Flächenstückchen. Der Flächeninhalt der wirklich gezeichneten, durch Summierung der einzelnen Rechtecke gebildeten Figur, mit ihren vielen treppenartigen Absätzen, ist nicht ganz der gesuchte Flächeninhalt. Lassen wir die Dicke der einzelnen Rechtecke immer kleiner und ihre Anzahl immer größer werden, so verschwinden die Treppen mehr und mehr und wir erreichen den gesuchten Wert schon besser, und das wirkliche Integral ist derjenige Flächeninhalt, dem die treppenartige Figur zustrebt, wenn die Rechteckchen schließlich unendlich dünn und zahlreich werden. Ein solches unendlich schmales Rechteck heißt ein **Element** der Fläche.

Wir haben hier das Integral als eine Summe definiert, und zwar als die endliche Summe unendlich vieler, aber unendlich kleiner Elemente. Wir haben diese Auffassung an der Hand einer ganz bestimmten geometrischen Darstellung entwickelt, aber natürlich ist diese Auffassung von dem Wesen des Integrals nicht an diese eine Darstellungsweise gebunden. Auf jeden Fall, auch bei anderer geometrischer Darstellung und auch ganz ohne eine solche, wird man das Integral als eine solche Summe auffassen können. Man braucht zu diesem Zweck nur eine Größe in „Elemente“ zu zerlegen, um rechnerisch immer wieder auf denselben Summationsprozeß zu kommen. Ein solches Element ist ein unendlich klein gedachtes Teilchen der gesamten Größe, welches aber in seinen Eigenschaften bestimmt werden kann. So kann man den gesamten Zuwachs eines sich ständig verzinsenden Kapitals als die Summe aller derjenigen kleinen Zuwächse betrachten, welche in jedem, unendlich kurzen Zeitintervall entstehen. So kann man den Flächeninhalt eines Kreises als die Summe zahlloser, aber unendlich schmaler konzentrischer Ringe um den Mittelpunkt betrachten, oder auch als die Summe zahlloser, unendlich schmaler rechteckähnlichen Streifchen, in welche man die Kreisfläche zerlegen kann, oder überhaupt als die Summe unendlich vieler, unendlich kleiner Flächenelemente, deren Gesamtheit eben die Kreisfläche darstellt. Auf jeden Fall ist dann das Kapital, oder die Kreisfläche das Integral desjenigen Elementes, in welches wir das Ganze zerlegt hatten.

So kann man z. B. die Länge einer Kurve als ein Integral auffassen, als die Summe aller der unendlich kurzen, geradlinig aufzufassenden

Stückchen, welche sie zusammensetzt. Es stelle die Kurve Fig. 63 (S. 87) die Funktion $y = f(x)$ dar. Zerlegen wir diese Kurve, deren Länge insgesamt $= z$ sei, in Elemente, wie z. B. CC', und bezeichnen ein solches Element mit Δz, so ist die Kurvenlänge gleich der Summe aller dieser Δz, $= \Sigma \Delta z$. Wir können nun Δz durch y und x ausdrücken. Es ist nämlich in dem rechtwinkligen Dreieck $CC'D$

$$(\Delta z)^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2$$

und

$$\sum \Delta z = \sum \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}\,.$$

Wird Δz unendlich klein, so wird hieraus

$$\int dz = \int \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}\,.$$

Stellt z. B. die Kurve einen Kreisbogen dar, so ist nach S. 65

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

und

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

Dann ist

$$\int dz = \int \sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1} \cdot dx = \int \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx\,.$$

Führen wir als neue Variable $\frac{x}{r} = u$ ein, so ist $x^2 = r^2 \cdot u^2$ und $dx = r\,du$, daher (vgl. Tabelle S. 141)

$$z = r \int \sqrt{\frac{1}{1 - u^2}} \cdot du = r \cdot \arcsin u = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} + C\,.$$

Das Resultat deckt sich mit der Definition der Arcussinusfunktion (S. 108), welche natürlich die Länge eines Kreisbogens darstellen muß.

88. Das bestimmte Integral.

Das Integral in der bisher angewandten Weise hat die allgemeine Form

$$\int f'(x) \cdot dx = f(x) + C\,. \tag{1}$$

Als Flächeninhalt aufgefaßt, bedeutet es die Fläche zwischen **irgend zwei** Werten von x, die zunächst nicht näher angegeben sind. Das hat eben die Vieldeutigkeit dieses unbestimmten Integrals zur Folge. Sehr häufig handelt es sich aber darum, das Integral von einem ganz bestimmten Wert von x, es sei x_1, bis zu einem zweiten ganz bestimmten Wert von x, es sei x_2, zu berechnen. Man schreibt dieses bestimmte Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx\,.$$

Das Integral (1) hat für jeden Wert von x Gültigkeit, also auch für x_1 und für x_2. Daher ist

$$\int^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) + C\,,$$

$$\int^{x_2} f'(x)\,dx = f(x_2) + C\,.$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$\int^{x_2} f'(x)\,dx - \int^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_2)\,.$$

Überlegen wir uns jetzt die Bedeutung der linken Seite dieser Gleichung. Es sei ABC das zu x_1 gehörige Integral, ADE daß zu x_2 gehörige Integral. Dann sieht man sofort

$$\int^{x_2} f'(x)\,dx - \int^{x_1} f'(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx\,.$$

Haben wir also das bestimmte Integral zwischen zwei bestimmten Werten von x, x_1 und x_2 zu bilden, so bilden wir erst das (unbestimmte) Integral (von dem unbestimmt gelassenen Anfangspunkt) bis x_2, sodann das Integral (von demselben Anfangspunkt) bis x_1 und subtrahieren diese beiden Integrale.

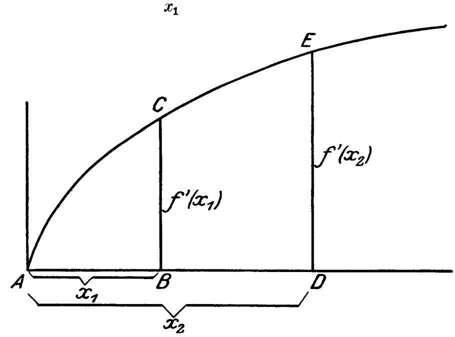

Fig. 79.

Einige bestimmte Integrale:

$$\int_0^1 e^x\,dx\,. \tag{1}$$

Der Gang der Rechnung wäre also folgender.

Das allgemeine Integral lautet:

$$\int e^x\,dx = e^x + C\,.$$

Nun ist

$$\int_0^1 e^x\,dx = \int^1 e^x\,dx - \int^0 e^x\,dx .$$

Das erste dieser beiden Integrale erhalten wir, indem wir in den Wert des allgemeinen Integrals für x den Wert 1 einsetzen, das zweite, indem wir in das allgemeine Integral $x = 0$ setzen. Es ist daher

$$\int_0^1 e^x\,dx = (e^1 + C) - (e^0 + C) = e - 1 .$$

$$\int_0^x e^x\,dx . \tag{2}$$

Dieses Symbol bedeutet folgendes. Es soll das Integral berechnet werden zwischen dem bestimmten Anfangswert 0 und einem beliebigen, offen gelassenen, einfach als x bezeichneten Endwert von x. Dieses Integral ist daher nur an seinem einen Ende bestimmt. Diese Ausdrucksweise wendet man häufig an. Die Rechnung erfolgt wie soeben, und es ist

$$\int_0^x e^x \cdot dx = (e^x + C) - (e^0 + C) = e^x - 1 .$$

$$\int_0^x \sin x \cdot dx = (-\cos x + C) - (-\cos 0 + C) = 1 - \cos x . \tag{3}$$

$$\int_0^\pi \sin x \cdot dx = (-\cos\pi + C) - (-\cos 0 + C) = 0 . \tag{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left(-\cos\frac{\pi}{2} + C\right) - (-\cos 0 + C) = 1 . \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \cdot dx = \left(-\cos\frac{\pi}{2} + C\right) - \left[-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C\right] = 0 . \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot dx = (-\cos 2\pi + C) - (-\cos 0 + C) = 0 . \tag{7}$$

$$\int_0^x \cos x \cdot dx = (\sin x + C) - (\sin 0 + C) = \sin x. \tag{8}$$

$$\int_0^\pi \cos x \cdot dx = (\sin \pi + C) - (\sin 0 + C) = 0. \tag{9}$$

$$\int_{\pi -}^{+\pi} \cos x \cdot dx = (\sin \pi + C) - (\sin(-\pi) + C) = 0. \tag{10}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \left(\sin \frac{\pi}{2} + C\right) - (\sin 0 + C) = 1. \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x \cdot dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} + C\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-2\pi)}{4} + C\right) = \pi. \quad (12[1])$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 x \cdot dx = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi}{4} + C\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-2\pi)}{4} + C\right) = \pi. \quad (13[1])$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = (\ln x + C) - (\ln 0 + C). \tag{14}$$

Da $\ln 0 = -\infty$, so hat dieses bestimmte Integral keinen endlichen Wert.

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = (\ln x + C) - (\ln 1 + C) = \ln x. \tag{15}$$

$$\int_x^{x^2} \frac{dx}{x} = (2 \ln x + C) - (\ln x + C) = \ln x. \tag{16}$$

89. Berechnung von Flächeninhalten.

Von dieser sehr allgemeinen Anwendungsweise der Integralrechnung sollen einige Beispiele gegeben werden.

---

[1]) Das allgemeine Integral findet man S. 147.

Gegeben sei die geradlinige Funktion (Fig. 80)

$$y = 2\,x\,.$$

Es soll nun der Flächeninhalt des zu einem beliebigen Wert von x, AB, zugehörigen Dreiecks ABC berechnet werden. Dieser Flächeninhalt ist also das bestimmte Integral von $x_1 = 0$ bis $x_2 = x$. Dieser Flächeninhalt ist nach § 84 zunächst in allgemeiner Form:

$$\triangle ABC = \int y \cdot dx = \int 2\,x\,dx\,,$$

$$\int y\,dx = x^2 + C\,. \tag{1}$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten C erhellt daraus, daß für $x = 0$ nach der Figur auch $y = 0$ ist, also auch der Wert des zugehörigen Integrals oder Dreiecks $= 0$ ist. Setzen wir in Gleichung (1) $x = 0$, und setzen wir ferner die geometrisch gewonnene Beziehung $\int y\,dx = 0$ ein, so ist

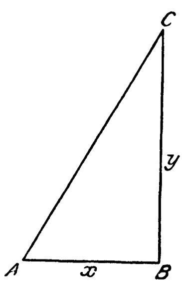

Fig. 80.

$$0 = 0 + C\,,$$

also

$$C = 0\,,$$

folglich ist

$$\triangle ABC = \int 2\,x\,dx = x^2\,.$$

In diesem Beispiel liegen nun die Verhältnisse besonders einfach, weil der zu berechnende Flächeninhalt von lauter Geraden begrenzt ist. Die allgemeine Methode, Flächeninhalte zu berechnen, ist folgende. Man zerlege die Fläche in kleine, schmale Stücke, derart, daß man den Inhalt eines jeden Stückes berechnen kann, und summiere dann sämtliche Stücke. Welcher Art diese „Elemente" der Fläche sind, wird nur von der Bequemlichkeit der Rechnung vorgeschrieben. Soll man z. B. den Flächeninhalt berechnen, den die Sinuskurve mit der x-Achse zusammen umschließt (Fig. 83), so wird man sich die Fläche durch zahlreiche Parallelen zu BD in lauter kleine Streifen zerlegt denken, welche, je kleiner man die Breite wählt, um so genauer gleich einem Rechteck werden. Soll man dagegen den Flächeninhalt eines Kreises berechnen, so zerlegt man diesen am besten in kleine Segmentchen wie AOB (Fig. 81), deren Inhalt, je kleiner AB wird, sich um so mehr dem eines gewöhnlichen Dreiecks nähert.

Wir wollen nun auf diese Weise einige Flächeninhalte berechnen.

1. Der Flächeninhalt des Kreises.

Man zerlegt den Kreis in kleine Sektoren auf die angegebene Weise. Der Inhalt eines jeden kleinen Sektors ist, wenn dieser nur schmal genug ist, derselbe wie der eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis das sehr kleine Stück der Peripherie AB, und dessen Höhe der Radius des Kreises ist; es ist der sehr kleine Inhalt

$$dJ = \frac{AB \cdot r}{2}.$$

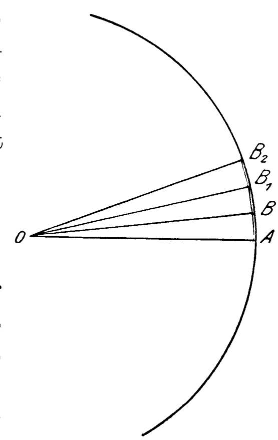

Fig. 81.

Die Strecke AB selbst ist nun von r abhängig. Zerlegen wir z. B. den Kreis in 100 Sektoren, so ist der Umfang des Kreises, wenn der Radius $= \varrho$ ist, $= 2\varrho\pi$, und das AB entsprechende Stück desselben $= \frac{2\varrho\pi}{100}$. Ist aber der Radius $= 2\varrho$, so ist der Umfang $4\varrho\pi$, und das Stück $AB = \frac{4\varrho\pi}{100}$ Daher ist das Stückchen AB, wenn wir seine Größe für einen Kreis mit dem Radius 1 als dx bezeichnen, im allgemeinen für einen Kreis mit dem Radius $r = r \cdot dx$. Es ist also

$$dJ = \frac{r^2}{2} dx.$$

Nunmehr summieren wir alle diese unendlich vielen Dreieckchen zwischen den Werten $x = 0$ und $x = 2\pi$, oder wir „integrieren über den Umfang des Kreises", und es wird

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} dx.$$

Da $\frac{r^2}{2}$ eine Konstante ist, können wir es auch vor das Integralzeichen setzen:

$$J = \frac{r^2}{2} \cdot \int_0^{2\pi} dx \,,$$

$$\boldsymbol{J = \pi r^2} \,.$$

Bemerkenswert ist für dieses Beispiel, daß wir die Fläche nicht in Rechteckchen, sondern in Dreieckchen zerlegt haben, also nicht das Prinzip des rechtwinkligen Koordinatensystems, sondern die Darstellungsweise des Polarkoordinatensystems anwandten.

2. Der Flächeninhalt der Parabelfläche.

Wir stellen uns die Aufgabe, den Flächeninhalt eines Parabelstücks (Fig. 82) vom Scheitel bis zur Linie AB zu ermitteln. Hier müssen wir vor die eigentliche Integrationsaufgabe eine andere Überlegung setzen, welche für derartige Aufgaben typisch ist und immer wieder vorkommt. Wir wollen nämlich hier das rechtwinklige Koordinatensystem als Achsensystem wählen und müssen uns vergegenwärtigen, daß dann ein Flächenstück oberhalb der Abszisse als positiv gerechnet werden muß, ein Flächenstück unterhalb der Abszisse als negativ. Weil nun von der Parabelfläche genau das gleiche Stück oberhalb wie unterhalb der x-Achse liegt, und weil analytisch dargestellt, das obere Stück ein positives, das untere ein negatives Vorzeichen bekommt, so muß als Inhalt der Parabelfläche vom Scheitel bis zur Grenze AB immer Null herauskommen. Was wir hier suchen, ist aber nicht algebraische Summe der analytisch als positiv oder negativ definierten Flächenstücke, sondern der wirkliche Inhalt. Dieser deckt sich mit dem analytischen Inhalt nur unter der Bedingung, daß die betrachtete Fläche ganz oberhalb oder ganz unterhalb der x-Achse liegt, im letzteren Fall werden wir nur das negative Vorzeichen des erhaltenen Resultats fortzulassen brauchen.

Sobald also ein gesuchter Flächeninhalt die Abszisse des Koordinatensystems überschreitet, werden wir die Fläche in einzelne Abschnitte zerlegen, die durch die Abszisse abgegrenzt werden, und jeden dieser Abschnitte einzeln integrieren, zum Schluß die erhaltenen Teilflächen, alle mit positiven Zeichen versehen, addieren. — Bei der Parabel wird nun die Fläche durch die x-Achse halbiert, wir werden daher nur nötig haben, die obere Hälfte der Fläche zu integrieren.

Für diese gilt nun die Gleichung (S. 63)

$$y = +\sqrt{2px}\,.$$

Wir zerlegen nunmehr die Parabelfläche in schmale Streifen, indem wir zahlreiche Parallelen zu BC ziehen. Wenn wir diese Streifen recht schmal machen, so wird der Inhalt eines solchen Streifens $dJ = y \cdot dx$ und der Inhalt des Parabelstücks vom Scheitel bis zur Grenze BC ist

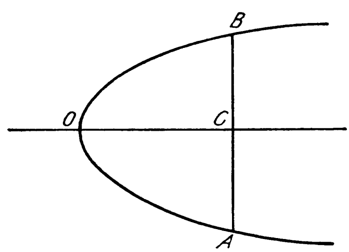

Fig. 82.

$$J = \int_0^x \sqrt{2px} \cdot dx = \sqrt{2p} \int_0^x \sqrt{x} \cdot dx\,,$$

$$J = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{2px}\,.$$

Da nun

$\sqrt{2px} = y$, so ist $J = \frac{2}{3}x \cdot y$.

Der Inhalt des Parabelstücks ist daher $\frac{2}{3}$ von dem Rechteck aus den Koordinaten x und y.

Das ganze Parabelstück OAB hat die doppelte Fläche.

3. Den Flächeninhalt der Sinuskurve zu berechnen.

Gegeben sei $y = \sin x$ (Fig. 83).

Aus denselben Gründen wie soeben werden wir uns zunächst die Aufgabe stellen, nur den oberhalb der x-Achse gelegenen Flächeninhalt zu berechnen, der einerseits von der Kurve AC, andererseits von der Geraden AC begrenzt wird. Wir zerlegen diese Fläche in kleine Streifen, indem wir zahlreiche Parallelen zu BD gezogen denken. Der Inhalt eines einzelnen Streifens ist $= y \cdot dx$. Die Summe aller dieser Streifen zwischen $x = 0$ und $x = AC = \pi$ ist

$$J = \int_0^\pi y\,dx = \int_0^\pi \sin x \cdot dx\,.$$

Da der Wert des entsprechenden unbestimmten Integrals $= -\cos x + C$ ist, so ist

$$\int_0^\pi \sin x = -\cos\pi + \cos 0 = +2\,.$$

Es ist also

$$J = 2\,.$$

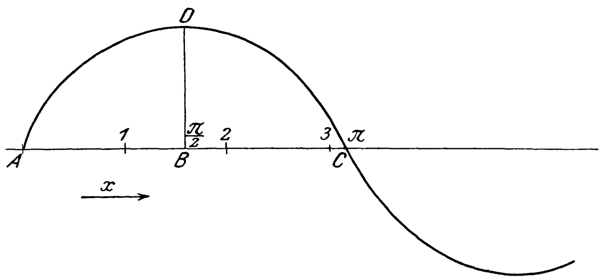

Fig. 83.

Ebenso ist natürlich auch die unterhalb der x-Achse gelegene Fortsetzung der Sinusfläche zwischen $x = \pi$ und $x = 2\pi$

$$J = -2$$

analytisch betrachtet; also rein geometrisch $= 2$. Der Inhalt der Fläche zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist also algebraisch $= 0$, geometrisch $= 4$.

90. Die mittlere Größe der Ordinate.

Für manche Zwecke ist es von Vorteil, den Mittelwert sämtlicher Ordinaten für ein bestimmtes Intervall von x zu kennen. Es stelle z. B. Fig. 84 eine Pulskurve dar. Sie stellt die Schwankung des Blutdruckes vom Beginn einer Systole bis zum Beginn der nächsten Systole dar. Der diastolische Blutdruck sei a, dann ist der maximale Blutdruck in der Systole $= a + BD$. Wir wollen nun wissen, welche Größe wir zu dem diastolischen Druck a addieren müssen, um den mittleren Druck zu erhalten.

Es sei also $AC = x$ das Intervall, in welchem der mittlere Wert der Ordinate, y_m, gesucht wird. Gemäß der Bedeutung des Mittelwertes würden wir zunächst folgendermaßen operieren. Wir ziehen viele Parallelen zu BD, welche alle voneinander den Abstand Δx haben. Diese Parallelen seien bezeichnet mit $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$. Den Mittelwert aller dieser Koordinaten erhält man nun, indem man die Summe $(y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_n)$ durch die Zahl der addierten Ordinaten dividiert. Diese Zahl ist $= \frac{x}{\Delta x}$. Es ist also der Mittelwert von y

$$y_m = \frac{\Sigma y \cdot \Delta x}{x}.$$

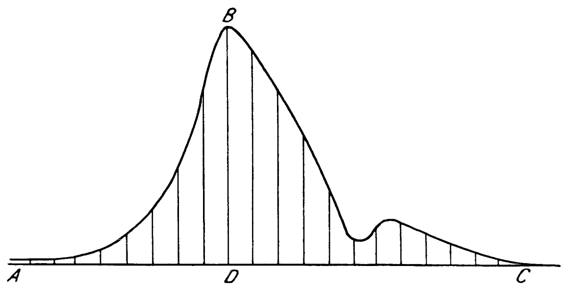

Fig. 84.

