

P. Stephan

**Die technische Mechanik
des Maschineningenieurs**

Erster Band

Allgemeine Statik

Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungen

Von

Dipl.-Ing. P. Stephan

Regierungs-Baumeister, Professor

Erster Band
Allgemeine Statik

Mit 300 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1921

ISBN 978-3-662-42849-8

ISBN 978-3-662-43132-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-43132-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in
fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1921 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921

Vorwort.

Im Gegensatz zu der Mehrzahl der im letzten Jahrzehnt erschienenen Lehrbücher der technischen Mechanik legt das geplante Werk, von dem hier der erste Band vorliegt, den Hauptwert auf die praktischen Anwendungen.

Die theoretischen Darlegungen sind in einer Reihe vorzüglicher Bücher bis zu jedem Grade der Vertiefung und Breite der Darstellung auseinandergesetzt; es fehlte aber immer noch ein Buch, das nicht nur dem Anfänger eine Einführung in das Gebiet, sondern auch dem in der Praxis stehenden Fachmann einen Überblick über das bisher von anderer Seite Geleistete gibt. Die Unsumme geistiger und praktischer Arbeit, die in den vielen Abhandlungen unserer technischen Zeitschriften vergraben liegt, ist bisher mit Ausnahme einiger weniger Arbeiten fast gänzlich unausgenutzt und unbeachtet geblieben, oft genug nicht einmal in den beteiligten Kreisen des betreffenden Sondergebietes der Technik bekannt geworden. Z. B. wäre der Einsturz der Münchener Maximiliansbrücke vor ihrer Fertigstellung wohl vermieden worden, wenn die in Abschnitt 14 dieses Bandes gebrachten, durchaus nicht neuen Standsicherheitsuntersuchungen bei gewölbten Stützflächen allgemeiner bekannt gewesen wären.

Der Verfasser hat es sich deshalb zur Aufgabe gemacht, in langjähriger Arbeit das Wichtigste und Wesentlichste aus der technischen Zeitschriftenliteratur zu sammeln, und hofft, daß seine Arbeit dadurch nicht nur ein Lehrbuch für den Anfänger, sondern auch ein Handbuch für den werktätigen Ingenieur sein wird. Da es unmöglich ist, in der Jetztzeit eine allgemeine Maschinenlehre wie zur Zeit Weißbachs und Grashofs zu schaffen, so muß eben die Mechanik es übernehmen, in ihren Beispielen alles beizubringen, was eine praktische Maschinenlehre, wie sie unsere Zeit notwendig gebraucht, ersetzen könnte.

Freilich kommt das in dem ersten, nur die Anfangsgründe enthaltenden Bande am wenigsten zum Ausdruck; immerhin dürften unter den mitgeteilten Beispielen manche sein, die weit über das landläufige Beispielmateriale hinausgehen und so dem praktisch arbeitenden Ingenieur wertvollen Anhalt gewähren können. Um eine gewisse Vollständigkeit zu erreichen, ist der Verfasser an einigen Stellen auch über den Stoff hinausgegangen, der ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bewältigt werden kann; der Nachweis der Richtigkeit jener Ausführungen wird an späterer Stelle erbracht werden.

Da das Buch so ausgestaltet werden mußte, daß es gleichzeitig als methodisches Lehrbuch zu benutzen ist, so sind die Anforderungen,

die es an mathematische und technische Vorkenntnisse stellt, sehr gering; es genügen die Grundlehren der Algebra bis zu den Potenzsätzen und die der Geometrie bis zu den Ähnlichkeitssätzen. Die weitergehenden Lehren der Mathematik sind in aller Kürze eingeschoben bzw. vorausgestellt. In englischen Lehrbüchern findet man vielfach diese in Deutschland oft als unwissenschaftlich verschrieene Art der Behandlung, — falls es sich nicht etwa um die Auseinandersetzung der Vektorenrechnung handelt. Sie bietet jedenfalls den Vorteil, daß der Anfänger die gerade gebrauchten Angaben aus anderen Wissensgebieten an der betreffenden Stelle vorfindet, ohne sie erst in anderen Büchern nachschlagen zu müssen oder ohne sie, was erfahrungsgemäß das häufigste ist, unverstanden hinzunehmen. Natürlich können und sollen diese eingestreuten kurzen Abschnitte kein Lehrbuch der Mathematik ersetzen; vielleicht zeigen sie aber, wie manche, auch abstrakte Gebiete der Mathematik in anschaulicher Weise entwickelt und dargestellt werden können. Daß einige Angaben über Zahlenrechnungen und ihre Fehlergrenzen an den Anfang gestellt wurden, erschien dem Verfasser angesichts der Vernachlässigung, die diese Dinge im mathematischen Unterricht der Vorstufe erfahren, eine dringende Notwendigkeit. Denn daß die Genauigkeit technischer Berechnungen infolge der Ungenauigkeit oder Unsicherheit der grundlegenden Angaben keine sehr weitgehende sein kann, ist etwas, was immer wieder betont werden muß und was der erste Abschnitt an einigen landläufigen Beispielen zeigen soll. Rein praktische Unterrichtserfahrungen veranlaßten den Verfasser auch, das Differential- \mathcal{A} durch den Druck so hervorzuheben, daß keine Verwechslungen möglich sind.

Man wird bei einer genaueren Durchsicht des Bandes finden, daß die grundlegenden Tatsachen, Erfahrungen und Versuche mit einer gewissen Breite behandelt werden, daß dagegen die weiteren Ausführungen kürzer und knapper gehalten sind. Es genügt das auch vollständig, denn wenn die Grundlagen hinreichend klar geworden sind, bereiten die weiteren Entwicklungen keine wesentlichen Schwierigkeiten. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die größtmögliche Anschaulichkeit zu erreichen; zu dem Zweck wurde ein reichhaltiges Figurenmateriale neu gezeichnet.

Die folgenden Bände werden enthalten:

- Band II: Die Statik der Maschinenteile,
- Band III: Die Grundzüge der Bewegungslehre und die Dynamik starrer Körper,
- Band IV: Die Hauptsätze der Festigkeitslehre und ihre Anwendungen.

Es ist dafür vorgesorgt, daß diese Bände bis Ostern 1922 erscheinen können.

Altona, im Dezember 1920.

P. Stephan

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die Grundlehren der Statik	1
1. Längen, Flächen, Räume	1
2. Körper und ihre Zustände	9
3. Kräfte	10
4. Kraft, Flächendruck, Längenbelastung	14
II. Die Kräfte und Drehmomente	18
5. Kräfte in derselben Wirkungslinie	18
6. Das Kräftedreieck	20
7. Das ebene Kräfteviereck	38
8. Kräfte im Raum an einem Punkt	42
9. Parallele Kräfte in derselben Ebene	49
10. Kräftepaare	57
11. Das Seileck für beliebig gerichtete Kräfte	75
12. Beliebige im Raum wirkende Kräfte	82
III. Das Gleichgewicht	89
13. Der Schwerpunkt	89
14. Formen des Gleichgewichtes	121
15. Die Standsicherheit	128
16. Das ausgespannte Seil	142
IV. Eingeschobene Grundlehren der Mathematik	
a) Trigonometrie	27
b) Geometrische Beziehungen im Raum	87
c) Differential- und Integralrechnung I	104
d) Differential- und Integralrechnung II	147

Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungen

Von

Dipl.-Ing. P. Stephan

Regierungs-Baumeister, Professor

Zweiter Band

Die Statik der Maschinenteile

Mit 276 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1921

Vorwort.

Der vorliegende Band läßt vielleicht deutlicher als der erste das Ziel erkennen, das der Verfasser vor Augen hatte: Es sollte nicht bloß eine möglichst knappe Darlegung der Grundgesetze der technischen Mechanik gegeben, sondern vor allen Dingen ihre Anwendung auf die einschlägigen Fälle der maschinentechnischen Praxis gezeigt werden.

Das Buch enthält deshalb die Erfahrungszahlen, die zur Zeit vorliegen, in größerer Vollständigkeit als die meisten Hand- und Nachschlagebücher. Man kann den Beispielrechnungen entnehmen, daß die jetzt vorliegenden Zahlenwerte fast immer genügen — am wenigsten vielleicht im letzten Abschnitt —, um sichere Vorausberechnungen zu gestatten. Die Übereinstimmung mit den angezogenen Versuchsergebnissen ist jedenfalls keine gemachte, sondern ergibt sich von selbst aus den anderen Versuchen entstammenden Ausgangswerten.

Wenn auch eine gewisse Vollständigkeit bei der Behandlung des Stoffes angestrebt wurde, so war es natürlich doch unmöglich, sie restlos durchzuführen. Es war auch nicht beabsichtigt, etwa ein Rezeptbuch zu schaffen, das für jeden in der Praxis einmal vorkommenden Fall sofort die Lösung in einem fertig vorgerechneten Beispiel liefert. Wohl aber soll es die Anleitung bieten, auch andere ähnliche oder weitergehende Probleme zu lösen; zu dem Zweck sind die Hinweise auf einschlägige Arbeiten gegeben worden.

Im bewußten Gegensatz zu der gebräuchlichen Darstellung hat der Verfasser den Wirkungsgrad der Getriebe auf rein statischem Wege erklärt und berechnet. Man entgeht dadurch mit Sicherheit einer zu gänzlich verfehlten Ergebnissen führenden mißverständlichen Auffassung der Arbeitsgleichung. Wohin die letztere führen kann, lehrt eine vor einigen Jahren in einer anerkannt guten technischen Zeitschrift veröffentlichte Berechnung des Beispiels 113. Es wird darin zahlenmäßig nachgewiesen, daß, wenn in das Getriebe auf der einen Seite 6 PS eingeleitet werden, auf der anderen Seite 3,3 PS herauskommen und im Getriebe selbst 96,4 PS wirken, und das, nachdem das Perpetuum mobile bereits 70 bzw. 65 Jahre vorher durch Mayer und Helmholtz erledigt worden ist. Diese eigenartige Rechnung wird in mehreren Zuschriften von anderen Seiten noch ausdrücklich als richtig anerkannt! Der Hinweis dürfte wohl ohne weiteres die Zweckmäßigkeit des vom Verfasser gewählten Weges beglaubigen, der im übrigen genau so einfach ist wie die übliche Arbeitsgleichung.

Altona, im Juni 1921.

P. Stephan.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Der Hebel	1
2. Die Hebelwagen	17
3. Die Reibung	28
4. Der Keil	55
5. Die Traglager	62
6. Die Spurlager	76
7. Der Rollwiderstand	84
8. Der Spurkranz	95
9. Die Kugel- und Rollenlager	112
10. Die Räderübersetzung	122
11. Die Reibungsräder	140
12. Die Zahnräder	150
13. Die Schrauben	193
14. Das Schneckenrad	204
15. Die Rolle, Seilsteifigkeit	220
16. Die Bandreibung	230
17. Die Riemen- und Seiltriebe	239
18. Eingeschobene Lehren der Mathematik	
a) Goniometrische Formeln	35
b) Die Kegelschnitte	97
c) Die zyklischen Kurven	150
d) Unbestimmte Formen	209
Sachverzeichnis	265

I. Die Grundlehren der Statik.

Die technische Mechanik ist die Lehre von den Kräften und dem Zusammenhang zwischen den Kräften und den Bewegungen bzw. Formänderungen der Körper, und zwar gibt die Mechanik diese Zusammenhänge nach Maß und Zahl an. Sie benutzt zu dem Zweck alle Hilfsmittel der Mathematik und Rechenkunst unter Zugrundelegung von vereinbarten bzw. zum Teil gesetzlich vorgeschriebenen Maßeinheiten.

1. Längen, Flächen, Räume.

Als Körper bezeichnet die Stereometrie, ein Zweig der Mathematik, der sich ausschließlich mit der Erörterung der räumlichen Abmessungen befaßt, ein beliebiges Raumgebilde von gewisser Form und festgelegten Abmessungen.

Als Raummaß gilt in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Kubikmeter (m^3) bzw. seine Unterteile Kubikdezimeter (dm^3) und Kubikzentimeter (cm^3).

$$\begin{aligned} 1 m^3 &= 1000 dm^3 \\ 1 dm^3 &= 1000 cm^3. \end{aligned}$$

Es ist ebenso wie das Flächenmaß (S. 3) aus dem Längenmaß abgeleitet.

Nur kleine Rauminhalte können unmittelbar, entweder bei Flüssigkeiten mit dem Meßgefäß oder bei festen Körpern mit dem Pyknometer, einer genau ausgemessenen Glasflasche mit Wasserinhalt, und einer Wage bestimmt werden. Sonst findet man die Rauminhalte durch Rechnung nach Aufmessung mehrerer Längen.

Das Längenmaß der technischen Praxis des europäischen Festlandes ist das Meter (m). Es ist der gerade Abstand zweier Striche auf dem im Bureau des Poids et Mesures in Breteuil aufbewahrten Urmaßstab, und zwar bei $0^\circ C$.

$1 m = \frac{1}{40\,000\,905}$ des auf einem Meridian in Höhe des Meeresspiegels gemessenen Umfanges der Erde¹⁾.

Ferner werden benutzt die Unterteile Dezimeter (dm), Zentimeter (cm), Millimeter (mm),

$$\begin{aligned} 1 m &= 10 dm, \\ 1 dm &= 10 cm, \\ 1 cm &= 10 mm, \end{aligned}$$

¹⁾ Wallisch, Astronom. Nachrichten 1915.

und das vielfache Dekameter (Dm) in einzelnen Fällen, sonst für große Längen das Kilometer (km),

$$\begin{aligned} 1 \text{ Dm} &= 10 \text{ m,} \\ 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m.} \end{aligned}$$

Außer geraden Strecken können auch wenig gekrümmte mit einem hinreichend biegsamen Maßstab gemessen werden oder durch Zerlegung in kleine Einzelstrecken, die genau genug als gerade aufgemessen werden können.

Zeichnerisch läßt sich der Kreisbogen $\widehat{AB} = \alpha$ auf seiner Tangente als \overline{AC} mit großer Annäherung auftragen, wenn man \overline{BA} um die Hälfte über A hinaus nach D verlängert und mit \overline{DB} aus D den Kreisbogen \widehat{BC} schlägt (Fig. 1)²⁾. Soll die gerade Strecke \overline{AC} auf einen gegebenen Kreisbogen, den sie in A tangiert, als \widehat{AB} aufgetragen werden (Fig. 2), so wird $\overline{AD} = \frac{1}{4} \overline{AC}$ gemacht und aus D mit \overline{DC} der Kreisbogen \widehat{CB} geschlagen²⁾.

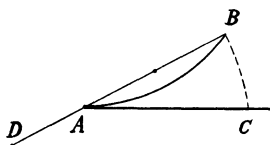


Fig. 1.

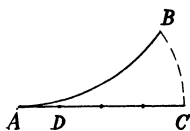


Fig. 2.

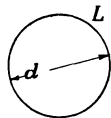


Fig. 3.

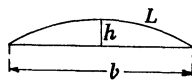


Fig. 4.

Beide Aufzeichnungen können mit dem Spitzenzirkel ohne Ziehen von Hilfslinien ausgeführt werden. Genau ist $\overline{AC} = \alpha - 0,00093 \cdot \alpha^3$, so daß das Verfahren bis zum Viertelkreis ohne wesentlichen Fehler — er beträgt in dem Fall erst 0,6 v. H. — benutzt werden kann.

Die Länge des ganzen Kreisumfanges L wird aus dem Durchmesser d (Fig. 3) durch Multiplikation mit der Zahl $\pi = 3,1416 \approx \frac{22}{7}$ gefunden:

$$L = \pi \cdot d. \quad (1)$$

Die Rechnung mit der häufig bequemeren Zahl $\frac{22}{7}$ ergibt den Endwert nur um das 1,0004fache zu groß.

Die Länge eines beliebigen flachen Bogens (Fig. 4) von der Sehnenlänge b und der Höhe h kann mit guter Annäherung als die eines Parabelbogens berechnet werden:

$$L = b \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^3 - \frac{64}{10} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^4 \right]. \quad (2)$$

Beispiel 1. Die Tabelle der Kreisbögen ergibt für den Halbmesser 1:

Zentriwinkel α	45°	75°	90°
Sehnenlänge b	0,7654	1,2175	1,4142
Bogenhöhe h	0,0761	0,2066	0,2929

²⁾ Verfahren von Rankine; Beweis Duffing, D. p. J. 1917.

Verhältnis $h : b$	0,0994	0,16965	0,2071
Klammerausdruck der Formel 2	1,0257	1,0714	1,1324
Berechnete Länge L	0,7851	1,3044	1,6014
Wirkliche Länge L	0,7854	1,3090	1,5708
Unterschied Δ	-0,0003	-0,0046	-0,0306
Fehler $\Delta : L$	-0,00038	-0,0035	-0,0195

Man kann demnach die Formel (2) auch für Kreisbögen bis zum Zentriwinkel 55° anwenden, ohne einen Fehler von mehr als 0,1 v.H. zu machen, oder bis zum Zentriwinkel 80° mit einem Fehler von etwa 1 v. H. Bei dem Verhältnis $h : b < 1 : 20$ kann das letzte Glied der Klammer immer weggelassen werden.

Zu beachten ist, daß jede praktische Messung mit gewissen Fehlern behaftet ist, die zum größten Teil von der Art der benutzten Meßeinrichtung und der auf die Messung verwendeten Sorgfalt abhängen.

Die Meßfehler f einer größeren Messung können sich addieren zu dem sog. größten Fehler, der gleich der Summe aller einzelnen Fehler ist:

$$f_{max} = \sum f. \tag{3}$$

Die Summierung der jedesmaligen Einzelmessungen liefert den Mittelwert und zugleich den größten Meßfehler. Der wahrscheinliche Fehler ist geringer, da nicht anzunehmen ist, daß bei einer größeren Zahl von Messungen alle Fehler nach derselben Richtung gemacht werden. Es ist

$$f_w = 0,674 \cdot f_{max}. \tag{4}$$

Beispiel 2. Die Aufmessung eines rechteckigen Zimmers mit dem Meterstab ergibt bei Anwendung ziemlicher Sorgfalt etwa

Länge l	Breite b	Höhe h
1000 \pm 1 mm	1000 \pm 1 mm	1000 \pm 1 mm
1000 \pm 1 „	1000 \pm 1 „	1000 \pm 1 „
1000 \pm 1 „	1000 \pm 1 „	1000 \pm 1 „
1000 \pm 1 „	1000 \pm 1 „	254 \pm 1 „
1000 \pm 1 „	307 \pm 1 „	3254 \pm 4 mm
562 \pm 1 „	4307 \pm 5 mm	
5652 \pm 6 mm		

Die wahrscheinlichsten Werte sind somit nach Formel (4)

$$\begin{aligned} \text{Länge } l &= 5,652 \pm 0,004 \text{ m,} \\ \text{Breite } b &= 4,307 \pm 0,003 \text{ „,} \\ \text{Höhe } h &= 3,254 \pm 0,003 \text{ „.} \end{aligned}$$

In der technischen Mechanik sind vielfach die Inhalte von bestimmten Flächen zu ermitteln, was nach den Regeln der Geometrie, eines Zweiges der Mathematik, erfolgt.

Maß der Fläche ist in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Quadratmeter (m^2) bzw. seine Unterteile Quadratdezimeter (dm^2), Quadratcentimeter (cm^2):

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2, \\ 1 \text{ dm}^2 &= 100 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Es ist der Flächeninhalt des Rechteckes (Fig. 5):

$$F = l \cdot b, \tag{5}$$

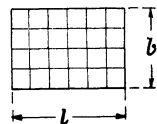


Fig. 5.

der Flächeninhalt des Parallelogramms (Fig. 6):

$$F = l \cdot b, \quad (5)$$

der Flächeninhalt des Dreiecks (Fig. 7):

$$F = \frac{1}{2} \cdot l \cdot b, \quad (6)$$

Geradlinig begrenzte Vielecke werden in Rechtecke oder Parallelogramme oder Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte einzeln berechnet und dann addiert werden.

So ergibt sich für das Trapez (Fig. 8) durch zweimalige Anwendung von Formel (6)

$$F = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b) \quad (7)$$

und für den Kreisinhalt durch vielfache Anwendung von Formel (6) gemäß Fig. 9

$$F = \sum \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta L \cdot r \right).$$

Aus der Summe können die allen Gliedern gemeinsamen unveränderlichen Faktoren herausgezogen werden:

$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sum (\Delta L).$$

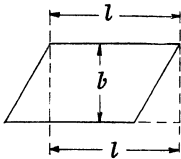


Fig. 6.

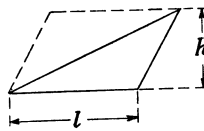


Fig. 7.

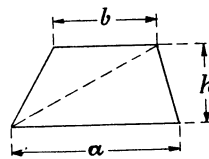


Fig. 8.

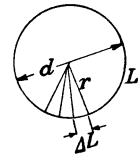


Fig. 9.

Nun ist nach Formel (1)

$$\sum (\Delta L) = \pi \cdot d$$

und so mit $r = \frac{1}{2} d$

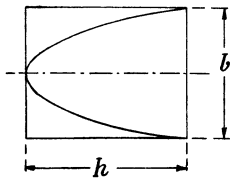


Fig. 10.

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 0,7854 \cdot d^2 \approx \frac{11}{14} \cdot d^2. \quad (8)$$

Der Flächeninhalt eines Parabelabschnittes (Fig. 10) ist

$$F = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \quad (\text{Beweis S. 107}). \quad (9)$$

Der Inhalt eines flachen Bogens (Fig. 4) wird ebenfalls mit sehr guter Annäherung als der eines Parabelabschnittes berechnet.

Um den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche zu berechnen, teilt man ihre Länge l in n gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallelen, deren äußerste die Fläche genau einschließen (gewöhnlich genügt die 10-Teilung, die mit Hilfe eines verschiebbaren Parallelen-gitters ausgeführt werden kann). Jede Einzelfläche kann dann meistens genau genug als Trapez aufgefaßt werden, und man bemerkt, daß bei

fortlaufender Anwendung der Formel (7) alle Höhen doppelt vorkommen mit Ausnahme der ersten und letzten, deren Längen schätzungsweise so bestimmt werden, daß die anschließende erste bzw. letzte krummlinige Fläche durch ein von ihnen begrenztes Trapez ersetzt wird (Fig. 11). Man erhält so die Trapezregel:

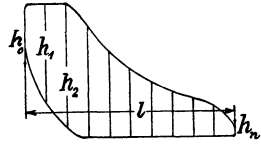


Fig. 11.

$$F = \frac{l}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \dots + \frac{1}{2} h_n \right). \quad (10)$$

Man kann die Höhen einzeln aufmessen oder gleich hintereinander (die erste und letzte nur zur Hälfte) auf einer beliebig gezogenen Geraden abstecken, so daß für die Rechnung nur zwei Längenmessungen nötig werden.

Man erhält nur dann richtige Werte, wenn die einzelnen Teilstücke der Flächenbegrenzung sich von geraden Linien nicht wesentlich unterscheiden. Anderenfalls ist an der betreffenden Stelle in der Mitte zwischen zwei Höhen eine weitere einzulegen, von der in die Formel (10) nur die Hälfte einzusetzen ist, während die beiden benachbarten Höhen zu $\frac{3}{4}$ in Anrechnung kommen. Oder es ist die Simpsonsche Regel zu benutzen, die zwei aufeinanderfolgende gekrümmte Teilstücke der Flächenbegrenzung als einen Parabelbogen auffaßt:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{n} \cdot (h_0 + 4 h_1 + 2 h_2 + 4 h_3 + 2 h_4 + \dots + h_n), \quad (11)$$

worin die Anzahl n der Teilungen eine gerade Zahl sein muß³⁾.

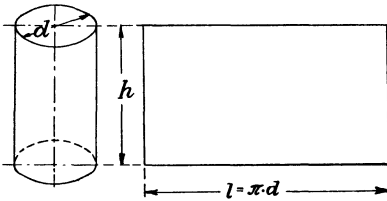


Fig. 12.

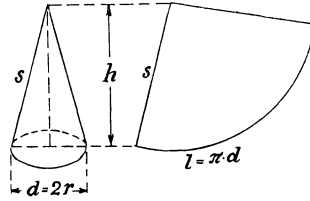


Fig. 13.

Der Inhalt der Mantelfläche eines geraden Kreiszyinders ist nach Fig. 12

$$F = \pi \cdot d \cdot h, \quad (12)$$

derjenige der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels nach Fig. 13

$$F = \pi \cdot d \cdot s. \quad (13)$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2} d \right)^2 \quad \text{oder} \quad s = h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h} \right)^2},$$

³⁾ Beweis siehe z. B. Duffing, Leitfaden der Kurvenlehre. 1911.

so daß man auch setzen kann:

$$F = \pi \cdot d \cdot h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2}. \quad (14)$$

Der Inhalt der Kugeloberfläche beträgt (Beweis S. 118)

$$F = \pi \cdot d^2. \quad (15)$$

Allgemein ist zu beachten, daß ein richtiger Endwert nur erhalten wird, wenn die verschiedenen Längen bei der Berechnung in demselben Maß eingesetzt werden.

Beispiel 3. Zu berechnen ist die Grundfläche des in Beispiel 2 aufgemessenen rechteckigen Zimmers.

Nach Formel (5) ist

$$\begin{aligned} F &= l \cdot b = (5,652 \pm 0,004) \cdot (4,307 \pm 0,003) \text{ m}^2 \\ &+ 5,652 \cdot 4,307 = + 24,343164 \text{ m}^2 \\ &\pm 5,652 \cdot 0,003 = \pm 0,016956 \text{ ,,} \\ &\pm 0,004 \cdot 4,307 = \pm 0,017228 \text{ ,,} \\ &+ 0,004 \cdot 0,003 = + 0,000012 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist $24,34 \pm 0,03 \text{ m}^2$.

Die „genaue“ Zahlenrechnung ist demnach verkehrt; im allgemeinen genügt für die technische Praxis die Genauigkeit des 25 cm langen Rechenstabes.

Gegenüber den kleinen Größen erster Ordnung (in der zweiten und dritten Zeile der Ausrechnung) sind kleine Größen zweiter Ordnung (in der vierten Zeile) immer zu vernachlässigen. Auch die Rechnung mit kleinen Größen erster Ordnung kann gewöhnlich überschlägig geschehen.

Hat der Wert x den Fehler f_1 und der Wert y den Fehler f_2 , so hat das Produkt $x \cdot y$ den Fehler

$$f = \pm (x \cdot f_2 + y \cdot f_1). \quad (16)$$

Beispiel 4. Zu berechnen sind die beiden Seitenflächen des in Beispiel 2 aufgemessenen Zimmers.

Nach den Formeln (5) und (16) ist

$$\begin{aligned} \text{Fläche 2: } F &= l \cdot h = (5,652 \pm 0,004) \cdot (3,254 \pm 0,003) \\ &= 18,39 \pm (0,017 + 0,014) \\ &= 18,39 \pm 0,03 \text{ m}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche 3: } F &= b \cdot h = (4,307 \pm 0,003) \cdot (3,254 \pm 0,003) \\ &= 14,01 \pm (0,013 + 0,010) \\ &= 14,01 \pm 0,02 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Beispiel 5. Der Zylinder einer Dampfmaschine hat — im Mittel aus sechs Messungen bestimmt — den Durchmesser $D = 420,5 \pm 0,1 \text{ mm}$, die von der einen Seite des Kolbens ausgehende Kolbenstange hat den Durchmesser $d = 84,7 \pm 0,1 \text{ mm}$. Zu berechnen ist der mittlere Inhalt beider Kolbenflächen (Fig. 75).

Es ist nach Gleichung (5)

$$\text{für die eine Kolbenseite: } F_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2,$$

$$\text{für die andere Kolbenseite: } F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2.$$

Damit wird der mittlere Flächeninhalt

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2) = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - \frac{1}{2} \cdot d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{D^2}\right).$$

Man berechnet zuerst nach der Formel

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764. \quad (17)$$

Zur Ermittlung des Wertes von $42,05^2$ benutzt man die Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad (18)$$

in der Form $a^2 = b^2 + (a + b) \cdot (a - b)$:

$$42,05^2 = 42^2 + 84,05 \cdot 0,05 = 1764 + 4,2 = 1768,2 \text{ cm}^2.$$

Der Fehler beträgt nach Formel (16) mit $x = y = 42,05 \text{ cm}^2$ und $f_1 = f_2 = 0,01 \text{ cm}^2$

$$f = 2 \cdot 42,05 \cdot 0,01 \approx 8,4 \text{ cm}^2.$$

Entsprechend erhält man

$$8,47^2 = (8,5 - 0,03)^2 = 72,25 - 0,51 = 71,74 \text{ cm}^2$$

mit dem Fehler $2 \cdot 8,5 \cdot 0,01 = 0,17 \text{ cm}^2$.

Damit folgt schließlich

$$F_m = \frac{\pi}{4} (1768,2 \pm 8,4 - 35,9 \pm 0,1)$$

$$= 0,7854 \cdot (1732,3 \pm 8,5)$$

$$= 1353 \pm 7 \text{ cm}^2.$$

Wenn die Fehlerrechnung der Einfachheit halber ganz beiseite gelassen wird, ist die letzte Stelle der in ganzen Quadratcentimetern angegebenen Fläche bereits bei genauer Aufmessung bis auf 0,1 mm schon völlig unsicher.

Die einseitige Kolbenstange verringert unter normalen Verhältnissen die mittlere Fläche um rund 2 v. H.

Beispiel 6. Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels vom Grundkreisdurchmesser $d = 24,3 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 16,2 \text{ cm}$ ist zu berechnen.

Formel (14) ergibt

$$F = \pi \cdot d \cdot h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} = \pi \cdot 24,3 \cdot 16,2 \cdot \sqrt{1 + 0,75^2} \text{ cm}^2.$$

Zur Ausrechnung der Wurzel kann hier die Näherungsgleichung benutzt werden

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0,960 \cdot x + 0,368 \cdot y, \quad (19)$$

worin $x > y$ sein muß. Das Ergebnis ist

$$\begin{array}{llll} \text{um } 6,1 \text{ v. H.} & \text{zu klein} & \text{für } & y = x, \\ \text{,, } 4,0 & \text{,, } & \text{,, } & y = 0,9 x, \\ \text{,, } 1,9 & \text{,, } & \text{,, } & y = 0,8 x, \\ \text{,, } 0,3 & \text{,, } & \text{,, } & y = 0,7 x, \\ \text{,, } 1,3 & \text{,, } & \text{groß} & \text{,, } y = 0,6 x. \end{array}$$

Von $y = 0,6 x$ an rechnet man genauer mit der einfacheren Formel

$$\sqrt{1 \pm z} = 1 \pm \frac{1}{2} \cdot z; \quad (20)$$

das Ergebnis ist

$$\begin{array}{llll} \text{um } 0,9 \text{ v. H.} & \text{zu groß} & \text{für } & z = 0,3, \\ \text{,, } 0,4 & \text{,, } & \text{,, } & z = 0,2, \\ \text{,, } 0,1 & \text{,, } & \text{,, } & z = 0,1. \end{array}$$

Demnach wird

$$F = \pi \cdot 23,4 \cdot 16,2 \cdot (0,960 + 0,368 \frac{3}{4}) \cdot 1,011 \text{ cm}^2,$$

worin der letzte Faktor den Fehler der Wurzelberechnung ausgleicht.

$$F = 1488 \text{ cm}^2.$$

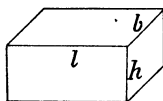


Fig. 14.

Für die Berechnung einfacher Rauminhalte gilt: beim rechteckigen Quader nach Fig. 14

$$V = l \cdot b \cdot h. \quad (21)$$

Hat l den Meßfehler f_1 , b den Meßfehler f_2 , h den Meßfehler f_3 , so ergibt das Produkt

$$V = (l \pm f_1) \cdot (b \pm f_2) \cdot (h \pm f_3)$$

mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

$$V = l \cdot b \cdot h \pm (l \cdot b \cdot f_3 + l \cdot h \cdot f_2 + b \cdot h \cdot f_1). \quad (22)$$

Beispiel 7. Der Rauminhalt des in Beispiel 2 aufgemessenen Zimmers ist zu berechnen.

Man erhält nach Formel (21)

$$V = 5,652 \cdot 4,307 \cdot 3,254 = 79,20 \text{ m}^3$$

und gemäß Formel (22) mit den Angaben des Beispiels 3

$$\left. \begin{array}{l} 24,34 \cdot 0,003 = 0,073 \text{ m}^3 \\ 18,39 \cdot 0,003 = 0,055 \text{ „} \\ 14,01 \cdot 0,004 = 0,056 \text{ „} \end{array} \right\} \pm 0,184 \text{ m}^3.$$

Der wahrscheinliche Fehler des Rauminhaltes beträgt trotz recht genauer Aufmessung doch etwa $0,18 \text{ m}^3$ oder $0,23$ v. H. des Mittelwertes, so daß die Angabe von mehr als einer Dezimalstelle eine gar nicht vorhandene Genauigkeit vortäuscht.

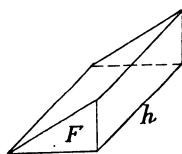


Fig. 15.

Für ein beliebiges Prisma mit parallelen Endflächen z. B. nach Fig. 15 gilt

$$V = F \cdot h, \quad (23)$$

also für den geraden Kreiszylinder mit Formel (8)

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h. \quad (24)$$

Ein Prisma nach Fig. 15 kann durch zwei ebene, durch die Ecken gelegte Schnitte in drei Pyramiden von gleichem Rauminhalt zerlegt werden. Es gilt somit für jede Pyramide von der Grundfläche F und der Höhe h

$$V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot h. \quad (25)$$

Der Rauminhalt der Kugel vom Durchmesser d ist (Beweis S. 119)

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \quad (26)$$

Anders gestaltete Räume werden in einfachere Teile, für die die Formeln (21) bis (26) zutreffen, zerlegt (Anwendung z. B. S. 120).

Beispiel 8. Der Hub der Dampfmaschine, deren mittlere Kolbenfläche in Beispiel 5 berechnet wurde, sei aufgemessen zu $h = 751 \pm 0,3 \text{ mm}$. Anzugeben ist der mittlere Hubraum des Zylinders.

Man erhält nach Formel (23)

$$\begin{aligned} V &= (1353 \pm 7) \cdot (75,1 \pm 0,03) \text{ cm}^3 \\ &= 13,53 \cdot 7,51 \pm (7,51 \cdot 0,07 + 13,53 \cdot 0,003) \text{ dm}^3 \\ &= 101,61 \pm (0,53 + 0,04) \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Der Fehler der Hubmessung ist von verschwindend geringer Bedeutung, also

$$V = 101,6 \pm 0,6 \text{ dm}^3.$$

2. Körper und ihre Zustände.

Die in Abschnitt 1 gegebene Erklärung des Begriffes Körper im Sinne der Stereometrie ist für die Mechanik nicht ausreichend. Denn der Lichtkegel eines Scheinwerfers, der nur ein besonders herausgehobener, bei jeder Bewegung des Spiegels wechselnder Teil des allgemeinen Luftraumes ist und dessen Ende sich unbestimmt verliert, kann im Sinne der Mechanik nicht als Körper angesehen werden. Für sie ist der stoffliche Inhalt des Körpers, der ihm oder seiner Art eigentümlich ist, von mehr Bedeutung als die häufig nebensächliche äußere Form; denn er allein, die sogenannte Masse, ist der Träger aller physikalischen Eigenschaften des Körpers. Die Mechanik erklärt demnach: Körper ist ein allseitig geschlossenes Raumgebilde, das durchweg mit Masse angefüllt ist, die natürlich je nach Art des Körpers sehr verschieden zusammengesetzt sein kann.

Zur vollständigen Erklärung aller in der reinen Mechanik untersuchten Erscheinungen genügt es, wenn über die Verteilung dieser Masse im Körper die einfache, durch den groben Augenschein immer bestätigte Annahme gemacht wird, daß sie den vom Körper eingenommenen Raum stetig ausfüllt. Poröse Körper enthalten hiernach mindestens zwei verschiedene Massen, die eigentliche Körpersubstanz und die die Poren ausfüllende Luft, Flüssigkeit, Bindsesubstanz und dgl. Abgesehen wird also in der Mechanik von dem Aufbau der Körper aus Molekülen, Atomen, Elektronen, die voneinander durch verhältnismäßig große, wenn auch für unsere Sinneswahrnehmung äußerst kleine Zwischenräume getrennt sind.

Der Zustand der Masse eines Körpers kann sehr verschieden beschrieben werden, z. B. durch Angabe der Temperatur, der elektrischen Ladung usw.; in der Mechanik ist in erster Linie der Aggregatzustand von Belang, und manche für die allgemeine Beschreibung wichtigen Zustände, z. B. die elektrische Ladung, werden gar nicht oder nur nebenhin beachtet. Man unterscheidet nun die drei Hauptaggregatzustände fest, flüssig, gasförmig, und entsprechend wird das weite Gebiet der Mechanik eingeteilt in die Mechanik der festen, der flüssigen, der gasförmigen Körper. Außerdem gibt es noch die beiden Übergänge des teigförmigen und des dampfförmigen Zustandes. Der erstere hat in der Mechanik nur geringes Interesse, mehr Bedeutung kommt den Schüttungen körniger Einzelkörper zu, die in ihrem Verhalten eine Zwischenstellung zwischen den festen und den flüssigen Körpern einnehmen. Von besonderem Wert ist die Mechanik der Dämpfe infolge

der umfassenden Anwendung in den Dampfmaschinen, den Kühlmaschinen und im Haushalt der Natur.

Die festen Körper werden ihrerseits wieder unterschieden in starre und nachgiebige. Starre Körper sind solche, die unter dem Einfluß äußerer Kräfte (Abschnitt 3) ihre Form nicht ändern, während nachgiebige unter dem Einfluß von Kräften eine Formänderung erleiden.

Der Zusatz „unter dem Einfluß äußerer Kräfte“ ist notwendig, weil die Formänderung durch Raumvergrößerung oder -verkleinerung bei der Erhöhung bzw. Erniedrigung der Temperatur des Körpers kein Unterscheidungsmerkmal im Sinne der Mechanik bildet. Diese Formänderung infolge Änderung des Temperaturzustandes kommt ja allen Arten von Körpern zu, wenn auch in verschiedenem Maße.

Die tägliche Erfahrung lehrt sogleich, daß es vollkommen starre Körper nicht gibt; vielmehr erleiden alle, auch die festesten Körper, eine mehr oder weniger große Formänderung, sobald die betreffenden Kräfte hinreichend groß sind. Jedoch können die in der technischen Praxis hauptsächlich zu Konstruktionsteilen verwendeten Körper in erster Annäherung als starr angesehen werden, da man naturgemäß im allgemeinen darauf sieht, daß die etwaige Formänderung mindestens klein ausfällt.

Die nachgiebigen Körper sind wieder elastisch oder unelastisch. Elastische Körper sind solche, die eine unter der Einwirkung von äußeren Kräften angenommene Formänderung nach Aufhören der Kraftwirkung wieder vollständig rückgängig machen, während die unelastischen die einmal erlittene Formänderung beibehalten. Mit Rücksicht auf die erstrebte Dauerhaftigkeit der Konstruktion ist das Interesse an den unelastischen Körpern verhältnismäßig gering; und ihr Verhalten wird im Anschluß an das der elastischen untersucht.

Eine weitere wichtige Unterscheidung des Zustandes eines Körpers ergibt die Berücksichtigung der Zeit. Wenn während der Beobachtungszeit der Körper sowohl als Ganzes als auch in allen einzelnen Teilen, z. B. eine Dampfmaschine, die Lage zu der Umgebung nicht ändert, so sagt man, der Körper befindet sich in Ruhe, anderenfalls befindet er sich in Bewegung. Man erkennt, daß man zwei Bewegungen zu unterscheiden hat, die fortschreitende, etwa der Lokomotive oder des Lokomotivkreuzkopfes, und die Drehbewegung, z. B. der Räder. Selbstverständlich können beide Bewegungen auch gleichzeitig auftreten.

3. Kräfte.

Die Mechanik beruht, wie jede Naturwissenschaft, auf den Erfahrungen, die an den Erscheinungen in der Natur und Technik gewonnen sind, und außerdem auf Versuchen, die zur Erforschung bestimmter Einzelheiten mit entsprechend vorgearbeiteten Einrichtungen angestellt werden.

Man greift deshalb zur Erklärung des Begriffes Kraft auch auf die allgemeine Erfahrung zurück, die besagt, daß Kraft eine durch Muskelanstrengung ausgeübte Einwirkung ist, die sich entweder als Zug oder Druck kenntlich macht. Diese Erklärung trifft aber nur die Körper-

kräfte lebender Wesen und nicht die in den Baukonstruktionen, Maschinen usw. auftretenden Kräfte. Da es aber der Zweck aller Tragkonstruktionen und Maschinen ist, die Körperkräfte lebender Wesen durch solche zu ersetzen, die das tote, wenn auch oft bewegte Material häufig in bedeutend vergrößertem Maße zu übertragen bzw. auszuüben vermag, so kann man erklären, um einen möglichst sinnfälligen, allgemein gültigen Ausdruck zu erhalten: Kraft ist ein durch Muskelanstrengung bewirkter oder sie ersetzender Zug oder Druck⁴⁾.

Im übrigen vermeidet die Mechanik, Untersuchungen anzustellen über das Entstehen der Kräfte, mögen es nun Muskel-, Gewichts-, magnetische oder sonstige Kräfte sein. Dies ist vielmehr eine Aufgabe der Physik, und die Mechanik nimmt die Kräfte, ohne auf ihre Herkunft einzugehen, einfach als gegeben hin. Am einfachsten lassen sie sich für den Anfang als Muskel- oder Gewichtskräfte vorstellen.

An einer gegebenen Kraft ist zu unterscheiden ihre Größe, die Wirkungslinie, die Richtung in der Wirkungslinie und die Angriffsstelle.

Ein Maß der Größe wird erhalten durch Vergleich der Wirkung der untersuchten Kraft mit derjenigen einer bekannten Kraft auf den gleichen Körper. Muskel- und Schlagkräfte können z. B. verglichen werden durch die von ihnen hervorgerufene Bewegung eines Körpers, etwa eines Steines oder Balles; diejenige Kraft gilt als die größere, die den gleichen Körper weiter bewegt. Dieser Vergleich ist aber häufig nur ein überschlägiger; ruhende Kräfte, die man genauer messen will, beurteilt man deshalb an ihren Einwirkungen auf Federn oder dgl.

Ein technisches Instrument zum zahlenmäßigen Vergleich von Zugkräften ist das Dynamometer. Es besteht aus zwei kräftigen Blattfedern nach Fig. 16, deren Verlängerung stark vergrößert auf einen Zeiger übertragen wird. Für kleinere Kräfte benutzt man oft die sog. Küchenwaage, die aus zwei parallelen Schraubenfedern besteht, deren Ausdehnung ebenfalls vergrößert auf einen Zeiger übertragen wird. Geeicht werden die Dynamometer mit Hilfe von Gewichten.

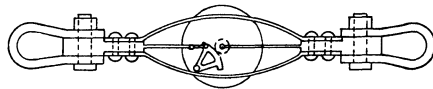


Fig. 16.

Die Gewichts- und Krafteinheit ist in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Kilogramm (kg) bzw. die Tonne (t) oder bisweilen das Gramm (g).

$$\begin{aligned} 1 \text{ t} &= 1000 \text{ kg,} \\ 1 \text{ g} &= 0,001 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Das Kilogramm ist das Gewicht des in Breteuil aufbewahrten Kilogrammstückes, das Gewicht von $1,00004 \text{ dm}^3$ chemisch reinen Wassers bei 4° Celsius, gemessen auf dem $45.$ Breitengrad in Höhe des Meeresspiegels und umgerechnet auf den luftleeren Raum.

Der erste Zusatz ist erforderlich, weil sich der eingenommene Raum einer abgemessenen Menge Wasser wie der eines jeden Körpers mit

⁴⁾ Galilei, *Scienza della meccanica*, 1592; Wehage, *Z. d. V. d. I.* 1905; Schreiber, *D. p. J.* 1906.

der Temperatur ändert; bei 4°C nimmt eine bestimmte Wassermenge den kleinsten Raum ein. Die beiden folgenden Zusätze sind nötig, weil sich das Gewicht derselben Masse mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt ändert, der letzte, weil die umgebende Luft das Gewicht einer bestimmten Masse etwas verringert.

Die Wirkungslinie einer Kraft, das ist die Linie, in der ihre Wirkung erfolgt, kann unmittelbar mit einem durch Muskelanstrengung oder durch ein Gewicht gespannten Faden zur Anschauung gebracht werden (Fig. 17). Sie ist demnach eine Gerade.

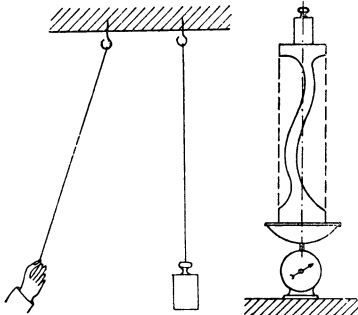


Fig. 17.

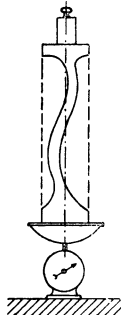


Fig. 18.

Die in Fig. 23 dargestellte Ausnahme, daß ein schweres Seil in einer Kurve durchhängt, ist nur scheinbar. Die genaue Überlegung (Abschnitt 16) lehrt, daß die Abweichung des Seiles von der geraden Linie nur durch sein Gewicht, also durch eine zweite, zur ersten hinzutretende Kraft entsteht.

Dieselbe geradlinige Form der Wirkungslinie findet sich genau so bei Druckkräften. Das Gewicht in Fig. 18 überträgt sich durch einen geraden (in der Skizze gestrichelten) Holzpfosten auf die Unterlage und kann dort am Zeiger der Federwaage abgelesen werden.

Daran wird nichts geändert, wenn der Pfosten etwa nach den ausgezogenen Linien ausgeschnitten wird. Die Wirkungslinie ist immer eine gerade, gleichgültig, welche Form das Übertragungsglied hat.

Die Länge der Schnur oder des Seiles in Fig. 17 oder der Druckstange in Fig. 18 ist ohne Einfluß auf die Kraftwirkung des betreffenden Gewichtes auf die Befestigungsstelle bzw. Unterlage, und man hat z. B. bei Seilschwebbahnen Seiltriebe von 10 km Länge ohne Unterbrechung oder Zwischenübertragung ausgeführt. Die Angriffsstelle einer Kraft kann also in ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne daß die Kraftwirkung auf die Unterstüzung oder dgl. irgendeine Änderung erleidet.

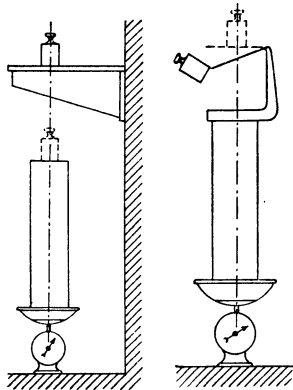


Fig. 19.

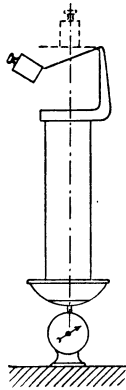


Fig. 20.

Dieser Erfahrungssatz bedarf jedoch einer Einschränkung, denn es ist klar, daß bei der Verschiebung des Gewichtes in der Wirkungslinie nach oben, wie es z. B. Fig. 19 darstellt, die Wirkung aufgehoben wird, wenn das Gewicht auf der Wandkonsole steht. Das gleiche gilt, wenn das Gewicht auf einen Bügel gesetzt wird, dessen einer Arm so nachgiebig ist, daß es weggleitet (Fig. 20), oder wenn es auf einen Zwischenkörper gesetzt wird, der eine selbständige Bewegung ausführt

(Fig. 21). Der Satz gilt also nur, wenn die neue Angriffsstelle mit der alten unveränderlich verbunden ist.

In der Wirkungslinie kann die Kraft entweder die eine oder die andere Richtung haben. Gewöhnlich gilt die Vereinbarung, daß in der lotrechten Wirkungslinie die nach dem Mittelpunkt der Erde hin gerichtete Kraft als positiv gerechnet wird; dann ist eine aufwärts gerichtete eine negative Kraft. In der wagerechten Linie wird häufig die vom Beschauer aus nach rechts gehende Richtung als die positive bezeichnet; die nach links gehende ist dann die negative.

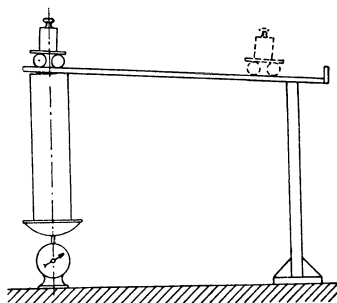


Fig. 21.

Eine Kraft kann auf einen Körper nur von einem anderen Körper ausgeübt werden, was meistens durch unmittelbare Berührung geschieht, aber auch durch Fernübertragung wie bei den magnetischen, elektrischen, Gravitationskräften erfolgen kann. Da beide Körper nur in ihrer Bezeichnung als erster oder zweiter unterschieden werden, tatsächlich aber einander völlig gleichwertig sind, so muß an der gegenseitigen Einwirkungsstelle Körper *A*, der dort auf Körper *B* eine Kraft ausübt, auch eine Kraftwirkung vom Körper *B* aus erleiden von gleicher Angriffsstelle, Wirkungslinie und Größe, nur sind die Richtungen beider Kräfte entgegengesetzt⁵⁾.

Beispiel 9—14. Ein Körper, der sich mit einem gewissen Druck auf eine Unterlage stützt, erfährt seinerseits in der Berührungsfläche den gleichen Gegendruck, was besonders bei nachgiebigen Körpern deutlich in Erscheinung tritt (Fig. 22).

Ein Schleppdampfer zieht mit einer gewissen, mit dem Dynamometer meßbaren Kraft an dem geschleppten Kahn; umgekehrt hält dieser den Schleppdampfer mit der gleichen Kraft zurück (Fig. 23). Wenn etwa das Verbindungsseil reißt, schießt der dann nicht mehr zurückgehaltene Schleppdampfer mit großer Geschwindigkeit voran.

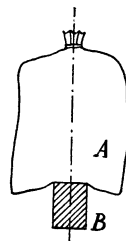


Fig. 22.

Bei einem Schuß wird durch die Pulvergase nicht nur auf das Geschos eine Kraft ausgeübt, sondern auch eine ebenso große auf das Gewehr oder Geschütz, die sich als Rückschlag bemerkbar macht.

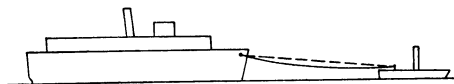


Fig. 23.

Ein Magnet zieht ein frei bewegliches Stahlstück auf einige Entfernung mit einer bestimmten, leicht meßbaren Kraft an. Genau die gleiche Kraft übt aber auch das Stahlstück auf den Magneten aus, wenn man es festhält und der Magnet etwa auf einer Korkunterlage im Wasser schwimmt.

Wird der Schienenkreis einer Spielzeugeisenbahn mit einer leichten Unterlage an mehreren Schnüren aufgehängt, die nach einem an der Zimmerdecke befestigten dünnen Draht zusammenlaufen, so treiben die zwischen den Rädern und den Schienen wirkenden Kräfte sowohl die Lokomotive vorwärts als auch die Schienenbahn in entgegengesetzter Richtung zurück.

⁵⁾ Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1687.

Die Erde zieht jeden Körper mit einer gewissen Kraft an, z. B. auch den Mond. Sie erfährt aber von dem betreffenden Körper dieselbe Gegenkraft, die sich beim Mond durch die Einwirkung auf das Meerwasser als Ebbe und Flut kenntlich macht.

Man entnimmt den vorstehenden Beispielen noch, daß eine Kraft das Bestreben hat, dem angegriffenen Körper eine Bewegung zu erteilen, falls er vorher ruhte, oder die Bewegung eines bewegten Körpers zu ändern, oder schließlich am angegriffenen Körper, wenn er hinreichend nachgiebig ist, eine Formänderung herbeizuführen. Tritt außer der etwaigen Formänderung keine Bewegung oder Bewegungsänderung ein, so kann man schließen, daß noch andere Kräfte an dem Körper angreifen, die der ersten das Gleichgewicht halten.

Die Lehre vom Gleichgewicht heißt die Statik; ihr ist der weitaus größere Teil dieser Hefte gewidmet. Die Lehre vom Zusammenhang der Bewegungsänderungen mit den Kräften ist die Dynamik, deren Behandlung sich mit Hilfe des d'Alembertschen Satzes auf die Statik zurückführen läßt.

Vielfach werden die Darlegungen dieses Abschnittes umgekehrt vorgetragen, indem zuerst festgesetzt wird: Kraft ist die Ursache einer Bewegung oder Bewegungsänderung. Stillschweigend wird hierbei die unter dem Einfluß einer Kraft häufig bemerkbare Formänderung, z. B. die Zusammendrückung einer eingeschlossenen Flüssigkeit durch eine große Druckkraft, als eine Bewegung der entsprechenden Teile aufgefaßt. Die gleiche Formänderung der Flüssigkeit wird aber auch durch eine Temperaturniedrigung erzielt, und man müßte dann folgerichtig die Temperaturänderung auch als eine Kraft ansehen, was jedoch aus anderen Gründen unzulässig ist. Die vorstehende Erklärung des Begriffes Kraft hat nur dann Berechtigung, wenn man sich von vornherein ausschließlich mit der Dynamik befaßt.

Ändert eine Kraft während der Dauer der Beobachtung ihre Größe oder Wirkungslinie oder Richtung, wie z. B. die Kolbenkraft einer Dampf- oder Gasmaschine, so ist sie veränderlich; anderenfalls wird sie als gleichbleibend oder konstant bezeichnet.

4. Kraft, Flächendruck, Längenbelastung.

Zu beachten ist, daß der deutsche Sprachgebrauch mit dem Wort „Druck“ zweierlei bezeichnet: Einmal die am Anfang des Abschnittes 3 erörterte, in Kilogramm gemessene Druckkraft und weiter den Flächendruck zwischen festen Körpern, den Flüssigkeitsdruck einer Flüssigkeit oder den Gasdruck eines gasförmigen Körpers, die sich ebenfalls als Flächendruck an einer festen Wandung oder dgl. bemerklich machen. Der Flächendruck wird angegeben in Kilogramm auf ein Quadratcentimeter (kg/cm^2), bisweilen auch Kilogramm auf ein Quadratmeter (kg/m^2); er wird also erhalten, indem man die Druckkraft P durch die Druckfläche F dividiert:

$$p = \frac{P}{F}. \quad (27)$$

Umgekehrt ergibt sich die von einem bestimmten Flüssigkeits- oder Gasdruck p auf eine Fläche F ausgeübte Kraft zu

$$P = p \cdot F. \quad (27a)$$

Häufig wird zur Abkürzung für Kilogramm auf ein Quadratmeter gesetzt Atmosphäre (at).

Der mittlere Druck der Erde umgebenden Luftatmosphäre beträgt in Höhe des Meeresspiegels 1,033 at.

Beispiel 15. Der Kreuzkopf einer Dampfmaschine liege etwa in der Mitte des Hubes mit der Kraft $P = 2500$ kg auf seiner Gleitbahn, die rechteckige Fläche des Gleitschuhes habe die Abmessungen $b = 20$ cm und $l = 35$ cm. Zu ermitteln ist der Flächendruck p zwischen Gleitschuh und Gleitbahn.

Man erhält aus Formel (27)

$$p = \frac{2500}{20 \cdot 35} = 3,58 \text{ at.}$$

Um die Abnutzung so klein wie möglich zu halten, beträgt der größte Flächendruck je nach Bauart der Maschine 3 bis 5 at.

Beispiel 16. Auf den in Beispiel 5 berechneten Kolben der Dampfmaschine wirke auf der Deckelseite der Kesseldruck $p_1 = 10$ at vermindert um den Druckverlust in der Zuleitung 0,5 at, auf der Kurbelseite der Gegendruck des Kondensators $p_2 = 0,1$ at. Anzugeben sind die entsprechenden beiden Druckkräfte.

Nach Beispiel 5 ist die Fläche des Kolbens auf der Deckelseite

$$F_1 = 1388 \pm 7 \text{ cm}^2, \text{ also nach der Formel (27a) die Kraft} \\ P_1 = (1388 \pm 7) \cdot 9,5 = 13\,186 \pm 67 \text{ kg,}$$

so daß einzusetzen ist $P_1 \approx 13\,250$ kg, wenn es sich um die Angabe des größten Wertes handelt.

Entsprechend ergibt Beispiel 5 als Kolbenfläche auf der Kurbelseite $F_2 = 1332 \pm 7$ cm, mithin beträgt die Gegenkraft

$$P_2 = (1332 \pm 7) \cdot 0,1 = 133 \pm 1 \text{ kg,}$$

so daß mit $P_2 \approx 130$ kg zu rechnen ist.

Beim Rückgang des Kolbens wirkt der Dampfdruck p_1 auf die Fläche F_2 und p_2 auf die Fläche F_1 ; es ist dann

$$P_1 = (1332 \pm 7) \cdot 9,5 = 12\,720 \text{ kg,}$$

wenn der größtmögliche Wert angegeben werden soll, und

$$P_2 = (1388 \pm 7) \cdot 0,1 \approx 140 \text{ kg.}$$

Beispiel 17. Der größte Verpuffungsdruck einer Gasmaschine beträgt etwa bei Betrieb mit

Leuchtgas	$p = 23$ at
Kraftgas	$p = 21$ „
Benzindampf	$p = 16$ „
Treiböl im Gleichdruck-Dieselmotor	$p = 40$ „

Anzugeben ist die größte Kolbenkraft bei einem Kolbendurchmesser $D = 420$ mm.

Die Kolbenfläche ist nach Formel (8)

$$F = \frac{11}{14} \cdot 42^2 = 1386 \text{ cm}^2,$$

deren Wert mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Ausführung und Messung auf 1390 cm^2 abzurunden ist.

Damit erhält man nach Formel (27a) die Kolbenkraft

bei Leuchtgas	$P = 1390 \cdot 23 \approx 32\,000$ kg
„ Kraftgas	$P = 1390 \cdot 21 \approx 29\,200$ „
„ Benzindampf	$P = 1390 \cdot 16 \approx 22\,200$ „
„ Treiböl im Gleichdruckmotor	$P = 1390 \cdot 40 \approx 55\,600$ „

Da der Gasdruck um halbe, bisweilen sogar um ganze Atmosphären schwankt, so ist eine genauere Angabe der Kraftgröße unbrauchbar.

Beispiel 18. Bei geeigneter Schmierölaufuhr verteilt sich der Zapfendruck nahezu gleichförmig über die Projektion der Zapfenfläche $F = l \cdot d$ (Bd. II). Der Kurbelzapfen einer Betriebsdampfmaschine vom Zylinderdurchmesser $D = 420$ mm habe die Abmessungen $l = 170$ mm, $d = 130$ mm (Fig. 24); als größter Flächen- druck im Kurbelzapfenlager wird gewöhnlich $p_2 = 60$ at zugelassen. Anzugeben ist der höchste Dampfdruck p_1 , mit dem die betreffende, mit Kondensation arbeitende Maschine betrieben werden kann.

Bezeichnet $p_2 = 0,1$ at den Gegendruck des Kondensators, so ist nach Abschnitt 5 der gesamte Kolbendruck, wenn Beispiel 5 beachtet wird:

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 0,98$$

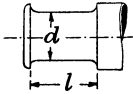


Fig. 24.

und für den Zapfendruck gilt

$$P = l \cdot d \cdot p_2.$$

In der Nähe der Totlage des Kolbens sind beide Kräfte ein- ander gleich, demnach wird

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 0,98 = l \cdot d \cdot p_2,$$

woraus folgt

$$p_1 = \frac{l \cdot d \cdot p_2}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98} + p_2 = \frac{13 \cdot 17 \cdot 60}{1350} + 0,1 = 9,6 \text{ at.}$$

Beispiel 19. Eine Dampfleitung habe den lichten Durchmesser $d_0 = 150$ mm und die Wandstärke $\delta_0 = 12$ mm. Anzugeben ist die bei $p = 10$ at vom Dampf

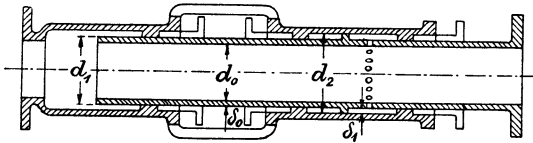


Fig. 25.

auf das Rohrende der Aus- dehnungsstopfbüchse ausgeübte Druckkraft und der erforderliche Durchmesser d_2 des Entlastungsringes, damit der Druck gänzlich aufgehoben wird (Fig. 25).

Die Druckkraft ist

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 - d_0^2) \cdot p = \pi \cdot (d_0 + \delta_0) \cdot \delta_0 \cdot p = \pi \cdot 16,2 \cdot 1,2 \cdot 10 \approx 6100 \text{ kg.}$$

Wenn p in kg/cm^2 benutzt wird, müssen die Längen in cm eingesetzt werden. Für den Entlastungsring muß gelten

$$\frac{\pi}{4} \cdot (d_2^2 - d_1^2) \cdot p = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 - d_0^2) \cdot p,$$

woraus folgt

$$d_2^2 = 2 \cdot d_1^2 - d_0^2,$$

also

$$d_2 = \sqrt{2 \cdot 17,4^2 - 15,0^2} = \sqrt{2 \cdot 303 - 225} = \sqrt{381} \approx 19,8 \text{ cm,}$$

mithin

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot (19,8 - 17,4) = 1,1 \text{ cm.}$$

Beispiel 20. Ein Fabrikschornstein von quadratischem Querschnitt hat die Höhe $h = 22$ m, die untere Breite $b_1 = 1,8$ m, die obere $b_0 = 1,2$ m. Zu berechnen ist die vom Wind auf die Schornsteinsäule ausgeübte größte Kraft.

Als größten Winddruck auf lotrecht stehende ebene Flächen rechnet man bei Schornsteinbauten⁶⁾ im deutschen Binnenland gewöhnlich $p = 125$ und 150 kg/m^2 , in Bayern $p = 150 \text{ kg/m}^2$, im Küstengebiet der Nordsee $p = 200 \text{ kg/m}^2$. Die vom Wind getroffene Fläche hat nach Formel (7) den Inhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot (1,8 + 1,2) \cdot 22 = 33 \text{ m}^2,$$

damit wird nach Formel (27a) die maßgebende Windkraft für einen im Binnenlande errichteten Schornstein

$$P = 33 \cdot 125 \approx 4130 \text{ kg}.$$

Beispiel 21. Eine Gasbehälterglocke hat den Durchmesser $D = 10,2 \text{ m}$ und die freie Höhe $h = 5,1 \text{ m}$. Anzugeben ist die größte vom Winddruck darauf ausgeübte Kraft (Fig. 26).

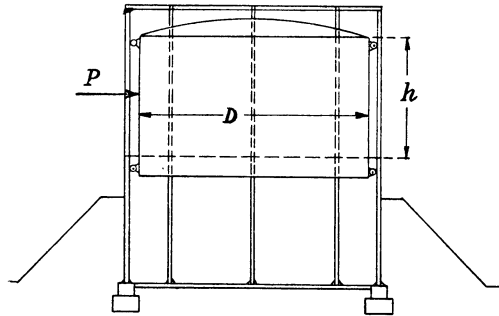


Fig. 26.

In Preußen ist als Winddruck auf lotrechte ebene Flächen bei gewöhnlichen Bauten anzusetzen⁷⁾ für

Wandteile bis zu 15 m Höhe	$p = 100 \text{ kg/m}^2$,
Wandteile zwischen 15 und 25 m Höhe und Dächer bis 25 m Höhe	$p = 125 \text{ kg/m}^2$,
Wandteile und Dächer über 25 m Höhe, Eisengitterwerke, Holzgerüste und Masten	$p = 150 \text{ kg/m}^2$,
mit einem Eisenbahnzug besetzte Brücken	$p = 150 \text{ kg/m}^2$,
leere Brücken	$p = 250 \text{ kg/m}^2$.

Von der Mantelfläche eines Zylinders erfährt jedoch nur ein Teil, dessen Breite das 0,683fache des Zylinderdurchmessers beträgt, den Winddruck, wie z. B. an einem dem Schlagregen ausgesetzten Pfahl nachgeprüft werden kann⁸⁾. In die Rechnung wird gewöhnlich⁷⁾ der Faktor $\frac{2}{3}$ eingeführt.

Man erhält also mit $p = 125 \text{ kg/m}^2$ die Winddruckkraft

$$P = \frac{2}{3} \cdot D \cdot h \cdot p = \frac{2}{3} \cdot 10,2 \cdot 5,1 \cdot 125 = 4350 \text{ kg}.$$

Außer dem Flächendruck oder der Flächenbelastung wird auch oft die Belastung für die Längeneinheit benutzt:

$$q = \frac{P}{l}, \quad (28)$$

die meist in kg/m , bisweilen auch t/m angegeben wird.

Beispiel 22. Für eine einfache gewölbte Straßenbrücke von der Länge $l = 9 \text{ m}$ und der Breite $b = 6 \text{ m}$ beträgt das Eigengewicht einschließlich Pflasterung i. M. $q_1 = 1,0 \text{ t/m}^2$, die Belastung durch Menschengedränge gewöhnlich $q_2 = 0,20 \text{ t/m}^2$, nur wenn die Menschen so gedrängt stehen, daß jede Bewegung ausgeschlossen ist, kann die Belastung bis auf 500 kg/m^2 steigen⁹⁾, schließlich die Geländerbelastung $q = 0,12 \text{ t/m}$. Anzugeben ist das Gesamtgewicht der durch Menschengedränge voll belasteten Brücke und die gesamte auf das Geländer ausgeübte Kraft.

⁶⁾ Preußischer Ministerialerlaß von 1902.

⁷⁾ Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen von 1919.

⁸⁾ Irminger, Z. d. B. 1898; Moormann, Z. d. B. 1902.

⁹⁾ Bohny, Z. d. B. 1912; Hunscheidt, Z. d. B. 1916.

Nach Formel (27a) ist die Brückenlast

$$P = F \cdot p = 9 \cdot 6 \cdot (1,0 + 0,20) = 64,8 \text{ t}$$

bzw. im Höchstfall

$$P = 9 \cdot 6 \cdot (1,0 + 0,50) = 81,0 \text{ t.}$$

Nach Formel (28) ist die Geländerdruckkraft

$$P = l \cdot q = 9 \cdot 0,12 = 10,8 \text{ t.}$$

II. Die Kräfte.

5. Kräfte in derselben Wirkungslinie.

Greifen an dem Körper *A* in Fig. 27 zwei Kräfte P_1 und P_2 nach entgegengesetzten Richtungen, aber in derselben Wirkungslinie an, so bleibt der Körper nur dann in Ruhe, wenn beide Kräfte einander gleich sind. Schon ein kleines Übergewicht auf einer Seite genügt,

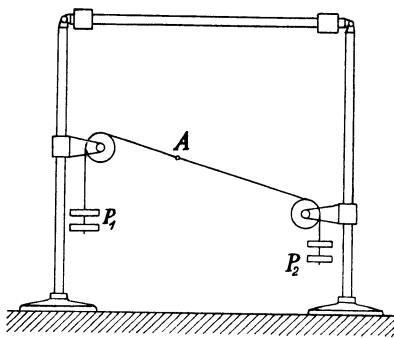


Fig. 27.

um eine Bewegung hervorzurufen, die stets in der Richtung der größeren Kraft stattfindet. Beide Sätze sind grundlegende Erfahrungstatsachen, die durch eine Versuchsanordnung nach Fig. 27 leicht nachgeprüft werden können.

Die Bewegung geht um so schneller vor sich, je größer unter sonst gleichen Umständen der Unterschied beider Kräfte ist, und man erkennt daraus, daß für die entstehende Bewegung ausschlaggebend die Kraft $R = P_1 - P_2$ ist, die als Mittelkraft

der beiden gegebenen bezeichnet wird. Dieser Ausdruck findet seine Erklärung in Abschnitt 6.

Für das Gleichgewicht gilt dagegen die Bedingung $P_1 - P_2 = 0$.

An dem Sachverhalt wird nichts geändert, wenn jede der beiden Kräfte P_1 und P_2 aus mehreren beliebigen Einzelkräften besteht, wie das die Fig. 27 schon andeutet. Legt man einer jeden Kraft je nach ihrer Richtung gemäß den in Abschnitt 3 getroffenen Vereinbarungen das Vorzeichen $+$ oder $-$ bei, so kann man bei beliebig vielen, in derselben Wirkungslinie angreifenden Kräften die Gleichgewichtsbedingung aussprechen:

Die Summe aller Kräfte muß 0 ergeben:

$$\sum P = 0. \quad (29)$$

Besteht kein Gleichgewicht, so ergibt sich eine Mittelkraft von der Größe und Richtung

$$R = \sum P. \quad (30)$$

Beispiel 23. Der Widerstand eines Elbkahnes beträgt in einem Kanal etwa $P_2 = 75$ kg; der Kahn soll von 3 Mann geschleppt werden. Welche Kraft P_1 hat jeder Mann bei gleicher Verteilung auf die drei Leute zu leisten?

Formel (29) ergibt

$$3 P_1 - P_2 = 0,$$

also

$$P_1 = \frac{P_2}{3} = \frac{75}{3} = 25 \text{ kg}.$$

Beispiel 24. Anzugeben ist die gesamte auf den Kolben wirkende Druckkraft bei der Dampfmaschine, deren Kolbenkräfte in Beispiel 16 berechnet wurden. Beim Hingang des Kolbens ist die Kraft

$$P = P_1 - P_2 = 13\,250 - 130 = 13\,120 \text{ kg},$$

beim Rückgang

$$P = 12\,720 - 140 = 12\,580 \text{ kg},$$

worin jedesmal die Höchstwerte genommen sind.

Beispiel 25. Eine Reihen-Dampfmaschine (mit hintereinander liegenden Zylindern) nach Fig. 28 haben die

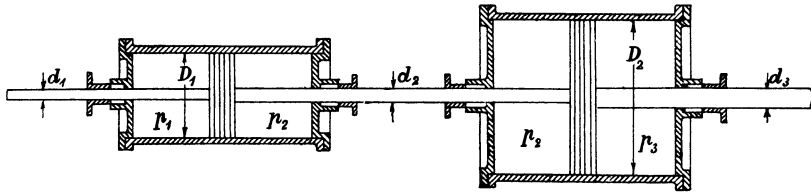


Fig. 28.

Kolbendurchmesser $D_1 = 330$ mm, $D_2 = 600$ mm,
 Kolbenstangendurchmesser $d_1 = 65$ mm, $d_2 = 90$ mm, $d_3 = 110$ mm,
 zugehörigen Dampfdrücke $p_1 = 9,5$ at, $p_2 = 2,8$ at, $p_3 = 0,1$ at.

Anzugeben ist die gesamte auf den Kreuzkopf ausgeübte Dampfkraft.

Man erhält nach Formel (27a) die 4 Kolbenkräfte

$$\begin{aligned} + P_1 &= + \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_1^2) \cdot p_1, & + P_3 &= + \frac{\pi}{4} \cdot (D_3^2 - d_3^2) \cdot p_3, \\ - P_2 &= - \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_2^2) \cdot p_2, & - P_4 &= - \frac{\pi}{4} \cdot (D_2^2 - d_3^2) \cdot p_3. \end{aligned}$$

Damit wird nach Formel (30) die Mittelkraft

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 \cdot p_1 - d_1^2 \cdot p_1 - D_1^2 \cdot p_2 + d_2^2 \cdot p_2 + D_2^2 \cdot p_2 - d_2^2 \cdot p_2 - D_2^2 \cdot p_3 + d_3^2 \cdot p_3)$$

oder

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot [p_1 \cdot (D_1^2 - d_1^2) + p_2 \cdot (D_2^2 - D_1^2) - p_3 \cdot (D_2^2 - d_3^2)],$$

$$R = 0,7854 \cdot [9,5 \cdot (33^2 - 6,5^2) + 2,8 \cdot (60^2 - 33^2) - 0,1 \cdot (60^2 - 11^2)].$$

Nach Formel (18) macht man den Unterschied der Quadrate für die Rechnung mit dem Rechenschieber bequemer:

$$R = 0,7854 \cdot (9,5 \cdot 39,5 \cdot 26,5 + 2,8 \cdot 93 \cdot 27 - 0,1 \cdot 71 \cdot 49)$$

und erhält so

$$R = 13\,180 \text{ kg}.$$

6. Das Kräftedreieck.

Es seien drei Kräfte von bestimmter Größe vorhanden, deren Wirkungslinien in derselben Ebene liegen (Fig. 29); die Bedingungen sollen angegeben werden, unter welchen sie sich im Gleichgewicht befinden, so

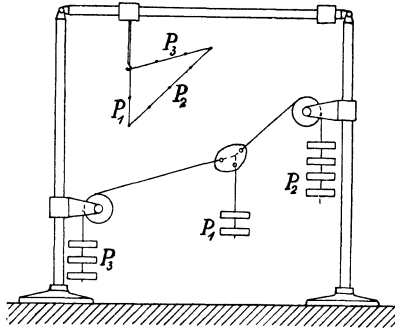


Fig. 29.

daß also der angegriffene Körper in Ruhe bleibt oder seine etwa vorhandene Bewegung nicht ändert.

Der Versuch zeigt, daß sich die drei Schnüre, an welchen die Belastungsgewichte hängen, immer wieder in derselben Weise einstellen, solange die Gewichte unverändert bleiben. Es gibt also nur eine Gleichgewichtslage für einen Körper, auf den drei gegebene Kräfte einwirken, deren Wirkungslinien der obigen Voraussetzung entsprechen. In dieser Gleichgewichtslage schneiden sich

die drei Wirkungslinien in einem Punkt (Fig. 29). Wird jetzt eine Schnur, die durch aufgesetzte Perlen in gleiche Abstände geteilt ist, nach Art der Nebenfigur zusammengelegt, so erhält man im Falle des Gleichgewichts und nur dann ein geschlossenes Dreieck, dessen Seiten parallel zu den Wirkungslinien der drei Kräfte sind und deren Längen den Größen der Kräfte entsprechen. Man gelangt so zu dem Satz:

Drei in derselben Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen und in einem beliebigen Längenmaßstab nach Größe und Richtung hintereinander abgetragen ein geschlossenes Dreieck bilden.

Da in diesem, immer wieder benutzten Satz die Kraftgröße durch eine Länge abgebildet wird, so pflegt man in der technischen Praxis eine Kraft allgemein durch eine Gerade darzustellen, in der ein angelegter Pfeil die Krafrichtung anzeigt.

Der obige, der unmittelbaren Anschauung entnommene Satz¹⁰⁾ wird durch alle Erfahrungen als mit größter Genauigkeit zutreffend bestätigt.

Beispiel 26. Ein wagerechter Ausleger wird durch die Last $Q = 500 \text{ kg}$ am freien Ende beansprucht, gehalten wird er dort durch eine Zugstange, die unter dem Winkel $\alpha = 39^\circ$ gegen die Wagerechte geneigt ist (Fig. 30). Anzugeben sind die im Ausleger und in der Zugstange auftretenden Spannkkräfte.

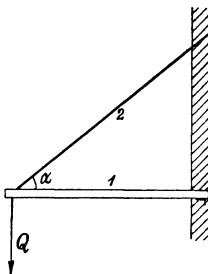


Fig. 30.

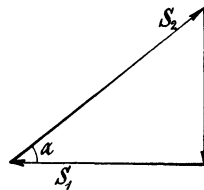


Fig. 31.

Man zeichnet das Kräftedreieck etwa im Maßstabe $500 \text{ kg} = 20 \text{ mm}$, also $1 \text{ mm} = 25 \text{ kg}$ und erhält aus Fig. 31 durch Aufmessen

$$S_1 = 31 \text{ mm} = 25 \cdot 31 = 775 \text{ kg},$$

$$S_2 = 37 \text{ „} = 25 \cdot 37 = 925 \text{ „}.$$

Man bemerkt, daß unter-sonst

¹⁰⁾ Stevin, de Beghinselen der Weegkonst, 1586. Varignon, Projet d'une nouvelle mécanique. 1725.

gleichen Verhältnissen beide Spannkraften wachsen, wenn der Winkel α verkleinert wird.

Beispiel 27. Bisweilen findet sich die Bogenlampenaufhängung nach Fig. 32. Anzugeben sind die Zugkräfte S_1 und S_2 in den Halteseilen bei dem Lampengewicht $P = 15,6 \text{ kg}$ für die Stellungen 1, 2, 3, 4, in welchen das Seil 2 mit der Lotrechten die Winkel $\alpha = 5^\circ, 30^\circ, 55^\circ, 85^\circ$ bildet.

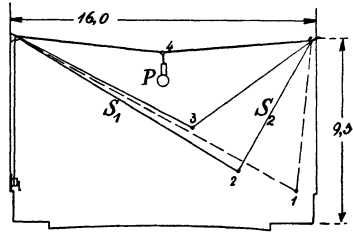


Fig. 32.

Man zeichnet die Gewichtskraft P etwa in dem Kräftemaßstab $1 \text{ kg} = 1 \text{ mm}$ lotrecht und zieht durch die Endpunkte die Parallelen zu den Seilen 1 und 2 für jede der vier Stellungen (Fig. 33). Die Aufmessung ergibt dann

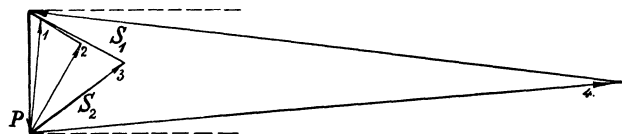


Fig. 33.

$S_1 = 1,8$	$8,0$	$14,5$	$78,3 \text{ mm bzw. kg.}$
$S_2 = 14,9$	$13,5$	$15,6$	$78,3 \text{ mm bzw. kg.}$

Aus den gestrichelten Linien der Fig. 33 ist zu folgern, daß es unmöglich ist, ein belastetes Seil wagerecht auszuspannen, da in dem Fall die Spannkraft unendlich groß wird, denn parallele Linien schneiden sich erst im Unendlichen.

Beispiel 28. Auf einer Bogenbrücke mit 3 Gelenken befindet sich die Einzellast $Q = 10 \text{ t}$ in der gezeichneten Stellung (Fig. 34). Zu ermitteln ist die Richtung und Größe der beiden Widerlagerdrücke N_1 und N_2 .

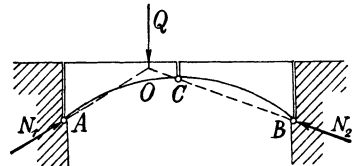


Fig. 34.

Der leere Brückenteil CB überträgt die Widerlagerkraft N_2 in Richtung der geraden Verbindungslinie BC der beiden Gelenke. Da nun Gleichgewicht bestehen soll und nur drei Kräfte vorhanden sind, so müssen sie sich in dem Punkt O schneiden, der durch die Wirkungslinien von Q und N_2 bestimmt ist. Damit ist auch die Wirkungslinie AO der Kraft N_1 festgelegt.

Es kann somit das Kräftedreieck der Fig. 35 gezeichnet werden. Ist z. B. der Kräftemaßstab $10 \text{ t} = 20 \text{ mm}$ angenommen worden, so ergibt die Aufmessung

$$N_1 = 24,4 \text{ mm} = 12,2 \text{ t,}$$

$$N_2 = 22,2 \text{ mm} = 11,1 \text{ t.}$$

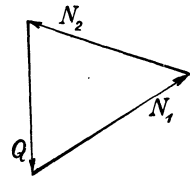


Fig. 35.

Die Richtung von N_2 bleibt also dieselbe, solange die Last Q sich auf der ersten Hälfte der Brücke befindet.

Beispiel 29. Für den mit $Q = 20 \text{ t}$ belasteten Derrickkran nach Fig. 36 sind die Spannkraften S_1 in dem Kranausleger und S_2 in den Halteseilen anzugeben für die 3 Ausladungen $a = 20, 15, 10 \text{ m}$. Die Länge des Auslegers bis zur Mittelachse der Kransäule beträgt $l = 22,50 \text{ m}$, die Höhe bis zur Mitte der Rolle $h = 15,50 \text{ m}$.

Die in einem beliebigen Kräftemaßstab gezeichneten Kräftedreiecke der Fig. 37 sind dem Lageplan ähnlich; mithin gilt für alle Belastungen

$$S_1 = Q \cdot \frac{l}{h} = 20 \cdot \frac{22,5}{15,5} = 29,0 \text{ t}$$

und bei den Ausladungen $a = 20$ 15 10 m

$$S_2 = \frac{20}{15,5} \cdot 20,7 \quad \frac{20}{15,5} \quad 15,3 \quad \frac{20}{15,5} \cdot 11,5 \text{ t}$$

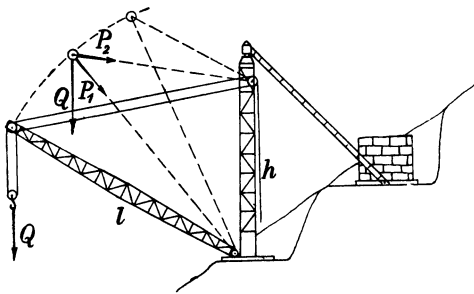
$$S_2 = 26,7 \quad 19,75 \quad 14,85 \text{ t,}$$


Fig. 36.

worin die Faktoren des Bruches $\frac{15,5}{20}$ die Länge der Halteseile von Mitte Rolle bis Mitte Säule angeben.