Diese angenäherte Rechnung kann man zu einer genauen machen, indem man die Größe der Strecke Δx unendlich klein wählt. Dann wird die Zahl der addierten Ordinaten unendlich groß, und Δx wird zu dx. Es ist nun, wie oben gezeigt wurde, $\Sigma y \cdot dx$ dasselbe wie $\int y\,dx$, und daher

$$y_m = \frac{\int y \cdot dx}{x}$$

oder im speziellen für das Intervall x_1 bis x_2:

$$y_m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx}{x_2 - x_1}.$$

Nun gibt das Integral nach § 84 den Flächeninhalt der Kurve an. Diesen Flächeninhalt können wir aber durch ein Rechteck dargestellt denken, dessen eine Seite x ist. Dann muß die andere Seite $\frac{\int y\,dx}{x}$ sein, was $= y_m$ ist.

Die mittlere Ordinate ist daher diejenige Ordinate, welche mit der (in dem gewünschten Intervall abgeschnittenen) Abszisse ein Rechteck von gleichem Inhalt wie die Kurvenfläche gibt.

Die praktische Bestimmung der Ordinatenhöhe kann man folgendermaßen ausführen. Man schneide das Kurvenstück in Karton oder Blech von gleichmäßiger Dicke aus und wäge es. Es habe das Gewicht g. Sodann bestimme man durch Auswägen von Quadraten bestimmter Größe das Gewicht der Flächeneinheit 1 qcm des Kartons, es sei c und berechne daraus den Flächeninhalt von $\int y\,dx$; es ist nämlich

$$\int y\,dx = \frac{g}{c}.$$

Diesen Flächeninhalt braucht man nur noch durch die Länge der ausgeschnittenen Abszisse, x, zu dividieren, um die mittlere Ordinate

$$y = \frac{g}{c \cdot x}$$

zu erhalten.

91. Beispiele für die Anwendung der Integralrechnung.

Die Arbeit bei der isothermen Ausdehnung eines Gases. Dieses Beispiel sei als besonders wichtig dem genauen Studium empfohlen. Es sei die Arbeit zu berechnen, die ein Gramm-Mol. eines idealen Gases bei isothermer Ausdehnung[1]) von dem Volumen v_1 auf das Volumen v_2 leistet.

Wenn ein Gramm-Mol. eines Gases bei konstantem Druck p sich von dem Volumen v_1 auf das Volumen v_2 ausdehnt, so

[1]) D. h. ohne Änderung der Temperatur. Da an sich die Volumenänderung eines Gases bei Arbeitsleistung stets mit einem kalorischen Effekt verbunden ist, so kann die isotherme Ausdehnung eines Gases nur dadurch bewerkstelligt werden, daß man den Kolben, der das Gas faßt und mit einem beweglichen Stempel versehen ist, in ein großes Wasserbad von konstanter Temperatur tauchen und den Ausdehnungsprozeß äußerst langsam vor sich gehen läßt, so daß stets ein völliger Wärmeaustausch eintritt. Der Prozeß der Ausdehnung muß so langsam geleitet werden, daß die in jedem Zeitteilchen entstehende oder verschwindende Wärmemenge sofort an das Wärmereservoir fortgeleitet wird, welches so groß gewählt wird, daß die zugeleitete oder abgenommene Wärmemenge insgesamt noch keine meßbare Temperaturänderung zur Folge hat.

leistet es die Arbeit $p(v_2 - v_1)$. Da aber bei einem isothermen Prozeß der Druck sich stetig ändert, so dürfen wir p nur auf eine unendlich kurze Strecke als konstant betrachten. Es wird dann, wenn ein Gramm-Mol. des Gases unter dem Druck p sich um das unendlich kleine Volumen dv ausdehnt, die unendlich kleine Arbeit

$$dA = p\,dv$$

geleistet. Durch Integration dieser Differentialgleichung erhalten wir die endliche Arbeit

$$A = \int p\,dv\,.$$

Nun ist, wie schon gesagt wurde, p nicht konstant, sondern selber eine Funktion von v, und zwar ist nach dem Gasgesetz

$$pv = RT$$

oder

$$p = \frac{RT}{v}\,.$$

Setzen wir das in das Integral ein, so ist

$$A = \int RT \cdot \frac{dv}{v} = RT\int \frac{dv}{v}$$

oder

$$A = RT \ln v + C\,.$$

Jetzt müssen wir noch die Integrationskonstante eliminieren. Da die letzte Gleichung die allgemeine Beziehung zwischen A und v gibt (dies sind die einzigen Variablen; R und C sind von Natur Konstanten, und die Konstanz von T ist unsere Voraussetzung), so gilt, wenn wir den zu einer gewissen Arbeit A_1 gehörigen Wert von v als v_1 bezeichnen, und den zu einer anderen Arbeit A_2 gehörigen Wert von v als v_2,

$$A_1 = RT \ln v_1 + C$$

und ebenso

$$\underline{A_2 = RT \ln v_2 + C.}$$

Durch Subtraktion

$$A_2 - A_1 = RT \ln v_2 - RT \ln v_1$$

oder

$$A_2 - A_1 = RT \ln \frac{v_2}{v_1}\,.$$

$A_2 - A_1$ ist aber die Arbeit, die das Gas von dem Anfangszustand v_1 bis zur Erreichung des Zustands v_2 leistet. Es ist also, wenn nunmehr A die Arbeit zwischen dem Zustand v_1 und v_2 bedeutet,

$$A = \int_{v_1}^{v_2} RT \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Die Arbeit, die wir mit A_1 bezeichneten, wurde von irgendeinem, nicht genauer definierten Nullpunkt an gemessen; entsprach z. B. dieser Anfangspunkt irgendeinem sehr kleinen Volumen des Gases, so ist A_1 die Arbeit, die das Gas leistet, wenn es sich zunächst einmal von diesem beliebigen sehr kleinen Anfangsvolumen bis zu v_1 ausdehnte, also eine Arbeit, die wir bei unserer Aufgabe (die Arbeit bei der Volumenänderung $v_2 - v_1$ zu berechnen) gar nicht wissen wollen. A_2 bedeutet dann die Arbeit von eben jenem sehr niederen, nicht näher festgelegten, Anfangspunkt aus, und umfaßt daher erstens die uns nicht interessierende Arbeit A_1 und dazu noch die gesuchte Arbeit. Also ist $A_2 - A_1$ die von uns gesuchte Größe der Arbeit.

92. Beispiele aus der chemischen Kinetik.

1. Unimolekulare Reaktion.

Wenn eine chemische Reaktion darin besteht, daß die Konzentration eines gelösten Stoffes (durch Abbau oder Synthese) sich allmählich ändert, so nennt man das eine unimolekulare Reaktion, da sich nur eine Molekülart verändert (umwandelt). Die Reaktion

1 Mol. Sacharose $\rightarrow$ 1 Mol. Glukose $+$ 1 Mol. Fruktose

stellt eine solche dar. Eine in umgekehrter Richtung verlaufende Reaktion

1 Mol. Glukose $+$ 1 Mol. Fruktose $\rightarrow$ 1 Mol. Sacharose

wäre dagegen eine bimolekulare Reaktion.

Die physikalische Chemie der Chemie lehrt nun, daß die Geschwindigkeit einer unimolekularen Reaktion in jedem Augenblick proportional der in diesem Augenblick vorhandenen Menge des veränderungsfähigen Stoffes ist. Bezeichnen wir die zu Anfang (Zeit $t = 0$) vorhandene Sacharosemenge mit a, die zur Zeit t vorhandene Sacharosemenge mit x, so würden wir als „Zerfallsgeschwindigkeit" das Verhältnis der Abnahme des Zuckers zu der Zeitdauer, das diese Abnahme erfordert, betrachten. Die auf diese Weise definierte Geschwindigkeit ist aber nicht gleichförmig, indem sie sich ebenso wie Sacharosemenge jeden Augenblick ändert. Je kürzere Zeitläufte man betrachtet, um so weniger ändert sich während des betrachteten Zeitraumes. Für unendlich kurze Zeit betrachtet, ist diese Geschwindigkeit konstant. Wir bezeichnen nun wie gewöhnlich, eine unendlich kleine Zunahme des Zerfallsproduktes, des Invertzuckers, mit dx, und die dazu gehörige Zeit mit dt. Die Geschwindigkeit des Zerfalles zur Zeit t ist also, für eine unendlich kleine Spanne Zeit, als konstant zu betrachten und ist $\frac{dx}{dt}$.

Von dieser Geschwindigkeit lehrt nun die physikalische Chemie daß sie der zur Zeit t vorhandenen Sacharosemenge proportional ist. Diese ist $= a - x$. Es ist also

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) ,$$

wo k einen Proportionalitätsfaktor, die Geschwindigkeitskonstante bedeutet. Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Gleichung zu integrieren, d. h. aus ihr zu einer neuen Gleichung zu gelangen, in der keine unendlich kleinen Größen wie dx und dt mehr vorkommen. Wir schreiben diese Gleichung zunächst in der Form

$$k\,dt = \frac{dx}{a - x} .$$

Aus ihr folgt zunächst

$$\int k\,dt = \int \frac{dx}{a - x} .$$

Führen wir diese Integration aus, so ist

$$kt = -\ln(a - x) + C .$$

Zur Eliminierung der Integrationskonstanten machen wir davon Gebrauch, daß diese Gleichung auch dann gelten muß, wenn $t = 0$ ist, also zu Anfang des Versuchs. Dann ist $x = 0$, und daher unter Einsetzung dieser Werte von x und t in obige Gleichung

$$0 = -\ln a + C$$

oder

$$C = \ln a\,.$$

Setzen wir den Wert für C in das allgemeine Integral ein, so ist

$$kt = -\ln(a - x) + \ln a$$

oder

$$\boldsymbol{kt = \ln \frac{a}{a - x}\,.} \qquad [1]$$

In dieser Form wird die Gleichung gewöhnlich angewendet. Wollen wir sie nach x auflösen, so schreiben wir dafür unter Umkehrung der logarithmischen Funktion (S. 79)

$$e^{kt} = \frac{a}{a - x}\,,$$

worauf folgt

$$x = a \cdot \frac{e^{kt} - 1}{e^{kt}}\,.$$

Wollen wir die Gleichung [1] praktisch anwenden, so werden wir lieber mit dekadischen statt mit natürlichen Logarithmen rechnen. Dann geht die Gleichung über in die Form

$$0{,}4343 \cdot kt = \log^{10} \frac{a}{a - x}\,.$$

Wenn wir also aus experimentellen Daten den Ausdruck

$$\frac{1}{t} \cdot \log \frac{a}{a - x}$$

berechnen, so erweist sich derselbe für eine gegebene Versuchsbedingung als konstant, welchen Wert wir für x auch einsetzen, und von welcher Anfangsmenge a wir auch ausgehen. Diese errechnete Konstante k_1 steht zu der theoretischen Konstante k in der Beziehung (vgl. S. 26)

$$k_1 = 0{,}4343 \cdot k\,.$$

2. Eine bimolekulare Reaktion besteht darin, daß zwei verschiedene Moleküle miteinander unter Bildung eines oder mehrerer neuer Moleküle reagieren. Der Stoff A sei zu Anfang in der Konzentration a vorhanden, der Stoff B in der Konzentration b. Wenn nun $1\,\mathrm{Mol}\,A + 1\,\mathrm{Mol}\,B$ zu irgendeinem oder mehreren neuen Körpern sich umwandelt, so daß also A und B allmählich aus der Lösung verschwinden, so verschwindet in jedem Augenblick ebensoviel A wie B nach molaren Einheiten gemessen. Die zur Zeit t verschwundene Menge von A oder von B sei x. Dann lehrt die physikalische Chemie, daß die Geschwindigkeit in jedem Augenblick proportional dem jeweiligen Produkt der Konzentrationen der reagierenden Stoffe sei. Also

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x).$$

Daraus folgt zunächst, indem wir erst die Glieder mit der einen Veränderlichen, x, auf die eine, die mit der anderen, t, auf die andere Seite bringen,

$$k\,dt = \frac{dx}{(a-x)(b-x)},$$

$$\int k\,dt = \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}.$$

Das Integral der rechten Seiten entspricht der Form von § 83.

Wir zerlegen es in zwei Partialbrüche

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int \frac{\frac{1}{a-b}}{b-x} \cdot dx - \int \frac{\frac{1}{a-b}}{a-x} \cdot dx,$$

und so ergibt sich

$$kt = -\frac{1}{a-b} \cdot \ln(b-x) + \frac{1}{a-b} \ln(a-x) + C$$

oder

$$kt = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a-x}{b-x} + C.$$

Die Bedeutung von C ergibt sich daraus, daß die letzte Gleichung auch gelten muß, wenn $t = 0$; dann ist $x = 0$ und

$$0 = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \frac{a}{b} + C$$

oder

$$C = -\frac{1}{a-b} \cdot \ln \frac{a}{b} = +\frac{1}{a-b} \cdot \ln \frac{b}{a} .$$

Daher

$$k\,t = \frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} .$$

Für den Fall, daß $a = b$, ist diese Formel bedeutungslos. Man beginne für diesen Fall die Rechnung vom Ansatz an von neuem. Es wird dann

$$kt = \frac{x}{a\,(a-x)} .$$

3. Eine Reaktion bestehe in dem Zerfall eines Körpers, welcher hervorgerufen wird durch einen Katalysator. Nun sei der Zerfall in jedem Zeitteilchen proportional der Menge des Katalysators, aber unabhängig von der Konzentration des zerfallenden Körpers. Wie lautet das Integral dieses Prozesses?

Da der Prozeß von der Anfangsmenge a nicht abhängig ist, so kommt a diesmal im Ansatz nicht vor. Ist F die Konzentration des Katalysators, x die zur Zeit t schon zerfallene Menge, so ist

$$\frac{dx}{dt} = k\,F ,$$

wo k ein Proportionalitätsfaktor, die Geschwindigkeitskonstante ist. Diese Gleichung liefert

$$dx = k \cdot F \cdot dt ,$$

$$x = k \cdot F \cdot t + C ,$$

Anfangsbedingung: $\quad 0 = k \cdot F \cdot 0 + C$

$$x = k \cdot F \cdot t ,$$

x stellt somit eine geradlinige Funktion von t dar.

Dieser Verlauf findet sich wenigstens angenähert verwirklicht bei manchen Fermentprozessen, z. B. bei der Spaltung des Rohrzuckers durch Invertin, wo die Zerfallgeschwindigkeit, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, von der Konzentration des Rohrzuckers unabhängig ist und wenigstens bis zu einem gewissen Stadium annähernd der Zerfall eine geradlinige Funktion der Zeit ist, d. h. bei gegebener Fermentmenge wird in der Zeiteinheit eine bestimmte Menge Zucker umgesetzt, unabhängig von der Anfangsmenge des Zuckers.

4. Eine Reaktion verlaufe wie die soeben geschilderte, nur mit dem Unterschied, daß die Spaltprodukte einen hemmenden Einfluß auf die Katalyse haben, und zwar beruhe dieser hemmende Einfluß darin, daß von den Spaltprodukten ein gewisser Bruchteil des Ferments in Beschlag gelegt werde. Dieser unwirksam gemachte Teil des Ferments sei der Menge der Spaltprodukte einfach proportional.

Bezeichnen wir den zur Zeit t aktiven Teil des Ferments mit F_a, so ist zunächst wieder

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot F_a \,.$$

F_a ist aber noch von x oder t abhängig. F_a ist nämlich nicht das gesamte Ferment F, sondern man muß von F einen gewissen Bruchteil abziehen, welcher proportional der schon umgesetzten Menge x des Substrats ist. Ist ε dieser Proportionalitätsfaktor, so ist also

$$F_a = F(1 - \varepsilon x)\,,$$

wo $\varepsilon < 1$. Also

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot F(1 - \varepsilon x)\,,$$

$$\frac{dx}{1 - \varepsilon x} = k \cdot F\,dt\,,$$

$$kFt = \int \frac{dx}{1 - \varepsilon x}\,,$$

$$kFt = -\frac{1}{\varepsilon}\ln(1 - \varepsilon x) + C\,,$$

Anfangsbedingung: $\quad 0 = C$

$$kFt = -\frac{1}{\varepsilon}\ln(1 - \varepsilon x)$$

oder nach x aufgelöst:

$$x = \frac{1 - e^{-\varepsilon \cdot k \cdot F \cdot t}}{\varepsilon}\,.$$

5. Es sei eine ähnliche Annahme gemacht wie soeben, nur sei der durch die Spaltprodukte in Beschlag gelegte

Teil des Ferments nicht den Spaltprodukten proportional, sondern dem Verhältnis der Spaltprodukte zur Anfangsmenge des zu spaltenden Stoffes proportional. Dann wäre

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot F',$$

wo F' den wirksamen Teil der Fermentmenge F bedeutet. F' ist nur ein Teil von F, und zwar

$$F' = F\left(1 - \varepsilon\frac{x}{a}\right),$$

wo ε den Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Es ist daher

$$\frac{dx}{dt} = kF\left(1 - \varepsilon\frac{x}{a}\right)$$

oder

$$\int\frac{dx}{1 - \frac{\varepsilon}{a}\cdot x} = k \cdot F \cdot t\,.$$

Die Lösung des Integrals ergibt

$$\begin{array}{ll} & kFt = -\frac{a}{\varepsilon}\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\cdot x\right) + C\,, \\ \text{Anfangsbedingung:} & \underline{\quad 0 = \quad 0 \qquad\qquad\qquad + C} \\ & kFt = -\frac{a}{\varepsilon}\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\cdot x\right) \end{array}$$

oder

$$kFt = +\frac{a}{\varepsilon}\ln\frac{a}{a - \varepsilon x}\,.$$

Für den speziellen Fall z. B., daß $\varepsilon = 1$, ergibt sich

$$kFt = a\ln\frac{a}{a - x}\,.$$

Man beachte die Ähnlichkeit dieser Gleichung mit der einer einfachen unimolekularen Reaktion. Der Typus des Verlaufs ist in beiden Fällen derselbe, nur ist der Ausdruck

$$\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{a}{a - x}$$

bei der unimolekularen Reaktion unabhängig von der Anfangsmenge des Substrats, im zweiten Fall dagegen der Anfangsmenge des Substrats umgekehrt proportional.

93. Das partielle und das totale Differential.

Ist eine Funktion y von zwei Variablen u und v abhängig (die voneinander oder von einer dritten Größe x abhängig sein können oder auch nicht), so schreiben wir

$$y = f(u, v) .$$

Eine Änderung von y setzt sich also jedesmal zusammen aus der durch die Änderung von u und die Änderung von v verursachten Veränderung. Eine unendlich kleine Änderung von y, dy, ist also die Summe der durch das Anwachsen von u und der durch das Anwachsen von v gesetzten Änderung.

Wir denken uns den Zuwachs von y von einem beliebigen Werte aus derart, daß wir für einen Augenblick zunächst v als konstant annehmen, und nur u als Variable betrachten. In dem Fall ist der Differentialquotient von y nach u nach den üblichen Regeln zu bilden und v als Konstante zu betrachten. Nehmen wir ein bestimmtes Beispiel. Es sei

$$y = 3u + 5v^2 .$$

Betrachten wir jetzt u als Variable, v als Konstante, so ist

$$\frac{dy}{du} = 3 .$$

Um nun anzudeuten, daß dieser Differentialquotient nur dann Bedeutung hat, wenn wir v konstant annehmen, schreiben wir

$$\frac{dy}{du_{(v)}} = 3 . \tag{1}$$

Oder wir schreiben mit dem Zeichen ∂:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 3 . \tag{2}$$

$\frac{dy}{du_{(v)}}$ bedeutet also „der Differerentialquotient, unter der Voraussetzung, daß v konstant ist“. $\frac{\partial y}{\partial u}$ bedeutet der „Differentialquotient, unter der Voraussetzung, daß **nur** u variiert wird". Beides bedeutet also dasselbe. Wir nennen $\frac{\partial y}{\partial u}$ den „partiellen Differentialquotienten" von y nach u.

Nun nehmen wir zweitens umgekehrt an, u sei konstant und nur v sei die Variable, dann ist entsprechend

$$\frac{du}{dv_{(u)}} = 10\,v \tag{3}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 10\,v\,. \tag{4}$$

Aus (1) würde folgen

$$dy = 3\,du\,,$$

wenn nur u die Variable wäre.