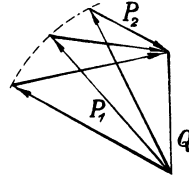


Fig. 37.

Beispiel 30. In der Royal-George-Schlucht hängte die Eisenbahnstrecke der Denver- und Rio-Grande-Eisenbahn auf einer Strecke von 82,6 m Länge an Hängewerken nach Fig. 38 ¹¹⁾. Anzugeben ist die Spannkraft S der Streben, wenn die Zugstangen mit $P = 50 \text{ t}$ belastet sind.

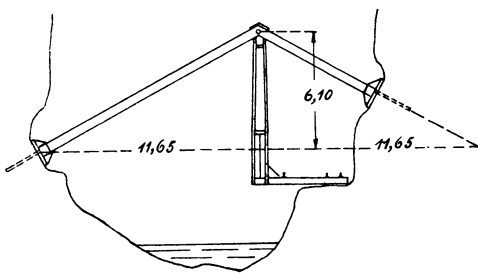


Fig. 38.

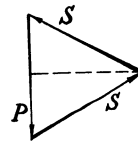


Fig. 39.

Das Kräfte-dreieck ist das in Fig. 39 in einem ganz beliebigen Kräfte-maßstab wiedergegebene. Aus den ähnlichen Dreiecken der Fig. 38 und 39 folgt dann

$$S : \frac{1}{2} \cdot P = \sqrt{11,65^2 + 6,10^2} : 6,10,$$

also

$$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{11,65}{6,10}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \sqrt{4,65} = 53,9 \text{ t.}$$

Bei Benutzung der Ähnlichkeitsbeziehungen genügt eine ganz überschlägige Aufzeichnung der Kräfte-dreiecke.

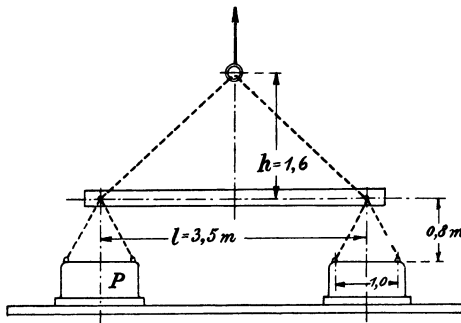


Fig. 40.

Beispiel 31. Um Schienen und Träger anzuheben, benutzt man auf den Lagerplätzen der Eisenwerke Elektromagnete in der durch Fig. 40 veranschaulichten Anordnung. Jeder der

¹¹⁾ Z. d. V. d. I. 1906.

beiden Magnete habe bei einer Tragfähigkeit von 1200 kg das Eigengewicht 900 kg. Anzugeben ist die Größe der Spannkraften in den Ketten S_1 und in dem Absteifungsträger S_2 .

Die Belastung einer Seite beträgt $P = 1200 + 900 = 2100$ kg. Das Kräftedreieck ist das in Fig. 41 in einem beliebigen Kräftemaßstab dargestellte. Man erhält aus ähnlichen Dreiecken

$$S_2 : P = \frac{1}{2} \cdot l : h, \quad S_1 : P = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot l\right)^2 + h^2} : h,$$

also

$$S_2 = P \cdot \frac{l}{2h} = \frac{2100 \cdot 3,5}{2 \cdot 1,6} \approx 2300 \text{ kg},$$

$$S_1 = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2} = 2100 \cdot \sqrt{2,196} \approx 3100 \text{ kg}.$$

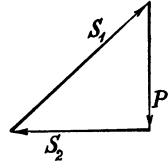


Fig. 41.

Beispiel 32. An einem Blechschorstein nach Fig. 42 ruft der Winddruck an dem Haltering die Kraft $P = 510$ kg hervor (Beispiel 107). Anzugeben ist die Belastung Q der Schornsteinsäule und die Spannkraft S_1 in der Verankerung 1, wenn gegeben ist $h_2 + h_3 = 18,2$ m. $a = 15,5$ m.

Das in Fig. 43 in einem beliebigen Kräftemaßstab gezeichnete Kräftedreieck gibt sogleich aus den Pfeilrichtungen an, daß die Verankerungskraft S_1 am Ring zieht und die Schornsteinsäule auf den Ring die nach oben gerichtete Druckkraft Q ausübt. Aus den ähnlichen Dreiecken folgt

$$Q : P = (h_2 + h_3) : a,$$

$$S_1 : P = l : a,$$

worin nach dem Satz des Pythagoras einzusetzen ist: $l = \sqrt{(h_2 + h_3)^2 + a^2}$. Somit wird

$$Q = P \cdot \frac{h_2 + h_3}{a} = \frac{510 \cdot 18,2}{15,5} \approx 600 \text{ kg},$$

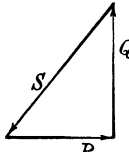


Fig. 43.

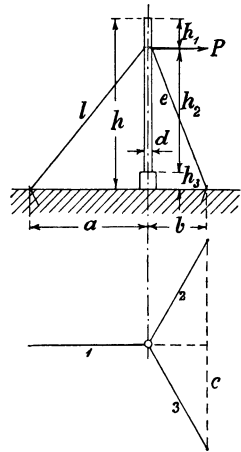


Fig. 42.

$$S = P \cdot \frac{l}{a} = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{a}\right)^2} = 510 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{18,2}{15,5}\right)^2} = 510 \cdot \sqrt{2,38} \approx 790 \text{ kg}.$$

Beispiel 33. An einem Kabelkran nach Fig. 44 beträgt die Belastung der im Mittel unter 45° geneigten Pendelstütze $Q = 18,2$ t. Der wagerecht gemessene

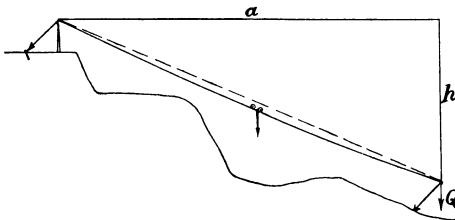


Fig. 44.

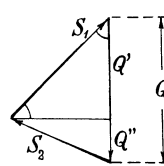


Fig. 45.

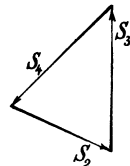


Fig. 46.

Abstand der beiden Stützenspitzen ist $a = 200$ m, der lotrecht gemessene $h = 83$ m. Welche Druckkräfte wirken auf die Pendelstütze und auf die feste Stütze, bzw. welcher Zug im Tragseil und in dem unter 45° geneigten Verankerungsseil der festen Stütze?

Das Kräfte-dreieck für die Pendelstütze zeigt Fig. 45. Die durch den Schnittpunkt der Stützenkraft S_1 und der Seilspannkraft S_2 gezogene wagerechte Linie teilt die Last Q in Q' und Q'' , sie ist als zweite Kathete in dem 45° -Dreieck ebenfalls Q' . Das untere Dreieck ist nun dem Dreieck der Hauptfigur 44 ähnlich, so daß man erhält

$$Q'' : Q' = h : a, \quad \text{also} \quad Q'' = Q' \cdot \frac{h}{a}.$$

Aus $Q'' + Q' = Q$ folgt hiermit

$$Q' = \frac{Q}{1 + \frac{h}{a}}.$$

Aus dem oberen Dreieck der Fig. 45 liefert der Satz des Pythagoras

$$S_1 = \sqrt{Q'^2 + Q'^2} = Q' \cdot \sqrt{2} = Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{18,2 \cdot 14,14}{1 + \frac{41,5}{100}} \approx 18,2 \text{t},$$

aus dem unteren Dreieck erhält man ebenso

$$S_2 = \sqrt{Q'^2 + Q''^2} = Q' \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} = Q \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{18,2 \cdot 1,086}{1,415} \approx 14,0 \text{t}.$$

Für die feste Stütze ist das Kräfte-dreieck in Fig. 46 dargestellt. S_2 ist dem Dreieck der Fig. 45 entnommen worden. Die Zugkraft S_4 im Ankerseil soll wieder unter 45° gegen die Wagerechte geneigt sein, das Dreieck ist also dem ersten kongruent, und man hat sofort

$$\begin{aligned} \text{die Druckkraft in der Stütze } S_3 &= Q = 18,2 \text{t}, \\ \text{die Spannkraft im Ankerseil } S_4 &= S_1 = 18,2 \text{t}. \end{aligned}$$

Die Anordnung der Zugstangen und des Belastungsgewichtes R der Fig. 47 entspricht völlig der der Fig. 26, und die Kraft R ist also nach dem dazu gesetzten Kräfte-dreieck (Fig. 48) in Gleichgewicht

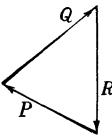


Fig. 48.

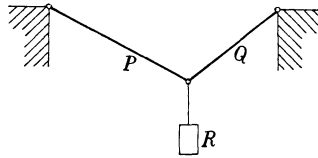


Fig. 47.

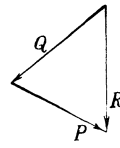


Fig. 49.

mit den beiden vom Angriffspunkt der Kraft R schräg nach aufwärts gerichteten Stangenkräften P und Q , die das gemeinsame Mittelgelenk festhalten.

Umgekehrt kann nach den Darlegungen in Abschnitt 3 von den Gegenkräften P und Q gesprochen werden, mit welchen die Last R am gemeinsamen Gelenk in beiden Stangenrichtungen nach unten zieht. Das entsprechende Kräfte-dreieck ist das in Fig. 49 noch einmal wieder-gebe, und man sagt in dem Fall, die Mittelkraft R ist in die beiden

Seitenkräfte P und Q zerlegt worden, deren Pfeile im Endergebnis ebendahin führen, wie derjenige der Kraft R :

Die Mittelkraft ist die Schlußlinie des aus den beiden Seitenkräften gebildeten Dreiecks.

Die Bezeichnungen erklären sich aus Fig. 50, die den Sachverhalt noch einmal darstellt.

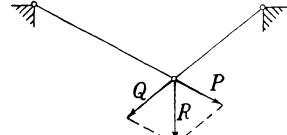


Fig. 50.

Beispiel 40. Fig. 51 stellt die Lage der Tragseile einer Drahtseilbahn beim Übergang über eine Bergkuppe dar. Die Spannkraft des Tragseiles für die vollbeladenen Wagen habe die wagerechte Seitenkraft $H_v = 18,0$ t und die des Tragseiles für die leer zurückgehenden Wagen die Seitenkraft $H_l = 11,0$ t. Anzugeben sind die Belastung V der mittleren Stütze der Fig. 51 und die in den Seilen davor und dahinter auftretenden Spannkraften S_1 bzw. S_2 .

Man zerlegt die Seilspannkraften S_1 und S_2 zu beiden Seiten der Stütze in ihre wagerechten und lotrechten Seitenkräfte (Fig. 52). Da Gleichgewicht bestehen soll, so sind die in dieselbe Wirkungslinie fallenden, entgegengesetzt gerichteten Kräfte H einander gleich, und weil das für alle Stützen in gleicher Weise zutrifft, wird H als die für das ganze Tragseil unveränderliche Spannkraft in erster Linie angegeben.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke der Fig. 51 und 52 folgt

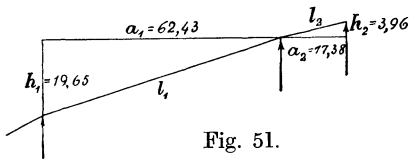


Fig. 51.

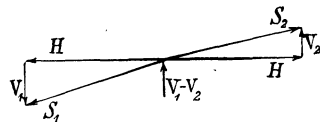


Fig. 52.

$$V_1 = H \cdot \frac{h_1}{a_1}, \quad V_2 = H \cdot \frac{h_2}{a_2},$$

$$S_1 = H \cdot \frac{l_1}{a_1}, \quad S_2 = H \cdot \frac{l_2}{a_2}.$$

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras $l = \sqrt{a^2 + h^2}$, also

$$S_1 = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{a_1}\right)^2}, \quad S_2 = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{a_2}\right)^2},$$

und mit den Zahlenwerten der Fig. 51 ist somit für die Seite der vollbeladenen Wagen

$$V_v = 18,0 \cdot \left(+ \frac{19,65}{62,43} - \frac{3,96}{17,38} \right) = 18,0 \cdot (0,3148 - 0,2278) = 1,57 \text{ t},$$

$$S_{v1} = 18,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{19,65}{62,43}\right)^2} = 18,86 \text{ t},$$

$$S_{v2} = 18,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3,96}{17,38}\right)^2} = 18,46 \text{ t},$$

und für die Seite der leeren Wagen

$$V_l = 11,0 \cdot (+ 0,3148 - 0,2278) = 0,96 \text{ t},$$

$$S_{l1} = 11,0 \cdot \frac{18,86}{18,0} = 11,53 \text{ t},$$

$$S_{i2} = 11,0 \cdot \frac{18,46}{18,0} = 11,22 \text{ t.}$$

Zu beachten ist, daß V durch Addition der Einzelbeträge V_1 und V_2 erhalten wird, wenn beide Neigungswinkel des Tragseiles unterhalb der durch den Stützpunkt gezogenen Wagerechten liegen.

Das die Wagen bewegende Zugseil greift daran etwa 0,50 m unterhalb der Tragseile an; auf jeder Stütze befinden sich etwa 2,0 m unterhalb des Tragseiles noch Tragrollen für das zwischen den Wagen freihängende Zugseil. Steht nun ein Wagen auf der mittleren Stütze, so gelten für das auf den Tragrollen der beiden benachbarten Stützen aufliegende Zugseil dieselben Formeln, nur ist h_1 um 1,50 m vergrößert und h_2 um denselben Betrag verkleinert.

Ist die wagerechte Seitenkraft der Zugseilspannkraft $H_2 = 0,40 \text{ t}$, so vermehrt sich die Belastung der Stütze außer um das Wagengewicht noch um

$$V_2 = 0,40 \cdot \left(+ \frac{21,15}{62,43} - \frac{2,46}{17,38} \right) = 0,40 \cdot (0,3389 - 0,1415) = 0,79 \text{ t.}$$

Beispiel 41. Zu berechnen ist der Durchhang f des Tragseiles eines Kabelkranes nach Fig. 53 von der Spannweite $l = 250 \text{ m}$, dessen Seil mit der Kraft $S = 15,0 \text{ t}$ gespannt ist, unter der in der Mitte stehenden Belastung $P = 2050 \text{ kg}$.

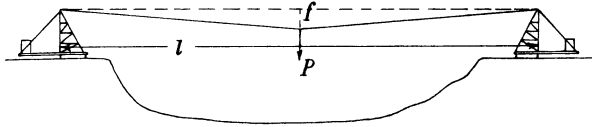


Fig. 53.

Wird das Kräfte-dreieck aus der Belastung P und den beiden Spannkraften S in einem beliebigen Kräftemaßstab aufgezeichnet (Fig. 54), so folgt aus den ähnlichen Dreiecken



Fig. 54.

$$\frac{1}{2} \cdot P : S = f : l'.$$

Hierin ist einzusetzen

$$l' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + f^2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2}$$

oder mit Formel (20)

$$l' = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot f}{l}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} l \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right].$$

Damit wird

$$f = \frac{P}{4 \cdot S} \cdot l \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right].$$

In der ersten Annäherung kann die kleine Größe $\left(\frac{f}{l}\right)^2$ vernachlässigt werden, und man erhält

$$f = \frac{2,05 \cdot 250}{4 \cdot 15,0} = 8,43 \text{ m.}$$

Der genaue Wert bestimmt sich dann zu

$$f = 8,43 \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{8,43}{250}\right)^2 \right] = 8,43 \cdot 1,0023 = 8,45 \text{ m.}$$

Wäre statt der Seilspannkraft S ihre wagerechte Seitenkraft $H = 15,0 \text{ t}$ gegeben, so wäre der erste Wert schon der endgültige.

Teilt die Last P bei einer anderen als der Mittelstellung die Länge l in die beiden Abschnitte a_1 und a_2 (Fig. 55), so nimmt das Kräftedreieck die Gestalt der Fig. 56 an, und die Last P wird durch die gestrichelte Wagerechte H in die beiden Teilkräfte V_1 und V_2 zerlegt. Aus ähnlichen Dreiecken folgt dann

$$V_1 : H = f' : a_1, \quad V_2 : H = f' : a_2,$$

also

$$V_1 = H \cdot f' \cdot \frac{1}{a_1}, \quad V_2 = H \cdot f' \cdot \frac{1}{a_2}.$$

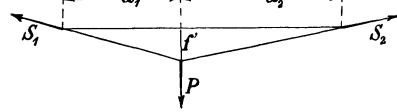


Fig. 55.

Durch Addition beider Werte ergibt sich

$$P = H \cdot f' \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = H \cdot f' \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1 \cdot a_2},$$

also

$$f' = \frac{P}{H} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l}.$$

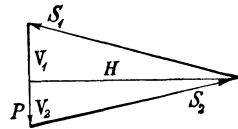


Fig. 56.

Hierin ist noch die Kraft H durch die größere Seilkraft S_1 auszudrücken, indem man wieder den ähnlichen Dreiecken entnimmt

$$\frac{H}{S_1} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + f'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2}.$$

Damit erhält man schließlich

$$f' = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2 \right],$$

worin der Klammerausdruck nur als Berichtigung benutzt wird.

Grundlehren der Trigonometrie. In einen Kreis vom Halbmesser 1 sei von einem als Nullachse geltenden Durchmesser aus ein Winkel α eingezeichnet (Fig. 57). Die den freien Schenkel \overline{OA} von der Länge 1 auf die Achse \overline{OB} projizierende Linie \overline{AC} ist der Sinus des Winkels α ($\sin \alpha$) und die Projektion \overline{OC} der Kosinus dieses Winkels ($\cos \alpha$). Das Stück \overline{BD} der von der Achse aus im Punkt B bis zum freien Schenkel des Winkels α an den Kreis gezogenen Tangente ist die Tangente des Winkels ($\operatorname{tg} \alpha$) und das Stück \overline{DE} der von dem Endpunkt D der zur ersten Achse senkrechten Achse \overline{OD} an den Kreis gezogenen Tangente bis zum freien Schenkel des Winkels α ist seine Kotangente ($\operatorname{cotg} \alpha$).

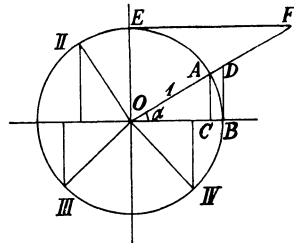


Fig. 57.

Es bestehen nun folgende Zusammenhänge zwischen den durch die vorstehenden Erklärungen festgelegten Winkelfunktionen:

Aus ähnlichen Dreiecken wird entnommen

$$\overline{BD} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{OC} \quad \text{oder} \quad \overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \tag{31}$$

$$\overline{EF} : \overline{OE} = \overline{OB} : \overline{BD} \quad \text{oder} \quad \overline{EF} = \frac{1}{\overline{BD}},$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}. \quad (32)$$

Der Satz des Pythagoras liefert

$$\overline{OC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (33)$$

oder
also

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (34 \text{ u. } 35)$$

Wird die Formel (34) in Formel (31) eingesetzt, so ergibt sich

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \quad (36)$$

und entsprechend durch Verbindung von Formel (35) und (32)

$$\cotg \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}. \quad (37)$$

Hieraus kann wieder ausgerechnet werden

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}. \quad (38 \text{ u. } 39)$$

Ändert sich der Winkel von 0° steigend bis 90° , oder wenn man statt der Grade die entsprechenden Bogenlängen einsetzt, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so steigt der Sinus von 0 bis 1 und fällt der Kosinus von 1 bis 0 , dabei wächst die Tangente von 0 bis ∞ und sinkt die Kotangente von ∞ bis 0 .

Man bemerkt ferner, daß sich für kleine Winkel α Sinus, Tangente und Bogen ($\text{arc } \alpha$) nur ganz unerheblich voneinander unterscheiden und der Kosinus von 1 wenig abweicht, und zwar ist

$$\begin{array}{ll} \text{bis auf } 0,001 \text{ genau für } \alpha < 2\frac{1}{2}^\circ, \\ \text{,, ,, } 0,003 \text{ ,, ,, } \alpha < 4\frac{1}{2}^\circ, \\ \text{,, ,, } 0,01 \text{ ,, ,, } \alpha < 8^\circ \\ \sin \alpha = \text{tg } \alpha = \text{arc } \alpha, \quad \cos \alpha = 1. \end{array}$$

Der Sinus wird von der wagerechten Nullachse aus nach oben positiv gerechnet, er ist also auch im II. Viertelkreis, wo α zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π beträgt, positiv, dagegen im III. und IV. Viertelkreis bei α zwischen π und 2π negativ. Der Kosinus wird von der senkrechten Achse aus nach rechts als positiv gerechnet, er ist also im II. Viertelkreis und im III. negativ, dagegen im IV. wieder positiv. Mit Hilfe von Formel (31) erhält man hieraus, daß die Tangente und also nach Formel (32) auch die Kotangente im I. und III. Viertelkreis positiv ist, dagegen im II. und IV. negativ.

Man entnimmt der Fig. 57 leicht die folgenden Umrechnungen:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin \alpha, \\ \sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha. \end{array} \quad (40)$$

Für die Tangente erhält man die entsprechenden Formeln am einfachsten durch Benutzung von Formel (31).

Hat die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks nicht die Länge 1, sondern irgendeine andere, z. B. c , so haben die Katheten den c -fachen des oben angegebenen Wertes, also mit den Bezeichnungen der Fig. 58 die Größen

$$a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha. \quad (41)$$

Durch Division beider Gleichungen folgt in Verbindung mit Formel (31)

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (42)$$

Ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck (Fig. 59) wird durch die Höhe h_1 in zwei rechtwinklige zerlegt, und es gilt

$$h_1 = c \cdot \sin \beta \quad \text{bzw.} \quad h_1 = b \cdot \sin \gamma.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt hieraus der Sinussatz:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (43)$$

Aus dem rechten Dreieck der Fig. 59 erhält man

$$h_1 = b \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad u = b \cdot \cos \gamma,$$

aus dem linken Dreieck wird entnommen

$$c^2 = h_1^2 + v^2 = h_1^2 + (a - u)^2 = h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot u + u^2$$

oder mit den vorstehenden Werten

$$c^2 = b^2 \cdot \sin^2 \gamma + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma + b^2 \cdot \cos^2 \gamma,$$

und nach Formel (33) folgt hieraus der Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma. \quad (44)$$

Wird die Mittelkraft R in zwei aufeinander senkrecht stehende Seitenkräfte P und Q zerlegt, von welchen P mit R den Winkel α einschließt (Fig. 60), so ist nach den Formeln (41)

$$P = R \cdot \cos \alpha, \quad (45)$$

$$Q = R \cdot \sin \alpha, \quad (46)$$

und der Winkel α wird oft bestimmt, wenn P und Q gegeben sind, aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}. \quad (47)$$

Beispiel 42. Ein Schiff ist im Hafen von zwei Schleppern zu ziehen, von denen der eine die 1,5fache Zugkraft des anderen besitzt. Wie groß ist der Winkel β zu nehmen, wenn $\alpha \approx 20^\circ$ gewählt wird, und wie verteilt sich der Schiffswiderstand R auf beide Schlepper (Fig. 61)?

Man entnimmt dem Kräftedreieck der Fig. 62 nach dem Sinussatz Formel (43)

$$\sin \beta = \frac{P_1}{P_2} \cdot \sin \alpha = 1,5 \cdot 0,342 = 0,513,$$

mithin $\beta \approx 31^\circ$.

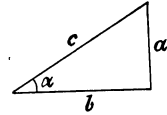


Fig. 58.

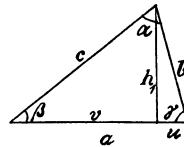


Fig. 59.

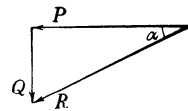


Fig. 60.

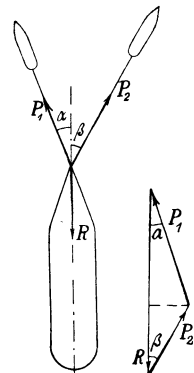


Fig. 61. Fig. 62.

Ferner ist

$$R = P_1 \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \cos \beta = P_1 \cdot 0,94 + P_2 \cdot 0,86.$$

Die Zugkraft des ersten Schleppers wird zum 0,94ten Teil ausgenutzt, dagegen die des zweiten, schwächeren, nur zum 0,86ten Teil.

Beispiel 43. Ein Seilscheibenschwungrad habe das Eigengewicht $G \approx 4750$ kg, der Seilzug von insgesamt $Q = 2650$ kg wirkt unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ nach aufwärts (Fig. 63). Anzugeben ist die Gesamtbelastung der Welle.

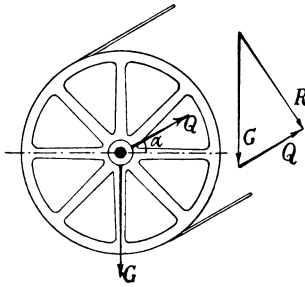


Fig. 63.

Das an die Fig. 63 gesetzte Kräftedreieck zeigt die Mittelkraft R der beiden gegebenen Seitenkräfte in einem beliebigen Kräftemaßstab, und man findet nach dem Kosinussatz Formel (44)

$$R^2 = G^2 + Q^2 - 2 \cdot G \cdot Q \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

oder mit Benutzung der betreffenden Formel (40)

$$R^2 = G^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{Q}{G} \right)^2 - 2 \cdot \frac{Q}{G} \cdot \sin \alpha \right],$$

also

$$R = G \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{G} \right)^2 - 2 \cdot \frac{Q}{G} \cdot \sin \alpha},$$

$$R = 4750 \cdot \sqrt{1 + 0,558^2 - 2 \cdot 0,558 \cdot 0,50} = 4750 \cdot \sqrt{0,752} = 4120 \text{ kg.}$$

Beispiel 44. Ein Treibriemen umfaßt die Riemenscheibe mit dem Winkel $\alpha = 165^\circ$. Die Spannkraften im Riemen sind $S_1 = 850$ kg und $S_2 = 460$ kg. Zu bestimmen ist die dadurch entstehende Belastung der Welle.

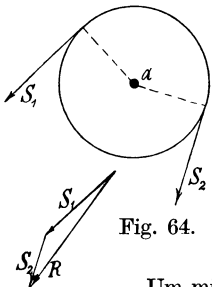


Fig. 64.

Aus dem zur Fig. 64 zugesetzten Kräftedreieck erhält man mit Hilfe des Kosinussatzes Formel (44)

$$R^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos \alpha$$

oder mit Benutzung der entsprechenden Formel (40)

$$R^2 = S_1^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \cos (\pi - \alpha) \right],$$

mithin

$$R = S_1 \cdot \sqrt{1 + 0,541^2 + 2 \cdot 0,541 \cdot 0,966} \\ = 850 \cdot \sqrt{2,337} = 1300 \text{ kg.}$$

Um mit kleinen, leicht zu übersehenden Zahlen zu arbeiten, empfiehlt es sich, stets die Ausrechnung in der angegebenen Weise vorzunehmen.

Für verschiedene Verhältnisse von $S_1 : S_2$ und verschiedene Winkel α ergibt sich der Verlauf von $R : S_1$ aus Fig. 65.

Beispiel 45. Das Lastseil eines Aufzuges sei nach Fig. 66 geführt. Die Last betrage $P = 600$ kg, die Neigung des schrägen Seiltrumes gegen die Wagerechte $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$. Anzugeben ist die Größe der auf die Lager ausgeübten Drücke V und H .

Für die Rolle I liefert die Fig. 67 die zeichnerische Lösung: Die beiden Seilkräfte P ergeben die Mittelkraft R , die ihrerseits zerlegt wird in die senkrechte Seitenkraft V_1 und die wagerechte H_1 . Die gestrichelte Hilfslinie ergibt

$$H_1 = P \cdot \cos \alpha,$$

$$V_1 = P + P \cdot \sin \alpha = P(1 + \sin \alpha).$$

Für die Rolle II gilt die Fig. 68, und man erhält hieraus

$$H_2 = P \cdot \cos \alpha,$$

$$V_2 = P - P \cdot \sin \alpha = P(1 - \sin \alpha).$$

Werden noch die Formeln (38) und (39) angewendet, so folgt

$$H_1 = H_2 = \frac{P}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{600}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{600}{\frac{5}{4}} = 480 \text{ kg,}$$

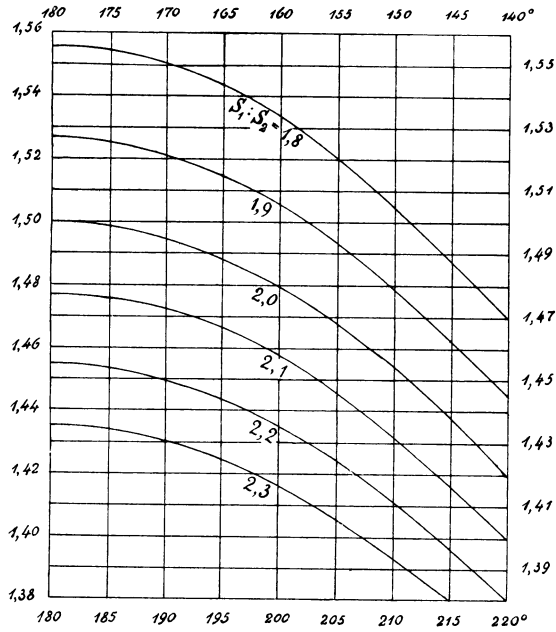


Fig. 65.

$$V_1 = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}\right) = 600 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}}\right) = 600 \cdot \frac{8}{5} = 960 \text{ kg,}$$

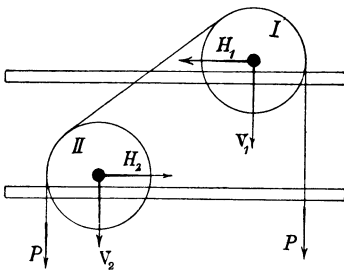


Fig. 66.

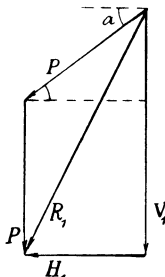


Fig. 67.

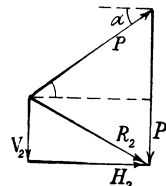


Fig. 68.

$$V_2 = P \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}\right) = 600 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 240 \text{ kg.}$$

Beispiel 46. Auf dem Kabelkran nach Fig. 44 verkehre eine Laufkatze, die einschließlich der Last $P = 2,8 \text{ t}$ wiegt. Anzugeben sind die Kräfte in den beiden Stützen bzw. im Seil, wenn die Katze dicht davor steht, ferner der Durchhang f bei Stellung der Katze in der Mitte und die Größe der Seilspannung in diesem Fall.

Die lotrechte Belastung S_3 der festen Stütze vergrößert sich um das Gewicht P , S_2 und S_4 bleiben unverändert, wenn die Last dort steht.

Bei Stellung der Last P auf der Pendelstütze erfährt Q eine entsprechende Vergrößerung, und das ganze Kräftedreieck der Fig. 45 verlängert sich entsprechend nach unten. Man entnimmt der demgemäß abgeänderten Fig. 45

$$S'_1 : S_1 = (Q + P) : Q,$$

$$S'_2 : S_2 = (Q + P) : Q,$$

also

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right) = 18,2 \cdot \left(1 + \frac{2,8}{18,2}\right) = 21,0 \text{ t},$$

$$S'_2 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right) = 14,0 \cdot (1 + 0,154) = 16,1 \text{ t}.$$

Das Kräftedreieck für die Mitte mit der Belastung P ist bereits in Fig. 54 dargestellt worden. Während aber bei wagerecht ausgespanntem Seil die beiden Spannkkräfte des durchhängenden Seiles einander gleich sind (Beispiel 41), sind sie bei verschiedenen hohen Stützpunkten verschieden. Wird die Spannkraft S_2 des unbelasteten Seiles in das der Fig. 54 für die geneigte Kabelbahn entsprechende Kräftedreieck eingetragen, so wird die Kraft P dadurch zerlegt in P' und P'' . Durch den Vergleich ähnlicher Dreiecke erhält man dann

$$P' : S_2 = f : \frac{1}{2} \cdot l \quad \text{und} \quad P'' : S_2 = f : \frac{1}{2} \cdot l,$$

also

$$P' = P'' = \frac{1}{2} \cdot P.$$

Damit liefert jede der vorstehenden Gleichungen

$$f = \frac{S_2 \cdot l}{4 \cdot P}.$$

Die Größe der beiden jetzt vorhandenen Seilspannkkräfte berechnet man nach dem Kosinussatz Formel (44):

$$S_1'^2 = S_2^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot P\right)^2 - 2 \cdot S_2 \cdot \frac{1}{2} P \cdot \cos \alpha = S_2^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2 - \frac{P}{S_2} \cdot \cos \alpha\right],$$

$$S_2'^2 = S_2^2 + \left(\frac{1}{2} P\right)^2 - 2 \cdot S_2 \cdot \frac{1}{2} P \cdot \cos (\pi - \alpha) = S_2^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2 + \frac{P}{S_2} \cdot \cos \alpha\right]$$

Nun ist nach der Hauptfigur 44

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h}$$

und nach Formel 38

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}},$$

folglich

$$\begin{aligned}
 S'_2 &= S_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2} - \frac{P}{S_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}} \\
 &= 14,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} - \frac{0,20}{\sqrt{1 + \left(\frac{100}{41,5}\right)^2}} \\
 &= 14,0 \cdot \sqrt{1,010} - 0,077 = 13,5 \text{ t,} \\
 S''_2 &= 14,0 \cdot \sqrt{1,010 + 0,077} = 14,6 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Das Trage-seil erfährt somit die größte Beanspruchung, wenn die Laufkatze dicht bei der Pendelstütze steht.

Die Körper I und II berühren sich in der Fläche F (Fig. 69). Der erstere werde von der Kraft P senkrecht zur Berührungsfläche F gegen den zweiten gepreßt. Er erfährt dann vom Körper II einen Gegendruck N , der nach Abschnitt 3 in die Wirkungslinie von P fällt, gleich groß ist und nur die entgegengesetzte Richtung hat.

Wird jetzt der Körper I durch eine gegen die Flächennormale um den beliebigen Winkel α geneigte Kraft P angedrückt (Fig. 70), so kann man P in die beiden Seitenkräfte $P_1 = P \cdot \cos \alpha$ und $P_2 = P \cdot \sin \alpha$ zerlegen. Nach dem Vorhergehenden ist dann N mit P_1 im Gleichgewicht und die Seitenkraft P_2 , für die keine Gegenkraft in der glatten Fläche F vorhanden ist, wirkt auf eine Verschiebung des Körpers I hin. Der Stützdruck hat also in diesem Fall die Größe und Richtung P_1 :

Zwei sich in einer Fläche berührende Körper wirken stets derart aufeinander ein, daß die Stützdrücke senkrecht zur Berührungsfläche stehen.

Der Satz trifft auch zu, wenn die Berührung in einer Kante (Fig. 71) oder in einem Punkt erfolgt (Fig. 72).

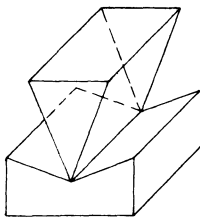


Fig. 71.

Das Kräfte-dreieck zeigt nicht alle Kräfte an ihrer Angriffsstelle wirkend an, sondern mindestens eine seitwärts verschoben, z. B. in Fig. 70 die Kraft P_2 . Legt man Wert darauf, daß die Kräfte im Konstruktionsplan sämtlich an ihrer

Angriffsstelle erscheinen, so zeichnet man das Kräfteparallelogramm bzw. Kräfte-rechteck, wie z. B. im Fall der Fig. 75.

Beispiel 47 und 48. Um zwei Teilstücke eines großen Maschinenrahmens oder dergl. miteinander fest zu verbinden, werden an der Teilfuge Stahlstücke

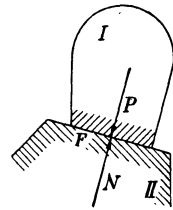


Fig. 69.

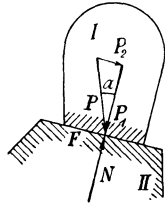


Fig. 70.

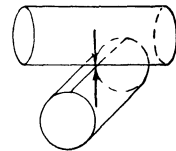


Fig. 72.

nach Fig. 73 warm eingelegt, die sich beim Erkalten zusammenziehen und so die Fuge dicht schließen. Um den Druck möglichst gleichmäßig über die ganze Fuge wirken zu lassen, werden die Anlageflächen etwas schräg ausgeführt.

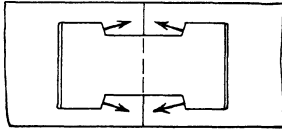


Fig. 73.

Parallel zur Fuge laufende Anlageflächen würden die äußeren Teile der Fuge nicht mehr genügend fest zusammenpressen.

Um die nachgiebige Packung einer Stopfbüchse gut gegen die Kolbenstange zu drücken, wird der Grundring und die Rotgußausfütterung der Stopfbüchse nach Fig. 74 abgeschragt.

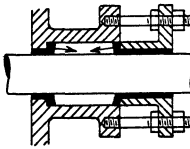


Fig. 74.

Beispiel 49. Das Hängewerk nach Fig. 75, dessen Streben mit der Wagerechten den Winkel $\alpha = 40^\circ$ einschließen, ist in der Mitte durch die Last $P = 5,3 \text{ t}$ belastet. Anzugeben sind die dadurch in den einzelnen Balken hervorgerufenen Kräfte.

Die Last P wird durch die mittlere Zugstange nach dem oberen Knotenpunkt übertragen und zerlegt sich dort nach den beiden Strebenrichtungen S . Man entnimmt dem Kräfteparallelogramm

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot P}{\sin \alpha} = \frac{2,65}{0,6428} = 4,12 \text{ t.}$$

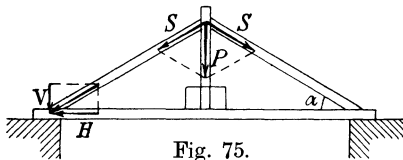


Fig. 75.

Die Pfeile zeigen an, daß S auf die Streben als Druckkraft wirkt, die sich auf die unteren Knotenpunkte überträgt. Sie wird dort in die senkrecht zur Auflagerfläche stehende Kraft V und die wagerechte H zerlegt, und man erhält aus dem Kräfterechteck

$$V = S \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot P = 2,65 \text{ t,}$$

$$H = S \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \cotg \alpha = 2,65 \cdot 1,192 = 3,17 \text{ t.}$$

V ist nach Fig. 75 die auf das Auflager ausgeübte Druckkraft und H die in dem wagerechten Balken wirkende Zugkraft.

Bei einem doppelten Hängewerk nach Fig. 76 ergibt sich in gleicher Weise

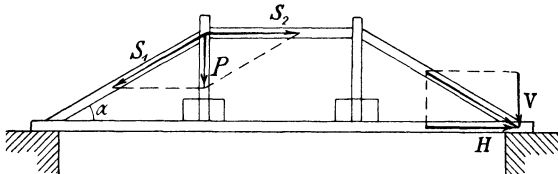


Fig. 76.

$$S_1 = P : \sin \alpha,$$

also doppelt so groß als beim einfachen Hängewerk,

$$S_2 = P : \cos \alpha$$

und weiter

$$V = P,$$

$$H = -S_2 = -\frac{P}{\cos \alpha}.$$

Freilich gilt diese Berechnung nur für das symmetrische und symmetrisch belastete Hängewerk, wie es Fig. 76 darstellt.

Beispiel 50. Die Fig. 77 stellt das Kurbelgestänge einer Dampfmaschine in dem Augenblick dar, wo die Schubstange am weitesten aus der Mitte ausschlägt. Beim Rechtsgang der Maschine wirkt die Kolbenkraft P in der gezeichneten Richtung, sie zerlegt sich am Kreuzkopfpapfen in Richtung der Schubstange und

Dreieck bilden (Fig. 83). Das Dreieck ist rechtwinklig und enthält den Winkel α zwischen Q und N . Man erhält demnach

$$\sin \alpha = \frac{P}{Q} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \alpha = 30^\circ.$$

Die Belastung der Fahrbahn beträgt

$$N = Q \cdot \cos \alpha = Q \cdot 0,866.$$

Beispiel 52. Anzugeben ist der Grund, weswegen die Achsschenkel der Landfuhrwerke etwas nach unten gekröpft werden.

Auf den Radkranz wirkt von unten der Gegendruck Q der Straße und auf die Nabe der senkrecht zur Zapfenfläche stehende Druck N (Fig. 84). Beide Kräfte setzen sich nun nach dem beigefügten Kräftedreieck zu einer Mittelkraft R zusammen, die bestrebt ist, das Rad immer wieder gegen den Bund der Achse zu schieben und dadurch den Vorstecksplint bzw. die Achsmutter zu entlasten.

Das Rad erhält etwas Sturz, damit die Wirkungslinien der Kraft N , die in der Mitte der Zapfenlänge angreift, und der Kraft Q , die etwa in der Mitte der Felgenbreite wirkt, sich ungefähr am Zapfenumfang schneiden.

Die Unterchachtung beträgt gewöhnlich $\alpha = 4^\circ 20'$; damit ergibt sich

$$R = Q \cdot \sin \alpha = 0,0756 \cdot Q.$$

Beispiel 53. Eine Dachfläche von der Breite $b = 7,2$ m und der Länge $l = 5,0$ m mit der Neigung $\alpha = 35^\circ$ gegen die Wagerechte sei durch Schnee belastet. Anzugeben ist die größte vom Schneedruck ausgeübte Kraft.

Je nach der Höhenlage des betreffenden Ortes hat die Schneelast, die sich bilden kann, eine gewisse Höhe. Die größte Schneelast für 1 m^2 wagerechter Fläche beträgt in Deutschland bei der Erhebung h m über den Meeresspiegel¹²⁾

$$q = 70 \left(1 + \frac{h}{500} \right).$$

Man kann der Einfachheit halber ansetzen:

bei der Meereshöhe $h = 0$ bis 200 m:	$q = 75 \text{ kg/m}^2$,
„ „ „ $h = 200$ „ 500 m:	$q = 120$ „
„ „ „ $h = 500$ „ 1000 m:	$q = 340$ „

Auf einer geneigten Fläche von der in der Schräge gemessenen Breite b (Fig. 85) hat die Schneelast nur die Breitenausdehnung $b \cdot \cos \alpha$ und es gilt demnach für die norddeutsche Tiefebene

$$Q = l \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot q = 5,0 \cdot 7,2 \cdot 0,819 \cdot 75 = 2210 \text{ kg}.$$

Die Kurve SS der Fig. 87 gibt den Verlauf des Schneedruckes für $F = 1 \text{ m}^2$ und $q = 75 \text{ kg/m}^2$ in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α an.

Die amtlichen Vorschriften⁷⁾ verlangen

bei $\alpha \leq 20^\circ$	25°	30°	35°	40°	45°	$> 45^\circ$
$q = 75$	70	65	60	55	50	0 kg/m^2 .

Beispiel 54. Eine Dachfläche von der Breite $b = 7,2$ m und der Länge $l = 5,0$ m habe die Neigung $\alpha = 35^\circ$ gegen die Wagerechte. Anzugeben ist die größte darauf vom Wind ausgeübte Druckkraft.

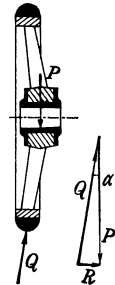


Fig. 84.

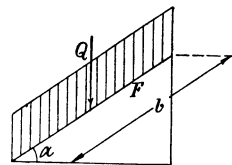
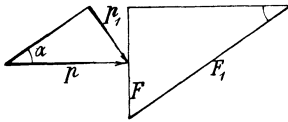


Fig. 85.

¹²⁾ Schaller, Beton u. Eisen 1909.

Der größte, bei gewöhnlichen Baukonstruktionen in Mitteldeutschland einzusetzende Winddruck beträgt $p = 125 \text{ kg/m}^2$ (Beispiel 20), und zwar auf eine lotrecht stehende Fläche. Eine unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigte Fläche, deren lotrechte Projektion die Fläche F ist, hat die Größe $F_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$



(Fig. 86). Die Windkraft $p \cdot F$ zerlegt sich nun in eine an der Fläche F_1 vorbeistreichende Seitenkraft und eine senkrecht dazu gerichtete

$$P_1 = F \cdot p_1 = F \cdot p \cdot \sin \alpha.$$

Fig. 86.

Wird hierin noch aus der vorstehenden Gleichung eingesetzt

$$F = F_1 \cdot \sin \alpha,$$

so folgt schließlich⁵⁾

$$P_1 = F_1 \cdot p \cdot \sin^2 \alpha,$$

also mit den gegebenen Zahlenwerten

$$P_1 = 7,2 \cdot 5,0 \cdot 125 \cdot 0,5736 = 1480 \text{ kg}.$$

Die Kurve WW der Fig. 87 gibt die Größe des senkrecht zur Fläche F_1 wirkenden Winddruckes in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α an unter Zugrundelegung von $F_1 = 1 \text{ m}^2$ und $p = 125 \text{ kg/m}^2$. Freilich ist diese bei Bauten vorgeschriebene Berechnung⁷⁾ wenig zuverlässig¹³⁾.

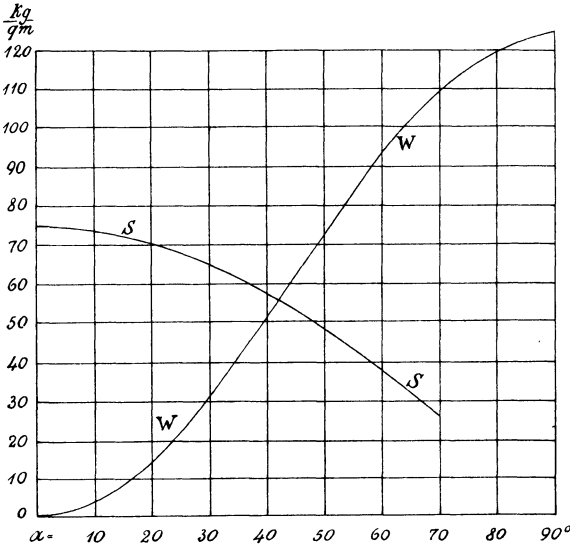


Fig. 87.

7. Das ebene Kräftevieleck.

An einem Körper greifen die Kräfte P_1 und P_2 an (Fig. 88), die nach Fig. 89 zu einer in derselben Ebene wirkenden

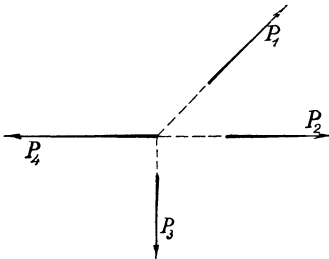


Fig. 88.

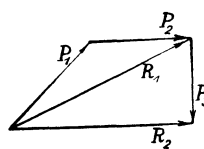


Fig. 89.

Mittelkraft R_1 zusammengesetzt werden können. Durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien von P_1 und P_2 gehe noch eine weitere Kraft P_3 ebenfalls

in derselben Ebene, die wieder mit R_1 zu der Mittelkraft R_2 vereinigt werden kann. Soll nun der Körper im Gleichgewicht sein, so muß an ihm noch eine vierte Kraft P_4 angebracht werden, deren Wirkungslinie

¹³⁾ Föppl, Z. d. V. d. I. 1912; Haedicke, Z. d. V. d. I. 1919.

mit der von R_2 zusammenfällt und deren Größe gleich der von R_2 ist, die aber die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 88). Da die Wirkungslinie von R_2 nach dem Vorhergehenden durch den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Kräfte P_1, P_2, P_3 geht, so läuft auch diejenige von P_4 durch denselben Punkt:

Vier in derselben Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen und das aus ihnen gebildete Kräfteviereck geschlossen ist.

Die Richtigkeit des hier aus dem Satz vom Kräfte-dreieck hergeleiteten Vierecksatzes kann durch einen Versuch nach Fig. 90 nachgeprüft werden.

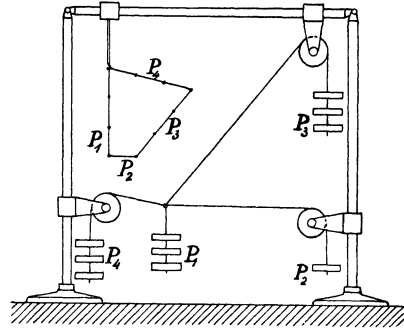


Fig. 90.

Indem man nötigenfalls die Zusammensetzung der gegebenen Kräfte in derselben Weise noch weiter fortführt, gelangt man zu dem Schluß, daß dem obigen Satz vom Kräfteck Geltung für beliebig viele in einer Ebene wirkende Kräfte zukommt, deren Wirkungslinien sich in demselben Punkt schneiden.

Beispiel 55. Anzugeben sind die Spannkraften in den Streben 1 und 2 des skizzierten Drehkranes in Fig. 91 unter der Belastung $Q = 6,0$ t.

Der Kettenzug nach dem Windwerk beträgt $P = \frac{1}{2} \cdot Q = 3,0$ t.

Man zeichnet das Kräfteviereck, indem man zuerst die bekannten Kräfte Q und P nach Größe und Richtung etwa in dem Maßstab $1 \text{ t} = 5 \text{ mm}$ aneinander anträgt (Fig. 92), an das freie Ende von P die Richtung der Strebe 1 ansetzt und an den Anfang von Q die Richtung der Strebe 2. Beide Linien werden zum Schnitt gebracht und darauf die Pfeile von S_1 und S_2 eingefügt derart, daß alle Pfeile die Figur in demselben Sinne durchlaufen.

Durch Aufmessen erhält man dann

$$S_1 = 49,5 \text{ mm} = 9,9 \text{ t},$$

$$S_2 = 89,0 \text{ mm} = 17,8 \text{ t}.$$

S_1 ist, da der Pfeil vom Angriffspunkt weg gerichtet ist, eine Zugkraft, S_2 , da der Pfeil zum Angriffspunkt hin gerichtet ist, eine Druckkraft.

Man erkennt, daß beide Spannkraften unter sonst gleichen Verhältnissen um so größer werden, je spitzer der Winkel zwischen S_1 und S_2 ist (vgl. Beispiel 26).

Beispiel 56. Anzugeben sind die Spannkraften S_1 und S_2 in den Streben 1 und 2 des Speicherkranes nach Fig. 93, wenn gegeben ist: $Q = 250 \text{ kg}$, $l = 2,0 \text{ m}$, $h = 1,84 \text{ m}$, $a = 1,20 \text{ m}$.

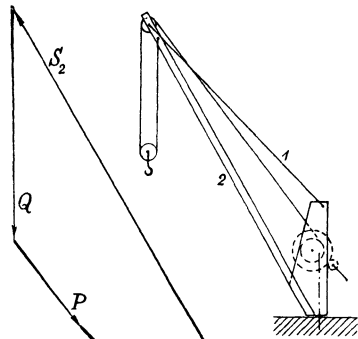
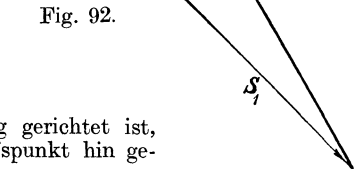


Fig. 91.

Fig. 92.



Das Kräfteviereck ist das in Fig. 94 im Kräftemaßstab 100 kg = 1 cm gezeichnete; darin ist S_2 parallel zu der geraden Verbindungslinie der beiden Endpunkte der Strebe 2 gezogen. Man entnimmt der Fig. 94:

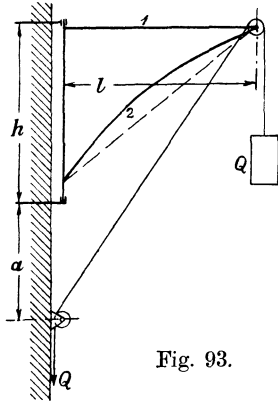


Fig. 93.

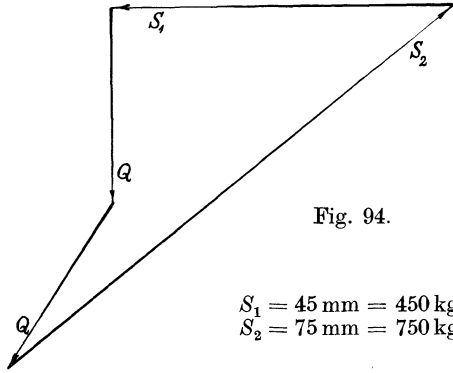


Fig. 94.

$$S_1 = 45 \text{ mm} = 450 \text{ kg},$$

$$S_2 = 75 \text{ mm} = 750 \text{ kg}.$$

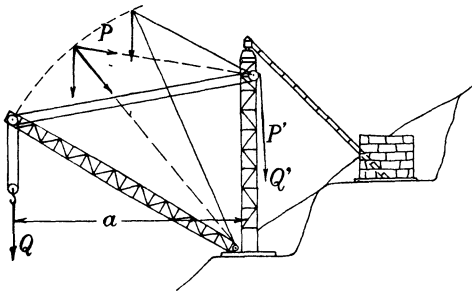


Fig. 95.

Beispiel 57. Anzugeben ist die Beanspruchung der Säule des Derrickkranes Fig. 95 bei den drei dargestellten Lagen des Auslegers durch die Seilzüge der viersträngigen Flaschenzüge für die Last und den Ausleger, wenn im übrigen die Angaben des Beispiels 29 gelten.

Beim viersträngigen Drahtseilflaschenzug kann die Kraft im letzten Seiltrum angesetzt werden zu $Q' = \frac{1,15}{4} \cdot Q$ bzw.

$P' = \frac{1,15}{4} \cdot P$. Damit ergeben sich in bezug auf den an der Kransäule angebrachten Zapfen der Seilrollen die in den Fig. 96 a, b, c nach Größe und Richtung einander angetragenen Kräfte, die sich zu der Mittelkraft R zusammensetzen. Letztere wird wieder zerlegt in die lotrecht wirkende Druckkraft V und die wagerechte Zugkraft H .

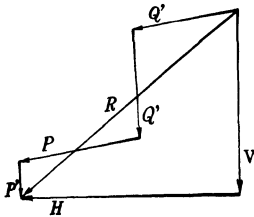


Fig. 96a.

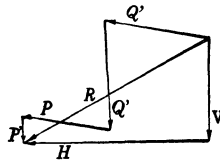


Fig. 96b.

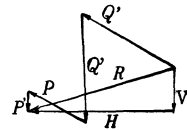


Fig. 96c.

Man erhält so aus den im Kräftemaßstab 1 t = 0,75 mm gezeichneten Kraft-ecken für

$a = 20$	15	$10 \text{ m},$
$H = 47,5$	$40,1$	$31,7 \text{ t},$
$V = 39,3$	$21,9$	$9,3 \text{ t}.$

Mit Hilfe der Formeln (25) und (26) kann die Aufgabe, bei einer Anzahl von Kräften, deren Wirkungslinien in einem Punkt zusammenlaufen, diejenige Kraft zu bestimmen, die zur Erhaltung des Gleichgewichtes noch erforderlich ist, auch rechnerisch gelöst werden: Man zerlegt alle gegebenen Kräfte nach zwei beliebig gewählten, aufeinander senkrecht stehenden Richtungen in

$$X_i = P_i \cdot \cos \alpha_i \quad Y_i = P_i \cdot \sin \alpha_i,$$

wie das die Fig. 97 für die Kraft P_1 andeutet, und erhält so zwei Reihen von Kräften in derselben Wirkungslinie. Nach Formel (29) besteht in jeder Reihe Gleichgewicht, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\sum X = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum Y = 0,$$

so daß man hieraus die Größe von X_n und Y_n bestimmt.

Dann ist nach dem Satz des Pythagoras

$$P_n^2 = X_n^2 + Y_n^2,$$

und die Neigung gegen die X -Achse wird ermittelt aus

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{Y_n}{X_n}.$$

Beliebig viele, in derselben Ebene angreifende Kräfte, deren Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen, befinden sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die Summe der wagerechten als auch die Summe der lotrechten Seitenkräfte je Null ergibt.

Der Satz wird gewöhnlich in der vorstehenden Fassung ausgesprochen, da lotrechte Kräfte und entsprechend wagerechte in der technischen Praxis am häufigsten vorkommen. Gelegentlich kann jedoch statt der wagerechten eine bestimmte andere Bezugslinie vorteilhafter sein; die „lotrechte“ muß dann aber unter allen Umständen senkrecht zur ersten stehen.

Beispiel 58. Gegeben sei (Fig. 97)

- Nr. 1: $P = 1900 \text{ kg}, \alpha = 30^\circ,$
- „ 2: $P = 3500 \text{ „}, \alpha = 45^\circ,$
- „ 3: $P = 2200 \text{ „}, \alpha = 120^\circ,$
- „ 4: $P = 2250 \text{ „}, \alpha = 342^\circ.$

Anzugeben ist die Größe und Richtung der Kraft P_5 , die mit den gegebenen im Gleichgewicht ist.

Nr.	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	X kg	Y kg
1	+ 0,866	+ 0,500	+ 1645	+ 950
2	+ 0,707	+ 0,707	+ 2475	+ 2475
3	+ 0,500	- 0,866	+ 1905	- 1100
4	- 0,951	+ 0,309	- 695	+ 2140
5	—	—	- 5330	- 4465
			0	0

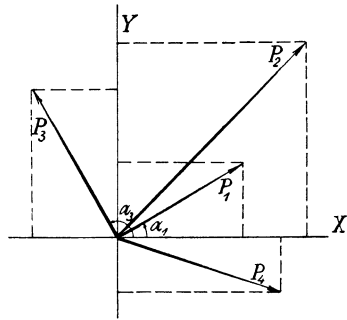


Fig. 97.

Damit wird nach Formel (19) und der dort gemachten Bemerkung über ihre Genauigkeit

$$P_5 = (0,960 \cdot 5330 + 0,368 \cdot 4465) \cdot 1,02 = 6900 \text{ kg,}$$

ferner

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-4465}{-5330} = +0,838,$$

also

$$\alpha \approx 40^\circ + 180^\circ = 220^\circ,$$

denn der Winkel muß im dritten Kreisviertel liegen, da X und Y beide negativ sind.

Um die Rechnung zu erleichtern, wählt man vorteilhaft die X -Achse derart, daß sie mit einer Kraft, z. B. etwa P_4 , zusammenfällt.

8. Kräfte im Raum an einem Punkt.

Wenn die Kräfte nicht in derselben Ebene wirken, sondern von einem Punkt nach verschiedenen Richtungen im Raum verlaufen, so wird die Aufgabe in zwei oder bisweilen auch mehr Einzelaufgaben für in derselben Ebene wirkende Kräfte zerlegt.

Die Lösung ist besonders einfach bei völlig symmetrischer Anordnung oder, wenn die Ebenen der beiden Teilaufgaben senkrecht zueinander stehen.

Beispiel 59. Ein Elektromagnet von 900 kg Eigengewicht und 1200 kg Tragfähigkeit ist nach Fig. 98 an 4 Ketten aufgehängt. Zu berechnen ist die Spannkraft in jeder Kette.

Die Kraft $Q = 2100$ kg verteilt sich gleichmäßig über die 4 Ketten. Für jede Öse gilt demnach das Kräfte-dreieck der Fig. 99, dessen Winkel α sich bestimmt aus

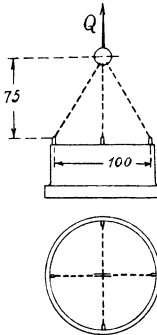


Fig. 98.

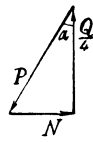


Fig. 99.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

Man erhält aus dem Dreieck den Kettenzug

$$P = \frac{Q}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha},$$

also mit Formel (38)

$$P = \frac{Q}{4} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

und die in wagerechter Richtung auf die Öse wirkende Kraft

$$H = \frac{Q}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Mithin ist

$$H = \frac{2100}{4} \cdot \frac{2}{3} = 350 \text{ kg,}$$

$$P = \frac{2100}{4} \sqrt{1,444} = 630 \text{ kg.}$$

Mit Rücksicht auf etwa eintretende einseitige Belastung und kleine Ungenauigkeiten der Kettenlängen bemißt man die Ketten für $\frac{4}{3}$ dieses Wertes.

Beispiel 60. Der Hauptträger eines Bockkranes besteht aus drei Fachwerk-wänden, die nach Fig. 100 miteinander verbunden sind¹⁴⁾. Die Höchstbelastung durch den Raddruck der Laufkatze beträgt $Q = 2,5$ t. Anzugeben ist ihre Verteilung auf die drei Fachwerk-wände.

Die Kräfte-dreiecke für die beiden oberen Knotenpunkte sind in Fig. 101 dargestellt. Aus der Ähnlichkeit mit den Dreiecken der Hauptfigur folgt

$$P_1 = Q \cdot \frac{241}{2 \cdot 298} = 0,404 \cdot 2,5 = 1,01 \text{ t,}$$

$$P_2 = Q \cdot \frac{\sqrt{298^2 + 120,5^2}}{298} = Q \cdot \sqrt{1 + 0,404^2} = 1,069 \cdot 2,5 = 2,875 \text{ t.}$$

Mit diesen Belastungen sind die betreffen- den ebenen Fachwerke zu berechnen.

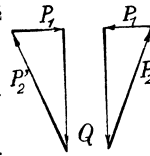


Fig. 101.

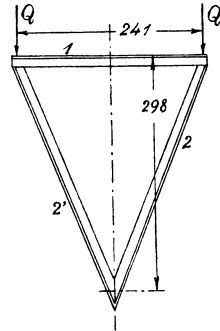


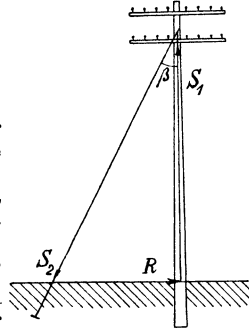
Fig. 100.

Beispiel 61. An einem Telegraphen- mast, der $i = 16$ Leitungen trägt, deren jede im Höchstfall mit $S = 110$ kg ange- spannt ist, wird die Leitungsführung um $\alpha = 30^\circ$ abgelenkt (Fig. 102). Anzu- geben sind die Richtung des Verankerungsseils, die Spannkraft, die den Mast und das Verankerungsseil beanspruchen, wenn letzteres mit dem Mast den Winkel $\beta = 25^\circ$ bildet

Die Gesamtspannkraft der Drähte beträgt auf jeder Seite des Mastes

$$P = i \cdot S = 16 \cdot 110 = 1760 \text{ kg.}$$

Das Kräfteparallelogramm ist das im Grundriß der Fig. 102 dargestellte, und man erkennt, daß die Mittelkraft R den stumpfen Winkel $\pi - \alpha$ halbiert. Die lotrechte Ebene der Verankerung muß also mit den lotrechten Ebenen, die durch zwei aufeinander- folgende Tragstangen gehen, den Winkel $\frac{\pi + \alpha}{2}$ bilden, wenn ein Zugseil die Verankerung bewirken soll; im Fall einer Druckstange als Verankerung muß der Winkel $\frac{\pi - \alpha}{2}$ betragen.



Die Größe von R bestimmt sich nach dem Kosinus- satz Formel (44) zu

$$R = P \cdot \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot \cos \alpha} = P \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha)} = 1760 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,134} = 910 \text{ kg.}$$

Das Kräfte-dreieck für die Zerlegung von R in S_1 und S_2 enthält der Aufriß der Fig. 102, dem man entnimmt

$$S_2 = R \cdot \cotg \alpha = 910 \cdot 2,145 = 1950 \text{ kg,}$$

$$S_1 = R : \sin \alpha = 910 : 0,466 = 2160 \text{ kg.}$$

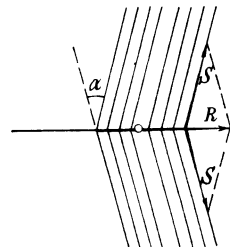


Fig. 102.

Zu S_1 tritt noch das halbe Gewicht der auf jeder Seite befindlichen Drähte, sowie der Querträger und schließlich der Stütze selbst.

Eine häufig wiederkehrende Aufgabe ist, die Kräfte in den Streben eines dreiseitigen Bockes zu bestimmen, auf dessen Spitze eine oder

¹⁴⁾ Z. d. V. d. I. 1902.

mehrere bekannte Kräfte einwirken. Auch hier findet die Zerlegung in zwei Aufgaben der Ebene statt, die freilich sehr verschieden vorgenommen werden kann.

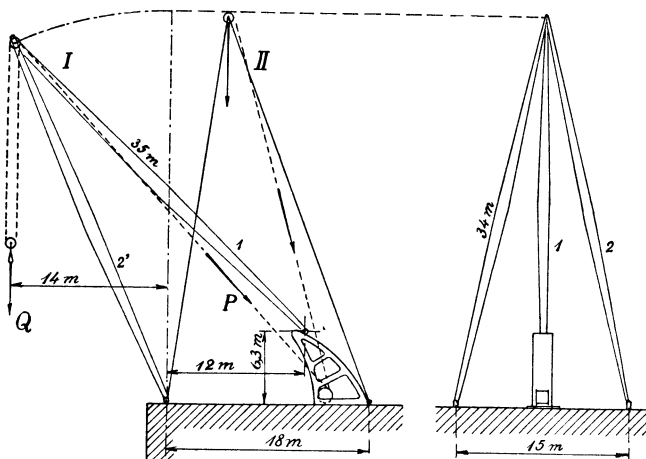


Fig. 103a u. b.

Beispiel 62. Der in der Fig. 103 skizzierte Scherenkran soll die Höchstlast $Q = 80$ t tragen, der Kettenzug beträgt $P = 21$ t. Anzugeben sind die in den drei Streben wirkenden Spannkraften, wenn der Kran ganz ausgelegt ist (Stellung I) und wenn er ganz zurückgezogen ist (Stellung II).

I. Volle Ausladung nach vorn:

Man zeichnet zuerst das Kräfteviereck für die Auslegerspitze des in der Zeichenebene der Fig. 103a gelegenen Strebensystems (Fig. 104) etwa im Kräftemaßstab $1\text{ t} = \frac{1}{2}\text{ mm}$ und erhält so

$$S_1 = 35,5\text{ mm} = 71\text{ t Zug},$$

$$S'_2 = 79,0\text{ mm} = 158\text{ t Druck}.$$

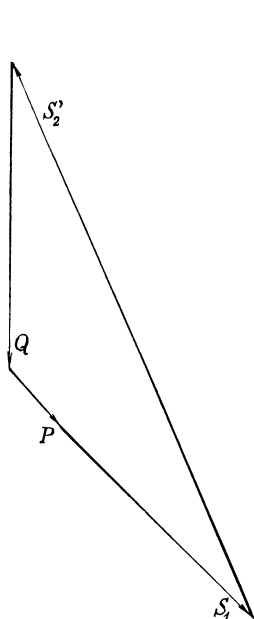


Fig. 104.



Fig. 105.

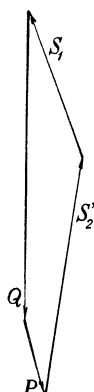


Fig. 106.



Fig. 107.

Dabei ist angenommen worden, daß die beiden vorderen Streben S_2 eine volle Platte S'_2 bilden. Diese Platte ist in Fig. 103b soweit zurückgedreht gezeichnet worden, daß die Strebe S'_2 der Fig. 103a lotrecht in der strichpunktierter Lage steht. Sie erscheint dann in Fig. 103b in unverkürzter Größe und

wird an der Spitze in ihrer Ebene durch die oben ermittelte Kraft S_2 belastet. Das Kräfteedreieck für den Fall ist in Fig. 105 wiedergegeben, und man mißt auf

$$S_2 = 40,5\text{ mm} = 81\text{ t Druck}.$$

II. Stellung ganz nach hinten:

Das Kräfteviereck für die Zeichenebene der Fig. 103a ist jetzt das in Fig. 106 dargestellte und man entnimmt ihm

$$S_1 = 20,5 \text{ mm} = 41 \text{ t Druck,}$$

$$S_2' = 31,0 \text{ mm} = 62 \text{ t ,, .}$$

S_2' wird dann wieder in derselben Weise zerlegt wie unter I, und man erhält jetzt aus Fig. 107

$$S_2 = 16,0 \text{ mm} = 32 \text{ t Druck.}$$

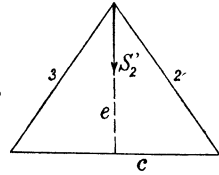


Fig. 108.

Beispiel 63. Auf den in Beispiel 32 Fig. 42 untersuchten Blechschornstein wirke der Winddruck $P = 640 \text{ kg}$ in umgekehrter Richtung. Anzugeben ist die dadurch in den Zugstangen 2 und 3 hervorgerufene Spannkraft.

Man bestimmt zuerst für die Ebene der Seitenansicht der Fig. 42 auf demselben Wege wie in Beispiel 32

$$S_2' = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{b}\right)^2}.$$

Das Kräftedreieck für die Ebene der beiden Zugstangen 2 und 3 (Fig. 108) ist das in Fig. 109 aufgetragene, und man entnimmt den ähnlichen Dreiecken

$$S_2 : \frac{1}{2} \cdot S_2' = \sqrt{e^2 + \left(\frac{1}{2} c\right)^2} : e = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2e}\right)^2},$$

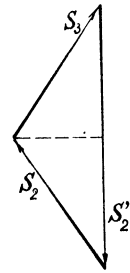


Fig. 109.

worin gemäß Fig. 42 einzusetzen ist

$$e^2 = (h_2 + h_3)^2 + b^2 \quad \text{und} \quad c^2 = 4 \cdot (a^2 - b^2),$$

so daß man erhält

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot S_2' \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 + (h_2 + h_3)^2}} = \frac{1}{2} \cdot S_2' \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{b}\right)^2}}.$$

Wird hierin noch der obige Wert von S_2' eingesetzt, so folgt schließlich mit $b = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a$:

$$S_2 = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{a}\right)^2},$$

ebenso groß, wie in dem Fall, daß der Winddruck nur von einer einzigen Zugstange aufgenommen wird.

Die größte lotrechte Belastung der Schornsteinsäule wird demgemäß bei Winddruck umgekehrt zu der in Fig. 42 eingezeichneten Pfeilrichtung erhalten, und sie beträgt

$$Q' = P \cdot \frac{h_2 + h_3}{b} = 2 \cdot Q.$$

Wird die Säule von vier gleich geneigten und den Umfang in vier gleiche Teile zerlegenden Zugstangen gehalten, so ruft der auf die Säule gerade in der Mitte zwischen zwei Stangen wehende Wind in ihnen die Spannkraft

$$S_2 = S_1 : \sqrt{2}$$

hervor, und die Säulenbelastung wird in dem Fall

$$Q' = Q \cdot \sqrt{2}.$$

Beispiel 64. Anzugeben sind auf rein zeichnerischem Wege die in den drei Streben des in Fig. 110 dargestellten Bockgestelles durch die an der Spitze A angreifende Kraft P hervorgerufenen Spannkkräfte.

Man projiziert zuerst den Schnittpunkt C'' der Wirkungslinie der Aufrißprojektion der Kraft mit der Grundrißebene in die Grundrißebene nach C' herunter. Die Gerade $\overline{BC'}$ ist dann die in der Grundrißebene liegende Spur der durch die Strebe 1 und die Kraft P gehenden Ebene. Ebenso ist $\overline{B_3'B_2'}$ die Spur der durch die Streben 2 und 3 gehenden Ebene im Grundriß. Beide Spuren schneiden sich in B' , und $\overline{A'B'}$ ist die Grundrißprojektion der Schnittgeraden beider Ebenen, deren Aufrißprojektion durch Hinaufloten nach $\overline{A''B''}$ erhalten

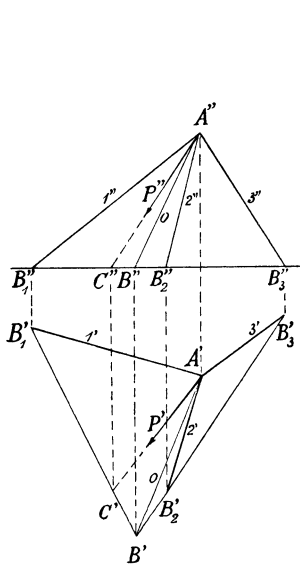


Fig. 110.

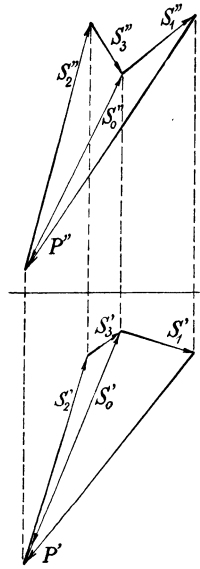


Fig. 111.

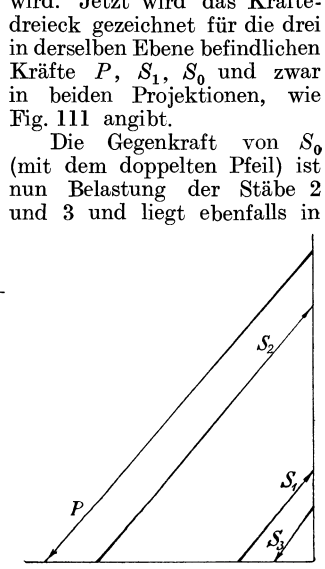


Fig. 112.

wird. Jetzt wird das Kräfte-dreieck gezeichnet für die drei in derselben Ebene befindlichen Kräfte P, S_1, S_0 und zwar in beiden Projektionen, wie Fig. 111 angibt.

Die Gegenkraft von S_0 (mit dem doppelten Pfeil) ist nun Belastung der Stäbe 2 und 3 und liegt ebenfalls in

deren Ebene. Wird das Kräfte-dreieck aus S_0, S_2, S_3 in beiden Projektionen an das erste herangesetzt, so hat man die Projektionen der drei gesuchten Stabkräfte damit ermittelt¹⁵⁾.

Ihre wirkliche Größe findet sich aus der Überlegung, daß beide Projektions-ebenen und somit alle darin befindlichen Projektionen aufeinander senkrecht stehen, daß also die wahre Größe die Hypotenuse des aus den beiden Projektionen gebildeten rechtwinkligen Dreiecks ist. Die Fig. 112 liefert hiernach die wahren Größen der Stabkräfte, ebenso wie die der Belastung P .

Man bemerkt, daß hier nur eine allgemeinere Darstellung des in Beispiel 62 behandelten Sonderfalles mit Hilfe der Regeln der darstellenden Geometrie gegeben ist.

Die zeichnerische Lösung wird besonders einfach, wenn eine Projektion der Kraft P mit der eines Stabes zusammenfällt oder ganz verschwindet.

Im zweiten Fall, wo $P'' = P = 1200$ kg eine lotrechte Last ist (Fig. 113) zeichnet man in einem beliebigen Maßstab das Kräfte-dreieck der Grundrißebene aus S_1, S_2, S_3 (Fig. 114) und darüber zwischen den Projektionsloten den Linien-zug der Aufrißebene S_1'', S_2'', S_3'' , der durch die Kraft P geschlossen werden muß. Man entnimmt der Zeichnung jetzt nachträglich den Kräfte-maßstab 1200 kg

¹⁵⁾ Culmann, Die graphische Statik. II. Aufl. 1875.

= 85,5 mm oder 1 mm = 14,05 kg und setzt die Projektionen der Stabkräfte rechtwinklig aneinander (Fig. 115). Durch Aufmessen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} S_1 &= 28,5 \text{ mm} = 400 \text{ kg,} \\ S_2 &= 43,5 \text{ mm} = 610 \text{ kg,} \\ S_3 &= 58,0 \text{ mm} = 815 \text{ kg.} \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn die Projektion eines Stabes verschwindet.

Wenn eine Projektion der Kraftwirkungslinie, etwa P' , mit der eines Stabes, etwa S_1 , zusammenfällt, arbeitet man in der betreffenden Projektionsebene mit, der vorläufig nur der Richtung nach bekannten Mittelkraft $R' = P' \pm S_1'$ der beiden und trennt diese Mittelkraft dann gemäß den Ergebnissen der zweiten Projektion. Im übrigen entspricht die Lösung der vorstehenden. In das rechtwinklige Projektionskreuz zur Ermittlung der wahren Größen ist auch die gegebene Kraft P mit ihren Projektionen P' und P'' einzutragen, die jetzt erst den Kräftemaßstab angibt.

Die allgemeine Aufgabe ist auch ohne Zuhilfenahme räumlicher Überlegungen lösbar¹⁶⁾: Da der räumliche Linienzug P, S_1, S_2, S_3 im Fall des Gleichgewichtes geschlossen sein muß, so ist auch jede Projektion desselben ein geschlossenes ebenes Viereck, dessen Ecken auf den Projektionsloten übereinander liegen.

Man trägt also $P' = \overline{A'B'}$ und $P'' = \overline{A''B''}$ im Grund- und Aufriß in einem bestimmten Kräftemaßstab auf, setzt etwa an P' die Parallelen zu den Grundrißprojektionen der Stäbe 1 und 3 (Fig. 116 und 117) an und zieht hierdurch die Parallele $\overline{C'D'}$ zu der Grundrißprojektion

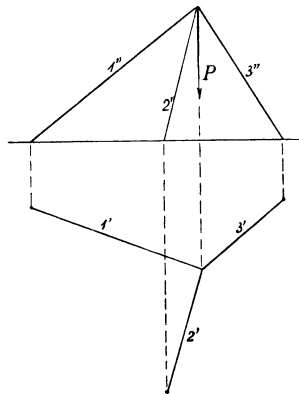


Fig. 113.

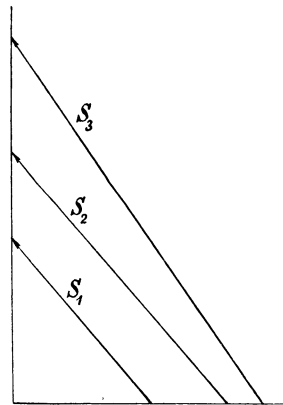


Fig. 115.

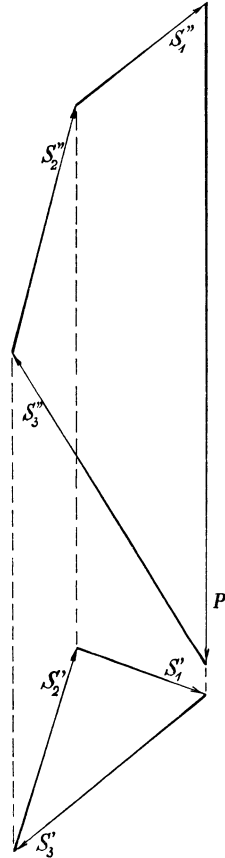


Fig. 114.

des Stabes 2; die letzten Eckpunkte dieses willkürlichen Kräftevierecks werden in die Aufrißprojektion nach $\overline{C''D''}$ hinaufgelotet. Da nun C' ganz beliebig gewählt wurde, so ist die vierte, durch den Anfangspunkt von P'' gezogene Linie $\overline{A''D''}$ im allgemeinen nicht parallel zu der Aufrißprojektion des Stabes 3. Man zieht jetzt im Grundriß eine zweite Parallele $\overline{c'd'}$ wieder willkürlich und lotet die neuen Eckpunkte in den Aufriß hinauf nach c'' und d'' ; die vierte Linie $\overline{A''d''}$ dieses Zuges ist im allgemeinen wieder nicht parallel zur Aufrißprojektion des Stabes 3. Zieht man jetzt aber die richtige Parallele durch A'' , so schneidet

sie die Verbindungsgerade $\overline{D''d''}$ in einem Punkt D , der der richtige ist. Denn ein nochmaliges Probieren lehrt, daß alle Punkte D'' der Aufrißprojektion immer auf derselben Geraden liegen, mithin auch der richtige Punkt. Die Vervollständigung der beiden so richtig bestimmten Kräftevierecke in Auf- und Grundriß vom Punkt D aus ist jetzt leicht gemacht; die Eckpunkte müssen alle in beiden Projektionen genau senkrecht übereinander liegen. Die wahre Größe der Stabkräfte wird wieder gemäß Fig. 115 rechtwinkligen Dreiecken entnommen.