Aus (2) folgt

$$dy = 10\,v \cdot dv\,,$$

wenn nur v die Variable wäre.

Den gesamten, wirklichen Zuwachs von y können wir uns entstanden denken, indem wir erst u um ein unendlich kleines Stück wachsen lassen, und dann v. Es ist also das „**totale** oder **vollständige** Differential" dy

$$dy = 3\,du + 10\,v \cdot dv\,.$$

Oder allgemein, indem wir für 3 und für 10 v aus den Gleichungen (2) und (4) ihre allgemeine Bedeutung einsetzen,

$$\boldsymbol{dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv\,.} \tag{5}$$

Das heißt in Worten:

„Der gesamte Zuwachs von y besteht 1. aus dem Zuwachs, der auf Kosten der Veränderung von u fällt, 2. aus dem Zuwachs, der auf Kosten der Veränderung von v kommt. Und zwar ist der erste Anteil des Zuwachses von y gleich dem Zuwachs von u, multipliziert mit dem partiellen Differentialquotienten von y nach u; und der zweite Anteil gleich dem Zuwachs von v, multipliziert mit dem partiellen Differentialquotienten von y nach v."

Durch weitere Beispiele wird diese anfänglich kompliziert erscheinende Beziehung leicht verständlich werden.

Es sei

$$y = \ln u + \ln v\,. \tag{6}$$

Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{u}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v}\,.$$

Nach (5) ist also

$$dy = \frac{1}{u} \cdot du + \frac{1}{v}\,dv\,.$$

Dasselbe Resultat erhalten wir auf andere Weise: Wir können statt (6) auch schreiben

$$y = \ln(u\,v)\,.$$

Dann ist $\frac{\partial y}{\partial u}$ folgendermaßen nach den allgemeinen Regeln der Differentialrechnungen zu berechnen. Setzen wir $u\,v = z$, wo v zunächst als eine Konstante betrachtet ist, so ist

$$y = \ln z$$

und

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}\,.$$

Da nun

$$v\,du = dz\,,$$

so erhalten wir

$$\frac{dy}{v \cdot du} = \frac{1}{z}$$

oder

$$\frac{dy}{du} = \frac{v}{z} = \frac{v}{u\,v} = \frac{1}{u}\,.$$

Es ist also

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{u}\,.$$

Ebenso ist, wie man auf die Weise selbst leicht nachrechnen möge,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v}$$

und

$$dy = \frac{1}{u} \cdot du + \frac{1}{v} dv .$$

Weitere Beispiele:

$$u = \sin x + \cos y .$$

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y ,$$

also

$$du = \cos x \, dx - \sin y \cdot dy .$$

Ein besonderer hierhergehöriger Fall ist der schon S. 112 behandelte:

$$y = u \cdot v .$$

Damals hatten wir die Beschränkung gemacht, daß u und v voneinander abhängige Variable seien, indem beide eine Funktionen von x seien. Jetzt können wir diese Beschränkung fallen lassen und auch den Fall in Betracht ziehen, daß u und v unabhängig voneinander seien; es ändert nichts an der Betrachtungsweise. Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v ,$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial v} = u ,$$

also

$$dy = u \, dv + v \, du .$$

94. Die Integration totaler Differentiale.

Gehen wir von irgendeiner von zwei (oder mehr) Variablen abhängigen Funktion aus

$$y = f(u, v) , \tag{1}$$

so werden wir das „vollständige Differential“ nunmehr nach der Regel

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \tag{2}$$

stets bilden können. Haben wir dagegen umgekehrt eine Differentialgleichung von der Form

$$dy = m \cdot du + n \cdot dv \tag{3}$$

vor uns, so läßt sich im allgemeinen diese Gleichung nicht integrieren, d. h. es gibt keine Funktion von u und v, welche y bestimmt, es gilt also nicht immer eine Beziehung der Art:

$$y = f(u, v).$$

Nur unter einer einzigen Bedingung ist das der Fall. Da nämlich die Gleichung (2) das Differential von (1) darstellt, so muß (1) das Integral von (2) sein. Wenn also in (3)

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\partial y}{\partial u} \\ \text{und} \qquad & \\ n &= \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ist, so ist die Gleichung (2) integrierbar, und das Resultat der Integration ist Gleichung (1).

Man nennt daher die beiden Gleichungen (4) die Integrabilitätsbedingung für die Differentialgleichung (3).

95. Beispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$dy = 3\,du + 10\,v \cdot dv. \tag{5}$$

Ist diese Gleichung integrierbar? D. h. Läßt sich y als Funktion von u und v eindeutig derart darstellen, daß das vollständige Differential die Form (5) erhält? Die Bedingung für diese Möglichkeit ist also, daß wir

$$3 = \frac{\partial y}{\partial u}$$

und

$$10\,v = \frac{\partial y}{\partial v}$$

setzen können.

Setzen wir

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 3$$

oder

$$\partial y = 3 \, \partial u \, ,$$

so würde beim Integrieren y den Wert erhalten

$$y = 3 u + C \, .$$

Die Integrationskonstante C ist noch unbestimmt. Sie kann jeden Wert besitzen, auch darf in ihr v enthalten sein, denn v ist ja in diesem Fall eine Konstante. Nur muß C natürlich von u ganz unabhängig sein. Wir schreiben daher besser

$$y = 3 u + f(v) + C_1 \qquad (6)$$

Hier bedeutet $f(v)$ vorläufig irgend eine Funktion von v.

Andererseits ergibt sich

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 10 \, v$$

oder

$$\partial y = 10 \, v \cdot \partial v \, ,$$

das Integral

$$y = 5 \, v^2 + C$$

oder besser

$$y = 5 \, v^2 + f(u) + C_2 \, . \qquad (7)$$

Hier ist $f(u)$ irgend eine Funktion von u. Wir dürfen jetzt über $f(v)$ und $f(u)$ beliebig verfügen. Setzen wir nun

$$f(v) = 5 \, v^2$$

und

$$f(u) = 3 \, u$$

an, so ergibt sich durch beide Gleichungen (6) und (7) in gleicher Weise

$$y = 3 u + 5 \, v^2 + \text{Konst.}$$

Dies wäre das gesuchte Integral, und die Tatsache, daß man die Möglichkeit hat, aus dem Wert von $\frac{\partial y}{\partial u}$ und von $\frac{\partial y}{\partial v}$ zu dem identischen Integral zu gelangen, beweist, daß wir in der Tat die Berechtigung hatten, 3 als $\frac{\partial y}{\partial u}$ und $10\,v$ als $\frac{\partial y}{\partial v}$ aufzufassen, und als Resultat der Integration ergibt sich

$$y = 3\,u + 5\,v^2 + \text{konst.}$$

Wenn wir die Probe machen und in dieser Gleichung y total differenzieren, so erhalten wir in der Tat

$$dy = 3\,du + 10\,v \cdot dv\,.$$

Zweites Beispiel:

$$dy = (u + 2\,v)\,du + (u - v)\,dv\,.$$

Integrabilitätsbedingung: Die Gleichung ist integrierbar, wenn

$$u + 2\,v = \frac{\partial y}{\partial u} \tag{1}$$

und

$$u - v = \frac{\partial y}{\partial v}\,. \tag{2}$$

Aus (1) würde folgen

$$\partial y = u\,\partial u + 2\,v\,\partial u\,,$$

wo nur u variabel ist.

Integriert:

$$y = \tfrac{1}{2}u^2 + 2\,u\,v + f(v) + C\,. \tag{1a}$$

Aus (2) würde folgen

$$\partial y = u\,\partial v - v\,\partial v\,,$$

wo nur v variabel ist oder integriert

$$y = u\,v - \tfrac{1}{2}v^2 + f(u) + C\,. \tag{2a}$$

Wir sind hier nicht imstande, für $f(u)$ und $f(v)$ irgend einen Wert einzusetzen derart, daß die beiden Integrale (1a) und (2a) identisch würden. Wir sind also nicht berechtigt,

$$u + 2\,v = \frac{\partial y}{\partial u}$$

oder

$$u - v = \frac{\partial y}{\partial v}$$

zu setzen, und die Gleichung läßt sich nicht integrieren. D. h. es gibt keine Funktion von u und v, deren totales Differential die Form hätte:

$$(u + 2\,v)\,du + (u - v)\,dv\,.$$

Drittes Beispiel:

$$dy = (u + v)\, du + (u - v)\, dv\,.$$

Setzen wir

$$u + v = \frac{\partial y}{\partial u}\,,$$

so ist

$$\partial y = u\, \partial u + v\, \partial u\,,$$

$$y = \frac{u^2}{2} + u v + f(v) + C\,,$$

$$u - v = \frac{\partial y}{\partial v}\,;$$

$$\partial y = u\, \partial v - v\, \partial u\,,$$

$$y = u v - \frac{v^2}{2} + f(u) + C\,.$$

Setzen wir

$$f(v) = -\frac{v^2}{2}\,,$$

$$f(u) = \frac{u^2}{2}\,,$$

so ist

$$y = \frac{u^2}{2} + u v - \frac{v^2}{2} + \text{konst.}$$

Probe: Diese Gleichung ergibt beim Differenzieren

$$dy = u\, du + u\, dv + v\, du - v\, dv\,,$$
$$dy = (u + v)\, du + (u - v)\, dv\,.$$

Viertes Beispiel:

$$dy = (u + 2\,v)\, du + (u + 2\,v)\, dv\,.$$

Es sei

$$u + 2\,v = \frac{\partial y}{\partial u} \tag{1}$$

und

$$u + 2\,v = \frac{\partial y}{\partial v}\,. \tag{2}$$

(1) ergibt integriert

$$y = \frac{u^2}{2} + 2\,u v + f(v) + C_1\,, \tag{3}$$

(2) ergibt integriert

$$y = u\,v + v^2 + f(u)\,C_2 \,. \tag{4}$$

Es ist nicht möglich, passende Werte für $f(v)$ und $f(u)$ zu finden, um y aus (3) mit y aus (4) in Übereinstimmung zu bringen, d. h. es gibt kein Integral unserer Differentialgleichung.

In diesen Beispielen ist gleichzeitig der Weg gezeigt worden, wie man derartige Integrationen ausführt. Um nur zu erkennen, ob irgendeine Differentialgleichung die Form eines vollständigen Differentials hat, gibt es aber noch einen einfacheren Weg. Ein Beispiel mag das erläutern.

Wenn gegeben ist

$$y = u^2 v + u\,v^2 \,, \tag{1}$$

so ist, wenn wir nur nach u differenzieren,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2\,u\,v + v^2 \,.$$

Differenzieren wir dies noch einmal, und nun nach v, ist

$$\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial u}}{\partial v} = 2u + 2v$$

oder anders geschrieben, unter Anwendung des hierfür üblichen Symbols, welches dem Anfänger weniger überblickbar ist, als die vorige Darstellungsweise:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} = 2u + 2v \,.$$

Differenzieren wir aber (1) erst nach v, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial v} = u^2 + 2uv \,,$$

und wird dies nun nach u differenziert:

$$\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial v}}{\partial u} = 2u + 2v$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v \cdot \partial u} = 2u + 2v \,.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \frac{\partial y}{\partial u}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial v}}{\partial u}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \cdot \partial u}$$

oder: Wenn eine Funktion zweimal hintereinander nach verschiedenen Variablen differenziert wird, so ist die Reihenfolge der Differentiation gleichgültig.

Ein vollständiges Differential hat nun die Form

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} dv .$$

Differenzieren wir $\frac{\partial y}{\partial u}$ noch einmal nach v, so muß also dasselbe herauskommen, als wenn wir $\frac{\partial y}{\partial v}$ nach u differenzieren. Und diese Tatsache ist daher ein Kriterium für ein vollständiges Differential.

Beispiel:

$$dy = 3du + 10v dv .$$

Hier ist, wenn überhaupt ein totales Differential vorliegt,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 10v .$$

Differenzieren wir 3 nach v, so ergibt sich 0, und differenzieren wir $10v$ nach u, so ergibt sich ebenfalls 0. Daraus erkennen wir, daß wir in der Tat ein vollständiges, integrierbares Differential vor uns hatten.

Beispiel 2.

$$dy = (u + v) du + (u - v) dv .$$

Differenzieren wir $(u + v)$ nach v, so ergibt sich 1.

„ „ $(u - v)$ nach u, so ergibt sich ebenfalls 1.

Es handelt sich also um ein vollständiges Differential.

Beispiel 3.

$$dy = (u + 2v)du + (u + 2v)dv \,.$$

Differenzieren wir $(u + 2v)$ nach v, so ergibt sich 2.
„ „ $(u + 2v)$ nach u, so ergibt sich 1.

Es ist also kein vollständiges Differential.

96. Eine Besonderheit nehmen diejenigen vollständigen Differentiale ein, deren Wert $= 0$ ist, z. B.

$$u\,dv - 2v\,du = 0 \,. \tag{1}$$

Es wird hier ausgesagt, daß die linke Seite mit ihren beiden Variablen u und v von einer dritten Variablen y nicht abhängt. Wir haben nur zwei Variable, und die Gleichung muß daher stets integrierbar sein. Der Gang der Integration wäre nämlich einfach folgender:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\frac{dv}{v}\,; \text{ integriert:}$$

$$\ln u = \tfrac{1}{2}\ln v + C\,,$$

$$\ln u = \ln\sqrt{v} + C\,,$$

$$\ln\frac{u}{\sqrt{v}} = C\,,$$

also ist auch $\frac{u}{\sqrt{v}}$ konstant, und auch $\frac{u^2}{v}$ konstant. Wir wollen aber die formelle Analogie mit den vorigen Beispielen herstellen. In (1) ist also

$$f(y) = 0 \,.$$

Hier ist

$$u = \frac{\partial y}{\partial v} \qquad \text{und} \qquad 2v = \frac{\partial y}{\partial u}\,.$$

Es ist nun

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1\,, \qquad \frac{\partial(2v)}{\partial v} = 2\,,$$

es liegt also kein vollständiges Differential vor, und es gibt keine Funktion $f(y)$, deren vollständiges Differential die Form hätte

$$df(y) = u\,dv - 2v\,du \,.$$

Wenn wir aber die Gleichung (1) mit $\frac{1}{u^3}$ multiplizieren, so ist

$$\frac{1}{u^2}\,dv - \frac{2v}{u^3}\cdot du = 0\,. \tag{4}$$

Da die rechte Seite $= 0$ ist, so können wir sie mit einer Variablen multiplizieren, ohne daß diese in Erscheinung tritt. Hier ist

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{u^2}\right)}{\partial u} = \frac{\partial\,\frac{2v}{u^3}}{\partial v} = \frac{2}{u^3}\,,$$

das Differential ist also vollständig, und sein Integral ist:

$$\frac{v}{u^2} = C\,. \tag{2}$$

Den Beweis erbringe man durch Differenzieren dieser Gleichung. Den Faktor, mit dem man die Gleichung (1) multiplizieren muß, um sie auf die Form eines vollständigen Differentials zu bringen, nennt man den „integrierenden Faktor". Es gibt deren nicht nur einen; z. B. auch $-\frac{u}{v^2}$ stellt einen solchen Faktor dar; es ergibt sich dann

$$-\frac{u^2}{v^2}\,dv + \frac{2u}{v}\,du = 0\,, \tag{5}$$

integriert

$$\frac{u^2}{v} = C_1\,, \tag{3}$$

was gegenüber (2) nichts Neues aussagt.

Aber weder (2) noch (3) liefert durch Differenzieren direkt die Gleichung (1), sondern die Gleichungen (4) bzw. (5), aus denen erst durch eine rechnerische Umformung (1) entsteht. Jedenfalls läßt sich jedes Differential von der Form

$$f(u, v)\,du + f(u, v)\,dv = 0$$

integrieren, auch wenn es formell kein vollständiges Differential ist.

97. Häufig bringt man Naturgesetze auf die Form

$$f(u, v, w \ldots) = \text{Konst.}$$

Z. B. das Gasgesetz

$$\frac{p \cdot v}{T} = R.$$

$p =$ Druck, $v =$ Volumen eines Gramm-Mol., $T =$ absolute Temperatur, R die sog. Gaskonstante.

Es ist also hier in der Tat

$$f(p, v, T) = \text{konst.}$$

Wenn wir von einer solchen Funktion ein vollständiges Differential bilden, so muß dieses den Wert 0 erhalten, denn das Differential einer Konstanten muß natürlich 0 sein, also

$$df(u, v, w \ldots) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dw \ldots = 0 .$$

In dem speziellen Beispiel also

$$p \cdot v = R \cdot T$$

oder ausgerechnet:

$$\frac{\partial (p \cdot v)}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial (p \cdot v)}{\partial v} \cdot dv = R dT .$$

Oder ein anderes Beispiel. Der osmotische Druck, p, der an der Oberfläche einer Zuckerlösung gegen eine für Zucker undurchlässige, für Wasser aber durchgängige Wand herrscht, wenn diese Wand auf der anderen Seite reines Wasser berührt, ist abhängig erstens von der Konzentration der Zuckerlösung c, zweitens von der Temperatur T. Es ist also

$$p = f(c, T) .$$

Und daher

$$dp = \frac{\partial p}{\partial c} \cdot dc + \frac{\partial p}{\partial T} \cdot dT .$$

Oder in Worten: Die Zunahme des osmotischen Druckes (dp) ist erstens proportional der Zunahme der Zuckerkonzentration (dc); der Proportionalitätsfaktor ist der „Konzentrationskoeffizient des osmotischen Druckes“, wie man es nennen würde $\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)$. Zweitens ist die Zunahme des osmotischen

Druckes proportional der absoluten Temperatur (dT); der zugehörige Proportionalitätsfaktor ist der „Temperaturkoeffizient des osmotischen Druckes“ $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)$.

Wenn man also durch den Versuch oder durch Berechnung $\frac{\partial p}{\partial c}$ und $\frac{\partial p}{\partial T}$ feststellen kann, so kann man p daraus durch Integration feststellen. Die Integrationsbedingung ist, daß

$$\frac{\partial^2 p}{\partial c \cdot dT} = \frac{\partial^2 p}{\partial T \cdot dc}$$

ist. Das ist der Fall, wie man sich durch eine Überlegung veranschaulichen kann. $\frac{\partial^2 p}{\partial c \cdot dT}$ bedeutet die Zunahme des Druckes, wenn man erst die Konzentration, dann die Temperatur erhöht; $\frac{\partial^2 p}{\partial T \cdot dc}$ die Zunahme des Druckes, wenn man erst die Temperatur, dann den Druck um den gleichen (sehr kleinen) Betrag wie soeben erhöht. Das Resultat muß in beiden Fällen dasselbe sein.

98. Doppelintegrale.

Die Aufgabe der Integralrechnung ist es, wenn der Wert eines Differentialquotienten gegeben ist, den Wert der Funktion selbst zu ermitteln. Man kann diese Aufgabe dahin erweitern, auch wenn der Wert eines höheren Differentialquotienten gegeben ist, die Funktion zu ermitteln. Da der Differentialquotient selbst als eine Funktion der Variablen angesehen werden kann, so bietet diese Aufgabe prinzipiell keine neue Schwierigkeit. Ist z. B. gegeben

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\,, \tag{1}$$

so betrachten wir zunächst $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von x und schreiben in diesem Sinne

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = a$$

oder

$$d\frac{dy}{dx} = a \cdot dx\,,$$

woraus durch Integration folgt

$$\frac{dy}{dx} = ax + C_1$$

oder

$$dy = ax\,dx + C_1 dx\,.$$

Integrieren wir jetzt noch einmal, so folgt

$$y = \frac{a}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

als Lösung der Aufgabe. Wir lösen also die Doppelintegration, indem wir Schritt für Schritt aus dem zweiten Differentialquotienten durch Integration den ersten, aus dem ersten durch nochmalige Integration die Funktion selbst be rechnen. Die erste Integrationsaufgabe würde also lauten:

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = ax + C_1\,,$$

die gesamte Aufgabe

$$\int\!\!\int \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx \cdot dx = \frac{a}{2}x^2 + C_1 x + C_2\,,$$

wobei wir die üblichen Symbole der Doppelintegration demonstrieren.

Da bei jeder einzelnen Integration eine neue Integrationskonstante erscheint, so muß eine n fache Integration zu n verschiedenen Integrationskonstanten führen.