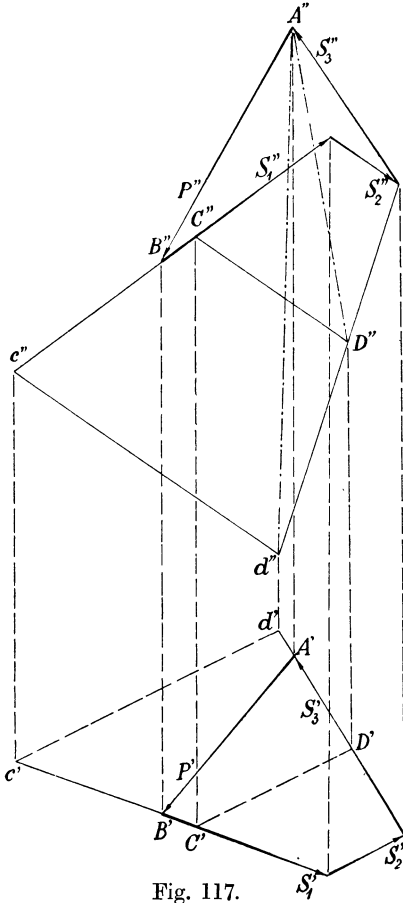


Fig. 117.

Die rein rechnerische Lösung derselben Aufgabe ist so umständlich, daß sie kaum ausgeführt werden dürfte. Es genügt, die nachstehenden Angaben beizubringen.

Durch den Angriffspunkt A der Kraft P sind drei aufeinander senkrecht stehende Achsen gelegt, mit welchen P die Winkel α, γ, β einschließt (Fig. 118). Durch die Achsen

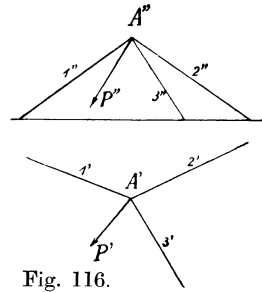


Fig. 116.

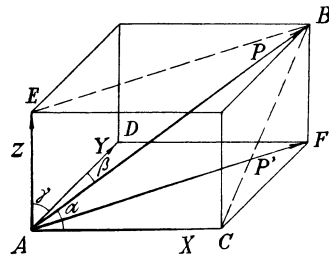


Fig. 118.

sind im Punkt A drei aufeinander senkrechte Ebenen gelegt worden und ebenso durch den Endpunkt B der Kraftstrecke P drei dazu parallele Ebenen, so daß ein Parallelepiped entstanden ist.

Man erhält nun aus den entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken die drei Seitenkräfte, in welche P auf die Weise zerlegt worden ist:

$$\begin{aligned}
 \text{Aus Dreieck } ABC: & \quad X = P \cdot \cos \alpha, \\
 \text{,, ,, } ABD: & \quad Y = P \cdot \cos \beta, \\
 \text{,, ,, } ABE: & \quad Z = P \cdot \cos \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

¹⁶⁾ Müller - Breslau. Graphische Statik der Baukonstruktionen. 1887.

Zieht man in der $X Y$ -Ebene $ACFD$ die Mittelkraft P' von X und Y , so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$P'^2 = X^2 + Y^2,$$

ferner ebenso in dem Dreieck ABF

$$P^2 = P'^2 + Z^2,$$

womit man erhält:

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{49}$$

Die Gleichung wird benutzt, um die Mittelkraft aus den gegebenen drei im Raum senkrecht aufeinander stehenden Seitenkräften der Größe nach zu ermitteln. Die Neigungen von P gegen die einzelnen Seitenkräfte bestimmt man dann aus den Formeln 48.

Setzt man in Formel 49 die Gleichungen 48 ein, so folgt

$$P^2 = P^2 \cdot \cos^2 \alpha + P^2 \cdot \cos^2 \beta + P^2 \cdot \cos^2 \gamma$$

oder

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \tag{50}$$

als Bedingung, der die drei Neigungswinkel entsprechen müssen. Sie dient zur Kontrolle der richtigen Bestimmung der Winkel.

Greifen nun in einem Punkt mehrere Kräfte P nach verschiedenen Richtungen des Raumes an, so führt man die obige Zerlegung gemäß den Gleichungen 48 für jede einzelne Kraft aus. Sollen die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht sein, so muß für jede Achse die Bedingung (29) erfüllt sein:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0. \tag{51}$$

Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, sind nur dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Seitenkräfte nach drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen je Null ergibt.

Man erhält so drei Gleichungen ersten Grades für die Kräfte. Die räumliche Aufgabe der an einem Punkt angreifenden Kräfte gestattet also, drei Unbekannte zu bestimmen, entweder, wenn alle Richtungen gegeben sind, drei Kraftgrößen, oder, wenn alle Kraftgrößen gegeben sind, drei Richtungen oder die anderen sich hieraus ergebenden Zusammenstellungen, zwei Kraftgrößen und eine Richtung bzw. umgekehrt.

9. Parallele Kräfte in derselben Ebene.

Es soll festgestellt werden, ob die drei in der Zeichenebene wirkenden parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3 der Fig. 119 im Gleichgewicht sind. Nach den Angaben in Abschnitt 6 sind drei in derselben Ebene befindliche Kräfte im Gleichgewicht, wenn das in einem beliebigen Längen-

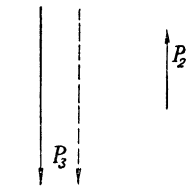


Fig. 119.

maßstab aufgetragene Kräfte-dreieck geschlossen ist und die Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen.

Das Kräfte-dreieck fällt im vorliegenden Fall in eine Gerade zusammen — zur besseren Veranschaulichung ist P_3 seitwärts als Gegen-gerade herausgezeichnet — (Fig. 122), so daß die obige Bedingung für parallele Kräfte in die des Abschnittes 5 übergeht: Die algebraische Summe aller Kräfte muß Null ergeben. Die drei parallelen Wirkungslinien kommen jedoch erst in einem unendlich fern gelegenen Punkt zum Schnitt, gleichgültig welche Lage die drei Kräfte zueinander haben, und es ist klar, daß, wenn P_3 mit P_1 und P_2 etwa in der gezeichneten Lage der Fig. 119 im Gleichgewicht ist, sie es in der gestrichelten oder einer beliebigen anderen Lage nicht sein kann.

Man gelangt zu der Lösung, wenn man an die Kräfte P_1 und P_2 in derselben Wirkungslinie zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P' ansetzt, die sich ja gegenseitig aufheben und deshalb keine Änderung an dem ursprünglichen Kräfteverhältnis hervorrufen. Jede dieser Zusatz-

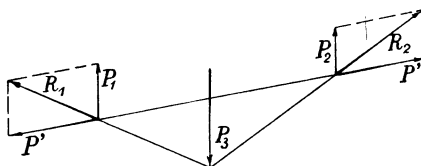


Fig. 120.

kräfte wird nun mit P_1 bzw. P_2 zu einer Mittelkraft R_1 bzw. R_2 vereinigt (Fig. 120); die beiden R

schneiden sich jetzt in einem Punkt, und Gleichgewicht unter R_1 , R_2 , P_3 besteht nach Abschnitt 6 nur dann, wenn die Wirkungslinie von P_3 durch diesen Schnittpunkt geht¹⁰⁾.

Der Vorgang kann z. B. durch einen Versuch nach Fig. 121 veranschaulicht werden. Eine längere Schnur, die gerade ausgespannt nach

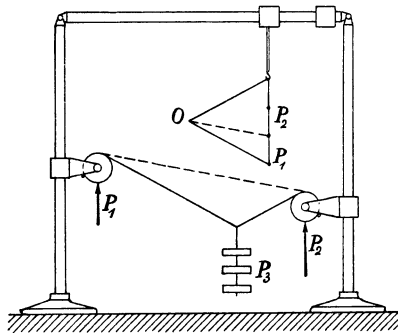


Fig. 121.

der gestrichelten Linie verläuft, wird an ihren Enden durch zwei Stifte unter den seitlichen Tragrollen festgehalten und durch die Kraft P_3 mittels eines Gleithakens belastet. Der Haken wird unter sonst gleichen Verhältnissen immer in eine ganz bestimmte Stellung gleiten und zwar die, daß wenn die Größen von P_1 und P_2 wieder durch eine Perlen-schnur dargestellt werden, die drei von den Endpunkten der Kräfte parallel zu den drei Schnurrichtungen gezogenen Fäden sich in

einem Punkt O schneiden (vgl. Fig. 122). Man nennt das von dem Tragseil der Kraft P_3 gebildete Dreieck das Seileck, den Schnittpunkt der dazu parallelen Linien den Pol, was nur eine andere Bezeichnung für Punkt ist, und die von dem Pol nach den Enden des Kräfteckes gehenden Linien die Polstrahlen.

Da die Länge der Schnur, an der P_3 in Fig. 121 hängt, ganz be-

liebig gewählt werden kann, bzw. in Fig. 120 die Größe der Kräfte P' oder die Lage ihrer Wirkungslinie bzw. die der Tragrollen in Fig. 121, so ist auch die Lage des Poles O eine ganz beliebige.

Die gestellte Aufgabe wird demnach am einfachsten erledigt, indem man die gegebenen Kräfte auf einer Geraden in einem beliebigen Kräftemaßstab aufträgt (Fig. 122), wobei ihre algebraische Summe Null ergeben muß, einen Pol O an beliebiger Stelle der Zeichenebene wählt, von dort aus die Polstrahlen OA , OB , OC nach den Endpunkten der drei Kräfte zieht und nun in dem gegebenen Kräfteplan (Fig. 123) zu OA die Parallele a an beliebiger Stelle zwischen den Wirkungslinien von P_1 und P_2 einträgt, von dem Endpunkte dieser Strecke a auf P_1 die Parallele b zum Strahl OB und von dem Endpunkt der Strecke a auf P_2 die Parallele c zum Strahl OC zieht. Gleichgewicht besteht nur dann, wenn P_3 durch den Schnittpunkt von b und c geht, d. h., wenn außer dem Krafteck auch das Seileck geschlossen ist.

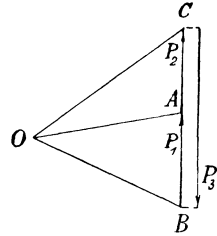


Fig. 122.

Wird noch die Länge der von der Wirkungslinie der Kraft P_3 im Seileck herausgeschnittenen Strecke mit d bezeichnet, die Teilstrecke von a zwischen P_3 mit a_2 , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken der Fig. 123 und 122

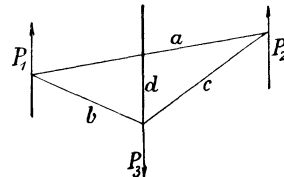


Fig. 123.

$$\frac{a_1}{d} = \frac{OA}{P_1} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{d} = \frac{OA}{P_2}.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P_2}{P_1}. \tag{52}$$

Wenn Gleichgewicht besteht, teilt die dritte Kraft den Abstand der beiden anderen im umgekehrten Verhältnis ihrer Größen.

Gewöhnlich wird der Abstand nicht in einer beliebigen Schrägen gemessen, sondern man mißt den kürzesten, senkrecht zu den Wirkungslinien der Kräfte stehenden. Schreibt man in dem Fall die Gleichung 52 als Produktgleichung, so lautet sie

$$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2. \tag{53}$$

Man bezeichnet nun das Produkt aus der Größe einer Kraft und ihrem senkrechten Abstand von einem bestimmten Punkt oder einer bestimmten Geraden oder Ebene¹⁷⁾, die nur parallel zur Wirkungslinie der Kraft verläuft, als Drehmoment oder kurz Moment der Kraft in bezug auf diesen Punkt bzw. diese Gerade oder Ebene:

$$M = a \cdot P. \tag{54}$$

¹⁷⁾ Monge, *Traité élémentaire de Statique*. 1786.

Man rechnet das Drehmoment als positiv, wenn es rechtsdrehend ist, und als negativ, wenn es linksdrehend ist (Fig. 124). Da die Kraft in kg und der Abstand in m gemessen wird, so ist das Maß des Drehmomentes das Meterkilogramm (mkg). Bisweilen rechnet man auch mit Metertonnen (mt) bzw. Zentimeterkilogramm (cmkg).

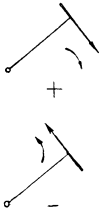


Fig. 124.

$$\begin{aligned} 1 \text{ cmkg} &= 0,01 \text{ mkg}, \\ 1 \text{ mt} &= 1000 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck Moment ist hier nur eine Abkürzung für die durch Formel (54) bestimmte Rechenoperation, etwa wie die Ausdrücke Quadratwurzel oder dritte Potenz einer Größe bestimmte Rechenoperationen angeben.

Mit dieser Bezeichnung geht die Gleichung (53) über in

$$M_1 - M_2 = 0: \quad (55)$$

Im Falle des Gleichgewichtes dreier paralleler Kräfte ist die algebraische Summe der Momente von zwei Kräften in bezug auf die Wirkungslinie der dritten gleich Null.

Nachgeprüft werden kann der Satz durch einen Versuch nach Fig. 125. Das Gewicht der freihängenden, um ihren Mittelzapfen drehbaren Scheibe ist gleich dem Gegengewicht 1. Werden nun in gleichen Abständen von der Lotrechten durch den Mittelpunkt der Scheibe die gleichen Kräfte 2 und 3 angeordnet, so besteht Gleich-

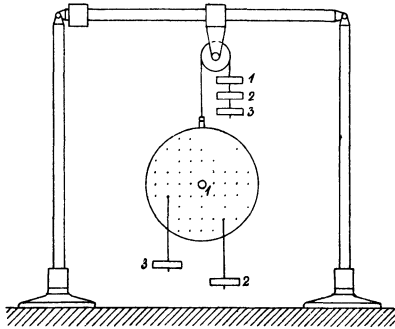


Fig. 125.

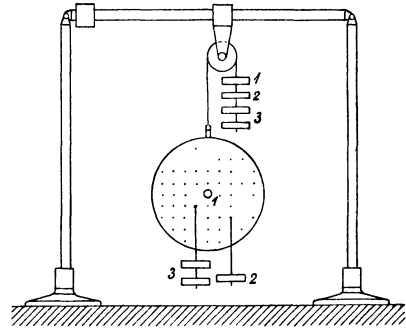


Fig. 126.

gewicht, wenn die entsprechenden Gegenkräfte 2 und 3 an der Drehachse der Scheibe nach oben wirkend angebracht werden. Sind die Abstände der Kräfte 2 und 3 von der Lotrechten durch die Scheibenachse verschieden (Fig. 126), so müssen ihre Größen im umgekehrten Verhältnis der Abstände stehen [Formel (52)], damit keine Drehung der Scheibe eintritt, und die Gegenkraft muß wieder gleich ihrer Summe sein, damit die Scheibe nicht heruntersinkt.

Bisweilen ist die folgende Umformung des Drehmomentes von Vorteil: Der Angriffspunkt A der Kraft R (Fig. 127) sei durch die gegebene Länge l mit dem Punkte O verbunden, in bezug auf den das

Drehmoment genommen werden soll. Dann gilt gemäß Formel (54) $M = R \cdot a$, worin a der senkrechte Abstand der Wirkungslinie von R vom Bezugspunkt O ist. Man kann nun R in zwei Seitenkräfte zerlegen, deren eine P_1 senkrecht zu l steht, während die Wirkungslinie der anderen P_2 mit l zusammenfällt. Die beiden Dreiecke, die von den Seiten R, P_1, P_2 bzw. l, a, R gebildet werden, sind ähnlich, und man erhält somit

$$R : P_1 = l : a$$

oder

$$R \cdot a = P_1 \cdot l :$$

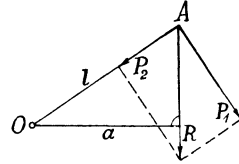


Fig. 127.

Das Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen bestimmten Punkt ihrer Ebene kann ersetzt werden durch das Produkt aus Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von dem gegebenen Punkt und ihrer Seitenkraft senkrecht zu dieser Entfernung.

Beispiel 65. Auf einen Körper wirken in dem Abstand $a = 2,37$ m die beiden parallelen Kräfte $P_1 = 325$ kg und $P_2 = 550$ kg nach derselben Richtung. Anzugeben ist die Größe und Lage der Stützkraft N , die ihnen das Gleichgewicht hält.

Man kann die Aufgabe zeichnerisch nach der zu Fig. 123 gegebenen Vorschrift lösen. Auf rein rechnerischem Wege ergibt sich

$$N = P_1 + P_2 = 325 + 550 = 875 \text{ kg}$$

entgegengesetzt zu P_1 und P_2 gerichtet.

Nun gilt nach Formel (52)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

oder wenn hierzu beiderseits 1 addiert wird,

$$\frac{a_1}{a_2} + 1 = \frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$$

bzw. mit den obigen Bezeichnungen

$$\frac{a}{a_2} = \frac{N}{P_1},$$

also

$$a_2 = a \cdot \frac{P_1}{N} = 2,37 \cdot \frac{325}{875} = 0,88 \text{ m,}$$

$$a_1 = a - a_2 = 2,37 - 0,88 = 1,49 \text{ m.}$$

Beispiel 66. Das Schwungrad einer Dampfmaschine belastet die Welle mit $P = 4750$ kg; die Abstände der Schwungradmitte von den beiden Lagermitten betragen $a_1 = 110$ cm und $a_2 = 75$ cm (Fig. 128). Anzugeben sind die beiden Lagerdrücke N_1 und N_2 .

Die drei Kräfte sind einander parallel. Man benutzt also Formel (55), indem man zuerst die Momentengleichung in bezug auf die Wirkungslinie von N_2 aufstellt:

$$+N_1 \cdot (a_1 + a_2) - P \cdot a_2 = 0,$$

$$\text{also} \quad N_1 = P \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 4750 \cdot \frac{75}{185} \approx 1930 \text{ kg.}$$

Nun wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von N_1 aufgestellt:

$$+P \cdot a_1 - N_2 \cdot (a_1 + a_2) = 0,$$

$$\text{also} \quad N_2 = P \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} = 4750 \cdot \frac{110}{185} \approx 2820 \text{ kg.}$$

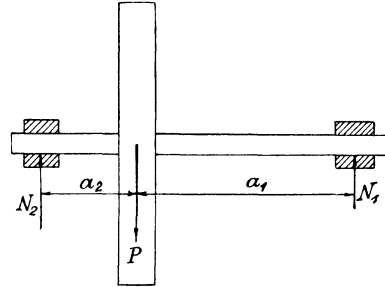


Fig. 128.

Einen Nachweis für die Richtigkeit der Rechnung gibt dann der Sumsensatz:

$$N_1 + N_2 = P \quad \text{bzw.} \quad 1930 + 2820 = 4750 \text{ kg.}$$

Beispiel 67. Eine Drahtseilscheibe ist belastet mit $P = 380$ kg. Ihre Mitte ist um $a_1 = 12$ cm von dem vorderen Lager entfernt; der Abstand der beiden Lager beträgt $a = 32$ cm (Fig. 129). Zu berechnen sind die beiden Lagerdrücke N_1 und N_2 .

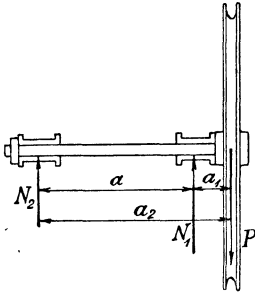


Fig. 129.

Um N_1 zu ermitteln, wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von N_2 aufgestellt:

$$-N_1 \cdot a + P \cdot a_2 = 0,$$

also

$$N_1 = P \cdot \frac{a_2}{a} = 380 \cdot \frac{44}{32} \approx 520 \text{ kg,}$$

somit größer als P !

Um N_2 zu bestimmen, wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von N_1 aufgestellt:

$$+N_2 \cdot a + P \cdot a_1 = 0,$$

also

$$N_2 = -P \cdot \frac{a_1}{a} = -380 \cdot \frac{12}{32} \approx -140 \text{ kg.}$$

Der negative Wert von N_2 besagt, daß die Richtung von N_2 in Fig. 129 falsch eingetragen wurde; es ist klar, daß die obere Lagerschale des zweiten Lagers die Welle halten muß, damit sie nicht von der Kraft P umgekippt wird.

Die Richtigkeit der Rechnung wird nachgewiesen durch

$$N_1 - N_2 = P \quad \text{bzw.} \quad 520 - 140 = 380 \text{ kg.}$$

In der Fig. 123 und den dabei stehenden Darlegungen ist angenommen worden, daß P_3 diejenige Kraft ist, die den beiden anderen P_1 und P_2 das Gleichgewicht hält. Ebenso gut kann natürlich P_2 als die Kraft angesehen werden, die den beiden P_1 und P_3 das Gleichgewicht hält, oder auch P_1 als diejenige, die mit P_2 und P_3 im Gleichgewicht ist. Die Fig. 123 lehrt sofort, daß, wenn die beiden ersten Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, die dritte die Richtung der kleineren hat und außerhalb beider auf der Seite der größeren liegt.

Auch aus dieser Überlegung heraus hätte man sofort in Beispiel 67 die Richtung von N entgegengesetzt zur gezeichneten eintragen müssen.

Die Gegenkraft von P_3 in Fig. 123 ist die Mittelkraft der beiden anderen. Die Fig. 122 lehrt dann, wenn P_3 entgegengesetzt angenommen wird: Die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte ist gleich ihrer algebraischen Summe. Dasselbe ergibt sich, wenn etwa die Gegenkraft von P_2 als Mittelkraft von P_1 und P_3 betrachtet wird.

In Fig. 130 sei R die Mittelkraft der beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2 , so daß $R = P_1 + P_2$ ist. Dann besteht außerdem die Gleichung 53: $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$. In bezug auf die in einem beliebigen

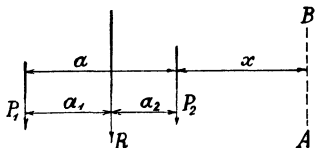


Fig. 130.

Abstand x von P_2 gezogene, zu den Wirkungslinien der Kräfte parallele Gerade AB ist nun das Drehmoment der Mittelkraft

$$M_R = R \cdot (x + a_2) = R \cdot x + (P_1 + P_2) \cdot a_2$$

oder

$$M_R = R \cdot x + P_1 \cdot a_2 + P_2 \cdot a_2,$$

und die Summe der Drehmomente der Seitenkräfte ist

$$\begin{aligned} \sum M_P &= P_2 \cdot x + P_1 \cdot (a + x) \\ &= (P_2 + P_1) \cdot x + P_1 \cdot (a_1 + a_2) \\ &= R \cdot x + P_1 \cdot a_1 + P_1 \cdot a_2 \end{aligned}$$

oder, da $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$ ist,

$$M_R = \sum M_P: \tag{56}$$

Das Drehmoment der Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente der Einzelkräfte in bezug auf dieselbe zu den Kräften parallele Gerade oder Ebene.

Die Formel (53) ist nur ein Sonderfall dieses Satzes für $x = -a_2$.

Beispiel 68. Zwei auf einer Säule von der Kopfbreite $b = 40$ cm zusammenstoßende Unterzüge belasten den Säulenkopf mit $P_1 = 34$ t bzw. $P_2 = 28,1$ t in der Mitte jeder Auflagerfläche (Fig. 131). Anzugeben ist der Ausschlag der Mittelkraft R aus der Säulenachse.

Der Satz vom Drehmoment der Mittelkraft ergibt

$$R \cdot a = +P_2 \cdot \frac{b}{4} - P_1 \cdot \frac{b}{4}.$$

Mit $R = P_2 + P_1$ erhält man hieraus

$$a = \frac{b}{4} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \frac{40}{4} \cdot \frac{34 - 28,1}{34 + 28,1} = 0,95 \text{ cm}$$

nach der Seite der größeren Kraft P_1 .

Bei verschiedener Länge der Unterzüge oder auch bei gleichlangen, wenn die Lastenverteilung nicht ganz gleichmäßig ist, greift die Säulenbelastung R stets außerhalb der Säulenachse an.

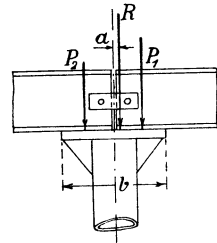


Fig. 131.

Sind mehr als zwei parallele Kräfte in derselben Ebene vorhanden, so kann man zuerst zwei von ihnen zu einer Mittelkraft zusammensetzen, deren Größe sich durch algebraische Summierung $R_1 = P_1 + P_2$ ergibt, und deren Lage nach dem Satz vom Drehmoment der Mittelkraft $M_{R_1} = M_{P_1} + M_{P_2}$ bestimmt wird. Diese Mittelkraft wird darauf mit der dritten Kraft in derselben Weise vereinigt zu $R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$, deren Drehmoment in bezug auf dieselbe, zu den Wirkungslinien der gegebenen Kräfte parallele Gerade den Betrag hat

$$M_{R_2} = M_{R_1} + M_{P_3} = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3}.$$

Der obige Satz [Formel (56)] gilt also allgemein für beliebig viele parallele Kräfte.

Beispiel 69. Gegeben seien die parallelen Kräfte der Fig. 132:

$$\begin{aligned} P_0 &= +440 \text{ kg}, & P_1 &= +340 \text{ kg}, \\ P_2 &= -300 \text{ kg}, & P_3 &= -200 \text{ kg}, \end{aligned}$$

deren Abstände von der Wirkungslinie der Kraft P_0 betragen

$$a_1 = -2,45 \text{ m}, \quad a_2 = +1,25 \text{ m}, \quad a_3 = +3,35 \text{ m}.$$

Anzugeben ist die Größe und Lage der Mittelkraft R .

Die algebraische Summe der Kräfte liefert sofort

$$R = \sum P = +440 + 340 - 300 - 200 = 280 \text{ kg}.$$

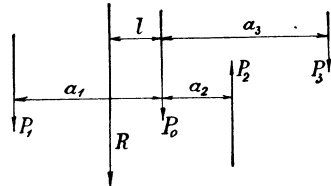


Fig. 132.

Ebenso liefert die algebraische Summe der Drehmomente in bezug auf die Wirkungslinie von P_0

$$M_x = R \cdot l = 440 \cdot 0 - 340 \cdot 2,45 - 300 \cdot 1,25 - 200 \cdot 3,35$$

$$= 0 - 833 - 375 - 670 = -1878 \text{ mkg,}$$

also

$$l = -\frac{1878}{280} = -6,71 \text{ m.}$$

Die in Fig. 132 ganz überschlägig eingetragene Mittelkraft R ist sowohl der Größe als auch der Lage nach unrichtig angegeben.

Zur Erleichterung der Rechnung bezieht man die Momente möglichst auf die Wirkungslinie einer Kraft. Es ergibt sich für alle Abstände das gleiche Vorzeichen, wenn dazu die äußerste Wirkungslinie des ganzen Kräftesystems gewählt wird.

Soll eine Anzahl paralleler Kräfte im Gleichgewicht sein, so darf keine Mittelkraft entstehen, d. h. ihre algebraische Summe muß Null ergeben. Demzufolge muß ihr Drehmoment in bezug auf jede beliebige, zu den in derselben Ebene angenommenen Wirkungslinien der Kräfte parallele Gerade ebenfalls Null sein. Für den Fall des Gleichgewichtes gelten also die Bedingungen

$$\sum P = 0, \quad \sum M = 0. \quad (57)$$

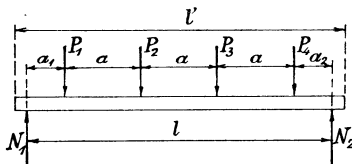


Fig. 133.

Beispiel 70. Ein Unterzug von der Länge $l' = 5,1 \text{ m}$ wird durch die darüberliegenden Träger belastet mit je $P = 18,0 \text{ t}$; die Abstände der Lasten betragen

$$a = 1,2 \text{ m,} \quad a_1 = 0,3 \text{ m,} \quad a_2 = 0,9 \text{ m.}$$

Anzugeben sind die Auflagerkräfte N_1 und N_2 , wenn der Abstand der Auflager voneinander $l = 4,8 \text{ m}$ beträgt (Fig. 133).

Werden die Drehmomente auf die Wirkungslinie von N_2 bezogen, so gilt:

$$-N_1 \cdot l + P_4 \cdot a_2 + P_3 \cdot (a_2 + a) + P_2 \cdot (a_2 + 2a) + P_1 \cdot (a_2 + 3a) = 0,$$

also

$$N_1 = \frac{P}{l} \cdot (4a_2 + 6a) = \frac{18,0}{4,8} \cdot (4 \cdot 0,9 + 6 \cdot 1,2) = 40,5 \text{ t.}$$

Entsprechend erhält man in bezug auf die Wirkungslinie von N_1

$$N_2 = \frac{P}{l} \cdot (4a_1 + 6a) = \frac{18,0}{4,8} \cdot (4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 1,2) = 31,5 \text{ t.}$$

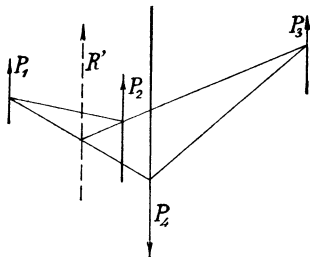


Fig. 134.

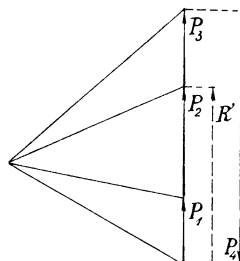


Fig. 135.

Die vorstehenden Aufgaben sind auch auf rein zeichnerischem Wege lösbar. Sind z. B. drei parallele Kräfte P_1, P_2, P_3 in derselben Ebene gegeben (Fig. 134) und soll die vierte Kraft P_4 gesucht werden, die mit ihnen im

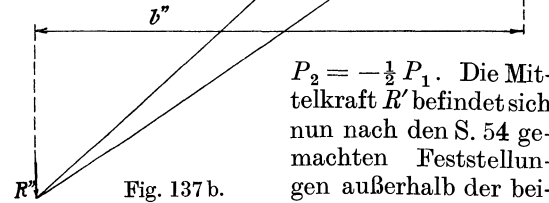
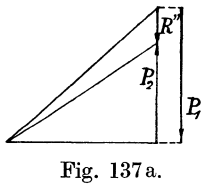
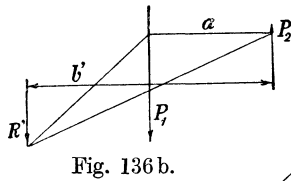
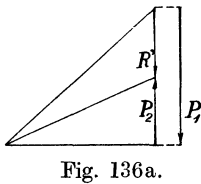
Gleichgewicht ist, so setzt man zuerst die Kräfte P_1 und P_2 zur Mittelkraft $R_{1,2}$ zusammen (Fig. 135), deren Lage im Kräfteplan der Fig. 134

durch das Seileck gefunden wird, das parallel zu den Polstrahlen der Fig. 135 an beliebiger Stelle eingetragen wird. Jetzt wird $R_{1,2}$ mit P_3 vereinigt zur Kraft P_4 , die gleich der algebraischen Summe aller gegebenen Kräfte ist, aber die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 135), und das zugehörige Seileck an das erste in Fig. 134 herangezeichnet. Der Schnittpunkt der äußersten beiden Seillinien gibt einen Punkt der Wirkungslinie von P_4 an.

Man erkennt sogleich, daß für die praktische Ausführung die beiden gestrichelten Linien wegfallen können. Man trägt also an beliebiger Stelle die Seillinien parallel zu den Polstrahlen hintereinander ein, und das entstehende Seileck muß geschlossen sein, wenn Gleichgewicht zwischen den Kräften vorhanden ist¹⁵⁾.

10. Kräftepaare.

In den Figuren 136a und b ist die Lösung der Aufgabe dargestellt, die Mittelkraft R' zweier paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte P_1 und P_2 zu finden, und zwar für den besonderen Fall



$P_2 = -\frac{1}{2} P_1$. Die Mittelkraft R' befindet sich nun nach den S. 54 gemachten Feststellungen außerhalb der beiden gegebenen Kräfte

in einem bestimmten Abstand b' von P_2 , der, wie die Aufmessung lehrt, gleich der doppelten Entfernung der beiden gegebenen Kräfte voneinander ist.

In den Figuren 137a und b ist dieselbe Aufgabe für den besonderen Fall $P_2 = -\frac{3}{4} P_1$ behandelt. R'' ergibt sich halb so groß als wie im ersten Fall der Fig. 136, aber doppelt so weit von P_2 entfernt.

Das Drehmoment $M = R \cdot b$ in bezug auf die Wirkungslinie von P_2 ist also beidemale dasselbe. Je mehr die Größe von P_2 sich der von P_1 nähert, desto weiter rückt die sich entsprechend verkleinernde Mittelkraft R von P_1 und P_2 ab, während das Drehmoment M in bezug auf die Wirkungslinie, von P_2 immer dasselbe bleibt.

Wenn schließlich $P_2 = -P_1$ gemacht wird, erhält man $R = 0$; jedoch ist dann der Abstand $b = \infty$. Das Produkt $M = 0 \cdot \infty$ ist

nun im allgemeinen weder 0 noch ∞ , sondern hat einen bestimmten endlichen Wert, im vorliegenden Fall $M = R' \cdot b' = R'' \cdot b''$:

Zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte ergeben keine Mittelkraft, haben aber ein ganz bestimmtes Drehmoment M . Man bezeichnet sie als Kräftepaar¹⁸⁾. Das Kräftepaar bildet neben den Einzelkräften, die eine Bewegung des angegriffenen Körpers in ihrer Richtung hervorzurufen suchen, ein zweites Element der Statik. Es hat das Bestreben, dem Körper, auf den es einwirkt, eine

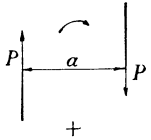


Fig. 138 a.

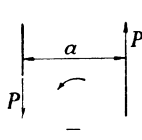


Fig. 138 b.

Drehung zu erteilen, und man unterscheidet je nach dem Drehsinn rechtsdrehende Kräftepaare, z. B. das der Fig. 138 a, und linksdrehende, z. B. das der Fig. 138 b. Das Maß der Drehbestrebung ist das Drehmoment $M = P \cdot a$, das Produkt aus der Größe der parallelen

Kräfte und ihrem Abstand, und zwar gilt allgemein die Vereinbarung, daß die Momente rechtsdrehender Kräftepaare positiv, die linksdrehender negativ gerechnet werden.

Zum Nachweis dafür, daß das Drehmoment das Maß der Drehbestrebung ist, kann die Vorrichtung nach Fig. 139 benutzt werden. Das Gewicht 1 hält dem am Drehbolzen der Scheibe angreifenden Scheibengewicht 1 das Gleichgewicht. Wird jetzt in einem bestimmten seitlichen

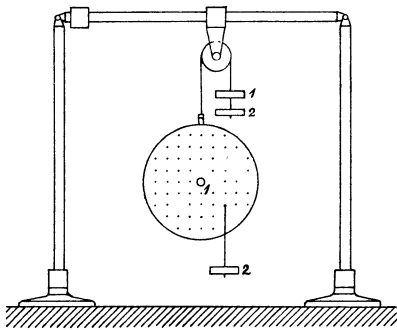


Fig. 139.

Abstand vom Drehbolzen das Gewicht 2 an die Scheibe gehängt, so erteilt es der Scheibe eine geradlinige Bewegung nach unten, die nur dann wegfällt, wenn ein gleiches, oben angebrachtes Gewicht 2 die Scheibe mit derselben Kraft nach oben zieht. Es ist aber noch kein Gleichgewicht vorhanden, sondern die durch Anziehen der Befestigungsschraube des Mittelbolzens etwas gebremste Scheibe dreht sich so lange, bis der Faden des an die Scheibe gehängten Gewichtes 2 mit

der Richtung des nach oben ziehenden Fadens zusammenfällt. Hängt man das Gewicht 2 weiter nach außen an die Scheibe an, z. B. im doppelten Abstand, so dreht sich die Scheibe schneller in die Gleichgewichtslage. Dieselbe Zeit ist unter sonst gleichen Umständen zur Drehung nötig, wenn der frühere Abstand beibehalten aber das Gewicht 2 unten und oben verdoppelt wird.

Ein Kräftepaar kann in seiner Wirkung durch ein beliebiges andere von demselben Drehsinn und dem gleichen Drehmoment ersetzt werden,

¹⁸⁾ Poinso, *Éléments de Statique*. 1804.

wie die vorstehende Darlegung lehrt, denn nur das Drehmoment ist für seine Wirkung von Bedeutung:

$$M = P \cdot a = \frac{P}{n} \cdot (a \cdot n) = (P \cdot n) \cdot \frac{a}{n},$$

worin n eine ganz beliebige unbenannte Zahl sein kann.

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist in bezug auf jeden beliebigen in seiner Ebene gelegenen Drehpunkt dasselbe. Denn setzt man für den willkürlich angenommenen Bezugspunkt O der Fig. 140 die Drehmomente beider Kräfte gemäß den Angaben S. 51 an, so ergibt sich als Gesamtdrehmoment der beiden parallelen und gleichen Kräfte

$$\begin{aligned} M &= +P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 \\ &= P \cdot (a_1 - a_2) = P \cdot a \end{aligned}$$

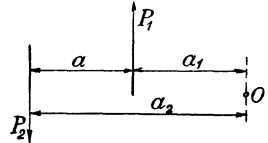


Fig. 140.

Deutet in Fig. 140 O die senkrecht zur Zeichenebene verlaufende Drehachse des Körpers an, auf dem das Kräftepaar (P_1, P_2) linksdrehend einwirkt, so ändert sich nach dem Obigen an dem Drehbestreben oder der Wirkung des Kräftepaares nichts, wenn O eine andere als die gezeichnete Lage zu dem Kräftepaar hat oder wenn bei festgelegter Drehachse O das Kräftepaar irgendeine andere Lage dazu hat: Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene beliebig verschoben werden, solange nur die Angriffsstellen mit dem Körper unveränderlich verbunden sind (vgl. S. 12).

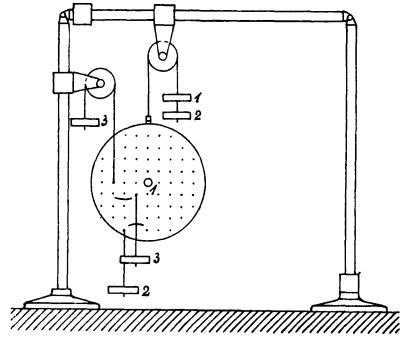


Fig. 141.

In Fig. 125 sind z. B. vorhanden zwei in dieselbe Wirkungslinie fallende Kräfte 1, das Gewicht der Scheibe und das entsprechende Gegengewicht, ein rechtsdrehendes Kräftepaar (2, 2) und ein linksdrehendes (3, 3) von gleichem Drehmoment. In Fig. 141 ist das Kräftepaar (2, 2) auf die linke Hälfte der Scheibe verschoben, während sonst alles sachlich unverändert geblieben ist. Die Scheibe befindet sich dabei ebenso im Gleichgewicht, wie im Fall der Fig. 125.

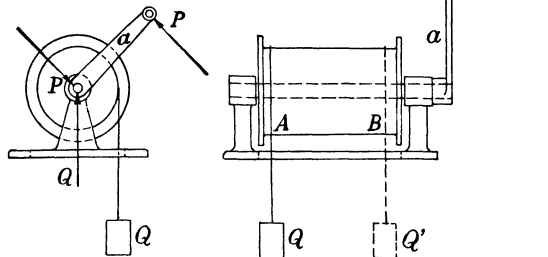


Fig. 142.

Beispiel 71. Bei jeder Handwinde wandert das Drehmoment, bestehend

aus dem Druck bzw. Zug P der Hand und dem entsprechenden Gegendruck im Wellenlager bei jeder Umdrehung einmal um den ganzen Kurbelkreis herum (Fig. 142).

An dem kistenförmigen Körper der Fig. 143 greifen in den Eckpunkten A und B die gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_1 und P_2 an, deren Wirkungslinien der Einfachheit halber mit den parallelen Kanten des Körpers zusammenfallen. Sie bilden also ein in der Ebene $ABCD$ wirkendes Kräftepaar. Jetzt werden in dem Eckpunkt E zwei Kräfte P_3 und P_4 von derselben Größe wie die ersten angebracht, deren Wirkungslinien in dieselbe Kante EH fallen, so daß sich ihre Wirkungen aufheben, und ebenso in dem Eckpunkt F die

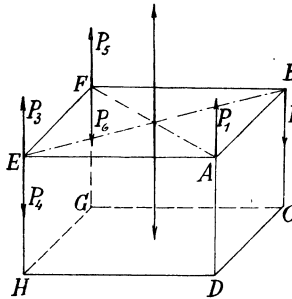


Fig. 143.

wiederum allen gleichen und parallelen Kräfte P_5 und P_6 , deren Wirkungslinien mit der Kante FG zusammenfallen und die sich somit gleichfalls aufheben. Man kann nun P_1 mit P_5 zu einer Mittelkraft von der Größe $2P$ vereinigen, die in der Mitte der oberen Fläche $ABFE$ nach oben wirkt, und ebenso P_2 mit P_4 zu der in demselben Punkt nach unten wirkenden Mittelkraft $2P$. Beide Mittelkräfte heben sich wieder gegenseitig auf, und es bleiben somit von allen Kräften nur die beiden P_3 und P_6 übrig, die ein in der Ebene $EFGH$ wirkendes Kräftepaar von gleichem Drehmoment wie das erste P_1 und P_2 bilden. Durch den angewandten Kunstgriff ist das Kräftepaar $(P_1 P_2)$ durch das $(P_3 P_6)$ ersetzt worden: Man kann ein Kräftepaar auch in eine zu seiner Ebene parallele Ebene verschieben, ohne daß an der Einwirkung auf den Körper etwas geändert wird, wenn nur beide Ebenen unveränderlich miteinander verbunden sind.

Beispiel 71 und 72. Ob an der Seiltrommel der Fig. 142 die Last Q an der vorderen Stelle A der Trommel hängt oder an der hinteren B oder an irgendeiner anderen dazwischen, ist gleichgültig; das zum Aufwinden erforderliche Drehmoment $P \cdot a$ bleibt immer dasselbe.

Ebenso kann man die Antriebsriemenscheibe einer Transmission an beliebiger Stelle auf der Welle anordnen, ohne daß eine Änderung des erforderlichen Drehmomentes eintritt.

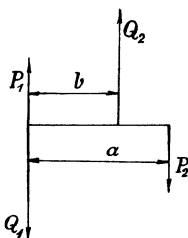


Fig. 144.

Es seien in derselben Ebene zwei Kräftepaare gegeben von den Drehmomenten $M_1 = +P \cdot a$ und $M_2 = -Q \cdot b$. Man kann nun die beiden Kräftepaare so verschieben, daß die Kräfte Q_1 und P_1 in dieselbe Wirkungslinie nach entgegengesetzten Richtungen fallen, wie Fig. 144 zeigt; beide ergeben dann die Mittelkraft $R = +Q_1 - P_1$. Schreibt man die Gleichung der Kraftmomente in bezug auf die Wirkungslinie von Q_2 auf, so erhält man

$$M = -(Q_1 - P_1) \cdot b + P_2 \cdot (a - b)$$

oder nach Auflösung der Klammern, wenn noch die Unterscheidung der gleichen Kräfte beiseite gelassen wird.

$$M = -Q \cdot b + P \cdot b + P \cdot a - P \cdot b \\ = +P \cdot a - Q \cdot b,$$

das ist nach dem Obigen

$$M = M_1 + M_2.$$

Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muß nach Formel (53) für die drei parallelen Kräfte R , Q_2 , P_2 die Bedingung erfüllt sein, daß die Drehmomente $(Q_1 - P_1) \cdot b$ und $P_2 \cdot (a - b)$ in bezug auf die Wirkungslinie von Q_2 gleich sind, aber entgegengesetzten Drehsinn haben, woraus im vorliegenden Fall folgt $M = 0$ oder

$$M_1 + M_2 = 0:$$

Zwei verschiedene in derselben oder in parallelen Ebenen an demselben Körper wirkende Kräftepaare sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Drehmomente Null ergibt (vgl. S. 52).

Ein Beispiel dafür veranschaulicht die Fig. 145. Die Scheibe ist im Gleichgewicht, denn es ist

$$-G_3 \cdot 4 + 2 G_2 \cdot 2 = 0.$$

Wenn nicht Gleichgewicht besteht, ist die algebraische Summe der Drehmomente beider Kräftepaare das Moment des bei der Zusammensetzung beider Kräftepaare entstehenden neuen Kräftepaars.

$$M = M_1 + M_2.$$

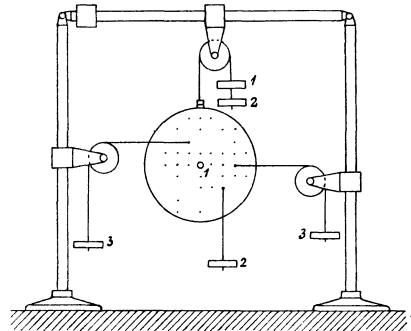


Fig. 145.

Einen unmittelbaren Nachweis dafür liefert die Fig. 146. Gegeben sind die beiden an demselben Körper angreifenden Kräftepaare (P_1P_2) und (Q_1Q_2) von den Momenten $M_1 = +P \cdot a$ bzw. $M_2 = -Q \cdot b$. Man verwandelt das letztere Kräftepaar in ein solches von gleichem Moment, aber dem Abstand a durch die

Rechnung $-Q' \cdot a = -Q \cdot b$, also $Q' = Q \cdot \frac{b}{a}$, und bewegt dieses Kräftepaar in seiner Ebene derart, daß es die in Fig. 146 gezeichnete Lage erhält. Durch Zusammensetzen der Kräfte ergibt sich sogleich das Gesamtkräftepaar vom Moment $M = R \cdot a$ mit den Kräften $R = P - Q'$. Nun ist

$$M = R \cdot a = (P - Q') \cdot a = P \cdot a - Q' \cdot a \\ = P \cdot a - Q \cdot \frac{b}{a} \cdot a = P \cdot a - Q \cdot b = M_1 + M_2.$$

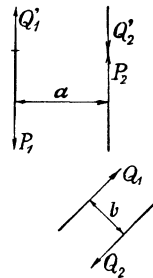


Fig. 146.

Wirken mehr als zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen auf einen Körper ein, so addieren sich die Drehbestrebungen aller algebraisch und für den Fall des Gleichgewichtes gilt

$$\sum M = 0.$$

Gleichgewicht besteht also nur, wenn die sämtlichen auf den Körper einwirkenden Kräfte weder eine Einzelkraft liefern, die eine geradlinige Bewegung in ihrer Richtung hervorzubringen sucht, noch ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung verursacht. Es gelten also ganz allgemein als Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in derselben Ebene die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} 1: \sum X &= 0, \\ 2: \sum Y &= 0, \\ 3: \sum M &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Beispiel 73. Zu ermitteln sind die größten Auflagerkräfte des Gießereikranes nach Fig. 147. Er ist belastet mit $Q = 2$ t in der größten Ausladung $a = 4,2$ m, das gesamte Eigengewicht beträgt etwa $G = 2$ t, dessen Wirkungslinie um $b = 1,05$ m von der Hauptsäule entfernt ist. Die beiden Lager haben den Abstand $h = 4,0$ m.

Der Kran stützt sich mit der wagerechten Grundzapfenfläche auf das Fußlager; dagegen wirkt also dort eine senkrechte Kraft V . Das obere Lager sichert den Kran gegen Umfallen mit der wagerechten Kraft H_1 und das untere gegen Auspendeln mit der ebenfalls wagerechten Kraft H_2 . Weitere äußere Kräfte sind nicht vorhanden.

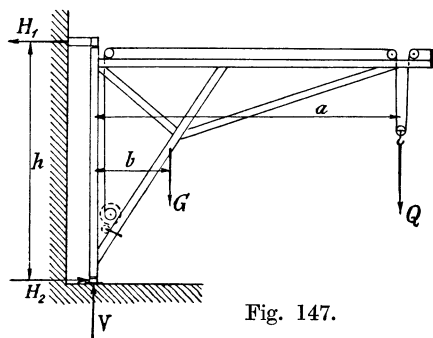


Fig. 147.

Es bestehen mithin die Gleichgewichtsbedingungen:

1. für die wagerechten Kräfte:

$$H_1 + H_2 = 0,$$

also

$$H_1 = -H_2.$$

2. für die senkrechten Kräfte:

$$+Q + G - V = 0,$$

also

$$V = Q + G = 4 \text{ t.}$$

3. für die Drehmomente in bezug auf denjenigen Punkt, durch den die Wirkungslinien der meisten Kräfte gehen, also die Mitte des unteren Lagers:

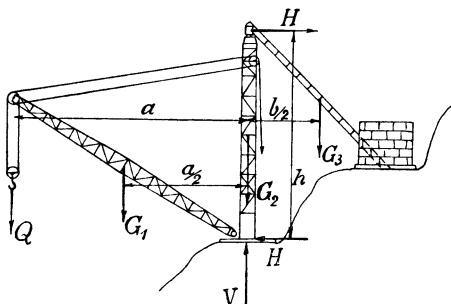


Fig. 148.

$$+Q \cdot a + G \cdot b - H_1 \cdot h = 0,$$

also

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{Q \cdot a + G \cdot b}{h} \\ &= \frac{2 \cdot 4,2 + 2 \cdot 1,05}{4,0} = 2,63 \text{ t.} \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß $(H_1 H_2)$ das den Kran haltende Kräftepaar ist und $(V, Q + G)$ das ihn kippende, aus den beiden Kräftepaaren $(Q G)$ und $(G G)$ zusammengesetzte.

Beispiel 74. Für den Derrickkran in Fig. 148 ist bei der größten Ausladung $a = 20$ m, ferner ist $h = 18,5$ m, $b = 12,2$ m. Die größte Last beträgt $Q = 20$ t, die Eigengewichte sind $G_1 = 4,0$ t, $G_2 = 4,5$ t, $G_3 = 3,0$ t. Zu ermitteln sind die Größen der Auflagerkräfte V und H .

Man erhält sofort

$$V = Q + \Sigma G = 31,5 \text{ t}$$

und aus der Momentengleichung für den Angriffspunkt von V

$$+H \cdot h + G_3 \cdot \frac{b}{2} - G_1 \cdot \frac{a}{2} - Q \cdot a = 0,$$

also

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{h} \cdot \left(Q \cdot a + G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_3 \cdot \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{18,5} \cdot (20 \cdot 20,0 + 4 \cdot 10,0 - 3 \cdot 6,1) = \frac{421,7}{18,5} = 22,8 \text{ t}. \end{aligned}$$

Auf einen Körper wirke an einer Stelle die Kraft P_1 (Fig. 149), an einer anderen Stelle werden in derselben Wirkungslinie die beiden zu P_1 parallelen Kräfte P_2 und P_3 entgegengesetzt zueinander angebracht, und zwar seien die drei Kräfte von gleicher Größe. Da P_2 und P_3 sich unmittelbar aufheben, so ändern sie an dem Belastungszustand des Körpers nichts. Nun kann man ($P_1 P_2$) als Kräftepaar vom Moment $P \cdot a$ auffassen und P_3 als die um die Strecke a parallel zu sich selbst verschobene Kraft P_1 . Man gelangt so zu dem Satz:

Eine Kraft kann parallel zu sich selbst beliebig verschoben werden, wenn nur ein in der Verschiebungsebene wirkendes Kräftepaar hinzugefügt wird, dessen Moment aus der Größe der Kraft und dem Verschiebungsweg gebildet ist.

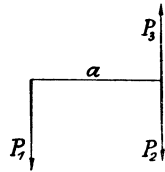


Fig. 149.

Da Kräftepaare unbewegliche Körper, die sich nicht drehen können, mindestens zu verbiegen suchen, so heißt dieses Moment das Biegemoment und die verschobene Kraft, die bei Trägern gewöhnlich quer zur Trägerachse steht, die Querkraft. Die Biegemomente und zum Teil auch die Querkräfte sind für die Berechnung von Trägern jeder Art maßgebend, wie die Zug- und Druckkräfte für Zugbänder, Säulen, Kolbenstangen usw. Man stellt das Biegemoment oft durch einen gebogenen Pfeil dar (Fig. 150).

Umgekehrt kann aus der Fig. 149 auch der Satz entnommen werden: Ein Kräftepaar ($P_1 P_2$) vom Moment M kann mit einer Einzelkraft P_3 zusammengesetzt werden; man erhält daraus die Einzelkraft P_1 parallel zu sich selbst verschoben um den Betrag $a = \frac{M}{P}$. Die Richtung der Verschiebung bzw. im ersten Fall den Drehsinn des entstandenen Kräftepaares bestimmt man am besten durch Wiederholung der Fig. 149.

Beispiel 75. Der an einem Ende wagrecht eingespannte Träger der Fig. 150 von der Länge $l = 2,4 \text{ m}$ wird am freien Ende durch eine nach unten wirkende Kraft $P = 2450 \text{ kg}$ belastet. Anzugeben ist die Beanspruchung an der $x = 1,5 \text{ m}$ vom freien Ende entfernten Stelle und an der Einspannungsstelle.

Man verschiebt die Belastung P parallel zu sich selbst um die Strecke x nach der zu untersuchenden Stelle und erhält dort wirkend die Querkraft P und das rechtsdrehende Biegemoment

$$M_x = P \cdot x = 2450 \cdot 1,5 = 3675 \text{ mkg}.$$

Im Abstände l vom freien Ende ist die Querkraft dieselbe, das Biegemoment hat dort den Wert

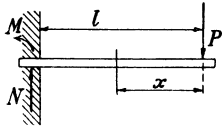


Fig. 150.

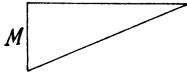


Fig. 151.

$$M_l = P \cdot l = 2450 \cdot 2,4 = 5880 \text{ mkg.}$$

Es ist gleich dem Einspannungsmoment M , das erforderlich ist, um den Träger festzuhalten, hat aber die entgegengesetzte Drehrichtung. Den Verlauf des Biegemomentes über die Trägerlänge gibt die Fig. 151 wieder.

Die Auflagerkraft N ist nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung der Formeln (57) gleich der Belastung P . An der Auflagerstelle, wo demnach die Querkraft $Q = P - N = 0$ ist, hat das Biegemoment seinen größten Wert.

Beispiel 76. Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und der Querkraft für den eingespannten Träger nach Fig. 152.

Die Gleichgewichtsbedingungen (57) liefern

$$a) \quad N = P_1 + P_2,$$

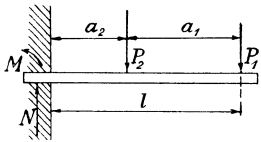


Fig. 152.

und der Verlauf der Querkraft wird durch Fig. 153 wiedergegeben. Zwischen zwei Einzelkräften ist die Querkraft unveränderlich.

$$b) \quad M = P_2 \cdot a_2 + P_1 \cdot (a_1 + a_2),$$

und der Verlauf des Biegemomentes ist in Fig. 154 dargestellt. Zwischen zwei Einzelkräften ändert sich das Biegemoment entsprechend der Entfernung von der einen oder anderen Kraft; die seinen Verlauf angegebende Linie ist also eine geneigte Gerade. Das größte Biegemoment kann demnach bei Belastung des Trägers durch Einzelkräfte nur an einer Stelle auftreten, wo eine Kraft auf den Träger einwirkt.

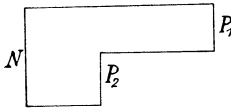


Fig. 153.

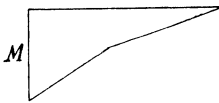


Fig. 154.

Beispiel 77. Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und sein größter Wert für den auf zwei Stützen gelagerten wagerechten Träger, der durch eine Einzelkraft P belastet ist, die zwischen den Stützen angreift (Fig. 155), ferner die Größe und der Verlauf der Querkraft.

Nach den Angaben des Beispiels 63 erhält man durch Anwendung der Momentengleichung in bezug auf die Wirkungslinie der Auflagerkraft N_2 :

$$+N_1 \cdot l - P \cdot c_2 = 0,$$

also

$$N_1 = P \cdot \frac{c_2}{l}. \tag{58}$$

Das Biegemoment für die Angriffsstelle von P ist

$$M = +N_1 \cdot c_1 = P \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{l}. \tag{59}$$

An den Auflagerstellen hat das Biegemoment den Wert Null; da seine Größe entsprechend der Entfernung vom Auflager wächst, so erreicht es unter der Last P den größten Wert (Fig. 156). Geht man etwa von der anderen Seite des Trägers aus, so ergibt sich

$$M = -P \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{l}.$$

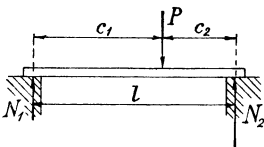


Fig. 155.

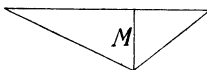


Fig. 156.

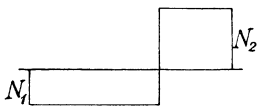


Fig. 157.

An jeder Stelle treten zwei Biegemomente auf, Moment und Gegenmoment, von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Drehsinn.

Die Querkraft hat von dem Auflager 1 bis zur Last P den überall gleichen Wert N_1 . Unter der Last ändert sie sich um den Betrag P , geht also durch Null und hat von dort bis zum Auflager 2 den Wert N_2 (Fig. 157). Bemerkte sei, daß die Querkraft zwar unter der Last den Wert Null hat, jedoch dicht daneben die in Fig. 157 veranschaulichten Werte, so daß für eine genaue Trägerberechnung die größere Querkraft $Q = N_1$ mit berücksichtigt werden muß.

Beispiel 78. Für den in Fig. 158 dargestellten Träger mit den beiden Lasten P an den überkragenden Enden ist der Verlauf des Biegemomentes festzustellen.

Die beiden Stützdrücke N_1 und N_2 sind aus Gründen der Symmetrie einander gleich. Das Moment über einer Stütze ist nach Beispiel 75 $M = P \cdot c$. Da die Momentenlinie zwischen zwei benachbarten Kräften durch eine Gerade dargestellt wird, so ist das Biegemoment zwischen den Stützen überall dasselbe (Fig. 159).

Auch die Rechnung liefert das gleiche Ergebnis: In dem beliebigen Abstand x von der Stütze N_1 ist

$$M = -P \cdot (c + x) + N_1 \cdot x,$$

und, da $N_1 = P$ ist,

$$M = -P \cdot c.$$

Die Querkraft hat auf den Außenstrecken c den Wert P , sie sinkt über den Stützen auf Null und behält diesen Wert zwischen beiden Stützen bei. Der Träger ist also zwischen den Stützen ausschließlich durch das überall gleiche Biegemoment $P \cdot c$ beansprucht.

Beispiel 79. Für den Standdrehkran nach Fig. 160 gilt das Umgekehrte des in Beispiel 73 berechneten Gießereikranes. Das Eigengewicht $G \approx 350$ kg kann ungefähr in der Mittellinie der Standsäule einwirkend angenommen werden.

Man erhält dann mit $Q = 1$ t aus den drei Gleichgewichtsbedingungen (57):

- $H_1 = H_2$,
- $V = Q + G = 1,35$ t,
- in bezug auf die Mitte des oberen Drehzapfens

$$+H \cdot h = +Q \cdot a,$$

also

$$H = Q \cdot \frac{a}{h} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3 \text{ t.}$$

Auf die Standsäule wirkt oben die Kraft H_1 in der entgegengesetzten Richtung der Fig. 160; die Säule wird an einer beliebigen Stelle zwischen H_1 und H_2 beansprucht durch das Biegemoment $M = H \cdot x$, das den größten Wert bei H_2 erreicht:

$$M_{\max} = H \cdot h = 3 \cdot 1 = 3 \text{ mt,}$$

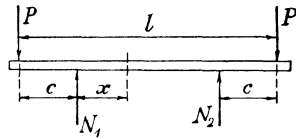


Fig. 158.



Fig. 159.

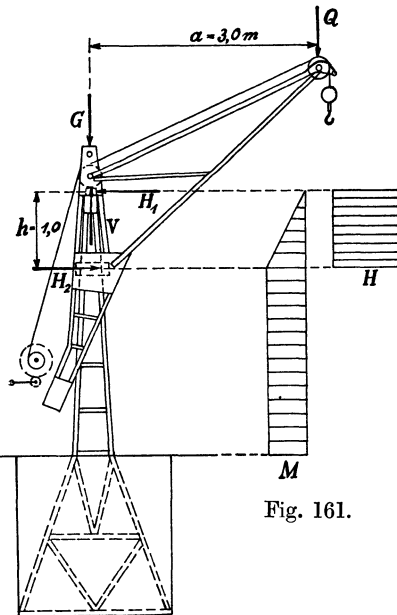


Fig. 160.

Fig. 161.

wo die Querkraft $H_1 - H_2 = 0$ ist, während sie an den Zwischenstellen überall den Wert H_1 hat. Für alle unterhalb H_2 befindlichen Stellen ist das Biegemoment dasselbe $M_{\max} = 3$ mt, jedoch tritt dort keine Querkraft mehr auf. Den Verlauf beider zeigt Fig. 161.

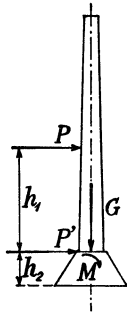


Fig. 162.

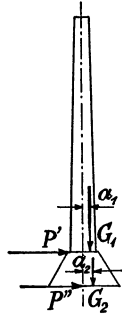


Fig. 163.

Beispiel 80. Auf die freistehende Schornsteinsäule der Fig. 162 vom Gewicht $G_1 = 111,5$ t wirkt in wagerechter Richtung der Winddruck $P = 4,71$ t in der Höhe $h_1 = 12,74$ m (Beispiel 100).

Um die Beanspruchung der Fläche zwischen Schornsteinschaft und Fundament zu ermitteln, verschiebt man die Kraft P parallel zu sich selbst dorthin (P') und hat nun das Biegemoment $M_1 = P \cdot h_1$ hinzuzufügen. Ferner ist die Fläche noch belastet mit dem Gewicht G_1 der Säule. Man setzt jetzt G_1 und M_1 zusammen und erhält dadurch G_1 in der Richtung des Winddruckes verschoben (Fig. 163) um den Betrag

$$a_1 = \frac{M_1}{G_1} = \frac{P \cdot h_1}{G} = \frac{4,71 \cdot 12,74}{111,5} = 0,54 \text{ m.}$$

Um die Beanspruchung der Fundamentsohle zu finden, wird P bis dorthin verschoben um den Betrag $h_2 = 2,0$ m, und das Biegemoment an der Stelle beträgt dann

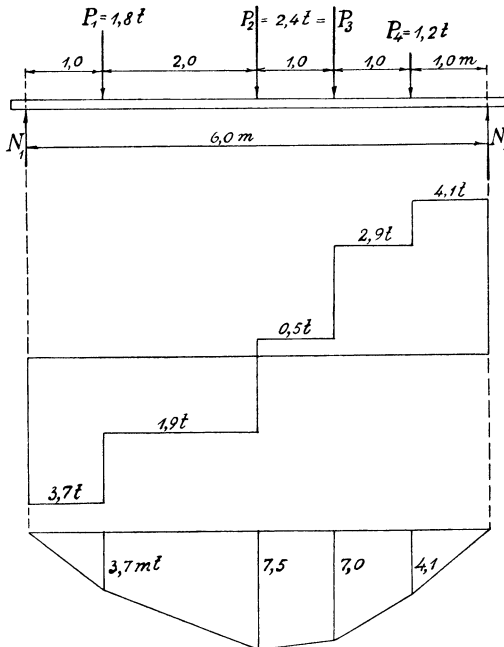


Fig. 164.

$$M_2 = P \cdot (h_1 + h_2) = M_1 + P \cdot h_2.$$

Das gesamte Gewicht von Schornsteinsäule und Fundament betrage

$G_2 = 111,5 + 35,7 = 147,2$ t, das mit dem Moment M_2 zusammengesetzt wird und so um den Betrag

$$a_2 = \frac{M_2}{G_2} = \frac{M_1 + P \cdot h_2}{G_2} = \frac{4,71 \cdot (12,74 + 2,0)}{147,2} \approx 0,47 \text{ m}$$

in Richtung des Winddruckes verschoben ist.

Die Ausschläge a_1 und a_2 dürfen einen bestimmten Höchstbetrag nicht überschreiten.

Beispiel 81. Für den in Fig. 164 mit seinen Belastungen dargestellten wagerechten Träger auf zwei Stützen ist der Verlauf der Querkraft und des Biegemomentes anzugeben.

Es müssen zuerst die beiden Auflagerkräfte berechnet werden. Die Momentengleichung

in bezug auf die Wirkungslinie von N_2 liefert

$$N_1 = \frac{1}{6} \cdot (1,8 \cdot 5 + 2,4 \cdot 3 + 2,4 \cdot 2 + 1,2 \cdot 1) = \frac{1}{6} \cdot (9,0 + 7,2 + 4,8 + 1,2) = 3,7 \text{ t.}$$

ebenso die Momentengleichung für die Wirkungslinie von N_1

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{6} \cdot (1,8 \cdot 1 + 2,4 \cdot 3 + 2,4 \cdot 4 + 1,2 \cdot 5) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1,8 + 7,2 + 9,6 + 6,0) = 4,1 \text{ t.} \end{aligned}$$

Die Proberechnung ergibt

$$1,8 + 2,4 + 2,4 + 1,2 = 3,7 + 4,1 \text{ t.}$$

Jetzt können die Querkräfte bestimmt werden:

zwischen N_1 und P_1 ist $Q = N_1 = 3,7 \text{ t}$,
 „ P_1 „ P_2 „ $Q = N_1 - P_1 = 1,9 \text{ t}$,
 „ P_2 „ P_3 „ $Q = N_1 - P_1 - P_2 = -0,5 \text{ t}$,
 „ P_3 „ P_4 „ $Q = N_1 - P_1 - P_2 - P_3 = -2,9 \text{ t}$,
 „ P_4 „ N_2 „ $Q = N_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = -N_2 = -4,1 \text{ t}$.

Die Biegemomente für die Wirkungslinien der einzelnen Kräfte ergeben sich wie folgt:

bei N_1 ist $M_0 = 0$,
 „ P_1 „ $M_1 = 3,7 \cdot 1 = 3,7 \text{ mt}$,
 „ P_2 „ $M_2 = 3,7 \cdot 3 - 1,8 \cdot 2 = 7,5 \text{ mt}$,
 „ P_3 „ $M_3 = 4,1 \cdot 2 - 1,2 \cdot 1 = 7,0 \text{ mt}$,

Vorteilhaft wird jetzt von der Seite der Auflagerkraft N_2 aus gerechnet:

bei P_4 ist $M_4 = 4,1 \cdot 1 = 4,1 \text{ mt}$,
 „ N_2 „ $M_0 = 0$.

Durch geradliniges Verbinden der etwa im Maßstabe $1 \text{ mt} = 3 \text{ mm}$ aufgetragenen Werte erhält man die Momentenkurve.

Die Fig. 164 lehrt, daß bei einem durch mehrere Einzelkräfte belasteten Träger die Querkraft in der Nähe des größten Biegemomentes klein ist, so daß sie im allgemeinen nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Das größte Biegemoment tritt immer an der Stelle des Trägers auf, wo die Querkraft durch Null geht. Hat nämlich in einem Querschnitt I eines beliebig belasteten Trägers, der vom freien Ende um die Strecke x entfernt ist, das Biegemoment den Wert M und die Querkraft den Wert Q , so hat in einem dicht benachbarten Querschnitt II im Abstände dx vom Querschnitt I (Fig 165) das Biegemoment zugenommen um den Betrag $dM = Q \cdot dx$, wobei das eine kleine Größe zweiter Ordnung bildende Moment der Belastung zwischen den beiden Querschnitten I und II vernachlässigt ist. Hieraus folgt

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (60)$$

Aus dem kleinen Dreieck mit den Katheten dM und dx erhält man nun die Neigung der Momentenkurve zwischen I und II zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dM}{dx}.$$

An der Stelle, wo das größte Moment auftritt, muß die Momentenkurve parallel zur Stabachse verlaufen, so daß dort $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ist oder nach der vorhergehenden Gleichung (60) $Q = 0$.

Man benutzt diesen Zusammenhang, um in bequemer Weise die Stelle des größten Biegemomentes zu bestimmen.

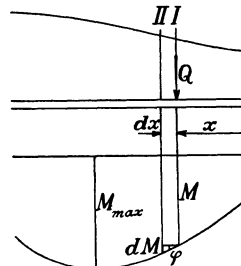


Fig. 165.

Beispiel 82. Die Querkraftaufstellung der Fig. 164 liefert sogleich den Ort des größten Biegemomentes unter der Last P_2 . Die Berechnung der Querkraft bis zur fraglichen Stelle kann sehr häufig ohne Mühe im Kopf gemacht werden.

Die vorstehenden Darlegungen gelten ganz allgemein. Der größte oder kleinste Wert einer Größe y , die von einer gegebenen Veränderlichen x abhängig ist, ist derjenige, für den bei der zeichnerischen Auftragung des Verlaufes von y die Tangente an die betreffende Kurve parallel zur x -Achse liegt, wo also die Gleichung erfüllt wird

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (61)$$

Trägt man die Belastung der Fig. 164 in einem beliebigen Kräftemaßstab, am einfachsten dem der Querkraftlinien, hintereinander ab (Fig. 166) und zieht von den Kraftendpunkten die Parallelen zu den zugehörigen Momentenlinien, die in Fig. 167 noch einmal wiederholt sind, z. B. durch den gemeinsamen Punkt von P_1 und P_2 in Fig. 166 die Parallele zu der zwischen P_1 und P_2 in Fig. 167

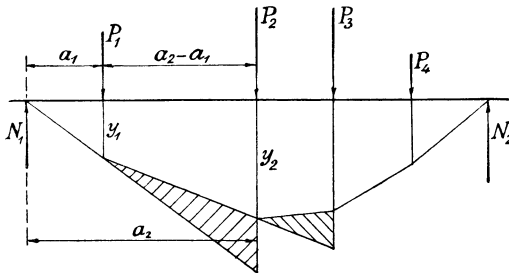


Fig. 167.

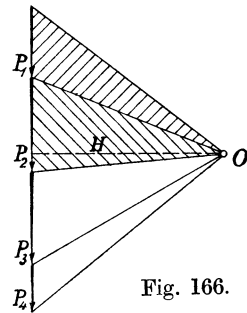


Fig. 166.

verlaufenden Momentenlinie, so schneiden sich alle Parallelen in einem Punkt O . Denn die gleich schraffierten Dreiecke beider Figuren sind einander ähnlich, da alle Seiten parallel sind; demnach verhalten sich die Höhen H der Dreiecke der Fig. 166 zu den Grundlinien P wie die Längenunterschiede a zu den Ordinatenunterschieden y in Fig. 167. Die Maßstäbe sind nun in folgender Weise gewählt, wie die Aufmessung ergibt:

Fig. 166: Kräfte P :	1 t wirkliche Größe =	5,0 mm,
Höhe H :		= 20,0 „ „
Fig. 167: Länge a :	1 m „ „	= 10,0 „ „
Höhe y :	1 mt „ „	= 2,5 „ „

Es ist also

$$\frac{10,0}{2,5} = \frac{20,0}{5,0},$$

ein Zusammenhang, der zugleich mit der zuerst aufgeführten Bedingung nur bestehen kann, wenn H für alle Dreiecke dieselbe Länge hat, d. h. die Parallelen der Fig. 166 alle durch den Punkt O gehen.

Ein Vergleich der Fig. 166 und 167 mit den Fig. 120 und 123 lehrt sofort: Die Momentenlinie ist das Seileck, das für einen beliebigen Pol in den Kräfteplan eingetragen werden kann.

Die Momentenlinie kann hiernach ohne jede Rechnung gezeichnet werden. Mißt man die Ordinaten y der Momentenlinie im Längenmaßstab und den Polabstand H im Kräftemaßstab oder auch umgekehrt ab, so ergibt das Produkt den wahren Wert des Momentes.

Beispiel 83. In Fig. 164 bzw. 167 ist

$$y_1 = 7,4 \text{ mm}, \quad y_2 = 15,0 \text{ mm}, \quad y_3 = 14,0 \text{ mm}, \quad y_4 = 8,2 \text{ mm}.$$

Damit wird mit

$$H = 25 \cdot \frac{1}{5} \text{ mm} \cdot \frac{\text{t}}{\text{mm}} = 5 \text{ t.}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{100}{10} \cdot 7,4 = 74 \text{ cm,} & \text{also} & & M_1 &= 5 \cdot 74 = 370 \text{ cmt,} \\ y_2 &= 10 \cdot 15,0 = 150 \text{ cm,} & \text{,,} & & M_2 &= 5 \cdot 150 = 750 \text{ cmt,} \\ y_3 &= 10 \cdot 14,0 = 140 \text{ cm,} & \text{,,} & & M_3 &= 5 \cdot 140 = 700 \text{ cmt,} \\ y_4 &= 10 \cdot 8,2 = 82 \text{ cm,} & \text{,,} & & M_4 &= 5 \cdot 82 = 410 \text{ cmt} \end{aligned}$$

oder mit

$$H = 25 \cdot \frac{100}{10} \text{ mm} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{mm}} = 250 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{5} \cdot 7,4 = 1,48 \text{ t,} & \text{also} & & M_1 &= 250 \cdot 1,48 = 370 \text{ cmt,} \\ y_2 &= \frac{1}{5} \cdot 15,0 = 3,00 \text{ t,} & \text{,,} & & M_2 &= 250 \cdot 3,00 = 750 \text{ cmt,} \\ y_3 &= \frac{1}{5} \cdot 14,0 = 2,80 \text{ t,} & \text{,,} & & M_3 &= 250 \cdot 2,80 = 700 \text{ cmt,} \\ y_4 &= \frac{1}{5} \cdot 8,2 = 1,64 \text{ t,} & \text{,,} & & M_4 &= 250 \cdot 1,64 = 410 \text{ cmt.} \end{aligned}$$

Wenn der Längen- und der Kräftemaßstab in bequemen einfachen Zahlen gewählt wird, liefert die Aufmessung ohne besondere Umrechnung die Größe der Biegemomente. Auch in anderen Fällen kommt man leicht zum Ziel, wenn man zuerst das Produkt aus der in mm aufgenommenen Länge H mit dem Kräftemaßstab und dem Längenmaßstab berechnet, z. B. im vorliegenden Fall

$$25 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{100} \text{ mm} \cdot \frac{\text{t}}{\text{mm}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{mm}} = 0,50 \frac{\text{cm} \cdot \text{t}}{\text{mm}},$$

und nun jede Aufmessung der y damit multipliziert, also

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,50 \cdot 7,4 = 370 \text{ cmt,} \\ M_2 &= 0,50 \cdot 15,0 = 750 \text{ cmt,} \\ M_3 &= 0,50 \cdot 14,0 = 700 \text{ cmt,} \\ M_4 &= 0,50 \cdot 8,2 = 410 \text{ cmt.} \end{aligned}$$

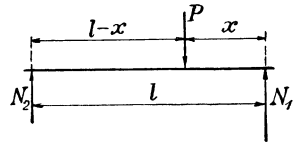


Fig. 168.

Beispiel 84. Auf einen wagerechten, an den Enden frei aufliegenden Hängebahnträger von der Länge $l = 4,2 \text{ m}$ verkehrt eine Einzellast $P = 650 \text{ kg}$. Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und der Querkraft unter der Last.

Die Fig. 168 stellt eine beliebige Lage der Einzellast dar. Nach den Ermittlungen der vorhergehenden Beispiele ist das jeweilige größte Biegemoment an der Angriffsstelle der Last P vorhanden. Es hat nach der Berechnung in Beispiel 77, wenn dort die Bezeichnungen der Fig. 168 eingeführt werden, den Wert

$$M_x = P \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l}.$$

Den Höchstwert erhält man für

$$x = \frac{l}{2} \text{ zu } M_{\max} = P \cdot \frac{l^2}{4}.$$

Das Verhältnis beider Werte zueinander ist

$$\frac{M_x}{M_{\max}} = \frac{P \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l}}{P \cdot \frac{l^2}{4}} = 4 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

und hieraus folgt

$$M_x = P \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

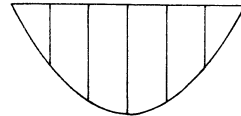


Fig. 169.

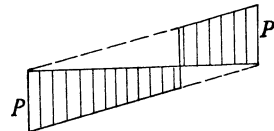


Fig. 170.

Für die zahlenmäßige Ausrechnung teilt man den Träger etwa in sechs gleiche Teile von der Länge 0,7 m. Es ist dann

$$P \cdot l^2 = 0,65 \cdot 4,2^2 = 11,46 \text{ tm}^2,$$

und hiermit ergibt sich die folgende Aufstellung:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{x}{l} = 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \\ \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 0 & \frac{5}{36} & \frac{8}{36} & \frac{9}{36} & \frac{8}{36} & \frac{5}{36} & 0 & \\ M_x = 0 & 1,592 & 2,549 & 2,867 & 2,549 & 1,592 & 0 & \text{mt.} \end{array}$$

Die betreffenden Werte sind in Fig. 169 aufgetragen. Die Momentenlinie ist eine Parabel.

Die Querkraft Q ist auf jeder Seite der Last gleich dem zugehörigen Auflagerdruck. Für $x = 0$ hat man $Q = P$, für einen beliebigen Wert von x ist $Q = P \cdot \frac{x}{l}$, für $x = \frac{l}{2}$ ist $Q = \frac{P}{2}$, für $x = l$ ist wieder $Q = P$. Den Verlauf der Querkraft stellt somit die Fig. 170 dar. Für ihre Berücksichtigung gilt das in Beispiel 77 Gesagte.

Beispiel 85. Über einen an beiden Enden unterstützten Kranträger von der Länge $l = 19,2$ m laufen die beiden Raddrücke der Laufkatze $P_1 = 5,3$ t und $P_2 = 4,7$ t in $b = 2,0$ m Abstand (Fig. 171). Festzustellen sind die Biegemomente für jedes $\frac{1}{12}$ der Trägerlänge und der Verlauf der Querkraft.

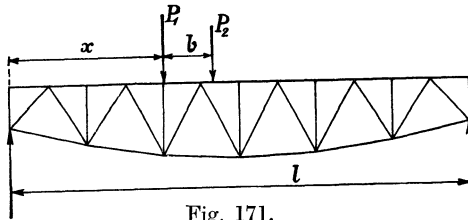


Fig. 171.

Bei der gezeichneten Laststellung ist nach Formel (61) das Moment der ersten Last für die Angriffsstelle der Kraft

$$M_1 = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

und das der zweiten Last für ihre Angriffsstelle

$$M_2 = P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x+b}{l} \cdot \left(1 - \frac{x+b}{l}\right);$$

ihr Verlauf ist in Fig. 172 über derselben Achse aufgetragen.

Das Biegemoment der zweiten Last ist an der Stelle, wo P_1 angreift, verkleinert auf den Betrag

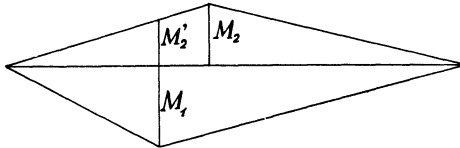


Fig. 172.

$$\begin{aligned} M'_2 &= M_2 \cdot \frac{x}{x+b} \\ &= P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{b}{l}\right), \end{aligned}$$

und das Gesamtmoment an der Stelle x ist hiermit

$$M_x = M_1 + M'_2 = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{b}{l}\right)$$

oder

$$M_x = l \cdot x \cdot \left[(P_1 + P_2) \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - P_2 \cdot \frac{b}{l} \right]. \quad (62)$$

Wird noch eingesetzt $x = \frac{i}{12} \cdot l$, worin i die ganzen Zahlen von 1–12 darstellt, so folgt

$$M_x = l^2 \cdot \frac{i}{12} \cdot \left[(P_1 + P_2) \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right) - P_2 \cdot \frac{b}{l} \right]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\begin{aligned} M_x &= 19,2 \cdot 1,6 \cdot i \cdot \left[10 \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right) - \frac{4,7 \cdot 2,0}{19,2} \right] \\ &= 30,72 \cdot i \cdot \left[10 \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right) - 0,49 \right] \text{ mt.} \end{aligned}$$

Damit erhält man die folgende Zusammenstellung:

	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10 \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right)$	9,167	8,333	7,500	6,667	5,833	5,000	4,167	3,333	2,500	1,667	0,833
$[-]$	8,667	7,843	7,010	6,177	5,344	4,510	3,677	2,843	2,010	1,177	0,343
M_x	266,6	482,9	645,8	759,0	820,8	1006,6	801,7	698,7	555,7	361,6	—

Die zweite Zeile der Zusammenstellung wird sofort durch einfache Addition niedergeschrieben, wenn sie von der rechten Seite begonnen wird. Die dritte folgt daraus durch Abziehen von 0,490 und die vierte durch Multiplikation der Werte der dritten Zeile mit $30,72 \cdot i$.