Die Aufgabe kann aber unter Umständen auch so gestellt sein, daß die unabhängige Variable bei jeder einzelnen Teilintegration eine andere ist. Wir würden diese Aufgabe folgendermaßen schreiben:

$$\int\!\!\int U \cdot dx \cdot dy\,.$$

Der Sinn dieser Aufgabe ist folgender. Zuerst soll die Aufgabe gelöst werden

$$\int U \cdot dx = J_1\,.$$

Das Resultat J_1 kann man als einen Differentialquotienten erster Ordnung auffassen. Nunmehr soll dieser nicht nach x, sondern nach y integriert werden: $\int J_1 dy = J_2$. Auf unser obiges Beispiel (1) angewendet, würde die erste Integration wieder liefern

$$\int \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = a x + C_1 ,$$

der zweite Teil der Integration stellt dagegen jetzt die Aufgabe dar:

$$\int (a x + C_1) dy ,$$

welche ergibt:

$$a \int x \cdot dy + C_1 y + C_2 .$$

Die Bedeutung der Doppelintegration wird am besten durch die geometrische Darstellung des Integrals als Flächeninhalt klar. Stellen wir uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem y als Funktion x dar, so ist $y \cdot dx$ das unendliche schmale Rechteck mit den Seiten y und dx. Das Integral dieses Ausdruckes ist die Summe aller dieser unendlich vielen und unendlich schmalen Rechtecke, also die von der Kurve, der Anfangs- und Endordinate und der Abszisse eingeschlossene Fläche.

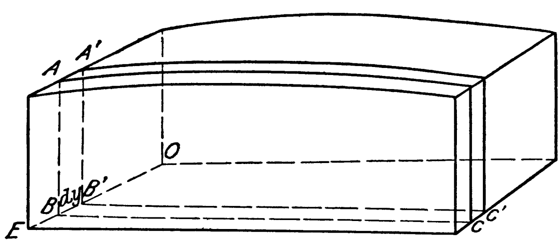

Fig. 85.

Fassen wir nun diese Fläche F wieder als einen Differentialquotienten, und zwar einen solchen nach y auf, so ist $F \cdot dy$ ein unendlich schmales Prisma mit der Grundfläche F und der Höhe dy. Wir müssen dazu also eine Darstellung im dreidimensionalen Raum wählen. Ist (Fig. 85) z. B. ABC die Fläche F, und $BB' = dy$, so ist das Scheibchen $AA'BB'CC' = F \cdot dy$ und es ist $\int F \cdot dy$ die Summe aller ähnlichen Scheibchen, also der Wert des Integrals innerhalb der Grenzen O und E gleich dem Rauminhalt des gezeichneten Körpers.

Die allgemeine Aufgabe

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} U \cdot dx \cdot dy$$

erfordert also folgende Rechenoperationen.

Man berechne zuerst das Integral

$$\int_{x=a}^{x=b} U \cdot dx\,.$$

Seine Lösung sei $= J_1$.

Nunmehr berechne man

$$\int_{y=c}^{y=d} J_1 \cdot dy\,,$$

dessen Lösung J_2 gleichzeitig die definitive Lösung der Aufgabe ist.

99. Ebenso wie man einfache Integrale zur Berechnung von Flächeninhalten benutzen kann, kann man doppelte Integrale zur Berechnung von Rauminhalten benutzen. Einige Beispiele werden das erläutern.

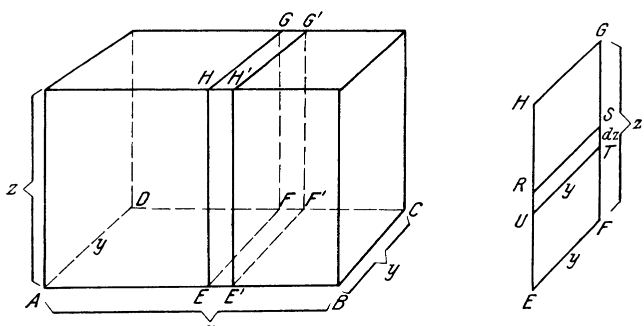

Fig. 86 und 86a.

1. Den Rauminhalt eines Prismas mit den Seiten x, y, z zu berechnen.

Wir zerlegen das ganze Prisma (Fig. 86) in schmale Scheiben wie $EHGFF'E'H'G'$. Dann ist der Rauminhalt des ganzen Körpers gleich der Summe aller dieser Scheibchen zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$. Ein Scheibchen hat das Volumen $u \cdot dx$, wo u die Fläche $EHGF$ bedeutet.

Also ist der gesuchte Rauminhalt

$$V = \int_{\text{von } x=0}^{\text{bis } x=x} u \cdot dx \,.$$

Nun ist u selbst eine Fläche, kann also ihrerseits als ein Integral aufgefaßt werden. Wir zerlegen die Fläche u in Streifchen wie $RSTU$ (Fig. 86 a).

Der Inhalt eines solchen Streifens ist $y \cdot dz$, und die ganze Fläche

$$u = \int_{\text{von } z=0}^{\text{bis } z=z} y\, dz \,.$$

Es ist also

$$V = \int_0^x \int_0^z y\, dz\, dx \,,$$

oder mit einer Schreibweise, die dem Anfänger wohl übersichtlicher sein wird:

$$V = \int_0^x \left(\int_0^z y\, dz \right) \cdot dx \,.$$

Führen wir zunächst das eingeklammerte Integral aus, so ergibt sich, da y konstant ist,

$$\int_0^z y\, dz = y \int_0^z dz = y z \,,$$

also

$$V = \int_0^x y \cdot z \cdot dx \,,$$

und integrieren wir jetzt nach x, so ist, da y und z konstant sind,

$$V = x y z \,.$$

2. Den Rauminhalt einer vierseitigen geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zu berechnen.

Man lege die Achse der Pyramide AB (Fig. 87) und bezeichne sie als x.

Die Richtung der y-Achse und der z-Achse ist alsdann aus der Figur zu ersehen.

Man zerlege die Pyramide in Scheibchen wie in Fig. 87. Jedes dieser Scheibchen (Fig. 87a) hat folgende Beschaffenheit. Es ist ein schmales Prisma (wenn es hinreichend schmal gedacht wird) mit den Seiten dx, y und z. Der Inhalt eines solchen Scheibchens ist daher[1]) =

$$(\text{Fläche } (y, z)) \cdot dx$$

und die Summe aller Scheibchen

$$J = \int_{x=0}^{x=x} (\text{Fläche } (y, z)) \cdot dx .$$

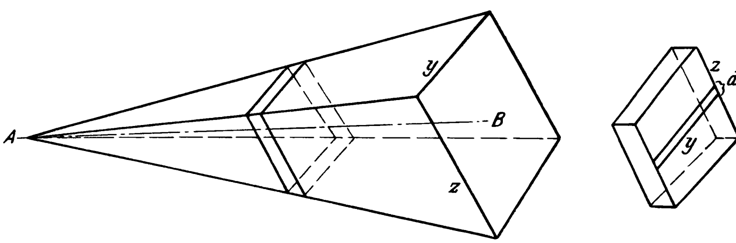

Fig. 87 und 87a.

Die Fläche (y, z) ist selbst ein Integral, und zwar ist sie die Summe der Streifchen $y \cdot dz$, also ist

$$\text{Fläche } (y, z) = \int_{z=0}^{z=z} y \, dz$$

und

$$J = \int_{x=0}^{x=x} \left(\int_{z=0}^{z=z} y \, dz \right) \cdot dx$$

oder anders geschrieben:

$$= \int_0^x \int_0^z y \cdot dz \cdot dx .$$

Das eingeklammerte Integral ist nun $= y \cdot z$. Also ist

$$J = \int_{x=0}^{x=x} y \cdot z \, dx .$$

---

1) Fläche (y, z) bedeutet die durch y und z definierte Fläche.

Um dieses Integral zu berechnen, müssen wir nun in Betracht ziehen, daß y und z nicht konstant, sondern Funktionen von x sind. Je nachdem wir das Scheibchen in größerer oder kleinerer Entfernung von A herausschneiden, wird y und z ganz verschieden sein. Konstant ist überall nur einerseits das Verhältnis von $y:x$, welches wir als η bezeichnen wollen, und das Verhältnis von $z:x$, welches wir ζ nennen. Es ist daher stets

$$y = \eta \cdot x ,$$
$$z = \zeta \cdot x$$

und

$$J = \int_0^x \eta \cdot \zeta \cdot x^2 \, dx = \frac{\eta \cdot \zeta}{3} \cdot x^3 .$$

Da

$$\eta \cdot \zeta = \frac{y z}{x^2} ,$$

so ist schließlich

$$J = \tfrac{1}{3} x y z .$$

3. Den Rauminhalt eines Rotationskegels zu berechnen. Ein solcher entsteht dadurch, daß eine Gerade an einem Endpunkt fixiert ist und mit dem anderen Endpunkt einen Kreis beschreibt.

Ziehen wir die Achse x und zerlegen den Kegel in lauter kleine Scheibchen senkrecht zur x-Achse, wie in Fig. 88 angedeutet, welche bei genügender Schmalheit die Form von sehr niedrigen Zylindern annehmen. Der Inhalt des Kegels ist dann gleich der Summe dieser Zylinder, deren jeden einzelnen wir u nennen, zwischen $x = 0$ und $x = x$, also

$$J = \int_0^x u \cdot dx .$$

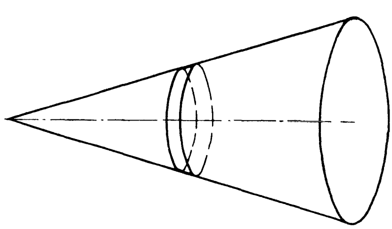

Fig. 88.

Der Inhalt eines Zylinders ist gleich der (kreisförmigen) Basis multipliziert mit der Höhe, also ist

$$u = \pi r^2 \cdot dx ,$$

wo r den Radius der Zylinderbasis bedeutet.

Wir haben uns eine Integration, deren Resultat wir leicht übersehen könnten, gespart, indem wir den Inhalt des Zylinderstückchens sofort mit seinem uns bekannten Werte einführten, statt ihn durch eine zweite Integration zu entwickeln.

Also ist

$$J = \int_0^x \pi r^2 \cdot dx .$$

Da nun r eine Funktion von x ist, müssen wir diese erst darstellen. Konstant ist überall

$$\frac{r}{x} = \varrho ,$$

also ist

$$r = \varrho \cdot x$$

und

$$J = \int_0^x \pi \varrho^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\pi \varrho^2 \cdot x^3}{3} .$$

Führen wir für ϱ wieder seinen Wert ein, so ist

$$J = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot x .$$

D. h. der Inhalt ist $\frac{1}{3}$ des Produktes aus Grundfläche und Höhe, wie bei der Pyramide.

4. Den Inhalt der Kugel zu berechnen, deren Radius $= r$ ist. Wir zerlegen die Kugel (Fig. 89) in parallele schmale Scheiben, deren Höhe $= dz$ und deren Grundfläche $= \pi \cdot x^2$ ist. Dann ist der Rauminhalt einer solchen Scheibe $= \pi \cdot x^2 \cdot dz$ und der Kugelinhalt wird zunächst durch das unbestimmte Integral

$$J = \int \pi x^2 \cdot dz$$

dargestellt.

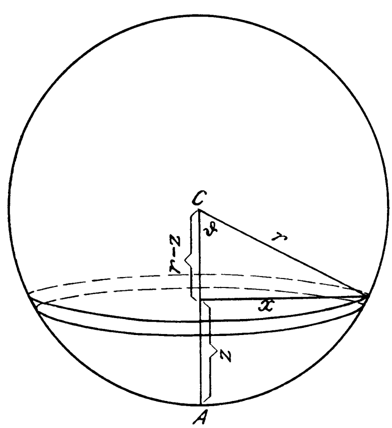

Fig. 89.

Nun müssen wir x noch als Funktion von z ausdrücken. Da

$$x^2 = r^2 - (r - z)^2,$$

so ist

$$x^2 = 2\,r\,z - z^2$$

und

$$J = \pi\int(2\,r\,z - z^2)\,dz = \pi\left(r\,z^2 - \frac{z^3}{3}\right) + C\,.$$

Jetzt müssen wir noch die Grenzen des Integrals abstecken. Sie liegen offenbar zwischen $z = 0$ und $z = 2\,r$; also ist

$$\begin{aligned} J &= \pi\int_0^{2r}(2\,r\,z - z^2)\,dz \\ &= 2\,\pi\,r\int_0^{2r} z\,dz - \pi\int_0^{2r} z^2\,dz\,. \\ &= 4\,\pi\,r^3 - \tfrac{8}{3}\,\pi\,r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\,\pi\cdot r^3\,. \end{aligned}$$

5. Den Inhalt eines Rotationsparaboloids zu berechnen. Ein Rotationsparaboloid entsteht durch Drehung einer Parabel um ihre Achse.

Wir zerlegen das Paraboloid (Fig. 90) in Scheibchen, welche jedes offenbar das Volumen

$$\pi\cdot y^2\cdot dx$$

haben. Also ist

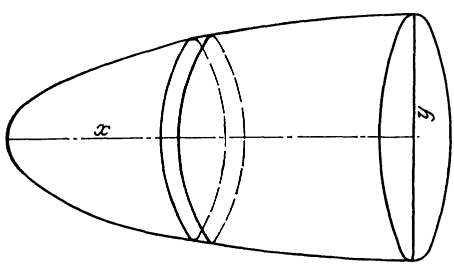

Fig. 90.

$$J = \int_{x=0}^{x=x}\pi\,y^2\,dx\,.$$

Da nun

$$y = \sqrt{2\,p\,x}\,,$$

so ist

$$J = \int_0^x 2\,\pi\cdot p\cdot x\cdot dx\,,$$

$$J = \pi\cdot p\cdot x^2\,.$$

Fünfter Abschnitt.

Mac Laurinsche und Taylorsche Reihen.

100. Um das Wesen der Mac Laurinschen und der Taylorschen Reihe zu verstehen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Man unterscheidet bekanntlich kommensurable und inkommensurable Strecken oder rationale und irrationale Zahlen. Verwandt mit dieser Unterscheidung ist die Einteilung der echten Brüche in solche, welche sich als ein Vielfaches von ganzzahligen Potenzen von $\frac{1}{10}$ darstellen lassen, und in solche, bei denen dies nicht möglich ist. So ist z. B. der Bruch $\frac{1}{7}$ durch keinen Dezimalbruch genau wiedergebbar. Wenn wir aber auch Dezimalbrüche mit unendlich vielen Stellen gelten lassen, sind wir imstande, jeden Bruch in einen Dezimalbruch umzuwandeln, d. h. stets ist

$$\frac{1}{n} = \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10000} + \cdots$$

wo jeder der Koeffizienten $a, b, c, d \ldots$ je irgendeine ganze Zahl ist. Diese Gleichung ist auf jeden Fall zutreffend, es kommt nur darauf an, ob es im Einzelfall möglich ist, für a, b, c, $d \ldots$ passende Werte zu finden. Ein aufgehender Bruch zeichnet sich dadurch aus, daß von einem bestimmten Glied an alle Koeffizienten $= 0$ werden. So ist z. B. für den Bruch $\frac{1}{4}$ der Wert von $a = 2$, $b = 5$, c und alle folgenden $= 0$. Für $\frac{1}{3}$ aber ist

$$a = b = c = d \ldots = 3 ,$$

ins Unendliche fortgesetzt. So läßt sich auch die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ durch folgende Reihe angenähert wiedergeben:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10\,000} + \cdots$$

Eine analoge Denkweise können wir bei den Funktionen einführen. Wie vorhin rationale und irrationale Zahlen, können wir, mit einer gewissen Analogie, algebraische und transzendente Funktionen unterscheiden (vgl. S. 52).

101. Alle algebraischen Funktionen lassen sich bekanntlich auf die Form bringen

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots,$$

wo jedoch die Voraussetzung ist, daß die Reihe eine ganz bestimmte Zahl von Gliedern hat. Ist die höchste vorkommende Potenz von $x = x^n$, so ist y eine Funktion $n$ten Grades von x. Wenn wir also als allgemeinsten Ausdruck einer algebraischen Funktion schreiben

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots \text{ ad infinitum},$$

so verlangt es das Wesen der algebraischen Funktion, daß von einem ganz bestimmten Gliede an alle Koeffizienten $= 0$ werden. Bei einer Funktion 3. Ordnung hat also d einen von 0 abweichenden Wert, und es können auch a, b und c von 0 verschieden sein. Aber alle späteren Koeffizienten, e, f, g, ... sind unbedingt $= 0$.

Man könnte nun einmal versuchen, die transzendenten Funktionen als algebraische Funktionen von unendlich hoher Ordnung darzustellen. Wir versuchen also z. B. $\sin x$, welches eine transzendente Funktion von x ist, als eine algebraische Funktion von x unendlich hoher Ordnung aufzufassen:

$$\sin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots \text{ ad infinitum}.$$

Ob diese Gleichung falsch oder richtig ist, kann man von vornherein nicht sagen. Richtig ist sie, wenn es gelingt, für A, B, C solche Werte zu finden, daß die Summe dieser Reihe mit jedem neuen Gliede immer näher an den Wert $\sin x$ herankommt. Wir werden uns daher bemühen, für die Koeffizienten A, B, C, ... passende Werte zu finden.

Schreiben wir nun einmal die ganz allgemeine Reihe

$$y = f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots, \tag{1}$$

so können wir dem Koeffizienten A sofort eine Bedeutung unterlegen. A ist nämlich derjenige Wert von y, für welchen

$x = 0$ ist, was man sieht, indem man $x = 0$ in die Gleichung einsetzt. Diese Einsetzung ergibt in der Tat

$$y = f(0) = A + B \cdot 0 + \ldots$$

Es ist also, wie man schreibt

$$f(0) = A\,, \tag{2}$$

$f(0)$ bedeutet also $f(x)$ für den Fall, wo $x = 0$ ist.

Nun differenzieren wir unsere Gleichung (1) nach x, so ist

$$f'(x) = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 \ldots$$

Hier sehen wir, daß B derjenige Wert der Ableitung ist, für den $x = 0$. Also

$$B = f'(0)\,. \tag{3}$$

Bilden wir die zweite, dritte usw. Ableitung, so ist

$$f'' = 2\,C + 2 \cdot 3 \cdot Dx + 3 \cdot 4 \cdot E\,x^2 + \ldots, \tag{4}$$

$$f''' = 2 \cdot 3 \cdot D + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot E\,x + \ldots \tag{5}$$

usw.

Aus (4) folgt:

$$2\,C = f''(0) \qquad \text{oder} \qquad C = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f''(0)\,,$$

aus (5)

$$2 \cdot 3 \cdot D = f'''(0) \qquad \text{oder} \qquad D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(0)\,,$$

und dann ebenso

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot E = f''''(0) \qquad \text{oder} \qquad E = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot f''''(0)\,,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot F = f'''''(0) \qquad \text{oder} \qquad F = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot f'''''(0)\,.$$

Setzen wir diese Werte von A, B, C, ... in (1) ein, so ist

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \tfrac{1}{2} f''(0) \cdot x^2$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot f'''(0) \cdot x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot f''''(0) \cdot x^4 \ldots$$

oder

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} f''''(0) \cdot x^4 \ldots$$

Dies nennt man die Mac Laurinsche Reihe[1]).

Sie gilt für alle Arten von Funktionen. Sie stellt der Form nach eine algebraische Funktion von x, aber unendlich hoher Ordnung dar. Echte algebraische Funktionen brechen mit irgendeinem Gliede ab, irrationale und transzendente Funktionen haben unendlich viel Glieder, vergleichbar den unendlichen Dezimalbrüchen. Ihre Anwendungsweise wollen wir an folgenden Beispielen kennen lernen.

Anwendung der Mac Laurinschen Reihe. Entwicklung der Exponentialfunktion.

102. Wir wollen e^x als Funktion von x in Potenzen darstellen. So ist

$$e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \ldots$$

Nun ist

$$f(0) = 1 ,$$

denn

$$e^0 = 1 .$$

Ferner ist

$$f'(x) = e^x ,$$

also

$$f'(0) , \quad \text{auch} \quad = 1 ,$$

und auch

$$f''(0) = 1$$

usw. Es ist also

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

---

1) Das zweite Glied enthält den Koeffizienten $\frac{1}{1!}$. Dieser ist gleich 1 und brauchte daher nicht geschrieben zu werden. Daß man es hier und in ähnlichen Fällen dennoch tut, hat seinen Sinn darin, daß wir bei dieser Schreibweise das „Bildungsgesetz“ der einzelnen Glieder der Reihe leichter erkennen. Das allgemeine Bildungsgesetz für ein beliebiges, sagen wir das $n$te Glied der Reihe lautet:

$$\text{das } n\text{te Glied} = \frac{1}{(n-1)!} f^{n-1}(0) \cdot x^{n-1} .$$

und für $x = -1$ ergibt sich

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - + - \ldots$$

Für den speziellen Fall $x = 1$ ergibt sich

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$$

und

$$e^{-1} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \ldots$$

Entwicklung der Sinus- und Kosinusfunktion.

103. Ferner entwickeln wir $\sin x$ nach Potenzen von x:

$$\sin x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot f''(0)\,x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot f'''(0)\,x^3 \ldots$$

Nun ist

$y = \sin x$,	für $x = 0$	wird	daraus	0
$y' = \cos x$,	„ „	„	„	1
$y'' = -\sin x$,	„ „	„	„	0
$y''' = -\cos x$,	„ „	„	„	-1
$y'''' = y$,				
$y''''' = y'$ usw.				

Setzen wir das ein, so ist

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + 0 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot x^5 \ldots$$

oder

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots}$$

Berechnen wir ebenso $\cos x$

$y = \cos x$,	für $x = 0$	wird	daraus	1
$y' = -\sin x$,	„ „	„	„	0
$y'' = -\cos x$,	„ „	„	„	-1
$y''' = \sin x$,	„ „	„	„	0
$y'''' = y$ usw.				

Also ist

$$\cos x = 1 - 0 - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + 0 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \ldots$$

oder

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots}$$

Diese Reihen werden wirklich benutzt, um die Werte von e^x, die Sinus und Kosinus der Winkel zu berechnen. Es sei daran erinnert, daß der Winkel als Bogen des Kreises mit dem Radius 1 gemessen wird. Z. B. Es sei zu berechnen

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} \cdots$$

Führen wir da aus, so ist

$$\begin{array}{ll|ll}
 & 1 = 1 & & \\
+\frac{1}{5!} & = 0{,}00833 & -\frac{1}{3!} & = 0{,}16667 \\
+\frac{1}{9!} & = 0{,}00000 \ldots & -\frac{1}{7!} & = 0{,}00019 \\
+\frac{1}{13!} & = 0{,}00000 \ldots & -\frac{1}{11!} & = 0{,}00000 \\
\hline
\text{Summa:} & 1{,}00833 & \text{Summa:} & 0{,}16686
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\sin 1 = & 1{,}00833 \\
 & -0{,}16686 \\
\hline
\sin 1 = & 0{,}84147\,.
\end{array}$$

Man überzeuge sich z. B. auch, daß diese Reihen in zu erwartender Weise ergeben

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1 \qquad \text{usw.}$$

104. Die Taylorsche Reihe.

Wollten wir $\log x$ nach der Mac Laurinschen Reihe berechnen, so kämen wir nicht zum Resultat. Denn es ergibt sich

$$\log x = \log 0 + \ldots$$

Da $\log 0 = -\infty$, so zeigt sich schon beim ersten Gliede die Unmöglichkeit der Berechnung.

Während wir bisher der Einfachheit halber denjenigen Wert von y als Grundlage der Reihe nahmen, für den $f(x) = 0$ ist, können wir natürlich auch von einem Wert ausgehen, wo x selbst gleich 0 ist, für den also z. B. $a + x = a$ wird, oder speziell, für den $1 + x = 1$ wird, d. h. im allgemeinen wieder von demjenigen Wert von $f(x)$, welcher sich für $x = 0$ ergibt.

Wir gehen also zunächst wieder von der berechtigten, weil zunächst ganz unverbindlichen Annahme aus, es sei

$$f(1 + x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$$

und fragen uns, ob es auch hier möglich ist, für A, B ... Bedeutungen zu finden, so daß der Sinn der Gleichung erfüllt ist.

Setzen wir

$$x = 0\,,$$

so ist

$$f(1 + 0) = A + B \cdot 0 + \ldots$$

oder

$$f(1) = A\,,$$

$f(1)$ bedeutet hier denjenigen Wert von $f(1 + x)$, wo $x = 0$ ist. Ferner ist

$$f'(1 + x) = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 \ldots$$

Setzen wir

$$x = 0\,,$$

so ist

$$f'(1) \;= B$$

und weiter ist

$$f''(1) = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot C\,,$$

$$f'''(1) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot D\,.$$

So finden wir schließlich

$$f(1 + x) = f(1) + \frac{1}{1} f'(1) \cdot x + \frac{1}{1 \cdot 2} f''(1) \cdot x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''' \cdot (x^3) \ldots$$

und durch ganz ähnliche Überlegungen

$$f(1 - x) = f(1) - \frac{1}{1} \cdot f'(1)\,x + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot f''(1)\,x^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(1)\,x^3 \ldots$$

Dies ist die Taylorsche Reihe, und sie dient zunächst zur Berechnung der natürlichen Logarithmen. Es sei nämlich $\ln u$ zu berechnen. Setzen wir

$$u = 1 + x,$$

so ist, wenn $x = 0$ wird,

$$\begin{aligned}
f(1+x) &= \ln 1 = 0 \\
f'(1+x) &= \frac{1}{1+x} = 1 \\
f''(1+x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 \\
f'''(1+x) &= 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \cdot 2 \\
f''''(1+x) &= -2 \cdot 3 \frac{1}{(1+x)^4} = -1 \cdot 2 \cdot 3
\end{aligned}$$

usw. Also

$$\mathbf{\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots}$$

ebenso

$$\mathbf{\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt ferner noch

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right).$$

Alle diese Reihen konvergieren nur, wenn x kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Es lassen sich also aus Formel (1) die natürlichen Logarithmen von $(1 + 0)$ bis $(1 + 1)$, oder von 1 bis 2 berechnen, und mit Hilfe der Formel (2) die natürlichen Logarithmen von 0 bis 1, im ganzen also alle Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 2. Daraus lassen sich durch Multiplizieren, Potenzieren oder durch die Anwendung der letzten, kombinierten Reihe die übrigen Logarithmen weiter berechnen. Aus ihnen kann man weiterhin (S. 26) die dekadischen Logarithmen berechnen, und das ist in der Tat der Weg, auf dem die Logarithmentafeln entstanden sind.

105. Die Binomialreihe.

Von der Taylorschen Reihe können wir noch einen anderen, wichtigen Gebrauch machen. Es sei

$$F(x) = (1+x)^n .$$

Wenden wir die Taylorsche Reihe hierauf an und „entwickeln diese Funktion nach Potenzen von x“, so ergibt sich

$$(1+x)^n = f(1) \qquad + \frac{1}{1} \cdot f'(1) \cdot x \qquad + \frac{1}{1 \cdot 2} f''(1) \cdot x^2 \ldots$$

Da nun

$$f'(1+x) = n\,(1+x)^{n-1} ,$$

also

$$f'(1) = n ,$$

$$f''(1+x) = n \cdot (n-1)\,(1+x)^{n-2} ,$$

also

$$f''(1) = n \cdot (n-1) ,$$

$$f'''(1+x) = n \cdot (n-1)\,(n-2)\,(1+x)^{n-3} ,$$

also

$$f'''(1) = n\,(n-1)\,(n-2) ,$$

so ist

$$(1+x)^n = 1 \qquad + \frac{n}{1} \cdot x \qquad + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2$$
$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \ldots$$

oder mit der früher (S. 27) gekennzeichneten Schreibweise:

$$\mathbf{(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots}$$

Diese Reihe heißt die Binomialreihe. Sie gilt für jeden, ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Wert von n. Auch in der niederen Algebra wurde eine Binomialreihe gelehrt, sie konnte aber nur für ganzzahlige und positive Exponenten bewiesen werden. Hier wird erst die allgemeine Bedeutung der Reihe erwiesen.

Ist n eine beliebige ganze, positive Zahl, so bricht die Binomialreihe von selbst ab, indem von einem bestimmten Gliede an alle folgenden Glieder gleich 0 werden. Im anderen Fall erhalten wir eine unendliche Reihe, welche aber für uns von großer Bedeutung werden kann, wenn sie konvergiert, wenn also die Größe der Glieder vom 3. oder 4. an schon außerordentlich klein wird.

Setzen wir z. B.

$$x = 4\,, \qquad n = 3$$

$$(1+4)^3 = 1 + \frac{3}{1}\cdot 4 + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot 4^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4^3 + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 4^4$$

$$= 1 + 12 + 48 + 64 + 0 + 0 \ldots$$

$$= 125\,.$$

Die Reihe bricht beim 5. Glied ab, weil alle folgenden Glieder $= 0$ werden. Das Resultat ist natürlich das zu erwartende, daß $5^3 = 125$.

Es läßt sich zeigen, auf eine hier nicht näher zu erörternde Weise, daß diese Binomialreihe zwar für jeden Wert von n gilt, aber, wenn sie unendlich viele Glieder hat, nur für solche Werte von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Andernfalls konvergiert die Reihe nicht.

Die Anwendung der Binomialreihe werde durch ein Beispiel erläutert:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{16}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 \ldots$$

Oder

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} =$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - + \ldots$$

Aus unserer Reihe können wir auch die gewöhnliche Form der Binomialreihe entwickeln, nämlich

$$(a+b)^n\,.$$

(Es sei $b < a$). Dann setzen wir $\dfrac{b}{a} = x$ und erhalten

$$(a + ax)^n = a^n \cdot (1+x)^n\,.$$

Nunmehr läßt sich $(1+x)^n$ nach der obigen Formel entwickeln, und das Resultat braucht nur noch mit a^n multipliziert zu werden. Man führe diese Rechnung aus und überzeuge sich, daß das Resultat wird:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots$$

welches die gewöhnliche Form der Binomialreihe ist.

106. Eine spezielle Anwendung der Binomialreihe wollen wir nun noch machen, um die Funktion $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zu entwickeln. Wir brauchen in die Binomialreihe für x immer nur $\frac{1}{n}$ einzusetzen und erhalten

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \quad (1)$$

Und ebenso finden wir, indem wir für x stets $-\frac{1}{n}$ einsetzen,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1 - n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + - \ldots \quad (2)$$

Wir wollen nun sehen, welchem Grenzwert sich diese Funktion nähert, wenn n über alle Maßen groß wird. Dann können wir für $n-1$, $n-2$, $n-3$ usw. immer n schreiben, und es ist

$$\lim_{\text{für } n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Die linke Seite der Gleichung ist der Definition nach (S. 98) $= e$, und in der Tat ist die rechte Seite der Gleichung die Reihe für e, welche wir auf andere Weise S. 203 entwickelt hatten. Betrachten wir nun den Grenzwert der Reihe (2):

$$\lim_{\text{für } n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots$$

Da ist die rechte Seite der Gleichung diejenige Reihe, welche wir S. 203 für e^{-1} abgeleitet hatten. Hiermit ist der Beweis erbracht, daß

$$\lim_{\text{für } n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

ist, eine Tatsache, die wir schon S. 104 kennen gelernt haben, ohne damals die innere Ursache für diese Beziehung aufgeklärt zu haben. Jetzt erst ist die strenge Ableitung dieser Behauptung erbracht.

107. Oft läßt sich der Sinn einer Funktion besser überblicken, wenn man sie in einer Reihe entwickelt. Es sei folgendes Beispiel zur Erläuterung gegeben.

Wenn man eine schwache Säure mit ihrem Natronsalz, welches wir als (annähernd) total dissoziiert annehmen wollen, in wässeriger Lösung mischt, so ist die Wasserstoffionenkonzentration dieser Lösung nach dem Massenwirkungsgesetz

$$[\mathrm{H}^\cdot] = \frac{k\cdot([A]-[\mathrm{H}^\cdot])}{([S]+[\mathrm{H}^\cdot])}\,.$$

Hier bedeutet $\mathrm{H}^\cdot$ das Wasserstoffion, A die freie Säure, S das Salz, k die Dissoziationskonstante der Säure. Die Klammern bedeuten die Konzentration. Um die vielen Klammern zu vermeiden, schreiben wir mit leicht verständlicher Ausdrucksweise

$$h = \frac{k(a-h)}{(s+h)}\,. \tag{1}$$

Durch Ausmultiplizieren entsteht eine quadratische Gleichung für h:

$$h^2 + h(s+k) - ka = 0\,,$$

deren Auflösung ist

$$h = -\frac{s+k}{2} \pm \sqrt{\frac{(s+k)^2}{4} + ka}\,. \tag{2}$$

Von den beiden Wurzeln hat nur die mit dem positiven Vorzeichen eine physikalische Bedeutung, da h niemals negativ werden kann. Ist nun k sehr klein, so ist in der Regel auch h sehr klein, denn eine Säure mit einer sehr kleinen Dissoziationskonstanten ist ja eine solche, welche wenig H-Ionen abdissoziiert, und man kann unter Umständen h als Summand neben den viel größeren a oder s vernachlässigen. Dadurch geht die Formel (1) über in die vielfach benutzte Form

$$h = k\cdot\frac{a}{s}\,. \tag{3}$$

Es ist selbstverständlich, daß auch Gleichung (2) in diesen Wert übergehen muß, wenn k sehr klein wird. Wie das aber möglich ist, erscheint beim Anblick der Gleichung (2) zunächst problematisch. Hier hilft aber die Binomialreihe. Wir wollen

$$\sqrt{\frac{(s+k)^2}{4}+ka}$$

in eine binomische Reihe verwandeln und schreiben

$$\left[\left(\frac{s+k}{2}\right)^2+ka\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{s+k}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\left[\left(\frac{s+k}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot ka$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\cdot\left[\left(\frac{s+k}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot k^2a^2+\dots$$

$$=\left(\frac{s+k}{2}\right)+\frac{ka}{s+k}-\frac{k^2a^2}{(s+k)^3}\dots$$

Nun war die Voraussetzung, daß k sehr klein gegen s und a ist. Dann können wir die höheren Glieder, welche k nur in höheren Potenzen enthalten, um so mehr vernachlässigen, je kleiner k wird. Wir können daher bei sehr kleinen k die Reihe ohne merklichen Fehler beim zweiten Gliede abbrechen und erhalten

$$\sqrt{\frac{(s+k)^2}{4}+ka}=\frac{s+k}{2}+\frac{ka}{s+k}.$$

Setzen wir das in (2) ein, so wird

$$h=-\frac{s+k}{2}+\frac{s+k}{2}+\frac{ka}{s+k}.$$

Vernachlässigen wir nun noch das kleine k gegen das große s als Summand[1]), so wird schließlich

$$h=k\cdot\frac{a}{s}$$

wie oben (3).

[1]) Als Multiplikator darf es natürlich nicht vernachlässigt werden, als solcher hat es sogar einen sehr bedeutenden, man kann sagen, den die ganze Formel charakterisierenden Einfluß.

Der Ausdruck „k ist klein gegen a“ ist natürlich nur ein relativer. Von welcher Kleinheit an wir k gegen a vernachlässigen können, hängt ganz davon ab, bis zu welchem Grad von Genauigkeit wir rechnen wollen. Wird die Genauigkeit nur auf 1 % des Gesamtwertes verlangt, so können wir die Vernachlässigung schon viel eher eintreten lassen, als wenn eine Genauigkeit auf 1 ‰ des Gesamtwertes verlangt wird.

108. Anwendung der Reihen beim Integrieren.

Das Verfahren der Integration durch Reihenentwicklung haben wir schon S. 152 kennen gelernt. Natürlich läßt sich dieses Verfahren auch da anwenden, wo man die Funktion in eine Mac Laurinsche oder Taylorsche Reihe entwickeln kann.

Beispiele.

$$\int \sin x\, dx = \int x\, dx - \int \frac{x^3}{3!}\, dx + \int \frac{x^5}{5!}\, dx \ldots$$
$$= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + - \ldots + C.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Reihe für $\cos x$ (S. 204), so erkennen wir, daß das Integral den Wert $1 - \cos x + C$ hat. Zerlegen wir die Konstante C in die Differenz $C_1 - 1$, so wird das Integral $= -\cos x + C_1$, ein schon bekanntes Resultat.

Aber auch in Fällen, wo wir auf die gewöhnlichen Methoden ein Integral nicht lösen können, können wir es mitunter mit Hilfe der Reihenentwicklung. Z. B. kann man aus der allgemeinen Reihe von e^x (S. 202) eine Reihe für e^{-x^2} ableiten, indem man x durch $-x^2$ ersetzt,

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \ldots$$

Diese Reihe setzt uns in den Stand, das Integral $\int e^{-x^2} \cdot dx$ zu lösen:

$$\int e^{-x^2}\, dx = \int dx - \int \frac{x^2}{1!}\, dx + \int \frac{x^4}{2!}\, dx - \int \frac{x^6}{3!}\, dx \ldots$$
$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \ldots + C.$$

Diese konvergente Reihe, welche die Lösung dieses Integrals darstellt, läßt sich durch keine der bekannten einfachen transzendenten Funktionen ausdrücken, sie ist eine neue Form einer transzendenten Funktion, welche gleichberechtigt neben den Funktionen $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ usw. besteht. Wir lernen somit in der Funktion $\int e^{-x^2} dx$ etwas durchaus Neues kennen. Das bestimmte Integral

$$\int_0^x e^{-x^2} d\,x$$

ergibt sich aus dem vorigen dadurch, daß man $C = 0$ setzt, was man durch Einsetzen des Wertes $x = 0$ findet.

Ein ähnliches Beispiel einer neuen transzendenten Funktion ist

$$\int \frac{e^x}{x} \cdot d\,x\,.$$

In eine Mac Laurinsche Reihe aufgelöst, wird

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$

und daher

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{x} \cdot dx &= \int \frac{dx}{x} + \int dx + \int \frac{x}{2!}\,dx + \int \frac{x^2}{3!}\,dx + \ldots \\ &= \ln x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + C\,.\end{aligned}$$

109. Die Fouriersche Reihe.

Eine eingehende Beschäftigung mit der Fourierschen Reihe kann nicht die Aufgabe dieses Buches sein; andererseits wäre die Lücke zu groß, wenn man ihrer gar keine Erwähnung täte. Es ist anzunehmen, daß die Fouriersche Reihe für die Erörterung biologischer Probleme eines Tages herangezogen werden wird, denn gerade hierbei haben wir so häufig mit periodischen Funktionen zu tun.

Die Fouriersche Reihe hat nämlich die Aufgabe, alle, wenn auch noch so komplizierte periodischen Funktionen auf die einfachste periodische Funktion, den Sinus bzw. Kosinus näherungsweise zurückzuführen, ebenso wie die Taylorsche und Mac Laurinsche Reihe die Aufgabe hat, die irrationalen und transzendenten Funktionen näherungsweise auf die rationalen Funktionen (nämlich auf ein Polynom) zurückzuführen.

Die einfachste periodische Funktion ist

$$y = \sin x\,.$$

Die Länge der Periode ist $= 2\pi$, d. h.

$$\begin{aligned} y = \sin x = \sin(2\pi + x) &= \sin(4\pi + x) \\ &= \sin(2n \cdot \pi + x)\,. \end{aligned}$$

Der Kosinus verläuft genau ebenso, nur ist der Nullpunkt der Abszisse um $\frac{\pi}{2}$ verschoben.

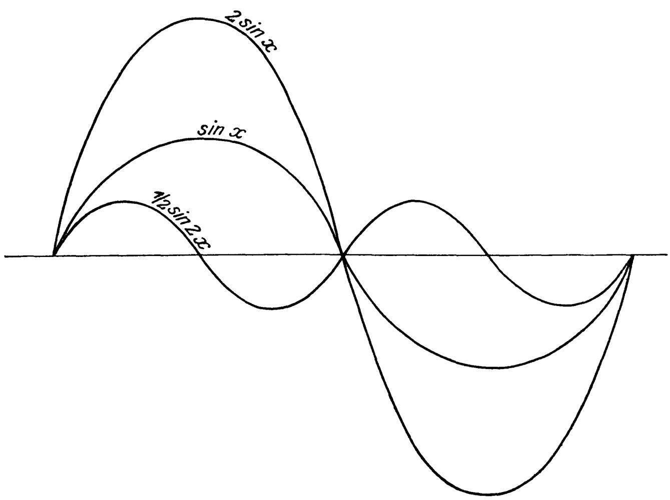

Fig. 91.

Betrachten wir nun die Funktion (Fig. 91)

$$y = 2 \sin x\,,$$

so unterscheidet sie sich nur durch die Amplitude der Schwingung. Nehmen wir dagegen

$$y = \sin 2x\,,$$

so ändert sich die Periode, und zwar geht sie auf die Hälfte zurück. In Fig. 90 ist die Funktion $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ dargestellt.

Wenn wir also in der Funktion

$$y = a \cdot \sin(b \cdot x)$$

a und b verschiedene Werte erteilen, so haben wir es in der Hand, die verschiedensten Amplituden und die verschiedensten Perioden miteinander zu kombinieren.

Es sei nun eine Funktion gegeben, wie z. B.

$$y = \sin x + \tfrac{1}{2} \cdot \sin 2x .$$

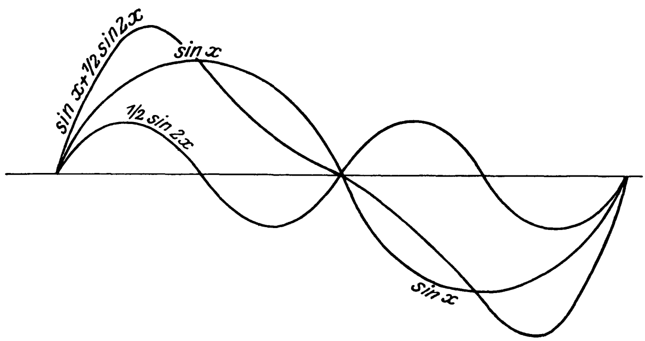

Fig. 92.