Für den 11. Knotenpunkt des Obergurtes kann kein M_x mehr angegeben werden; es ist klar, daß für den rechten Teil des Trägers die Stellung der Laufkatze maßgebend ist, bei der P_2 auf einem Knotenpunkt steht. In dem Fall gilt nach Fig. 173

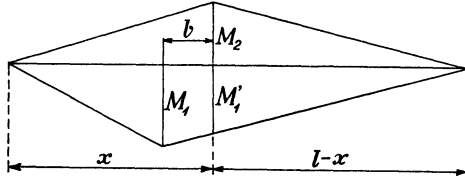


Fig. 173.

$$M_2 = P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$M_1 = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x-b}{l} \cdot \left(1 - \frac{x-b}{l}\right),$$

$$M'_1 = M_1 \cdot \frac{l-x}{l-x+b} = P_1 \cdot l^2 \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{b}{l}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

also

$$M_x = l^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \left[(P_1 + P_2) \cdot \frac{x}{l} - P_1 \cdot \frac{b}{l} \right]. \quad (63)$$

Wird hierin wieder $x = \frac{i}{12} \cdot l$ eingesetzt, so gilt jetzt

$$M_x = l^2 \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right) \cdot \left[(P_1 + P_2) \cdot \frac{i}{12} - P_1 \cdot \frac{b}{l} \right]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$M_x = 368,64 \cdot \left(1 - \frac{i}{12}\right) \cdot [0,833 \cdot i - 0,552] \text{ mt.}$$

Die Zusammenstellung lautet jetzt:

	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$0,833 \cdot i$	0,833	1,667	2,500	3,333	4,167	5,000	5,833	6,667	7,500	8,333	9,167
$[-]$	0,281	1,115	1,948	2,781	3,615	4,448	5,281	6,155	6,948	7,781	8,615
M^x	—	342,5	536,6	683,5	777,4	819,9	811,2	751,4	640,3	478,1	264,7

Für die Berechnung der linken Trägerhälfte ($i = 1$ bis 6) gelten also die Werte der ersten Zusammenstellung, für die der rechten Trägerhälfte ($i = 7-12$) die der zweiten. Im allgemeinen führt man die Träger symmetrisch zur Mitte aus und berechnet dann naturgemäß nur die Hälfte der ersten Zusammenstellung.

Für die Querkraft an der Stelle x gilt, wenn die Last P_1 dort steht,

$$Q_x = P_1 \cdot \frac{l-x}{l} + P_2 \cdot \frac{l-x-b}{l}$$

oder

$$Q_x = (P_1 + P_2) \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - P_2 \cdot \frac{b}{l}. \quad (64)$$

Das ist der Klammerausdruck der Formel (62). Demnach gibt die dritte Zeile beider Zusammenstellungen schon die Größe der Querkraft in t an.

Beispiel 86. Über einen Krangleisträger oder vollwarfigen Kranträger von der Länge l zwischen den beiden Auflagern wandern die beiden Raddrücke P_1 und P_2 im Abstände a voneinander. Anzugeben ist das größte Biegemoment des Trägers.

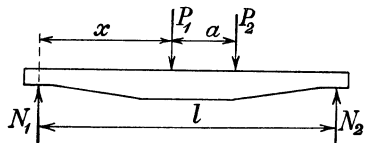


Fig. 174.

Der Auflagerdruck N_1 (Fig. 174) folgt aus der Momentengleichung in bezug auf die Wirkungslinie von N_2 :

$$N_1 \cdot l - P_1 \cdot (l-x) - P_2 \cdot (l-x-a) = 0.$$

Damit ergibt sich das Biegemoment unter der ersten Last zu

$$M_x = N_1 \cdot x = \frac{P_1}{l} \cdot (l \cdot x - x^2) + \frac{P_2}{l} \cdot (l \cdot x - x^2 - a \cdot x).$$

Seinen Höchstwert erreicht es nach Formel (61) an der Stelle, wo $\frac{dM_x}{dx} = 0$ ist, also für

$$\frac{P_1}{l} \cdot (l - 2x) + \frac{P_2}{l} \cdot (l - 2x - a) = 0.$$

Hieraus erhält man die Stelle des größten Biegemomentes

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die obige Gleichung folgt

$$M_{\max} = \frac{1}{4} \cdot (P_1 + P_2) \cdot l \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{l} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}\right)^2\right] - \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{l} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}\right).$$

Ist a wesentlich größer als $\frac{l}{2}$, so ruft der in der Trägermitte stehende Raddruck P_1 dort das Biegemoment $M = \frac{1}{4} \cdot P_1 \cdot l$ hervor (Beispiel 77). Durch Gleichsetzen der beiden Biegemomente erhält man den Größtwert des Lastenabstandes, für den die obige Formel gilt, leicht zu

$$a = l \cdot \frac{P_1 + P_2}{P_2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{P_2}{P_1 + P_2}}\right),$$

der für gleiche Lasten P übergeht in $a = 0,5857 \cdot l$.

Beispiel 87. Eine mit den beiden Enden auf den Bindern aufliegende Dachpfette von der Länge l wird durch fünf in gleichen Abständen angeordnete Sparren mit derselben Kraft P an jeder Stelle belastet (Fig. 175). Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes.

Die Anordnung ist symmetrisch zur Mitte, so daß die Auflagerkräfte einander und der halben Gesamtbelastung gleich sind: $N = \frac{3}{5} P$. An Stelle des größten Biegemomentes ergibt sich ebenfalls sofort die Mitte der Pfette. Man erhält für diese Stelle

$$\begin{aligned} M &= N \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{5} - P \cdot 2 \cdot \frac{l}{5} \\ &= P \cdot l \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

oder

$$M = \frac{13}{20} P \cdot l = 0,65 \cdot P \cdot l.$$

Für den Angriffspunkt der ersten Last vom Auflager aus gilt

$$\begin{aligned} M_1 &= N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} = \frac{5}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} \\ &= 0,25 \cdot P \cdot l \end{aligned}$$

und für den Angriffspunkt der zweiten Last

$$M_2 = N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{5} - P \cdot \frac{l}{5} = P \cdot l \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 0,55 \cdot P \cdot l.$$

Die Fig. 176 veranschaulicht den Verlauf des Biegemomentes.

Wesentlich günstiger, auch für die konstruktive Ausbildung, ist die Anordnung nach Fig. 177: Man läßt die Pfetten abwechselnd um eine Strecke c beiderseits überkragen und hängt eine kürzere von der Länge $l_1 = l - 2c$ dazwischen.

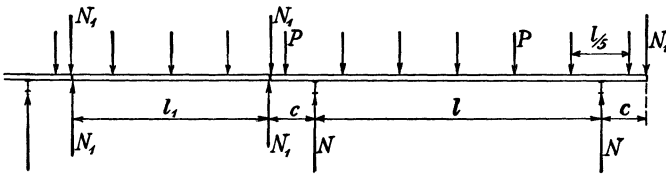


Fig. 177.

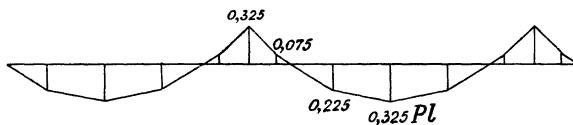


Fig. 178.

Für die kürzere Pfette gilt

$$N_1 = \frac{3}{5} \cdot P,$$

und das Biegemoment in der Mitte beträgt

$$\begin{aligned} M_1 &= N_1 \cdot \frac{l_1}{2} - P \cdot \frac{l}{5} \\ &= \frac{3}{2} P \cdot \left(\frac{l}{2} - c \right) - P \cdot \frac{l}{5} = P \cdot l \cdot \left(\frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right). \end{aligned}$$

Für die längere Pfette ist

$$N = N_1 + \frac{7}{2} \cdot P = 5 P.$$

Die Querkraft geht hier, wie eine einfache Addition lehrt, dreimal durch Null, über den Auflagern und in der Mitte.

Für die Auflagerstelle der rechten Seite der Fig. 177 gilt

$$\begin{aligned} M_0 &= +N_1 \cdot c + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} \\ &= +5 \cdot P \cdot l \cdot \frac{c}{l} + P \cdot \frac{1}{10} \cdot l = +P \cdot l \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right), \end{aligned}$$

und für die Mitte der Pfette

$$\begin{aligned} M &= -N \cdot \frac{l}{2} + N_1 \cdot \left(\frac{l}{2} + c \right) + P \cdot \frac{l}{5} + P \cdot 2 \cdot \frac{l}{5} + P \cdot 3 \cdot \frac{l}{5} \\ &= -P \cdot l \cdot \left(\frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right). \end{aligned}$$

Die Momente in den beiden Trägermitten sind also einander gleich:

$$M = M_1.$$

Der Kragträger wird nun am günstigsten ausgenutzt, wenn seine beiden Biegemomente M_0 und M der Größe nach übereinstimmen:

$$P \cdot l \cdot \left(\frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right) = P \cdot l \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right)$$

oder

$$3 \cdot \frac{c}{l} = \frac{11}{20} - \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$$

also

$$\frac{c}{l} = \frac{3}{20} \quad \text{bzw.} \quad c = 0,15 \cdot l.$$

Die drei Biegemomente haben dann den Wert

$$M = P \cdot l \cdot \left(\frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{20} \right) = 0,325 \cdot P \cdot l,$$

sind also nur halb so groß, als im Fall der Anordnung gemäß Fig. 175. Den Verlauf des Biegemomentes in beiden Pfetten gibt Fig. 178 wieder.

Um die Anordnung mit bestem Vorteil auszuführen, ist der Abstand des Giebelbinders vom nächsten zu $0,85 \cdot l$ zu wählen.

Beispiel 88. Eine Schachtförderanlage fördere jedesmal 6 Wagen von je 325 kg Eigengewicht mit je 550 kg Kohlen. Der Förderkorb wiege $Q = 3850$ kg, das Förderseil von 35 mm Durchmesser und 620 m Länge 4,10 kg/m. Anzugeben ist das zum Antrieb der Seiltrommeln erforderliche Drehmoment.

Es ist die Nutzlast $P = 6 \cdot 0,55 = 3,30$ t, das Gewicht der Förderwagen $G_1 = 6 \cdot 0,325 = 1,95$ t, das Seilgewicht $G_2 = 4,10 \cdot 620 = 2,54$ t, der geschätzte Widerstand jedes Fahrkorbes $W = 0,50$ t.

Dann ist die Seilspannkraft der belasteten Seite

$$S_1 = P + G_1 + Q + G_2 + W = 12,14 \text{ t},$$

und die der leeren Seite

$$S_2 = G_1 + Q - W = 5,30 \text{ t},$$

und zwar bei Beginn der Aufwärtsförderung.

Ist der Durchmesser der Seiltrommeln $D = 7,0$ m, auf deren eine sich das stark belastete Seiltrum 1 aufwickelt, während das weniger belastete sich von der anderen abwickelt (Fig. 179), so ergibt sich das bei Beginn der Förderung nötige Drehmoment zu

$$M = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (S_1 - S_2) = 3,5 \cdot 6,74 = 23,60 \text{ mt.}$$

Am Ende der Förderung fällt in S_1 das Seilgewicht G_2 weg, dafür kommt es jetzt zu S_2 hinzu, so daß dann gilt

$$\begin{aligned} S'_1 &= 12,14 - 2,54 = 9,60 \text{ t,} \\ S'_2 &= 5,30 + 2,54 = 7,84 \text{ t.} \end{aligned}$$

Das Drehmoment an der Trommel wird dann

$$M' = 3,5 \cdot 1,76 = 6,1 \text{ mt.}$$

Es schwankt also infolge der Wirkung des Seilgewichtes innerhalb sehr weiten Grenzen um 17,44 mt.

Um das Seilgewicht auszugleichen, wird häufig ein Unterseil verwendet, wie es in Fig. 175 gestrichelt ist. Man erhält dann

$$\begin{aligned} S''_1 &= 12,14 \text{ t unverändert,} \\ S''_2 &= 7,84 \text{ t ebenfalls unveränderlich,} \end{aligned}$$

so daß jetzt das Drehmoment an der Trommelachse immer den Wert hat:

$$M'' = 3,5 \cdot (12,14 - 7,84) = 15,05 \text{ mt.}$$

Durch das Unterseil geht man aber des Vorteils verlustig, nötigenfalls gleichzeitig aus zwei verschiedenen Teufen fördern zu können, indem man die auf der Welle verstellbaren Trommeln entsprechend gegeneinander verdreht. In dem Fall kann man den Ausgleich durch kegelige Trommeln bewirken derart, daß die größere Seilspannkraft S_1 an dem kleineren Halbmesser r angreift und die kleinere Seilkraft S_2 an dem größeren Halbmesser R .

Die Bedingung, daß die Antriebsmomente zu Anfang und am Ende der Förderung den gleichen Wert haben, lautet dann

$$r \cdot S_1 - R \cdot S_2 = R \cdot S'_1 - r \cdot S'_2.$$

Hieraus folgt mit den berechneten Zahlenwerten

$$\frac{r}{R} = \frac{9,60 + 5,30}{12,14 + 7,84} = 0,746.$$

Wählt man also $2r = 6,0$ m, so wird

$$2R = \frac{0,60}{0,746} = 8,04 \text{ m.}$$

In Zwischenstellungen ist der Ausgleich allerdings nicht ganz vollständig.

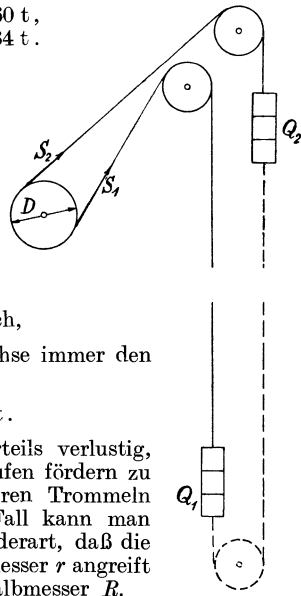


Fig. 179.

11. Das Seileck für beliebig gerichtete Kräfte.

Für beliebig gerichtete Kräfte, deren Wirkungslinien in derselben Ebene liegen, gilt außer der für die Berechnung benutzten Gleichgewichtsbedingung auf S. 39 auch die auf S. 57 genannte für die zeichnerische Ermittlung: Sowohl das Krafteck als auch das Seileck müssen geschlossen sein¹⁵⁾. Denn die dortigen Darlegungen bleiben unverändert, wenn auch die Kräfte nicht parallel sind.

Beispiel 89. Der aus Kupfer bestehende Zuleitungsdraht schnellfahrender Straßen- und Überlandbahnen wird nach Fig. 180 an einem bronzenen Aufhänge draht befestigt und dieser an einem Stahldrahtseil. Die Spannweite des letzteren betrage $a = 50$ m, der gleiche Abstand der mit je $P = 9$ kg belasteten Aufhänge drähte $c = 7$ m. Die größte Spannkraft im Stahldrahtseil sei $S = 120$ kg. Aufzuzeichnen ist die Form des Seiles und sein größter Durchhang.

Man trägt zuerst in einem beliebigen Kräftemaßstab, z. B. 2 kg = 1 mm die, Lasten P aneinander an (Fig. 181) und schlägt von den Endpunkten dieser Linie AB Kreisbögen mit S , die sich in O schneiden. Dann ist ABO das Kräfteck für die äußeren Kräfte. Da das biegsame Seil sich in die Richtung der S einstellen muß, so ist durch AO und BO auch die Richtung der Seilenden gegeben. Zieht man jetzt von den Endpunkten der P gerade Linien nach O , so geben diese die Richtung der entsprechenden Seilstücke an, und das Seileck der Fig. 180 kann hier-



Fig. 180.

mit aufgezeichnet werden. Mit dem Maßstab 1 : 1000 entnimmt man der Fig. 180 den Durchhang in der Mitte $f = 3,6$ m.

Die Fig. 181 zeigt nun, daß die wagerechte Seitenkraft H der Spannkraften überall im Seil den gleichen Wert hat:

$$H = \sqrt{S^2 - \left(\frac{7}{2} P\right)^2}.$$

Bei praktischen Ausführungen ist die Spannkraft S ungefähr $3\frac{1}{2}$ mal so groß, als die Aufgabe angibt, und die Linien schneiden sich dann in so flachen Schnitten, daß

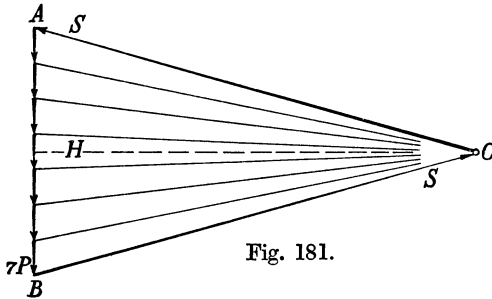


Fig. 181.

selbst bei größerer Zeichnung die Genauigkeit eine recht geringe ist. Man zieht deshalb die rechnerische Bestimmung des Durchhanges f unter Anwendung des Momentensatzes vor.

In Fig. 182 ist das halbe Seil mit den darauf wirkenden Kräften noch einmal dargestellt: in bezug auf den Befestigungspunkt erhält man als Gleichgewichtsbedingung, wenn ganz allgemein i Lasten P im gleichen Abstand c auf der Strecke l stehen:

$$-H \cdot f + \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - c\right) + P \cdot \left(\frac{l}{2} - 2c\right) + \dots + P \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{i-1}{2} \cdot c\right)$$

oder

$$H \cdot f = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot i - P \cdot c \left(1 + 2 + 3 + \dots + \frac{i-1}{2}\right). \tag{65}$$

Der Klammerausdruck ist eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit dem gleichbleibenden Unterschied 1 der aufeinander folgenden Glieder. Allgemein gilt für eine solche Reihe mit dem Anfangsglied x und dem gleichen Unterschied y die Summe bis zum n ten Glied

$$\Sigma = x + (x + y) + (x + 2y) + \dots + [x + (n - 1) \cdot y].$$

oder nochmals in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:

$$\Sigma = [x + (n - 1) \cdot y] + [x + (n - 2) \cdot y] + [x + (n - 3) \cdot y] + \dots + x.$$

Durch Addition der übereinander stehenden Glieder beider Zeilen folgt

$$2 \cdot \Sigma = 2n \cdot x + (n - 1) \cdot y \cdot n,$$

also

$$\Sigma = n \cdot x + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot y. \tag{66}$$

Mithin ist im vorliegenden Fall mit $x = 0$, $y = 1$, $n = \frac{i-1}{2}$

$$\Sigma = \frac{i-1}{2} \cdot \left(\frac{i-1}{2} - 1 \right) \cdot 1 = \frac{(i-1) \cdot (i-3)}{8}.$$

Wird ferner noch eingesetzt

$$H = \sqrt{S^2 - \left(\frac{i}{2} \cdot P \right)^2},$$

so ergibt sich schließlich

$$f = \frac{l}{2 \cdot i} \cdot \frac{i - \frac{c}{2l} \cdot (i-1) \cdot (i-3)}{\sqrt{\left(\frac{2S}{iP} \right)^2 - 1}},$$

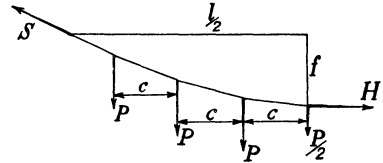


Fig. 182.

worin der kleine Subtrahend 1 unter der Wurzel ohne praktischen Fehler meist außer acht gelassen, d. h. $H = S$ gesetzt werden kann, so daß man erhält

$$f = \frac{P}{S} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left[i - \frac{c}{2l} \cdot (i-1) \cdot (i-3) \right]. \quad (67)$$

Damit wird im Fall des Beispiels bei $S = 400$ kg und $i = 7$:

$$f = \frac{9}{400} \cdot \frac{50}{4} \cdot \left[7 - \frac{7}{100} \cdot 6 \cdot 4 \right] = 1,49 \text{ m.}$$

Dieselbe Gleichung wird auch zur Berechnung des Durchhanges der Tragseile von Drahtseilbahnen unter einer Reihe von Wagen benutzt. Sie gilt auch für ansteigende oder fallende Strecken nach Fig. 183, wenn S die parallel zur Schrägen l gerichtete Seitenkraft der Tragseilspannung bedeutet.

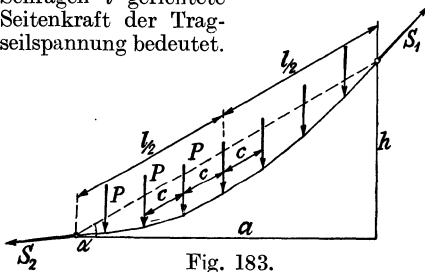


Fig. 183.

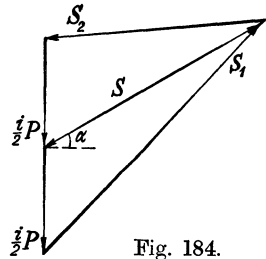


Fig. 184.

Die größte im Seil auftretende Spannkraft S_1 berechnet sich dann nach Fig. 184 mit Hilfe der Formel (44) aus

$$S_1^2 = S^2 + \left(\frac{i}{2} \cdot P \right)^2 - 2 \cdot S \cdot \left(\frac{i}{2} \cdot P \right) \cdot \cos(90 + \alpha)$$

mit $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ zu

$$S_1 = S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)^2 + \frac{2h}{l} \cdot \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)}. \quad (68a)$$

Entsprechend ergibt sich die kleinste Seilkraft

$$S_2 = S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)^2 - \frac{2h}{l} \cdot \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)}. \quad (68b)$$

Der linke Pfeil von S in Fig. 184 gehört zum unteren Dreieck mit S_1 als größter Seite und der rechte Pfeil zum oberen Dreieck mit S_2 als kleiner Seite.

Ein anderer Weg, zu der Formel (67) zu gelangen, ist der folgende: Nach der Schlußbemerkung zu Fig. 54 in Beispiel 41 ist der Durchhang in der Mitte, wenn nur die mittlere Last P vorhanden ist,

$$f_1 = \frac{P}{H} \cdot \frac{l}{4}.$$

Wenn nur die eine benachbarte Last P vorhanden ist, ergibt sich nach der Schlußformel in Beispiel 41 als Durchhang an der Laststelle

$$f'_2 = \frac{P}{H} \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - c\right) \cdot \left(\frac{l}{2} + c\right)}{l}$$

und der davon herrührende Durchhang in der Mitte ist nach dem Proportionsatz

$$f_2 = f'_2 \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l + c} = \frac{P}{H} \cdot \frac{\frac{l}{2} - c}{2}.$$

Der von der dritten Last P in der Mitte hervorgebrachte Durchhang ist entsprechend

$$f_3 = \frac{P}{H} \cdot \frac{\frac{l}{2} - 2c}{2}$$

Da nun die Lasten gleichzeitig vorhanden sind und auf beiden Seiten der Mitte stehen, so ist der Gesamtdurchhang

$$f = f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots$$

oder

$$f = \frac{P}{H} \cdot \left[\frac{l}{4} + \left(\frac{1}{2} - c\right) + \left(\frac{l}{2} - 2c\right) + \dots \right].$$

Das ist wieder die Gleichung (65).

Es ist ein allgemein gültiges Prinzip, daß sich die gleichartigen Wirkungen verschiedener Ursachen addieren, wenn nur die Ursachen unabhängig voneinander sind.

Man nennt diesen aus der Erfahrung gewonnenen Grundsatz, von dem vielfach Anwendung gemacht wird, das Prinzip von der Summierung der Wirkungen, dessen Richtigkeit hier an einem Sonderfall nachgewiesen ist.

Beispiel 90. Ein Gewölbe von $l' = 15,2$ m Spannweite entsprechend der Gesamtlänge $l = 15,82$ m zwischen den Kämpferpunkten wird in 10 Teile von gleicher, auf der Wagerechten gemessenen Länge geteilt und erfährt etwa in der Mitte jedes Teiles die ruhende Gewichtsbelastung (Fig. 185)

$$\begin{array}{ll} P_1 = P_I = 2,5 \text{ t}, & P_2 = P_{II} = 4,4 \text{ t}, \\ P_3 = P_{III} = 5,7 \text{ t}, & P_4 = P_{IV} = 7,7 \text{ t}, \\ & P_5 = P_V = 10,4 \text{ t}. \end{array}$$

Anzugeben sind die Widerlagerkräfte N_A und N_B nach Größe und Richtung, sowie die günstigste Form des Gewölbes für eine gegebene Pfeilhöhe $f = 2,7$ m.

Die Aufgabe ist ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen nur dann lösbar, wenn das Gewölbe Kämpfer- und Scheitelgelenke besitzt, die zum Ausgleich der unvermeidlichen Unebenheiten der Hausteine Bleitafeln von 3 bis 4 mm Stärke enthalten.

Man ermittelt die Richtungen der von jeder Last der linken Gewölbeseite erzeugten Kämpferdrücke N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 am linken Auflager nach den Angaben in Beispiel 28, indem man die gerade Verbindungslinie \overline{BC} zieht und von den Schnittpunkten dieser Linie mit den verschiedenen P der linken Seite die Geraden nach dem Kämpferpunkt A (Fig. 184). Werden die P von den Schnittpunkten aus etwa im Kräftemaßstab $1 t = 1,5 \text{ mm}$ aufgetragen und von ihren

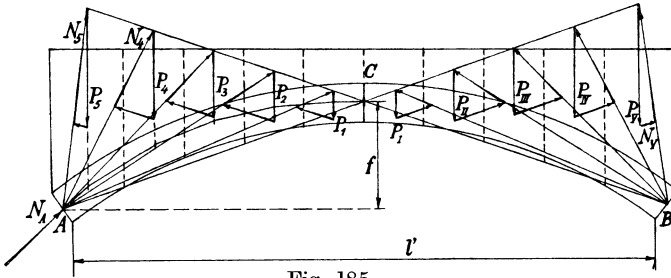


Fig. 185.

Endpunkten Parallelen zu \overline{BC} gezogen, so sind damit die Krätedreiecke erhalten, die die Größe der Auflagerkräfte bestimmen.

Dieselbe Aufzeichnung wird für die rechte Seite des Gewölbes durchgeführt, und die Übereinstimmung der betreffenden Dreiecke bei symmetrischer Belastung bildet die Probe für die Richtigkeit der Zeichnung.

Man trägt jetzt die sämtlichen 10 N für eine Seite hintereinander an (Fig. 186), und nach dem Prinzip von der Summierung der Wirkungen ist die Schlußlinie die Gesamtauflagerkraft N_A , die durch das linke Kämpfergelenk in der erhaltenen Richtung und Größe geht. Man entnimmt der Zeichnung $N_A = 42,3 \text{ t}$.

Werden nun die Lasten P_5 bis P_1 an N_A senkrecht nach unten angesetzt, so gibt die Schlußlinie den wagerechten Scheiteldruck $H = 32,7 \text{ t}$ an und die vom Anfangspunkt der Kraft N_A nach den verschiedenen P gezogenen Linien die Größe und Richtung der zwischen den entsprechenden Lasten der Fig. 185 wirkenden Gewölbedrucke. Das so in Fig. 181 von H aus gezeichnete Seileck ist die Gewölbestützzlinie, und das Gewölbe ist bei ruhenden Lasten so zu formen, daß seine Mittellinie sich dieser Stützzlinie nach Möglichkeit anschließt.

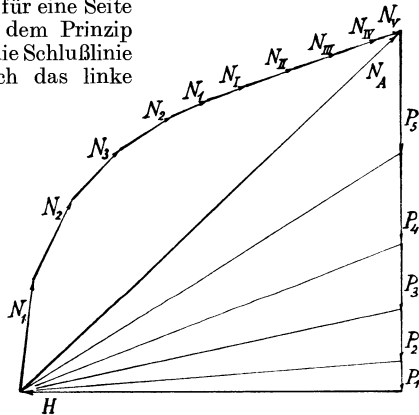


Fig. 186.

Werden die wagerechten Abstände der Lasten P_1 bis P_5 vom Auflager A mit $a_1, a_2 \dots$ bezeichnet, so läßt sich bei bekanntem Pfeil f der wagerechte Schub H regelmäßig finden durch die Momentengleichung in bezug auf A :

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \dots + P_5 \cdot a_5 - H \cdot f = 0,$$

also
$$H = \frac{1}{f} \cdot \Sigma M,$$

im vorliegenden Fall:

$$H = \frac{1}{2,7} \cdot [2,5 \cdot 7,09 + 4,4 \cdot 5,49 + 5,7 \cdot 3,90 + 7,7 \cdot 2,31 + 10,4 \cdot 0,62]$$

$$H = 32,7 \text{ t}.$$

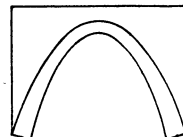


Fig. 187.

Unter gleichen Lasten P sind doch die verschiedensten Gewölbeformen möglich, je nach der Wahl des Pfeiles f . Bei kleinem f ergibt sich ein größerer waagrechter Schub H und eine entsprechend große Auflagerkraft N_A , denn nach

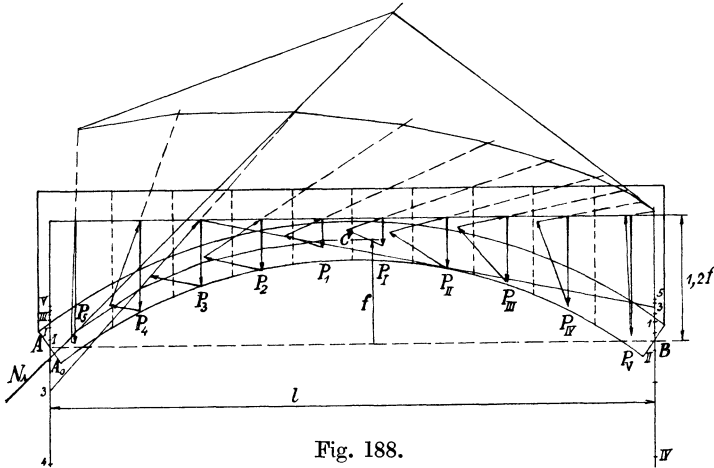


Fig. 188.

Fig. 186 ist $N_A = \sqrt{H^2 + (\sum P)^2}$; bei großem Pfeil f ist der waagrechte Schub H und damit die Auflagerkraft N klein (Fig. 187).

Die vorstehenden Darlegungen gelten nur für die verhältnismäßig selten zur Ausführung kommenden Gewölbe bzw. Bögen mit drei Gelenken. Die gebräuchlichen Gewölbe und Bögen mit geschlossenen Scheitel- und Kämpferfugen sind

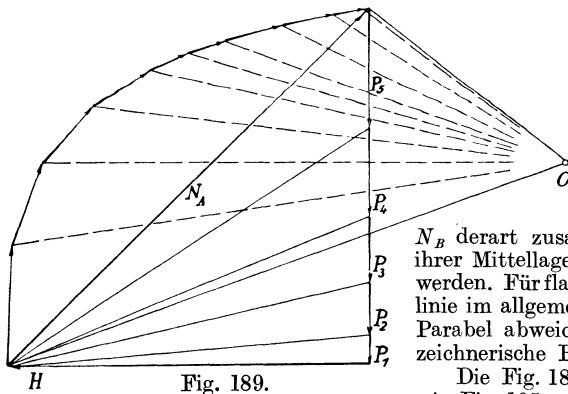


Fig. 189.

in den Kämpfern eingespannt durch ein bei A wirkendes linksdrehendes Moment M_A und ein bei B wirkendes rechtsdrehendes Moment M_B . Diese Momente setzen sich nun nach S. 63 mit den Einzelkräften N_A bzw.

N_B derart zusammen, daß letztere aus ihrer Mittellage nach unten verschoben werden. Für flache Gewölbe, deren Mittellinie im allgemeinen nicht sehr von einer Parabel abweicht, gilt dann die folgende zeichnerische Behandlung¹⁹⁾.

Die Fig. 188 stellt dasselbe Gewölbe wie Fig. 185 mit vermauertem Scheitel und Kämpfer dar; A, B, C sind jetzt die Mittelpunkte der Kämpfer- bzw. Scheitelfugen. Dann liegen die Schnittpunkte der Kämpferdrücke mit der Wirkungslinie der erzeugenden Last P auf einer Parallelen zu \overline{AB} , die im Abstände $1,2 \cdot f$ gezogen ist, der Kämpferdrucklinie. Der von der Last P erzeugte Kämpferdruck schneidet ferner die durch A gezogene Lotrechte in einem Punkt, der um die Strecke $c_A = \frac{4}{15} f \cdot \left(2 + \frac{l}{a_A}\right)$ von der Kämpferdrucklinie entfernt ist, und die durch B gezogene Lotrechte in einem um $c_B = \frac{4}{15} f \cdot \left(2 + \frac{l}{a_B}\right)$ von der Kämpfer-

¹⁹⁾ Landsberg, Z. d. V. d. I. 1901.

drucklinie entfernten Punkt. Hierin bezeichnet a_A den Abstand der Last vom Kämpferpunkt A und a_B ihren entsprechenden Abstand vom Kämpferpunkt B .

Die Werte der c werden vorteilhaft für jede Last berechnet, weil die natürlich auch mögliche zeichnerische Ermittlung die Zeichnung leicht unklar werden läßt.

Nr.	5	4	3	2	1	I	II	III	IV	V
$P =$	10,4	7,7	5,7	4,4	2,5	2,5	4,4	5,7	7,7	10,4 t
$a_A =$	0,68	2,39	3,97	5,55	7,13	8,71	10,39	11,97	13,55	15,26 m
$\frac{l}{a_A} =$	23,27	6,62	3,97	2,85	2,22	1,82	1,52	1,32	1,17	1,04
$c_A =$	18,18	6,21	4,30	3,49	3,04	2,75	2,54	2,39	2,28	2,19 m
$c_B =$	2,19	2,28	2,39	2,54	2,75	3,04	3,49	4,30	6,21	18,18 m

Die Endpunkte der Strecken c_A und c_B sind auf den Lotrechten durch die Kämpfermittelpunkte mit den zugehörigen Zahlen bezeichnet. Jetzt werden die P von der Kämpferdrucklinie im Kräftemaßstab $1 t = 1,5 \text{ mm}$ nach unten abgetragen, von den Endpunkten der c_A Gerade durch die Anfangspunkte gezogen und durch die Endpunkte der P Parallele zu den Schrägen von den c_B -Punkten nach den Anfangspunkten der P , wie das für P_3 genau angegeben ist. Es entstehen so die Kräfte dreiecke für die entsprechenden Anteile von N_A und N_B . Die Zeichnung ist richtig durchgeführt, wenn bei symmetrischer Belastung z. B. Dreieck 3 kongruent Dreieck III ist.

Nun werden in Fig. 189 sämtliche Anteile von N_A nach Größe und Richtung aneinander angetragen, die Schlußlinie dieses Kräftecks ist die Gesamtauflagerkraft N_A . Ihr infolge des Einspannungsmomentes aus der Kämpfermitte verschobener Angriffspunkt wird ermittelt, indem man von einem beliebig gewählten Pol O die Polstrahlen zieht und in Fig. 188 das parallele Seileck zwischen den N einträgt. Durch den Schnittpunkt der letzten Seillinien geht N_A parallel zu dem N_A der Fig. 189. Damit ist ihr Angriffspunkt A_0 erhalten.

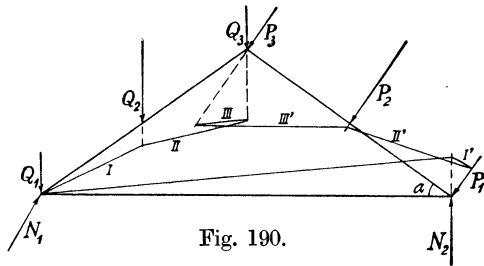


Fig. 190.

Werden jetzt noch die $P_5 \dots P_1$ vom Endpunkt von N_A nach unten in Fig. 189 eingezeichnet und vom Anfangspunkt von N_A aus die zugehörigen Strahlen gezogen, darauf von A_0 ausgehend zwischen die P der Fig. 188 die parallelen Seillinien, so ist damit die Stützlinie des eingespannten Gewölbes bestimmt. Die Richtigkeit der Zeichnung wird dadurch gewährleistet, daß die von A_0 aus gezeichnete Stützlinie durch den Punkt C geht.

Man entnimmt der Zeichnung die Zahlenwerte $N_A = 40,7 t$ und $H = 31,7 t$. Beide Werte sind um 3 v. H. kleiner als bei dem Gewölbe mit drei Gelenken.

Beispiel 91. Auf einen Dachbinder von der Spannweite $a = 11,80 \text{ m}$ und der Dachneigung $\alpha = 35^\circ$ (Fig. 190) wirken auf der Seite des festen Auflegers die Schneelasten $Q_1 = 560 \text{ kg}$, $Q_2 = 1100 \text{ kg}$, $Q_3 = 550 \text{ kg}$ und auf der Seite des mit Rücksicht auf die Wärmeausdehnung verschiebbaren Auflegers die Windkräfte $P_1 = 650 \text{ kg}$, $P_2 = 1290 \text{ kg}$, $P_3 = 640 \text{ kg}$. Anzugeben sind die Auflagerkräfte N_1 und N_2 nach Größe und Richtung.

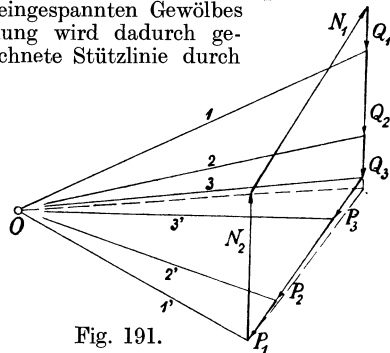


Fig. 191.

Von der Auflagerkraft N_2 ist die Richtung senkrecht zum wagerecht verschiebbaren Auflager bekannt, von der Auflagerkraft N_1 aber nur die Angriffsstelle am festen Auflager. Zeichnet man also das Kräfteck der Fig. 191 im Maßstab $1 \text{ mm} = 100 \text{ kg}$ (auf dem Zeichenbrett würde man etwa $1 \text{ mm} = 25 \text{ kg}$ wählen), so kann vorläufig nur die Wirkungslinie von N_2 eingetragen werden. Jetzt wird der Pol O an beliebiger Stelle angenommen, von ihm aus werden die Polstrahlen nach den Endpunkten der einzelnen Kräfte gezogen, und nun wird in die Fig. 190 parallel zu diesen Polstrahlen das Seileck eingetragen. Man fängt am Angriffspunkt von N_1 an, dann fällt nämlich die Parallele zu $\overline{O\bar{O}}$, die man sonst nicht unterbringen könnte, zu dem Schnittpunkt zusammen; hieran schließt sich die Parallele I zu $\overline{O\bar{1}}$ und so fort. Zu der Schlußlinie des Seilecks wird die gestrichelte Parallele in das Kräfteck eingetragen. Ihr Schnittpunkt mit der Wirkungslinie von N_2 gibt die Größe dieser Kraft an und bestimmt zugleich die Richtung und Größe von N_1 , da das Kräfteck ja des Gleichgewichts halber geschlossen sein muß. Man erhält so $N_1 = 2900 \text{ kg}$ und $N_2 = 1880 \text{ kg}$.

Sind Wind- und Schneelasten vertauscht, so kann man die gleichen Figuren benutzen und vertauscht nur die Auflager und ihre Kräfte. Jetzt ist N_1 lotrecht gerichtet und seine Wirkungslinie fällt in Fig. 191 mit den Q zusammen, während die schräge Richtung von N_2 vorläufig unbekannt ist. Man erhält somit aus den gestrichelten Linien der Fig. 191 $N'_1 = 3000 \text{ kg}$ und $N'_2 = 2350 \text{ kg}$.

12. Beliebig im Raum wirkende Kräfte.

Wenn die nach beliebigen Richtungen im Raum verlaufenden Wirkungslinien der Kräfte sich in einem Punkt schneiden, so ist nach den in Abschnitt 8 gegebenen Vorschriften zu verfahren. Wenn Kräftepaare vorhanden sind, deren Ebenen parallel zu einander liegen, so addieren sich die Drehmomente einfach algebraisch (Abschnitt 10).

Bilden die Ebenen zweier Kräftepaare M_1 und M_2 einen bestimmten Winkel γ miteinander, so rechnet man beide Kräftepaare um auf den gleichen Abstand a der Kräfte:

$$M_1 = P \cdot a, \quad M_2 = Q \cdot a.$$

Sie werden nun so in ihrer Ebene verschoben, daß die gleichen Abstände a in der Schnittlinie der Ebenen aufeinanderfallen (Fig. 192): in dem einen Endpunkt A greifen dann die beiden Kräfte P_1 und Q_1 je in einer der gegebenen Ebenen I und II an und in dem anderen Endpunkt B die gleichen entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_2 und Q_2 . Sie werden in der Ebene des Winkels $P_1 A Q_1$ bzw. $P_2 B Q_2$ zu den Mittelkräften R_1 bzw. R_2 vereinigt, die selbstverständlich wieder gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, also ein Kräftepaar vom Drehmoment $M_R = R \cdot a$ bilden.

Nun ist nach Formel 44

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 \cdot P \cdot Q \cdot \cos \gamma,$$

$$\text{also } M_R = R \cdot a = \sqrt{(P \cdot a)^2 + (Q \cdot a)^2 + 2 \cdot (P \cdot a) \cdot (Q \cdot a) \cdot \cos \gamma}$$

$$\text{oder } M_R = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \cos \gamma}. \quad (69)$$

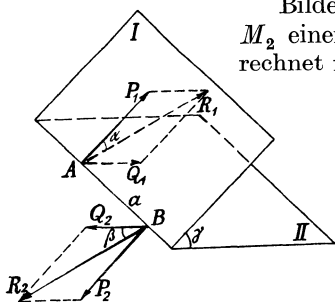


Fig. 192.

In sich schneidenden Ebenen wirkende Drehmomente werden so zu einem Gesamtdrehmoment zusammengesetzt wie Kräfte, die sich in einem Punkt schneiden¹⁸⁾. Umgekehrt findet die Zerlegung eines Kräftepaars in zwei andere, deren Ebenen einen Winkel miteinander bilden, in entsprechender Weise statt.

Die Ebene des Gesamtkräftepaars bildet mit der gegebenen Ebene I einen Winkel α , der sich nach dem Sinussatz berechnet:

$$\sin \alpha = \frac{Q_1}{P_1} \cdot \sin \gamma = \frac{Q_1 \cdot a}{P_1 \cdot a} \cdot \sin \gamma,$$

oder
$$\sin \alpha = \frac{M_2}{M_R} \cdot \sin \gamma. \quad (70 a)$$

Entsprechend wird der Winkel β mit der Ebene II erhalten aus

$$\sin \beta = \frac{M_1}{M_R} \cdot \sin \gamma. \quad (70 b)$$

Beispiel 92. Auf einer Vorgelegewelle sitzen eine Seilscheibe I vom Gewicht $G_1 = 300 \text{ kg}$ und eine Riemenscheibe II vom Gewicht $G_2 = 400 \text{ kg}$; ihre Abstände von den Lagern bzw. voneinander sind $a = 0,42 \text{ m}$, $b = 0,40 \text{ m}$, $c = 0,58 \text{ m}$.

Der Seilzug von der Größe $P_1 = 1200 \text{ kg}$ verläuft wagerecht nach der in Fig. 193 angegebenen Richtung, der Riemenzug von der Größe $P_2 = 550 \text{ kg}$ hat gegen die Lotrechte die eingetragene Neigung γ , und zwar ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2,75}{3,75}.$$

Anzugeben sind die Gesamtbiegemomente der Welle an den Stellen I und II.

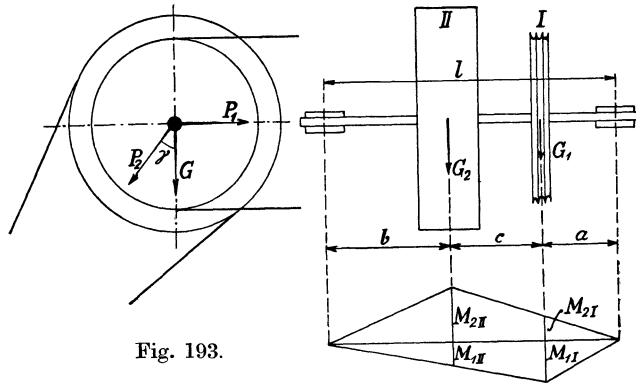


Fig. 193.

Nach Formel (36) erzeugt das Gewicht G_1 an der Stelle I das Biegemoment

$$M_{1I} = G_1 \cdot \frac{a \cdot (b + c)}{l} = \frac{300 \cdot 0,42 \cdot 0,98}{1,40} = 88,25 \text{ mkg}$$

und das Gewicht G_2 an der Stelle II das Biegemoment

$$M_{2II} = G_2 \cdot \frac{b \cdot (a + c)}{l} = \frac{400 \cdot 0,40 \cdot 1,00}{1,40} = 114,3 \text{ mkg}.$$

Den Verlauf der von beiden Gewichten herrührenden Biegemomente, die in derselben lotrechten Ebene wirken, stellt der untere Teil der Fig. 193 dar. Man entnimmt ihr das von G_1 an der Stelle II hervorgebrachte Biegemoment zu

$$M_{1II} = M_{1I} \cdot \frac{b}{b + c} = G_1 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{300 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 36,0 \text{ mkg}$$

und das von G_2 an der Stelle I erzeugte zu

$$M_{2I} = M_{2II} \cdot \frac{a}{a + c} = G_2 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{400 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 48,0 \text{ mkg}.$$

Entsprechend ist das von dem Seilzug P_1 an der Stelle I in wagerechter Ebene hervorgerufene Biegemoment

$$M'_{1I} = P_1 \cdot \frac{a \cdot (b + c)}{l} = \frac{1200 \cdot 0,42 \cdot 0,98}{1,40} = 353,0 \text{ mkg}$$

und das an der Stelle II

$$M'_{1II} = P_1 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{1200 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 144,0 \text{ mkg.}$$

Ebenso erhält man die beiden vom Riemenzug P_2 in der schrägen Ebene bewirkten Biegemomente

$$M''_{2II} = P_2 \cdot \frac{b \cdot (a + c)}{l} = \frac{550 \cdot 0,40 \cdot 1,00}{1,40} = 157,2 \text{ mkg,}$$

$$M''_{2I} = P_2 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{550 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 66,0 \text{ mkg.}$$

Die weitere Bearbeitung erfolgt am besten zeichnerisch. Man trägt die Biegemomente etwa im Momentenmaßstab $5 \text{ mkg} = 1 \text{ mm}$ für die Stellen I und II nach Größe und Richtung aneinander ab (Fig. 194) und entnimmt dann der Zeichnung die Gesamtmomente

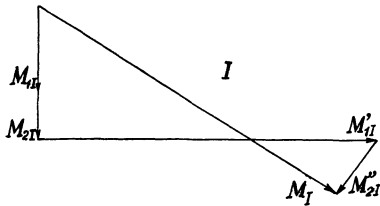
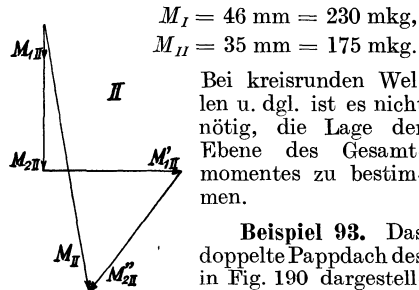


Fig. 194.



$$M_I = 46 \text{ mm} = 230 \text{ mkg,}$$

$$M_{II} = 35 \text{ mm} = 175 \text{ mkg.}$$

Bei kreisrunden Wellen u. dgl. ist es nicht nötig, die Lage der Ebene des Gesamtmomentes zu bestimmen.

Beispiel 93. Das doppelte Pappdach des in Fig. 190 dargestellten Daches von der

Neigung $\alpha = 35^\circ$, der Breite jeder Dachfläche $b = 7,2 \text{ m}$ und der Länge $l = 5,0 \text{ m}$ wiegt $55 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Das Gesamtgewicht auf einer Dachhälfte beträgt also

$$G = 7,2 \cdot 5,0 \cdot 55 = 2180 \text{ kg.}$$

Außerdem wirken darauf der Winddruck $P = 2580 \text{ kg}$ oder die Schneelast $Q = 2210 \text{ kg}$ (Beispiel 90). Anzugeben ist die Beanspruchung der Pfetten, die jede Dachhälfte in drei gleiche Teile zerlegen.

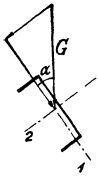


Fig. 195.

Bezeichnet P die auf eine Pfette entfallende Belastung in kg, so ist das größte darin auftretende Biegemoment bei richtiger Kraganordnung (Beispiel 87) $M = 0,325 \cdot P \cdot l \text{ mkg.}$

Sind die Pfetten senkrecht zur Dachneigung stehende U-Eisen (Fig. 195), so zerlegt sich die lotrechte Gewichtskraft G in die beiden Seitenkräfte $G \cdot \sin \alpha$ parallel zur Dachneigung und $G \cdot \cos \alpha$ senkrecht dazu, ebenso die Schneelast Q , während die Windkraft P schon senkrecht zur Dachneigung steht. Man erhält so

für Eigengewicht und Winddruck:

$$M'_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G \cdot \cos \alpha + P) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 \cdot 0,8192 + 2580) = 2364 \text{ mkg,}$$

$$M'_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot \sin \alpha = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2180 \cdot 0,5736 = 677 \text{ mkg.}$$

für Eigengewicht und Schneelast:

$$M'_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,8192 \cdot (2180 + 2210) = 1948 \text{ mkg.}$$

$$M'_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin \alpha \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5736 \cdot (2180 + 2210) = 1364 \text{ mkg}$$

als Biegemomente in den durch die Achsenrichtungen 1 und 2 der Fig. 195 gelegten Ebenen.

Sind die Pfetten lotrecht stehende I-Eisen (Fig. 196), so fallen G und Q schon in die lotrechte Achse 1 und P ist nach den beiden Achsenrichtungen zu zerlegen in $P \cdot \cos \alpha$ in Richtung der Achse 1 und $P \cdot \sin \alpha$ in Richtung der Achse 2. Man erhält so

für Eigengewicht und Winddruck:

$$M_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G + P \cdot \cos \alpha) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 + 2580 \cdot 0,8192) = 2325 \text{ mkg},$$

$$M_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot P \cdot \sin \alpha = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2580 \cdot 0,5736 = 801 \text{ mkg},$$

für Eigengewicht und Schneelast:

$$M'_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 + 2210) = 2378 \text{ mkg.}$$

$$M'_2 = 0.$$

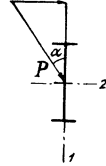


Fig. 196.

Es sei eine Anzahl von Kräften $P_1, P_2, P_3 \dots$ der Größe nach gegeben, ferner je ein Punkt der Wirkungslinien dieser Kräfte, der Angriffspunkt oder auch ein beliebiger anderer, deren Abstände in bezug auf drei in demselben Punkt O zueinander senkrecht stehende Bezugslinien X, Y, Z durch die Längen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ gemessen seien. Um die Lage der Wirkungslinien der Kräfte vollständig zu bestimmen, sind noch ihre Neigungen gegen die positive Richtung der drei Bezugslinien mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots$ festzulegen. Für die Kraft P_1 gibt z. B. Fig. 197 alle genannten Bestimmungen an. Es ist jetzt zu untersuchen, ob die Kräfte im Gleichgewicht sind bzw. wie sie zu vereinigen sind.

Nach dem Vorgang der Fig. 118 wird zuerst jede Kraft nach den Richtungen der drei Bezugsachsen zerlegt in

$$X_1 = P_1 \cdot \cos \alpha_1,$$

$$Y_1 = P_1 \cdot \cos \beta_1,$$

$$Z_1 = P_1 \cdot \cos \gamma_1$$

...

$$X_2 = P_2 \cdot \cos \alpha_2,$$

$$Y_2 = P_2 \cdot \cos \beta_2,$$

$$Z_2 = P_2 \cdot \cos \gamma_2,$$

...

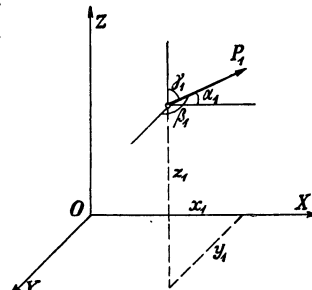


Fig. 197.

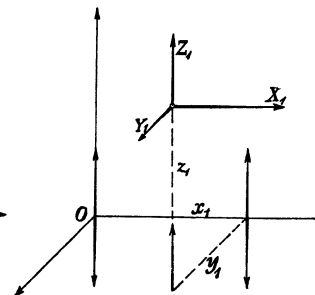


Fig. 198.

Die mit verschiedenen Ziffern gekennzeichneten Kräfte gehen im allgemeinen auch durch verschiedene Punkte des Raumes, dagegen die mit gleichen Ziffern bezeichneten durch denselben Punkt (Fig. 198).

Jetzt wird Z_1 in ihrer Wirkungslinie soweit verschoben, daß der Angriffspunkt in der XY -Grundebene liegt, was nach den Angaben in Abschnitt 3 ohne weiteres zugänglich ist, solange der neue Angriffspunkt mit dem alten unveränderlich verbunden ist. Darauf wird Z_1 parallel zu sich selbst und zur YZ -Ebene um die Strecke y_1 bis in die XZ -Ebene verschoben. Das ist nach Abschnitt 10 zulässig, wenn ein Drehmoment von der Größe $-M_x^1 = -Z_1 \cdot y_1$ hinzugefügt wird (Fig. 198). In der

XZ -Ebene wird Z_1 noch einmal parallel zu sich selbst bis in den Schnittpunkt O der Bezugsachsen um die Strecke x_1 verschoben, was die Zuführung eines Drehmomentes $+M_Y^1 = +Z_1 \cdot x_1$ erfordert.

Das gleiche geschieht mit den beiden anderen Seitenkräften X_1 und Y_1 der Kraft P_1 ; die Verschiebung von X_1 bringt wieder zwei Drehmomente $-M_Y^1 = -X_1 \cdot z_1$ und $+M_Z^1 = +X_1 \cdot y_1$ ein und die Verschiebung von Y_1 entsprechend die Drehmomente $+M_X^1 = +Y_1 \cdot z_1$ und $-M_Z^1 = -Y_1 \cdot x_1$, wie die hier nicht gegebene Aufzeichnung dieser Verschiebungen leicht ergibt. Die Vorzeichen der Drehmomente sind positiv, wenn die Drehung rechtsherum verläuft bei Betrachtung des Kräftepaares vom Schnittpunkt O der Bezugsachsen aus an der dem Buchstaben M beigesetzten Achse entlang in der positiven Richtung der Seitenkräfte, und negativ bei umgekehrter Drehrichtung.

Genau so wird mit den Seitenkräften der übrigen $P_2, P_3 \dots$ verfahren. Die in Richtung derselben Achse durch den Anfangspunkt O verlaufenden Seitenkräfte addieren sich nach Abschnitt 5 zu einer Mittelkraft

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i = \sum (P_i \cdot \cos \alpha_i), \\ Y &= \sum Y_i = \sum (P_i \cdot \cos \beta_i), \\ Z &= \sum Z_i = \sum (P_i \cdot \cos \gamma_i), \end{aligned} \quad (71)$$

worin der Anzeiger i der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... erhält. Entsprechend addieren sich die senkrecht zu derselben Achse wirkenden Drehmomente, zu denen jede Kraft P_i zwei Anteile liefert, gemäß Abschnitt 10:

$$\begin{aligned} M_X &= \sum M_X^i = \sum (+Y_i \cdot z_i - Z_i \cdot y_i), \\ M_Y &= \sum M_Y^i = \sum (+Z_i \cdot x_i - X_i \cdot z_i), \\ M_Z &= \sum M_Z^i = \sum (+X_i \cdot y_i - Y_i \cdot x_i). \end{aligned} \quad (72)$$

Wenn Gleichgewicht bestehen soll, darf bei der Addition weder eine Kraft noch ein Drehmoment übrig bleiben, so daß alle sechs Gleichungen 71 und 72 einzeln Null ergeben müssen^{19a}). Im allgemeinen wird der Fall nicht eintreten; dann kann man die drei Kräfte X, Y, Z nach den Angaben am Schluß des Abschnittes 8 zu einer Mittelkraft vereinigen von der Größe

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (73)$$

die mit den Bezugsachsen drei Winkel bildet, die sich berechnen aus

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}. \quad (74)$$

Ebenso ergeben die drei Drehmomente, deren jedes eine Drehung um die entsprechende Bezugsachse herbeizuführen sucht, gemäß den Darlegungen zu Anfang dieses Abschnittes ein Gesamtdrehmoment

$$M = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}, \quad (75)$$

dessen durch den Bezugspunkt O gehende Drehachse mit den Bezugsachsen drei Winkel bildet, die sich berechnen aus

$$\cos \varphi = \frac{M_X}{M}, \quad \cos \chi = \frac{M_Y}{M}, \quad \cos \psi = \frac{M_Z}{M}. \quad (76)$$

^{19a}) d'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes. 1749.

Die Richtung der Drehachse ist das wesentliche Bestimmungsstück für die Lage des Drehmomentes, weil ja seine Ebene nicht festliegt, da dasselbe Drehmoment in allen zueinander parallelen Ebenen dieselbe Wirkung hat.

Der Anfangspunkt O der Bezugsachsen war nun ganz unwillkürlich gewählt. Diese Willkürlichkeit kann durch Anwendung der folgenden Hilfssätze beseitigt werden.

In Fig. 199 sind zwei gerade Strecken $\overline{OA} = l_1$ und $\overline{OB} = l_2$ dargestellt, deren Endpunkte A bzw. B von den durch den Nullpunkt O gelegten, zueinander rechtwinkligen Bezugsachsen die Abstände x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2 haben und die mit den Bezugsachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bzw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ einschließen. Der Abstand $AB = d$ wird auf die xy -Ebene als $A'B'$ projiziert, und man entnimmt der Figur nach dem Satz des Pythagoras

$$d^2 = \overline{A'B'}^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

ferner ebenso

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (77)$$

In dem Dreieck OAB läßt sich aber nach dem Kosinussatz angeben, wenn δ der Winkel ist, den die beiden Strecken l_1 und l_2 einschließen:

$$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta.$$

Hierin ist nach Fig. 199 bzw. Formel (49)

$$\begin{aligned} l_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ l_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta, \end{aligned}$$

woraus sich alle Quadrate wegheben. Nun ist nach Fig. 195

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1, & x_2 &= l_2 \cdot \cos \alpha_2, \\ y_1 &= l_1 \cdot \cos \beta_1, & y_2 &= l_2 \cdot \cos \beta_2, \\ z_1 &= l_1 \cdot \cos \gamma_1, & z_2 &= l_2 \cdot \cos \gamma_2. \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die vorstehende Gleichung eingesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} &- 2l_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot l_2 \cdot \cos \alpha_2 - 2l_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot l_2 \cdot \cos \beta_2 - 2l_1 \cdot \cos \gamma_1 \cdot l_2 \cdot \cos \gamma_2 \\ &= -2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta, \end{aligned}$$

also

$$\cos \delta = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2. \quad (78)$$

Hieraus bestimmt man den Winkel zweier Geraden gegeneinander, deren Neigungswinkel gegen die drei aufeinander senkrecht stehenden Bezugsachsen gegeben sind.

In Fig. 200 stellt die wagerechte Strecke das durch die Formeln 75 und 76 festgelegte Gesamtdrehmoment M dar, indem die aus Formel 75 errechnete Größe von M auf der durch die Formeln 76 bestimmten Drehachse abgetragen ist. Man kann nun M zerlegen in zwei aufeinander

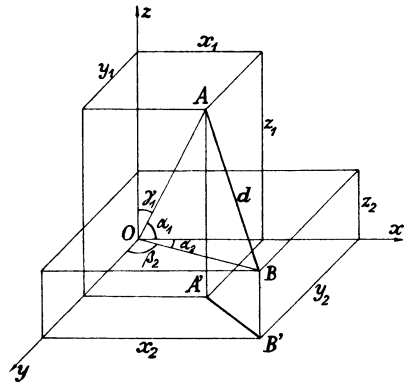


Fig. 199.

senkrechte Einzelmomente M_1 , dessen Drehachse mit der Wirkungslinie der Mittelkraft R zusammenfällt, die durch die Formeln 73 und 74 nach Größe und Lage bestimmt ist, und M_2 , dessen Drehachse dazu senkrecht steht. Es ist dann nach Formel 78

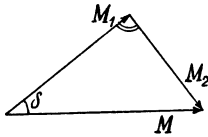


Fig. 200.

$$\cos \delta = \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \cos \chi + \cos \gamma \cdot \cos \psi,$$

ferner

$$M_1 = M \cdot \cos \delta \text{ und } M_2 = M \cdot \sin \delta. \quad (79)$$

M_2 kann auf seiner Drehachse so verschoben werden, daß es die Mittelkraft R in seiner Ebene enthält; dann lassen sich beide in dieser Ebene

gemäß Abschnitt 10 zusammensetzen zu der um den Betrag $r = \frac{M_2}{R}$ parallel zu sich verschobenen Kraft R .

Die ursprünglich gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ liefern also eine einzige Mittelkraft R , die bestrebt ist, den Körper, auf den die P einwirken, in ihrer Wirkungslinie zu verschieben, und ein Drehmoment M , das bestrebt ist, ihn in der zu R senkrecht stehenden Ebene zu drehen.

Man hätte auch in anderer Weise vorgehen können, indem man davon ausgeht, daß die Mittelkraft R und die Ebene des Drehmomentes M den Winkel $90 - \delta$ miteinander bilden. Man zerlegt nun R in die beiden Seitenkräfte $R_1 = R \cdot \sin(90 - \delta) = R \cdot \cos \delta$, die senkrecht zur Ebene von M steht, und $R_2 = R \cdot \cos(90 - \delta) = R \cdot \sin \delta$, die in die Ebene von M fällt. Die letztere Seitenkraft wird mit M zusammengesetzt zu der um den Betrag $r' = \frac{M}{R_2}$ verschobenen Kraft R_2 . Es

bleiben somit zwei Kräfte R_1 und R_2 , deren Wirkungslinien im Raum senkrecht¹⁷⁾ aneinander vorbeilaufen, die also ein Kraftkreuz bilden^{19b)}.

Ein Kraftkreuz kann hiernach stets auf eine Einzelkraft und ein Drehmoment, dessen Ebene senkrecht zu der Einzelkraft steht, umgeformt werden.

Bemerkt sei, daß durch passende Lage der einzelnen Kräfte zueinander und der verschiedenen Achsen sich die hier ganz allgemein durchgeführte Aufgabe häufig sehr vereinfachen läßt.

Beispiel 94. Der Körper A (Fig. 201) stehe auf einer Plattform B , deren Oberfläche mit der Ebene des Versuchsfeldes abschneidet, und es soll die Gesamtheit des auf A ausgeübten Wind- oder Erddruckes P gemessen werden²⁰⁾.

Die Plattform wird gestützt durch sechs Stäbe, die aus je zwei kräftigen Blattfedern bestehen und sich unter dem Einfluß einer Druckkraft etwas zusammendrücken derart, daß schon bei kleiner Verringerung der Stablänge eine bequem meßbare Ausbiegung der Federmitten erfolgt, die auf ein geeichtes Zeigerwerk übertragen wird. Die drei Stäbe S_1, S_2, S_3 liegen beliebig in einer wagerechten Ebene nur so, daß sich ihre Wirkungslinien nicht in einem Punkt schneiden,

^{19b)} Euler, Theoria motus corporum solidorum. 1765.

²⁰⁾ Müller - Breslau, Z. d. B. 1904.

die drei Stäbe S_4, S_5, S_6 stehen senkrecht zu dieser Ebene und schneiden sich ebenfalls nicht in einem Punkt.

Die Kraft P wird nach den drei Achsenrichtungen X, Y, Z zerlegt, und es gilt dann

$$\begin{aligned} X &= S_1 \\ Y &= S_2 - S_3 \\ Z &= S_4 + S_5 + S_6. \end{aligned}$$

Damit ist die Größe und Richtung von P ermittelt, sobald die Größen der sechs Stabkräfte abgelesen sind.

Die Lage des Angriffspunktes von P am Körper A liefern die Momentengleichungen

$$\begin{aligned} M_X &= (S_5 - S_6) \cdot b, \\ M_Y &= (S_5 - S_6) \cdot a, \\ M_Z &= S_3 \cdot d. \end{aligned}$$

Über die Verteilung der Kraft P auf dem Körper A kann die Vorrichtung naturgemäß keinen Aufschluß geben.

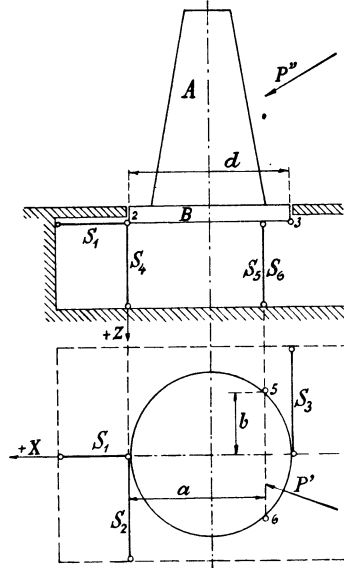


Fig. 201.

III. Das Gleichgewicht.

13. Der Schwerpunkt.

Aus der allgemeinen Erfahrung ergibt sich das Naturgesetz: Alle Körper auf der Erde werden nach dem lotrecht darunter befindlichen Teil der Erdoberfläche angezogen. Die auf jedes einzelne Teilchen eines Körpers wirkende Kraft, welche diese Anziehung hervorruft, heißt die Schwerkraft. Die Erklärung des Ursprunges und der Übertragung dieser Kraft ist nicht Gegenstand der Mechanik (vgl. Abschnitt 3).

Da alle technischen Bauwerke im Verhältnis so klein sind, daß die Krümmung der Erdoberfläche vollständig vernachlässigt werden kann, so sind die auf jedes Teilchen eines Körpers in demselben Sinne wirkenden Schwerkraft einander parallel.

Beispiel 95. Bei einem in der Nord-Süd-Richtung stehenden Gebäude von rund 230 m Länge würden die genau lotrechten Mauern von 20 m Höhe oben 0,73 mm weiter voneinander entfernt sein als unten. Wenn das Gebäude in der Ost-West-Richtung in Berlin ($52^\circ 30'$) steht, so findet sich dieselbe Abweichung schon bei 140 m Abstand der gleichhohen Ost-West-Mauern.

Die Mittelkraft aller Schwerkraft desselben Körpers oder eines Körpersystems heißt das Gewicht des Körpers. Es ist, weil alle Kräfte in derselben Richtung wirken, gleich der Summe aller Schwerkraft des Körpers oder gleich der Summe der Einzelgewichte der verschiedenen Körperteilchen.

Da nun jede, das Gewicht bildende Einzelkraft eine ganz bestimmte Angriffsstelle hat, das zugehörige kleine Teilchen des Körpers, so muß auch die Mittelkraft einen bestimmten Angriffspunkt haben, der als Schwerpunkt des Körpers bezeichnet wird. Bei den Schwerkraften

ist also im Gegensatz zu den von anderen Körpern auf den betreffenden ausgeübten Zug- und Druckkräften auch der Angriffspunkt vielfach von Bedeutung, und seine Ermittlung ist Gegenstand der folgenden Darlegungen.

Der meist angewendeten rechnerischen Bestimmung des Schwerpunktes wird der Satz 33 zugrunde gelegt: Das Drehmoment der Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente der Einzelkräfte in bezug auf dieselbe zu den Wirkungslinien der Kräfte parallele Ebene. Haben also die Einzelteile eines Körpers die Gewichte $G_1, G_2, G_3 \dots$ und die Abstände von einer lotrechten Ebene $x_1, x_2, x_3 \dots$, so folgt der Abstand x_0 der Mittelkraft ΣG von derselben Ebene aus²¹⁾

$$x_0 \cdot \Sigma G = \Sigma (G \cdot x)$$

zu

$$x_0 = \frac{\Sigma (G \cdot x)}{\Sigma G}. \quad (80 a)$$

Haben die Abstände derselben Einzelgewichte von einer zur ersten senkrechten, aber ebenfalls lotrecht stehenden Bezugsebene die Werte $y_1, y_2, y_3 \dots$, so gilt entsprechend

$$y_0 = \frac{\Sigma (G \cdot y)}{\Sigma G}, \quad (80 b)$$

und die Schnittgerade der beiden in den Abständen x_0 bzw. y_0 zu den betreffenden Bezugsebenen parallel gelegten sogenannten Schwererebenen enthält den Schwerpunkt, ist, wie man sagt, eine Schwerlinie.

Es ist klar, daß die Einzelgewichte und ihre Angriffspunkte keine Änderung erfahren, wenn der als starr vorausgesetzte Körper gedreht wird. Dreht man nun den Körper mit den beiden Bezugsebenen derart, daß jetzt eine die ersten beiden Ebenen senkrecht schneidende, also in der ersten Lage wagerechte Ebene in eine lotrechte Lage kommt, so gilt für die Abstände $z_1, z_2, z_3 \dots z_0$ von dieser Ebene ebenso wie oben

$$z_0 = \frac{\Sigma (G \cdot z)}{\Sigma G}. \quad (80 c)$$

Die im Abstände z_0 zur wagerechten Bezugsebene gelegte Schwererebene schneidet die Schwerlinie in einem Punkt, dem Schwerpunkt S .

Ist etwa die letzte Bezugsebene so angenommen worden, daß sich $z_0 = 0$ ergibt, also auch $z_0 \cdot \Sigma G = 0$, so wird gemäß Formel 80 c auch $\Sigma (G \cdot z) = 0$. In dem Fall geht die Bezugsebene durch den Schwerpunkt, und man kann aussprechen: Ist die algebraische Summe der Drehmomente aller Kräfte in bezug auf eine Ebene gleich Null, d. h.

²¹⁾ Varignon, Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1714.

sind alle Schwerkkräfte in bezug auf diese Ebene im Gleichgewicht, so enthält sie den Schwerpunkt.

Beispiel 96. Soll die Lage des Schwerpunktes eines Hebels für das Sicherheitsventil eines Dampfkessels ermittelt werden, so legt man den Hebel etwa nach Fig. 202 auf eine Messerschneide. Bleibt er im Gleichgewicht darauf liegen, so gibt die Mittelebene der Messerklinge seine Schwerebene an und der Abstand x_0 von der Drehschneide des Hebels läßt sich bequem aufmessen.

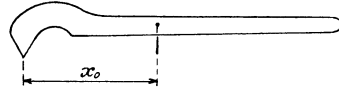


Fig. 202.

Aus den obigen Darlegungen folgt, daß, wenn alle Angriffspunkte in einer Ebene liegen, wie z. B. bei einem dünnen ebenen Blech, sich der Schwerpunkt in derselben Ebene befindet. Wird nämlich diese Ebene zur xy -Bezugsebene gewählt, so werden alle Abstände z -Null, also auch $\sum(G \cdot z) = 0$ und damit $z_0 \cdot \sum G = 0$. Da nun $\sum G$ nicht Null werden kann, weil ja alle Schwerkkräfte die gleiche Richtung haben, muß $z_0 = 0$ sein, d. h. der Schwerpunkt in der xy -Ebene liegen.

Ebenso ergibt sich, daß, wenn alle Schwerkkräfte in derselben Geraden, etwa der Mittellinie eines Balkens oder Trägers, angreifen, auch der Schwerpunkt in dieser Geraden liegen muß.

Die obigen Darlegungen erfahren eine erhebliche Vereinfachung bei homogenen Körpern, das sind solche Körper, deren Masse gleichförmig über den ganzen vom Körper eingenommenen Raum verteilt ist. Gleiche Raumteile desselben homogenen Körpers haben also das gleiche Gewicht, d. h. das Verhältnis von Gewicht und Raum ist für denselben homogenen Körper unveränderlich:

$$\frac{dG}{dV} = \frac{G}{V} = \gamma. \quad (81)$$

Gewöhnlich wird bei festen Körpern G in kg und V in dm^3 angegeben, dann ist γ das Gewicht der Raumeinheit oder kurz das Einheitsgewicht des Körpers gemessen in $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Von dem Einheitsgewicht eines Stoffes ist zu unterscheiden das spezifische Gewicht, das angibt, wieviel mal schwerer ein Stoff ist im Verhältnis zu dem gleichen Rauminhalt von reinem Wasser von der Temperatur 4°C , das also eine unbenannte Zahl ist. Es wird besonders bei Flüssigkeiten viel angegeben. Da das Gewicht von 1 dm^3 Wasser von 4°C auf dem 45. Breitengrad in Höhe des Meeresspiegels und im luftleeren Raum fast genau 1 kg beträgt, so stimmt Einheitsgewicht und spezifisches Gewicht zahlenmäßig überein, solange das kg als Kraft-einheit und das dm als Längeneinheit gewählt wird. Rechnet man aber mit englischen oder russischen Maßen, so sind die Zahlenwerte der Einheitsgewichte ganz andere, während die der spezifischen Gewichte natürlich dieselben bleiben.

Beispiel 97. Anzugeben ist das Einheitsgewicht von Gußeisen mit dem spezifischen Gewicht 7,25 in englischen Pfund für den Kubikzoll.

Es ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ englisches Pfund} &= 0,4536 \text{ kg,} \\ 1 \text{ englischer Zoll} &= 0,254 \text{ dm,} \\ 1 \text{ englischer Kubikzoll} &= 0,01639 \text{ dm}^3, \end{aligned}$$

also

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{0,01639}{0,4536} = 0,03616 \frac{\%}{\text{dm}^3} \text{ engl.}$$

und damit

$$7,25 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 7,25 \cdot 0,03616 = 0,262 \frac{\%}{\text{dm}^3} \text{ engl.}$$

Für manche technische Anwendung ist es vorteilhaft zu wissen, daß der Rauminhalt von 1 dm³ dargestellt wird durch
 einen Stab von 10 m Länge und 1 dm² Querschnitt,
 einen Draht von 1 km Länge und 1 mm² Querschnitt,
 eine Blechtafel von 1 mm Stärke und 1 m² Fläche.

Einheitsgewicht γ bei gewöhnlicher Temperatur.

	$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$		$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$
Aluminium, gegossen . . .	2,56	Holz, lufttrocken	
„ gehämmert . . .	2,75	Kiefer	0,31 —0,76
Aluminiumbronze . . .	2,7	Pechkiefer	0,83 —0,85
Anthrazit	1,4 —1,7	Rotbuche	0,66 —0,83
Antimon	6,7	Tanne	0,37 —0,75
Asphalt	1,1 —1,5	Weißbuche	0,62 —0,82
Blei	11,3	Kalkmörtel, trocken . . .	1,65
Braunkohle	1,2 —1,5	„ frisch	1,78
Bronze	7,4 —8,9	Koks	1,4
Deltametall	8,6	Kork	0,24
Eis	0,9	Kupfer, gegossen	8,8
Flußeisen	7,85	„ gewalzt	8,9
Flußstahl	7,86	Lagermetall, Weißmetall	7,1
Schweißeisen	7,80	Messing, gegossen	8,4 —8,7
Gußeisen	7,20—7,25	„ gezogen	8,43 —8,73
Glas für Flaschen . . .	2,6	„ gewalzt	8,52 —8,62
Gold, gehämmert . . .	19,30	Nickel	8,9 —9,2
Granit	2,5 —3,05	Platin, gegossen	21,15
Graphit	1,9 —2,3	„ gehämmert	21,3 —21,5
Grobkohle	1,2 —1,5	Porzellan	2,3
Holz, lufttrocken		Schamottesteine	1,85
Eiche	0,69—1,03	Silber, gehämmert	10,5 —10,6
Erle	0,42—0,66	Ziegel, gewöhnliche . . .	1,4 — 1,55
Esche	0,57—0,94	Zink, gewalzt	7,13— 7,20
Fichte	0,35—0,60	Zinn, gegossen	7,2

Bei nicht homogenen Körpern, wie z. B. Mauerwerk, Beton, geschütteter Kohle oder Erde ist das Verhältnis $\frac{dG}{dV}$ je nach der Stelle, die aus dem Gesamtraum herausgegriffen wird, veränderlich. Immerhin lassen sich bei hinreichend großen Räumen V doch für jede Körperart ungefähr gleichbleibende Zahlen für das Verhältnis $\frac{G}{V} = \gamma'$ angeben, das hier als mittleres Einheitsgewicht bezeichnet wird. Um anzudeuten,

daß γ' nicht für beliebige kleine Räume gilt, wählt man gewöhnlich V in m^3 und G in t , so daß das mittlere Einheitsgewicht in $\frac{t}{\text{m}^3}$ gemessen wird.

Mittlere Einheitsgewichte γ' .

	$\frac{t}{\text{m}^3}$		$\frac{t}{\text{m}^3}$
Beton	2,2 — 2,3	Koks, Gas-	0,36 — 0,47
Braunkohlen, lufttrocken		„ Zechen-	0,38 — 0,53
in Stücken	0,65 — 0,78	Mauerwerk, gewöhnliches	1,8
Formsand, aufgeschüttet	1,20	Sand, Lehm, Erde	
„ gestampft	1,65	trocken	1,6
Stückkohlen		naß	2,0
oberschlesische	0,76 — 0,80	Schnee, trocken	0,12
Zwickauer	0,76 — 0,80	„ feucht	0,45
niederschlesische	0,82 — 0,87	„ naß	0,79
Saar-	0,72 — 0,80		
Ruhr-	0,80 — 0,86		

Beispiel 98. Die Freileitung eines Elektrizitätswerkes enthält Kupferdraht von

der Länge 12 630 m und dem Querschnitt	7,0 mm ²
„ „ 3 780 „ „ „ „	10,0 „
„ „ 5 720 „ „ „ „	12,5 „
„ „ 1 250 „ „ „ „	16,0 „

Anzugeben ist das Gewicht der Leitungen.

Man erhält

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 12,63 \cdot 7,0 \cdot 8,9 = 786 \text{ kg,} \\
 G_2 &= 3,78 \cdot 10,0 \cdot 8,9 = 336 \text{ „,} \\
 G_3 &= 5,72 \cdot 12,5 \cdot 8,9 = 636 \text{ „,} \\
 G_4 &= 1,25 \cdot 16,0 \cdot 8,9 = 178 \text{ „,} \\
 \hline
 \Sigma G &= 1936 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

Beispiel 99. Ein Eisenbahnwagen mit $l = 6,72$ m langer und $b = 2,83$ m breiter Ladefläche soll $G = 15$ t Steinkohle laden. Welche Höhe h muß der Laderaum haben?

Aus der Gleichung

$$G = l \cdot b \cdot h \cdot \gamma'$$

folgt

$$h = \frac{G}{l \cdot b \cdot \gamma'} = \frac{15}{6,72 \cdot 2,83 \cdot 0,72} \approx 1,10 \text{ m,}$$

worin für γ' der niedrigste Wert der vorstehenden Zusammenstellung eingesetzt wurde.

Für homogene Körper, mit denen meistens gerechnet wird, geht die Formel 80 a über in

$$x_0 = \frac{\Sigma(V \cdot \gamma \cdot x)}{\Sigma(V \cdot \gamma)} = \frac{\gamma \cdot \Sigma(V \cdot x)}{\gamma \cdot \Sigma V},$$

also

$$x_0 = \frac{\Sigma(V \cdot x)}{\Sigma V} \tag{82a}$$

und entsprechend

$$y_0 = \frac{\sum(V \cdot y)}{\sum V}, \quad (82b)$$

$$z_0 = \frac{\sum(V \cdot z)}{\sum V}. \quad (82c)$$

Wird für homogene Bleche von der Oberfläche F und der überall gleichen Stärke δ eingesetzt $V = F \cdot \delta$, so hebt sich die Stärke δ heraus, und man erhält

$$x_0 = \frac{\sum(F \cdot x)}{\sum F} \quad \text{bzw.} \quad y_0 = \frac{\sum(F \cdot y)}{\sum F}. \quad (83)$$

Dieselben Formeln finden Anwendung auch auf rein mathematische Flächen, deren Stärke $\delta = 0$ ist. Wenn Flächen unter dem Einfluß des Wind-, Wasser-, Dampfdruckes oder dgl. stehen, wird davon häufig Gebrauch gemacht, um den Angriffspunkt der Druckkraft zu ermitteln, der mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammenfällt, solange der betreffende Druck gleichmäßig über die Fläche verteilt ist.

Entsprechend erhält man für Liniengebilde, die man sich zuerst als mit Masse belegte Drähte vorstellen kann,

$$x_0 = \frac{\sum(l \cdot x)}{\sum l} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\sum(l \cdot y)}{\sum l}. \quad (84)$$

Wenn der Querschnitt und das Einheitsgewicht schließlich nach Null konvergieren, d. h. sich der Null so weit als denkbar nähern, können die betreffenden Beträge aus den Gleichungen (80) herausgehoben werden, so daß die Formeln (84) auch für rein mathematische Gebilde zutreffen.

Hat ein homogener Körper eine Symmetrieebene, so entspricht jedem Teilchen auf der einen Seite dieser Ebene ein gleich schweres und gleich gelegenes auf der anderen Seite der Ebene, und die Mittelkraft beider Gewichte fällt in die Symmetrieebene (Fig. 203). Dies gilt für alle Teile; eine Symmetrieebene ist also auch Schwerebene. Besitzt ein homogener Körper zwei Symmetrieebenen, so fällt der Schwerpunkt in die Schnittlinie beider, in die Symmetrieachse. Hat ein homogener Körper drei oder mehr Symmetrieebenen, so fällt der Schwerpunkt mit dem durch den Schnitt von drei solcher Ebenen erhaltenen Mittelpunkt des Körpers zusammen.