In Fig. 92 stellt die eine Kurve $\sin x$, die andere Kurve $\frac{1}{2}\sin 2x$ dar. Addiert man Punkt für Punkt die Ordinaten, so erhält man die gezeichnete Kombinationskurve. So erhält man durch Kombination verschiedener Sinus- und Kosinuskurven die mannigfaltigsten neuen Kurven, welche alle das Gemeinsame haben, daß sie periodisch sind.

Umgekehrt kann man sich die Frage vorlegen, ob es nicht vielleicht in vielen oder gar allen Fällen möglich ist, eine beliebige gegebene periodische Funktion als Summe solcher einzelner Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen, zum mindesten als eine Summe unendlich vieler solcher Funktionen, indem wir darauf spekulieren, daß unter günstigen Umständen, wie häufig bei der Mac Laurinschen Reihe, die höheren Glieder immer kleiner werden und schließlich praktisch zu vernachlässigen sind. Der allgemeine Ausdruck einer solchen periodischen Funktion wäre demnach

$$\begin{aligned} y = a + b_1 \sin x + b_2 \cdot \sin 2x + b_3 \cdot \sin 3x \ldots \\ + c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \cos 2x + c_3 \cdot \cos 3x \ldots \end{aligned} \quad (1)$$

zu dem Glied a kann man sich als Faktor $\cos 0\,x = 1$ hinzudenken.

Es handelt sich jetzt nur darum, die Bedeutung der Konstanten a, b_1, $b_2 \ldots$, c_1, $c_2 \ldots$ zu ermitteln durch ein ähnliches Verfahren wie bei der Taylorschen Reihe. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Gleichung mit dx und integrieren sie von $-\pi$ bis $+\pi$. Dann wird

$$\int_{-\pi}^{+\pi} y\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot dx + \int_{-\pi}^{+\pi} b_1 \sin x \cdot dx \ldots + \int_{-\pi}^{+\pi} c_1 \cdot \cos x\,dx + \ldots$$

Nun ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot dx = 2\,\pi\,a\,.$$

Das unbestimmte Integral ist nämlich $= a\,x + C$, also das bestimmte Integral zwischen $-\pi$ und $+\pi$

$$= (\pi\,a + C) - (-\pi\,a + C) = 2\,\pi\,a\,.$$

Dagegen sind sämtliche anderen Integrale nach S. 160, (6) und S. 161, (10) $= 0$.

Es ist also

$$a = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot dx\,.$$

Um den Koeffizienten b_1 zu ermitteln, multipliziere man die Gleichung (1) mit $\sin x \cdot dx$ und integriere wieder von $-\pi$ bis $+\pi$. Dann sind alle Integrale $= 0$, nur nach S. 161, (12).

$$b_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x \cdot dx = b_1\,\pi$$

und daher

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \sin x\,dx\,.$$

Und ganz allgemein ist

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \sin n\,x\,dx$$

und andererseits

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \cos n\,x \cdot dx\,.$$

Kurz, wir sind imstande, für jede periodische Funktion die einzelnen Koeffizienten a, b_1, $b_2 \ldots$, c_1, $c_2 \ldots$ derart zu bestimmen, daß die Reihe (1) von S. 215 wirklich zutrifft. Daß solche Reihen konvergieren, das zu beweisen ist hier nicht der Ort. Es genüge der Hinweis, daß dieser Beweis in der Tat möglich ist. Daraus ergibt sich aber die Möglichkeit, jede beliebige periodische Funktion (von der Periode $2\,\pi$) durch Zusammensetzung einzelner Sinus- und Kosinuskurven zu erhalten, wobei die Koeffizienten a, $b_1 \ldots$, $c_1 \ldots$ zwar die allerverschiedenartigsten Werte annehmen können, n aber nur ganze Zahlen sind, also stets ist

$$f(x) = a + b_1 \cdot \sin x + b_2 \sin 2\,x \ldots$$
$$+ c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \cos 3\,x\,.$$

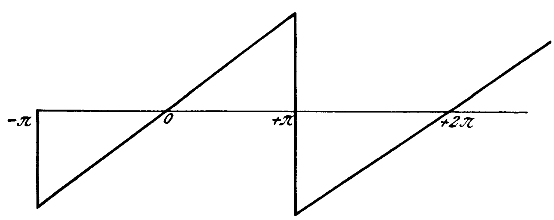

Fig. 93.

Als Beispiel sei erwähnt, daß die gebrochene Linie in Fig. 93 folgender Funktion, welche innerhalb von $-\pi$ und $+\pi$ die Funktion $y = \frac{x}{2}$ darstellt, nach der Fourierschen Reihe sich in folgende periodische Funktion entwickeln läßt:

$$y = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2\,x + \tfrac{1}{3}\sin 3\,x - \tfrac{1}{4}\sin 4\,x \ldots$$

Es ist daher für alle Werte innerhalb von $-\pi$ bis $+\pi$

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2\,x + \frac{1}{3}\sin 3\,x - + \ldots$$

Sechster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

110. Eine Gleichung, welche einen Differentialquotienten mit der Funktion selbst in irgendeine Beziehung bringt, heißt im allgemeinen eine Differentialgleichung, z. B.

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 . \tag{1}$$

Die Lösung oder die Integration einer solchen Gleichung besteht darin, eine Gleichung zwischen y und x, aber ohne Differentialquotienten zu finden, welche so beschaffen ist daß obiger Gleichung genügt wird. Die Lösung dieser Aufgabe ist

$$y = C - x^2 .$$

Denn in der Tat ist dann

$$\frac{dy}{dx} = -2x ,$$

und dies in (1) eingesetzt, ergibt das identische Resultat

$$-2x + 2x = 0 .$$

Es handelt sich immer darum, die Differentialquotienten zu entfernen, also immer um eine Integration. Aber nur in den einfachsten Fällen ist die Differentialgleichung derart, daß diese Integration ohne weiteres ausgeführt werden kann. In obigem Fall würden wir folgendermaßen zum Ziel kommen:

$$\frac{dy}{dx} = -2x ,$$

$$dy = -2x\,dx$$ (alle Glieder mit y auf die eine, alle mit x auf die andere Seite gebracht),

$$\int dy = -\int 2x\,dx ,$$

$$y = C - x^2 .$$

Lautet die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

so würde ein gleiches Verfahren zu dem Resultat führen

$$dy = -2y\,dx\,,$$

$$\frac{dy}{y} = -2\,dx\,,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 2\,dx\,,$$

und jetzt kommen wir durch Integration direkt zu dem Resultat

$$\ln y = -2x + C\,,$$

$$y = e^{C-2x}\,.$$

Es kommt also, wie man schon sieht, darauf an, die Variablen zu trennen. Das ist aber nicht immer direkt möglich. Z. B. bei der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + x + y = 0$$

führt der obige Weg nicht zu einer Trennung der Variablen.

Es kann nun nicht in unserer Absicht liegen, alle möglichen Differentialgleichungen lösen zu wollen. Es mögen nur einige einfachere Typen besprochen werden, um ein Bild von der Sache zu geben.

Wir unterscheiden zunächst gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Über die letzteren ist schon S. 180ff. einiges gesagt worden, und hier sollen uns nur die gewöhnlichen beschäftigen.

111. Man teilt die Differentialgleichungen in verschiedene Ordnungen ein. Eine Differentialgleichung $n$ter Ordnung ist eine solche, bei der der Differentialquotient höchstens in der $n$ten Ordnung auftritt.

So ist z. B.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ihre Lösung ist

$$y = C \cdot e^x\,.$$

Denn dieses ist die Bedingung, daß der zweite Differentialquotient gleich dem ersten ist.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y$$

ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie hat mehrere Lösungen;

$$y = e^x; \quad y = e^{-x}; \quad y = \sin x; \quad y = \cos x .$$

In allen diesen Fällen ist der vierte Differentialquotient gleich der Funktion selbst. Aber auch die Gleichung

$$y = e^x + e^{-x} + \sin x + \cos x$$

ist eine Lösung dieser Differentialgleichung, und ebenso

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot \cos x .$$

Sobald es also möglich ist, durch Multiplizieren oder Dividieren der ganzen Gleichung mit bestimmten Faktoren die Gleichung auf eine solche Form zu bringen, daß die Variablen getrennt oder separiert auftreten, d. h. daß x nur auf der einen Seite, y nur auf der anderen Seite der Gleichung vorkommt, bedarf die Lösung einer Differentialgleichung keiner weiteren Erklärung; sie geht auf einfache Integrationen zurück.

Beispiele:

1. $$x\,dx + y\,dy = 0 .$$

Aus

$$x\,dx = -y\,dy$$

folgt

$$\int x\,dx = -\int y\,dy ,$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

oder

$$y^2 + x^2 = C ,$$

wo das letzte C natürlich nicht dieselbe Bedeutung hat wie das C_1 der vorigen Gleichung. Es kann aber jeden beliebigen Wert annehmen.

2. $$y\,dx - x\,dy = 0\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\,,$$

$$\ln y = \ln x + C_1\,,$$

$$\ln\frac{y}{x} = C_1\,,$$

also auch

$$\frac{y}{x} = C\,,$$

wo C nicht dieselbe Bedeutung hat wie C_1.

112. Homogene Differentialgleichungen.

Für den Fall, daß eine Trennung der Variablen nicht möglich ist, kommt man auf diese Weise nicht weiter. Z. B. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(x + y)\,dx + y\,dy = 0$$

oder

$$x\,dx + y\,dx + y\,dy = 0\,.$$

Auf keine Weise ist hier zu erreichen, daß man auf der linken Seite nur die Glieder mit dy und y, auf der rechten die mit dx und x hat. Aber unter einer Bedingung läßt sich die Gleichung durch Einführung einer neuen Variablen auf die gewünschte Form bringen. Diese Bedingung ist, daß die Differentialgleichung homogen ist. Darunter versteht man eine solche Gleichung, bei der die Summe der zu x und y gehörigen Exponenten gleich ist, nachdem sie auf die Form $A\,dy + B\,dx = 0$ gebracht worden sind. Eine Gleichung ist also homogen, wenn sie die Ausdrücke x, y, oder

$$x^2\,, \quad xy\,, \quad y^2\,,$$

nicht aber außerdem noch x oder y, oder

$$x^3\,, \quad x^2y\,, \quad xy^2\,, \quad y^3\,,$$

nicht aber außerdem noch x^2, x, xy usw. enthält.

Der Kunstgriff, mit dem man solche homogene Gleichungen integrieren kann, besteht darin, daß man die neue Variable $z = \dfrac{y}{x}$ einführt.

Den Gang einer solchen Rechnung zeigt am besten ein Beispiel. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}. \tag{1}$$

Schreiben wir dies in der Form

$$dy\,(x+y) - y\,dx = 0\,,$$

so erkennen wir, daß die Differentialgleichung homogen ist.

Führen wir also $y = xz$ ein. Hieraus folgt zunächst

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

und

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z\,.$$

Dies wird in (1) eingesetzt,

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{xz}{x+xz}\,.$$

Jetzt können wir die rechte Seite durch x heben, und das ist der Vorteil, den uns die Einführung der neuen Variablen gebracht hat. Dies tritt im allgemeinen nur dann ein, wenn die Gleichung homogen war. Jetzt ist

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{z}{1+z}$$

und nach leichten Umformungen erhält man nunmehr die Variablen separiert.

$$x\frac{dz}{dx} = -z + \frac{z}{1+z}\,,$$

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2}{z+1}\,,$$

$$\frac{(z+1)}{z^2}\,dz = -\frac{dx}{x}\,.$$

Nunmehr sind die Variablen separiert, und wir können beide Seiten integrieren:

$$\int \frac{z+1}{z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}\,,$$

$$\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dx}{x}\,,$$

$$\ln z - \frac{1}{z} = -\ln x + C\,.$$

Nun schreiben wir für z wieder seinen Wert $\frac{y}{x}$:

$$\ln \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = -\ln x + C\,,$$

$$\ln \frac{y}{x} + \ln x = \frac{x}{y} + C\,,$$

$$\ln y = \frac{x}{y} + C\,,$$

$$y = e^{\frac{y}{x} + C}\,.$$

113. Inhomogene Differentialgleichungen.

Es gibt nun auch Fälle von inhomogenen Differentialgleichungen, welche durch dieselbe Substitution gelöst werden können. Es würde den Rahmen dieses Buches übersteigen, wenn wir die Bedingungen, unter denen dies möglich ist, genau charakterisieren wollten. Wir wollen nur ein allerdings höchst wichtiges Beispiel anführen.

Denken wir uns irgendeinen Naturvorgang, der sich isotherm und außerdem von selbst, d. h. ohne Zuführung äußerer Energie abspielt, und der reversibel ist, so ist nach dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie — wobei wir uns der von Helmholtz und Nernst gebrauchten Symbole bedienen wollen,

$$A - U = T\frac{dA}{dT}\,. \tag{1}$$

A ist die von dem System während des betrachteten Prozesses in maximo gewinnbare äußere Arbeit, U ist die Gesamtabgabe von Energie während desselben Prozesses (also nicht der Energieinhalt des Systems, sondern die Differenz des Energieinhaltes vor und nach Ablauf des betrachteten Prozesses), und T die Temperatur in absolutem Maße. Nun ist

U selbst noch eine Funktion der Temperatur, welche man nach der Gleichung

$$U = U_0 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3 \ldots \tag{2}$$

wiedergeben kann, wo U_0 die Energieabgabe bedeutet, welche der Prozeß zeigen würde, wenn er beim absoluten Nullpunkt (oder bei einer sehr tiefen, dem absoluten Nullpunkt äußerst nahe liegenden Temperatur) vor sich gehen würde. U_0 ist also eine Konstante, ebenso α, β, γ ...

Unsere Aufgabe ist es nun, auf Grund dieser Beziehung A eindeutig als Funktion von T anzugeben. Wir wenden lieber unsere gewohnten Bezeichnungen an und nennen A, die abhängige Variable, y, und T ist x. Dann ist unsere Differentialgleichung

$$y - U_0 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots = x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$y = xz,$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

$$xz - U_0 - \alpha x - \beta x^2 - x^3 \ldots = x\left(z + x\frac{dz}{dx}\right).$$

Das Glied xz hebt sich fort:

$$-U_0 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots = x^2 \frac{dz}{dx},$$

$$-\frac{dx}{x^2}(U_0 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots) = dz,$$

$$-\frac{U_0}{x^2}dx - \frac{\alpha}{x}dx - \beta\, dx - \gamma x \cdot dx \ldots = dz.$$

Integriert:

$$+\frac{U_0}{x} - \alpha \ln x - \beta x - \frac{\gamma}{2}x^2 \ldots = z + C.$$

Setzen wir nun für z seinen Wert $\frac{y}{x}$, so ist

$$y = U_0 - Cx - \alpha x \cdot \ln x - \beta x^2 - \frac{\gamma}{2}x^3 \ldots \tag{3}$$

Die Verwendbarkeit dieser komplizierten Gleichung beruht darauf, daß Nernst nachgewiesen hat, daß für feste und reine chemische Substanzen C und α beide $= 0$ werden, so daß

$$y = U_0 - \beta x^2 - \frac{\gamma}{2} x^3 \ldots$$

oder mit den ganz oben gebrauchten Symbolen

$$A = U_0 - \beta T^2 - \frac{\gamma}{2} T^3 \ldots$$

während U unter den gleichen Annahmen

$$U = U_0 + \beta T^2 + \gamma T^3$$

war. Die Koeffizienten der höheren Potenzen von T sind in der Regel sehr klein.

In manchen Fällen ist schon γ so klein, daß man es ohne gröberen Fehler vernachlässigen kann. Dann ist

$$U = U_0 + \beta T^2$$

und

$$A = U_0 - \beta T^2,$$

und daher

$$U + A = 2 U_0,$$

d. h. $U + A$ ist konstant.

Wir wollen die Gelegenheit benutzen, um zu zeigen, auf welche Weise Nernst dazu gelangte, die Integrationskonstante C und die Konstante $\alpha = 0$ zu setzen. Die Beobachtung ergab, daß U mit sinkender Temperatur einem ganz bestimmten Grenzwert zustrebte, und daß ferner bei sehr tiefen Temperaturen U sich mit der Temperatur äußerst wenig änderte. Man konnte daher annehmen, daß $\frac{dU}{dT}$ mit sinkender Temperatur der 0 zustrebt, oder daß

$$\lim \frac{dU}{dT}_{\text{für } T=0} = 0$$

ist. Differenzieren wir nun Gleichung (2) von S. 224, so ergibt sich

$$\frac{dU}{dT} = \alpha + 2\beta T + 3\gamma T^2 + \ldots$$

Diese Gleichung muß auch gelten, wenn $T = 0$. Damit nun hiermit gleichzeitig $\frac{dU}{dT} = 0$ werde, muß notwendigerweise $\alpha = 0$ sein.

Ferner ergab aber die Beobachtung, daß auch

$$\lim \frac{dA}{dT}_{\text{für } T=0} = 0$$

wird. Da nun nach (3) unter Einsetzung unserer Symbole

$$A = U_0 - C \cdot t - \alpha \cdot t \cdot \ln t - \beta t^2 + \frac{\gamma}{2} \cdot t^3 + \ldots$$

ist, so folgt daraus durch Differenzierung:

$$\frac{dA}{dT} = -C - \alpha - \alpha \cdot \ln t - 2\beta T - \frac{3\gamma}{2} t^2 \ldots$$

Damit dieses für $T = 0$ gleich Null werden könne, muß man, weil ja $\alpha = 0$ ist, notgedrungen schließen, daß auch C gleich Null ist. Man nennt die Doppelgleichung

$$\lim \frac{dU}{dt}_{\text{für } t=0} = \lim \frac{dA}{dt}_{\text{für } t=0} = 0$$

das Nernstsche Wärmetheorem.

114. Die soeben entwickelte Differentialgleichung ist nur ein spezieller Fall einer allgemeinen Form von Differentialgleichungen, deren gemeinsame Grundform folgende ist:

$$\frac{dy}{dx} + X_1 \cdot y + X_2 = 0\,, \tag{1}$$

wo X_1 irgendeine Funktion von x, und X_2 irgendeine andere Funktion, aber auch nur von x, bedeuten soll.

Diese Differentialgleichungen lassen sich auf folgende Weise lösen. Man setzt $y = \varphi(x) \cdot z$, wo $\varphi(x)$ eine bestimmte, vorläufig noch offen gelassene Funktion von x bedeuten soll und z eine neue Variable ist. Aus dieser Annahme würde durch Difierenzieren sich ergeben

$$dy = \varphi(x) \cdot dz + z \cdot d\varphi(x)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \frac{dz}{dx} + z \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}\,.$$

Setzen wir dies in unsere Differentialgleichung (1) ein, so ist

$$\varphi(x) \cdot \frac{dz}{dx} + z\frac{d\varphi(x)}{dx} + X_1 \cdot \varphi(x) \cdot z + X_2 = 0$$

oder

$$\varphi(x) \cdot \frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + X_1 \cdot \varphi(x)\right) + X_2 = 0\,. \tag{2}$$

Da nun $\varphi(x)$ bisher eine ganz willkürliche Funktion von x ist, so können wir diese so wählen, daß der in (2) eingeklammerte Ausdruck

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + X_1 \cdot \varphi(x) = 0 \tag{3}$$

wird.

Wir untersuchen nun, welche Bedeutung wir $\varphi(x)$ erteilen müssen, damit wir diese Gleichung ansetzen können, d. h. wir integrieren die letzte Gleichung (3). Es ergibt sich aus ihr

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = -X_1 \cdot dx$$

und integriert

$$\ln \varphi(x) = -\int X_1 \cdot dx$$

oder auch

$$\varphi(x) = e^{-\int X_1 dx}.$$

D. h. der Gleichung (3) ist Genüge getan, wenn wir als $\varphi(x)$ den soeben ermittelten Wert annehmen.

Ferner folgt aus (2) unter der Annahme, daß der Klammernausdruck $= 0$ ist,

$$\varphi(x) \cdot \frac{dz}{dx} + X_2 = 0$$

oder

$$dz = -\frac{X_2}{\varphi(x)} \cdot dx$$

oder unter Einsetzung des soeben gefundenen Wertes für $\varphi(x)$

$$dz = -X_2 \cdot e^{\int X_1 \cdot dx} \cdot dx$$

und integriert

$$z = -\int X_2 \cdot e^{\int X_1 \cdot dx} \cdot dx + C$$

und, da

$$y = \varphi(x) \cdot z$$

angenommen war, folgt schließlich

$$\boldsymbol{y = e^{-\int X_1 \cdot dx}\left[C - \int X_2 \cdot e^{\int X_1 \cdot dx} \cdot dx\right]}$$

als definitives Resultat.