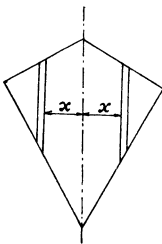


Fig. 203.

Durch sinngemäße Anwendung auf Flächen und Linien erhält man allgemein: Besitzt ein homogener Körper, eine Fläche oder eine Linie eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt darin der Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt der geraden Linie, der Kreisfläche, der Kugel ist also ihr Mittelpunkt. Der Schwerpunkt der Rechteckfläche und des Rechteckumfangs ist der Schnittpunkt der beiden

zu den Seiten parallelen Mittelachsen. Der Schwerpunkt eines beliebigen Prismas mit parallelen Endflächen liegt in der Mitte der Länge.

Der Schwerpunkt der Parallelogrammfläche und des Parallelogrammumfanges ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen (Fig. 204), denn in bezug auf jede Diagonale entspricht jedem beliebigen Teilchen auf der einen Seite ein gleiches und gleich gelegenes auf der anderen Seite, obwohl die Diagonalen nicht eigentliche Symmetrieachsen sind.

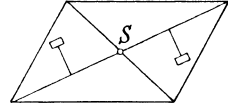


Fig. 204.

Es genügt, wenn die Ebene oder Achse nicht reine Symmetrieebene oder Achse ist, daß die auf beiden Seiten befindlichen Teile des Körpers oder der Fläche kongruent sind und die homologen, d. h. gleich liegenden Stellen denselben Abstand von der Ebene bzw. Achse haben.

Um die Schwerpunktlage beliebiger Körper, Flächen und Liniengebilde zu bestimmen, ist nur die Kenntnis der Schwerpunktlage einiger weniger Elemente erforderlich, die die folgende Zusammenstellung zu den schon oben aufgeführten beibringt.

1. Dreieckumfang. Die Länge der Seiten sei a, b, c , die Höhe h_1 stehe senkrecht zu a (Fig. 201). Dann ist der Abstand des Schwerpunktes S von der Seite s nach Formel (84)

$$x_0 = \frac{a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{2}h_1 + c \cdot \frac{1}{2}h_1}{a + b + c} = \frac{b + c}{a + b + c} \cdot \frac{h_1}{2}$$

In derselben Weise kann man auch den Abstand r des Schwerpunktes von der Verbindungslinie der Mitten der beiden Seiten a und b bestimmen:

$$r = \frac{a \cdot \frac{1}{2}h_1}{a + b + c},$$

das ist der Quotient aus dem Dreiecksinhalt und dem Dreiecksumfang. Hieraus geht hervor, daß die Entfernung des Schwerpunktes von den anderen Mittenverbindungslinien die gleiche ist. Er ist also der Mittelpunkt des in Fig. 205 eingezeichneten Kreises.

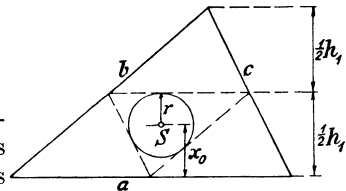


Fig. 205.

2. Kreisbogen (Fig. 206). Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf dem Senkrechten zur Sehne \overline{AB} errichteten, den Bogen halbierenden Halbmesser \overline{OC} ; sein Abstand x_0 vom Mittelpunkt wird nach Formel (84) bestimmt, indem man den Bogen aus kleinen, gerade anzunehmenden Linienteilen db zusammengesetzt denkt, deren Schwerpunkte S' sich in der Mitte derselben befinden. Werden doch die Hilfslinien der Fig. 206 gezogen, so folgt aus der Ähnlichkeit des kleinen Elementardreieckes und des großen $ODS' db$: $ds = r : x$ und hieraus

$$x \cdot db = r \cdot ds.$$

Damit geht die Formel (84) über in

$$x_0 = \frac{\sum x \cdot db}{\sum db} = \frac{\sum r \cdot ds}{\sum db} = r \cdot \frac{\sum ds}{\sum db},$$

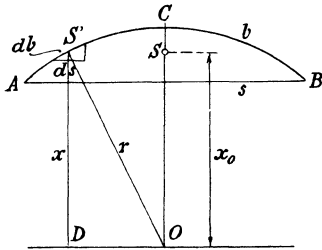


Fig. 206.

denn r ist ein in jedem Summenglied vorkommender gleichbleibender Faktor, der als einmaliger Faktor vor die ganze Summe gesetzt werden kann. Nun ist nach Fig. 206

$$\begin{aligned} \sum ds &= \text{Sehne } AB = s, \\ \sum db &= \text{Bogen } AB = b, \end{aligned}$$

mithin

$$x_0 = r \cdot \frac{s}{b}. \tag{85}$$

Zu einer beliebigen Sehne s können zwei Bögen angegeben werden (Fig. 207 und 208) mit einem großen und einem kleinen Abstand des Schwerpunktes von der Kreismitte.

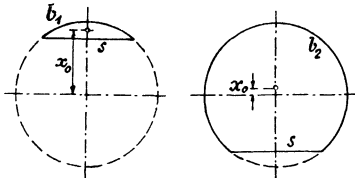


Fig. 207.

Fig. 208.

Im Halbkreis wird

$$s = 2r \text{ und } b = \pi r,$$

also

$$x_0 = r \cdot \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi} \cdot r = 0,6366 r. \tag{85a}$$

3. Dreiecksfläche (Fig. 209).

Das Dreieck wird in sehr schmale Streifen zerlegt, die alle parallel zur Seite AB verlaufen. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt in der Mitte desselben; der Schwerpunkt des Dreiecks ist infolgedessen auf der Mitteltransversale CD gelegen. Durch eine gleiche Zerlegung parallel zur Seite AC erhält man als Ort des Schwerpunktes die Mitteltransversale BE und, wenn die Zerlegung auch noch parallel zur Seite BC vorgenommen wird, die Mitteltransversale AF . Der Schwerpunkt ist somit der Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen.

Wird die Gerade DF gezogen, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ASC und FSD :

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FD}}$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACB und DFB :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{2}{1};$$

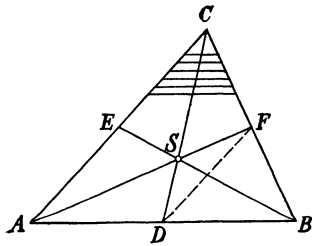


Fig. 209.

der Schwerpunkt teilt die Mitteltransversalen im Verhältnis 2:1.

Der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von einer Dreiecksseite ist $\frac{1}{3}$ der zugehörigen Höhe und der von einer Ecke $\frac{2}{3}$ der zugehörigen Höhe.

Das Moment der Dreiecksfläche in bezug auf eine Seite, z. B. $BC = a$ ist

$$M_1 = F \cdot x_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot h_1$$

oder

$$M_1 = \frac{1}{6} \cdot a \cdot h_1^2. \tag{86a}$$

Entsprechend ergibt sich in bezug auf die Spitze

$$M_2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot h_1^2. \tag{86b}$$

4. Fläche des Parallelogramms (Fig. 210). Durch Zerlegen des Trapezes in sehr schmale Streifen längs der parallelen Seiten erhält man wie beim Dreieck als Ort des Schwerpunktes die Verbindungslinie GH der Mitten dieser Seiten.

Wird jetzt das Trapez durch die Diagonale CB in zwei Dreiecke zerlegt, so ergibt sich nach Formel (84) mit den Bezeichnungen der Fig. 210:

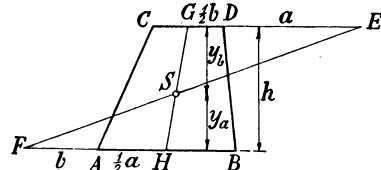


Fig. 210.

$$y_a = \frac{\frac{1}{2} a h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} b h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} h \cdot (a + b)} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}, \tag{87a}$$

$$y_b = \frac{\frac{1}{2} b h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} a h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} h \cdot (a + b)} = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2a}{b + a} \tag{87b}$$

und durch Division beider Gleichungen

$$\frac{y_a}{y_b} = \frac{a + 2b}{b + 2a} = \frac{\frac{1}{2} a + b}{\frac{1}{2} b + a}.$$

Hieraus folgt die Aufzeichnung des Schwerpunktes¹⁵⁾: Man zieht die Mittellinie GH des Trapezes und trägt dann an die Seite b die Länge a bis zum Punkte E an, ebenso an die Seite a die Länge b nach der entgegengesetzten Richtung bis E . Die Verbindungslinie EF schneidet die Mittellinie im Schwerpunkt S , denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EGS und FHS ergibt sich

$$\frac{y_a}{y_b} = \frac{\overline{HS}}{\overline{GS}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{EG}} = \frac{\frac{1}{2} a + b}{\frac{1}{2} b + a}.$$

Bei schmalen Trapezen von großer Höhe würde der Schnitt der Hilfslinie EF mit der Mittellinie GH sehr lang ausfallen; man führt deshalb in solchen Fällen die angegebene Zeichnung zweimal aus, indem die betreffenden Verlängerungen auch nach den anderen Richtungen angetragen werden.

Faßt man das Dreieck als ein Paralleltrapez auf, dessen Seite $b = 0$ ist, so erhält man hieraus eine besonders bequeme Aufzeichnung des Dreiecksschwerpunktes, da nur die Zeichendreiecke dazu gebraucht werden.

Als Moment der Fläche in bezug auf die Seite a folgt aus der Formel (87a):

$$M_1 = \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (a + 2b). \quad (88)$$

5. Beliebiges Viereck (Fig. 211). Das Viereck $ABCD$ wird durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunkte H und K nach den Angaben unter 3 bestimmt werden, wie die gestrichelten Linien andeuten. Ihre Verbindungsgerade muß den Schwerpunkt des Viereckes enthalten. In gleicher Weise erhält man die Schwerlinie LN der durch die Diagonale BD gebildeten beiden Dreiecke. Der einzige, diesen beiden Schwerlinien gemeinsame Punkt S muß also der Schwerpunkt sein.

Die beiden Schwerlinien HK und LN sind parallel zu den Diagonalen BD und AC des Viereckes, was sich leicht beweisen läßt, wenn man die Gerade AH bis zur Mitte von CB nach E zieht. Denn die Verbindungs-

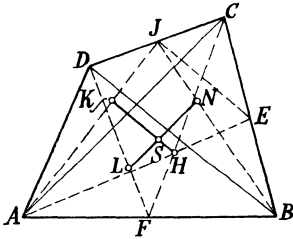


Fig. 211.

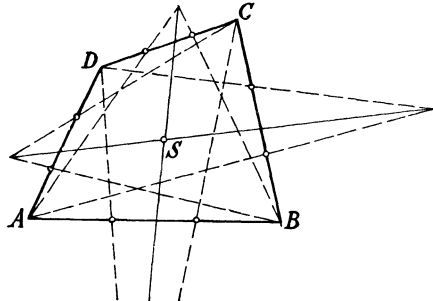


Fig. 212.

gerade EJ der Mitte von CB und CD ist selbst die Diagonale BD parallel und die Abschnitte, welche die Schwerlinie KH auf den Schenkeln des Winkels EAJ abschneidet, sind einander proportional, so daß KH parallel zu EJ sein muß.

Die Zeichnung ist vorteilhaft, wenn man bei der Schwerpunktmittlung innerhalb des Umfanges, z. B. bei einer Blechtafel, bleiben muß.

Auf dem Zeichenbrett ist es sehr bequem, alle Seiten in drei gleiche Teile zu teilen und die Spitzen der in Fig. 212 eingetragenen Dreiecke zu bestimmen. Die kreuzweisen Verbindungsgeraden der Dreieckspitzen schneiden sich dann im Schwerpunkt²²⁾.

Für das Trapez ist der Beweis²³⁾ leicht geführt: Es wird durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunktgewichte

²²⁾ Beweis: Skutsch, Archiv d. Math. u. Physik 1915.

²³⁾ La. Z. d. B. 1914.

F_1 und F_2 die Seite DC dritteln (Fig. 213). Trägt man die beiden Kräfte F_1 und F_2 lotrecht aneinander an, so kann man durch die Stoßstelle beider eine Parallele zu DC ziehen und darauf einen Pol O so wählen, daß die beiden äußeren Polstrahlen parallel zu AE bzw. BG verlaufen. Nach den Darlegungen S. 51 ist dann EGH das Seileck, durch dessen Punkt H die Kraft $F = F_1 + F_2$ gehen muß.

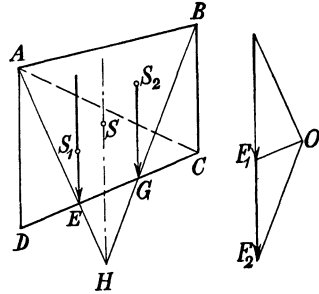


Fig. 213.

6. Kreisabschnitt (Fig. 214). Der Kreisabschnitt wird durch dicht benachbarte Halbmesser in sehr schmale Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunkte auf dem gestrichelten Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{2}{3} r$ liegen, der somit einen schweren Bogen bildet. Sein Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse und gemäß Formel (85) im Abstände

$$x_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{2}{3} s$$

vom Mittelpunkt O entfernt. Hieraus folgt

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{s}{b}. \quad (89)$$

Für die Fläche des Halbkreises ergibt sich hieraus

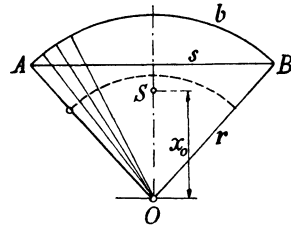


Fig. 214.

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{2r}{\pi r} = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot r = 0,4244 r. \quad (89 a)$$

In bezug auf die Spitze ist das Moment der Kreisabschnittfläche

$$M = F \cdot x_0 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r \cdot \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{s}{b} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot s, \quad (90)$$

was für den Halbkreis übergeht in

$$M = \frac{2}{3} r^3 = \frac{d^3}{12} \quad (91)$$

als Moment der Fläche in bezug auf den Durchmesser.

7. Pyramide. Gegeben sei die dreiseitige Pyramide der Fig. 215. Durch die dicht beieinander geführten Schnitte parallel zur Grundfläche ABC wird die Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegt, deren Schwerpunkt auf der Verbindungsgeraden der Spitze D mit dem Schwerpunkt G der Grundfläche liegen. Der Gesamtschwerpunkt befindet sich demnach ebenfalls auf dieser Geraden. Der Punkt G wird erhalten, indem man die Seite BC in E halbiert und die Verbindungsgerade AE von A aus im Verhältnis $2:1$ teilt. Wird in gleicher Weise die Fläche BCD als Grundfläche betrachtet, deren Schwerpunkt H ist, so muß der

Schwerpunkt der Pyramide auch auf der Geraden AH liegen. \overline{AH} und \overline{DG} schneiden sich nun in einem Punkte S , dem Gesamtschwerpunkt, denn sie sind in der Ebene desselben Winkels AED gezogen.

Wird jetzt noch die Gerade GH eingetragen, so folgt aus den Beziehungen

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EH}} = \frac{1}{3},$$

daß die Dreiecke HGH und EAD ähnlich sind, also GH parallel AD ist. Nun sind noch die Dreiecke SGH und SDA ähnlich, also

$$\overline{SG} : \overline{SD} = \overline{GH} : \overline{AD} = 1 : 3.$$

Hieraus folgt, daß $\overline{SG} = \frac{1}{4}\overline{SD}$ ist:

Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide ist um $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche entfernt.

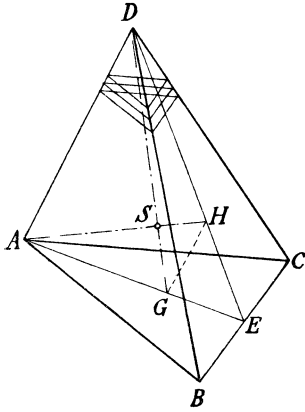


Fig. 215.

Bei einer beliebigen Pyramide ergibt sich durch Führung von dicht beieinander liegenden Schnitten parallel zur Grundfläche ebenfalls wieder, daß der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungsgeraden der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche liegen muß. Da nun jede Grundfläche in Dreiecke zerlegt werden kann (Fig. 216), so läßt sich jede beliebige Pyramide durch entsprechende Schnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegen, die alle dieselbe Spitze haben und deren Einzelschwerpunkte sich demnach alle in derselben Ebene befinden, die im Abstand $\frac{1}{4}$ der Höhe parallel zur

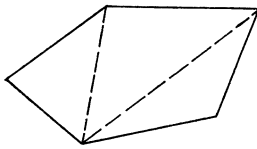


Fig. 216.

Grundfläche gelegt wird. Der gemeinsame Schwerpunkt muß deshalb die zuerst bestimmte Schwerlinie auch im Verhältnis 1 : 3, von der Grundfläche aus gerechnet, teilen.

Das Drehmoment der Pyramide von der Grundfläche F und der Höhe h beträgt also

$$M = \frac{1}{3} F \cdot h \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{4} F h^2. \quad (92)$$

Beispiel 100. Eine Schornsteinsäule von der Höhe $h = 30$ m habe den oberen äußeren Durchmesser $D_0 = 1,10$ m und den unteren äußeren Durchmesser $D_u = 2,60$ m. Anzugeben ist die Größe und das Moment des Winddruckes in bezug auf die Grundfläche der Säule bei $p = 125 \text{ kg/m}^2 = 0,125 \text{ t/m}^2$.

Bezeichnet F die Fläche des lotrechten Mittelschnittes der Schornsteinsäule, so ist nach den Angaben in Beispiel 20 und 21 die Windkraft

$$P = 0,667 \cdot F \cdot p = 0,667 \cdot \frac{1}{2} h \cdot (D_u + D_0) \cdot p,$$

mithin

$$P = 0,667 \cdot 0,125 \cdot 0,50 \cdot 30 \cdot (2,6 + 1,1) = 4,71 \text{ t},$$

das Windmoment nach Formel (88)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{8} \cdot h^2 \cdot (D_u + 2D_0) \cdot 0,667 \cdot p \\ &= \frac{1}{8} \cdot 30^2 \cdot (2,6 + 2,2) \cdot 0,667 \cdot 0,125 = 60,0 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Der Abstand des Windangriffspunktes von der Grundfläche ist demnach

$$y_0 = \frac{M}{P} = \frac{60,0}{4,71} = 12,74 \text{ m.}$$

Beispiel 101. Für das Gewölbe der Fig. 185 ist die Lage des Schwerpunktes jedes der fünf Gewölbeteile einer Hälfte anzugeben, die als Trapeze angesehen werden können.

Aufgemessen wurde

Nr.	1	2	3	4	5
$h =$	1,585	1,585	1,585	1,585	1,850 m
a bzw. $b =$	1,62	1,74	2,06	2,60	3,45
$a + b =$	3,36	3,80	4,66	6,05	7,55 m
$a + 2b =$	5,10	5,86	7,26	9,50	11,65 m
$x_0 =$	0,80	0,815	0,82	0,83	0,93 m

Durch Addition der benachbarten Werte berechnet man die in der Zeile $a + b$ zusammenstehenden Beträge; dazu wird noch einmal der rechts darüber stehende Wert addiert, womit man die Zeile $a + 2b$ erhält. Jetzt werden die

Quotienten $\frac{a + 2b}{a + b}$ berechnet und

gleich mit dem Wert $\frac{h}{3}$ multipliziert. Damit ist der Abstand x_0 des Schwerpunktes von der Seite a bestimmt, die hier die kleinere ist.

Beispiel 102. Zu bestimmen ist die Schwerpunktslage des Querschnittes eines Mauerpfeilers nach Fig. 217.

Am übersichtlichsten wird die Rechnung, wenn sie in Tabellenform angelegt wird; vorteilhaft rechnet man bei Mauern u. dgl. mit dm als Längenmaß. Als Bezugskante für x_0 und y_0 wählt man zweckmäßig die äußerste Kante, weil dann nur die fehlende Fläche das negative Vorzeichen erhält, während alle Abstände positiv anzusetzen sind.

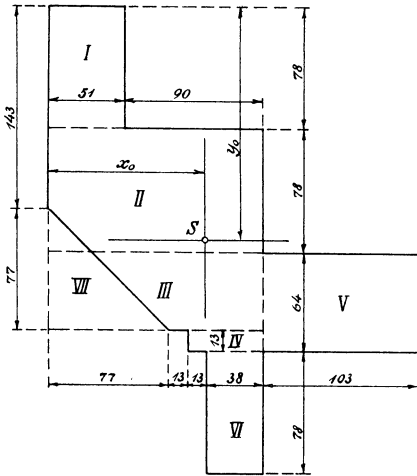


Fig. 217.

Nr	F	x	y	$F \cdot x$	$F \cdot y$
1	$5,1 \cdot 7,8 = 39,8$	2,55	3,90	101,5	155,2
2	$14,1 \cdot 7,8 = 110,0$	7,05	$3,90 + 7,80 = 11,70$	775,5	1287,0
3	$14,1 \cdot 5,1 = 71,9$	7,05	$2,55 + 15,60 = 18,15$	506,7	1305,0
4	$5,1 \cdot 1,3 = 6,6$	$2,55 + 9,00 = 11,55$	$0,65 + 22,0 = 22,65$	76,3	149,5
5	$10,3 \cdot 6,4 = 65,9$	$5,15 + 14,10 = 19,25$	$3,20 + 15,60 = 18,80$	1268,5	1239,0
6	$3,8 \cdot 7,8 = 29,6$	$1,90 + 10,30 = 12,20$	$3,90 + 23,30 = 27,20$	361,1	805,1
7	$-\frac{1}{2} \cdot 7,7 \cdot 7,7 = -29,6$	2,57	$5,14 + 14,30 = 19,34$	-76,1	-572,6
	<u>294,2</u>			<u>3013,5</u>	<u>4368,2</u>

$$x_0 = \frac{3013,5}{294,2} = 10,24 \text{ dm,}$$

$$y_0 = \frac{4368,2}{294,2} = 14,85 \text{ dm.}$$

Beispiel 103. Anzugeben ist der Schwerpunktsabstand y_1 bzw. y_2 des Viertelkreises bzw. der Restfläche von den nächstgelegenen Begrenzungshalbmessern (Fig. 218).

Für die Viertelkreisfläche gilt nach Formel (85)

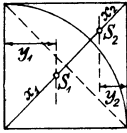


Fig. 218.

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2} r^2}{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r}$$

Nun folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$y_1 : x_1 = r : \sqrt{2} r^2 \quad \text{oder} \quad y_1 = x_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wird hierin x_1 aus der ersten Gleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{r}{\frac{1}{2} \cdot \pi r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \cdot 0,4244 r$$

Der Ausdruck stimmt mit der Formel (89a) überein, denn wie eine Fortsetzung der Fig. 218 nach unten angibt, ist y_1 der Schwerpunktsabstand des Halbkreises.

Für die Restfläche erhält man nach Formel (83)

$$x_2 = \frac{r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 \cdot \left(\sqrt{2} r^2 - \frac{4}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2} r^2}{\frac{1}{2} \pi r^2} \right)}{r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2}$$

oder nach Hebung von r^2

$$x_2 = \frac{r \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{1 - \frac{\pi}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

und somit

$$x_2 = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{0,2146} \cdot (0,8333 - 0,7854)$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt dann

$$y_2 = x_2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2} r^2} = r \cdot \frac{0,0479}{0,2146} = 0,2235 r$$

Dieser Wert wird häufig bei Berechnung des Momentes von Abrundungszwickeln von Walzprofilen gebraucht. Man erhält in bezug auf die gerade Begrenzungslinie

$$M = F_2 \cdot y_2 = \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot r^2 \cdot r \cdot 0,2235 = 0,0479 r^3$$

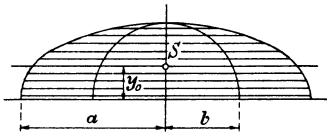


Fig. 219.

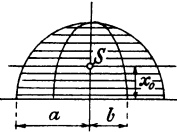


Fig. 220.

Beispiel 104. Der Schwerpunkt einer Ellipsenhälfte ist zu ermitteln.

Werden sämtliche Sehnen eines Halbkreises parallel zum Durchmesser um dasselbe Vielfache vergrößert, z. B. verdoppelt (Fig. 219), so daß die Sym-

metrie in bezug auf den senkrecht zum Durchmesser stehenden Halbmesser gewahrt bleibt, dann entsteht die Ellipsenhälfte, deren Schwerpunkt mit der des Halbkreises zusammenfällt, da die Summe der Drehmomente in bezug auf die Schwerachse AB denselben Wert Null behalten hat.

Dasselbe gilt bei einer entsprechenden Verkürzung aller Sehnen (Fig. 220). Es ist somit mit den Bezeichnungen der Figur

$$y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot a \quad \text{bzw.} \quad x_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot b.$$

Dieselbe Beziehung bleibt bestehen, wenn die Sehnen des Halbkreises so verschoben werden, daß ihre Halbierungspunkte auf einer schräg zum Durchmesser gerichteten Geraden liegen; auch dadurch entsteht eine halbe schief abgeschnittene Ellipse (Fig. 221).

In gleicher Weise lassen sich die Schwerpunktslagen von beliebigen Ellipsenabschnitten durch Zurückführung derselben auf Kreisabschnitte bestimmen.

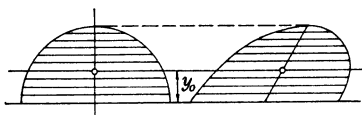


Fig. 221.

Beispiel 105. Anzugeben ist das Moment der Kreisabschnittfläche (Fig. 222).

Der Kreisabschnitt ist der Unterschied des Kreisabschnittes und des durch die Sehne abgetrennten Dreiecks. In die Summenformel (83) ist demnach die Dreiecksfläche negativ einzusetzen und man erhält nach den Formeln (90) und (86 b)

$$M_0 = F \cdot x_0 = \frac{1}{3}r^2 \cdot s - \frac{1}{3} \cdot s \cdot h^2 = \frac{1}{3}s(r^2 - h^2)$$

als Moment in bezug auf die durch den Kreismittelpunkt gehende parallel zu s verlaufende Achse.

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras

$$r^2 - h^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

also
$$M_0 = \frac{1}{12}s^3.$$

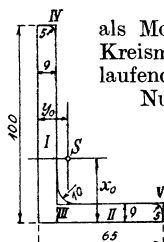


Fig. 223.

Das Moment in bezug auf die Sehne s wird nach dem Satz S. 61

$$M = M_0 - F \cdot h,$$

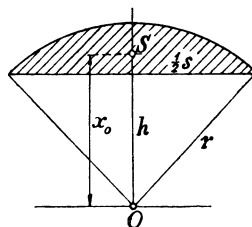


Fig. 222.

das einen für die praktische Rechnung wenig bequemen Ausdruck liefert, wenn die Einzelwerte darin eingesetzt werden.

Beispiel 106. Zu berechnen ist die Lage des Schwerpunktes der Querschnittsfläche eines ungleichschenkligen Winkeleisens nach Fig. 223.

Der Querschnitt wird in 5 Teile zerlegt; dann gelten die Angaben der Zusammenstellung, worin die Längenmaße in cm genommen sind.

Nr.	F	x	y
1	10 · 0,9 = + 9,00	5,0	0,45
2	0,9 · 5,6 = + 5,04	0,45	0,90 + 2,8 = 3,70
3	0,2146 · 1 = + 0,215	0,90 + 0,2235 · 1 = 1,124	0,9 + 0,2235 · 1 = 1,124
4	- 0,2146 · 0,5 = - 0,107	10,0 - 0,2235 · 0,5 = 9,888	0,9 - 0,2235 · 0,5 = 0,688
5	- 0,2146 · 0,5 = - 0,107	0,9 - 0,2235 · 0,5 = 0,688	6,5 - 0,2235 · 0,5 = 6,388
	+ 14,04		

Nr.	F · x	F · y
1	+ 45,00	+ 4,05
2	+ 2,27	+ 18,65
3	+ 0,24	+ 0,24
4	- 1,06	- 0,07
5	- 0,07	- 0,68
	+ 46,38	+ 22,19

$$x_0 = \frac{46,38}{14,04} = 3,30 \text{ cm,}$$

$$y_0 = \frac{22,19}{14,04} = 1,58 \text{ cm.}$$

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Eine Strecke AB von der Gesamtlänge a kann vom Anfangspunkt A aus in viele kleine Abschnitte dx zerlegt werden (Fig. 224). Der Ausdruck dx (Differential von x) bezeichnet den verschwindend kleinen Zuwachs eines endlichen Wertes x , dessen Größe im vorliegenden Fall zwischen 0 und dem Höchstwert a veränderlich ist.

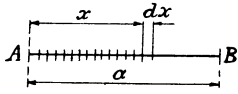


Fig. 224.

Die über die Strecke AB , also von 0 bis a , genommene Summe aller kleinen Teile dx ergibt die ganze Länge a (vgl. Nr. 2 der Schwerpunktsermittlungen):

$$\int_0^a dx = a. \tag{93}$$

(Man liest: Summe oder auch Integral zwischen 0 und a von dx ist gleich a .)

Wird die Summe der im übrigen beliebigen Größen dx , die in der Fig. 225 der Einfachheit halber als Teilchen einer geraden Strecke veranschaulicht sind, nicht zwischen den Grenzen 0 und a , sondern b und a genommen, so folgt sofort aus der Figur $BC = AC - AB$ oder

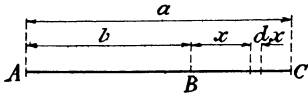


Fig. 225.

$$\int_b^a dx = \int_0^a dx - \int_0^b dx. \tag{94}$$

Man entnimmt der Fig. 225 ferner, daß der verschwindend kleine Zuwachs dx der Strecke x gleichzeitig auch der verschwindend kleine Zuwachs der Strecke $b + x$ ist:

$$d(b + x) = dx. \tag{95}$$

Wird die Klammer auf der linken Seite der Gleichung (94) aufgelöst, so folgt

$$db + dx = dx,$$

also

$$db = 0, \tag{96}$$

was sich allerdings auch ohne weiteres aus der Überlegung ergibt, daß eine unveränderliche Größe von vornherein weder Zuwachs noch Verminderung aufweisen kann. Vielmehr beweist die vorstehende Erörterung nur, daß das Differential einer Summe gleich der Summe der Differentiale der einzelnen Glieder ist.

Sind die Grenzen, zwischen welchen die Summierung oder Integration auszuführen ist, vorläufig noch nicht hergestellt, so ist anzusetzen

$$\int dx = x + C. \tag{97}$$

Hierin entspricht die Unveränderliche C der Strecke b in der Fig. 225, deren Größe in jedem einzelnen Fall durch eine besondere Untersuchung zu ermitteln ist (vgl. z. B. S. 150).

Aus der Formel (97) geht hervor, daß Differentiation und Integration entgegengesetzte Rechenoperationen sind, da die Zeichen \int und d sich bis auf den Festwert C aufheben.

In dem Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe a der Fig. 226 hat der verschwindend schmale, also in Wirklichkeit zu einer Linie zusammengeschrumpfte Flächenstreifen von der Höhe dx die Breite x . Für den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks gilt somit

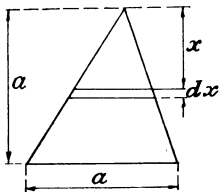


Fig. 226.

$$\int_0^a x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot a^2. \tag{98 a}$$

Wird die Summe aller Momente der Flächenstreifen $x \cdot dx$ in bezug auf die Spitze des Dreiecks gebildet, so folgt nach Formel (86b)

$$\int_0^a x \cdot (x \cdot dx) = \int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot a^3. \tag{98 b}$$

Faßt man jetzt die Fig. 226 als den Mittelschnitt einer Pyramide von quadratischer Grundfläche auf, so liefert Formel (92)

$$\int_0^a x \cdot (x^2 \cdot dx) = \int_0^a x^3 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot a^4. \tag{98c}$$

Es kann hiernach ganz allgemein geschlossen werden

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{98d}$$

Umgekehrt gilt also

$$dx^{n+1} = (n+1) x^n \cdot dx \tag{98e}$$

z. B.

$$dx^4 = 4 \cdot x^3 \cdot dx.$$

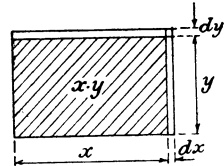


Fig. 227.

Zum genauen Nachweis wird der Fig. 227 entnommen: Die verschwindend kleine Zunahme der Rechteckfläche ist gleich der Summe der beiden verschwindend schmalen Streifen, wobei der doppelt gerechnete kleine Teil zweiter Ordnung von der Größe $dx \cdot dy$ gegenüber den kleinen erster Ordnung vernachlässigt wird:

$$d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx. \tag{99}$$

Die Integration dieser Formel liefert

$$\int d(x \cdot y) = \int x \cdot dy + \int y \cdot dx$$

oder

$$\int y \cdot dx = x \cdot y - \int x \cdot dy. \tag{100}$$

Setzt man in Gleichung (99) $x = u$ und $y = \frac{1}{v} = v^{-1}$, so folgt

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = u \cdot dv^{-1} + v^{-1} \cdot du;$$

nach Formel (98e) ist nun

$$dv^{-1} = -1 \cdot v^{-2} \cdot dv,$$

also

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}. \tag{101}$$

Man kann also ansetzen mit $y = x^4$:

$$\int x^4 \cdot dx = x^4 \cdot x - \int x \cdot dx^4,$$

oder mit Formel (98c)

$$\int x^4 \cdot dx = x^5 - \int x \cdot 4x^3 \cdot dx = x^5 - 4 \cdot \int x^4 \cdot dx$$

mithin

$$5 \cdot \int x^4 \cdot dx = x^5$$

oder

$$\int x^4 \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot x^5 + C.$$

In derselben Weise kann die Formel (98) von jedem beliebigen n aus auf das folgende $n+1$ ausgedehnt werden; sie hat also allgemeine Gültigkeit.

Wird der Flächeninhalt eines Quadrates mit x bezeichnet, so hat die Quadratseite die Länge \sqrt{x} , und man erhält aus Fig. 228

$$dx = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot d\sqrt{x}$$

oder umgekehrt

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

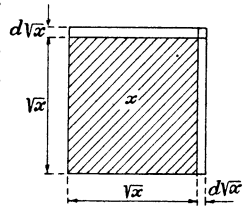


Fig. 228.

Entsprechend gilt für einen Würfel, wenn x jetzt den Würfelinhalt angibt:

$$d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Nun wird häufig zur Abkürzung geschrieben

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \text{ usw.}$$

womit die obigen beiden Gleichungen übergehen in

$$dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot dx$$

$$dx^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} \cdot dx.$$

Hieraus kann wieder mit dem Schluß von n auf $n + 1$ hergeleitet werden, daß die Formel (98e) nicht nur für ganzzahlige Exponenten, sondern auch für alle gebrochenen und negativen Exponenten gilt, allerdings mit Ausnahme des Exponenten -1 (siehe S. 149), für den sich aus Formel (98e) Null ergibt, was von vornherein unwahrscheinlich ist.

In Fig. 229 sei x ein beliebiger Winkel, $\overline{OD} = 1$ der zugehörige Halbmesser, dann ist $\overline{OC} = \cos x$, $\overline{CD} = \sin x$. Bezeichnet jetzt $\overline{AB} = dx$ die Zunahme des zu dem Winkel x gehörigen Bogens in Bogenmaß, so ist $\overline{AE} = dx \cdot \cos x$ und $\overline{BE} = dx \cdot \sin x$. Man entnimmt sogleich der Figur

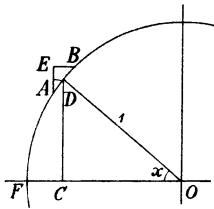


Fig. 229.

$$\overline{CD} = \int_0^x \cos x \cdot dx = \sin x \tag{102}$$

$$\overline{FC} = \int_0^x \sin x \cdot dx = 1 - \cos x. \tag{103}$$

Umgekehrt erhält man

$$d \sin x = \cos x \cdot dx \tag{104}$$

$$d \cos x = -\sin x \cdot dx. \tag{105}$$

Für Fig. 230 gelten nach dem Vorstehenden die eingeschriebenen Bezeichnungen. Damit erhält man für die Summe aller Flächenstreifen

$$\text{Fläche } OAB = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Es ist ferner $\sin^3 x \cdot dx$ das doppelte Moment des Flächenstreifens in bezug auf die Achse OA ; also ist die Summe genommen zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ das Moment des Halbkreises in bezug auf den Durchmesser, mithin nach Formel (91)

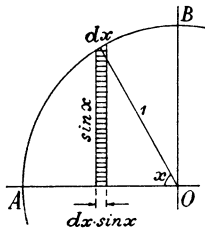


Fig. 230.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3}.$$

Man kann ansetzen

$$d \operatorname{tg} x = d \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \cdot d \sin x - \sin x \cdot d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dx}{\cos^2 x}$$

also

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \tag{106}$$

oder umgekehrt

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (107)$$

Entsprechend ergibt sich

$$d \cotg x = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad (108)$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + C. \quad (109)$$

Beispiel 107. Zu bestimmen ist die Fläche, das Moment und die Schwerpunktlage eines Parabelabschnittes (Fig. 231).

Die gemeine Parabel ist die Kurve, deren Ordinaten y und Abszissen x durch die Gleichung verbunden sind

$$y^2 = 2 \cdot c \cdot x, \quad (110)$$

worin $2c$ ein bestimmter Zahlenwert ist, dessen Änderung der Kurve eine etwas andere Form gibt. Man zeichnet sie auf, indem nach Wahl oder Festlegung des Grundwertes c für beliebige Abszissen x die zugehörigen y berechnet und danach aufgetragen werden. In der Fig. 231 sind der Einfachheit halber nur die positiven Werte von y dargestellt; da auch $+y^2 = (-y) \cdot (-y)$ ist, so gehört zur vollständigen Auftragung noch ein gleicher negativer Zweig der Kurve unterhalb der x -Achse.

Wird die Kurvenfläche in verschwindend schmale Streifen von der Höhe dy und der Länge $a - x$ zerlegt, so gilt

$$F = \int_0^b (a - x) \cdot dy.$$

Hierin ist aus der Kurvengleichung (106) einzusetzen $x = \frac{y^2}{2c}$, also

$$F = \int_0^b a \cdot dy - \int_0^b \frac{y^2 \cdot dy}{2c},$$

mithin

$$F = a \cdot b - \frac{1}{2c} \cdot \frac{b^3}{3}.$$

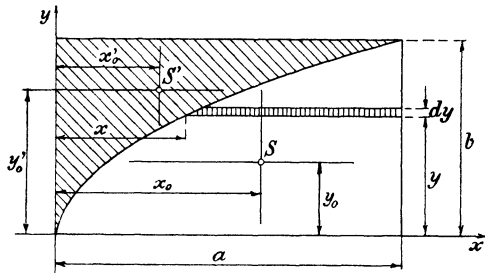


Fig. 231.

Wird jetzt die Kurvengleichung in der Form $b^2 = 2 \cdot c \cdot a$ angewandt, so folgt

$$F = a \cdot b - \frac{2ca \cdot b}{2c \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b.$$

Das Moment der Fläche in bezug auf die x -Achse ist entsprechend

$$M_y = \int_0^b (a - x) \cdot y \cdot dy = \int_0^b a \cdot y \cdot dy - \int_0^b \frac{y^3 \cdot dy}{2c}$$

oder

$$M_y = a \cdot \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \frac{b^4}{4}$$

$$M_y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b^2 - \frac{a \cdot b^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b^2.$$

Durch Division folgt hieraus

$$y_0 = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{1}{4} \cdot a \cdot b^2}{\frac{2}{3} \cdot a \cdot b} = \frac{3}{8} \cdot b. \quad (111a)$$

Denkt man sich jetzt die Kurvenfläche in verschwindend schmale Streifen von der Höhe dx und der Breite y zerlegt, so wird das Moment in bezug auf die y -Achse

$$M = \int_0^a y \cdot dx \cdot x,$$

worin aus der Kurvengleichung einzusetzen ist $y = \sqrt{2c} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, was ergibt

$$M_x = \int_0^a \sqrt{2c} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \sqrt{2c} \cdot \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

Hierin ist wieder die Kurvengleichung in der Form $b = 2c \cdot a^{\frac{1}{2}}$ einzusetzen, und damit wird

$$M_x = \frac{2}{5} \cdot a^2 \cdot b$$

und durch Division

$$x_0 = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{2}{5} \cdot a^2 \cdot b}{\frac{2}{3} \cdot a \cdot b} = \frac{3}{5} \cdot a. \quad (111 b)$$

Für die Restfläche $F' = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b$ kann man mit Hilfe der Formel (83) ausrechnen

$$x'_0 \cdot F' = (a \cdot b) \cdot \frac{1}{2} a - \left(\frac{2}{3} a \cdot b\right) \cdot \frac{3}{5} a,$$

also

$$x'_0 = \frac{3}{10} a$$

und ebenso

$$y'_0 \cdot F' = (a \cdot b) \cdot \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} a \cdot b^2,$$

also

$$y'_0 = \frac{3}{4} b.$$

Die Parabel wird vielfach als Annäherungsform benutzt für Zusammenhänge, die nicht ganz genau anzugeben sind oder deren genaue Berücksichtigung besondere Schwierigkeiten macht.

Beispiel 108. Eine dreiflügelige Schiffsschraube nach Fig. 232 von $D = 4,6$ m Gesamtdurchmesser soll einen Schub von $P = 24$ t ausüben. Es sei ein Flügel abgebrochen, und zu berechnen ist die dadurch hervorgerufene Sonderbeanspruchung der Schraubenwelle.

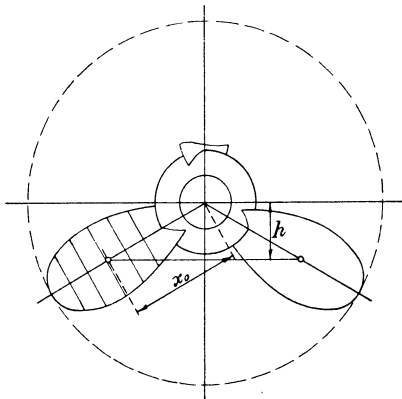


Fig. 232.

Zuerst ist der Angriffspunkt des Wasserdruckes auf eine Flügelfläche zu ermitteln. Ihre Länge wird zu dem Zweck in sechs gleiche Teile zerlegt von $l = 27,5$ cm Länge und dann werden die Breiten b der Schraubenflügelprojektion in diesen Teilpunkten aufgemessen. Darauf wird die Fläche F jedes Streifens als Trapez nach Formel (7) berechnet. Dann ist der Abstand x von der Wellenachse bis zur Mitte des für die Zwecke der vorliegenden Rechnung jetzt genau genug als Rechteck angesehenen Flächenstreifens aufzuschreiben, wobei der Halbmesser der Schraubenwelle zu $r_0 = 0,65$ m angesetzt wird. Die letzte Fläche wird als Parabelfläche angesehen,

ihr Inhalt F wird nach Formel (109) berechnet und ihr Schwerpunktsabstand von der Grundlinie nach Formel (111 b).

Die Multiplikation $F \cdot x$ ergibt dann die Flächenmomente in bezug auf die Drehachse.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
$b = 0,60$		0,80	0,95	1,00	0,95	0,80	0
$F =$	0,193	0,240	0,268	0,268	0,240	0,147	m^2 ,
$x =$	0,74	1,06	1,34	1,62	1,90	2,19	m ,
$F \cdot x =$	0,1424	0,2547	0,3592	0,4343	0,4562	0,3141	m^3 .

Die Entfernung des Angriffspunktes S von der Drehachse ist nun

$$x_0 = \frac{\sum(F \cdot x)}{\sum F} = \frac{1,961}{1,356} = 1,446 \text{ m.}$$

In dem gleichschenkligen Dreieck mit den Basiswinkeln $\gamma = 30^\circ$ ist dann die Höhe $h = x_0 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot x_0$. Damit berechnet sich das Biegemoment, das von dem exzentrischen Schub auf die Welle ausgeübt wird, zu

$$M = \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,446 = 17,35 \text{ mt.}$$

Beispiel 109. Anzugeben ist das größte Biegemoment sowie der Verlauf des Biegemomentes über die Zapfenlänge bei einem Stirnzapfen von $l = 17 \text{ cm}$ Länge, der mit $P = 13\,200 \text{ kg}$ durch die Lagerschale belastet ist.

Das Schema der Belastung gibt Fig. 234 wieder; der Zapfen gilt als ein an einem Ende eingespannter Freitragler, auf den an der Einspannungsstelle die Gegenkraft zur Belastung P und das dem Lastmoment entgegengesetzte Einspannungsmoment M einwirkt. Um letzteres zu bestimmen, nimmt man die Belastung P im Schwerpunkt vereinigt an, also im Abstand $\frac{1}{2}l$ von der Einspannungsstelle entfernt, und erhält so

$$M = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l, \quad (112a)$$

mit den gegebenen Zahlenwerten

$$M = \frac{1}{2} \cdot 13\,200 \cdot 17 = 112\,000 \text{ cmkg.}$$

Für die Feststellung des Verlaufes wird zuerst die Belastung der Längeneinheit berechnet:

$$p = \frac{P \text{ kg}}{l \text{ cm}}.$$

Dann hat die Strecke x (Fig. 233) die Belastung $\frac{1}{2}Pl$ $p \cdot x$, die von dem Endquerschnitt des Trägerteils um $\frac{1}{2}x$ entfernt angreift, und es folgt

$$M_x = p \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot p \cdot x^2.$$

Sein Verlauf wird also durch eine Parabel dargestellt, die Fig. 234 wiedergibt; ihr Scheitel befindet sich am freien Ende der tragenden Länge des Zapfens.

Beispiel 110. Ein Hauptträger eines Laufkranes von $l = 41,6 \text{ m}$ Spannweite wiegt $p_1 = 41,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, die darauf befestigte Schiene $p_2 = 23,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Anzugeben ist das durch das Eigengewicht der Konstruktion hervorgerufene Biegemoment und sein Verlauf.

Die Gesamtbelastung ist $P = (p_1 + p_2) \cdot l \text{ kg}$, die nach Fig. 235 gleichmäßig über die Trägerlänge verteilt ist. Aus Symmetriegründen ist $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}P$. Das größte Biegemoment tritt, ebenfalls aus Symmetriegründen, in der Mitte auf und setzt sich zusammen aus den Momenten der an einer Hälfte angreifenden Kräfte N_1 und $\frac{1}{2}P$:

$$M = +N_1 \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{4}l = \frac{1}{2}P \cdot (\frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l)$$

oder

$$M = \frac{1}{8} \cdot P \cdot l. \quad (112b)$$

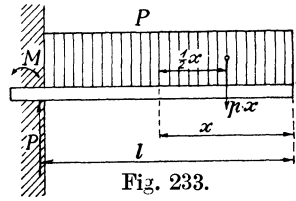


Fig. 233.

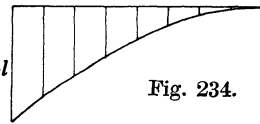


Fig. 234.

Mit den gegebenen Zahlenwerten wird

$$M = \frac{1}{8} \cdot (41,6 + 23,2) \cdot 11,6^2 = 1090 \text{ mkg.}$$

Für einen im Abstände x von der Auflagerkraft N_1 gelegenen Querschnitt gilt entsprechend den Angaben in Beispiel 104

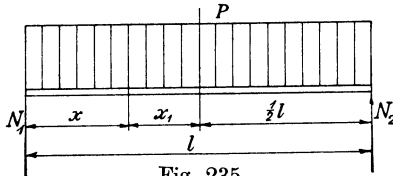


Fig. 235.

$$M_x = N_1 \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{1}{2}x$$

oder

$$M_x = \frac{1}{2} P \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (113)$$

Die Auftragung einiger hiernach berechneter Werte liefert den Linienzug der Fig. 236. Z. B. ist für

$x : l = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$M_x = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{8} l \cdot \frac{7}{8}$	$\frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{4} l \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} P \cdot \frac{3}{8} l \cdot \frac{5}{8}$	$\frac{1}{8} P \cdot l$
$M_x : M = \frac{7}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

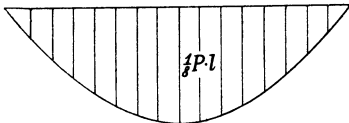


Fig. 236.

Wird aus der Fig. 235 in die Formel (113) eingesetzt $x = \frac{1}{2}l - x_1$, so folgt

$$M_x = \frac{1}{2} P \cdot \left(\frac{1}{2}l - x_1\right) \cdot \frac{l - (\frac{1}{2}l - x_1)}{l}$$

oder

$$M_x = \frac{\frac{1}{2}P}{l} \cdot \left(\frac{1}{2}l - x_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}l + x_1\right) = \frac{\frac{1}{2}P}{l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - x_1^2\right).$$

Die Gleichung läßt sich leicht überführen in

$$x_1^2 = \frac{P \cdot l}{8} - 2 M_x \cdot \frac{l}{P},$$

d. h. werden die M_x nicht von der wagerechten Achse der Fig. 236 aus gerechnet, sondern von dem Scheitelpunkt der M_x -Kurve aus, so ergibt sich für x_1 die Gleichung der Parabel [Formel (110)]. Die Momentenkurve ist also eine Parabel mit dem Scheitelabstand $\frac{P \cdot l}{8}$.

Beispiel 111. Ein Keil ist nach Fig. 237 belastet durch die Kraft $P = 3 \cdot 9000 \text{ kg}$; der Durchmesser der Stange sei $b = 8,0 \text{ cm}$, die Stärke der Hülse $a = 4,0 \text{ cm}$. Anzugeben ist das größte Biegemoment, das den Keil beansprucht.

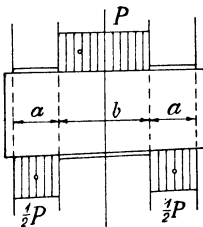


Fig. 237.

Ort des größten Biegemomentes ist aus Symmetriegründen die Mitte. Die auf eine Hälfte einwirkenden, gleichmäßig verteilten Kräfte können in dem Schwerpunkt der Belastungsfläche vereinigt angenommen werden. Es ist dann

$$M = +\frac{1}{2} P \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) - \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{4}b$$

oder

$$M = \frac{1}{4} P \cdot \left(a + \frac{1}{2}b\right). \quad (114)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man hieraus

$$M = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 9000 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 8\right) = 54000 \text{ cmkg.}$$

Beispiel 112. Die zylindrische Schornsteinsäule der Fig. 42 habe den Durchmesser $d = 0,4 \text{ m}$, es ist ferner $h_1 = 4,0 \text{ m}$, $h_2 = 16,0 \text{ m}$, der größte Winddruck $p = 150 \text{ kg/m}^2$. Anzugeben sind die beiden Stützkkräfte P_1 am Angriffsring der Haltestreben und P_2 am Sockel, sowie der Verlauf des Biegemomentes über die Säule.

Für die Feststellung der Auflagerkräfte kann man sich die gleichförmig verteilte Belastung

$$Q = 0,667 \cdot 150 \cdot (16 + 4) \cdot 0,4 = 800 \text{ kg}$$

im Schwerpunkt vereinigt denken, der vom Sockel um die Strecke $h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 10,0 \text{ m}$ entfernt ist. Dann ist in bezug auf den Säulenfuß

$$P_1 \cdot h_2 = Q \cdot h_0,$$

also

$$P_1 = Q \cdot \frac{h_0}{h_2} = 800 \cdot \frac{10}{16} = 500 \text{ kg}.$$

Entsprechend erhält man in bezug auf den Ring der Zugstreben

$$P_2 \cdot h_2 = Q \cdot (h_2 - h_0),$$

also

$$P_2 = Q \cdot \frac{h_2 - h_0}{h_2} = 800 \cdot \frac{16 - 10}{16} = 300 \text{ kg}.$$

An einer beliebigen Stelle im Abstände x vom Säulenfuß ist

$$M_x = P_2 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{h_2 + h_1} \cdot \frac{1}{2} x = Q \cdot x \cdot \left(\frac{h_2 - h_0}{h_2} - \frac{x}{2(h_2 + h_1)} \right).$$

Es ist somit für

$$M_x = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \text{ m} \\ & +880 & +1120 & +720 & -320 & 0 \text{ mkg} \end{matrix}$$

Seinen Größtwert erreicht das Biegemoment an der Stelle, wo die Querkraft durch Null geht, also für

$$P_2 - Q \cdot \frac{x_1}{h_2 + h_1} = 0,$$

woraus mit dem vorstehenden Wert von P_2 folgt

$$x_1 = \frac{1}{h_2} \cdot (h_2 - h_0) \cdot (h_2 + h_1) = \frac{6 \cdot 20}{16} = 7,5 \text{ m}.$$

Dort wird somit

$$M_{max} = 800 \cdot 7,5 \cdot \left(\frac{6}{16} - \frac{7,5}{2 \cdot 20} \right) = 1125 \text{ mkg}.$$

Das Moment wird Null für die Stelle, wo der Klammerausdruck von M_x verschwindet, also bei

$$x_2 = 2x_1 = 15,0 \text{ m}.$$

Ein zweiter Größtwert des negativen Momentes befindet sich an der Angriffsstelle von P_1 .

Beispiel 113. Anzugeben ist der günstigste Stützenabstand a eines gleichmäßig über die ganze Länge l mit der Kraft P belasteten Trägers (Fig. 238).

Aus Symmetriegründen ist wieder $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}P$. Der Kragarm von der Länge c entspricht dem Beispiel 104 und man erhält als größtes

Biegemoment unter der Belastung $p = \frac{P}{l} \text{ kg m}$ über der Stütze:

$$M_1 = + \left(\frac{P}{l} \cdot c \right) \cdot \frac{1}{2} c = + \frac{P \cdot c^2}{2 \cdot l}.$$

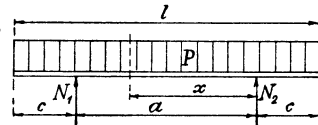


Fig. 238.

Von der Stütze a nimmt das Biegemoment ab, und an einer beliebigen Stelle der Strecke a im Abstand x von N_2 beträgt es

$$M_x = -N_2 \cdot x + \frac{P}{l} \cdot (c + x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (c + x) = \frac{1}{2} P \cdot \left(-x + \frac{(c + x)^2}{l} \right)$$

Den kleinsten Betrag erreicht es aus Gründen der Symmetrie in der Mitte für $x = \frac{1}{2}a$. Sein Wert ist dort mit $l = 2c + a$:

$$M_2 = \frac{1}{2}P \cdot \left(-\frac{1}{2}a + \frac{(c + \frac{1}{2}a)^2}{2c + a} \right) = \frac{1}{2}P \cdot \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{2}a \right) \right)$$

oder

$$M_2 = \frac{1}{4}P \cdot \left(-\frac{1}{2}a + c \right).$$

Am vorteilhaftesten ist der Träger unterstützt, wenn die Absolutwerte des positiven Momentes M_1 und des negativen M_2 einander gleich sind:

$$\frac{P \cdot c^2}{2l} = \frac{1}{4}P \cdot \left(-c + \frac{1}{2}(l - 2c) \right).$$

Wird durch $\frac{1}{2}P$ gehoben, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$c^2 + c \cdot l = \frac{1}{4}l^2.$$

Die linke Seite wird zu einem vollständigen Quadrat ergänzt, indem man beiderseits $\left(\frac{l}{2}\right)^2$ hinzufügt, und man erhält so

$$c = -\frac{1}{2}l \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + \frac{l^2}{4}}$$

oder

$$c = \frac{l}{2} \left(-1 \pm \sqrt{2} \right) = 0,2071 l,$$

wenn nur das positive Vorzeichen der Wurzel beachtet wird. Setzt man diesen Wert in die Gleichung für M_1 oder M_2 ein, so wird

$$M_1 = M_2 = 0,0235 \cdot P \cdot l,$$

während bei Unterstützung an den Enden gemäß Formel (112b) ist

$$M = 0,125 \cdot P \cdot l.$$

Die Beanspruchung beträgt also bei der günstigsten Anordnung nur den 5,53ten Teil.

Häufig führt man die Ermittlung der Lage des Schwerpunktes einer Fläche auf zeichnerischem Wege aus. Man zerlegt die Fläche in einzelne Teilstücke, deren Schwerpunktlage leicht angegeben werden kann, und betrachtet den Flächeninhalt jedes Teilstückes als eine Kraft, die in seinem Schwerpunkt angreift. Die Einzelkräfte sind einander parallel, und es führt dann die S. 56 angegebene Aufzeichnung mit Hilfe des Seilecks zum Ziel.

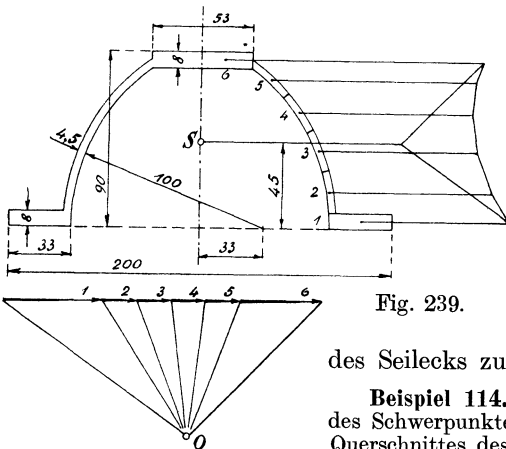


Fig. 239.

Beispiel 114. Zu ermitteln ist die Lage des Schwerpunktes des in Fig. 239 dargestellten Querschnittes des Belageisens Nr. 9.

Man zerlegt die eine Hälfte des Querschnittes etwa wie in der Figur ausgeführt, in 6 Teile, die genau genug als Rechtecke aufgefaßt werden können und deren

Einzelschwerpunkte sofort eingetragen werden können. Dann berechnet man die Flächeninhalte

Nr.	1	2	3	4	5	6
$F =$	$3,3 \cdot 0,8$	$2,2 \cdot 0,45$	$2,2 \cdot 0,45$	$0,2 \cdot 0,45$	$2,2 \cdot 0,45$	$2,65 \cdot 0,8 \text{ cm}^2$
$=$	2,64	0,99	0,99	0,99	0,99	2,12 cm^2

und trägt die F in ziemlich großem Maßstabe, mindestens $1 \text{ cm}^2 = 5 \text{ mm}$, der Reihe nach aneinander an, wählt einen beliebigen Pol O und zieht die Polstrahlen. Durch die Schwerpunkte der Teilflächen werden Parallelen zur Richtung der F gezogen, die im übrigen beliebig — nur nicht genau oder annähernd parallel zur Mittellinie des Querschnittes — angenommen werden kann. Zwischen diese Parallelen ist das Seileck parallel zu den Polstrahlen einzutragen. Die durch den Schnittpunkt der letzten freien Seillinien gelegte Parallele zu den Kraftlinien gibt auf der Symmetrieachse des Querschnittes den Schwerpunkt S an.

Hat die Fläche keine Symmetrieachse, so ist das Kraft- und Seileck zweimal nach verschiedenen Richtungen zu zeichnen. Der Kreuzungspunkt der beiden so erhaltenen Schwerlinien ist der Schwerpunkt.

Die doppelte Zeichnung kann auf Grund folgender Überlegung vermieden werden: S_1 und S_2 seien die Schwerpunkte zweier Flächenteile F_1 und F_2 , die von der Bezugsachse die Abstände x_1 und x_2 haben. Der Gesamtschwerpunkt der zusammengesetzten Fläche $F_1 + F_2$ sei S im Abstände x_0 von der Bezugsachse. Dann gilt nach Formel (83)

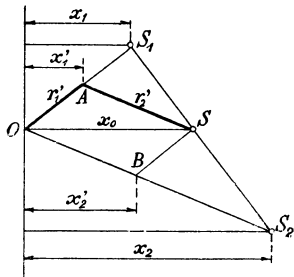


Fig. 240.

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot x_1 + \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot x_2.$$

In den gleichen Verhältnissen wie hier die Strecken x_1 und x_2 werden, wie Fig. 240 angibt, die von einem beliebigen Pol O nach den Schwerpunkten S_1 und S_2 gezogenen Strahlen r_1 und r_2 durch Parallele zu der Bezugsachse geteilt. Man erreicht somit den Gesamtschwerpunkt S durch den Linienzug OAS . Das Verfahren kann für drei und mehr Punkte in derselben Weise wiederholt werden, und man erhält so die Vorschrift²⁴⁾: Die von einem beliebigen Pol O aus nach den Einzelschwerpunkten gezogenen Strahlen $r_1, r_2 \dots$ werden vom Pol aus

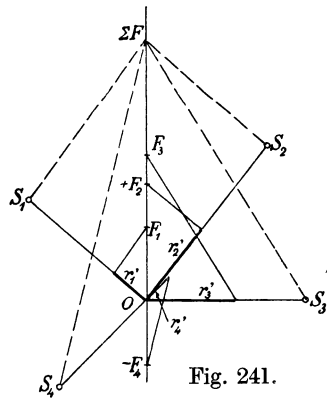


Fig. 241.

im Verhältnis $\frac{F_1}{\sum F}, \frac{F_2}{\sum F} \dots$ geteilt; die Teilstrecken werden dann zu einem offenen Vieleck zusammengesetzt, dessen Endpunkt den Schwerpunkt der ganzen Fläche darstellt.

²⁴⁾ Graßmann 1844.

Die Teilung der Strahlen kann ebenfalls zeichnerisch vorgenommen werden (Fig. 241). Man zieht durch O eine Achse, die mit keinem der Strahlen r zusammenfällt, und trägt darauf die einzelnen Flächengrößen von O aus in einem passenden Längenmaßstab auf, addiert sie mit dem Zirkel und verbindet den Endpunkt ΣF mit allen Schwerpunkten S , zieht darauf durch die Punkte $F_1, F_2 \dots$ Parallele zu diesen Verbindungslinien, die von den Strahlen r die gesuchten Stücke r abschneiden, wie aus der Ähnlichkeit der zugehörigen Strecken folgt. Die in Fig. 241 gestrichelten Linien brauchen nicht gezogen zu werden.

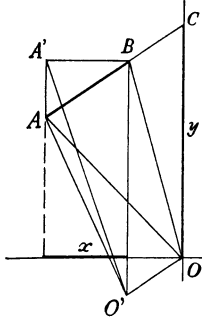


Fig. 242.

Auch die Ermittlung der Flächeninhalte $F_1, F_2 \dots$ und der Schwerpunkte $S_1, S_2 \dots$ kann rein zeichnerisch stattfinden. Man zerlegt die Gesamtfläche nicht in Rechtecke, wie etwa in Fig. 217 oder 231, sondern von einem zweckmäßig gewählten Pol aus in Dreiecke oder allgemein Flächenausschnitte²⁵⁾. Ist ABO ein solches Dreieck (Fig. 242), und wird OO' parallel AB gezogen, so ist das Dreieck $ABO' = ABO$,

weil Grundlinien und Höhen dieselben sind, und wenn noch $A'B = x$ parallel zu der beliebigen durch den Pol O gelegten x -Achse gezogen wird, aus demselben Grunde Dreieck $A'BO' = ABO'$. Demnach stellt die Hälfte des Produktes $\overline{A'B} \cdot \overline{OC} = x \cdot y$ den Inhalt des Dreiecks ABO dar.

Ist AB nicht ein geradliniges Stück der gegebenen Flächenbegrenzung sondern ein gekrümmtes (Fig. 243), so kann der über \overline{AB} stehende

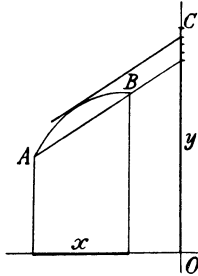


Fig. 243.

Bogen als ein Parabelstück aufgefaßt werden, dessen Flächeninhalt nach Formel (107) $\frac{4}{3}$ des Inhaltes eines Dreieckes von gleicher Grundlinie und Höhe ist. Man zieht also parallel zur Sehne AB eine Tangente an den Bogen, teilt den zwischen beiden Linien gelegenen Abschnitt der y -Achse in drei Teile und gibt in Richtung der Bogenwölbung ein Teilstück bis C zu; dann ist $\overline{OC} = y$ für den Flächenausschnitt OAB . Die Teilung kann stets ohne Fehler im Endergebnis nach Augenmaß erfolgen. Die Achsen müssen so gewählt werden, daß x nicht gleich Null oder bei Bögen gleich dem kleinstmöglichen

Wert der Bogenprojektion wird, weil sich dann $y = \infty$ ergibt.

Die Flächeninhalte der einzelnen Ausschnitte, die von den durch O gezogenen Strahlen gebildet werden, erhält man nach der Konstruktion der Fig. 244: Auf der x -Achse wird im Abstände 2 ein Punkt O' festgelegt, von dem aus die Strahlen C_1, C_2, C_3 nach den Endpunkten der y gezogen werden. Parallel zu \overline{OC} wird durch A eine Gerade bis zur

²⁵⁾ Meh m ke, Widmungsschrift an Otto Mohr, 1916.

Senkrechten $\overline{BB'}$ gelegt, sie schneidet auf $\overline{BB'}$ von der x -Achse aus die Länge $\overline{B'F}$ ab, die den Flächeninhalt des Dreiecks ABO darstellt. Denn es ist

$$\frac{\overline{B'F}}{\overline{AB'}} = \frac{OC}{O'O} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{x_1} = \frac{y_1}{2}$$

mithin

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot y_1 \cdot x_1.$$

Entsprechend ergeben sich $\overline{D'F_2} = F_2$ des Ausschnittes BDO und $\overline{O'F_3} = F_3$ des Ausschnittes DEO .

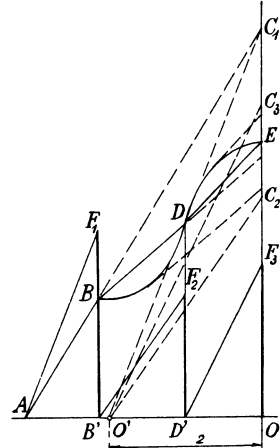


Fig. 244.

Für das Dreieck ABO ist das $\frac{2}{3}$ fache des Schwerpunktabstandes von O die Strecke \overline{OG} , wenn G die Dreieckseite AB halbiert (Fig. 245). Für den Ausschnitt AB erhält man das $\frac{2}{3}$ fache des Schwerpunktabstandes

von O mit ausreichender Genauigkeit, wenn GS_1 parallel zu OH gezogen wird — H ist der Berührungspunkt der zur Sehne AB parallelen Tangente an die Kurve AB^{25}). Man zeichnet so alle Schwerpunktabstände um das $\frac{2}{3}$ fache vergrößert und verkleinert schließlich den letzten OS des Kurvenzuges $OA \dots S$ in Fig. 240 entsprechend um $\frac{1}{3}$, um die wirkliche Lage des Gesamtschwerpunktes zu bestimmen.

Beispiel 115. Zu bestimmen ist der Schwerpunkt der in Fig. 246 gezeichneten Querschnittsfläche eines Lasthakens.

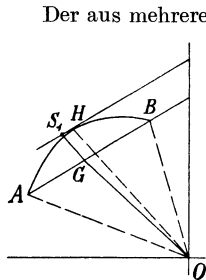


Fig. 245.

Der aus mehreren Stücken zusammengesetzte Bogen des Flächenumfanges wird in vier beliebige Teile zerlegt, nachdem als y -Achse die Symmetrieachse gewählt ist und als x -Achse die dazu senkrechte, durch den Anfangspunkt O der Kurve gelegte. Die Sehnen der Teilstücke OA, AB, BD, DE des Umfanges werden halbiert und mit der y -Achse zum Schnitt gebracht; parallel zu den Sehnen werden Tangenten an die Bögen gezogen und bis zum Schnitt mit der y -Achse verlängert. Durch die Halbierungspunkte werden jetzt Parallele zu den Verbindungsgeraden der Tangentenberührungspunkte mit dem Anfangspunkt O gezogen, die die Tangenten in den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 treffen, welche mit dem Anfangspunkt O verbunden werden. Nun werden die Abschnitte der y -Achse zwischen den Sehnen und Tangenten gedrittelt und ein Drittel über die Tangente hinaus bis

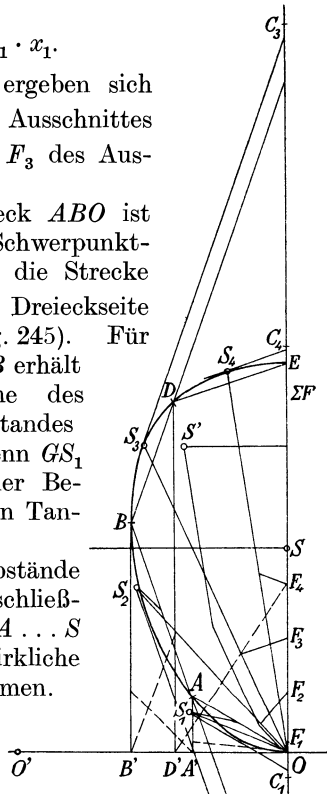


Fig. 246.

den Tangentenberührungspunkte mit dem Anfangspunkt O gezogen, die die Tangenten in den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 treffen, welche mit dem Anfangspunkt O verbunden werden. Nun werden die Abschnitte der y -Achse zwischen den Sehnen und Tangenten gedrittelt und ein Drittel über die Tangente hinaus bis

zu den Punkten C_1, C_2, C_3, C_4 abgetragen und die Teilpunkte A, B, D des Umfanges auf die x -Achse als A', B', D' projiziert. An beliebiger Stelle der x -Achse wird der Punkt O' gewählt, worauf man durch die Punkte O', A', B', D' die Parallelen zu $O'C_1, O'C_2, O'C_3, O'C_4$ bis zum Schnitt mit der projizierenden Geraden des Endpunktes des betreffenden Umfangsteiles zieht; sie schneiden darauf die Größen der Flächenstücke der zugehörigen Querschnittsausschnitte in einem beliebigen Maßstab ab, die auf die y -Achse bis F_1, F_2, F_3, F_4 übertragen werden; ihre Addition ergibt den Punkt ΣF . Durch die Punkte $F_1, F_2 \dots$ der y -Achse werden jetzt Parallele zu den Geraden S_1F usw. gelegt, die auf den Verbindungslinien $OS_1 \dots$ von O aus die Strecken r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 abschneiden. Diese Strecken r' werden nach Größe und Richtung hintereinander zu dem Zug OS' zusammengesetzt, dessen Endpunkt S' auf die Symmetrieachse projiziert wird. Zwei Drittel dieser Projektion ergeben dann den Schwerpunktsabstand OS .

Da die Fläche nur in einige wenige Teile zerlegt wird — drei Teile hätten auch schon genügt —, so ist die Ausführung der Zeichnung ohne jede Rechnung schneller und mit geringerem Raumbedarf zu erledigen, als etwa die nach Beispiel 114.

Wird die Gerade AB von der Länge l um eine Achse CD gedreht (Fig. 247), die in derselben Ebene wie AB liegt, so entsteht bei einer ganzen Umdrehung der Mantel eines abgestumpften geraden Kreiskegels. Seine Oberfläche berechnet sich nach Fig. 248 zu

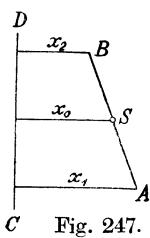


Fig. 247.

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot l_1.$$

Nun ist aus ähnlichen Dreiecken

$$l_1 : l = 2\pi x_1 : 2\pi \cdot (x_2 - x_1),$$

$$l_2 : l = 2\pi x_2 : 2\pi \cdot (x_2 - x_1),$$

also

$$F = \pi \cdot l \cdot \left(x_2 \cdot \frac{x_2}{x_2 - x_1} - x_1 \cdot \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$= \pi \cdot l \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = 2 \cdot \pi \cdot l \cdot \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

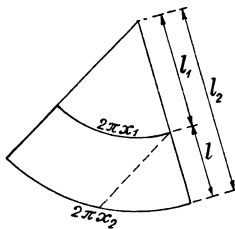


Fig. 248.

Nach Fig. 248 ist aber

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = x_0,$$

wenn x_0 den Abstand des Schwerpunktes S der erzeugenden Geraden von der Drehachse angibt. Damit wird

$$F = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot l. \tag{115}$$

Die entstandene Umdrehungsfläche ist gleich der Länge der erzeugenden Linie multipliziert mit dem von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weg²⁶⁾.

Ist eine beliebige ebene Kurve $AB = l$ als Erzeugende gedreht worden (Fig. 249), deren Schwerpunkt S von der Drehachse den Abstand x_0 hat, so liefert das verschwindend kleine Kurvenstückchen dl ,

²⁶⁾ Pappus, Collectiones mathematicae, etwa 280; Guldin, De centro gravitatis, 1635.

das als geradlinig angesehen werden kann, bei einer ganzen Umdrehung die Oberfläche $dF = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl$ und die Gesamtfläche ist

$$F = \int_0^l 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl = 2\pi \int_0^l x \cdot dl.$$

Nach Gleichung (84) kann nun die Momentensumme der Teile ersetzt werden durch das Moment aus der Länge der ganzen Kurve und ihrem Schwerpunktsabstand x_0 , so daß man wieder Formel (115) erhält.

Beispiel 116. Steht die erzeugende Gerade senkrecht zur Drehachse, so liefert die Drehung eine ebene Kreisringfläche, deren Inhalt mit den Bezeichnungen der Fig. 250 beträgt

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$

oder gemäß der obigen Darlegung

$$F = \pi \cdot d_m \cdot \delta,$$

worin einzusetzen ist

$$d_m = \frac{1}{2} \cdot (D + d).$$

Die Formel (116) ist für die Zahlenrechnung die bequemere. Gegeben sei z. B. ein Gasrohr von $1\frac{1}{4}''$ lichter Weite, 3,7 mm Stärke und 5 m Länge; zu bestimmen sei sein Gewicht.

Man erhält sogleich

$$F = \pi \cdot (2,54 \cdot \frac{1}{4} + 0,37) \cdot 0,37 \text{ cm}^2.$$

Nun ist nach S. 93 $G = F \cdot l \cdot \gamma$, worin F in cm^2 , l in dm und $\gamma = 7,80$ für Schweißeisen in kg/dm^3 einzusetzen ist. Mithin wird

$$G = 3,14 \cdot 3,545 \cdot 0,37 \cdot 0,50 \cdot 7,80 = 16,1 \text{ kg}.$$

Beispiel 117. Anzugeben ist die mittlere Stärke und die Länge eines dicht aufgerollten Ledertreibriemens nach Fig. 251.

Die Stärke von Ledertreibriemen schwankt wegen der Änderung der Lederdicke, die am Halsende des Kroupons im Durchschnitt 1 mm stärker ist als am Schwanzende, und weil die Leimstellen gewöhnlich verstärkt werden, nicht unbedeutend. Die mittlere Stärke wird gewonnen, indem man die Breite δ des dicht gewickelten Riemenpaketes an zwei Stellen mißt, etwa $\delta_1 = 122 \text{ mm}$ und $\delta_2 = 123 \text{ mm}$, und dann den Mittelwert durch die Anzahl der Lagen des Riemens, etwa $i = 24$, dividiert. Damit wird die mittlere Riemenstärke

$$s_m = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\delta_1 + \delta_2)}{i} = \frac{122,5}{24} \approx 5,1 \text{ mm}.$$

Nun werden die Durchmesser des Paketes ebenfalls zweimal gemessen, z. B.

$$\begin{aligned} D_1 &= 233 \text{ mm}, & D_2 &= 235 \text{ mm}, & \text{also } D &= 234 \text{ mm}, \\ d_1 &= 111 \text{ mm}, & d_2 &= 112 \text{ mm}, & & d = 111,5 \text{ mm}, \end{aligned}$$

damit wird

$$d_m = \frac{1}{2} \cdot (234 + 111,5) \text{ mm},$$

ferner ist

$$\delta = i \cdot s_m.$$

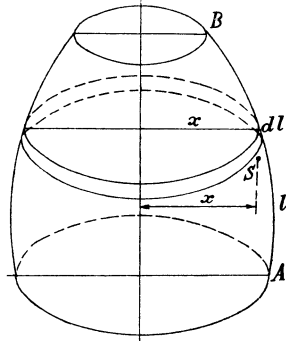


Fig. 249.

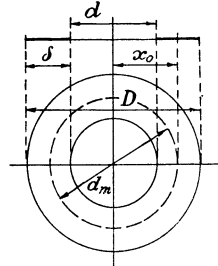


Fig. 250.

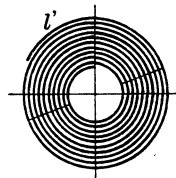


Fig. 251.

Die Gesamtlänge der vollen Ringe ist somit

$$l = \frac{F}{s} = \pi \cdot d_m \cdot i = 3,14 \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,5 \cdot 24 = 13\,025 \text{ mm.}$$

Dazu ist noch das überschießende Stück $l' = 52 \text{ mm}$ aufzumessen, und die ganze Länge beträgt $L = 13,077 \text{ m}$.

Sie wird so genauer und schneller bestimmt als durch unmittelbares Aufmessen des aufgerollten Riemens mit Hilfe des Meterstabes.

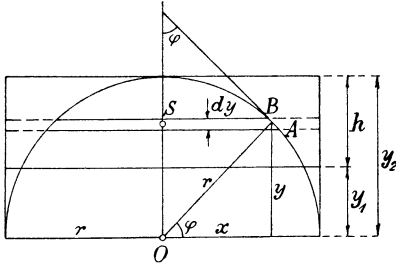


Fig. 252.

Beispiel 118. Der Flächeninhalt und das Moment der Fläche einer Kugelkalotte oder Kugelzone ist zu bestimmen (Fig. 252).

Die Fläche des sehr schmalen Streifens von der Länge $AB = dl$ ist

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl.$$

Nun ist $x = r \cdot \cos \varphi$, also

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot dl$$

oder, da $dl \cdot \cos \varphi = dy$, ist,

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dy.$$

Mithin wird

$$F = \int_{y_1}^{y_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dy = 2 \cdot \pi \cdot r \int_{y_1}^{y_2} dy = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (y_2 - y_1) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h.$$

Die Fläche ist gleich der des von denselben Ebenen abgetrennten Stückes der Kugel umgebenden Zylindermantels.

Das Moment der Fläche in bezug auf den Mittelpunkt der Kugel ist

$$M = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dF = \int_{y_1}^{y_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot y \cdot dy = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy$$

oder gemäß Formel (98a)

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2^2 - y_1^2) = \pi \cdot r \cdot (y_2^2 - y_1^2).$$

Das ist auch das Moment der die Kugel umgebenden Zylinderfläche von den gleichen Abständen y_2 und y_1 , denn dafür gilt

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (y_2 - y_1) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1).$$

Für die Halbkugeloberfläche folgt hieraus mit $y_1 = 0$ und $y_2 = r$

$$F = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r = \frac{\pi}{2} \cdot d^2$$

und

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} r = \pi \cdot r^3 = \frac{\pi}{8} \cdot d^3.$$

Für die ganze Kugel vom Durchmesser d gilt somit als Oberfläche

$$F = \pi \cdot d^2,$$

das ist das Vierfache einer ebenen Kreisfläche von gleichem Durchmesser.

Beispiel 119. Das Auslaßventil einer Gasmaschine, die mit dem Höchstdruck $p_1 = 23 \text{ at}$ arbeitet, hat den Außendurchmesser $D = 175 \text{ mm}$ und die Sitzbreite $b = 5 \text{ mm}$ (Fig. 253). Anzugeben ist der Druck p_2 , mit dem die Sitzfläche angepreßt wird.

Die Druckkraft ist gegeben durch die beiden Ausdrücke

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1 = \pi \cdot (D - b) \cdot b \cdot p_2.$$

Hieraus folgt

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{D^2}{4b \cdot (D - b)} = \frac{p_1}{4} \cdot \frac{D}{b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{D}} \approx \frac{p_1}{4} \cdot \frac{D}{b} \cdot \left(1 + \frac{b}{D}\right),$$

also

$$p_2 = \frac{23}{4} \cdot \frac{17,5}{0,5} \cdot \left(1 + \frac{0,5}{17,5}\right) = 207 \text{ at.}$$

Häufig kann man das zweite Glied des Klammerausdruckes vernachlässigen; man erhält dann im vorliegenden Fall

$$p_2 = \frac{p_1}{4} \cdot \frac{D}{b} = \frac{23 \cdot 17,5}{4 \cdot 0,5} = 201 \text{ at,}$$

nur um 3 v. H. zu klein.

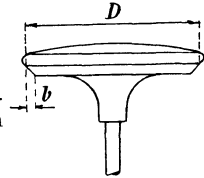


Fig. 253.

Wird das Rechteck $ABCD$ der Fig. 254 um eine zur Seite BD parallele, in derselben Ebene liegende Achse gedreht, so entsteht ein Hohlzylinder vom Inhalt

$$V = \pi \cdot h \cdot (x_1^2 - x_2^2) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

oder

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot h \cdot b.$$

Der Inhalt des Umdrehungskörpers ist gleich dem Inhalt der erzeugenden ebenen Fläche multipliziert mit dem Wege, den ihr Schwerpunkt beschreibt.

Man kann sich nun jede beliebige ebene Fläche zusammengesetzt denken aus entsprechend vielen sehr kleinen Rechtecken. Bezeichnet x den Abstand eines solchen Rechteckes dF von der Drehachse so ergibt sich bei einer vollen Umdrehung der Anteil des Körperinhaltes

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dF$$

und der Inhalt des ganzen Körpers wird

$$V = \int 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dF = 2\pi \cdot \int x \cdot dF.$$

Nun ist nach Formel (83)

$$\int x \cdot dF = F \cdot x_0,$$

mithin gilt ganz allgemein

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot F. \quad (117)$$

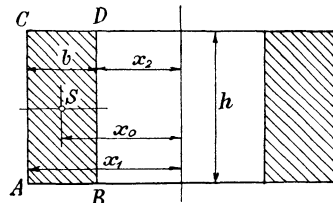


Fig. 254.

Beispiel 120. Anzugeben ist der Rauminhalt eines Kugelballons von $d = 14,2$ m Durchmesser.

Nach Formel (91) ist das Moment der Halbkreisfläche in bezug auf den Durchmesser

$$M = x_0 \cdot F = \frac{1}{12} d^3,$$

damit ergibt sich der Kugelinhalt zu

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{12} \cdot d^3 = \frac{\pi}{6} \cdot d^3.$$

Zahlenmäßig ergibt sich

$$V = \frac{22 \cdot 14,2^3}{7 \cdot 6} = \frac{11}{21} \cdot 2863,3 \approx 1500 \text{ m}^3.$$

Beispiel 121. Der Schaft eines Fabrikschornsteines ist nach Fig. 255 ausgeführt. Gegeben ist $H = 30$ m, $d_0 = 1,00$ m, $\delta_1 = 0,18$ m, also $D_0 = 1,36$ m. Gewählt wird die Zunahme des Halbmessers für 1 m Höhe zu $m = 2$ cm, so daß $D_u = D_0 + 2 \cdot m \cdot H = 1,36 + 1,2 = 2,56$ m wird.

Für die einzelnen Trommeln gilt so die folgende Zusammenstellung. Nach Formel (117) ist für eine Trommel mit den angegebenen Bezeichnungen $V = \pi \cdot d_m \cdot h \cdot \delta$, worin einzusetzen ist $d_m = \frac{1}{2} \cdot (d_0 + d_u) + \delta$ oder, wenn geschrieben wird $d_u + \delta = D_u$:

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot h \cdot \delta \cdot (d_0 + D_u).$$

Hieraus ergeben sich die Trommelgewichte durch Multiplikation mit dem Einheitsgewicht $\gamma = 1,8 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$.

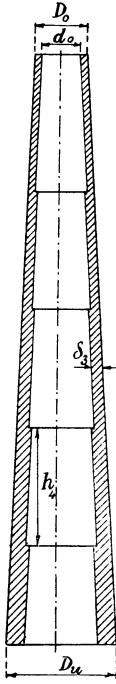


Fig. 255.

Nr.	1	2	3	4	5
$h =$	7,0	6,0	6,0	6,0	5,0 m
$\delta =$	0,18	0,25	0,30	0,38	0,51 m
$D_0 =$	1,36	1,64	1,88	2,12	2,36 m
$D_u =$	1,64	1,88	2,12	2,36	2,56 m
$d_0 =$	1,00	1,14	1,28	1,40	1,34 m
$V =$	5,23	7,12	9,67	13,33	15,63 m
$G =$	9,40	12,81	17,41	24,00	28,12 t

Der Gesamtrauminhalt des Mauerwerkes ist hiernach $\Sigma V = 50,98 \text{ m}^3$ und das Gesamtgewicht $\Sigma G = 91,74 \text{ t}$.

Eine leicht einzusehende Erweiterung des Guldinschen Satzes ist der folgende:

Bewegt sich eine ebene Fläche im Raum derart, daß einer ihrer Punkte beständig auf einer beliebigen Kurve und ihre Ebene senkrecht zu dieser Kurve bleibt, ohne daß die Fläche ihre Lage in der eigenen Ebene ändert, so ist der Inhalt des so erzeugten Körpers gleich dem Produkt aus der Fläche und der Länge des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weges.

Beispiel 122. Die Magnetspule einer Dynamomaschine bestehe aus besponnenem Draht von $\delta = 1,2$ mm äußerem Durchmesser. Es ist ferner gemäß Fig. 256 $a = 190$ mm, $b = 260$ mm, $d = 84$ mm, $r = 20$ mm, $h = 156$ mm, so daß auf der Wicklungsbreite d 70 Drähte und auf der Höhe h 130 Drähte nebeneinander liegen. Anzugeben ist die gesamte Drahtlänge.

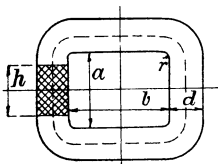


Fig. 256.

In Drahtstärken gemessen ist $F = d \cdot h = 70 \cdot 130$. Der Weg des Schwerpunktes der Fläche F ist

$$s_0 = a - 2r + b - 2r + 2\pi \cdot (r + \frac{1}{2}d) = a + b + 2r(\pi - 4) + \pi \cdot d$$

also mit den Zahlenwerten

$$s_0 = 190 + 260 + 40 \cdot 0,8584 + 3,1416 \cdot 84 = 748,23 \text{ mm.}$$

Damit wird

$$l = 748,23 \cdot 70 \cdot 130 = 6\,808\,900 \text{ mm} \approx 6810 \text{ m.}$$

Gewöhnlich ist die Länge l des Drahtes gegeben und die Wicklungstiefe d aus den übrigen gegebenen Massen der Spule zu berechnen.

14. Formen des Gleichgewichtes.

Wird ein fester Körper in einem Punkt A festgehalten oder von einer frei drehbaren Achse getragen, deren Projektion auf die Zeichenebene durch A dargestellt wird (Fig. 257), so muß dort eine Trag- oder Widerstandskraft N angreifen, die allen anderen auf den Körper einwirkenden Kräften das Gleichgewicht hält, wenn er in Ruhe bleiben soll. In vielen praktischen Fällen sind die betreffenden Kräfte die Eigengewichte des Körpers und der etwa darauf befindlichen Lasten, die nach Abschnitt 13 in dem gemeinsamen Schwerpunkt S als Gesamtgewicht G vereinigt werden können.

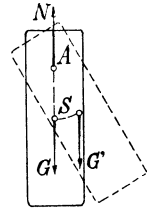


Fig. 257.

Die beiden Kräfte N und G sind nach Absatz 5 nur dann im Gleichgewicht, wenn sie gleich groß sind und in dieselbe Wirkungslinie fallen. Ist nun der Körper nach irgendeiner Seite so gedreht worden, daß sich der Schwerpunkt S nicht unter dem Aufhängungspunkt oder der Drehachse A in derselben lotrechten Geraden befindet, so bilden die beiden Kräfte N und G ein Kräftepaar, das in Fig. 257, wo der Schwerpunkt unterhalb der Unterstütsungsstelle liegt, bestrebt ist, den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen. Man bezeichnet sie aus dem Grunde als sichere oder stabile Gleichgewichtslage.

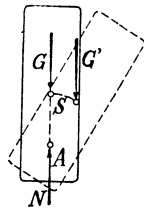


Fig. 258.

In der ausgezogenen Stellung der Fig. 258 befindet sich der Körper ebenfalls im Gleichgewicht, da G und N gleich sind und in dieselbe Wirkungslinie fallen. Wird jedoch der Körper durch irgendeine Einwirkung auch nur ein wenig aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so wirkt das entstandene Kräftepaar ($G'N$) der gestrichelten Lage dahin, daß er sich immer weiter aus der anfänglichen Gleichgewichtslage entfernt und schließlich in die Ruhelage der Fig. 257 übergeht. Die zweite Gleichgewichtslage, bei der sich der Schwerpunkt über der Unterstütsungsstelle befindet, heißt die unsichere oder auch labile. Sie ist für die Zwecke der Bau- und Maschinenpraxis im allgemeinen unbrauchbar, da die kleinste Ver-rückung schon genügt, um den Körper völlig um-schlagen zu lassen.

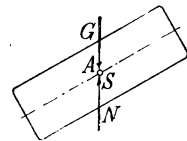


Fig. 259.

Fällt der Schwerpunkt mit dem Unterstütsungs-punkt zusammen oder in die Drehachse (Fig. 259), so sind beide Kräfte G und N in jeder Lage des Körpers im Gleichgewicht und es kann sich kein Kräftepaar herausbilden, das etwa eine Drehung bewirkt. Auch dieser Fall des unentschiedenen Gleichgewichtes muß im allgemeinen vermieden werden, da er einerseits bei der geringsten Verschiebung oder Ver-änderung der Größe einer Last in den des unsicheren Gleichgewichtes übergehen kann und andererseits auch immer verlangt wird, daß der Körper eine bestimmte, jeweilig vorgeschriebene Gleichgewichtslage

unter allen Umständen beibehält. Es ist also nötig, daß der Körper mit einer gewissen Sicherheit im stabilen Gleichgewicht bleibt.

Wird der irgendwie gekrümmte Körper durch eine wagerechte Ebene unterstützt, so muß nach den Darlegungen S. 33 der Gegendruck N sowohl senkrecht zur Ebene stehen als auch zu dem Oberflächenelement des Körpers, in dem die Stützung stattfindet.

Einen bestimmten, senkrecht zur Stützebene durch den Unterstützungspunkt A des Körpers geführten ebenen Schnitt geben z. B. die Fig. 260 bis 263 an, außerdem können natürlich noch beliebig viele andere ebene Schnitte durch den Unterstützungspunkt und senkrecht zur Stützebene durch den Körper gelegt werden, in denen aber die Krümmung des Körpers an der Stelle A sehr verschieden sein kann. Wenn die Krümmung an der Stützstelle nach jeder Richtung eine stetige ist, also nicht etwa scharfkantige Falten oder dgl. der Körperoberfläche dort zusammenlaufen, so können zwei Hauptkrümmungen angegeben werden, eine größte mit dem kleinsten Krümmungshalbmesser und eine kleinste mit dem größten Krümmungshalbmesser, zwischen denen die übrigen Krümmungen liegen. Es läßt sich nachweisen, daß die Ebenen der beiden Hauptkrümmungen senkrecht zueinander stehen müssen.

Ist der Körper nun nicht im Gleichgewicht, wie offensichtlich im Fall der Fig. 260, so sucht er durch eine Rollbewegung in eine Gleichgewichtslage zu kommen. Das Rollen eines Rades oder einer Kugel ist nun eine Drehung um den Mittelpunkt des Radkreises oder der Kugelkrümmung. Entsprechend kann

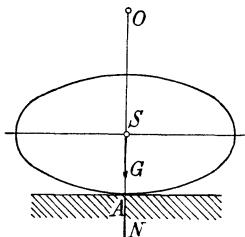


Fig. 260.

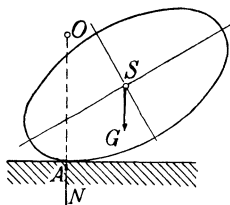


Fig. 261.

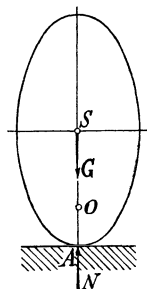


Fig. 262.

das Rollen eines beliebig gestalteten Körpers als Drehung um einen Krümmungsmittelpunkt der mit der Stützebene in Berührung befindlichen Fläche aufgefaßt werden.

Damit ist der Fall auf den vorher untersuchten zurückgeführt. Der Körper befindet sich im sicheren Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt oder Mittelpunkt aller auf den Körper einwirkenden Kräfte senkrecht unter dem Krümmungsmittelpunkt der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle liegt (Fig. 261). Er ist im unsicheren Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt senkrecht über dem Krümmungsmittelpunkt der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle liegt (Fig. 262). Es besteht unbestimmtes Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt S und der Krümmungsmittelpunkt O der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle zusammenfallen, wie z. B. bei einer Kugel oder einem Zylinder, die nur durch ihr Eigengewicht belastet sind.

Sind beide Körper an der Berührungsstelle gekrümmt, wie etwa im Fall der Fig. 263, wo die Stützfläche vom Krümmungshalbmesser R ausgehöhlt und der gestützte Körper mit dem Krümmungshalbmesser r ausgebaucht ist, so sind bei einer kleinen seitlichen Bewegung beide Flächen um die Strecken $R \cdot \alpha$ und $r \cdot \beta$ aufeinander abgerollt, und unentschiedenes Gleichgewicht besteht dann, wenn der verschobene Schwerpunkt S' des Körpers gerade um eine bestimmte Strecke a über dem neuen Stützpunkt A' liegt.

Bei kleinem Winkel ist genau genug anzusetzen

$$a \cdot \gamma = r \cdot \beta = R \cdot \alpha$$

und nach dem Satz von den Außenwinkeln eines Dreiecks ist

$$\beta = \alpha + \gamma,$$

also

$$\gamma = \beta - \alpha.$$

Damit wird

$$\alpha = \frac{r \cdot \beta}{\beta - \alpha} = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

und mit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{R}$$

$$a = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{r \cdot R}{R - r}. \quad (118)$$

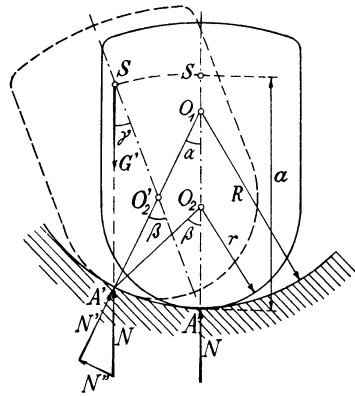


Fig. 263.

Bei großen Ausschlägen vergrößert sich der Wert von a etwas, da jedoch die Bewegung zuerst durch die kleinen Ausschläge erfolgt; so ist der obige kleinste Grenzwert maßgebend.

Sind die Berührungsflächen beider Körper ausgebaucht, so gilt wieder mit den Bezeichnungen der Fig. 264

$$a \cdot \gamma = R \cdot \alpha = r \cdot \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

Damit ergibt sich wie oben

$$a = r \cdot \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} = \frac{r \cdot R}{R + r} \quad (119)$$

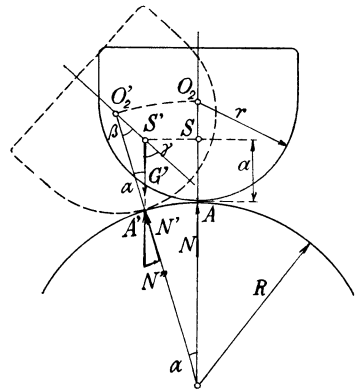


Fig. 264.

als Erhebung des Schwerpunktes S über den Stützpunkt A im Fall des unentschiedenen Gleichgewichtes. Liegt S tiefer, so ist der Körper im sicheren Gleichgewicht.

Ist die stützende Fläche ausgebaucht und der gestützte Körper ausgehöhlt (Fig. 265), so besteht noch unentschiedenes Gleichgewicht, wenn bei geringem Abrollen aus der Gleichgewichtslage der verschobene Schwerpunkt S' gerade mit dem neuen Stützpunkt A' zusammenfällt.

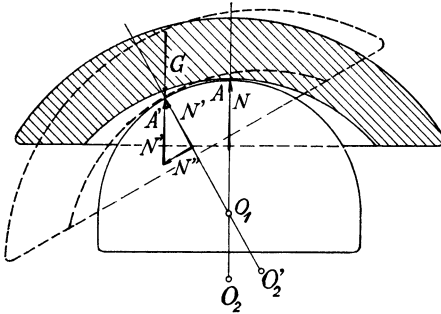


Fig. 265.

Somit muß die Erhebung a des Schwerpunktes S über den Unterstützungspunkt $A O$ betragen. Der Fall entspricht also der Aufhängung.

Nur ist zu beachten, daß, während im Fall der Fig. 263 die Seitenkraft N'' bei Verschiebung aus der Gleichgewichtslage bestrebt ist, den Körper wieder dorthin zurückzubringen, im Fall der Fig. 264 und 265 diese Seitenkraft auf

eine weitere Verschiebung aus der Gleichgewichtslage hinwirkt. Bei kleinen Ausschlägen ist aber ihr Anteil verschwindend gering; freilich macht er sich bei großen Ausschlägen recht erheblich bemerkbar.

Die vorstehenden Entwicklungen setzen voraus, daß die berührenden Flächen völlig glatt sind; geringe Vorsprünge oder Rauigkeiten gestatten auch dann noch ein gewisses sicheres Gleichgewicht, wenn die oben festgestellten Bedingungen nicht mehr genau innegehalten sind. Jedoch darf man sich nicht auf die Wirkung solcher Nebeneinflüsse verlassen (Bd. II).

Eine weitere Voraussetzung war, daß es sich um lotrecht wirkende Gewichtskräfte handelt. Die Ergebnisse gelten aber auch für beliebig gerichtete Kräfte und sich in beliebiger Weise berührende Körper, wenn nur die Kräfte die den Figuren entsprechende Lage zu den Körpern haben. In dem Fall ist die Angriffsstelle der Kraft immer diejenige, an der sie auf den zu untersuchenden Körper einwirkt.

Beispiel 123. Bei einem Wagebalken, dessen Last- und Gewichtsschalen nach jeder Richtung frei beweglich sind, greift die Belastung erst an den Tragschneiden des Wagebalkens an. Bei einem Drahtseilbahnwagen dagegen, wo das Gehänge zwar in der Fahrtrichtung frei auspendeln kann, aber bei den gewöhnlichen Ausführungen senkrecht dazu fest im Wagen liegt, ist für die Beurteilung des Gleichgewichtes der Schwerpunkt des ganzen Systems, bestehend aus Wagen, Gehänge, Kasten und Ladung maßgebend. An einem Elektrohängebahnwagen mit Winde für den auf- und abbeweglichen Förderkasten ist aber wieder die Angriffsstelle des Kastengewichtes die Seiltrommel, auf die sich das Hubseil aufwickelt, solange nicht besondere Führungen die freie Beweglichkeit des Kastens ausschließen.

Beispiel 124. Auf einen Halbzylinder vom Halbmesser $r = 42$ cm, dessen Einheitsgewicht $\gamma_1 = 0,65$ ist, sei ein dreiseitiges Prisma von der Grundbreite $2r$ und der Höhe h aufgesetzt, dessen Einheitsgewicht $\gamma_2 = 0,75$ beträgt. Wie hoch kann h gemacht werden, wenn noch $\mathcal{S} = 1,5$ fache Sicherheit für stabiles Gleichgewicht bestehen soll? Angenommen werde, daß die Unterstützung erfolgt durch

1. eine wagerechte Ebene,
2. ausgebauchte Zylinderfläche vom Halbmesser $R = m \cdot r$ mit $m = 3$.
3. ausgehöhlte Zylinderfläche vom Halbmesser $R = m \cdot r$ mit $m = 3$.

1. Unentschiedenes Gleichgewicht besteht, wenn der Gesamtschwerpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt O zusammenfällt (Fig. 262), also für $G_1 \cdot x_1 = G_2 \cdot x_2$; bei \ominus facher Sicherheit gilt also

$$G_1 \cdot x_1 = \ominus \cdot G_2 \cdot x_2$$

oder mit

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{4r}{3\pi},$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{h}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \cdot \frac{4}{3\pi} \cdot r = \ominus \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \cdot \frac{1}{3} h.$$

Hieraus folgt

$$h = r \cdot \sqrt{\frac{2}{\ominus} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = 42 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,65}{1,5 \cdot 0,75}} = 45,1 \text{ cm.}$$

2. Nach Formel (118) ist

$$\ominus \cdot a = \frac{r \cdot R}{r + R} = r \cdot \frac{m}{m + 1}.$$

In bezug auf die Berührungsstelle gilt nun die Momentengleichung

$$a \cdot (G_1 + G_2) = G_1 \cdot (r - x_1) + G_2 \cdot (r + x_2)$$

oder mit den obigen Werten von a , G , x :

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\ominus} \cdot \frac{m}{m + 1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 + \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \cdot \left(r - \frac{4r}{3\pi} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \cdot \left(r + \frac{1}{3} h \right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$h^2 + h \cdot 3r \cdot \left(1 - \frac{1}{\ominus} \cdot \frac{m}{m + 1} \right) + \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \left(1 - \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{\ominus} \cdot \frac{m}{m + 1} \right) = 0.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten geht die Gleichung über in

$$h^2 + h \cdot 63 + 545,5 = 0,$$

woraus folgt

$$h = -31,5 \pm \sqrt{31,5^2 - 545,5}$$

oder, da nur der Höchstwert von h in Betracht kommt,

$$h = -31,5 + 21,1 = -10,4 \text{ cm.}$$

Der zweite Wert $h = -31,5 - 21,1 = -52,6 \text{ cm}$ hat keine Bedeutung.

Damit sicheres Gleichgewicht mit der vorgeschriebenen Sicherheit besteht, muß aus dem Halbzylinder noch ein Prisma von 10,4 cm Tiefe herausgeschnitten werden.

3. Nach Formel (119) ist

$$\ominus \cdot a = \frac{r \cdot R}{R - r} = r \cdot \frac{m}{m - 1}.$$

Im übrigen gilt dieselbe Rechnung wie unter 2., wenn nur $m - 1$ statt $m + 1$ eingesetzt wird. Die Zahlengleichung liefert dann

$$h = 42^2 \cdot \frac{0,65}{0,75} \cdot 2,$$

also

$$h = 55,25 \text{ cm.}$$

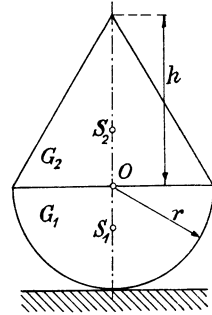


Fig. 266.

Beispiel 125. Bei dem Dreigelenkgebölbe nach Fig. 185 haben die ausgehöhlten Gelenkquader den Krümmungshalbmesser $R = 3,0$ m. Anzugeben ist der Krümmungshalbmesser r der ausgebauchten Quadern, wenn für das stabile Gleichgewicht $\mathfrak{S} = 2,5$ fache Sicherheit vorgeschrieben wird (Fig. 267).

Der wagerechte Abstand des Kraftmittelpunktes der auf eine Gebölbehälfte wirkenden Kräfte vom Kämpfer beträgt nach den Angaben des Beispiels 90

$$a_0 = \frac{H \cdot f}{\Sigma P} = \frac{32,7 \cdot 2,7}{30,7} = 2,87 \text{ m,}$$

mithin vom Scheitel

$$a = \frac{1}{2} l - a_0 = 7,91 - 2,87 = 4,04 \text{ m.}$$

Nun besteht gemäß Formel (118) für das Scheitelgelenk die Gleichung

$$\mathfrak{S} \cdot a = \frac{r \cdot R}{R - r}.$$

Hieraus ermittelt sich der gesuchte Wert

$$r = \frac{R \cdot \mathfrak{S} \cdot a}{R + \mathfrak{S} \cdot a} = \frac{3,0 \cdot 2,5 \cdot 4,04}{3,0 + 2,5 \cdot 4,04} = 2,31 \text{ m.}$$

Für das Kämpfergelenk ergibt sich

$$a = \sqrt{a_0^2 + f^2} = \sqrt{2,87^2 + 2,70^2} = 3,94 \text{ m}$$

und damit

$$r = \frac{3,0 \cdot 2,5 \cdot 3,94}{3,0 + 2,5 \cdot 3,94} = 2,30 \text{ m.}$$

Beispiel 126. Das in Fig. 268 skizzierte Drahtseilbahngehänge für die Beförderung von Rundholzstämmen hat die nachstehenden Gewichte und Schwerpunktabstände von der Oberkante des Trageiles:

1. Wagen: $G = 85$ kg, $x = -11$ cm (darüber gelegen),
2. Gehänge: 60 „ „, $+90$ „ (darunter „ „),
3. Zugseil: 120 „ „, $+45$ „ („ „ „).

Anzugeben ist die Sicherheit, die für stabiles Gleichgewicht vorhanden ist.

Stabilitätsbedingung ist

$$G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3 = \mathfrak{S} \cdot G_1 \cdot x_1,$$

hieraus folgt

$$\mathfrak{S} = \frac{G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3}{G_1 \cdot x_1} = \frac{60 \cdot 90 + 120 \cdot 45}{85 \cdot 11} = 11,6.$$

Werden etwa mehrere Wagengehänge dicht hintereinander auf die Bahn gebracht, so daß das von den einzelnen getragene Zugseilgewicht nur 5 kg beträgt, so wird in dem Fall

$$\mathfrak{S} = \frac{60 \cdot 90 + 5 \cdot 45}{85 \cdot 11} \approx 6.$$

Bei hochliegender Zugseilklemme kann die Sicherheit noch geringer werden. Z. B. gelten folgende Angaben:

1. Wagen: $G = 85$ kg, $x = -13$ cm,
2. Gehänge: 40 „ „, $+65$ „ „,
3. Zugseil: 120 „ „, -28 „ „,
4. Kasten leer: 115 „ „, $+152$ „ „.

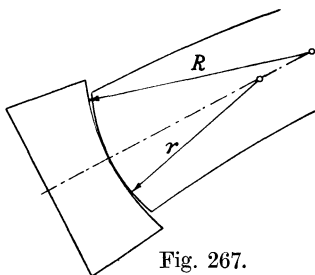


Fig. 267.

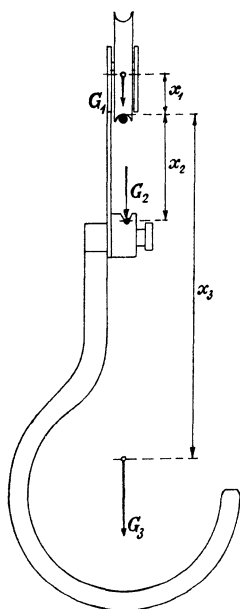


Fig. 268.

Dann ergibt sich

$$\bar{c} = \frac{40 \cdot 65 + 115 \cdot 152}{120 \cdot 28 + 85 \cdot 13} = 4,5,$$

ein freilich immer noch reichlich hoher Wert.

Beispiel 127. Der 5 hl fassende Wagenkasten einer Drahtseilbahn nach Fig. 269 wiegt $G_1 = 115$ kg, er sei in der Schwerachse des leeren Kastens um $x_1 = 0,36$ m unterhalb des oberen Randes aufgehängt, die Schwerachse des Laderaumes liege $x_2 = 0,31$ m unterhalb des Randes. Wieviel Schüttgut kann eingeladen werden, wenn der Wagenkasten nach Umschlagen der Klaue noch von selbst umkippen soll?

Es hängt das wenig von der Art der Ladung ab. Ist z. B. der Kasten mit Kohle vollgeladen, deren Einheitsgewicht $\gamma \approx 0,80$ t/m³ beträgt, so hat der Gesamtschwerpunkt vom oberen Rande den Abstand

$$x_0 = \frac{0,5 \cdot 0,60 \cdot 0,31 + 0,115 \cdot 0,36}{0,5 \cdot 0,80 + 0,115} = \frac{0,124 + 0,041}{0,515} = 0,320 \text{ m}.$$

Bei voller Beladung mit Magnetkies vom Einheitsgewicht $\gamma \approx 4,60$ t/m³, wofür der Wagen allerdings etwas zu leicht gebaut wäre, beträgt der Schwerpunktsabstand

$$x'_0 = \frac{0,5 \cdot 4,60 \cdot 0,31 + 0,115 \cdot 0,36}{0,5 \cdot 4,60 + 0,115} = \frac{0,713 + 0,041}{2,415} = 0,313 \text{ m}.$$

Der Unterschied ist also ganz unerheblich.

Die Sicherheit, daß der Wagenkasten bei voller Beladung umkippt, ist, wenn oberhalb der Aufhängungsachse 0,55 des Laderaumes mit dem Schwerpunktsabstand 0,19 cm von der Achse sich befinden und darunter 0,45 des Laderaumes mit dem Schwerpunktsabstand 0,14 cm:

$$\frac{1}{\bar{c}} = \frac{0,55 \cdot 0,19}{0,45 \cdot 0,14} = 1,66.$$

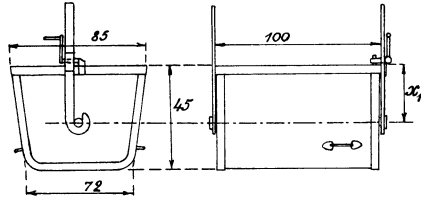


Fig. 269.

Ist z der Teil der Ladung, der fehlen kann, bis gerade unentschiedenes Gleichgewicht eintritt, so gilt in bezug auf die Aufhängungsachse

$$0,45 \cdot G \cdot 0,14 = 0,55 \cdot G \cdot 0,19 - z \cdot G \cdot \left(0,36 - \frac{z}{2}\right).$$

Die Gleichung ergibt

$$z^2 - 0,72 \cdot z + 0,083 = 0,$$

also

$$z = 0,36 \pm 0,22 = 0,14.$$

Nur das untere Vorzeichen liefert einen brauchbaren Wert.

Beispiel 128. Bei einem Wagebalken von $h = 15$ mm Gesamthöhe in der Mitte liege der Schwerpunkt um $h = 1,6$ mm unterhalb der in der Mitte der Höhe befindlichen Schneide. Anzugeben ist die Sicherheit, mit der stabiles Gleichgewicht besteht.

Um zu einer Momentengleichung zu gelangen, hat man den Wagebalken in zwei gleiche Teile zu zerlegen, wovon der obere den Schwerpunkt 12,4 mm von der Aufhängungsschneide entfernt hat, und der untere entsprechend um 15,6 mm. Es ist dann

$$S \cdot \frac{1}{2} G \cdot 12,4 = \frac{1}{2} G \cdot 15,6,$$

also

$$S = \frac{15,6}{12,4} = 1,26.$$

15. Die Standsicherheit.

Liegt ein Träger frei auf zwei Stützen (Fig. 270), dessen Eigengewicht G in der Entfernung b von der einen Stütze angreift und der außerdem mit der Kraft P im Abstände a von der Stütze auf dem auskragenden Teil belastet ist, so lassen sich die Stützendrücke nach den Angaben in Abschnitt 9 leicht berechnen. Man erhält z. B. für den Fall der Fig. 270

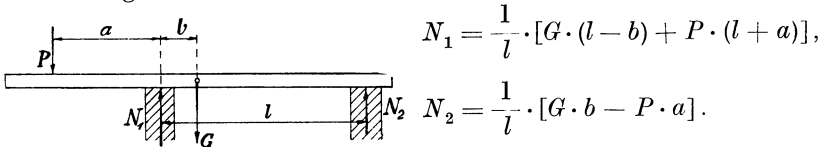


Fig. 270.

$$N_1 = \frac{1}{l} \cdot [G \cdot (l - b) + P \cdot (l + a)],$$

$$N_2 = \frac{1}{l} \cdot [G \cdot b - P \cdot a].$$

Greift P zwischen den beiden Stützen an, so ist a mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen. Es wird dann N_1 kleiner und N_2 größer, und zwar sind beide immer positiv. Im Fall der Zeichnung wird $N_2 = 0$ für $P \cdot a = G \cdot b$, und wenn $P \cdot a$ überwiegt, kippt der Träger nach der Seite von P über, falls er nicht bei N_2 entsprechend verankert wird.

Wird eine gewisse Sicherheit \ominus gegen Kippen verlangt, so muß demnach die Beziehung bestehen

$$S \cdot P \cdot a = G \cdot b. \tag{120 a}$$

Sind mehrere Kräfte P außerhalb von N_1 vorhanden und ebenso mehrere G zwischen N_1 und N_2 , so gilt entsprechend

$$\ominus \cdot \sum (P \cdot a) = \sum (G \cdot b). \tag{120 b}$$

Ist die Anordnung eine derartige, daß schon G außerhalb der Stütze N_1 angreift, so muß unter allen Umständen bei N_2 eine Verankerung angebracht werden, und die Sicherheit \ominus besteht, wenn N_2 auf das \ominus -fache des rechnerischen Wertes erhöht wird.

Mit Hilfe der oben benutzten Gleichgewichtsbedingungen lassen sich nur die Auflagerdrücke eines frei auf zwei Stützen liegenden ebenen Trägers ermitteln. Ist der Träger an einer Auflagerstelle irgendwie eingespannt oder noch durch Längskräfte beansprucht, wie etwa ein Bogenträger mit Zugband, so genügen die drei Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Berechnung von vier Unbekannten. Die Untersuchung solcher statisch unbestimmter Träger enthält Bd. IV.

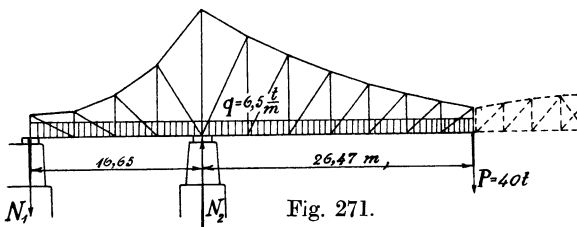


Fig. 271.

Beispiel 129. In Fig. 271 ist das Schema der Hälfte der Peißnitzbrücke bei Halle dargestellt²⁷⁾. Der zwischen die beiden Kragträger eingehängte mittlere Teil hat die Länge 17,06 m, das Eigengewicht und die

größte Verkehrslast ergeben zusammen $p = 4,7$ t/m. Die Stützkräfte auf jeder Seite betragen dann

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4,7 \cdot 17,06 \approx 40 \text{ t.}$$

Zu berechnen sind die beiden Auflagerkräfte N_1 und N_2 des Kragträgers.

²⁷⁾ Ziegler, Z. d. V. d. I. 1901.

Man erhält aus der Figur in bezug auf die Wirkungslinie von N_1

$$N_2 \cdot 16,65 - 6,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (16,65 + 26,47)^2 - 40 \cdot (16,65 + 26,47) = 0,$$

also

$$N_2 = \frac{43,12}{16,65} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 43,12 + 40 \right) = 466,5 \text{ t.}$$

Entsprechend ergibt sich in bezug auf die Wirkungslinie von N_2 , wenn, wie meistens, N_1 als nach oben gerichtet angenommen wird:

$$N_1 \cdot 16,65 + 6,5 \cdot 16,65 + 26,47 \cdot \frac{1}{2} \cdot (26,47 - 16,65) + 40 \cdot 26,47 = 0,$$

also

$$N_1 = -\frac{1376,2 + 1058,8}{16,65} = -146,2 \text{ t.}$$

Der negative Wert von N_1 besagt, daß seine Richtung verkehrt angenommen war. Um die Brücke im Gleichgewicht zu halten, muß am äußeren Ende je eine Last von 146,2 t angehängt werden.

Die Richtigkeit der Rechnung erfolgt aus

$$6,5 \cdot 43,12 + 40 = 466,5 - 146,2 = 320,3.$$

Wenn der dem Brückenende benachbarte Teil des Kragträgers nur durch sein Eigengewicht belastet ist, so daß dort die Verkehrslast $q = 2,8 \text{ t/m}$ wegfällt, so erhöht sich N_1 noch um $\frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 16,65 = 23,2 \text{ t}$. Der Höchstwert ist somit

$$N_1 = 146,2 + 23,2 = 169,5 \text{ t.}$$

Im allgemeinen muß noch eine $\varnothing = 1,5$ fache Sicherheit gegen Kippen bestehen, so daß das Gewicht des anzuhängenden Fundamentblockes mindestens

$$G_1 = 1,5 \cdot 169,5 \approx 255 \text{ t}$$

betragen muß.

Beispiel 130. Ein Drahtseilbahnwagen vom Radstand $l = 40 \text{ cm}$ und dem Eigengewicht $G = 85 \text{ kg}$, das um die Strecke $a = 0,5 \text{ cm}$ über der Mittelachse des Wagens angreift, ist belastet durch das Gewicht des Gehänges, Wagenkastens und der Ladung $Q = 40 + 115 + (400) \text{ kg}$, das $b = 5,5 \text{ cm}$ unterhalb der Wagenmittelachse angreift, und durch das Gewicht des Zugseiles $P = 120 \text{ kg}$, das um $h = 13 \text{ cm}$ oberhalb der Wagenmittelachse wirkt (Fig. 272). Anzugeben ist die Zugseilkraft S , jeder Achsdruck N_1 und N_2 für verschiedene Neigungen α der Fahrbahn und die Standsicherheit \varnothing des Wagens.

Man zerlegt die drei Lasten Q, G, P in ihre Seitenkräfte senkrecht und parallel zur Fahrbahn und erhält sogleich

$$S = (Q + G + P) \cdot \sin \alpha,$$

ferner

$$N_1 + N_2 = (Q + G + P) \cdot \cos \alpha.$$

In bezug auf den Schnittpunkt der Wirkungslinien von N_2 und S erhält man

$$-N_1 \cdot l + (Q + G + P) \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} + [Q \cdot (h + b) + G \cdot (h - a) + P \cdot 0] \cdot \sin \alpha = 0$$

und in bezug auf den Schnittpunkt der Wirkungslinien von N_1 und S

$$+N_2 \cdot l - (Q + G + P) \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} + [Q \cdot (h + b) + G \cdot (h - a) + P \cdot 0] \cdot \sin \alpha = 0,$$

also

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot (Q + G + P) \cdot \cos \alpha + \left(Q \frac{h+b}{l} + G \frac{h-a}{l} \right) \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \cdot (Q + G + P) \cdot \cos \alpha - \left(Q \frac{h+b}{l} + G \frac{h-a}{l} \right) \cdot \sin \alpha.$$

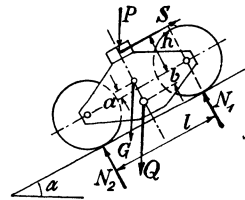


Fig. 272.

Die Sicherheit dafür, daß sich das Rad 2 nicht abhebt, findet man, da das erste Glied der Gleichung für N_2 das Andrücken bewirkt und das zweite das Abheben hervorruft, zu

$$\mathcal{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (Q + G + P)}{Q \frac{h+b}{l} + G \frac{h-a}{l}} \cdot \cotg \alpha.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt hieraus für den leeren Wagenkasten

$$S = (40 + 115 + 85 + 120) \cdot \sin \alpha = 360 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot \cos \alpha + \left(155 \cdot \frac{18,5}{40} + 85 \cdot \frac{12,5}{40} \right) \cdot \sin \alpha \\ = 180 \cdot \cos \alpha + 98,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = 180 \cdot \cos \alpha - 98,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$\mathcal{S} = \frac{180}{98,3} \cdot \cotg \alpha = 1,83 \cdot \cotg \alpha$$

und entsprechend für den vollen Wagenkasten

$$S = (360 + 400) \cdot \sin \alpha = 760 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot 760 \cdot \cos \alpha + \left(555 \cdot \frac{18,5}{40} + 85 \cdot \frac{12,5}{40} \right) \cdot \sin \alpha \\ = 380 \cdot \cos \alpha + 283,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = 380 \cdot \cos \alpha - 283,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$\mathcal{S} = \frac{380}{283,3} \cdot \cotg \alpha = 1,34 \cdot \cotg \alpha.$$

Man kann so die nachstehende Zusammenstellung berechnen.

Nun ist zu beachten, daß das Zugseil um eine Strecke $x = 9,5$ cm seitlich am Wagen angreift; und das Wagengehänge wird so gekröpft, daß der Wagen im leeren Zustande um ebensoviel nach der einen Seite geneigt steht, wie im vollen Zustande nach der anderen. Das wird erreicht, wenn Q um $y = 3,2$ cm nach der anderen Seite aus der Mittelachse verschoben ist. Denn es gilt dann

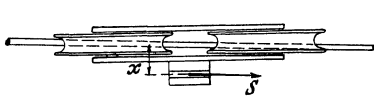


Fig. 273.

$$P \cdot x = 120 \cdot 9,5 = 1140 \text{ cmkg}, \\ \text{bzw. } Q \cdot y = 155 \cdot 3,2 = 496 \text{ ,, ,} \\ \text{bzw. } Q \cdot y = 555 \cdot 3,2 = 1775 \text{ ,, .}$$

Der Unterschied beträgt

$$1140 - 496 = 644 \text{ cmkg} \\ \text{bzw. } 1775 - 1140 = 635 \text{ ,, .}$$

Infolgedessen wirkt der Seilzug S auf eine Schiefstellung des Wagens hin (Fig. 273), und das vordere Wagenrad hat etwa die in Fig. 274 veranschaulichte Stellung auf dem Tragseil. Man erhält aus der Momentengleichung $N' \cdot l = S \cdot x$

$$N' = S \cdot \frac{x}{l} = 0,2375 \cdot S$$

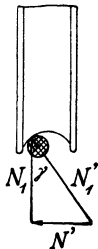


Fig. 274.

als diejenige Kraft, die jedes der beiden Räder nach der Seite drängt, und der Winkel, um den der Auflagerdruck N'_1 bzw. N'_2 seitwärts ausschlägt, wird bestimmt durch $\text{tg } \gamma = \frac{N'}{N}$.

	$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
	$\sin \alpha =$	0	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766
	$\cos \alpha =$	1	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643
	$\cotg \alpha =$	∞	5,671	2,747	1,732	1,192	0,839
leer	$S =$	0	63	123	180	231	276 kg
	$N_1 =$	180	194	203	205	201	101 „
	$N_2 =$	180	160	136	107	75	41 „
	$\mathcal{S} =$	∞	10,38	5,02	3,17	2,18	1,54 „
beladen	$S =$	0	132	260	380	489	582 kg
	$N_1 =$	380	423	454	470	473	461 „
	$N_2 =$	380	325	260	187	109	27 „
	$\mathcal{S} =$	∞	7,60	3,60	2,32	1,60	1,12 „
leer	$N' =$	0	15	29	43	55	66 kg
	$\operatorname{tg} \gamma_1 =$	0	0,077	0,143	0,210	0,273	0,346 „
	$\operatorname{tg} \gamma_2 =$	0	0,094	0,213	0,402	0,734	1,61 „
beladen	$N' =$	0	31	62	90	116	138 kg
	$\operatorname{tg} \gamma_1 =$	0	0,073	0,137	0,192	0,246	0,300 „
	$\operatorname{tg} \gamma_2 =$	0	0,095	0,238	0,482	1,064	5,12 „

Mit Rücksicht auf die seitlichen Verrückungen, die beim plötzlichen Anfahren vorkommen können, läßt man im allgemeinen keinen größeren Ausschlag als $\gamma \approx 20^\circ$ zu, dem $\operatorname{tg} \gamma = 0,364$ entspricht, so daß die gegebene Anordnung bei den obigen Belastungen schon für die Neigung $\alpha \approx 25^\circ$ nicht mehr brauchbar ist.

Ist ein Träger in drei Punkten unterstützt, wie z. B. der Wagebalken einer Dezimalwaage nach Fig. 275, und wird er an beliebiger Stelle durch eine oder mehrere Kräfte Q belastet, so lassen sich die drei Stützkräfte N_1, N_2, N_3 wie folgt bestimmen.

In bezug auf die Verbindungslinie der Stützpunkte 1 und 2 ergibt die Momentengleichung

$$- N_1 \cdot l + Q \cdot b = 0,$$

also

$$N_1 = Q \cdot \frac{b}{l}.$$

In bezug auf den Stützpunkt 3 lautet die Momentengleichung

$$- N_2 \cdot a - N_1 \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \left(\frac{a}{2} + c \right) = 0;$$

wird hierin der Wert von N eingesetzt, so ergibt sich

$$N_2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \left(1 + \frac{2c}{a} - \frac{b}{l} \right).$$

Entsprechend gilt für den Stützpunkt 2

$$- N_3 \cdot a - N_1 \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \left(\frac{a}{2} - c \right) = 0,$$

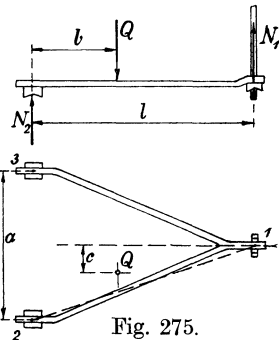


Fig. 275.

also

$$N_3 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{2c}{a} - \frac{b}{l} \right).$$

Daß richtig gerechnet worden ist, wird mit Hilfe der Summengleichung für alle Kräfte festgestellt:

$$N_1 + N_2 + N_3 = Q.$$

Wird die Last Q etwa so verschoben, daß ihr Schwerpunkt in der geraden Verbindungslinie der Stützpunkte 2 und 3 liegt, so ist $b = 0$, und die vordere Zugstange hat die Belastung $N_1 = 0$; greift Q etwa in der Verbindungsgeraden der Stützpunkte 1 und 2 an, so wird ebenso $N_3 = 0$. Liegt der Schwerpunkt der Last Q außerhalb einer der geraden Verbindungslinien der drei Stützpunkte, so besteht kein Gleichgewicht mehr.

Bedingung für das Gleichgewicht ist demnach, daß die Wirkungslinie der Mittelkraft aller Belastungen die durch die drei Stützpunkte bestimmte Ebene innerhalb des von den drei Stützpunkten festgelegten Dreiecks schneidet.

Befinden sich die drei Stützpunkte mit der Wirkungslinie der Kraft Q in derselben Ebene, wie etwa bei dem Wagen einer Kabelbahn (Fig. 276), so führt die obige Darlegung nicht zum Ziel. Denn in bezug auf die Wirkungslinie von N_3 erhält man beispielsweise die Momentengleichung

$$+ N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a - Q \cdot b = 0,$$

worin aber die beiden Unbekannten N_1 und N_2 nicht getrennt werden können, da als weitere Gleichung nur noch die Summengleichung $N_1 + N_2 + N_3 = Q$ zur Verfügung steht. Die Aufgabe ist

wieder statisch unbestimmt und kann nur gelöst werden, wenn die Nachgiebigkeit der über den Radachsen angebrachten Federn berücksichtigt wird.

Man macht die Aufgabe dadurch statisch bestimmt, daß die beiden Räder 1 und 2 auf einem in der lotrechten Ebene frei drehbaren Hebel sitzen, an dessen Zapfen das eine Gehänge der Laufkatze angreift (Fig. 277).

Auch die erste Aufgabe für drei nicht in derselben Ebene wirkende Stützkkräfte ist statisch unbestimmt, sobald der Träger nicht auf allen drei Stützen völlig frei aufliegt, sondern etwa bei einer oder mehreren eingespannt ist, oder wenn zwischen zwei Stützstellen noch irgendeine Spannkraft wirkt.

Beispiel 131. Anzugeben ist der Abstand b , in dem die Last Q am Kabelbahnwagen aufzuhängen ist (Fig. 277), wenn die Abstände a_1 und a_2 der Laufräder festgelegt sind, für den Fall, daß die Auflagerkräfte N gleich groß sein sollen.

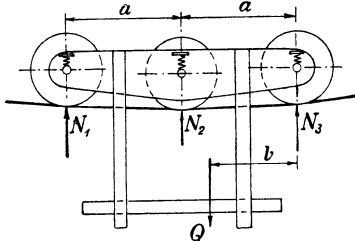


Fig. 276.

Es bestehen die folgenden Beziehungen:

$$N_2 = N_3, \quad N_1 + N_2 + N_3 = 3N = Q,$$

$$(N_2 + N_3) \cdot 0 + Q \cdot b - N_1 \cdot (a_1 + \frac{1}{2}a_2) = 0.$$

Hieraus folgt sofort

$$b = \frac{1}{3} \cdot (a_1 + \frac{1}{2}a_2).$$

Soll noch $a_1 = a_2 = a$ sein, so ist auszuführen $b = \frac{1}{2}a$, d. h. Q ist in der Mitte des Wagens aufzuhängen.

Wirken auf einen in drei Punkten frei gestützten Körper mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen ein, so lassen sich die von ihnen für irgendeinen Stützpunkt oder auch eine Stützlinie — die Verbindungsgerade zweier Stützpunkte — hervorgerufenen Drehmomente scheiden in solche, die auf Kippen des Körpers hinwirken, also bei der Zusammensetzung das Kippmoment liefern, und solche, die auf ein Andrücken des Körpers auf die Stützen hinwirken, also zu einem vereinigt das Stabilitätsmoment ergeben.

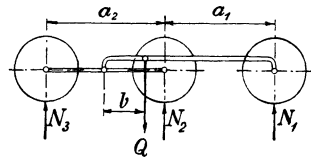


Fig. 277.

Der Körper befindet sich um so sicherer im Gleichgewicht, je mehr das Stabilitätsmoment M_s über das Kippmoment M_k überwiegt. Die Sicherheit der Standfestigkeit wird somit ausgedrückt durch das Verhältnis

$$\mathfrak{S} = \frac{M_s}{M_k} \tag{121}$$

Beispiel 132. Die auf drei Rädern laufende verschiebbare Winde für Koks-entüren gemäß Fig. 278 wird belastet durch das Türgewicht $Q = 170$ kg, dessen Ausladung $a = 80$ cm beträgt, ferner wirken darauf der Kurbeldruck $P = 30$ kg (beim ersten Andrehen) eines Mannes in der Höhe $h = 95 + 35$ cm und das Eigengewicht des Gestelles $G_0 = 200$ kg, das den Schienenabstand teilt in $b_1 = 50$ cm und $b_2 = 30$ cm. Anzugeben ist die erforderliche Größe des Ausgleichgewichtes G für $\mathfrak{S} = 1,5$ fache Kippsicherheit.

Die wagerechte Druckkraft P wird durch eine gleiche P' , die zwischen den Schienen und den Radflanschen wirkt, aufgehoben. Das Kippmoment in bezug auf die Schiene 1 beträgt

$$M_k = Q \cdot a + P \cdot h = 170 \cdot 80 + 30 \cdot 130 = 17\,500 \text{ cmkg},$$

das Stabilitätsmoment ist

$$M_s = (G + G_0) \cdot b_1 = G \cdot 50 + 200 \cdot 50 = 50 \cdot G + 10\,000 \text{ cmkg}.$$

Nach Formel (121) ist also erforderlich $M_s = \mathfrak{S} \cdot M_k$,

$$\text{oder} \quad 50 \cdot G + 10\,000 = 1,5 \cdot 17\,500,$$

woraus folgt

$$G = 325 \text{ kg}.$$

Jetzt können die Raddrücke bestimmt werden:

$$N_1 = \frac{1}{80} \cdot [170 \cdot (80 + 30) + (325 + 200) \cdot 30 + 30 \cdot (95 + 35)],$$

$$\text{mithin} \quad N_1 = 479 \text{ kg},$$

der sich auf zwei Räder verteilt, ferner

$$N_2 = \frac{1}{80} \cdot [-170 \cdot (80 - 50) + (325 + 200) \cdot 50 - 30 \cdot (95 + 35)],$$

mithin

$$N_2 = 216 \text{ kg}.$$

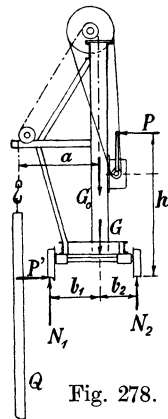


Fig. 278.

Für den Fall, daß das Windengerüst leer verschoben wird, verschwinden Q und P , und damit wird

$$N_1 = \frac{30}{80} \cdot (325 + 200) = 197 \text{ kg,}$$

$$N_2 = \frac{50}{80} \cdot (325 + 200) = 328 \text{ kg.}$$

Beispiel 133. Bei dem Hammerdrehkran nach Fig. 279 ist gegeben ²³⁾:

die Belastung der Laufkatze $Q = 150 \text{ t}$,

das Eigengewicht derselben $G_0 = 6 \text{ t}$,

das Eigengewicht des drehbaren Hammers $G_1 = 300 \text{ t}$,

das Eigengewicht des feststehenden Gerüsts $G_2 = 160 \text{ t}$,

der Winddruck auf den drehbaren Teil bei vollbelastetem Kran mit $q = 30 \text{ kg/m}^2$ zu $W_1 = 1,5 \text{ t}$,

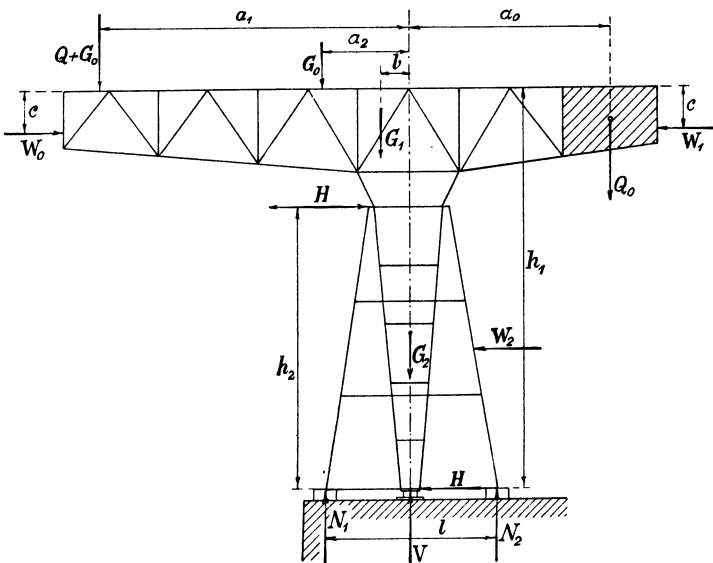


Fig. 279.

der Winddruck auf den drehbaren Teil bei leerem Kran mit $q = 200 \text{ kg/m}^2$ zu $W_0 = 12 \text{ t}$,

der größte Winddruck auf den feststehenden Teil $W_2 = 5 \text{ t}$, in der Höhe $\frac{1}{2} h$ angreifend,

die größte Ausladung der Last $a_1 = 27 \text{ m}$,

die kleinste Ausladung der leeren Laufkatze $a_2 = 7,5 \text{ m}$,

der Abstand des Eigengewichtes G_1 von der Drehachse $b = 2,5 \text{ m}$,

die gesamte Kranhöhe $h_1 = 34,4 \text{ m}$,

der Abstand des oberen Druckringes vom unteren Spurlager $h_2 = 24,4 \text{ m}$,

der Fußabstand des quadratischen Mantelgerüsts $l = 15 \text{ m}$,

der Abstand der Mittelkraft des Winddruckes von der oberen Laufschiene $c = 8 \text{ m}$,

die Ausladung des Gegengewichtes $a_0 = 17,5 \text{ m}$.

Zu berechnen ist die Größe des erforderlichen Gegengewichtes sowie die der Auflagerkräfte V , H , N .

²³⁾ André, Die Statik der Schwerlastkrane. 1919.

Bei vollbelastetem Ausleger gilt in bezug auf das untere Lager des Hammers die Momentengleichung

$$+H \cdot h = + (Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c)$$

und entsprechend bei leerem Kran

$$H \cdot h = + G_1 \cdot a_2 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 - W_0 \cdot (h_1 - c).$$

Der Eisenbau wird am besten ausgenutzt, wenn in beiden Fällen die absoluten Zahlenwerte von H einander gleich werden. Aus

$$\begin{aligned} (Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c) \\ = -G_1 \cdot a_2 - G_2 \cdot b + Q_0 \cdot a_0 + W_0 \cdot (h_1 - c) \end{aligned}$$

folgt dann

$$Q_0 = \frac{1}{2 a_0} \cdot [Q \cdot a_1 + G_1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 G_2 \cdot b - (W_0 - W_1) \cdot (h_1 - c)]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$Q_0 = \frac{1}{2 \cdot 17,5} \cdot (150 \cdot 27 + 6 \cdot 19,5 + 2 \cdot 300 \cdot 2,5 - 10,5 \cdot 26,4) = 154 \text{ t.}$$

Fällt in beiden Fällen der Winddruck weg, so verschwindet das letzte Glied der Klammer und man erhält dafür

$$Q_0 = 162 \text{ t.}$$

Wird der Mittelwert $Q_0 = 158 \text{ t}$ ausgeführt, so ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{h} \cdot [(Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c)] \\ &= \frac{1}{24,4} \cdot [-6 \cdot 7,5 - 300 \cdot 2,5 + 158 \cdot 17,5 + 12 \cdot 26,4] \approx 93,8 \text{ t.} \end{aligned}$$

Die lotrechte Spurlagerbelastung wird im ersten Fall

$$V = Q + G_1 + G_2 + Q_0 = 614 \text{ t}$$

und bei leerem Kran

$$V = G_1 + G_2 + Q_0 = 464 \text{ t.}$$

Es ist noch zu ermitteln, bis zu welchem Abstand a die Höchstlast des Kranes $Q_{\max} = 200 \text{ t}$ vorfahren darf, ohne daß der größte Wert von H überschritten wird. Aus der ersten Momentengleichung bestimmt sich

$$a = \frac{1}{206} \cdot (93,8 \cdot 24,4 - 300 \cdot 2,5 + 158 \cdot 17,5 - 1,5 \cdot 26,4) \approx 20,7 \text{ m.}$$

Für das feststehende Mantelgerüst des Kranes ergibt sich in bezug auf die Angriffsstelle der Auflagerkraft N_2 (bei leerem Kran und starkem Wind) die Momentengleichung

$$N_1 \cdot l = W_2 \cdot \frac{h}{2} + G_3 \cdot \frac{l}{2} + H \cdot h,$$

also mit den vorstehenden Zahlenwerten

$$N_1 = \frac{1}{15} \cdot (+5 \cdot 12,2 + 160 \cdot 7,5 + 93,8 \cdot 24,4) \approx 236,5 \text{ t}$$

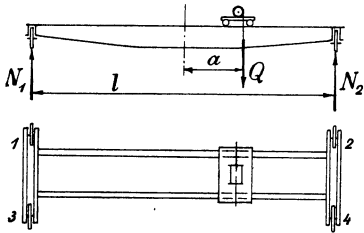
und in bezug auf die Angriffsstelle von N_1 unter sonst gleichen Umständen

$$N_2 = \frac{1}{15} \cdot (+5 \cdot 12,2 - 160 \cdot 7,5 + 93,8 \cdot 24,4) \approx -76,5 \text{ t,}$$

d. h. das Fundament, das zur völligen Sicherheit mindestens $1,5 \cdot 76,5 \approx 115 \text{ t}$ wiegen muß, ist an dem Fuß des Mantelgerüsts gut zu verankern. Beide Auflagerkräfte verteilen sich übrigens auf je zwei Stützpunkte.

Steht der Hammerausleger auf einer Diagonale des Fußpunktquadrates, so ist $l' = l \cdot \sqrt{2}$, also $N_1 = N_1 \cdot \sqrt{2} \approx 334,5$ t als Höchstbelastung eines Stützpunktes.

Ist der Körper in vier Punkten unterstützt, von denen nur immer je zwei in derselben Geraden liegen, wie etwa ein Laufkran nach Fig. 280, so wird gewöhnlich die folgende Überlegung gemacht:



Beindet sich die Last Q genau in der Mitte, so verteilt sie sich gleichmäßig auf die vier Stützen, so daß man ansetzen kann

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}Q.$$

Fig. 280. Verschiebt sie sich in der Längsrichtung des Kranes, so werden die Räder auf

der Seite, wohin die Last geht, entsprechend stärker belastet, das gleiche gilt für die Verschiebung in der Querrichtung. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} N_1 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l + a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c - b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{c}\right), \\ N_2 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l - a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c - b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{c}\right), \\ N_3 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l + a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c + b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{c}\right), \\ N_4 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l - a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c + b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{c}\right). \end{aligned} \quad (122)$$

Für $a = 0$ und $b = 0$ gehen diese Gleichungen in die obige über.

Erfolgt die Unterstützung etwa durch längere gleich ausgeführte Säulen, so liefert eine genauere Rechnung, die die elastische Nachgiebigkeit der Stützen berücksichtigt²⁹⁾ (vergl. Bd. IV),

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 - \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c}\right), & N_2 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 + \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c}\right), \\ N_3 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 - \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c}\right), & N_4 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 + \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c}\right). \end{aligned} \quad (123)$$

Beispiel 134. Ein Laufkran für die Belastung $Q = 15$ t von der Spannweite $l = 12$ m und dem Radstand $c = 3,2$ m hat eine Laufkatze vom Gewicht $G_1 = 3$ t, während das Gewicht der Laufbrücke etwa $G_2 \approx Q$ beträgt. Anzugeben sind die Radbelastungen für die Laststellung $a = 4,5$ m und $b = 0,5$ m.

Man erhält nach den Gleichungen (122)

$$\begin{aligned} N_1 &= (15 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4,5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{0,5}{3,2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 15 \\ &= 18 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1,1}{3,2} + 3,75 = 9,17 \text{ t}, \end{aligned}$$

²⁹⁾ Lewe, Beton u. Eisen 1914.

$$N_2 = (15 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4,5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{0,5}{3,2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1,1}{3,2} + 3,75 = 4,52 \text{ t},$$

$$N_3 = (15 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4,5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{0,5}{3,2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2,1}{3,2} + 3,75 = 14,09 \text{ t},$$

$$N_4 = (15 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4,5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{0,5}{3,2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2,1}{3,2} + 3,75 = 5,22 \text{ t}.$$

Die unerläßliche Proberechnung lautet: $15 + 3 + 15 = 33,00$.

Die Verteilung auf die Stützen vereinfacht sich, wenn der Lastausschlag b nach der Querrichtung verschwindet, so daß der Laufkran als ein Balken auf zwei Stützen berechnet werden kann.

Beispiel 135. Anzugeben sind die Raddrücke N_1 und N_2 und die Kipp-sicherheit für den in Fig. 281 dargestellten drehbaren Ausleger eines Portalkranes, und zwar für die Vollbelastung und für den unbelasteten Zustand.

Die Gewichte sind abgewogen und ihre Schwerpunktsabstände von der Mitte des Drehzapfens berechnet³⁰⁾ gemäß folgender Zusammenstellung:

Nr.	Gegenstand	Gewicht G kg	Abstand a cm	Drehmoment in bezug auf die Mitte mt
1	Größte Last	5000	+840	+42,000
2	Kranführer	75	+100	+ 0,075
3	Seil, Kugel, Haken	300	+840	+ 2,520
4	Kranausleger	2000	+500	+10,000
5	Motoranlasser	550	+130	+ 0,715
6	4 Tragräder mit Achsen und Lagern	1110	0	0
7	Führerhaus	4125	-100	- 4,125
8	Drehgestell	2820	-115	- 3,243
9	Winde mit Motor und Zubehör	8870	-190	-16,853
10	Gegengewicht	3150	-330	-10,395
	voll, Summe 1 ÷ 10 : 28 000 kg			+20,694 mt
	leer, Summe 3 ÷ 10 : 22 925 „			-21,381 „

(Ausgeführt wurde das Gegengewicht 1,5 t größer.)

Der Abstand des Gesamt-schwerpunktes beträgt bei Voll-belastung

$$x_0 = + \frac{28,694}{28,0} = + 0,739 \text{ m}$$

und im leeren Zustand

$$x'_0 = - \frac{21,381}{22,925} = - 0,933 \text{ m}.$$

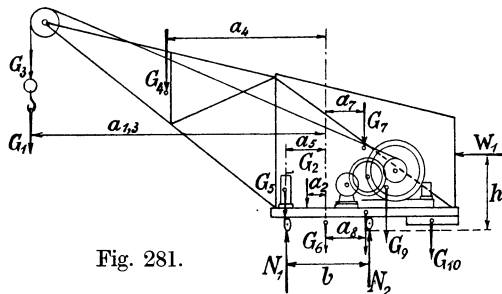


Fig. 281.

³⁰⁾ Koll, D. p. J. 1907.

Hinzuzurechnen ist noch das Moment des Winddruckes, der auf die Fläche des Führerhauses $F = 4,5 \cdot 3,3 = 14,85 \text{ m}^2$ mit $p = 50 \text{ kg/m}^2$ bei voller Belastung und 200 kg/m^2 bei leerem Kran wirkt, und zwar in $h = 2,78 \text{ m}$ über den Auflagerstellen der Räder. Es ist hiernach bei vollbelastetem Kran:

$$M_w = 14,85 \cdot 0,050 \cdot 2,78 = 2,065 \text{ mt}$$

und bei leerem Kran:

$$M'_w = 14,85 \cdot 0,200 \cdot 2,78 = 8,260 \text{ mt},$$

das in beiden Fällen zu dem Gewichtsmoment zu addieren ist.

Damit wird mit dem Abstand der Gesamtbelastung $\frac{1}{2} b \pm x_0$ bei vollem Kran:

$$N_1 = \frac{28,00 \cdot 2,039 + 2,065}{2,60} = 22,74 \text{ t}$$

$$N_2 = \frac{28,00 \cdot 0,561 \mp 2,065}{2,60} = 0,524 \text{ bzw. } 6,83 \text{ t}$$

je nach der Windrichtung,

und bei leerem Kran:

$$N_1 = \frac{22,925 \cdot 0,367 \mp 8,260}{2,60} = 0,058 \text{ t bzw. } 6,41 \text{ t}$$

$$N_2 = \frac{22,925 \cdot 2,233 + 8,260}{2,60} = 22,86 \text{ t}.$$

Jede Belastung verteilt sich auf zwei Räder von $0,50 \text{ m}$ Durchmesser.

Die Kippsicherheit wird erhalten, indem man die Drehmomente der innerhalb der Räder angreifenden Kräfte dividiert durch die Momente der außerhalb der Räder angreifenden Kräfte, also bei leerem Kran

$$\varrho' = \frac{\sum_3^8 M + \sum_3^8 G \cdot \frac{1}{2} b}{\sum_9^{10} M - \sum_9^{10} G \cdot \frac{1}{2} b + M'_w} = \frac{5,867 + 14,180}{27,248 - 15,630 + 8,260} = 1,009,$$

ebenso ist für den vollen Kran

$$\varrho = \frac{35,406 + 20,670 \cdot 1,30}{54,52 - 7,30 \cdot 1,30 + 2,065} = 1,535.$$

Da die mittlere Drehsäule bei etwa noch weiter steigendem Winddruck das Kippen verhindert, so liegt kein Grund zu einer etwaigen Vergrößerung des Gegengewichtes vor.

Beispiel 135. Der Drehkran des Beispiels 134 befindet sich auf einem Portal (Fig. 282) vom Gewicht $Q = 17 \text{ t}$; er übt darauf bei voller Belastung und Winddruck von hinten die Raddrücke $N_1 = 22,74$ und $N_2 = 0,524 \text{ t}$ durch je zwei Räder aus. Anzugeben ist der Verlauf der Raddrücke N_A und N_B des Portals, wenn der Drehkran sich um 90° dreht und der Wind die Drehung mitmacht. Die in Frage kommenden Abmessungen sind: $a = 5,60 \text{ m}$, $b = 2,60 \text{ m}$, $c = 2,00 \text{ m}$, $d = 9,25 \text{ m}$.

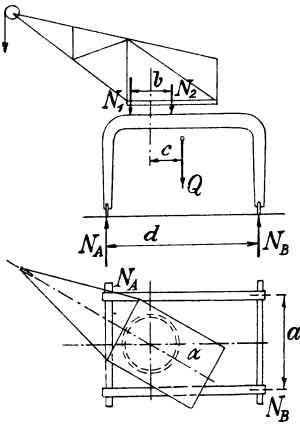


Fig. 282.

Mit den Formeln (122) erhält man

$$N = \frac{1}{d} \cdot \left(N_1 \cdot \frac{d}{2} \pm c \pm \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha \right) + N_2 \cdot \left(\frac{d}{2} \pm c \mp \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha \right) \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \right) + \frac{Q}{4},$$

worin die oberen Vorzeichen N_A , die unteren N_B ergeben. Werden $\frac{1}{d}$ bzw. $\frac{1}{a}$ in die Klammerausdrücke hineingebracht und wird darauf ausmultipliziert, so ergibt sich

$$N = \frac{Q}{4} + \frac{N_1 + N_2}{4} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d}\right) \pm \frac{N_1 - N_2}{4} \cdot \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha$$

$$\pm \frac{N_1 + N_2}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d}\right) \cdot \sin \alpha + \frac{N_1 - N_2}{8} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sin 2\alpha,$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt hieraus

$$N_A = 4,250 + 8,440 + 1,560 \cdot \cos \alpha + 3,870 \cdot \sin \alpha + 0,362 \cdot \sin 2\alpha,$$

$$N_B = 4,250 + 3,296 - 1,561 \cdot \cos \alpha - 1,530 \cdot \sin \alpha - 0,362 \cdot \sin 2\alpha.$$

In Fig. 283 sind die Einzelbeträge der beiden Summen ihrem Verlauf nach dargestellt, aber ohne den unveränderlichen Betrag $\frac{1}{4} Q$. Ihre Summierung zu N_A bzw. N_B ist dann in Fig. 284 gegeben, beide Figuren im Kräftemaßstab

$$1 \text{ t} = 2,5 \text{ mm}.$$

Um die Änderung der N deutlicher zu machen, sind beide Kurvenzüge noch einmal im vierfachen Maßstab aufgetragen, N_A abzüglich 10 t.

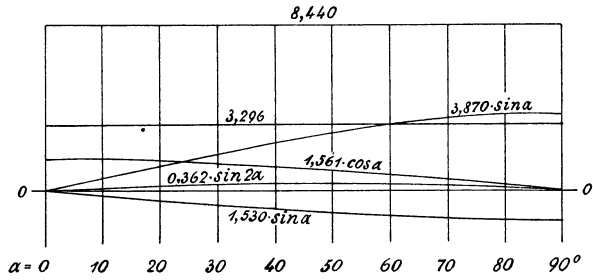


Fig. 283.

Um mit Sicherheit entscheiden zu können, bei welchem Winkel α der größte Wert von N_A auftritt, wird die Differentialkurve $\frac{dN_A}{d\alpha}$ gezeichnet. Man erhält sie am einfachsten, indem die ursprüngliche

Kurve der N_A mit Hilfe einer Durchzeichnung aus Pauspapier auf derselben wagerechten Achse um einen beliebigen kleinen Betrag u verschoben wird (Fig. 284), worauf die senkrechten Unterschiede beider Kurven von der wagerechten Achse aus aufgetragen werden, und zwar um die Strecke $\frac{1}{2} u$ zurückverschoben. Das Verfahren führt wesentlich schneller zum Ziel, als etwa die direkte Berechnung der Differentialfunktion³¹⁾.

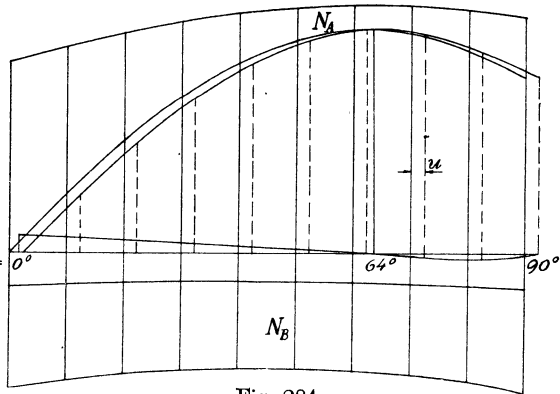


Fig. 284.

Für den Beweis der Richtigkeit wird die ursprüngliche Kurve geschrieben: $N_A = f(\alpha)$, während die um u verschobene lautet: $N'_A = f(\alpha + u)$. Die Differenzkurve hat demnach die Gleichung

$$N'_A - N_A = f(\alpha + u) - f(\alpha).$$

³¹⁾ Slaby, Z. d. V. d. I. 1913; eine allerdings auch umständlichere Verbesserung gibt Röver, Z. d. V. d. I. 1914.

Nun ist für kleine Werte der Verschiebung $u \approx d\alpha$, also der Grenzwert

$$\lim_{u=0} \frac{f(\alpha + u) - f(\alpha)}{u} = \frac{dN_A}{d\alpha}.$$

An der Stelle, wo die Differentialkurve die Achse schneidet, hat N_A seinen größten Wert. Man entnimmt der Zeichnung $\alpha \approx 64^\circ$ und

$$\begin{aligned} N_{A\max} &\approx 12,92 + 4,25 = 17,17 \text{ t}, \\ N_{A\min} &\approx 1,50 + 4,25 = 5,75 \text{ t}. \end{aligned}$$

Benutzt man die hier sicherlich besser zutreffenden Formeln (123), so wird

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q}{4} + \frac{N_1}{4} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d} \pm \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha \pm \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha \right) \\ &+ \frac{N_2}{4} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d} \mp \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha \mp \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

und nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte

$$\begin{aligned} N_A &= 4,250 + 8,332 + 1,560 \cdot \cos \alpha + 2,568 \cdot \sin \alpha, \\ N_B &= 4,250 + 3,301 - 1,560 \cdot \cos \alpha - 2,568 \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Der Winkel, der den größten Wert von N_A und zugleich den kleinsten von N_B liefert, läßt sich hieraus mit Leichtigkeit rechnerisch finden, indem man den Differentialquotienten $\frac{dN}{d\alpha}$ gleich Null setzt, also gemäß den Formeln (104) und (105) schreibt:

$$-1,560 \cdot \sin \alpha + 2,568 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,568}{1,560} = 1,645,$$

mithin

$$\alpha = 58^\circ 42'.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} N_{A\max} &= 4,250 + 8,332 + 1,560 \cdot 0,5194 + 2,568 \cdot 0,8544 \approx 15,59 \text{ t}, \\ N_{B\min} &= 4,250 + 3,301 - 0,810 - 2,194 \approx 4,55 \text{ t}. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß die Rechnung mit den Formeln (123) wesentlich bequemer ist als die gebräuchlichere mit den Formeln (122), die sich freilich für $c = 0$ auch vereinfacht³²⁾.

Die statische Unbestimmtheit steigt, wenn die Anzahl der Stützpunkte sich vergrößert. Bei 5 Stützpunkten sind die Ergebnisse einer der obigen (Formeln 122) entsprechenden Näherungsrechnung schon so unsicher, daß vor ihrer Anwendung gewarnt werden muß.

Wird der hinreichend starre Körper von einer ebenen, ebenfalls starren Fläche unterstützt, so verteilt sich der Stützdruck gleichmäßig über die ganze Stützfläche, wenn alle anderen auf den Körper einwirkenden Kräfte eine Mittelkraft ergeben, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt der Stützfläche geht.

Schneidet die Wirkungslinie dieser Mittelkraft die Stützfläche in einem anderen Punkt C (Fig. 285), so kann man sie nach dem Schwerpunkt S verschieben, muß aber noch ein Drehmoment von der Größe Kraft mal Verschiebungsweg hinzufügen. Das letztere wirkt nun

³²⁾ Richter, Z. d. V. d. I. 1909.

dahin, daß der Körper sich auf der Seite der Kippkante AB mit einem größeren Flächendruck anlegt und auf der entgegengesetzten mit einem geringeren. Der Flächendruck wird im Eckpunkt B der Fig. 285 am größten. Die genaue Verteilung dieses Flächendruckes kann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht angegeben werden.

Rückt der Kraftangriffspunkt C vom Schwerpunkt aus bis auf die Kippkante AB , so ist klar, daß die bisherige Stützfläche, auf der sich die Belastung gleichförmig verteilte, jetzt keine Belastung mehr trägt; diese wird ausschließlich von der Kante selbst getragen, wenn sie und die stützende Fläche genügend widerstandsfähig sind. Der Körper befindet sich in dem Fall gerade noch im unsicheren Gleichgewicht, er kippt um, sobald C sich noch weiter über AB hinaus vom Schwerpunkt S entfernt.

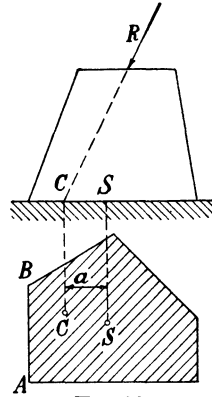


Fig. 285.

Die rechnerische Behandlung wird in der Weise vorgenommen, daß die Momente aller Kräfte, die auf Kippen hinwirken, als Kippmomente in bezug auf die Kippkante eingeführt werden, und die anderen als Stabilitätsmomente in bezug auf dieselbe Kante.

Die Kippkante ist die äußerste Begrenzungsgerade der Stützfläche, die in der Richtung SC erreicht wird (Fig. 285). Sie kann beliebig unterbrochen sein (Fig. 286).

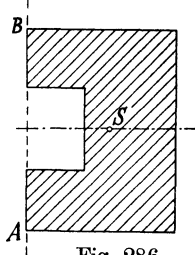


Fig. 286.

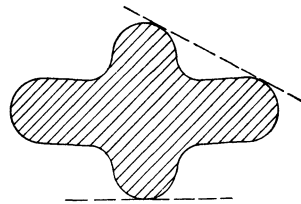


Fig. 287.

Wenn die Stützfläche keine geradlinige Begrenzung hat, so wird die Kippkante von der gemeinsamen Tangente der in Richtung SC gelegenen äußersten Punkte der Fläche gebildet (Fig. 287) oder auch bei ausbauchender Wölbung der betreffenden Flächenbegrenzung von der senkrecht zur Linie SC stehenden Tangente.

Beispiel 137. Für die in Fig. 288 dargestellte Mauer von 20 m Länge ist die Stabilitätsberechnung gegen Wind durchzuführen.

Der größte vorkommende Winddruck sei $p = 0,120 \text{ t/m}^2$ (neuerdings genügt $p = 0,10 \text{ t/m}^2$, vergl. Beispiel 21); das Kippmoment ist dann

$$M_k = p \cdot F \cdot \frac{1}{2} h = 0,120 \cdot 20 \cdot 3,5 \cdot 1,75 = 14,7 \text{ mt.}$$

Das Stabilitätsmoment ist, wenn das Gewicht des Mauerwerkes zu $\gamma = 1,80 \text{ t/m}^3$ eingesetzt wird:

$$M_s = G_1 \cdot a_1 = (2,5 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,51) \cdot 20 \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,51 = 13,4 \text{ mt.}$$

Die Mauer ist also, da $M_k > M_s$ ist, nicht stabil; sie werde

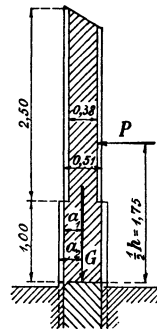


Fig. 288.

durch 4 Pfeiler von je 1,02 m Länge und mit Vorlagen von $\frac{1}{2}$ Stein = 13 cm verstärkt, die demnach in 4,75 m Abstand voneinander stehen.

Dann wird das Stabilitätsmoment

$$M_s = G_2 \cdot a_2 = (2,5 \cdot 0,51 + 1 \cdot 0,64) \cdot 4 \cdot 1,02 \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,64 \\ + (2,5 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,51) \cdot (20 - 4 \cdot 1,02) \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,64 = 17,89 \text{ mt.}$$

Die Sicherheit ist damit

$$\varepsilon = \frac{17,89}{14,70} \approx 1,22,$$

der Winddruck kann somit auf $120 \cdot 1,22 = 146 \text{ kg/m}^2$ ansteigen.

Beispiel 138. Ein Drehkran für die Höchstbelastung $Q = 3000 \text{ kg}$ habe die Ausladung $a = 4,0 \text{ m}$, das Gewicht der drehbaren Teile sei $G = 2800 \text{ kg}$, das im Abstand $b = 1,0 \text{ m}$ von der Drehachse angreift, das der feststehenden Teile $G_0 = 600 \text{ kg}$. Das Betonfundament ($\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$) habe eine kreisförmige Grundfläche (Fig. 289), sein Durchmesser d ist unter Annahme einer $\varepsilon = 2,5$ fachen Sicherheit gegen Kippen zu bestimmen.

Man kann im allgemeinen annehmen, daß b ein wenig kleiner ist als der Halbmesser $\frac{1}{2}d$. Dann ist anzusetzen in bezug auf die Kippkante A :

$$\varepsilon \cdot Q \cdot (a - \frac{1}{2}d) = G \cdot (\frac{1}{2}d - b) + (G_0 + Q_0) \cdot \frac{1}{2}d.$$

Nun ist $Q_0 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot \gamma$, und damit ergibt sich

$$\frac{\pi}{8} \cdot d^2 \cdot h \cdot \gamma + (G + G_0 + \varepsilon \cdot Q) \cdot \frac{1}{2}d = G \cdot b + \varepsilon \cdot Q \cdot a$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\frac{\pi}{8} \cdot 2,2 \cdot 1,8 \cdot d^3 + (2,8 + 0,6 + 2,5 \cdot 3,0) \cdot \frac{1}{2}d \\ = 2,8 \cdot 1,0 + 2,5 \cdot 3,0 \cdot 4,0, \\ 1,555 \cdot d^3 + 5,45d = 32,8.$$

Die Gleichungen dritten Grades werden am einfachsten durch Probieren gelöst:

- Annahme 1: $d = 2,0 \text{ m}$: $12,44 + 10,90 = 23,34$, zu klein,
 „ 2: $d = 2,4 \text{ m}$: $21,50 + 13,08 = 34,58$, zu groß,
 „ 3: $d = 2,35 \text{ m}$: $20,20 + 12,82 = 33,02$, genau genug.

Bei größeren Lasten oder Ausladungen muß das Fundament quadratische Grundfläche erhalten, um das Gewicht bei nicht zu großer Ausdehnung nach Möglichkeit zu vergrößern.

16. Das ausgespannte Seil.

Die Gleichgewichtsbedingungen gelten ganz allgemein, also nicht nur für starre, sondern auch für nachgiebige Körper, wie z. B. auch Seile, Gurte und dgl.