Beispiele:

$$\frac{dy}{dx} + y + x = 0\,.$$

Diese Gleichung hat die Form (1), wenn wir

$$X_1 = 1\,,$$
$$X_2 = x$$

setzen.

Setzen wir diese Werte in das allgemeine Resultat (4) ein, so wird

$$y = e^{-\int dx}\left(C - \int x \cdot e^{\int dx} \cdot dx\right),$$

oder nach Ausführung der beiden Integrationen, welche im Exponenten auftreten,

$$y = e^{-x}\left(C - \int x \cdot e^x \cdot dx\right).$$

Das Integral $\int x \cdot e^x \cdot dx$ können wir nun durch partielle Integration (s. S. 145) lösen, indem wir $e^x\,dx = du$ und $x = v$ setzen, dann ist nämlich

$$\int v\,du = u\,v - \int u\,dv$$
$$= x\,e^x - e^x$$

und

$$y = e^{-x}(C - x\,e^x + e^x)$$
$$y = C \cdot e^{-x} - x + 1\,.$$

Beachtenswert ist, daß in solchen Resultaten die Integrationskonstante durchaus nicht als Summand aufzutreten braucht. Hier erscheint sie z. B. als Faktor eines Gliedes, und wir können dem ganzen Resultat nicht etwa eine beliebige Konstante addieren.

Als weiteres Beispiel wählen wir nochmals die Differentialgleichung von S. 224

$$y - U_0 - \alpha\,x - \beta\,x^2 - \gamma\,x^3 \ldots = x \cdot \frac{dy}{dx}\,.$$

Hierfür können wir schreiben

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{U_0}{x} + \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 \ldots = 0\,.$$

Dies hat die Form (1) von S. 226, wenn wir

$$X_1 = -\frac{1}{x}\,,$$

$$X_2 = \frac{U_0}{x} + \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 \ldots$$

setzen. Das Resultat ist dann nach (4)

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[C - \int \left(\frac{U_0}{x} + \alpha + \beta x + \gamma x^2 \dots \right) \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot dx \right].$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

und daher

$$e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

andererseits das zweite in der Gleichung vorkommende Integral

$$e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x},$$

also ist

$$y = x \left[C - \int \left(\frac{U_0}{x^2} + \frac{\alpha}{x} + \beta + \gamma x \dots \right) dx \right]$$

oder

$$y = x \left[C + \frac{U_0}{x} - \alpha \ln x - \beta x - \frac{\gamma}{2} x^2 \dots \right],$$

$$y = U_0 + Cx - \alpha \cdot x \cdot \ln x - \beta x^2 - \frac{\gamma}{2} x^3 \dots$$

dasselbe Resultat wie oben, nur daß die Integrationskonstante C hier mit anderem Vorzeichen erscheint. Da diese aber (rein mathematisch betrachtet) jeden positiven oder negativen Wert annehmen kann, so liegt hierin kein Widerspruch.

115. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Unter einer Differentialgleichung zweiter Ordnung versteht man eine solche, bei der ein Differentialquotient zweiter Ordnung (neben oder ohne einen solchen erster Ordnung) vorkommt. Man löst sie durch zweimaliges Integrieren. Da bei jedem Integrieren eine Konstante in das Resultat eintritt, so muß die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn sie die allgemeinste Form der Lösung darstellen soll, zwei Integrationskonstanten enthalten. Gegeben sei z. B.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a .$$

Schreiben wir für den zweiten Differentialquotienten seine eigentliche Bedeutung

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = a$$

und bezeichnen $\frac{dy}{dx}$ vorläufig als u, so ist

$$\frac{du}{dx} = a$$

oder

$$du = a\,dx\,,$$

woraus durch Integration folgt

$$u = ax + C_1\,.$$

Nunmehr führen wir für u wieder seinen Wert $\frac{dy}{dx}$ ein, woraus sich ergibt

$$dy = ax\,dx + C_1\,dx\,,$$

$$y = \frac{a}{2}x^2 + C_1x + C_2\,.$$

Dies stellt somit die Lösung unserer Differentialgleichung dar. Wir werden also, wo es möglich ist, nach den üblichen Regeln die Integration auf ähnliche Weise wie soeben stets auszuführen suchen.

Das gelingt aber nicht immer auf so einfache Weise. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0\,, \tag{4}$$

so würde uns das obige Verfahren nicht zum Ziel führen:

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0\,,$$

$$du - 2\,dy + y\,dx = 0\,.$$

Hier gelingt die Trennung der Variablen nicht, auch treten drei Variable auf. Mitunter gelingt es aber, durch Erraten irgendeine Lösung der Integralgleichung zu finden, welche zunächst noch nicht die allgemeine Form derselben (mit zwei

Konstanten) zu sein braucht. Und zwar ist es die Exponentialfunktion, an die wir in solchen Fällen stets denken müssen. Es ist nämlich

$$\frac{d e^x}{d x} = \frac{d^2 e^x}{d x^2}$$

und

$$e^{px} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d e^{px}}{d x} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{d^2 e^{px}}{d x^2},$$

wie sich aus S. 123 ergibt.

Sehen wir daraufhin unsere Gleichung (4) an, so ergibt sich dem Geübten durch leichtes Erraten, daß

$$y = e^x$$

eine Lösung unserer Differentialgleichung ist. Denn es ist

$$\frac{d^2 e^x}{d x^2} = \frac{d e^x}{d x} = e^x = y$$

und so wird, wenn wir das in die Gleichung (4) einsetzen,

$$y - 2y + y = 0$$

ein richtiges Resultat. Aber das Resultat

$$y = e^x$$

ist nur eine „partikuläre" Lösung unserer Differentialgleichungen, denn ihr fehlen die beiden notwendigen Integrationskonstanten. Wir erkennen aber durch Probieren sofort, daß auch $C_1 \cdot e^x$ eine Lösung unserer Differentialgleichung ist. Diese Form ist schon allgemeiner, insofern sie schon eine Integrationskonstante enthält. Aber wir müssen nach weiteren Lösungen suchen, weil auch dieser Form immer noch eine Integrationskonstante fehlt. Hier ist es nun von Vorteil, bevor wir in unserer eigentlichen Aufgabe fortfahren, einen Kunstgriff kennen zu lernen.

Bei der Lösung derartiger Aufgaben ist es nämlich oft eine Erleichterung, mit imaginären Größen zu arbeiten, und wir wollen uns mit diesen zunächst etwas näher beschäftigen.

116. Einige Beispiele für die Anwendung der imaginären Größen.

Die Einheit der imaginären Zahlen ist $\sqrt{-1}$ oder i. Die imaginären Zahlen sind auf keine Weise mit den reellen Zahlen vergleichbar. Ein Sinn kann den imaginären Zahlen nach Gauß durch folgende graphische Darstellung untergelegt werden. Stellen wir die Zahlenreihe graphisch als Maßstab auf einer Geraden dar, indem wir von dem Nullpunkt O ausgehend, die positiv gezählten Einheiten nach rechts, die negativ gezählten nach links auftragen, so liegt es im Wesen dieser Darstellungsart begründet, daß es keine einzige Zahl außerhalb dieser Geraden gibt. Ziehen wir nun eine Gerade senkrecht zu unserer Zahlen-Geraden durch den Nullpunkt und tragen die Streckeneinheit Oi auf ihr ab, so können wir dieser Strecke einen bestimmten Sinn unterlegen. Oi ist nämlich eine Höhe in dem gleichseitigen, rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken -1, $+i$, $+1$. Daher muß das Quadrat über Oi gleich sein dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse (nach S. 10), und dieses Rechteck ist

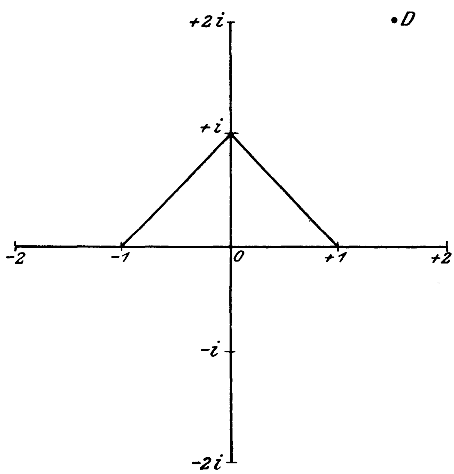

Fig. 94.

$$= (+1) \cdot (-1) = -1,$$

also die Höhe selbst

$$= \sqrt{-1} = i.$$

Also ist die Höhe die Einheitsstrecke der imaginären Zahlen, und wir können die gesamten imaginären Zahlen auf der senkrechten Achse abtragen, indem wir als Maßeinheit die gleiche

Strecke wählen wie auf der reellen Zahlenachse. Wollen wir nun eine komplexe Zahl, welche allgemein den Typus

$$a + bi$$

hat, graphisch darstellen, so tragen wir sie in die Ebene ein, welche von der Achse der reellen und der Achse der imaginären Zahlen bestimmt ist. Der Punkt D entspricht z. B. so der komplexen Zahl

$$1{,}5 + 2i\,.$$

Eigentlich dürften wir nur sagen: Die Koordinaten des Punktes D sind $+1{,}5$ und $+2i$. Es ist eine übertragene Ausdrucksweise, wenn wir die durch den Punkt D symbolisch dargestellte Größe einfach als die Summe $1{,}5 + 2i$ hinstellen. Das Zeichen $+$ hat offenbar nicht die gewöhnliche Bedeutung eines Additionszeichens, wie ja auch rein algebraisch in dem Ausdruck $a + bi$ das Zeichen $+$ nicht die Bedeutung einer Summation haben kann, denn eine reelle und eine imaginäre Größe läßt sich auf keine Weise addieren. Wenn wir nun die Beziehung, in welche wir a und bi oder 1,5 und $2i$ zu einander setzen, dennoch durch das Zeichen $+$ wiedergeben, so kann als einzige Begründung dafür an dieser Stelle nur folgendes gesagt werden. Wenn wir irgendwelche Rechenoperationen mit dem komplexen Ausdruck $a + bi$ vornehmen, wenn wir ihn z. B. quadrieren, so können wir uns dabei der gewöhnlichen Rechenregeln der Algebra bedienen, ohne zu irgendeinem widersprechenden Resultat zu gelangen, dagegen gibt es kein anderes algebraisches Symbol, durch welches wir a und bi verbinden könnten, ohne auf offensichtlich falsche Resultate beim Rechnen zu kommen.

117. Es läßt sich nun nachweisen, daß sämtliche, reelle und imaginäre Zahlen sich durch den Typus

$$a + bi$$

wiedergeben lassen, wo a und b je eine reelle Zahl bedeutet. Man könnte anfänglich der Meinung sein, daß das nicht der Fall ist. Z. B. leuchtet es von vornherein nicht ein, wie sich $\sqrt{-i}$ auf die Form $a + bi$ bringen läßt. Es sieht so aus, als ob $\sqrt{-i}$ gewissermaßen eine imaginäre Größe „höherer Ordnung“ sei. Das ist aber nicht der Fall. Versuchen wir nämlich, ob sich nicht $\sqrt{-i}$ auch auf die Form $a + b\,i$ bringen läßt. Setzen wir

$$\sqrt{-i} = x + y\,i\,, \tag{1}$$

so ist

$$-i = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y \cdot i\,.$$

Da aber eine reelle und eine imaginäre Zahl unter sich durchaus nicht vergleichbar sind (worüber wir hier nur kurz hinweg gehen können, vgl. S. 18), so ist die letzte Gleichung nur denkbar, wenn

$$x^2 - y^2 = 0$$

und

$$2\,x\,y = -1$$

sind. Daraus folgt

$$x = y = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i\,.$$

Setzen wir das in (1) ein, so ist

$$\sqrt{-i} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i^2$$

oder, da $i^2 = -1$ ist,

$$= -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i\,.$$

In der Tat, wenn wir diesen Ausdruck quadrieren, ergibt sich $-i$, und es ist $\sqrt{-i}$ nichts weiter als eine verkappte Form der komplexen Größe

$$-\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot i\,.$$

Auf solche Weise kann bewiesen werden, daß sämtliche imaginären und komplexen Zahlen sich auf die Form $a + b \cdot i$ bringen lassen. Auch e^{ix} ist eine solche verkappte komplexe Größe, und diese ist es gerade, welche uns für unsere Aufgabe interessiert.

118. Es war S. 202 gezeigt worden, daß allgemein

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

ist. Also können wir unter e^{ix} nur die Reihe verstehen

$$e^{ix} = 1 + \frac{i\,x}{1!} + \frac{i^2\,x^2}{2!} + \frac{i^3 \cdot x^3}{3!} \ldots$$

oder

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots,$$

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots\right).$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den S. 203 und 204 entwickelten Reihen für $\sin x$ und $\cos x$, so ist

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x .$$

Hierin erweist sich die komplexe Natur von e^{ix}. Genau auf dieselbe Weise läßt sich aber entwickeln, daß

$$e^{-ix} = 1 + \frac{(-ix)}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} \ldots$$

$$= 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x .$$

Schreiben wir diese beiden Resultate untereinander, so ist

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x ,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x .$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

und durch Subtraktion

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

119. Diese Gleichungen können nun bei der Lösung höherer Differentialgleichungen von großem Werte werden.

Es sei z. B. die einfache Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay . \tag{1}$$

Hier kommt es nun darauf an, ob a eine positive oder negative Größe darstellt. Im ersten Fall ergibt sich, wenn man an die Exponentialfunktion denkt, sofort (vgl. z. B. S. 123)

$$y = e^{\sqrt{a} \cdot x},$$

denn in der Tat ist die erste Ableitung von $e^{\sqrt{a}\cdot x} = \sqrt{a}\cdot e^{\sqrt{a}\cdot x}$, die zweite $= a\cdot e^{\sqrt{a}\cdot x}$. Es ist daher eine Lösung der Differentialgleichung (1)

$$y = e^{\sqrt{a}\cdot x}$$

und auch

$$y = C_1 e^{\sqrt{a}\cdot x}.$$

Es ist aber ferner auch

$$y = e^{-\sqrt{a}\cdot x}$$

und

$$y = C_2\, e^{-\sqrt{a}\cdot x}$$

eine Lösung, und daher schließlich auch

$$y = C_1 e^{\sqrt{a}\cdot x} + C_2\, e^{-\sqrt{a}\cdot x}.$$

Man überzeuge sich durch zweimaliges Differenzieren dieser Gleichung nach x, daß sie wirklich zur Gleichung (1) führt.

120. Ist aber in der Gleichung (1) ein negativer Faktor, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\,y\,, \tag{5}$$

wo a wieder eine positive konstante Zahl bedeuten soll, so würde nach Analogie des vorigen Resultates sich ergeben

$$y = C_1\cdot e^{\sqrt{-a}\cdot x} + C_2\cdot e^{-\sqrt{-a}\cdot x}$$

oder

$$y = C_1\cdot e^{i\sqrt{a}\cdot x} + C_2\cdot e^{-i\sqrt{a}\cdot x}.$$

In dieser Form besagt die Gleichung noch nichts. Ein besonderer Fall dieses allgemeinen Integrals wäre nun der, daß $C_1 = C_2$ ist.

Dann wäre

$$y = C_1\left(e^{i\sqrt{a}\cdot x} + e^{-i\sqrt{a}\cdot x}\right),$$

was nach S. 235 identisch ist mit

$$y = 2\,C_1\cdot\cos\left(\sqrt{a}\cdot x\right) = k_1\cdot\cos\left(\sqrt{a}\cdot x\right),$$

wo k_1 die vorher mit $2\,C_1$ bezeichnete Konstante bedeutet. Diese Gleichung muß zwar richtig sein, aber sie ist nicht die allgemeinste Form der Lösung, weil sie, obwohl aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung hervorgegangen, nur eine Konstante enthält.

Ferner wäre ein besonderer Fall, daß

$$C_2 = -C_1 .$$

Dann wäre

$$y = C_1\left(e^{i\sqrt{a}\cdot x} - e^{-i\sqrt{a}\cdot x}\right) = i \cdot 2\, C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{a} \cdot x\right) .$$

Diese Gleichung kann für ein reelles y nur dann einen Sinn haben, wenn C_1 selbst imaginär wird, etwa $= i \cdot q$. Dann ist

$$y = i^2 \cdot 2\, q \sin\left(\sqrt{a} \cdot x\right) ,$$
$$= -2\, q \sin\left(\sqrt{a} \cdot x\right)$$

oder

$$y = k_2 \cdot \sin\left(\sqrt{a} \cdot x\right) ,$$

wenn wir die neue Integrationskonstante $-2\,q$ mit k_2 bezeichnen.

Durch Kombinieren der beiden gefundenen partikulären Integrale ergibt sich somit

$$y = k_1 \cdot \cos\left(\sqrt{a} \cdot x\right) + k_2 \sin\left(\sqrt{a} \cdot x\right) , \tag{6}$$

welches, da zwei Integrationskonstanten vorhanden sind, die allgemeinste Form des Integrals darstellen muß.

115. Mit Hilfe derselben Methode können wir eine sehr wichtige Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c\, y = 0 , \tag{1}$$

integrieren. Wir versuchen wiederum, ob nicht eine Gleichung der Form

$$y = e^{p\,x}$$

dieser Differentialgleichung genügen kann. Alsdann wäre

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot e^{p\,x} ,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p^2 \cdot e^{p\,x} .$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so wäre

$$a\, p^2 e^{p\,x} + b\, p \cdot e^{p\,x} + c\, e^{p\,x} = 0$$

oder
$$a p^2 + b p + c = 0 ,$$
$$p^2 + \frac{b}{a} p + \frac{c}{a} = 0 ,$$
$$p = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} .$$

Für den Fall nun, daß $4ac > b^2$, ist dieser Ausdruck imaginär, und es wird
$$p = -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
und
$$y = e^{\left[-\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right] x} .$$
Bezeichnen wir
$$\frac{b}{2a} = \alpha$$
und
$$\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \beta ,$$
so ist
$$y = e^{-\alpha x \pm \beta i x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{\pm \beta i x} .$$
Da $e^{\pm \beta i x} = \cos \beta x \pm i \cdot \sin \beta x$ (nach S. 235), so ist
$$y = e^{-\alpha x} \cdot (\cos \beta x \pm i \cdot \sin \beta x) .$$
Nun geht die Entwicklung wie im vorigen Beispiel weiter. Zunächst kann man wieder durch Analogie folgern und durch die Proberechnung bestätigen, daß die allgemeine Form mit den nötigen 2 Integrationskonstanten lauten muß
$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \cos \beta x \pm i \cdot C_2 \cdot \sin \beta x) .$$
Setzt man $C_2 = 0$, $C_1 = k_1$, so folgt das partikuläre Integral
$$y = e^{-\alpha x} \cdot k_1 \cdot \cos \beta x$$
und setzt man $C_1 = 0$, $C_2 = i \cdot k_2$, so folgt ein zweites partikuläres Integral
$$y = e^{-\alpha x} \cdot k_2 \cdot \sin \beta x .$$
Das dieser Lösung noch zukommende Zeichen $\pm$ kann man fortlassen, weil ja k_2 jeden beliebigen positiven oder negativen Wert haben darf. Durch Kombinieren dieser beiden partikulären Integrale erhalten wir das allgemeine Integral
$$y = e^{-\alpha x} (k_1 \cdot \cos \beta x + k_2 \cdot \sin \beta x) ,$$
wo man noch für α und β ihre Werte einsetzen kann.

Beispiele von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. Fallgesetz.

121. Die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers ist der Quotient der zurückgelegten Strecke durch die dazu erforderliche Zeit. Ist die Geschwindigkeit gleichförmig, so bedarf diese Definition keiner weiteren Erläuterung. Ist die Geschwindigkeit veränderlich, so ist die Geschwindigkeit nur für unendliche kleine Zeitläufte als eine gleichförmige zu betrachten. Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist, wenn s die bis zur Zeit t schon zurückgelegte Strecke bedeutet,

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1}$$

Ist v nun veränderlich, so betrachten wir den einfachsten Fall, die Geschwindigkeit wachse gleichförmig mit der Zeit; es ist dann

$$\frac{dv}{dt} = g, \tag{2}$$

wo g eine Konstante bedeutet.