Wenn ein Seil nur geringen Durchhang f hat, so ist nach Formel (2) die Seillänge L nur sehr wenig von der Sehnenlänge verschieden, und man kann die Belastung $q \text{ kg/m}$ des Seiles durch das Eigengewicht,

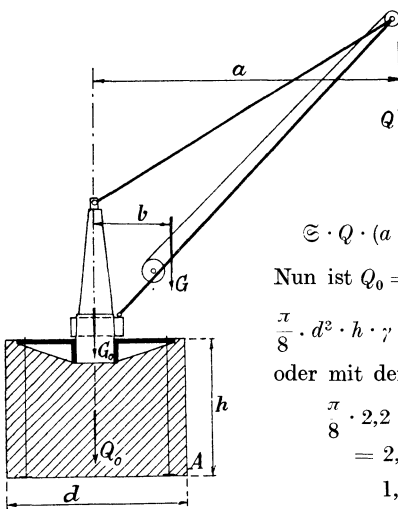


Fig. 289.

Schneelast usw. genau genug ermitteln aus $q = \frac{Q}{l}$ anstatt $\frac{Q}{L}$, wenn Q das Gesamtgewicht des Seiles zwischen den Stützpunkten A und B (Fig. 290) angibt.

Man bestimmt die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen für das ganze Seil. Sie lauten für die lotrechten Kräfte:

$$V_1 + V_2 = q \cdot l,$$

wagerechten Kräfte:

$$H = H,$$

Drehmomente in bezug auf Punkt B :

$$\begin{aligned} -V_1 \cdot a + H \cdot h \\ + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} a = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l + H \cdot \frac{h}{a} \\ V_2 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l - H \cdot \frac{h}{a} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Um nun den Durchhang f zu ermitteln, werden die Gleichgewichtsbedingungen für die Seilhälfte BC niedergeschrieben. Es gilt für die lotrechten Kräfte: $+V + V_2 = q \cdot \frac{1}{2} l$,
wagerechten Kräfte: $H = H$,

(d. h. die wagerechte Seitenkraft der Seilspannung ist überall dieselbe).

Drehmomente in bezug auf Punkt B :

$$-V \cdot \frac{1}{2} a + H \cdot \left(\frac{1}{2} h - f \right) + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} a = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich

$$V = \frac{q \cdot l}{2} - V_2 = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{q \cdot l}{2} + H \cdot \frac{h}{a} = H \cdot \frac{h}{a}$$

Wird dieser Wert in die Momentengleichung eingesetzt, so geht sie über in

$$\frac{h}{2} - f = \frac{H \cdot \frac{h}{a} - \frac{q \cdot l}{4}}{H} \cdot \frac{a}{2} = \frac{h}{2} - \frac{q \cdot l \cdot a}{8H},$$

woraus folgt

$$f = \frac{q \cdot l \cdot a}{8 \cdot H}. \quad (125a)$$

Nun kann die vorstehende Gleichung für V geschrieben werden

$$\frac{V}{H} = \frac{h}{a}, \quad (126)$$

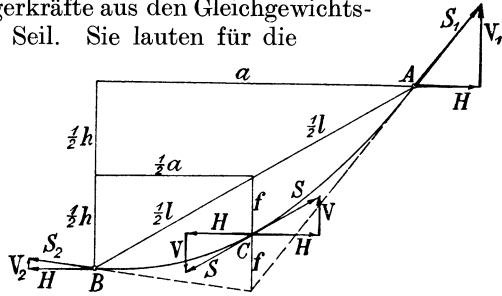


Fig. 290.

und ein Vergleich mit der Fig. 290 lehrt sofort, daß somit S parallel l sein muß; es gilt also auch

$$\frac{H}{S} = \frac{a}{l}. \quad (127)$$

Wenn der hieraus entnommene Wert von H in die Formel (125 a) eingesetzt wird, so wird

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot S}, \quad (125 \text{ b})$$

worin S die Spannkraft in der Mitte des Seiles bedeutet.

Die größte Spannkraft tritt am oberen Befestigungspunkt A auf. Sie wird leicht aus dem Vorhergehenden durch Anwendung von Formel (17) erhalten:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{H^2 + V_1^2} = \sqrt{H^2 + \left(H \cdot \frac{h}{a} + \frac{q \cdot l}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{H^2 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) + H \cdot \frac{h}{a} \cdot q \cdot l + \frac{q^2 \cdot l^2}{4}} \\ &= \sqrt{S^2 \cdot \frac{a^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) + S \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{h}{a} \cdot q \cdot l + 2 \cdot q \cdot S \cdot f} \\ &= S \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{q}{S} \cdot \left(\frac{h}{2} + f\right)} \end{aligned}$$

oder, da q gegenüber S immer sehr klein ist, gemäß Formel (20)

$$S_1 = S + q \cdot \left(\frac{h}{2} + f\right). \quad (128 \text{ a})$$

Entsprechend ist am unteren Befestigungspunkt B

$$S_2 = S - q \cdot \left(\frac{h}{2} - f\right), \quad (128 \text{ b})$$

also

$$S_1 = S_2 + q \cdot h.$$

Das Seil bildet eine Parabel³³⁾, deren Endtangente sich in einem Punkt unter der Mitte schneiden, der noch um die Strecke f unterhalb der Parabel liegt (Fig. 290). Denn für einen beliebigen Punkt D mit dem Abstand x und y von der Auflagerstelle B erhält man aus Fig. 291 die Momentengleichung

$$-V \cdot x + H \cdot y + q \cdot l' \cdot \frac{1}{2}x = 0;$$

dazu tritt die Gleichung für die lotrechten Kräfte

$$V = -V_2 + q \cdot l'.$$

³³⁾ Galilei, Discorsi. 1638.

Hiermit folgt, wenn noch aus der Fig. 291 eingesetzt wird $l' = l \cdot \frac{x}{a}$

$$V_2 \cdot x - \frac{q \cdot l}{2a} \cdot x^2 + H \cdot y = 0$$

oder

$$x^2 - 2x \cdot \frac{V_2 \cdot a}{q \cdot l} = + \frac{2 \cdot H \cdot a}{q \cdot l} \cdot y.$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{V_2 \cdot a}{q \cdot l} \right)^2 \\ & = + 2 \cdot \frac{H}{q} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left(y + \frac{V_2^2 \cdot a}{2 \cdot H \cdot q \cdot l} \right), \end{aligned}$$

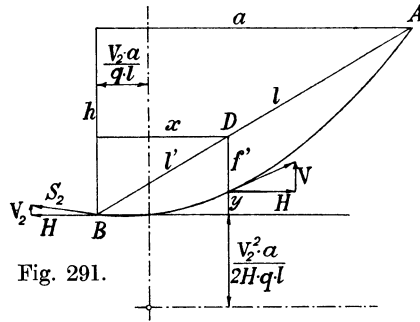


Fig. 291.

und sie entspricht der Normalform der Parabel [Formel (110)], wenn eine Achsenverschiebung um die den x und y beigegebenen Beträge stattfindet (Fig. 291). Der Beiwert von x wird positiv, wenn V_2 nach unten gerichtet ist.

Beispiel 139. Das Tragseil einer Seilschwebbahn ohne Zwischenstützen vom Durchmesser $d = 35$ mm hat den Querschnitt $F = 7,77$ cm² und wiegt $q = 6,7$ kg/m. Es werde angespannt mit $\frac{S}{F} = \sigma = 2400$ kg/cm². Die Strecke habe die wagerecht gemessene Länge $a = 432$ m und das Gefälle $h = 128$ m (Fig. 292). Anzugeben ist der Durchhang f des Seiles, die Größe des Spannunggewichtes S_2 und die genaue Länge L .

Aus den Formeln (125 b) und (128 a) folgt

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot \left[S_1 - q \cdot \left(\frac{h}{2} + f \right) \right]} = \frac{a^2 + h^2}{8 \cdot \left(\frac{S_1}{q} - \frac{h}{2} - f \right)}$$

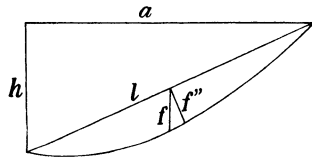


Fig. 292.

Nun ist

$$\frac{S_1}{q} = \frac{F \cdot \sigma}{q} = \frac{7,77 \cdot 2400}{6,7} = 1,16 \cdot 2400 = 2784 \text{ m}$$

die Länge, bei der das frei herabhängende Seil gerade die zugelassene Anspannung erhält. Ihr gegenüber kann der kleine Wert von f im Nenner der obigen Formel vernachlässigt werden, und man erhält so

$$f = \frac{432^2 + 128^2}{8 \cdot (2784 - 64)} = 9,33 \text{ m.}$$

Nun wird

$$S_2 = S_1 - q \cdot h = 6,7 \cdot (2784 - 128) = 17\,800 \text{ kg.}$$

Der Fig. 292 entnimmt man jetzt $f' = f \cdot \frac{a}{l}$ und damit ergibt sich gemäß Formel (2)

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{203\,008} \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{9,33 \cdot 432}{203\,008} \right)^2 - \frac{64}{10} \cdot \left(\frac{9,33 \cdot 432}{203\,008} \right)^4 \right] \\ &= 450,566 \cdot (1 + 0,0530 - 0,0025) = 452,841 \text{ m.} \end{aligned}$$

Beispiel 140. Es soll der Durchhang berechnet werden, der einem annähernd wagerecht ausgespannten eisernen Telegraphendraht von $d = 3$ mm Stärke und Stephan, Technische Mechanik. I.

$l = 100$ m Spannweite zu geben ist, wenn er im Winter bei -15° durch Rauhref belastet nur eine Anspannung von $\sigma = 2000$ kg/cm² erfahren soll, und zwar für den Fall, daß er bei $+15^\circ$ verlegt wird.

Die Belastung durch das Eigengewicht beträgt

$$q_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} \text{ kg/m,}$$

diejenigen durch Rauhref oder geringen Winddruck³⁴⁾

$$q_2 = 0,50 \cdot d + 0,19 \text{ kg/m,}$$

worin beide Male d in cm und das Einheitgewicht γ in kg/dm³ einzusetzen ist.

Ferner ist die Spannkraft $S = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma$.

Mit diesen Werten geht die Gleichung (125b) über in

$$f_0 = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{2} \cdot d + 1,09}{8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma} \cdot l^2 = c \cdot l^2,$$

und man erhält hiermit die Länge des kalten Drahtes, wenn das dritte Glied der Klammer der Formel (2) als verschwindend wegliebt:

$$L_0 = l \cdot \left(1 + \frac{1}{24} \cdot c^2 \cdot l^2 \right).$$

Wenn die Temperatur jetzt um t° steigt, so verlängert sich der Draht auf die Länge L mit einem größeren Durchhang f

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) = l \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{f_1}{l} \right)^2 \right],$$

worin $\alpha = 0,0000120$ die Wärmeausdehnungsziffer des Flußeisens und t der Temperaturunterschied ist. Wird hierin der Wert von L_0 eingesetzt, so folgt mit Vernachlässigung eines verschwindend kleinen Betrages

$$\alpha \cdot t = \frac{1}{24} \cdot c^2 \cdot l^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{f_1^2}{l^2},$$

also

$$f_1 = \frac{1}{8} \cdot l \cdot (24 \cdot \alpha \cdot t + c^2 \cdot l^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist mit den gegebenen Zahlenwerten

$$c = \frac{0,0707 \cdot 0,785 + 0,15 + 0,19}{0,0707 \cdot 2200} = \frac{0,254}{100},$$

und bei dem Temperaturunterschied 30°

$$24 \cdot \alpha \cdot t = 24 \cdot 0,000012 \cdot 30 = 0,0086,$$

mithin

$$f_1 = \frac{100}{8} \cdot (0,0086 + 0,254)^{\frac{1}{2}} = 3,49 \text{ m.}$$

Entsprechend erhält man für die Temperaturunterschiede

$$\begin{array}{cccccc} t & = & 0 & 10 & 20 & 40 & 50^\circ \\ f & = & 3,29 & 3,36 & 3,43 & 3,55 & 3,62 \text{ m.} \end{array}$$

³⁴⁾ Normalien des Verbandes deutscher Elektrotechniker, E. T. Z. 1913, gemessen durch Schmedding, Z. d. B. 1917

Beispiel 141. Ein Treibriemen vom Einheitsgewicht $\gamma = 1,025 \text{ kg/dm}^3$ ist im losen Trum gespannt mit $\sigma_1 = 20 \text{ kg/cm}^2$ und im ziehenden mit $\sigma_2 = 36 \text{ kg/cm}^2$, die freie Länge beträgt $l = 12,5 \text{ m}$. Anzugeben ist der Durchhang beider Trümer.
Aus der Formel (125b) folgt mit

$$q = b \cdot s \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} \text{ kg/m}$$

und

$$S = b \cdot \sigma \cdot \text{kg},$$

wenn die Breite b und die Stärke s beidemal in cm eingesetzt wird:

$$f_1 = \frac{\gamma \cdot l^2}{80 \cdot \sigma_1} = \frac{1,025 \cdot 12,5^2}{80 \cdot 20} = 0,10 \text{ m}$$

und

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0,10 \cdot \frac{20}{36} = 0,056 \text{ m}.$$

Differential- und Integralrechnung II. Es sei zeichnerisch darzustellen die Gleichung

$$y = a^x. \tag{129}$$

Man erhält

$$\begin{array}{ccccccc} \text{für } x = & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \\ y = & 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & \end{array}$$

Die y bilden somit eine geometrische Reihe, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch Multiplikation mit demselben Faktor entsteht, wenn die x nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch Addieren desselben (gegebenenfalls auch negativen) Betrages entsteht. Man trägt hiernach an die y -Achse einen beliebigen Winkel α an, mißt ferner auf der y -Achse die Strecken 1 und a vom Nullpunkt aus ab; durch Ziehen der in Fig. 293 angegebenen Parallelen erhält man dann die gesuchte Kurve.

Hieraus läßt sich leicht eine zweite Exponentialkurve entwickeln, deren Tangente an der Stelle $x = 0$ und $y = 1$ parallel zu den schrägen Hilfslinien im Winkel α verläuft, indem man die Rhomben zeichnet, deren Diagonalen die entsprechenden Abschnitte der y -Achse sind. Je kleiner der Winkel α gewählt wird, desto genauer werden die kleinen Zunahmen dx und dy dargestellt.

Ähnlichen Dreiecken wird dann entnommen

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy \cdot \text{tg } \beta}{y}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{tg } \beta} \tag{130}$$

bzw. mit Anwendung der Kurvengleichung (129)

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{a^x}{\text{tg } \beta}. \tag{131}$$

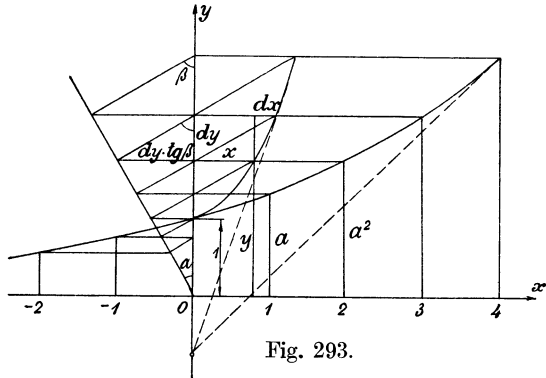


Fig. 293.

Wird in derselben Weise die Exponentialkurve gezeichnet, bei der $\beta = 45^\circ$ ist, so erhält man unter im übrigen gleichen Umständen eine andere Basis e statt a , und es gilt, da $\text{tg } 45^\circ = 1$ ist:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \tag{132}$$

Logarithmiert man die Ausgangsgleichung (129), und zwar in bezug auf die Basis a , so lautet sie

$$x = {}^a \log y, \quad (133)$$

und die gezeichnete Kurve stellt naturgemäß auch diese Gleichung dar.

Aus der Formel (130) in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{y}$$

folgt

$$\frac{d {}^a \log y}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{y} \quad (134)$$

bzw.

$$\frac{d {}^a \log y}{dy} = \frac{1}{y}. \quad (135)$$

Man entnimmt nun der Fig. 293

$$dy_a = dy_e \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

woraus durch Integration folgt

$$y_a = y_e \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Es ist also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_a}{y_e} = \frac{dy_a}{dy_e}, \quad (136)$$

worin die Zeichen a und e die Basis der betreffenden Logarithmen andeuten.

Zwischen den Differentialquotienten zweier Exponentialkurven verschiedener Basis besteht sonach das gleiche Verhältnis wie zwischen den zugehörigen Ordinaten, d. h. die an derselben Stelle y gezogenen Tangenten schneiden sich in demselben Punkt der y -Achse (Fig. 293).

Die Division der beiden Gleichungen (134) und (135) liefert nun

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d {}^a \log y}{d {}^e \log y}$$

oder gemäß Formel (136)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{{}^a \log y}{{}^e \log y}. \quad (137)$$

Wird hierin für y der Sonderwert a eingesetzt, so ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{{}^e \log a}. \quad (138)$$

Man nennt nun ${}^e \log a = \log \operatorname{nat} a$ den natürlichen Logarithmus von a , und zwar ist

$$e = 2,71828 \dots, \quad {}^e \log e = 0,43429 \dots$$

Damit geht die Gleichung (131) über in

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \log \operatorname{nat} a. \quad (139)$$

Umgekehrt kann sogleich geschrieben werden:

$$\text{Gleichung (132):} \quad \int e^x \cdot dx = e^x + C, \quad (140)$$

$$\text{Gleichung (139):} \quad \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\log \operatorname{nat} a} + C. \quad (141)$$

Für $\beta = 45^\circ$ ergibt die Gleichung (130)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y},$$

und die Integration liefert

$$x + C = \int \frac{dy}{y}.$$

Nun ist aber gemäß Gleichung (133) für $\beta = 45^\circ$

$$x = \log \operatorname{nat} y,$$

so daß man erhält³⁵⁾

$$\int \frac{dy}{y} = \log \operatorname{nat} y + C \tag{142}$$

oder umgekehrt

$$d \log \operatorname{nat} y = \frac{dy}{y}. \tag{143}$$

Hiermit ist auch die Lösung der Formel (98e) für den Ausnahmefall $n = -1$ gegeben.

Setzt man jetzt

$$y = a \cdot x + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}},$$

so wird mit Benutzung der Formel (98e)

$$\frac{dy}{dx} = a + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 \cdot x$$

und

$$\frac{dy}{y} = x \cdot \frac{a + (1 + a^2 \cdot x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot a^2 \cdot x}{a \cdot x + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 \cdot x^2}}$$

Es ist also

$$\int \frac{a \cdot dx}{\sqrt{1 + a^2 \cdot x^2}} = \log \operatorname{nat} (a \cdot x + \sqrt{1 + x^2 \cdot a^2}) + C. \tag{144}$$

Ist die Seillänge L wesentlich größer als die gerade Verbindungslinie l der beiden Auflagerpunkte A und B , so ist die bisherige Annahme, die zur Parabel als Seilcurve geführt hat, nicht mehr haltbar. Um die Normalform der Kurvengleichung zu finden, werden nach den bei der Parabel gemachten Erfahrungen die Bezugsachsen von vornherein so gewählt, daß die y -Achse durch den tiefsten Punkt der Kurve geht und die x -Achse um den Betrag h_0 darunter liegt (Fig. 294). An dem Seilelement dL wirken dann im Punkte C die in Fig. 295 eingetragenen Kräfte, und es gilt

$$S \cdot \sin \varphi + q \cdot dL - (S + dS) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) = 0$$

und $(S + dS) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) - S \cdot \cos \varphi = 0.$

Hierin kann der ganz kleine Zuwachs $d\varphi$ gegenüber der endlichen Größe φ gestrichen werden; aber nicht dS gegenüber S , bevor nicht die

Subtraktion ausgeführt ist. Man erhält so aus der zweiten Gleichung

$$dS \cdot \cos \varphi = 0.$$

Der Zuwachs der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft S ist Null, sie selbst also unveränderlich gleich H .

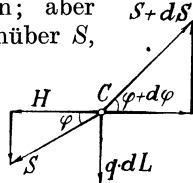


Fig. 295.

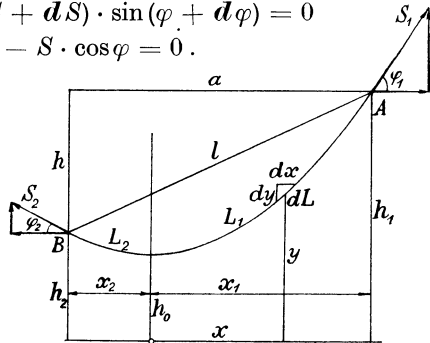


Fig. 294.

³⁵⁾ Fischer, Technik und Schule. 1908.

Aus der ersten Gleichung folgt ebenso

$$dS \cdot \sin \varphi = q \cdot dL$$

oder nach der Integration

$$S \cdot \sin \varphi = q \cdot L + C.$$

Rechnet man L vom Scheitelpunkt aus nach jeder Seite besonders, so ist für $\varphi = 0$: $S \cdot 0 = q \cdot 0 + C = 0$ und somit

$$S \cdot \sin \varphi = q \cdot L. \quad (145)$$

Wird in die vorstehenden Differentialgleichung eingesetzt aus Fig. 294

$$S = \frac{H}{\cos \varphi}, \quad (146)$$

so lautet sie

$$d \frac{H}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi = dH \cdot \operatorname{tg} \varphi = q \cdot dL,$$

und ihre Integration ergibt

$$H \cdot \operatorname{tg} \varphi = q \cdot L + C.$$

Rechnet man wieder L vom Scheitel aus nach jeder Seite besonders, so ist für $\varphi = 0$: $H \cdot 0 = q \cdot 0 + C$, also $C = 0$, und man erhält so

$$\frac{H}{q} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = L_1, \quad \frac{H}{q} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = L_2. \quad (147)$$

Andererseits ist nach Fig. 294

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

also, wenn beide Seiten der Gleichung durch dx dividiert werden,

$$H \cdot \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = q \cdot \frac{dL}{dx}$$

die Differentialgleichung der Kettenlinie, die auch in abgekürzter Weise geschrieben wird

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q \cdot \frac{dL}{dx}. \quad (148)$$

Nun ergibt sich wieder aus Fig. 294

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

also

$$dL = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (149)$$

und wenn vorübergehend abgekürzt wird $\frac{dy}{dx} = u$, geht die Differentialgleichung der Kettenlinie über in

$$H \cdot \frac{du}{dx} = q \cdot \sqrt{1 + u^2}.$$

Die Trennung der Veränderlichen auf die beiden Seiten der Gleichung ergibt daraus

$$\frac{H}{q} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx$$

und die Integration dieser Gleichung gemäß Formel (144)

$$x = \frac{H}{q} \cdot \log \operatorname{nat} (u + \sqrt{1 + u^2}) + C.$$

Für $x = 0$ ist, wie die Fig. 294 sogleich lehrt, $u = \frac{dy}{dx} = 0$, mithin

$$0 = \frac{H}{q} \cdot \log \operatorname{nat} 1 + C.$$

Da nun der Logarithmus von 1 ebenfalls Null ist, so wird wieder $C = 0$ und, wenn $\frac{H}{q} = h_0$ gesetzt wird,

$$e^{\frac{x}{h_0}} - u = \sqrt{1 + u^2}$$

oder

$$e^{2 \cdot \frac{x}{h_0}} - 2 \cdot u \cdot e^{\frac{x}{h_0}} + u^2 = 1 + u^2,$$

woraus folgt

$$u = \frac{e^{2 \cdot \frac{x}{h_0}} - 1}{2e^{\frac{x}{h_0}}} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$$

oder, wenn jetzt der frühere Wert von $u = \frac{dy}{dx}$ wiederhergestellt wird,

$$2 \cdot dy = dx \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right) = h_0 \cdot d \frac{x}{h_0} \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right).$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt nach Formel (132)

$$2 \cdot y = h_0 \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right) + C.$$

Für $x = 0$ erhält man

$$y = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot (1 + 1) + C;$$

ist $h_0 = \frac{H}{q}$ der Abstand des Scheitels der Kettenlinie von der x -Achse, so wird $C = 0$ und die Gleichung der Kettenlinie³⁶⁾ lautet

$$y = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right). \quad (150)$$

und hieraus folgt weiter

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right), \quad (151)$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung (147)

$$L = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right). \quad (152)$$

Es werde jetzt noch einmal auf die Gleichung (147) zurückgegriffen. Aus

$$L = h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

erhält man gemäß Formel (106)

$$dL = h_0 \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Nun ist nach Fig. 289 $dy = dL \cdot \sin \varphi$, also

$$dy = h_0 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} = -h_0 \cdot \frac{d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

und hieraus folgt nach Formel (98)

$$y = \frac{h_0}{\cos \varphi}, \quad (153)$$

worin C ebenfalls wieder den Wert 0 annimmt und deshalb wegfällt.

Durch Division von Gleichung (146) und (153) ergibt sich

$$\frac{S}{H} = \frac{y}{h_0}$$

oder

$$S = y \cdot q, \quad (154)$$

also

$$S_1 - S_2 = h \cdot q : \quad (154a)$$

Der Spannkraftunterschied an zwei verschieden hohen Stellen der Kettenlinie ist gleich dem Kettengewicht des Höhenunterschiedes.

Zur Erleichterung der Zahlenrechnungen dient die folgende Zusammenstellung³⁷⁾ der Werte von $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$ (erste Zeile) und $\frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$ (zweite Zeile) in Abhängigkeit von $\frac{x}{h_0}$:

³⁶⁾ Bernoulli, Huygens, Leibniz, Acta eruditorum. Lipsiae 1698.

³⁷⁾ Ligowski, Tafel der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen 1890.

$\frac{x}{h_0}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000 1,0000	0100 0001	0200 0002	0300 0005	0400 0008	0500 0013	0600 0018	0701 0025	0801 0032	0901 0041
0,1	0,1002 1,0050	1102 0061	1203 0072	1304 0085	1405 0098	1506 0113	1607 0128	1708 0145	1810 0162	1911 0181
0,2	0,2013 1,0201	2115 0221	2218 0243	2320 0266	2423 0289	2526 0314	2629 0340	2733 0367	2837 0395	2941 0423
0,3	0,3045 1,0453	3150 0484	3255 0516	3360 0549	3466 0584	3572 0619	3678 0655	3785 0692	3892 0731	4000 0770
0,4	0,4108 1,0811	4216 0852	4325 0895	4434 0939	4543 0984	4653 1030	4764 1077	4875 1125	4986 1174	5098 1225
0,5	0,5211 1,1276	5324 1329	5438 1383	5552 1438	5666 1494	5782 1551	5897 1609	6014 1669	6131 1730	6248 1792
0,6	0,6367 1,1855	6485 1919	6605 1984	6725 2051	6846 2119	6967 2188	7090 2258	7213 2330	7336 2402	7461 2476
0,7	0,7586 1,2552	7712 2628	7838 2706	7966 2785	8094 2865	8223 2947	8353 3030	8484 3114	8615 3199	8748 3286
0,8	0,8881 1,3374	9015 3464	9150 3555	9286 3647	9423 3740	9561 3835	9700 3932	9840 4029	9981 4128	0122 4229
0,9	1,0265 1,4331	0409 4434	0554 4539	0700 4645	0847 4753	0995 4862	1144 4973	1294 5085	1446 5199	1598 5314

Beispiel 142. Das Zugseil einer Drahtseilsehwebbahn von $d = 13$ mm Durchmesser hat den Querschnitt $F = 0,62$ cm² und das Gewicht $q = 0,65$ kg/m. Es ist an der höchsten Stelle mit $\sigma_1 = 1200$ at angespannt und hängt frei über die wagerecht gemessene Strecke $a = 432,0$ m bei einem Gefälle von $h = 128,0$ m. Anzugeben ist die Spannung des Seiles an der tiefsten Stelle und die Form des Seiles sowie seine Gesamtlänge.

Die Anspannung am unteren Auflagerpunkt ergibt sofort Gleichung (134 a)

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{h \cdot q}{F} = 1200 - \frac{128 \cdot 0,65}{0,62} = 1066 \text{ at.}$$

Jetzt muß die Bedingung bestehen

$$\frac{x_1}{h_0} - \frac{x_2}{h_0} = \frac{a}{h_0},$$

wenn, wie es bei stärkeren Neigungen der Fall ist, der Scheitel der Kettenlinie außerhalb der Strecke a dicht beim Punkt B der Fig. 294 liegt. Befindet er sich innerhalb der Strecke a , so ist x_2 mit dem positiven Vorzeichen einzusetzen.

Die Gleichung muß durch Probieren mit Hilfe der Zusammenstellung gelöst werden; einen ersten Anhalt liefert die Tatsache, daß bei größeren Neigungen h_0 nicht wesentlich von h_2 abweicht.

$$\text{Annahme 1: } h_0 = 1014 \text{ m. } \frac{a}{h_0} = \frac{432,0}{1014} = 0,4260,$$

$$\sigma_0 = 1014 \cdot \frac{0,65}{0,62} = 1063 \text{ at.}$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200}{1063} = 1,1289, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5025$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066}{1063} = 1,0028, \quad \text{also} \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0743$$

Unterschied: 0,4282,

um 0,0022 zu groß.

Annahme 2: $h_0 = 1013 \text{ m.}$ $\frac{a}{h_0} = \frac{432,0}{1013} = 0,4264,$
 $\sigma_0 = 1062 \text{ at.}$

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200}{1062} = 1,1291, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5028$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066}{1062} = 1,0038, \quad \text{also} \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0867$$

Unterschied: 0,4161,

um 0,0103 zu klein.

Werden die Fehler nach Fig. 296 zeichnerisch aufgetragen, so ergibt sich die Gleichung

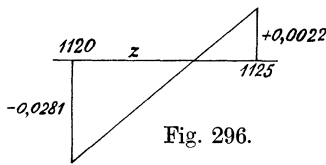


Fig. 296.

also $\frac{z}{1-z} = \frac{0,0103}{0,0022},$
 $z = \frac{1 \cdot 0,0103}{0,0103 + 0,0022} = 0,82,$
 mithin

$$h_0 = 1013,8 : \sigma_0 = 1013,8 \cdot \frac{0,65}{0,62} = 1062,8.$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200,0}{1062,8} = 1,1290, \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5026, \quad \text{also} \quad x_1 = 509,5 \text{ m}$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066,0}{1062,8} = 1,0030, \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0772, \quad \text{also} \quad x_2 = 78,3 \text{ m}$$

$a = 431,2 \text{ m,}$

gegenüber 432,0 m.

Man bemerkt, daß die Rechnung nicht sehr genau ist, trotzdem die Genauigkeit weiter getrieben ist, als die praktischen Unterlagen es eigentlich zulassen.

Es werde abgerundet:

$$x_1 = 510 \text{ m,} \quad x_2 = 78 \text{ m}$$

und berechnet

$$y_1 = \frac{h_0}{\cos \varphi_1} = 1145 \text{ m,} \quad y_2 = \frac{h_0}{\cos \varphi_2} = 1017 \text{ m.}$$

Teilt man die Spannweite a in 8 gleiche Teile von je 54 m, so erhält man

Teil:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x =$	78	132	186	240	294	348	402	456	510
$\frac{x}{h_0} =$	0,0769	0,1302	0,1835	0,2367	0,2900	0,3433	0,3965	0,4498	0,5031
$\frac{1}{\cos \varphi} =$	1,0030	1,0085	1,0169	1,0281	1,0423	1,0596	1,0797	1,1030	1,1290
$y =$	1017	1022	1031	1042	1056,7	1074	1095	1118	1145

Der Durchhang in der Mitte beträgt hiernach

$$f = y_2 + \frac{1}{2}h - y_4 = 1017 + \frac{1}{2} \cdot 128 - 1056,7 = 24,3 \text{ m.}$$

Die Parabelformel gibt an

$$f = \frac{0,65(432^2 + 128^2)}{8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1200 + 1066)} = 14,5 \text{ m,}$$

also um $\frac{9,8}{14,5} = 0,68$ des danach berechneten Wertes zu klein.

Die Seillänge setzt sich zusammen aus

$$\begin{aligned} L_1 &= h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 1013,8 \cdot 0,5039 = 533,3 \text{ m} \\ L_2 &= h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = 1013,8 \cdot 0,0773 = 78,4 \text{ m} \\ \hline \text{Gesamtlänge: } &454,9 \text{ m.} \end{aligned}$$

Bemerkt werde, daß bei wagerechter Strecke $l = a$ unter sonst gleichen Verhältnissen der Fehler der Parabel nur 0,066 beträgt.

Die gleichmäßig über die Seillänge verteilte Belastung und die über die Sehne gleichmäßig verteilte kommen zusammen vor bei den Kettenbrücken³⁸⁾, allerdings überwiegt dort im allgemeinen das Gewicht der Fahrbahn.

Wichtiger ist der Fall der ungleichmäßigen Streckenbelastung nach Abb. 297.

Vorausgesetzt werde ein stark angespanntes, wenig durchhängendes Seil, dessen Auflagerpunkte in derselben Wagerechten liegen. Die Einzellasten werden so klein angenommen, daß sie auch nicht annähernd einen Knick hervorrufen können, wie er im Abschnitt 6 für große Lasten berechnet wurde.

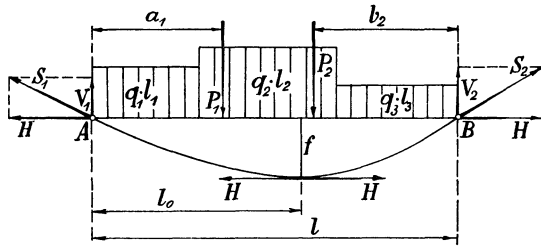


Fig. 297.

Es gelten dann die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H = H,$$

$$V_1 + V_2 = q_1 \cdot l_1 + q_2 \cdot l_2 + q_3 \cdot l_3 + P_1 + P_2,$$

und für den dem Auflager A benachbarten Teil von der Länge l_0 und den Durchhang f in bezug auf den Punkt A :

$$H \cdot f = q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 + P_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot (l_0 - l_1) \cdot (l_1 + \frac{1}{2} \cdot [l_0 - l_1]).$$

Aus der letzten Gleichung erhält man sofort

$$H \cdot f = + \frac{1}{2} \cdot q_2 l_0^2 - \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_1) \cdot l_1^2 + P_1 \cdot a_1. \quad (155)$$

Entsprechend ergibt sich für den dem Auflager B benachbarten Teil

$$H \cdot f = + \frac{1}{2} \cdot q_3 \cdot (l - l_0)^2 - \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_3) \cdot l_3^2 + P_2 \cdot b_2.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man den wagerechten Abstand der Stelle des größten Durchhanges f vom Auflager A zu

$$l_0 = \frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right) \cdot \frac{l_1^2}{l} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{q_3}{q_2}\right) \cdot \frac{l_3^2}{l} - \frac{P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot b_2}{q_2 \cdot l}, \quad (156)$$

der in Gleichung 155 einzusetzen ist.

³⁸⁾ Navier, Mém. sur les ponts suspendus, 1823.

Beispiel 143. Von dem über einen Zechenhof ausgespannten Schutznetz einer Drahtseilbahn sei gegeben $l = 83$ m, $l_1 = 20$ m, $l_2 = 53$ m, $l_3 = 10$ m, der Abstand der T-Eisen Nr. 6 $c = 5,3$ m, die Breite des Schutznetzes $b = 4,2$ m, die Maschenweite $a_0 = 4$ cm, die Drahtstärke $\delta = 2$ mm, die Seilstärke 28 mm (Fig. 298). Anzugeben ist die größte in den Tragseilen auftretende Spannkraft S , wenn der Durchhang zu 5,5 v. H. der Länge l festgesetzt wird.

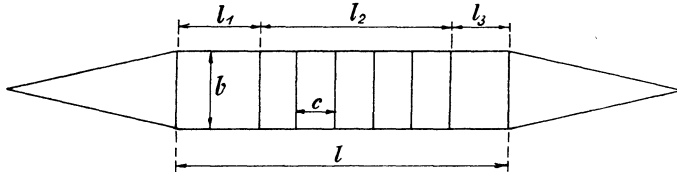


Fig. 298.

Überschlägig werde noch angenommen, daß von dem Schutznetz und seiner Rauhreifbelastung, die sich zu $q = 0,5 \cdot d + 0,19$ kg/m berechnet, der in Fig. 299 von den gestrichelten Linien eingeschlossene Teil unmittelbar von den Verstärkungseisen getragen wird.

Auf 1 m² des Netzes kommen $\frac{100}{4} \cdot 2 = 50$ Drähte von etwa 1,1 m Länge. Der Draht von 2 mm Durchmesser wiegt $q' = 0,024$ kg/m, dazu kommt das Rauhreifgewicht $q'' = 0,5 \cdot 0,2 + 0,19 = 0,29$ kg/m. Es wiegt mithin 1 m² Netz mit Rauhreifbesatz

$$50 \cdot 1,1 \cdot (0,290 + 0,024) \approx 17,3 \text{ kg.}$$

Der T-Träger wiegt 6,19 kg/m, also bei 4,3 m Länge

$$6,19 \cdot 4,30 = 26,6 \text{ kg.}$$

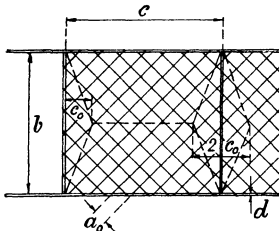


Fig. 299.

Hierzu tritt noch das Gewicht von $b \cdot c_0$ m² Schutznetz (bei den beiden äußersten T-Trägern nur die Hälfte):

$$4,2 \cdot 1 \cdot 17,3 = 72,7 \text{ kg.}$$

Für jedes Seil ergibt sich hieraus die Einzelbelastung

$$P = \frac{1}{2} \cdot (26,6 + 72,7) \approx 50 \text{ kg,}$$

bzw. für die beiden äußersten Querträger

$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot (26,6 + 36,35) \approx 31,5 \text{ kg.}$$

Unmittelbar kommt auf jedes Seil

sein Eigengewicht

$$q' = 3,9 \text{ kg/m,}$$

der Rauhreifbesatz

$$q'' = 0,5 \cdot 2,8 + 0,19 \approx 1,6 \text{ kg/m}$$

und die Netzbelastung $q''' = \frac{1}{2} \cdot (5,3 + 3,3) \cdot 2,1 \cdot \frac{17,3}{5,3} = 29,5$ kg/m,

zusammen also

$$q_2 = 35,0 \text{ kg/m}$$

bzw. an den Stellen ohne Netz

$$q_1 = 5,5 \text{ kg/m.}$$

Damit erhält man aus Formel (156) den Abstand der Stelle des größten Durchhanges vom Ende

$$l_0 = \frac{1}{2} \cdot 83 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5,5}{35,0}\right) \cdot \frac{20^2}{83} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5,5}{35,0}\right) \cdot \frac{10^2}{83}$$

$$- \frac{1}{35,0 \cdot 83} \cdot [+ 3,15 \cdot 20 + 50 \cdot (25,3 + 30,6 + 35,9 + 41,2) - 31,5 \cdot 10$$

$$- 50 \cdot (15,3 + 20,6 + 25,9 + 31,2 + 36,5)]$$

oder

$$l_0 = 41,50 + 1,52 + 0,13 = 43,15 \text{ m.}$$

Nun liefert die Formel (155)

$$H \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 35,2 \cdot 43,15^2 - \frac{1}{2} \cdot (35,0 - 5,5) \cdot 20^2 + 31,5 \cdot 20$$

$$+ 50 \cdot (25,3 + 30,6 + 35,9 + 41,2)$$

oder

$$H \cdot 0,055 \cdot 83 = 32750 - 5900 + 630 + 6650,$$

also

$$H = \frac{34130}{4,565} = 7480 \text{ kg.}$$

Nach Fig. 300 besteht nun der Zusammenhang

$$\frac{S}{H} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}l^2 + 4f^2}}{\frac{1}{2}l}$$

also ist

$$S = H \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2} = H \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4f}{l}\right)^2\right]$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$S = 7480 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 0,055)^2\right] = 7480 \cdot 1,0247 \approx 7660 \text{ kg.}$$

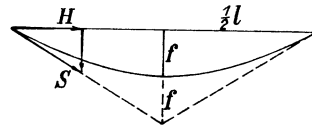


Fig. 300.

Die Statik der Maschinenteile.

Nachdem im ersten Bande die allgemeinen Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften und Drehmomenten sowie über das Gleichgewicht auseinandergesetzt worden sind, sollen sie im vorliegenden Bande auf die am häufigsten vorkommenden Maschinenteile angewendet werden.

In erster Linie werden aus den Lehren des ersten Bandes die folgenden Sätze benutzt werden:

Überall, wo Berührung eines Körpers durch einen anderen stattfindet, treten Kraftwirkungen auf, die senkrecht zur Berührungsfläche gerichtet sind.

Einzelkräfte, gemessen in kg oder t, suchen eine geradlinige Verschiebung hervorzurufen oder zu verhindern. Drehmomente, gemessen in mkg oder mt, suchen eine Drehbewegung hervorzurufen oder zu verhindern.

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie in dieselbe Wirkungslinie fallen, gleich groß sind, aber entgegengesetzte Richtung haben.

Drei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien in derselben Ebene liegen und durch denselben Punkt gehen und sie nach Größe und Richtung hintereinander abgetragen ein geschlossenes Dreieck bilden.

Beliebig viele in derselben Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

die Summe ihrer wagerechten Seitenkräfte Null ergibt,

die Summe ihrer senkrechten Seitenkräfte Null ergibt,

die Summe aller Drehmomente in bezug auf denselben Punkt Null ergibt.

1. Der Hebel.

Ein Hebel ist ein fester, um eine Achse drehbarer Körper, der zum Angriff verschiedener Kräfte eingerichtet ist, die im allgemeinen in derselben Ebene wirken.

Je nach der Form unterscheidet man gerade Hebel nach Fig. 1 und 2, gekrümmte Hebel etwa gemäß Fig. 3, Winkelhebel nach Fig. 4. Der gerade Hebel heißt einarmig, wenn alle Kräfte auf derselben Seite der Drehachse angreifen (Fig. 1), dagegen zweiarmig, wenn sich die Drehachse zwischen den Kräften befindet (Fig. 2).

Auf das Verhältnis der eigentlichen Hebelkräfte P zueinander hat die Form des Hebels keinerlei Einfluß. Höchstens ist ein gekrümmter Hebel insofern vorteilhafter, als er den zweckmäßigsten Angriff einer menschlichen Kraft erleichtern kann, wie z. B. die Fig. 3 andeutet.

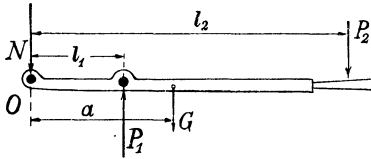


Fig. 1.

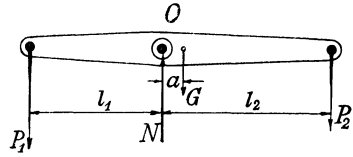


Fig. 2.

Ein Hebel, bei dem die angreifenden Kräfte in zwei verschiedenen, zueinander parallelen Ebenen wirken, ist die in Fig. 5 dargestellte Schwinde, die bei Dampfmaschinen-Schiebersteuerungen Anwendung findet¹⁾.

Auf den Hebel, dessen Eigengewicht G im Abstände a von der Drehachse O angreift, wirken ferner die ebenfalls lotrechten Kräfte P_1 und P_2

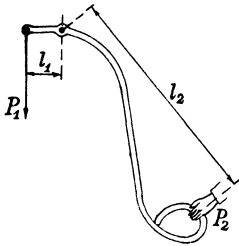


Fig. 3.

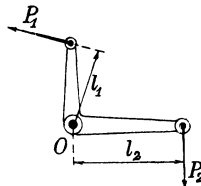


Fig. 4.

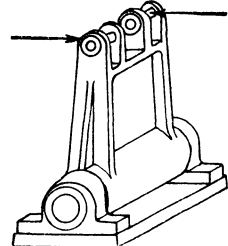


Fig. 5.

in den Entfernungen l_1 und l_2 von der Drehachse ein. Man erhält dann aus der Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente in bezug auf die Drehachse O (Fig. 1 und 2):

$$+ P_2 \cdot l_2 - P_1 \cdot l_1 + G \cdot a = 0. \quad (1)$$

Im Fall des einarmigen Hebels ist, da l_1 von der Drehachse aus dieselbe Richtung hat wie l_2 , P_1 negativ, also entgegengesetzt zu P_2 gerichtet. Im Fall des zweiarmigen Hebels ist l_1 negativ, also P_1 gleichgerichtet mit P_2 .

Da G im Verhältnis zu den P im allgemeinen klein ist, so kann es häufig außer acht gelassen werden, und die Gleichung (1) geht über in

$$P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2 \quad (2a)$$

oder

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (2b)$$

¹⁾ Z. B. Haeder, Die Dampfmaschine. 1. Aufl. 1890.

Die Kräfte am Hebel verhalten sich umgekehrt wie die Hebelarme²⁾.

Der Satz gilt auch noch, wenn der Hebel sich aus der in den Fig. 1 und 2 gezeichneten Regelstellung um einen beliebigen Winkel α gedreht hat (Fig. 6). Denn werden die Kräfte P in ihre Seitenkräfte senkrecht und parallel zu den Hebellängen l zerlegt, so lautet die Momentengleichung in bezug auf die Drehachse O

$$P_1 \cdot \cos \alpha \cdot l_1 = P_2 \cdot \cos \alpha \cdot l_2,$$

die nach Hebung von $\cos \alpha$ wieder in die Gleichung (2a) übergeht.

Für den wagerechten Hebel unter lotrechten Kräften P und G ist der Achsdruck

$$\text{beim einarmigen Hebel: } N = P_1 + P_2 + G, \quad (3a)$$

$$\text{beim zweiarmigen Hebel: } -N = -P_1 + P_2 + G, \quad (3b)$$

also da P_1 meist wesentlich größer ist als P_2 , im allgemeinen negativ.

Der einarmige Hebel ist anzuwenden, wenn die beiden Hebelkräfte P entgegengesetzte Richtung haben müssen; er hat eine verhältnismäßig kleinen Achsdruck N . Der zweiarmige Hebel findet Anwendung bei gleichgerichteten Hebelkräften; sein Achsdruck ist verhältnismäßig groß. Der Achsdruck bleibt unverändert, wie auch der Hebel ausschwingt, solange die Kräfte P die lotrechte Richtung beibehalten.

Beispiel 1. Eine Handdruckpumpe, deren Kolben $d = 5$ cm Durchmesser hat, werde durch einen einarmigen Hebel betrieben, an dem die Kolbenstange in $l_1 = 8$ cm Entfernung von der Drehachse angreift. Die Länge l_2 des Hebels ist zu ermitteln unter der Bedingung, daß der Arbeiter nicht mit mehr als $P_2 = 20$ kg drücken soll, wenn der Gegendruck des Wassers $p = 9$ bzw. 16 kg/cm² beträgt.

Das Hebelgewicht kann hier vernachlässigt werden. Somit gilt Gleichung (2a) in der Form

$$\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot p \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2,$$

also mit dem zuerst angegebenen Zahlenwert von p

$$l_2 = \frac{1}{20} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \cdot 9 \cdot 8 \sim 71 \text{ cm.}$$

Für $p = 16$ at erhält man hiernach

$$l_2 = 71 \cdot \frac{16}{9} \sim 126 \text{ cm.}$$

Beispiel 2. Das Sicherheitsventil eines Dampfkessels für $p = 12$ at Überdruck habe den größten zulässigen Durchmesser $d = 7,95$ cm³⁾, es greife an dem Belastungshebel im Abstand $l_1 = 10$ cm an. Zu berechnen ist die Größe des erforderlichen Belastungsgewichtes P_2 , das im Abstand $l_2 = 64$ cm an der

²⁾ Leonardo da Vinci, 1499.

³⁾ Die allgemeinen polizeilichen Bestimmungen über die Anlegung von Landdampfkesseln von 1908 schreiben als größten Ventildruck 600 kg vor.

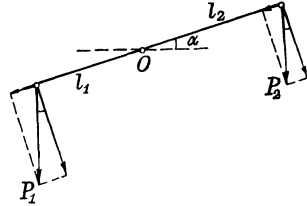


Fig. 6.

Hebeldrehachse angebracht wird, wenn noch das Hebelgewicht $G = 1,25$ kg den Abstand $a = 32$ cm von der Drehachse hat, ferner der Auflagerdruck N des Hebels (Fig. 7).

Die Gleichung (1) ergibt

$$P_2 = \frac{1}{l_2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot p \cdot l_1 - G \cdot a \right) = \frac{\pi}{4} \cdot 7,95^2 \cdot 12 \cdot \frac{10}{64} - 1,25 \cdot \frac{32}{64} \\ = 93,07 - 0,63 \approx 92,4 \text{ kg.}$$

Gleichung (5) liefert

$$N = 595,7 - 92,4 - 1,25 \approx 502 \text{ kg.}$$

Die spätere Auswiegung des fertiggestellten Ventils ergebe das Hebelgewicht $G = 1,22$ kg, das Belastungsgewicht $P_2 = 93,38$ kg, den Abstand $a = 31,4$ cm (durch Auswiegen auf einer Messerschneide bestimmt). Dann ist das Belastungsgewicht anzubringen im Abstand

$$l_2 = \frac{1}{93,38} \cdot (595,7 \cdot 10 - 1,22 \cdot 31,4) = \frac{5918,4}{93,38} = 63,4 \text{ cm.}$$

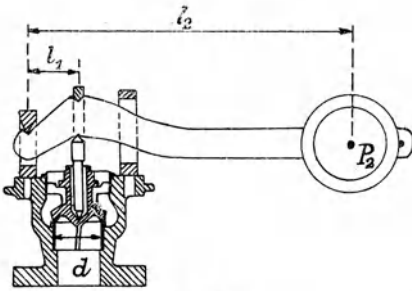


Fig. 7.

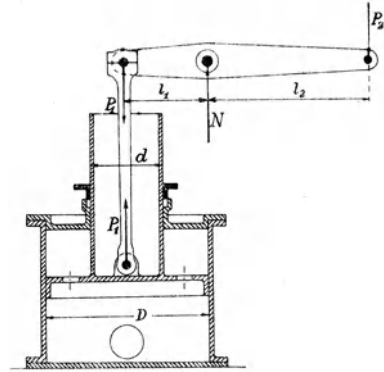


Fig. 8.

Beispiel 3. Eine Kondensatorpumpe nach Fig. 8 habe den Kolbendurchmesser $D = 55$ cm, der Kolben wiege mit dem darüberstehenden Wasser und der Schubstange $G_1 = 380$ kg. Die Schubstange greift an einem zweiarmigen Hebel von den Längen $l_1 = 45$ cm und $l_2 = 75$ cm an. Anzugeben ist die größte Druckkraft P_2 , die an dem Hebel ausgeübt werden muß, wenn der Kondensator-
druck $p_1 = 0,1$ at beträgt.

Es ist

$$P_1 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1, \quad (4)$$

also nach Formel (1)

$$P_2 = \left(\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1 + G_1 \right) \cdot \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\pi}{4} \cdot 55^2 \cdot 0,1 + 380 \right) \cdot \frac{45}{75} \approx 370 \text{ kg.}$$

Die Kraft ist etwas zu klein berechnet, weil zu dem Gewicht noch Reibungswiderstände und Massendrucke treten.

Derselbe Hebel kann auch abwechselnd als einarmiger und zweiarmiger Verwendung finden.

Beispiel 4. Zu bestimmen ist der Dampfdruck, mit dem die Dampfmaschine der Schwungradandrehvorrichtung nach Fig. 9 arbeiten muß, wenn der Klinken-

druck $P_1 = 3500$ kg betragen soll. Es ist der Kolbendurchmesser $D = 15$ cm, der Kolbenstangendurchmesser $d = 4$ cm, die Hebellänge $l_1 = 26$ cm, $l_2 = 45$ cm. Bei abwärts gehendem Kolben gilt Gleichung (2a) in der Form

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p \cdot l_2 = P_1 \cdot l_1,$$

also

$$p = \frac{P_1}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{3500 \cdot 26}{\frac{\pi}{4} \cdot 15^2 \cdot 45} = 11,5 \text{ at.}$$

Bei aufwärts gehendem Kolben ist P_1 um den Winkel α schräg gerichtet, und zwar ist $\text{tg } \alpha = 0,475$, also $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,475^2}}$. Die Klinke erfährt somit die Belastung $\frac{P_1}{\cos \alpha} = 3500 \cdot \sqrt{1,2255} \sim 3880$ kg. Die Gleichung (2a) lautet in dem Fall

$$\frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) \cdot p \cdot l_2 = P_1 \cdot l_1,$$

woraus folgt

$$p = \frac{3500}{\frac{\pi}{4} \cdot (15^2 - 4^2)} \cdot \frac{26}{45} = 12,3 \text{ at.}$$

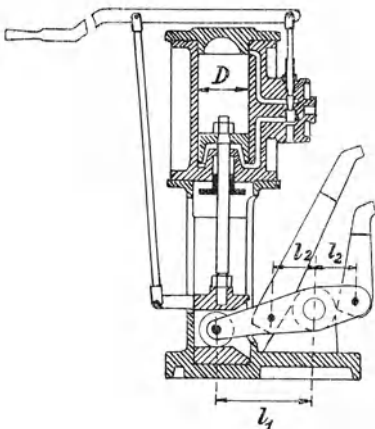


Fig. 9.

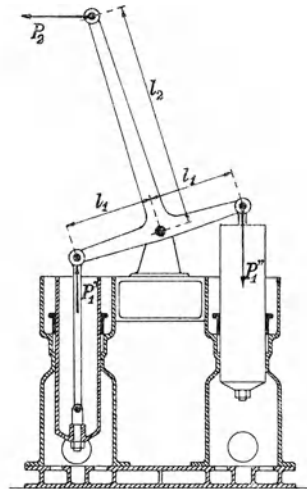


Fig. 10.

Der Mittelwert beträgt somit

$$p = \frac{11,5 + 12,3}{2} \sim 12 \text{ at.}$$

Sind die auf den Hebel einwirkenden Kräfte nicht alle parallel, so sind die zur Kraftrichtung senkrecht stehenden Längen l als Hebelarme einzusetzen, denn das Drehmoment ist stets das Produkt aus der Kraft und dem zu ihr senkrecht stehenden Abstand von der Drehachse.

Beispiel 5. Der niedergehende Kolben der doppelwirkenden Kondensatorpumpe nach Fig. 10 übt die Gegenkraft $P_1 = 70$ kg aus, der aufwärtsgehende

die Gegenkraft $P_1' = 680$ kg. Die Hebellängen seien $l_1 = 45$ cm, $l_2 = 120$ cm. Anzugeben ist die Kraft P_2 .

Man kann hier ohne wesentlichen Fehler annehmen, daß die drei Kräfte in allen Stellungen den gleichen Winkel mit dem Hebel bilden. Dann ist nach Gleichung (2b)

$$P_2 = \frac{l_1}{l_2} \cdot (P_1' + P_2') = \frac{45}{120} \cdot (70 + 680) \approx 280 \text{ kg.}$$

Beispiel 6. Auf den Winkelhebel nach Fig. 11, dessen Kraftangriffszapfen nur zur besseren Aufnahme der Kräfte noch durch eine Schließe verbunden sind, wirke die Kraft $P_1 = 450$ kg in wagerechter Richtung am Hebelarm $l_1 = 42$ cm. Anzugeben ist die Kraft P_2 , deren Hebelarm $l_2 = 120$ cm beträgt.

Man erhält sofort aus Gleichung (2b)

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} = 450 \cdot \frac{42}{120} = 157,8 \text{ kg.}$$

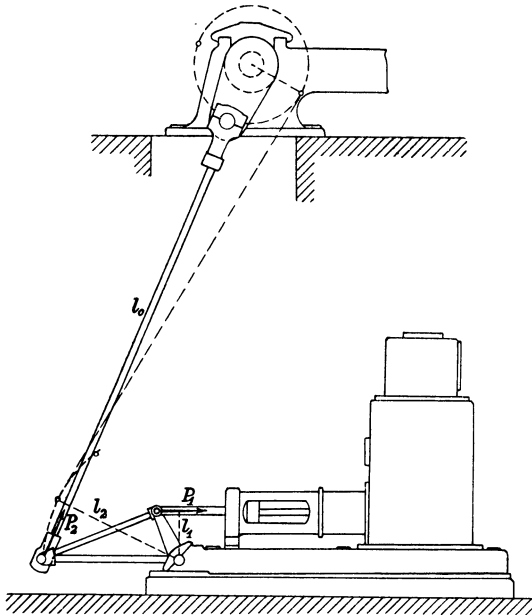


Fig. 11.

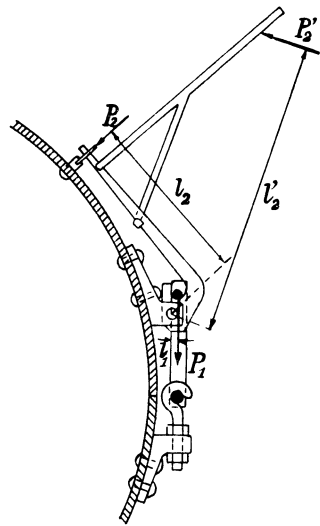


Fig. 12.

Diese Rechnung gilt für die Mittellage des Winkelhebels. In den äußersten Lagen ist $l_1 = 39$ cm und $l_2' = 112$ cm, so daß sich ergibt

$$P_2 = 450 \cdot \frac{39}{112} = 156,7 \text{ kg.}$$

Selbstverständlich ist zur zweckmäßigen Ausnutzung des Hebels die Schubstange l_0 so anzuordnen, daß in den äußersten Lagen des Winkelhebels ihr Winkel gegen den Hebelarm l_2 um den gleichen Betrag von einem Rechten abweicht, was der Fall ist, wenn er in der einen Mittellage gerade einen Rechten beträgt⁴⁾.

Man bemerkt, daß wenn die Kraft durch den Hebel verringert wird, der Ausschlag sich in demselben Verhältnis vergrößert und umgekehrt.

⁴⁾ Herbst, D. p. J. 1908.

Es gibt Hebel, die überhaupt keine festliegende Drehachse haben, wie z. B. die Kulissen der Dampfmaschinen-Schiebersteuerungen oder die Wälzhebel der Dampfmaschinenventile. Die Wälzhebel verwendet man gewöhnlich, wenn für die Einleitung der Bewegung eine große Kraft erforderlich ist, für die Vollendung aber eine große Geschwindigkeit verlangt wird. Auch die gewöhnlichen Handhebel aus Eisen sind Wälzhebel, deren kleiner Hebelarm bei der Einleitung der Bewegung nur etwa 2 bis 2,5 cm lang ist und der sich beim Niederdrücken des langen Hebelarmes bis auf 5 : 7 cm vergrößert. Unter Umständen ist auch einmal die Drehachse fest, aber die Last wälzt sich dann auf dem Hebel (Fig. 12).

Beispiel 7. Eine aus zwei Hälften bestehende lange Reinigungstrommel soll durch den Handhebel nach Fig. 12⁵⁾ so verschlossen werden, daß in der Fuge von $\delta = 1,5$ cm Stärke ein mittlerer Anpressungsdruck von $p = 9$ at herrscht. Die Hebelverbindung ist in Abständen von $a = 100$ cm angebracht; die Hebelarme sind $l_1 = 1$ cm, $l_2 = 30$ cm, $l'_2 = 55$ cm. Anzugeben ist die am Hebel l_2 erforderliche Kraft P_2 .

Im geschlossenen Zustande gilt $P_1 = a \cdot \delta \cdot p$. Damit ergibt sich nach Formel (2a)

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{100 \cdot 1,5 \cdot 9 \cdot 1}{30} = 45 \text{ kg,}$$

und die beim Einlegen von dem Arbeiter an dem aufgesetzten Hebel aufzuwendende Kraft beträgt

$$P'_2 = P_1 \cdot \frac{l_1}{l'_2} = 45 \cdot \frac{30}{55} = 24,6 \text{ kg.}$$

Beispiel 8. Anzugeben ist der größte Ausschlag des von einer Stephenson-Kulisse gesteuerten Dampfschiebers bei Hebung oder Senkung der Kulisse um den Betrag f (Fig. 13).

Gezeichnet ist die Stellung des Schiebers, bei der sich die Hauptkurbel R der Maschine in der Totlage befindet. Auf der Hauptwelle sitzen die beiden

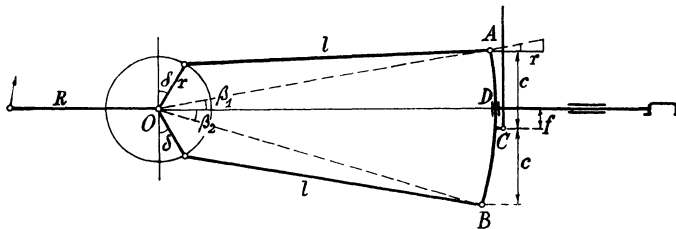


Fig. 13.

Exzenter mit der kleinen Exzentrizität r , die gegen die Hauptkurbel um die Winkel $90 + \delta$ in der Vorwärts- bzw. Rückwärtsdrehrichtung versetzt sind. Das Vorwärtsexzenter greift bei den offenen Exzenterstangen l am oberen Kulissenende A an, das Rückwärtsexzenter am unteren Ende B . Die Kulisse, die sich bei der Verstellung durch den Stein D verschiebt, ist in ihrer Mitte C pendelnd aufgehängt.

Man entnimmt der Fig. 13, daß das am Punkte A angreifende Exzenter um den Winkel $\delta + \beta_1$ zurückgeschoben werden muß, damit die Kurbel r ihre Mittel-

⁵⁾ Freuderking, Hanomag-Nachrichten 1919.

lage in bezug auf die Treibrichtung OA erhält. Da nun der Ausschlag in Richtung der Hauptachse OD r ist, so beträgt er in Richtung der geneigten Achse OA $\frac{r}{\cos \beta_1}$. Das heißt, der Punkt A bewegt sich so, als wenn er von einem Exzenter mit dem Halbmesser $\frac{r}{\cos \beta_1}$ angetrieben wird, das unter dem Winkel $90 + \delta + \beta_1$ gegen die Hauptkurbel B in der Drehrichtung versetzt ist. Das Entsprechende gilt für den Antrieb des Punktes B .

Wird jetzt der Punkt B einmal als fest angesehen, so verschiebt sich der Punkt D unter der Einwirkung des Vorwärtsexzenters um den Betrag

$$a = \frac{r}{\cos \beta_1} \cdot \frac{c + f}{2c}, \tag{5}$$

und wenn jetzt A vorübergehend als fest angesehen wird, so verschiebt sich D unter der Einwirkung des Rückwärtsexzenters um

$$b = \frac{r}{\cos \beta_2} \cdot \frac{c - f}{2c}. \tag{6}$$

In der Richtung der Mittelachse, in der sich der Stein D allein verschieben kann, erhält man hieraus die in Fig. 14 eingetragenen Verschiebungen, die sich so addieren, als ob sie hervorgerufen würden von einem Mittelexzenter r_0 , das aus den beiden a und b nach dem Satz vom Verschiebungsdreieck (entsprechend dem vom Kräftedreieck, s. Bd. III) erhalten wird.

Man ersieht aus Fig. 13, daß bei ganz gesenkter Kulisse nur das Vorwärtsexzenter r unter dem Voreilwinkel δ den Stein beeinflusst und bei ganz gehobener nur das Rückwärtsexzenter. Wird die Rechnung und Konstruktion für verschiedene Kulissenstellungen durchgeführt, so ergibt sich, daß die Endpunkte des Mittelexzenters auf einer Kurve $A'D'C'B'$ liegen, und daß der von der Stephenson-Kulisse angetriebene Schieber sich bei der Verlegung der Kulisse aus der Vorwärts- bzw. Rückwärtsstellung in die mittlere Nullstellung um den Betrag s verschiebt.

Sind die Exzenterstangen nicht offen, wie in Fig. 13, sondern gekreuzt, so greift das Vorwärtsexzenter am unteren Kulissenpunkt B an. Für den Schub in Richtung der Achse OB ist jetzt das obere Exzenter um den Betrag $\delta - \beta_1$ zurückzuziehen, damit es seine Mittellage einnimmt. Der Punkt B wird also so angetrieben, als wenn er von einem Exzenter $\frac{r}{\cos \beta_1}$ mit dem Voreilungswinkel $\delta - \beta_1$ bewegt würde. Das Ergebnis ist, daß sich die Kurve $A'B'$ der Fig. 14 mit dem Ausschlag s umgekehrt an die Sehne $A'B'$ anlegt.

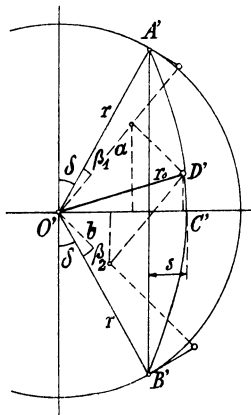


Fig. 14.

Beispiel 9. Das Einlaßventil einer Dampfmaschine nach Fig. 15 vom größten Hub $s = 24$ mm habe die Abmessungen $h = 165$ mm,

$$\begin{matrix} d_1 = 200, & d_2 = 199, & d_0 = 38, & d_3 = 16 \text{ mm,} \\ b_1 = 3, & b_2 = 3, & b_0 = 6, & b = 8 \text{ „.} \end{matrix}$$

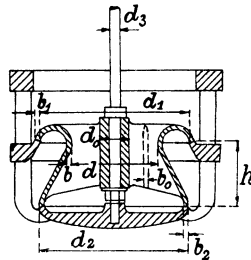


Fig. 15.

Anzugeben ist die Kraft, die beim Anheben erforderlich ist, wenn der Dampfdruck $p = 12$ at beträgt.

Das Ventil ist entlastet bis auf den schmalen Ring vom äußeren Durchmesser $d_1 + 2b_1 = 20,6$ cm und vom inneren Durchmesser $d_2 - 2b_2 = 19,3$ cm. Demnach ist die Kraft

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot (20,6 + 19,3) \cdot (20,6 - 19,3) \cdot 12 = 489 \text{ kg.}$$

Hierzu tritt noch die Spindelreibung mit $P' = 16 \text{ kg.}$ Sowie das Ventil angehoben ist, ist nur noch die Spindelreibung zu überwinden.

Bei den Wälzhebeln⁶⁾ sind zwei Ausführungen zu unterscheiden, Hebel mit beweglichem Hubpunkt nach Fig. 16 und solche mit festem Hubpunkt nach Fig. 17. Der Angriffspunkt der Exzenterstange heißt der Treibpunkt. Damit die Bewegung des Ventils stoßfrei eingeleitet und beendet wird, muß im Augenblick seines Hubbeginnes bzw. Niedersetzens die Hebelübersetzung ganz oder wenigstens nahezu Null sein, da ja die Bewegung des Treibpunktes in diesen Augenblicken eine ganz bestimmte endliche ist, die sich aus dem Steuerungsmechanismus ergibt.

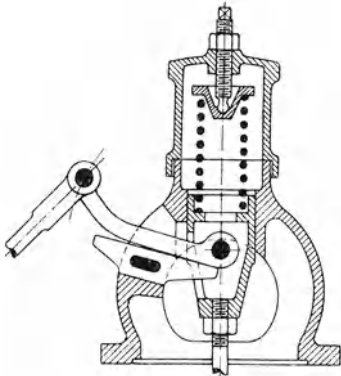


Fig. 16.

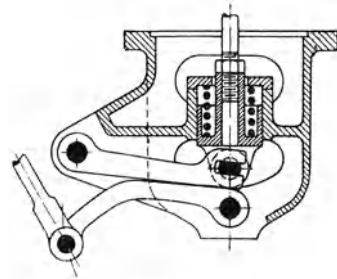


Fig. 17.

In Fig. 18 seien A der bewegliche Hubpunkt, B der Treibpunkt des Wälzhebels, C der Berührungspunkt des Hebels mit der Wälzbahn, O_1 bzw. O_2 die Krümmungsmittelpunkte der Berührungsstelle von Hebel und Wälzbahn, die mit C auf derselben Berührungsnormale liegen müssen. Bewegt sich A auf der Lotrechten um ein sehr kleines Stück nach A' , so bleibt vorläufig noch der Abstand der Krümmungsmittelpunkte O_1O_2 unverändert und, da die Wälzbahn festliegt, muß sich O_1 auf einem Kreisbogen um O_2 nach O_1' bewegen derart, daß $A'O_1' = AO_1$ ist. Damit erhält man den neuen Treibpunkt B' aus der Bedingung, daß das Dreieck $A'O_1'B' \cong AO_1B$ sein muß, weil der Hebel ja starr ist.

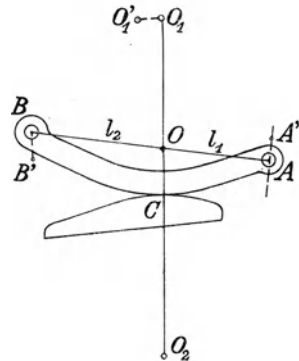


Fig. 18.

Zieht man \overline{AO} senkrecht zu AA' , so ist Punkt O der augenblickliche Drehpunkt des ganzen Hebels, da er auf einer Senkrechten zur Bahn AA' und ebenso auf einer Senkrechten zur Rolltangente gelegen ist. Das Hebelver-

⁶⁾ Holzer, Z. d. V. d. I. 1908.

hältnis ist dann $l_1 : l_2$. Damit das Übersetzungsverhältnis 0 wird, muß in dem betreffenden Augenblick der Berührungspunkt C auf der Hubgeraden AA' liegen. Die Bewegung geht nur dann rein wälzend ohne Gleiten vor sich, wenn an jeder Stelle O und C zusammenfallen. Aus beiden Bedingungen folgt sofort noch, daß im Anfangspunkt der Bewegung die Wälzkurve senkrecht zur Geradföhrung AA' verlaufen muß, wenn die Anfangsbewegung ganz stoßlos erfolgen soll, was praktisch nicht ausführbar ist, wie z. B. die Fig. 16 erkennen läßt. Man muß, damit kleine Ungenauigkeiten der Einstellung der Steuerung ohne Einfluß auf den sicheren Ventilschluß sind, die Berührung schon vorher aufhören lassen.

Als Wälzbahn wird der einfachen und sicheren Herstellung wegen fast stets eine Gerade angenommen, die so geneigt sein muß, daß ihre Normale im jeweiligen Berührungspunkt durch den Schnittpunkt der Exzenterstange mit der Ventilachse geht oder ihm wenigstens nahe kommt, da sich sonst eine größere Seitenkraft ergibt, die die Ventilschindel gegen ihre Föhrung drückt. Die Vorschrift folgt ohne weiteres aus dem Satz für das Gleichgewicht von drei Kräfte.

Beispiel 10. Gegeben seien in Fig. 19 die gleichen Verschiebungen des Kolbens der Dampfmaschine entsprechenden Hubpunkte A des Ventils, ausgehend vom festgelegten Anfangspunkt A_0 , ebenso die Reihe B der Treibpunkte ausgehend vom festgelegten Anfangspunkt B_0 als Schnittpunkte des aus A geschlagenen Kreises vom Halbmesser A_0B_0 mit den Senkrechten zur Exzenterstangenrichtung. Gegeben ist ferner die gerade Wälzbahn A_0C . Anzugeben ist die Wälzkurve des Hebels.

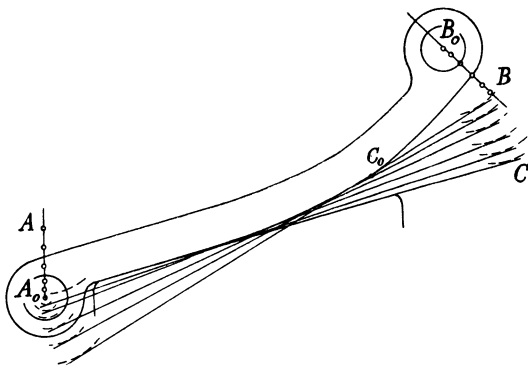


Fig. 19.

darauf ihre gemeinsame Tangente, die die in die Anfangslage zum Hebel zurückgedrehte Wälzbahn darstellt. Wird diese Konstruktion mehrfach wiederholt, so hüllen die zurückgedrehten Wälzbahnen die Wälzkurve des Hebels ein.

Da die durch A gezogene Senkrechte zu A_0A nicht durch den Berührungspunkt C_0 geht, so tritt ein gewisses Gleiten des Hebels auf der Bahn ein. Man gestattet das meistens, weil sonst die Treibpunkte der Wälzbahn ziemlich nahe rücken und, wie eine entsprechende Aufzeichnung lehrt, die Wälzkurve dann wesentlich kürzer ausfällt.

Bei den Wälzhebeln mit festen Endpunkten nach Fig. 20 ist A wieder der Hubpunkt, B der Treibpunkt; C_1 und C_2 sind die festen Punkte, O_1 und O_2 die Krümmungsmittelpunkte der Wälzkurven. Da sämtliche Hebelpunkte Kreisbögen um C_1 bzw. C_2 beschreiben, so muß die Verbindung mit der Ventilschindel bei A lose sein. Der augenblickliche

Drehpunkt für die Bewegung der Zentrale $\overline{O_1O_2}$ ist der Schnittpunkt O der Geraden O_1C_1 und O_2C_2 . Zieht man noch $C_1F \parallel C_2O$ und die Verbindungslinie C_1C_2 , und dreht sich nun der erste Hebel um den kleinen Betrag $d\varphi_1$ und der zweite entsprechend um $d\varphi_2$, so daß $d\varphi_1 : d\varphi_2$ das Übersetzungsverhältnis in dem Augenblick darstellt, so gilt

$$\frac{\overline{C_1O_1} \cdot d\varphi_1}{\overline{C_2O_2} \cdot d\varphi_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{\overline{C_1O_1}}{C_1F}$$

ferner

$$\frac{C_1F_1}{C_1E} = \frac{\overline{C_2O_2}}{\overline{C_2E}},$$

also

$$\frac{\overline{C_1O_1} \cdot d\varphi_1}{\overline{C_2O_2} \cdot d\varphi_2} = \frac{\overline{C_1O_1}}{\overline{C_2O_2}} \cdot \frac{\overline{C_2E}}{C_1E}$$

oder

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{C_2E}{C_1E}.$$

Das heißt: die Berührungssenkrechte O_1O_2 teilt die Zentrale C_1C_2 im umgekehrten Verhältnis der augenblicklichen Übersetzung. Das

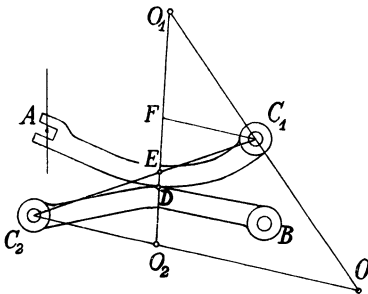


Fig. 20.

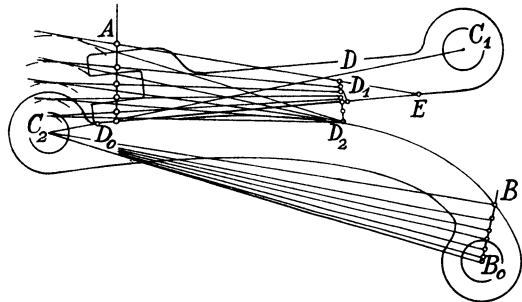


Fig. 21.

Übersetzungsverhältnis kann also nur Null werden, wenn die Berührungssenkrechte durch den festen Drehpunkt des treibenden Hebels geht. Damit kein Gleiten stattfindet, muß der augenblickliche Berührungspunkt D in die Zentrale C_1C_2 fallen, denn nur auf der Zentrale stimmen die Bewegungsrichtungen beider Hebel überein, wie es im gleitfreien Berührungspunkt nötig ist. Auch hier wird der einfachen und sicheren Herstellung wegen der eine Hebel mit gerader Wälzkurve ausgeführt.

Beispiel 11. Gegeben seien in Fig. 21 die gleichen Verschiebungen des Kolbens der Dampfmaschine entsprechenden Hubpunkte A des Ventils, die festen Drehpunkte C_1 und C_2 , sowie die Punktreihe B der Lagen des Treibpunktes auf der Exzenterstange. Zu bestimmen ist die Wälzkurve des zweiten Hebels.

Man wählt den Anfangsberührungspunkt D_0 so dicht an der Hebelachse, wie es die Konstruktion des Auges zuläßt, und legt den Endberührungspunkt D so fest, daß das Endübersetzungsverhältnis den besonderen, gerade verlangten Wert erhält; beide Punkte müssen auf oder wenigstens dicht bei der Zentrale liegen. Die zugehörigen Anfangslagen D_1 bzw. D_2 des letzteren Punktes auf den beiden Hebeln ergeben sich aus ihren vorgeschriebenen Winkelausschlägen.

Die Verbindungslinie D_0D_1 ist die gerade Begrenzungslinie des oberen Hebels. Schlägt man nun aus C_2 einen die Linie ADE berührenden Kreis und legt daran von D_2 aus eine Tangente, so tangiert diese den zweiten Hebel im Berührungspunkt. Die Durchführung derselben Konstruktion für weitere Zwischenpunkte ergibt schließlich den dargestellten Hebel. Je größer die Krümmung des Hebels wird, desto kürzer wird die Wälzkurve, und zwar ist dabei die Größe des Antriebs-exzenters maßgebend.

Wird verlangt, daß der Hebel bequem zu handhaben ist und leicht von einem Ort zum anderen bewegt werden kann, so bildet man ihn als Doppelhebel aus, indem zwei gleiche Hebel an demselben Drehzapfen befestigt werden, wie z. B. bei der Zange und der Schere. Soll eine größere Ausladung bzw. Greifweite erzielt werden, so wird jeder

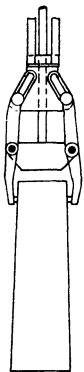


Fig. 22.

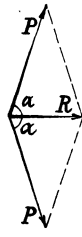


Fig. 23.

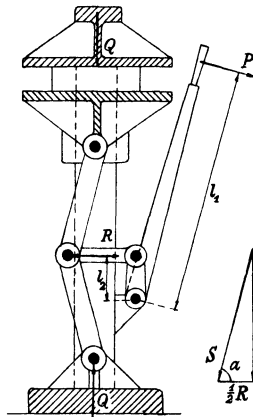


Fig. 24.

der beiden gleichen Hebel an einem besonderen Zapfen eines Zwischenstückes angebracht, wie z. B. bei der Blockzange nach Fig. 22 oder der Steinzange nach Fig. 47.

Sehr häufig erscheinen die Doppelhebel als Kniehebel: An demselben Zapfen greifen drei Hebel an, von denen gewöhnlich zwei einander gleich sind und mit dem dritten in jeder Lage gleiche Winkel α einschließen. Sind die

in den Richtungen der beiden gleichen Hebel wirkenden Kräfte P und die im dritten angreifende Kraft R , so ergibt die Fig. 23

$$R = 2 \cdot P \cdot \cos \alpha$$

bzw.

$$P = \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha} \tag{7}$$

Beispiel 12. Für die Buchbinderpresse nach Fig. 24, die auf einem Fußgestell zwei Führungssäulen trägt, an denen sich der untere Tisch auf und ab verschiebt, während sich das gepresste Stück gegen die obere Deckplatte legt, ist die erzeugte Druckkraft Q anzugeben, wenn die Zugkraft $P = 15 \text{ kg}$ beträgt

und das Hebelverhältnis $\frac{l_1}{l_2} = \frac{75}{10}$.

Die Verbindung der Formeln (2) und (7) ergibt

$$R = P \cdot \frac{l_1}{l_2} = 2 \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

und wie das zugehörige Kräfterdreieck zeigt, ist

$$S = \frac{Q}{\sin \alpha},$$

mithin

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Hieraus folgt die Zusammenstellung:

$\alpha = 55^\circ$	65°	75°	80°	85°	88°
$\operatorname{tg} \alpha = 1,428$	2,145	3,732	5,671	11,430	28,636
$Q = 80,3$	120,6	209,9	319,0	642,8	1610,8 \text{ kg.}

Man erkennt, daß die Anordnung nur für Winkel von mehr als 70° vorteilhaft ist, daß sie aber bei Winkeln, die in der Nähe von 90° liegen, sehr bedeutende Druckkräfte liefert, wie die Fig. 25 zeichnerisch darstellt.

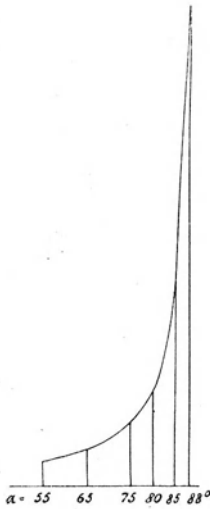


Fig. 25.

Beispiel 13. Bei dem Steinbrecher nach Fig. 26 beträgt der Winkel α bei der gezeichneten Mittelstellung des Einstellkeiles zwischen 74° und 88° . Bei großen Stücken ist die hier in die Brechbacke gelegte Hebelübersetzung etwa $\frac{1}{2}$, bei kleinen etwa 1. Anzugeben ist die größte auf die Schubstange kommende Zugkraft P für die Brechkraft $Q = 100 \text{ t}$.