Dafür schreiben wir

$$\frac{d\frac{ds}{dt}}{dt} = g,$$

oder

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Wollen wir die zur Zeit t zurückgelegte Strecke s erfahren, so ist nach (1)

$$ds = v\,dt.$$

Da nun nach (2)

$$dv = g\,dt,$$

also

$$v = \int g\,dt, \tag{3}$$

so ist

$$ds = dt \int g\,dt$$

und

$$s = \int\int g\,dt.$$

Nun ist

$$\int g \cdot dt = g\,t + C_1,$$

also

$$\iint g\,dt = \int (g\,t + C_1)\,dt = g\frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2\,.$$

Also ist

$$s = g\frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2\,. \tag{4}$$

Die Bedeutung der beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 folgt aus der Überlegung, welchen Weg der Körper zur Zeit 0 zurückgelegt hat. Dieser ist, wenn wir vom Anfangszustand der betrachteten Bewegung ausgehen, gleich 0, also folgt unter Einsetzung von $s = 0$ und $t = 0$ aus der Gleichung (4)

$$C_2 = 0\,.$$

Ist der Anfangszustand des betrachteten Bewegungsvorganges der Ruhezustand, so wird auch C_1 gleich 0. Denn aus (3) folgt

$$v = g\,t + C_1\,,$$

wo C_1 dieselbe Bedeutung hat wie in (4). Da nun zu Anfang $t = 0$ ist und jetzt auch $v = 0$ sein soll, so folgt $C_1 = 0$ und es folgt das Fallgesetz

$$s = g\frac{t^2}{2}\,.$$

2. Die Sinusschwingung oder harmonische Schwingung.

122. Ein materieller Punkt P bewege sich auf der Geraden AB, und zwar unter der Wirkung einer Kraft, die ihn nach O zu ziehen sucht und der Entfernung PO proportional ist. Stoßen wir den Körper in der Richtung AB an, so wird er sich von der Ruhelage O entfernen, und gleichzeitig mit dieser Entfernung wird eine Kraft auftreten, die die nunmehr vorhandene Eigengeschwindigkeit des Körpers vermindert, welche er, unbeeinflußt von Kräften, dauernd beibehalten würde. Da mit wachsender Entfernung des Körpers von O diese Kraft nach der Grundannahme immer größer wird, so wird die Geschwindigkeit in einem gewissen Punkte, B, gleich Null werden, dann

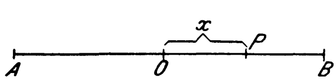

Fig. 95.

ihre Richtung wechseln, und der Körper kehrt nach O zurück. Dort angelangt, steht er unter keinerlei Kraftwirkung mehr, so daß er seine Geschwindigkeit beibehält, oder, wie man auch sagt, vermöge seines Beharrungsvermögens, die Ruhelage O überschreitet. Dann spielt sich derselbe Vorgang nach der anderen Richtung ab und wiederholt sich dann unaufhörlich, er ist periodisch. Wir haben daher eine (reibungslose, ungedämpfte) Schwingung vor uns.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die jeweilige Entfernung des Körpers von der Ruhelage, $OP = x$, als eine Funktion der Zeit t darzustellen. Um den Ansatz zu machen, wollen wir die hierbei vorkommenden Begriffe mathematisch formulieren. Die Geschwindigkeit v des Körpers ist in jedem Augenblick $= \frac{dx}{dt}$. Die Beschleunigung, die der Körper innerhalb eines kleinen Zeitteilchens erfährt, ist $= \frac{dv}{dt}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{d^2x}{dt^2}$. Das Produkt aus der jeweiligen Beschleunigung und der Masse m des Körpers, also $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, ist das Maß für die zur Zeit t gerade einwirkende Kraft. Von dieser Kraft machten wir nun die Voraussetzung, daß sie der Strecke x proportional sei. Die Kraft ist daher auch $= k \cdot x$, wo k den Proportionalitätsfaktor bedeutet. Es ist also in jedem Augenblick $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ der absoluten Größe nach gleich kx. Untersuchen wir nun die Vorzeichen, die wir diesen Ausdrücken geben müssen. Nehmen wir für x die Richtung OB als die positive, OA als die negative an, so wird $k \cdot x$ größer, wenn der Körper von O nach B schwingt. Dagegen findet auf der gleichen Strecke eine Abnahme der Geschwindigkeit statt, oder der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$ ist negativ zu nehmen, und mit Berücksichtigung des Vorzeichens ist die Kraft

$$= m \cdot \frac{d\left(-\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = -m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Denn der Wert der Kraft muß als positive Größe herauskommen, was nur durch die Wahl des negativen Vorzeichens vor dem an sich negativen $\frac{dx}{dt}$ erreicht wird.

Nunmehr haben wir den Ansatz:

$$k x = -m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Diese Gleichung stellt eine Differentialgleichung für die beiden Variablen x und t dar. Schreiben wir sie

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x ,$$

so ist die Lösung der Gleichung nach S. 236

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) .$$

Wir müssen jetzt die Bedeutung der beiden Integrationskonstanten entwickeln. Zu diesem Zweck müssen wir eine Übereinkunft treffen, welche Zeit wir als den Anfang der Schwingung betrachten wollen. Wir wählen dazu vorteilhaft den Zeitpunkt, in dem der Körper sich in O befindet. Dann ist $t = 0$ und $x = 0$. Setzen wir diese beiden Werte in die soeben gewonnene Gleichung ein, so ist

$$0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 ,$$

also, da $\cos 0$ nicht gleich Null ist,

$$C_1 = 0 .$$

Bei der gewählten Festsetzung fällt also das erste Glied der Gleichung für x fort. Um C_2 zu bestimmen, betrachten wir den Endpunkt B der Schwingung. Bezeichnen wir $OB = \frac{\lambda}{2}$ als die halbe Amplitude der Schwingung und die dazu gehörige Zeit als $\frac{T}{4}$ (ein Viertel der ganzen Schwingungszeit hin und zurück, T), so ist für $x = \frac{\lambda}{2}$ der entsprechende Wert für $t = \frac{T}{4}$. Setzen wir das wieder ein, so ist

$$\frac{\lambda}{2} = C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{T}{4}\right) .$$

Hiermit hat auch C_2 seine Bedeutung gewonnen, welche wir in die Gleichung

$$x = C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \tag{1}$$

einsetzen können.

Der in der Formel vorkommende Sinus zeigt, wie erwartet werden mußte, an, daß die Werte für x periodisch wiederkehren.

Die Periode der Schwingung nennen wir gewöhnlich die Schwingungsdauer [1]).

Wir können nun die harmonische Bewegung auf folgende Weise entstanden denken. Denken wir uns einen Massenpunkt D (Fig. 96) mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich im Kreise bewegen. Ziehen wir in jedem Augenblick das Lot DP auf den Durchmesser AB, so beschreibt der Punkt P eine harmonische Bewegung.

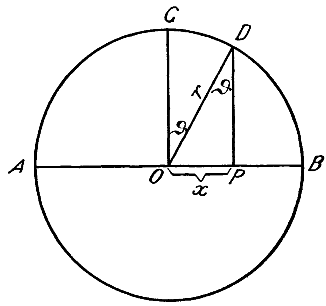

Fig. 96.

Denn betrachten wir wieder die Strecke $OP = x$ als Ortsbestimmung für den Punkt P, so ist

$$x = r \cdot \sin\vartheta .$$

Ist die Umlaufszeit des Punktes $D = T$, so ist die Zeit, die die Bewegung des kreisenden Punktes von C bis D verbraucht, ein bestimmter Bruchteil von T. Es ist nämlich

$$\vartheta : 2\pi = t : T$$

oder

$$\vartheta = 2\pi \cdot \frac{t}{T} .$$

Also ist

$$x = r \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

dieselbe Gleichung, zu der wir oben (1) gelangten, wenn

$$r = C_2$$

und

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

gesetzt wird.

---

[1]) Oder je nach der Definition auch die doppelte Schwingungsdauer.

3. Die gedämpfte Schwingung.

123. Wir nehmen zunächst wiederum an, der Punkt P (Fig. 95) bewege sich unter denselben Bedingungen wie im vorigen Beispiel, nur mit dem Unterschied, daß seine Geschwindigkeit durch eine Reibung ständig gedämpft werde. Die Größe dieser Reibung sei proportional der jeweiligen Geschwindigkeit. Wir können die Reibung daher als eine Gegenkraft auffassen, welche die Bewegung im positiven Sinne, von O nach B, zu verringern sucht. Sie ist dem absoluten Betrage nach $= \varrho \cdot \frac{dx}{dt}$, wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor, die Reibungskonstante, und $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes P bedeutet.

Die zur Zeit t auf den Punkt P einwirkende Kraft ist also einerseits wieder $= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, andererseits zunächst wiederum $= kx$, wie früher, aber noch vermehrt bzw. vermindert um $\varrho \cdot \frac{dx}{dt}$. Untersuchen wir die Vorzeichen, so wirkt auf den Punkt P vom Punkt O her eine Kraft ein, welche negativ zu rechnen ist, wenn wir sie als $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ definieren, dagegen andererseits als die Summe der beiden anderen, positiv gerechneten Kräfte aufgefaßt werden kann, weil sie der Abdrängung des Punktes P vom Punkt O entgegenwirken. Es ist daher

$$-m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = kx + \varrho \cdot \frac{dx}{dt}$$

oder

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \varrho \cdot \frac{dx}{dt} + kx = 0\,.$$

Diese Gleichung liefert, wenn $4mk > \varrho^2$, d. h. wenn die Reibung nicht gar zu groß ist, was eine aperiodische Dämpfung der Schwingung zur Folge haben würde, nach S. 238 das Integral

$$x = e^{-\alpha t}\,(k_1 \cdot \cos\beta t + k_2 \cdot \sin\beta t)\,,$$

wo

$$\alpha = \frac{\varrho}{2\,m}$$

und

$$\beta = \frac{\sqrt{4\,m \cdot k - \varrho^2}}{2\,m}$$

ist.

Nehmen wir denselben Anfangspunkt der Schwingung an wie im vorigen Beispiel, so ist wieder für $t = 0$ auch $x = 0$, und dies ergibt, in die allgemeine Lösung des Integrals eingesetzt, wie früher, $k_1 = 0$; und für $t = \frac{T}{4}$ ist wieder $x = \frac{\lambda}{2}$ dies ergibt

$$\frac{\lambda}{2} = e^{-\alpha \cdot \frac{T}{4}} \cdot k_2 \cdot \sin\beta\,\frac{T}{4},$$

woraus sich k_2 leicht berechnen läßt, welches in die Lösung

$$x = e^{-\alpha t} \cdot k_2 \cdot \sin\beta\, t$$

eingesetzt werden kann. Die Schwingung ist auch wieder eine sinusähnliche Schwingung, mit der Besonderheit, daß die Amplitude der Schwingung allmählich immer geringer wird.

Anhang.

Anleitung zur mathematischen Darstellung einer Funktion aus experimentellen Daten.

Wenn irgendein Naturvorgang in einer Reihe von Experimenten quantitativ untersucht worden ist, so haben wir zunächst nur eine Reihe von Zahlen vor uns. Wir haben dann die Aufgabe, aus diesen Daten die mathematischen Beziehungen abzuleiten. Wir werden nach Möglichkeit jede Versuchsreihe, der wir ein gemeinschaftliches Resultat entnehmen wollen, so einrichten, daß im Experiment nur eine Größe absichtlich verändert wird. Diese ist dann die unabhängige Variable x, und wir bestimmen zu möglichst viel verschiedenen Werten von x den Wert der zugehörigen, abhängigen Variablen y. Das Beispiel der fermentativen Rohrzuckerspaltung wird uns, wie früher, auch hier eine lehrreiche Erläuterung dieses Satzes geben.

Die Inversion des Rohrzuckers hängt nämlich, wie die Erfahrung lehrt, ab 1. von der Zeit t, 2. von der Fermentkonzentration Φ, 3. von der anfänglichen Rohrzuckerkonzentration a, 4. von der Wasserstoffionenkonzentration der Lösung H, 5. von der Temperatur ϑ. Wir werden nun danach trachten, die Versuchsreihen so anzustellen, daß wir aus je einer Serie von Versuchen allein den Einfluß der Fermentkonzentration, aus einer zweiten allein den Einfluß der anfänglichen Zuckerkonzentration usw. erkennen, damit in jeder einzelnen Versuchsreihe nicht durch das Zusammenwirken zweier einflußreicher Faktoren das Bild getrübt wird. Wir haben im ganzen sechs Veränderliche, die fünf genannten und 6. die Konzentration der gebildeten Spaltprodukte x. Die ersten fünf sind voneinander gänzlich unabhängige Größen. Wir sind imstande, jede einzelne von ihnen experimentell zu ändern, ohne daß eine andere von ihnen geändert zu werden braucht. Die sechste ist dagegen die abhängige Variable. Es bestehen also Beziehungen folgender Art:

1. $x = f_1(t)$,

2. $x = f_2(\Phi)$,

3. $x = f_3(a)$,

4. $x = f_4(H)$,

5. $x = f_5(\vartheta)$.

Wollen wir die erste Funktion bestimmen, so werden wir eine Versuchsreihe machen, in welcher wir die Größen Φ, a, H, ϑ unverändert lassen. Wir werden also alle Einzelversuche bei irgend einer gegebenen Ferment-, Zucker-, Wasserstoffionen-Konzentration und Temperatur ausführen, d. h. wir werden einem Gemisch von Ferment, Zucker, Säure, welches auf einer bestimmten Temperatur gehalten wird, von Zeit zu Zeit Proben entnehmen und in jeder Probe die Menge der Spaltprodukte durch chemische Analyse bestimmen. Wollen wir die zweite Funktion bestimmen, so werden wir t, a, H, ϑ unverändert lassen und nur Φ variieren und für jeden Wert von Φ einen Wert für x experimentell ermitteln.

Aus diesen fünf Grundfunktionen lassen sich nun beliebig viel zusammengesetzte Funktionen konstruieren, wie etwa

$$x = f_6(\Phi \cdot t) ,$$

$$x = f_7\left(\frac{\Phi}{t}\right) ,$$

$$x = f_8(H \cdot \Phi) ,$$

$$x = f_9(\Phi \cdot \ln H)$$

oder wir können auch andere dieser Funktionen paarweise miteinander in Beziehung setzen und eine indirekte Funktion bilden, z. B.

$$t = f_{10}(\Phi) .$$

An sich hängt ja t von Φ nicht ab, wie wir schon erörterten. Aber die letzte Gleichung hat noch den besonderen Sinn, daß wir alle anderen Variablen, auch x, konstant halten, und dann hängt natürlich t von Φ ab: denn wenn diejenige Zeit betrachtet wird, welche zur Erzeugung einer bestimmten Menge der Spaltprodukte verbraucht wird, so ist diese natürlich von der Fermentmenge abhängig. Mitunter ist nun die mathematische Formulierung einer solchen zusammengesetzten oder indirekten Funktion leichter als die einer einfachen Funktion. Es zeigte sich z. B., daß die Funktion

$$t = f(\Phi)$$

sehr einfach ist. Um sie zu bestimmen, werden wir eine Serie von Versuchen ansetzen, wo wir a, H, ϑ und außerdem x konstant halten, d. h. wir werden in allen Einzelversuchen einer Versuchsreihe a, H, ϑ konstant halten, Φ in jedem Einzelversuch anders wählen und in jedem Einzelversuch bestimmen, welche Zeit t nötig ist, um eine in allen Versuchen gleich groß gewählte Menge Spaltprodukte x zu erzeugen. Es zeigte sich so, daß

$$t = \frac{k}{\Phi}\,,$$

wo k eine Konstante ist. Dieses k ist aber nur unter der Voraussetzung konstant, daß a, H, ϑ, x konstant gehalten werden. Nachdem wir die soeben genannte Beziehung ermittelt haben, können wir nunmehr auch eine zweite Größe variieren, z. B. k als Funktion von a ermitteln. So ist es Sache des geschickten Kombinierens, derartige zusammengesetzte oder indirekte Funktionen zu konstruieren, daß die experimentellen Daten sich zu einer möglichst einfachen Funktion zusammenfügen.

Aber nicht immer gelingt es, die Funktion aus einer Zahlenreihe direkt herauszulesen. Handelt es sich um eine geradlinige Funktion, so erkennt man das bei der graphischen Darstellung immer sehr leicht. Manchmal wird aus einer komplizierteren Funktion durch Logarithmieren eine geradlinige Funktion, wofür S. 80 ein Beispiel gegeben wurde. Manchmal gelingt es, die Beziehung durch Einführung einer neuen Variablen zu vereinfachen. Stellt man y als von Funktion x graphisch dar, so kann das eine komplizierte Kurve geben, während vielleicht die Funktion $y = f(\log x)$ oder $y = f(\sin x)$ geradlinig wird.

Gelingt es dagegen nicht, solche Vereinfachungen zu finden, so müssen wir zu der **allgemeinen Methode** der Darstellung von $y = f(x)$ greifen.

Diese beruht darauf, daß nach S. 200 stets y nach Potenzen von x dargestellt werden kann:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \tag{1}$$

Hier haben nach S. 201 A, B, $C\dots$ folgende Bedeutung:

$$A = f(0)$$
$$B = f'(0)$$
$$C = \frac{f''}{2}(0)$$
$$D = \frac{f'''}{3!}(0)$$

usw.

Um die Koeffizienten A, B, $C\dots$ zu bestimmen, zeichnen wir die experimentell gefundenen Werte von y auf Millimeterpapier als Funktion von x in rechtwinkligen Koordinaten auf, verbinden sämtliche Einzelpunkte durch eine Kurve derart, daß offensichtliche, durch Versuchsfehler entstandene kleine Holprigkeiten der Kurve graphisch ausgeglichen werden. Diese Kurve stellt $y = f(x)$ dar. Nunmehr legen wir in möglichst vielen Punkten dieser Kurve die Tangente und verlängern dieselbe, bis sie die Abszisse schneidet. Wir bestimmen für die einzelnen Tangenten den Winkel, unter dem sie die Abszisse schneiden und notieren die trigonometrische Tangente desselben. Letztere finden wir auch direkt, indem wir die Länge der zugehörigen Ordinate durch die Länge des zugehörigen Abszissenstückes vom Fußpunkt der Ordinate bis zum Schnittpunkt der Tangente dividieren. Die einzelnen so gewonnenen Werte werden nun in einer zweiten Kurve wiederum als Funktion von x dargestellt. Diese Kurve stellt also die Ableitung von y nach x als Funktion von x dar:

$$y' = f'(x).$$

Das Ganze wiederholen wir jetzt und erhalten eine dritte Kurve

$$y'' = f''(x).$$

Und so fahren wir fort, bis wir eine Kurve erhalten, welche von einer geraden Linie nicht mehr merklich abweicht. Der Koeffizient A ist nun gleich derjenigen Ordinate der Kurve $y = f(x)$, welche dem Wert $x = 0$ entspricht. Der Koeffizient B ist gleich derjenigen Ordinate der Kurve $y' = f'(x)$, welche dem Wert $x = 0$ entspricht; der Koeffizient C ist gleich der Hälfte derjenigen Ordinate der Kurve $y'' = f''(x)$, für den $x = 0$ usw. Die so gewonnenen Werte für $A, B, C \ldots$ setzt man in die Gleichung (1) ein.

Nun ist es unter Umständen möglich, in einer solchen Reihe eine Exponential-, Logarithmus-, Sinus- oder Kosinusreihe (S. 202 ff.) oder dgl. zu erkennen. Dann kann man die Reihe durch diese Funktion ersetzen. Gelingt dies nicht, so ist die Reihe selbst der zutreffendste Ausdruck der Funktion. Im allgemeinen wird eine solche Reihe um so wertvoller sein, je stärker sie konvergiert, je mehr also die Koeffizienten der höheren Potenzen von x an Größe zurücktreten hinter den niederen.

Der mathematische Ausdruck der Funktion

$$x = f(t, \Phi, a, H, \vartheta)$$

ist erst dann vollkommen, wenn auf der rechten Gleichung außer den bezeichneten Variablen nur noch konstante Größen vorkommen, also Größen, die von allen diesen Variabeln unabhängig sind. Das zu erreichen, wird in den seltensten Fällen gelingen. Meist wird man sich damit begnügen müssen, daß die vorkommenden Konstanten für ein gewisses, nicht zu geringes Variationsbereich der einzelnen Variabeln wirklich konstant sind.

Oft wird die Auffindung einer solchen Funktion dadurch erleichtert, daß man aus theoretischen Erwägungen oder durch Analogie mit ähnlichen Vorgängen gewisse Grundanschauungen versuchsweise zugrunde legen kann, die man in Form einer Differentialgleichung aussprechen kann. Aus diesem Ansatz kommt man durch Integration zu einer Funktionsgleichung, deren Richtigkeit man durch den Versuch bestätigen oder auch ablehnen kann. Für diese Art des Ansatzes finden sich besonders in dem Kapitel Integralrechnung und Differentialgleichungen genügend Beispiele.

Register.