Die plattenförmigen Kniehebel aus Gußeisen sind so gebaut, daß sie bei einer Erhöhung des Brechdruckes um $\frac{1}{3}$ brechen. Man erhält hiernach bei $\alpha = 88^\circ$ mit den Bezeichnungen der Fig. 26 als Bruchkraft

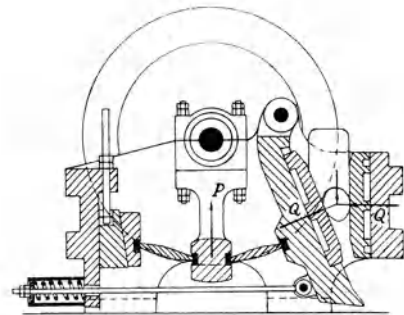


Fig. 26.

$$S = \frac{4}{3} \cdot Q \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{133,3 \cdot 1}{0,9994} \sim 134 \text{ t.}$$

Die Schubstangenkraft wird nach Formel (8)

$$P = 2Q \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 0,0349 \sim 7 \text{ t.}$$

Wenn die Kniehebel in die Strecklage kommen, genügt eine verhältnismäßig kleine Schubstangenkraft P , um eine sehr bedeutende Druckkraft Q zu erzielen, falls nicht die elastische Nachgiebigkeit der Hebel die Kraftwirkung herabsetzt (vgl. Bd. IV). Da die Hebel beim Überschreiten der Strecklage wieder auseinandergehen, so bleibt man zur Sicherheit stets etwas unter der Strecklage. Nur im Fall der Reibungskupplung von Dohmen-Leblanc (Fig. 65) werden die federnd ausgebildeten Kniehebel absichtlich durch die Strecklage durchgedrückt, um eine vollkommene Sicherheit gegen unbeabsichtigtes Lösen zu haben.

Beispiel 14. Auf den Honeschen Einseilgreifer vom Fassungsvermögen $Q = 1,5 \text{ m}^3$ Kohle = 1250 kg nach Fig. 27, dessen Gewicht G sich zusammensetzt aus $G_1 = 900 \text{ kg}$ des inneren Schiebers, $G_2 = 200 \text{ kg}$ beider Schaufeln,

$G_3 = 1140$ kg des festen Obergestelles, wirkt durch Vermittlung eines Flaschenzuges auf den inneren Schaufeldrehzapfen das $\ddot{u}_1 = 3,56$ fache des gesamten Seilzuges S , auf den äußeren Lenkerdrehzapfen jeder Schaufel das $\frac{\ddot{u}_2}{2} = 1,38$ fache

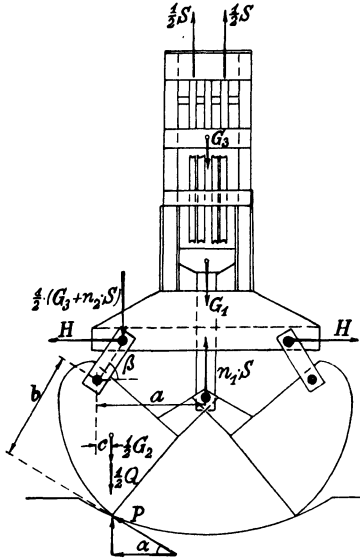


Fig. 27.

des Seilzuges S . Anzugeben ist die Greifkraft P , die erforderliche Größe des Seilzuges S in Abhängigkeit von dem Winkel α , sowie die zugehörige Beanspruchung H des Greiferquerhauptes.

Für jede Greiferstellung und entsprechende Belastung Q' muß gemäß der ersten Gleichgewichtsbedingung für den ganzen Greifer gelten:

$$S + 2 \cdot P \cdot \sin \alpha = G + Q' \quad (9)$$

Ferner besteht in bezug auf den äußeren Drehzapfen jeder Schaufel die Momentengleichung

$$P \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (\ddot{u}_1 \cdot S - G_1) \cdot a - \frac{1}{2} \cdot (G_2 + Q') \cdot c, \quad (9a)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (\ddot{u}_1 \cdot S - G_1) \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} (G_2 + Q') \cdot \frac{c}{b}.$$

Wird dieser Ausdruck in die erste Gleichung eingesetzt, so ergibt sich nach Auflösung der Klammern⁷⁾

$$S \cdot \left(1 + \frac{a}{b} \cdot \ddot{u}_1 \cdot \sin \alpha \right) = G_1 \cdot \left(1 + \frac{a}{b} \cdot \sin \alpha \right) + G_2 \cdot \left(1 + \frac{a}{b} \cdot \sin \alpha \right) + G_3 + Q' \cdot \left(1 + \frac{c}{b} \cdot \sin \alpha \right)$$

$$\text{oder} \quad S = \frac{G + Q'}{1 + \frac{a}{b} \cdot \ddot{u}_1 \cdot \sin \alpha} + \frac{G_1 \cdot \frac{a}{b} + (G_2 + Q') \cdot \frac{c}{b}}{\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{a}{b} \cdot \ddot{u}_1} \quad (10)$$

Aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung für die Schaufeln folgt

$$H = P \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot (G_3 + \ddot{u}_2 \cdot S) \cdot \cos \beta \quad (11)$$

Angestellte Versuche⁷⁾ ergaben für feine und mittlere Kohlen ziemlich unvermittelt ineinander übergehend die Winkel α der Zusammenstellung, und die Aufzeichnung des Greifers für die verschiedenen Stellungen lieferte die beigesetzten Werte von β, a, b, c . Gemessen wurde ferner noch die gegriffene Menge Q . Gleichung (10) ergibt dann den Seilzug S und darauf Gleichung (9a) die Greif- bzw. Schließkraft P , endlich Gleichung (11) die wagerechte, auf das Querhaupt wirkende Kraft H .

Seilzug und Schließkraft unterscheiden sich demnach nicht wesentlich voneinander. Ein mit geringem Gewicht G arbeitender Greifer muß gemäß Gleichung (9) kleinen Seilzug S haben, was durch die Vergrößerung von $\frac{a}{b} \cdot \ddot{u}_1$ erreicht wird.

⁷⁾ Pfahl, Z. d. V. d. I. 1912.

α	56°	40°	26°	16°	0°	0°		
β	77°		62½°	54°	50½°	73½°		
cos β	0,2250		0,4618	0,5878	0,6361	0,2840		
cos α	0,5592	0,7660	0,8988	0,9613	1,0	1,0		
sin α	0,8290	0,6428	0,4384	0,2756	0	0		
a	62		69,5	73,5	74,5	64 cm		
b	92	94	102	96, 102	103, 104	95 „		
c	-18,5		-10,5	-2,5	+7	+42 „		
$\frac{a}{b}$	0,6740	0,7395	0,6815	0,7658	0,7205	0,720	0,6738	
$\frac{c}{b}$	-0,0201	-0,0112	-0,1030	-0,0260	-0,0245	+0,0680	+0,0673	+0,4422
Q	0		0	0	400	1250 kg		
	750	832	1085	1020	1313	1555	2640	3490 kg
	<u>176</u>	<u>158</u>	<u>149</u>	<u>137</u>	<u>133</u>	<u>112</u>	<u>0</u>	<u>0</u> „
S	926	990	1234	1157	1446	1667	2640	3490 kg
P	809	972	1245	1237	1535	1779	2994	3561 „
	452	744	954	1112	1381	1710	2994	3561 „
	<u>272</u>	<u>578</u>	<u>657</u>	<u>810</u>	<u>921</u>	<u>1421</u>	<u>1522</u>	<u>704</u> „
H	724	1322	1611	1922	2302	3122	4516	4265 kg

Die Hebelanordnung des Greifers in Fig. 27 wird als umgekehrter Kniehebel bezeichnet, weil die Zugkraft den überstumpfen Winkel der beiden Kniehebel halbiert. Das mechanische Kennzeichen der Knie-

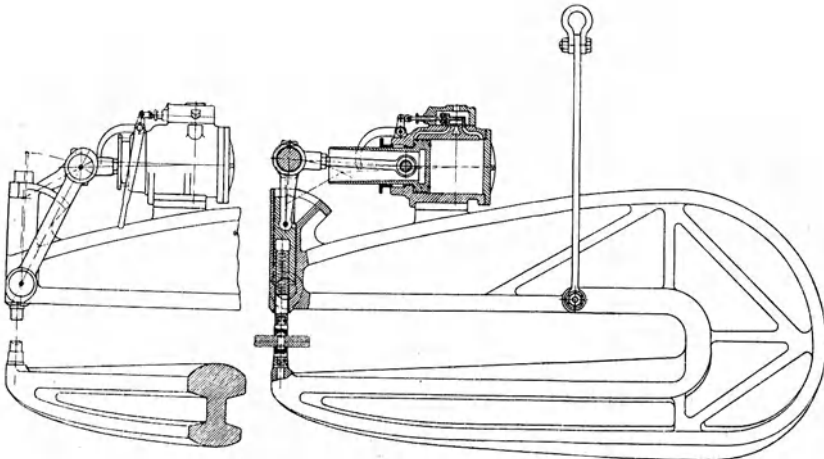


Fig. 28.

hebel ist, daß am Ende der Bewegung, beim eigentlichen Kniehebel nach der Strecklage, beim umgekehrten nach der Klapplage hin, die von ihnen ausgeübte Kraft ganz erheblich ansteigt (Fig. 25). Man

bezeichnet deshalb oft jede beliebige Hebelverbindung, die dasselbe leistet, als Kniehebelverbindung.

Beispiel 15. Anzugeben ist der Preßdruck, der von der Güldnerschen Nietmaschine nach Fig. 28⁸⁾ ausgeübt wird, wenn der Zylinderdurchmesser $d = 30,5$ cm beträgt und der Preßluftüberdruck $p = 7$ at, und zwar für verschiedene Stellungen des Kolbens vom Hub $s = 29$ cm.

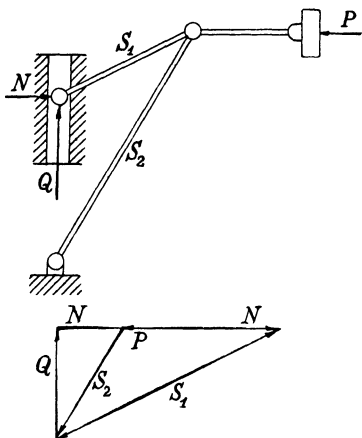


Fig. 29.

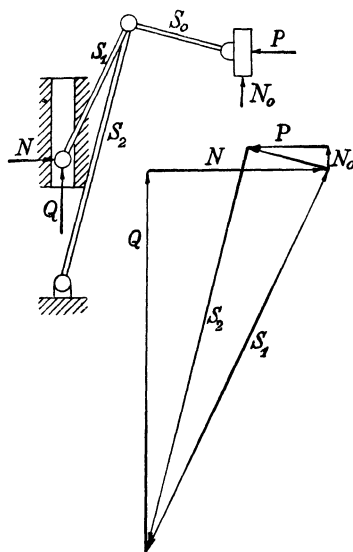


Fig. 30.

Die Hebelverbindung ist in Fig. 29 für die Anfangsstellung besonders herausgezeichnet, in Fig. 30 für die Endlage. Darunter sind die zugehörigen Kräfte-

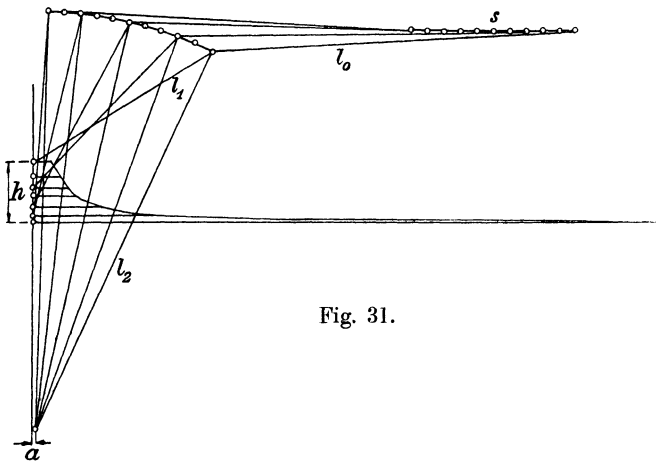


Fig. 31.

⁸⁾ Schlesinger, Z. d. V. d. I. 1907.

dreiecke gesetzt, das der Fig. 30 im halben Maßstab des der Fig. 29. In Fig. 31 sind 10 verschiedene Lagen der Hebelverbindung zusammengezeichnet und zwar für die Kolbenstangenlänge $l_0 = 64$ cm, die Druckstangenlänge $l_1 = 36$ cm, die Zugstangenlänge $l_2 = 72$ cm, die Exzentrizität $a = 0,8$ cm, die den Stempelhub $h = 10,8$ cm ergeben. Die entsprechenden Preßkräfte Q enthält die folgende Zusammenstellung, deren Werte in Fig. 31 eingetragen sind.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	$Q = 4,8$	$7,25$	$9,35$	$12,0$	$15,5$	$19,63$	$25,0$	$31,25$	$42,80$	$73,75$	$166,5$ t.

2. Die Hebelwagen.

Eine wichtige Anwendung des Hebels bilden die Hebelwagen. Die verbreitetste ist die gleicharmige Hebelwaage nach Fig. 32. Ihre wagerechte Drehachse O wird zur Verminderung der Reibung durch zwei Stahlschneiden gebildet, die auf zwei mit dem Gestell verbundenen Pfannen lagern. In gleichem Abstand l von der Drehachse befinden sich bei A und B ebenfalls Schneiden, an denen die beiden Wageschalen von gleichem Gewicht hängen, und zwar liegen die drei Schneiden AOB in derselben Ebene. Der Wagebalken trägt noch einen Zeiger von der Länge r , der bei wagerechter Lage des ersten auf dem Nullpunkt einer gleichmäßigen Teilung steht.

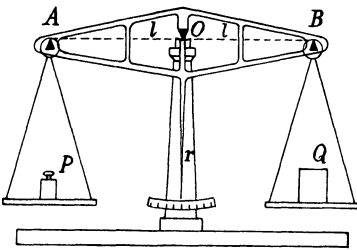


Fig. 32.

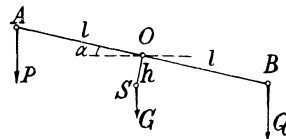


Fig. 33.

Damit nun diese Lage eine stabile Gleichgewichtslage des Wagebalkens ist, muß nach Band I Absatz 14 sein Schwerpunkt S unterhalb der Unterstüzung O liegen. Fiele S mit O zusammen, so wäre der Wagebalken ja in jeder Lage im unentschiedenen Gleichgewicht und die Waage also unbrauchbar. Daran ändert sich nichts, wenn die gleich schweren Schalen und gleiche Gewichte beiderseits frei beweglich angehängt werden.

Ist dagegen die Last Q um ein geringes Übergewicht Q' größer als das auf der anderen Schale stehende Vergleichsgewicht P , so dreht sich der Balken etwas nach der Seite von Q . Dabei tritt nun das um die Strecke h unter O angreifende Eigengewicht G des Balkens auf die andere Seite und unterstützt so das dort angebrachte Gewicht P mit seinem Moment derart, daß nach einem bestimmten Ausschlag um den Winkel α wieder Gleichgewicht besteht (Fig. 33). Die Momentengleichung hierfür lautet:

$$Q \cdot l \cdot \cos \alpha = P \cdot l \cdot \cos \alpha + G \cdot h \cdot \sin \alpha$$

oder, da $Q - P = Q'$ ist,

$$Q' = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (12)$$

Für eine bestimmte Wage sind die Größen G , h und l unveränderlich, wenn man davon absieht, daß die Strecke h durch ein Schraubgewicht etwas verstellbar werden kann. Die Tangente des Ausschlagwinkels nimmt zwischen $\alpha = 0^\circ$ und 90° alle Werte zwischen 0 und ∞ an, so daß man scheinbar jede beliebige Überlast Q' ohne Anwendung von Vergleichsgewichten nur durch den Ausschlagwinkel messen kann.

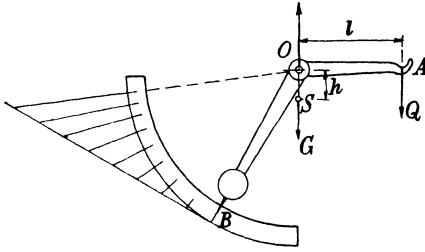


Fig. 34.

Man macht hiervon Gebrauch bei den Garn- und Briefwagen nach Fig. 34. Die gezeichnete Stellung ist die Gleichgewichtslage der unbelasteten Wage, in der der Schwerpunkt S des Wagebalkens um die Strecke h senkrecht unter der Drehachse O liegt. Wird jetzt in den Haken bei A eine Last Q eingehängt, so nimmt die Wage eine neue, um den Winkel α gegen die erste geneigte Lage an, und zwar wird

$$Q \cdot l \cdot \cos \alpha = G \cdot h \cdot \sin \alpha$$

oder

$$Q = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (12a)$$

Ist der Ausschlag für das Gewicht $Q = 10 \text{ g}$ errechnet, so ermittelt sich nach Gleichung (12 a) die weitere Teilung, indem man auf der Senkrechten zu OB , der Tangente an diesen Arm, dieselbe Länge gleichmäßig aufträgt und von den Teilpunkten die Strahlen nach O zieht (Fig. 34). Man bemerkt, daß sich die Teilstriche auf dem Meßbogen bei größerer Belastung immer näher kommen, weshalb die Anwendbarkeit der Wage nur auf Ausschläge bis zu etwa 40° beschränkt bleibt. Man verdoppelt den Meßbereich dadurch, daß man in der Anfangslage den Hebelarm l um etwa 40° nach oben gegen die Wagerechte neigt, während natürlich der Schwerpunkt S des Winkelhebels lotrecht unter der Aufhängeachse O liegen muß. Dann kann dieselbe Teilung von dem Punkt O der Fig. 34 nach rechts unten nochmals aufgetragen werden. Der Abstand der einzelnen Teilstriche ist also bei der halben Belastung dieser Wage am größten.

Beispiel 16. Eine Materialprüfmaschine für die Höchstbelastung $Q = 3000 \text{ kg}$ habe den größten Ausschlag $\alpha = 24^\circ$. Ihr kleiner Hebelarm von der Länge $l = 0,75 \text{ cm}$ sei im Ruhezustand um $\frac{\alpha}{2}$ gegen die Wagerechte nach oben geneigt und bei der Höchstbelastung um den gleichen Winkel nach unten. Der lange

Hebelarm habe das Eigengewicht $G_0 = 11,5$ kg, dessen Schwerpunkt im Abstände $h_0 = 54$ cm von der Drehachse angreift; im Abstände $h = 100$ cm wird das Hauptgewicht G angebracht, dessen Größe bestimmt werden soll.

Es gilt dann für die Mittelstellung

$$\frac{Q}{2} \cdot l = (G \cdot h + G_0 \cdot h_0) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (13)$$

Hieraus folgt

$$G = \frac{Q}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{l}{h} - G_0 \cdot \frac{h_0}{h} = \frac{1500 \cdot 0,75}{0,2079 \cdot 100} - 11,5 \cdot \frac{54}{100},$$

mithin

$$G = 54,11 - 6,21 = 47,9 \text{ kg.}$$

Beispiel 17. Für einen Wagenbalken nach Fig. 32 seien folgende Abmessungen ermittelt: $G = 1,508$ kg, $h = 1,50$ cm, $l = 25,1$ cm, Entfernung der unteren Teilung von der Drehachse $r = 30$ cm. Anzugeben ist der Abstand des Teilstriches vom Nullpunkt, der einem Übergewicht $Q' = 10$ g entspricht.

Man erhält aus Gleichung (12)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q'}{G} \cdot \frac{l}{h} = \frac{0,010}{1,508} \cdot \frac{25,1}{1,50} = 0,111.$$

Für den Zweck der Rechnung kann genau genug an Stelle des kleinen Bogens α seine Tangente gesetzt werden. Damit ergibt sich die gesuchte Länge

$$x = r \cdot \alpha \sim 30 \cdot 0,111 \approx 3,33 \text{ cm.}$$

Beispiel 18. Zu berechnen ist die Belastung Q' der Wage des Beispiels 17, die für eine Höchstbelastung von 20,5 kg, einschließlich der Schalen von je 0,25 kg Gewicht, gebaut ist, bei welcher der Zeiger noch einen Ausschlag von $x = 1$ mm angibt.

Aus der Gleichung (12) folgt mit $x \sim r \cdot \operatorname{tg} \alpha$ und den obigen Zahlenwerten

$$Q' = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{x}{r} = 1508 \cdot \frac{1,50}{25,1} \cdot \frac{0,1}{30} = 0,3 \text{ g.}$$

Es ist also das Verhältnis

$$e = \frac{Q'}{Q} = \frac{0,3}{20500} = \frac{1}{68333}.$$

Man bezeichnet das Verhältnis der Zusatzlast Q' , die noch einen deutlichen Ausschlag x an der Zeigerspitze gibt⁹⁾, zur Belastung Q der Wage als ihre Empfindlichkeit:

$$e = \frac{Q'}{Q} = \frac{G}{Q} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{x}{r}. \quad (14)$$

Sie entspricht unmittelbar dem Gewicht des Wagebalkens, seinem Schwerpunktsabstand von der Drehachse und dem gewählten Ausschlag x , der im gewöhnlichen Leben rund 1 mm beträgt, bei feinen Wagen in der Hand eines sorgfältigen Beobachters rund 0,2 mm ausmacht; sie ist umgekehrt entsprechend der betreffenden Belastung, der Länge des Wagebalkens und des Zeigers. Sie wird unter sonst gleichen Verhältnissen am kleinsten für die Höchstbelastung der Wage, jedoch

⁹⁾ Lawaczek, D. p. J. 1906.

ist das nicht mehr bemerkte Fehlgewicht Q' bei jeder Belastung einer richtig zeigenden Wage das gleiche.

Beispiel 19. Bei einer Präzisionswage sei das Gewicht des Wagebalkens $G = 273$ g, die Höchstbelastung einschließlich des Schalgengewichtes von je 25 g $Q = 550$ g, der Schwerpunktsabstand von der Drehachse $h = 0,15$ cm, die Länge der Wagebalken $l = 12,5$ cm, die Zeigerlänge $r = 19,5$ cm und der deutlich wahrnehmbare Ausschlag $x = 0,2$ mm. Anzugeben ist ihre Empfindlichkeit e für die Höchstbelastung.

Es ist nach Formel (14)

$$e = \frac{273 \cdot 0,15 \cdot 0,02}{550 \cdot 12,5 \cdot 19,5} = \frac{1}{163\,700}.$$

Während für eine Krämerwage $e = 60\,000$ genügt, ist dieser Wert hier nicht ausreichend. Er kann dadurch verbessert werden, daß der Wagebalken statt aus Messing aus Duralumin hergestellt wird, was sein Gewicht im Verhältnis $\frac{2,85}{8,57}$ verringert. Dadurch sinkt die Empfindlichkeit auf

$$e' = \frac{1}{492\,400}.$$

Das Zusatzgewicht Q' , das bei Vollbelastung der Wage noch den Ausschlag $x = 0,2$ mm ergibt, beträgt dann

$$Q' = Q \cdot e = \frac{550}{492\,400} \approx 1,12 \text{ mg},$$

ist also noch immer ziemlich groß. Es kann durch Verkleinerung von h auf 0,05 cm auf den dritten Teil heruntergebracht werden. Eine weitere Verringerung liefert die Beobachtung der Zeigerspitze mit einer Lupe.

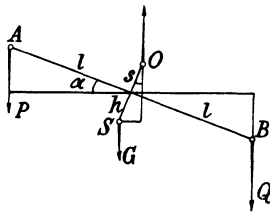


Fig. 35.

Es ist noch zu erwähnen, warum die drei Drehachsen A , O , B der Fig. 32 in derselben Ebene liegen müssen. Befindet sich die Drehachse O um die Strecke s über der Mitte des Balkens $AB = 2l$ (Fig. 35) und ist die Wage in B um das kleine Übergewicht $Q' = Q - P$ mehr belastet, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente in bezug auf die Drehachse O bei der geneigten Lage des Balkens

$$Q \cdot (l \cdot \cos \alpha - s \cdot \sin \alpha) = G \cdot (h + s) \cdot \sin \alpha + P \cdot (l \cdot \cos \alpha + s \cdot \sin \alpha).$$

Hieraus folgt mit $Q = P + Q'$

$$Q' \cdot l \cdot \cos \alpha = +Q' \cdot s \cdot \sin \alpha + G \cdot (h + s) \cdot \sin \alpha + 2 \cdot P \cdot s \cdot \sin \alpha,$$

also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q' \cdot l}{(Q' + G + 2P) \cdot s + G \cdot h}. \quad (15)$$

Der Klammerausdruck im Nenner stellt das Gesamtgewicht dar, das an dem Wagebalken angreift. Der Ausschlag und damit die Empfindlichkeit hängt also bei fehlerhafter Bauart der Wage von der Gesamtbelastung ab und wird um so kleiner, je größer der Fehler s ist. Innerhalb der jeweiligen Empfindlichkeitsgrenze sind die Angaben der Wage aber richtig.

Beispiel 20. Für die Wagen der Beispiele 17 und 18 bzw. 19 werde die Empfindlichkeit bei voller Höchstbelastung, der halben Last und $\frac{1}{10}$ der Vollast berechnet, wenn im ersteren Fall $s = 0,6$ beträgt und im zweiten $s = 0,09$ mm.

Man erhält aus Gleichung (15), wenn in dem Klammerausdruck des Nenners das kleine Q' gegenüber den großen Werten $G + 2P$ vernachlässigt wird:

$$e = \frac{G \cdot h + (G + 2Q) \cdot s}{Q \cdot l} \cdot \frac{x}{r},$$

also für die Krämerwage

$$e_1 = \frac{1,508 \cdot 1,5 + 42,508 \cdot 0,06}{20,5 \cdot 25,1} \cdot \frac{0,1}{30} = \frac{1}{32\,080},$$

$$e_2 = \frac{1,508 \cdot 1,5 + 22,508 \cdot 0,06}{10,5 \cdot 25,1} \cdot \frac{0,1}{30} = \frac{1}{20\,850},$$

$$e_3 = \frac{1,508 \cdot 1,5 + 2,208 \cdot 0,06}{0,7 \cdot 25,1} \cdot \frac{0,1}{30} = \frac{1}{2\,200}.$$

Die Wage gibt immer noch einen Unterschied an von

$$Q'_1 = \frac{20\,500}{32\,080} = 0,64 \text{ g,}$$

bzw.

$$Q'_2 = \frac{10\,500}{20\,850} \approx 0,50 \text{ g,}$$

bzw.

$$Q'_3 = \frac{700}{2\,200} \approx 0,32 \text{ g.}$$

Für die Chemikerwage mit Duraluminbalken ist

$$e_1 = \frac{90,8 \cdot 0,15 + 1190,8 \cdot 0,09}{550 \cdot 12,5} \cdot \frac{0,02}{19,5} = \frac{1}{55\,500},$$

$$e_2 = \frac{90,8 \cdot 0,15 + 690,8 \cdot 0,09}{300 \cdot 12,5} \cdot \frac{0,02}{19,5} = \frac{1}{50\,860},$$

$$e_3 = \frac{90,8 \cdot 0,15 + 195,8 \cdot 0,09}{55 \cdot 12,5} \cdot \frac{0,02}{19,5} = \frac{1}{21\,460}.$$

Hierbei ist $Q'_3 = \frac{55\,000}{21\,450} = 2,56$ mg der kleinste Gewichtsunterschied, den die Wage bei $\frac{1}{10}$ Belastung noch mit Sicherheit angibt; er steigt bei Vollbelastung

auf $Q'_1 = \frac{550\,000}{55\,500} = 9,92$ mg. Freilich ist der Fehler s hier so groß angenommen worden, wie er nur ausnahmsweise vorkommen kann.

Die Angaben der Wage werden falsch, wenn die Schalen nicht genau gleiches Gewicht haben oder die Hebellängen verschieden sind. Der Fehler wird beseitigt, wenn man die Wägung zweimal vornimmt, und zwar bei der zweiten Wägung die Last mit den Gewichten vertauscht.

Sind die Gewichte der Schalen verschieden, aber die Hebellängen gleich, so erhält man, wenn der Zeiger der Wage auf Null einspielt, bei der ersten Wägung $Q = P_1$ und nach Vertauschung von Gewichten und Last $Q = P_2$. Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$Q = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2), \quad (16)$$

das wahre Gewicht ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Angaben.

Sind auch die Hebellängen verschieden (Fig. 36), so erhält man bei der ersten Wägung die Momentengleichung $Q \cdot l_1 = P_1 \cdot l_2$ und bei der zweiten $Q \cdot l_2 = P_2 \cdot l_1$. Aus der Multiplikation beider ergibt sich

$$Q = \sqrt{P_1 \cdot P_2}, \quad (17)$$

das wahre Gewicht ist gleich dem geometrischen Mittel beider Angaben.

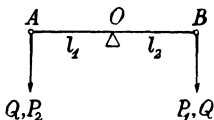


Fig. 36.

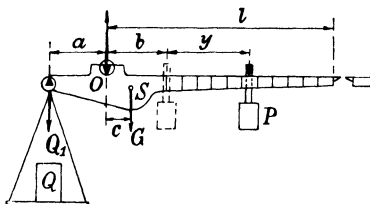


Fig. 37.

Beispiel 21. Infolge des Unterschiedes der Wageschalengewichte um 60 g ergibt eine Waage das Gewicht einer Last Q bei der ersten Wägung zu 0,970 kg und bei der zweiten nach Vertauschung von Last und Gewicht zu 1,030 kg.

Das wahre Gewicht beträgt dann nach Formel (16)

$$Q = \frac{1}{2} \cdot (0,970 + 1,030) = 1,000 \text{ kg.}$$

Wenn es nicht sicher ist, daß der Fehler von den Wageschalen herrührt, so ist nach Formel (17) anzusetzen

$$Q = \sqrt{0,970 \cdot 1,030} = \sqrt{0,9991} = 0,99955 \text{ kg.}$$

Bei kleinen Abweichungen, wie sie bei Wagen nur vorkommen können, ist das geometrische Mittel gleich dem arithmetischen.

Häufige Anwendung findet die *Laufgewichtswaage*, die aus einem ungleicharmigen Hebel besteht, auf dessen längeren Arm ein Gewicht P so verschoben wird, daß der Wagebalken unter der Einwirkung einer bestimmten Last Q wagerecht steht (Fig. 37). Auch hier müssen die drei Schneiden in derselben Ebene liegen, damit sich die Empfindlichkeit nicht ändert. Der Schwerpunkt S des Wagebalkens ist aber gewöhnlich um eine Strecke c von der Unterstüttungsschneide nach dem längeren Arm hin verschoben.

Ist Q_1 das Gewicht der Wageschale, so besteht bei unbelasteter Waage die Momentengleichung

$$Q_1 \cdot a = P \cdot b + G \cdot c$$

und, wenn die Last Q aufgebracht ist, nach der Verschiebung des Laufgewichtes um die Strecke y

$$(Q_1 + Q) \cdot a = P \cdot (b + y) + G \cdot c.$$

Durch Subtraktion folgt hieraus

$$Q = \frac{P}{a} \cdot y. \quad (18)$$

Das Gewicht der Last entspricht dem Abstand y des Laufgewichtes vom Anfangspunkt der Teilung und ist unabhängig vom Gewicht des Wagebalkens.

Beispiel 22. Bei einer Laufgewichtswage, deren kurzer Hebelarm $a = 4,03$ cm beträgt, soll 1 cm der Teilung $\frac{1}{2}$ kg entsprechen. Zu bestimmen ist die Größe des Laufgewichtes.

Man erhält sogleich aus Formel (18)

$$P = \frac{Q \cdot a}{y} = \frac{0,5 \cdot 4,03}{1} = 2,015 \text{ kg.}$$

Bei dieser Wage sei ferner

$$G = 2,927 \text{ kg, } Q_1 = 6,472 \text{ kg, } c = 5,82 \text{ cm,}$$

das letztere Maß wird nach den Angaben in Beispiel 2 bestimmt. Dann ist der ersten Momentengleichung, die zur Formel (18) führte, der Abstand von der Aufhängeschneide bis zum Beginn der Teilung zu entnehmen:

$$b = \frac{Q_1}{P} \cdot a - \frac{G}{P} \cdot c = \frac{6,472}{2,015} \cdot 4,03 - \frac{2,927}{2,015} \cdot 5,82 = 4,49 \text{ cm.}$$

Bei den Laufgewichtswagen kann der noch mit Sicherheit bemerkte Ausschlag am freien Ende gegenüber einer feststehenden Schneide je nach der Sorgfalt, die darauf verwendet wird, zu $x = 2$ bis $0,5$ mm angesetzt werden. Die Wage stellt sich dabei um den kleinen Winkel α schräg, und es gilt dann bei dem kleinen Übergewicht $\pm Q'$ und der Unsicherheit $\pm y'$ der Einstellung des Laufgewichtes

$$(Q_1 + Q \pm Q') \cdot a \cdot \cos \alpha + G \cdot (c \cdot \cos \alpha \mp h \cdot \sin \alpha) + P \cdot (b + y \mp y') \cdot \cos \alpha.$$

Nun ist

$$P \cdot b = Q_1 \cdot a - G \cdot c,$$

$$P \cdot y = Q \cdot a \quad \text{und} \quad P \cdot y' = Q' \cdot a,$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{x}{l}.$$

Damit ergibt sich die Ungenauigkeit der Wage¹⁰⁾

$$e_o = G \cdot h \cdot \frac{x}{l}$$

und somit die Empfindlichkeit als

$$e = \frac{e_o}{a \cdot (Q + Q_1)} = \frac{G}{Q + Q_1} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{x}{l}. \quad (19)$$

Beispiel 23. An der Laufgewichtswage des Beispiels 22 sei noch aufgemessen $h = 1,54$ cm, $l = 108,5$ cm. Anzugeben ist ihre Empfindlichkeit für die Höchstbelastung $Q = 50$ kg, die halbe Vollast $Q = 25$ kg und die Belastung $Q = 1$ kg mit $x = 2$ mm.

Man erhält aus Formel (19)

$$e_1 = \frac{2,927}{56,472} \cdot \frac{1,54}{4,03} \cdot \frac{0,2}{108,2} = \frac{1}{27380},$$

$$e_2 = \frac{1}{15250},$$

$$e_3 = \frac{1}{3620}.$$

Man bemerkt, daß eine gute Empfindlichkeit nur erzielt werden kann, wenn das Hebelgewicht G klein gehalten wird und sein Schwerpunkt nur wenig unterhalb der Drehachse liegt.

¹⁰⁾ Herre, Z. d. V. d. I. 1917.

Das Übergewicht, das nicht mehr bemerkt wird, ist dann

$$Q' = (Q + Q_1) \cdot e$$

$$Q' = \frac{56472}{27380} = \frac{31472}{15250} = \frac{7472}{3622} \sim 2 \text{ g.}$$

Für die Beurteilung der richtigen Wage, bei der die drei Schneiden in derselben Ebene liegen, genügt also die Angabe einer Empfindlichkeit (vgl. S. 21), und naturgemäß wird die bei der Höchstbelastung zutreffende angegeben.

Für große Lasten ist die unmittelbare Gewichtsvergleichung nicht zugänglich, man benutzt dann vielfach die Brückensäge, deren Schema die Fig. 38 zeigt¹¹⁾. Die Last Q , die auf der Platte der Wage liegt, übt auf die beiden Stützschnitten den Druck N aus und ruft in der zugehörigen Hängestange die Spannkraft S_1 hervor. Man erhält

$$N = Q \cdot \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad S_1 = Q \cdot \frac{l-x}{l}.$$

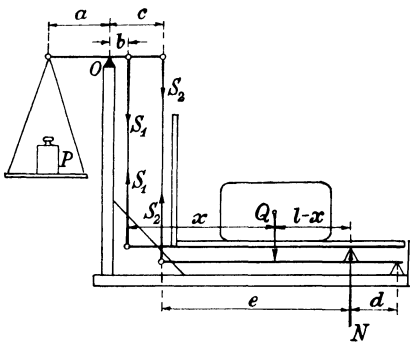


Fig. 38.

Die Kraft N drückt auf den unteren Tragbalken und wird zum größeren Teil durch das benachbarte Schneidenspaar aufgenommen, der andere Teil verursacht in der zweiten Hängestange die Zugkraft

$$S_2 = N \cdot \frac{d}{e+d} = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{d}{e+d}.$$

Der obere Wagebalken wird durch das Gewicht P im Gleichgewicht gehalten. Das Schalengewicht wird dazu benutzt, die Gewichte

der Wageplatte, Zugstangen usw. auszugleichen, so daß die unbelastete Wage genau einspielt.

Die Momentengleichung für die Stützachse O des Wagebalkens lautet

$$P \cdot a = S_1 \cdot b + S_2 \cdot c = Q \cdot \frac{l-x}{l} \cdot b + Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{d}{e+d} \cdot c.$$

Daraus folgt

$$P \cdot a = Q \cdot b - Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(b - \frac{d}{e+d} \cdot c \right).$$

Damit nun die Lage der Last auf der Platte keinen Einfluß hat, muß das zweite Glied, in dem die Länge x vorkommt, verschwinden. Es muß also die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{b}{c} = \frac{d}{e+d}, \quad (20)$$

der untere Tragbalken muß in demselben Verhältnis geteilt sein wie die Lastseite des oberen Wagebalkens.

Dann ist $P \cdot a = Q \cdot b$

¹¹⁾ Quintenz 1821.

und für $a = 10 b$:

$$10 P = Q,$$

weshalb die Bauart auch Dezimalwage heißt.

Für den Wagebalken gelten naturgemäß die oben entwickelten Bedingungen.

Beispiel 24. An einer Dezimalwage sei $e = 65,2$ cm, $d = 12,1$ cm, $a = 15,0$ cm. Anzugeben ist die Größe von b und c (Fig. 38).

Man hat sofort

$$b = \frac{1}{10} a = 1,50 \text{ cm.}$$

Damit liefert die Gleichung (20)

$$c = \frac{b(e+d)}{d} = \frac{1,50 \cdot 77,3}{12,1} = 9,50 \text{ cm.}$$

Zentesimalwagen für Fuhrwerke u. dgl. bestehen meistens aus mehreren Hebelsystemen, die im Verhältnis 1 : 10 geteilt sind, wie z. B.

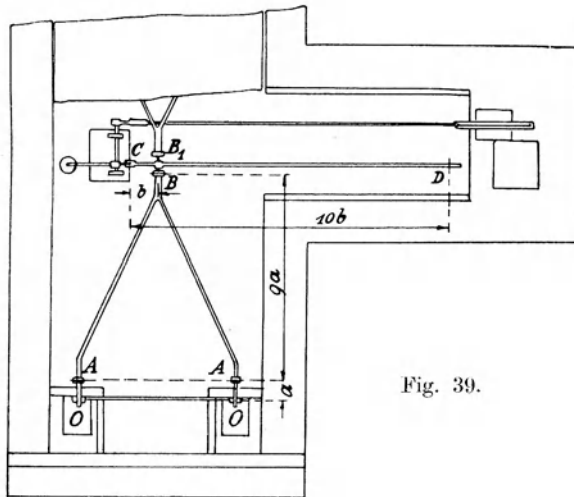
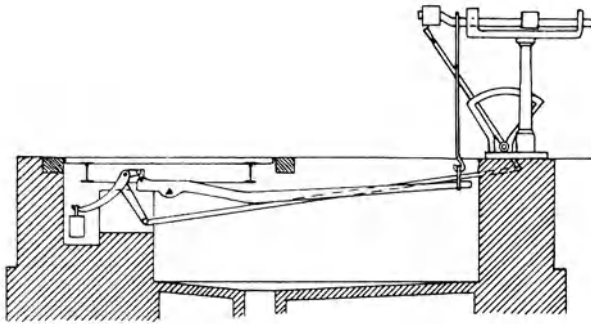


Fig. 39.

die Fig. 39 zeigt. Die Hebel a und a_1 ruhen auf dem Fundament mit den Schneiden O und O_1 , die Fahrbahn ist darauf an den Stellen A

und A_1 aufgebracht. Sie übertragen $\frac{1}{10}$ der ganzen Last in den Schneiden B und B_1 auf einen zweiten, ebenfalls im Verhältnis 1 : 10 geteilten Hebel, dessen ruhende Schneide C an der Entlastungsvorrichtung aufgehängt ist. Von der Endschneide D aus greift eine Zugstange an dem Laufgewichtsbalken an.

Um die Empfindlichkeit der aus mehreren Hebeln mit Zugstangen zusammengesetzten Wagen zu bestimmen, werde von dem Schema der

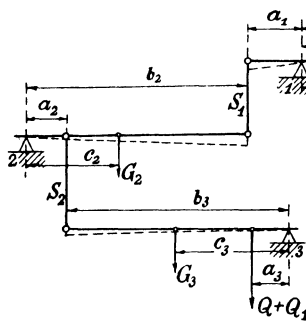


Fig. 40.

Fig. 40) ausgegangen. Vorausgesetzt werde, daß die Hebel wagerecht und die Zugstangen sowie die Wirkungslinien der Lasten lotrecht verlaufen, daß ferner an jedem Hebel die Schneiden in derselben Ebene liegen. Wird die Last Q einschließlich des Tafelgewichtes Q_1 um eine kleine Überlast Q' vermehrt, so stellen sich die Hebel um die kleinen

Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ schräg, und es gilt, wenn G_1, G_2, G_3 die Gewichte der drei Hebel einschließlich der Stangengewichte bedeuten, die von den festen Schneiden in wagerechter Richtung um die Strecken c_1, c_2, c_3 entfernt sind und in lotrechter um die Strecken h_1, h_2, h_3 , für den

Hebel 3:

$$(Q_1 + Q + Q') \cdot a_3 \cdot \cos \alpha_3 = S'_2 \cdot b_3 \cdot \cos \alpha_3 - G_3 \cdot c_3 \cdot \cos \alpha_3 + G_3 \cdot h_3 \cdot \sin \alpha_3,$$

Hebel 2:

$$S'_2 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha_2 = S'_1 \cdot b_2 \cdot \cos \alpha_2 - G_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 + G_2 \cdot h_2 \cdot \sin \alpha_2,$$

Hebel 1:

$$S'_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 = P \cdot (b_1 + y) \cdot \cos \alpha_1 + G_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 - G_1 \cdot h_1 \cdot \sin \alpha_1.$$

Hieraus folgt

$$S'_1 = P \cdot \frac{b_1 + y}{a_1} + G_1 \cdot \frac{c_1}{a_1} - G_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$S'_2 = S'_1 \cdot \frac{a_2}{b_2} - G_2 \cdot \frac{c_2}{b_2} + G_2 \cdot \frac{h_2}{b_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Werden diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$Q + Q_1 + Q' = P \cdot \frac{b_1 + y}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} + G_1 \cdot \frac{c_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} + G_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 \\ - G_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - G_2 \cdot \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} + G_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 - G_3 \cdot \frac{c_3}{a_3}.$$

Nun ist wieder $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x}{l}$, ferner liefert die Fig. 40

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \sin \alpha_1 &= b_2 \cdot \sin \alpha_2, \\ a_2 \cdot \sin \alpha_2 &= b_3 \cdot \sin \alpha_3, \end{aligned}$$

also für sehr kleine Winkel α , wie sie praktisch nur vorkommen, wo $\sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha$ ist,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{a_1}{b_2} = \frac{x}{l} \cdot \frac{a_1}{b_2}, \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{a_2}{b_3} = \frac{x}{l} \cdot \frac{a_1}{b_2} \cdot \frac{a_2}{b_3}. \end{aligned}$$

Für die wagerechte Hebellage gilt entsprechend

$$Q + Q_1 = P \cdot \frac{b_1 + y}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} + G_1 \cdot \frac{c_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} - G_2 \cdot \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} - G_3 \cdot \frac{c_3}{a_3} \quad (21)$$

Wird diese Gleichung von der obigen abgezogen, so folgt

$$Q' = -G_1 \cdot \frac{h_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \frac{x}{l} + G_2 \cdot \frac{h_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \frac{a_1}{b_2} \cdot \frac{x}{l} + G_3 \cdot \frac{h_3}{a_3} \cdot \frac{a_1}{b_2} \cdot \frac{a_2}{b_3} \cdot \frac{x}{l}$$

und damit die Empfindlichkeit¹²⁾

$$\begin{aligned} e = \frac{Q'}{Q + Q_1} &= \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{a_3(Q + Q_1)} \cdot \left(-G_3 \cdot h_3 \cdot \frac{a_1}{b_2} \cdot \frac{a_2}{b_3} \right. \\ &\quad \left. - G_2 \cdot h_2 \cdot \frac{a_1}{b_2} \cdot \frac{b_3}{a_2} + G_1 \cdot h_1 \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_1} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Beispiel 25. Die Fig. 40 gibt das Schema der in Fig. 39 gezeichneten Wage wieder, nur ist der Hebel 3 doppelt vorhanden. Es sei

$Q = 5000$ kg	$Q_1 = 550$ kg	$l = 90$ cm
$G_1 = 28,5$ „	$G_2 = 48$ „	$G_3 = 2 \cdot 52$ kg
$a_1 = 6$ cm	$a_2 = 28$ cm	$a_3 = 20$ cm
$b_1 = 12$ „	$b_2 = 280$ „	$b_3 = 200$ „
$h_1 = 0,5$ „	$h_2 = 4,5$ „	$h_3 = 2,5$ „
$c_1 = 2,5$ „	$c_2 = 125$ „	$c_3 = 95$ „

Anzugeben ist die Empfindlichkeit, wenn $x = 0,2$ cm angesetzt wird.

Man erhält aus Formel (22)

$$\begin{aligned} e &= \frac{0,2}{90} \cdot \frac{1}{20 \cdot 5550} \left(-2 \cdot 52 \cdot \frac{2,5 \cdot 6 \cdot 28}{280 \cdot 200} - 48 \cdot \frac{4,5 \cdot 6 \cdot 200}{28 \cdot 280} + 28,5 \cdot \frac{0,5 \cdot 280 \cdot 200}{6 \cdot 28} \right) \\ &= \frac{1}{49\,950\,000} \cdot \left(-\frac{78}{1000} - 31,02 + 4750 \right) = \frac{1}{10\,585}. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß der Hebel 1 von überragendem Einfluß auf die Empfindlichkeit ist.

¹²⁾ Den selten vorkommenden Fall, daß die Zugstangen und Wirkungslinien der Lasten beliebige Winkel mit den Hebeln bilden und gleichzeitig die Schneidenebene nicht erfüllt ist, behandelt Schönemann, Denkschriften der Akademie der Wissenschaften in Wien, 1853, und danach Brauer-Lawaczek, Die Konstruktion der Wagen, 1906.

Der kleinste Gewichtsunterschied, der gemessen wird, ist mithin

$$Q' = (Q + Q_1) \cdot e = \frac{5550}{10\,585} = 0,53 \text{ kg.}$$

3. Die Reibung.

Ein fester Körper werde von der Kraft Q mit seiner ebenen Grundfläche F senkrecht auf eine gleichfalls ebene feste Auflagerfläche aufgedrückt, die auf den Körper mit der Gegenkraft $N = Q$ zurückwirkt (Fig. 41). Außerdem stehe der Körper noch unter dem Einfluß einer parallel zur Fläche F wirkenden Kraft P . Da keine Gegenkraft zu P vorhanden ist, so müßte schon eine ganz geringe Kraft P genügen, um den Körper zu bewegen bzw. die Bewegung, die er etwa schon besitzt, in Richtung von P zu vergrößern. Die landläufige Erfahrung lehrt aber, daß P eine bestimmte, oft recht bedeutende Größe haben

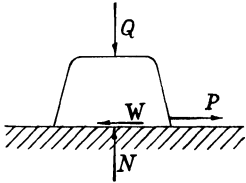


Fig. 41.

muß, ehe Bewegung eintritt oder die vorhandene Bewegung eine Änderung erfährt. In der Fläche F wirkt demnach zwischen beiden Körpern eine gewisse Kraft W , die als Reibungswiderstand bezeichnet wird¹³⁾.

Der auftretende Reibungswiderstand erklärt sich dadurch, daß sich kleine oder auch größere Unebenheiten der sich berührenden, nie ganz starren Flächen mehr oder weniger ineinander drücken und so die Bewegung hindern¹⁴⁾. Auch scheinbar ganz glatt geschliffene Flächen erweisen sich bei genauer Untersuchung noch immer als etwas rauh. Der Grad der Rauhgigkeit und damit der Reibungswiderstand ist natürlich von der Art der betreffenden Körper abhängig. Stahl und Bronze lassen sich viel besser glätten als etwa Gußeisen, die Metalle durchweg besser als die Hölzer und diese wieder besser als Steine, wenn von dem Auftragen besonders gut glättender Überzüge, wie etwa Politur, abgesehen wird.

Der Reibungswiderstand zwischen ungeschmierten Flächen ist, außer bei ganz geringen Flächendrücken $p = \frac{N}{F}$, wo er etwas ansteigt¹⁵⁾, unabhängig vom Flächendruck und allein von der Druckkraft N abhängig¹⁶⁾:

$$W = \mu \cdot N. \quad (23)$$

Er ist auch innerhalb weiter Grenzen nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit v , mit der sich die beiden Berührungsflächen gegeneinander bewegen¹⁷⁾.

¹³⁾ Leonardo da Vinci.

¹⁴⁾ Dela Hire, 1699. — Leslie, Account of experiments and instruments, 1817.

¹⁵⁾ Bonte, Z. d. V. d. I. 1915.

¹⁶⁾ Amontons, Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1699. — Coulomb, Mém. de Math. et de Phys. 1785. — Klein, Z. d. V. d. I. 1903.

¹⁷⁾ Parant, Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1700. — Coulomb, a. a. O.

Geschwindigkeit ist bei gleichförmiger Bewegung, die hier allein in Frage kommt, der Quotient aus dem in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weg s zu der dazu gebrauchten Zeit t :

$$v = \frac{s}{t} \text{ m/sk.} \quad (24)$$

Dreht sich eine Welle vom Durchmesser d in der Minute n mal um, so wird ihre Umfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi \cdot d}{60} = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \cdot \frac{1}{n}. \quad (25)$$

Allerdings sinkt die Reibungsziffer μ bei rauhen Metallen mit steigender Geschwindigkeit¹⁸⁾.

Für gußeiserne Bremsklötze auf stählernen Radreifen hat sich ergeben¹⁹⁾

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{1 + 0,0312 \cdot v}{1 + 0,167 \cdot v},$$

worin einzusetzen ist für

- | | |
|-----------------------------|------------------|
| 1: trockene Reibungsflächen | $\mu_0 = 0,45$, |
| 2: etwas feuchte „ | $\mu_0 = 0,30$, |
| 3: nasse „ | $\mu_0 = 0,25$. |

Den Verlauf der Reibungsziffer μ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v zeigen die drei Kurven a_1, a_2, a_3 der Fig. 42. Als Kurve b ist die entsprechende

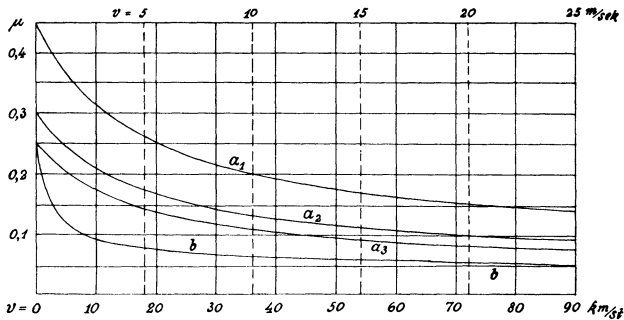


Fig. 42.

Abhängigkeit für stählerne Radreifen auf Stahlschienen mit $\mu_0 = 0,24$ eingetragen²⁰⁾.

Fluß Eisen mit Walzhaut²¹⁾ hat in Vernietungen, also bei der Gleitgeschwindigkeit 0, die Reibungsziffer $\mu = 0,50$, wenn die Vernietung einschneidig ist; bei zweischnittigen Vernietungen ist $\mu = 0,35$.

Neuere Untersuchungen an trockenen, gasfreien, gut geglätteten Metallflächen²²⁾ lehren, daß die Reibungsziffer im Gegensatz zu Fig. 42 und den meisten

¹⁸⁾ Galton.

¹⁹⁾ Wichert, Z. d. B. 1894.

²⁰⁾ Wöhler, Zeitung des Vereins deutscher Eisenbahnverw. 1867. — Galton nach „Hütte“.

²¹⁾ Nach Bach, Z. d. V. d. J. 1892.

²²⁾ Ecole des Ponts et Chaussées, Revue générale des Chemins de fer 1910; Jacob, Ann. d. Phys. 1912; bestätigt durch Jahn, Z. d. V. d. I. 1918.

Erfahrungen der Technik sich bei der Geschwindigkeit 0 dem Wert 0 sehr stark nähert. Immerhin lassen fast alle Fälle der technischen Praxis bei nicht zu glatten und bei geschmierten Flächen eine recht erhebliche Vergrößerung der Reibungsziffer μ_0 der Ruhe gegenüber derjenigen der Bewegung erkennen²³). Auch die im allgemeinen gut beglaubigte Formel (23) wird durch neuere theoretische Untersuchungen angezweifelt²⁴); sie wird durch eine andere ersetzt, die bei $N = \infty$ den Reibungswiderstand 0 ergibt. Für die technische Praxis ist auch diese Abänderung, außer bei Fettschmierung (S. 32), bedeutungslos.

Für bearbeitete Metallflächen gelten folgende Zahlen:

ziemlich rau, ungeschmiert (Gußeisen) ²⁵	. . . i. M. $\mu = 0,22$,
einigermaßen glatt bearbeitet (Flußeisen, Stahl) ²⁶	. . . $\mu = 0,16$,
mit Wasser benetzt, nur eben gefettet ²⁷ $\mu = 0,14$,
wenig gefettet ^{28 b)} $\mu = 0,12$,
glatt bearbeitet und geölt ¹⁵⁾ $\mu = 0,10$,
ganz glatt geschliffen und sorgfältig geschmiert ²⁸⁾	. . . $\mu = 0,02 \div 0,016$.

Die Art der Metalle hat nur sehr geringen Einfluß auf die Reibungsziffer. Dagegen ist der Verschleiß sehr groß, wenn Flußeisen auf Flußeisen oder Stahl läuft; ein Bronze- oder Gußeisenfutter verringert ihn ganz wesentlich²⁹).

Für Bronze und Pockholz auf Pockholz³⁰) ist

gut gefettet	$\mu = 0,06$,
in Wasser	$\mu = 0,10$.

In Stopfbüchsen ist je nach der Fettung³⁰) bei

Baumwolle oder Hanf	$\mu = 0,06 \div 0,11$,
weichem Leder	$\mu = 0,03 \div 0,07$,
hartem Leder	$\mu = 0,10 \div 0,13$.

Für Holz auf Eisen, wenn die Holzfasern in der Reibungsfläche parallel zur Bewegungsrichtung liegen, gilt die Zusammenstellung³¹), deren Zahlen allerdings nur an einem kleinen Bremsenmodell gewonnen sind. Sie schwanken zwischen den über und unter dem Mittelwert angegebenen Zahlen.

Die wesentlich kleineren Zahlen an dem unbearbeiteten Walzeisen und ihr starkes Schwanken erklären sich dadurch, daß der Holzklötz von den Unebenheiten der sich darunter wegbewegenden Scheibe teilweise zurückgestoßen wird und so die Anlage der Flächen für einen Augenblick verloren geht.

²³) Amontons, a. a. O.; des Cannes, *Traité des forces mouvantes*, 1722; Bonte, Z. d. V. d. I. 1915.

²⁴) Painlevé, C. R. 1895; Wellstein, Z. f. Math. u. Phys. 1913.

²⁵) Föppl, Z. d. B. 1901.

²⁶) z. B. Bachmann, Z. d. B. 1905; v. Hanffstengel, Z. d. V. d. I. 1913; Stephan, *Uhlands prakt. Masch.-Konstr.* 1919.

²⁷) Morin, *Nouvelles expériences sur le frottement*, 1833/35; Striebeck, Z. d. V. d. I. 1902.

²⁸) Schlesinger, Z. d. V. d. I. 1910.

²⁹) z. B. Treuheit, *Stahl u. Eisen* 1919.

³⁰) Hütte.

³¹) Klein, Z. d. V. d. I. 1903.

Brems­scheibe		Holzbremse (lufttrocken)				
aus	Zustand	Eiche	Ulme	Buche	Pappel	Weide
Gußeisen, sauber bearbeitet	ganz trocken	0,30	0,36	0,36	0,39	0,41
		0,31	0,37	0,37	0,40	0,47
		0,32	0,39	0,38	0,41	0,50
	nur sauber abgewischt	0,29	0,32	0,28	0,34	0,43
		0,30	0,36	0,29	0,35	0,46
		0,31	0,38	0,30	0,37	0,48
Flußeisen, sauber bearbeitet	ganz trocken	0,38	0,47	0,52	0,56	0,58
		0,40	0,49	0,54	0,60	0,60
		0,42	0,51	0,55	0,62	0,62
	nur sauber abgewischt	0,48	0,57	0,51	0,52	0,41
		0,51	0,60	0,54	0,65	0,47
		0,54	0,64	0,56	0,73	0,50
	Holzklotz mit Öl getränkt	0,41	0,31	0,28	0,49	0,33
		0,50	0,41	0,35	0,63	0,38
		0,59	0,42	0,41	0,74	0,45
Flußeisen, unbearbeitet	sauber ab- gewischt	0,38	0,09	0,24	0,15	0,13
		0,47	0,14	0,39	0,18	0,14
		0,56	0,17	0,49	0,25	0,15
	wenig geölt	0,12	0,14	0,16	0,17	0,15
		0,15	0,21	0,23	0,23	0,17
		0,28	0,29	0,34	0,35	0,21
	Klotz mit Öl getränkt	0,12	0,11	0,10	0,11	0,13
		0,13	0,12	0,12	0,11	0,15
		0,15	0,14	0,14	0,12	0,16

Bei Schleifsteinen ist gefunden worden³⁰⁾:

Sandstein		Gußeisen	Stahl	Flußeisen
Stein grobkörnig, naß	frisch geschärft	0,21	0,29	0,41
	stumpf gelaufen	0,24	0,29	0,46
Stein feinkörnig, naß	?	0,72	0,94	1,0

Für Schlitten gilt³⁰⁾:

Holzkufen auf glatter Holzbahn, ungeschmiert	$\mu = 0,38$,
„ „ „ „ , mit Seife geschmiert	$\mu = 0,15$,
„ „ „ „ , „ Talg „	$\mu = 0,07$,
„ „ „ „ , Schnee und Eis	$\mu = 0,035$,
Eisenkufen „ „ „ „	$\mu = 0,02$.

Für bautechnische Anwendungen ist anzunehmen³⁰⁾:

Eichenholz auf Eichenholz	$\mu = 0,48$,
(Fasern parallel zueinander und zur Bewegungsrichtung)	$\mu_0 = 0,62$,
Glatt bearbeitete Steine oder Ziegel auf Ziegelmauerwerk	$\mu_0 = 0,53$,
Steine und Kies auf Holz	$\mu_0 = 0,46$,
„ „ „ „ , unbearbeitetem Walzeisen	$\mu_0 = 0,42$,
Mauerwerk auf Beton	$\mu_0 = 0,76$,
„ und rohe Steine auf gewachsenem Boden	
bei trockenem und hartem Tonboden ³²⁾	$\mu_0 = 0,65$,
„ feuchtem Tonboden	$\mu_0 = 0,60$,
„ nassem, lettigem Boden	sinkend bis $\mu_0 = 0,30$.

³²⁾ v. Müllenhoff, Z. d. V. d. I. 1919.

Wird Fett als Schmiermittel dazwischen gegeben, so hat der Flächen-
druck auf die Größe der Reibungsziffer ziemlich erheblichen Einfluß,
und zwar nimmt sie ab, wenn der Flächendruck steigt²⁵).

Flächendruck at	100	200	300	400	500	600
Paraffin . . . "	0,0062	0,0051	0,0036	0,0027	0,0026	0,0025
Talg "	0,0150	0,0075	0,0064	0,0048	0,0046	0,0039
Stearin "	0,0220	0,0130	0,0100	0,0075	0,0060	0,0050
Stauferfett . . . "	0,171	0,162	0,148	—	—	—

Beispiel 26. Eine Triebwerkswelle von $d = 6$ cm Durchmesser soll das Dreh-
moment $M = 5184$ cmkg übertragen, sie werde gekuppelt durch eine Schalen-
kupplung nach Fig. 43 mit $i = 6$ Schrauben. Anzugeben ist die auf eine Schraube
entfallende Spannkraft P bei $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ facher Sicherheit.

Von den i Schrauben wird auf jeden Wellenstumpf die Druckkraft $\frac{i}{2} \cdot P$ aus-
geübt. Zwischen jeder Schale und der Welle besteht also die Reibungskraft
 $\mu \cdot \frac{i}{2} \cdot P$. Beide bilden ein Kräftepaar vom Drehmoment $M_r = \mu \cdot \frac{i}{2} P \cdot d$,
worin am sichersten $\mu = \frac{1}{2} \cdot (0,22 + 0,16) = 0,19$ eingesetzt wird.

Da nun die Bedingung ist

$$M_r = \mathfrak{S} \cdot M, \text{ so folgt}$$

$$P = \frac{2 \cdot \mathfrak{S} \cdot M}{\mu \cdot i \cdot d} \\ = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 5184}{0,19 \cdot 6 \cdot 6} = 2020 \text{ kg.}$$

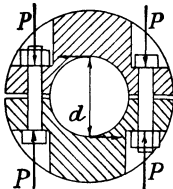


Fig. 43.

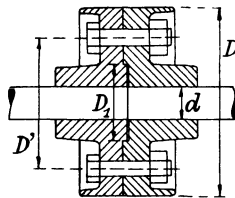


Fig. 44.

Beispiel 27. Für eine Schei-
benkupplung nach Fig. 44 für eine
Welle von $d = 12$ cm Durchmes-
ser, die ein Drehmoment von
41 470 cmkg überträgt, ist die

Kraft P zu ermitteln, mit der jede der $i = 6$ Schrauben angezogen werden
muß, wenn $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ fache Sicherheit gegen Gleiten verlangt wird.

Gegeben sei $D = 41$ cm, $D_1 = 15$ cm, $D' = 28$ cm, $\mu = 0,22$ bei ziemlich
rauhn Flächen.

Aus der Bedingung

$$\frac{1}{2} \cdot i \cdot \mu \cdot P \cdot D' = \mathfrak{S} \cdot M$$

folgt

$$P = \frac{2 \cdot \mathfrak{S} \cdot M}{i \cdot \mu \cdot D'} = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 41470}{6 \cdot 0,22 \cdot 28} = 2990 \text{ kg.}$$

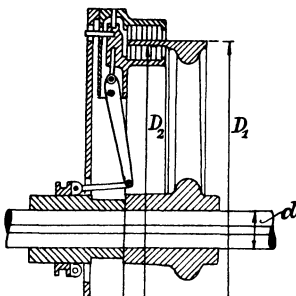


Fig. 45.

Beispiel 28. Eine Hilsche Reibungskupplung
nach Fig. 45 für eine Welle von $d = 9$ cm Durch-
messer hat als äußeren Durchmesser des guß-
eisernen Reibkranzes $D_1 = 74,5$ cm, als inneren
Durchmesser $D_2 = 71,3$ cm. Anzugeben ist die
Kraft Q , mit der die beiden hölzernen Reibkissen
jedes der $i = 4$ Kupplungsarme anzupressen sind,
damit das Drehmoment $M = 17\,500$ cmkg mit
 $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ facher Sicherheit übertragen wird.

Als Material der Reibkissen wird Eichenholz
gewählt, weil die Reibungsziffer $\mu = 0,31$ sich nur
auf 0,30 verringert, wenn das Holz etwas ölig
geworden ist (S. 31). Es gilt nun

$$\mathfrak{S} \cdot M = \frac{i}{2} \cdot \mu \cdot Q \cdot (D_1 + D_2),$$

woraus folgt

$$Q = \frac{2 \cdot \zeta \cdot M}{i \cdot \mu \cdot (D_1 + D_2)} = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 17\,500}{4 \cdot 0,31 \cdot 145,8} = 258 \text{ kg.}$$

Beispiel 29. Anzugeben ist die größtmögliche Zugkraft P einer $\frac{3}{4}$ gekuppelten Güterzuglokomotive von $Q = 52 \text{ t}$ Dienstgewicht, von dem $G = 41,8 \text{ t}$ auf die drei Kuppelachsen kommen, beim Anfahren, bei 3, 10, 17 m/sk Fahrtgeschwindigkeit.

Die Lokomotivräder können nur dann rollen, wenn die Reibung zwischen den Rädern und Schienen größer ist als der Widerstand des zu ziehenden Zuges. Es ist also

$$P = \mu \cdot G,$$

und man entnimmt der Fig. 42 für

$v = 0 \text{ m/sk}$	$\mu = 0,24$,	also	$P = 10 \text{ t}$
3 „	0,09 „		3,76 t
10 „	0,07 „		2,9 t
17 „	0,06 „		2,5 t.

Das gilt auf ebener Strecke bei trockenen Schienen.

Auf geneigter Strecke, etwa $\text{tg } \alpha = \frac{25}{1000}$, der größten in Preußen für Hauptbahnen zulässigen Neigung, ist nach Fig. 46 der Druck zwischen Schiene und Rad $N = G \cdot \cos \alpha$, ferner ist eine nach oben gerichtete Kraft $P_0 = G \cdot \sin \alpha$ erforderlich, um das Gleichgewicht zu erhalten. Es ist demnach anzusetzen

$$P + P_0 = \mu \cdot N$$

oder

$$P = G \cdot \cos \alpha (\mu - \text{tg } \alpha). \quad (24)$$

Hieraus folgt für

$v = 0 \text{ m/sk}$	$P = 9,0 \text{ t}$
3 „	2,72 t
10 „	1,88 t
17 „	1,46 t.

Auf feuchten Schienen, wie z. B. in Tunneln, ist $\mu_0 \sim 0,19$ ³³⁾.

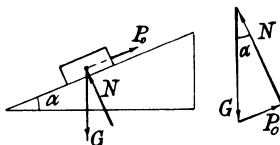


Fig. 46.

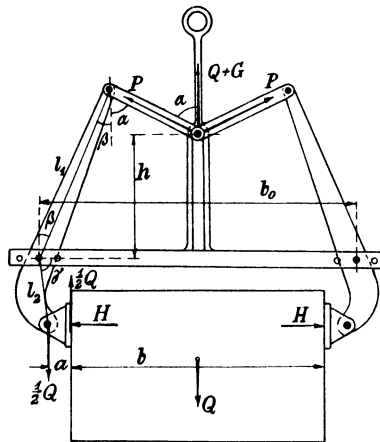


Fig. 47.

Beispiel 30. Zu bestimmen ist die größte Breite b eines Steines, wenn die Steinzange nach Fig. 47 ihn noch mit $\zeta = 2$ facher Sicherheit fassen soll. Es sei

$$l_1 = 56 \text{ cm}, \quad l_2 = 21 \text{ cm}, \quad l_0 = 32 \text{ cm}, \quad \gamma = 138^\circ,$$

$$a = 6,5 \text{ cm}, \quad h = 37 \text{ cm}, \quad b_0 = 102 \text{ cm.}$$

Man entnimmt der Fig. 47 die folgenden Zusammenhänge:

- a) $l_1 \cdot \cos \beta - l_0 \cdot \cos \alpha = h,$
- b) $l_1 \cdot \sin \beta + l_0 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot b_0,$
- c) $\frac{1}{2} \cdot b_0 - l_2 \cdot \sin(\pi - \beta - \gamma) = \frac{1}{2} b + a,$

³³⁾ Sanzin, Z. d. V. d. I. 1910.

$$d) P_1 \cdot l_1 \cdot \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = H \cdot l_2 \cdot \cos(\pi - \beta - \gamma) + \frac{1}{2} Q \cdot l_2 \cdot \sin(\pi - \beta - \gamma),$$

$$e) H \cdot \mu = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \mathfrak{S},$$

dazu kommt nach Formel (7) und Fig. 23

$$f) Q + G = 2 \cdot P \cdot \cos \alpha.$$

Nun lautet Gleichung d) mit Benutzung von e) und f):

$$\frac{1}{2} \cdot (Q + G) \cdot l_1 \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot l_2 \cdot \cos(\beta + \gamma) + \frac{1}{2} \cdot Q \cdot l_2 \cdot \sin(\beta + \gamma)$$

oder, wenn das Zangengewicht gegenüber dem großen Steingewicht der Einfachheit halber vernachlässigt wird, mit Hinzuziehung von Gleichung c)

$$l_1 \cdot \left(\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = -\frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot l_2 \cdot (\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma) + \frac{1}{2} \cdot b_0 - \frac{1}{2} \cdot b - a.$$

Wird jetzt aus den Gleichungen a) und b) entnommen

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{h - l_1 \cdot \cos \beta}{\frac{1}{2} \cdot b_0 - l_1 \cdot \sin \beta},$$

so folgt schließlich

$$b = b_0 - 2a - 2l_1 \cdot \left(\cos \beta - \sin \beta \cdot \frac{b_0 - 2 \cdot l_1 \cdot \sin \beta}{2h - 2 \cdot l_1 \cdot \cos \beta}\right) - \frac{2}{\mu_0} \cdot \mathfrak{S} \cdot l_2 \cdot (\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma). \quad (25)$$

Der kleinste Winkel β , der vorkommt, ist der gezeichnete 25° , wo der gemeinsame Zapfen der Kniehebel gerade gegen das Ende der Führung stößt. Dem entspricht die kleinste Steinbreite

$$b = 102 - 2 \cdot 6,5 - 2 \cdot 56 \cdot \left(0,9063 - 0,4226 \cdot \frac{102 - 2 \cdot 56 \cdot 0,4226}{2 \cdot 37 - 2 \cdot 56 \cdot 0,9063}\right) - \frac{2}{0,42} \cdot 2 \cdot 21 \cdot (-0,9063 \cdot 0,7431 - 0,4226 \cdot 0,6691),$$

mithin $b = 75$ cm, wie die Zeichnung darstellt. Also in der höchsten Stellung des Kniehebelzapfens besteht gerade doppelte Sicherheit.

Die größtmögliche Steinbreite $b = 98$ cm wird erhalten für $h = 5$ cm, wofür die Aufzeichnung $\beta = 50^\circ$ ergibt. In dem Fall liefert die Formel (25)

$$98 = 102 - 2 \cdot 6,5 - 2 \cdot 56 \cdot \left(0,6428 - 0,7660 \cdot \frac{102 - 2 \cdot 56 \cdot 0,7660}{2 \cdot 5 - 2 \cdot 56 \cdot 0,6428}\right) - \frac{\mathfrak{S}}{0,42} \cdot 2 \cdot 21 \cdot (-0,6428 \cdot 0,7341 - 0,7660 \cdot 0,6691),$$

woraus folgt $\mathfrak{S} = 1,05$, was bei weitem zu klein ist.

Wird verlangt, daß die Sicherheit mindestens $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ ist, so führt die Aufzeichnung für mehrere Winkel β und die Untersuchung, bei welchem β die Formel (25) erfüllt ist, am einfachsten zum Ziel. Probeweise werde angesetzt $\beta = 40^\circ$; die Aufzeichnung des Schemas liefert dann $h = 21,5$ cm und $b = 86,5$ cm. Die Gleichung, die erfüllt sein muß, lautet dann

$$86,5 = 102 - 2 \cdot 6,5 - 2 \cdot 56 \cdot \left(0,7660 - 0,6428 \cdot \frac{102 - 2 \cdot 56 \cdot 0,6428}{2 \cdot 21,5 - 2 \cdot 56 \cdot 0,7660}\right) - \frac{1,333}{0,42} \cdot 2 \cdot 21 \cdot (-0,7660 \cdot 0,7431 - 0,6428 \cdot 0,6691) = 86,0.$$

Man erkennt, daß diese Steinzange den Nachteil hat, nicht ohne Umstellung für wechselnde Steinbreiten brauchbar zu sein; mit ausreichender Sicherheit werden

ja nur Steine zwischen 75 und 86 cm Breite gegriffen. Dagegen ist sie bei Lasten mit gleichbleibenden Abmessungen sehr zweckmäßig.

Goniometrische Formeln. In den Winkel α der Fig. 48 werde die Strecke $\overline{AB} = 1$ eingetragen, die bei B mit dem einen Schenkel des Winkels α den Winkel β bildet. Fällt man jetzt von A das Lot auf diesen Winkelschenkel nach C und von B das Lot auf den anderen Schenkel, ferner noch die anderen Senkrechten der Fig. 48, so ergeben sich die an die einzelnen Strecken angeschriebenen Beziehungen³⁴⁾, also

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

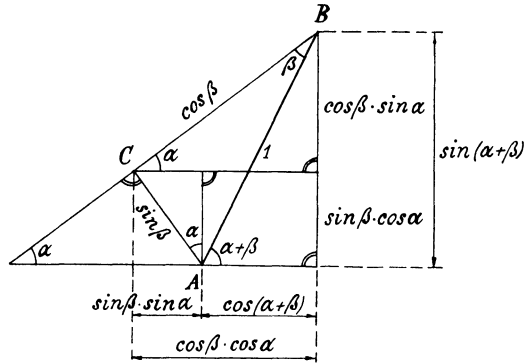


Fig. 48.

Nimmt man in beiden Formeln β negativ und setzt nach Bd. I S. 28

$$\sin(-\beta) = -\sin(+\beta) \quad \text{und} \quad \cos(-\beta) = +\cos(+\beta),$$

so gehen sie über in

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Addiert man die erste und dritte dieser Gleichungen sowie die zweite und vierte, so folgt

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Setzt man jetzt $\beta = \alpha$, so ergibt sich

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1.$$

Setzt man andererseits $\alpha + \beta = \gamma$ und $\alpha - \beta = \delta$, so erhält man

$$\sin\gamma + \sin\delta = 2 \cdot \sin\frac{\gamma + \delta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma - \delta}{2},$$

$$\cos\gamma + \cos\delta = 2 \cdot \cos\frac{\gamma + \delta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma - \delta}{2}.$$

³⁴⁾ Dieckmann, Z. f. gewerbl. Unterr. 1917.

Werden die beiden ersten Gleichungen durcheinander dividiert und ferner auf der rechten Seite der so entstandenen Gleichung jedes Glied durch $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, so folgt

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

und hieraus mit $\beta = \alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ebenso erhält man durch Division der dritten und vierten Gleichung

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Weitere Beziehungen der Art lassen sich leicht in entsprechender Weise bilden.

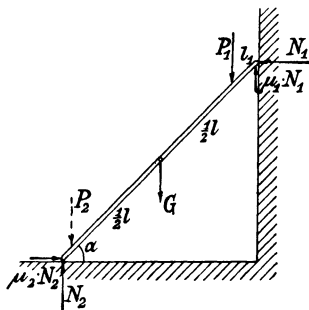


Fig. 49.

Beispiel 31. Eine Leiter vom Gewicht $G = 25$ kg und der Länge $l = 3,2$ m werde im Abstände $l_1 = 0,3$ m vom oberen Ende belastet durch die Last $P = 75$ kg. Sie lehne mit der Kraft N_1 gegen eine gemauerte Wand und stütze sich mit der Kraft N_2 gegen einen Holzfußboden. Anzugeben sind die Stützdrücke N_1 und N_2 und der äußerste Winkel α (Fig. 49).

Die Fig. 49 zeigt sofort, daß die Leiter abgleitet, wenn der Winkel α zu klein wird, und die in dem Fall wirkenden, die Bewegung hindernden Reibungskräfte sind in die Figur eingetragen.

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben, wenn für die Momentengleichung der untere Stützpunkt als Drehachse gewählt wird,

$$\begin{aligned} + P_1 + G - N_2 - \mu_1 \cdot N_1 &= 0, \\ + \mu_2 \cdot N_2 - N_1 &= 0, \\ + G \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos \alpha + P_1 \cdot (l - l_1) \cdot \cos \alpha - \mu_1 \cdot N_1 \cdot l \cdot \cos \alpha - N_1 \cdot l \cdot \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Wird die zweite Gleichung mit μ_1 erweitert und von der ersten abgezogen, so fällt $\mu_1 \cdot N_1$ heraus und man erhält

$$N_2 = \frac{P_1 + G}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}.$$

Damit liefert die zweite Gleichung

$$N_1 = \frac{\mu_2}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot (P_1 + G).$$

Beide Werte sind in die dritte durch $\cos \alpha$ dividierte Gleichung einzusetzen, und es folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2} \cdot \left(1 - \frac{P_1 \cdot l_1 + \frac{1}{2} G \cdot l}{(P_1 + G) \cdot l} \right) - \mu_1.$$

Nun ist $\mu_1 = 0,46$ und $\mu_2 = 0,62$, also

$$N_2 = \frac{75 + 25}{1 + 0,46 \cdot 0,62} = 77,8 \text{ kg},$$

$$N_1 = 77,8 \cdot 0,62 = 48,3 \text{ kg},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,285}{0,62} \cdot \left(1 - \frac{75 \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 3,2}{100 \cdot 3,2} \right) - 0,46 = 1,21,$$

mithin $\alpha \approx 50\frac{1}{2}^\circ$.

Die Verhältnisse werden erheblich verbessert, wenn etwa noch eine Last $P_2 = 50 \text{ kg}$ im Abstände $l_2 = 10 \text{ cm}$ vom unteren Ende aufgebracht wird. In die Gleichung für $\text{tg} \alpha$ ist dann noch hinzuzufügen zu P_1 der Betrag P_2 und zu $P_1 \cdot l_1$ der Betrag $P_2 \cdot (l - l_2)$, so daß man erhält

$$\text{tg} \alpha = \frac{1,285}{0,62} \cdot \left(1 - \frac{50 \cdot 3,1 + 75 \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 3,2}{150 \cdot 3,2} \right) - 0,46 = 0,68,$$

mithin $\alpha \approx 34^\circ$.

Beispiel 32. Welche Kraft P ist erforderlich, um das Drehmoment $M = 10 \text{ mkg}$ durch eine Klotzbremse nach Fig. 50 abzubremsen, wenn gegeben ist der Durchmesser der gußeisernen Bremscheibe $2r = 60 \text{ cm}$, die Höhe des Bremsklotzes aus Buchenholz $h = 30 \text{ cm}$, die Hebellänge des Bremshebels $l = 120 \text{ cm}$ bzw. $a = 30 \text{ cm}$. Ferner ist anzugeben der zweckmäßigste Abstand c des Bremshebels von der Radachse.

Der Klotz von der Breite b legt sich nicht überall mit gleichem Flächendruck p an die Scheibe, sondern in der Mitte mit dem größten Druck p_{\max} und von dort nach beiden Seiten mit abnehmendem, unter dem Winkel φ gegen die Mittelachse geneigtem p derart, daß bei einem Klotz von der Höhe $h = 2r$ an den Enden, also für $\varphi = 90^\circ$ $p = 0$ sein würde (Fig. 51). Als einfachstes Druckverteilungsgesetz ist hiernach

$$p = p_{\max} \cdot \cos \varphi$$

anzusetzen.

Für das zu dem Winkel $d\varphi$ gehörige Scheibenelement gilt damit die Momentengleichung

$$2 \cdot \int_0^\alpha (b \cdot r \cdot d\varphi) \cdot (p \cdot \mu) \cdot r = M$$

oder

$$2 \cdot b \cdot r^2 \cdot \mu \cdot p_{\max} \cdot \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi = M.$$

Hieraus folgt durch Integration (Bd. I, S. 106)

$$M = 2 \cdot \mu \cdot b \cdot r^2 \cdot p_{\max} \cdot \sin \alpha \tag{26}$$

Entsprechend ist für die wagerechten Kräfte

$$Q = 2 \cdot \int_0^\alpha (b \cdot r \cdot d\varphi) \cdot (p \cdot \cos \varphi) = 2 \cdot b \cdot r \cdot p_{\max} \cdot \int_0^\alpha \cos^2 \varphi \cdot d\varphi.$$

Zur Lösung des Integrals wird geschrieben

$$f \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = f \cos \varphi \cdot (\cos \varphi \cdot d\varphi) = f \cos \varphi \cdot d \sin \varphi.$$

Durch Anwendung der teilweisen Integration (Bd. I, S. 105) erhält man hieraus

$$f \cos \varphi \cdot d \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \sin \varphi - f \sin \varphi \cdot d \cos \varphi.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} -f \sin \varphi \cdot d \cos \varphi &= -f \sin \varphi \cdot (-\sin \varphi \cdot d\varphi) = +f \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \\ &= f(1 - \cos^2 \varphi) \cdot d\varphi = f d\varphi - f \cos^2 \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

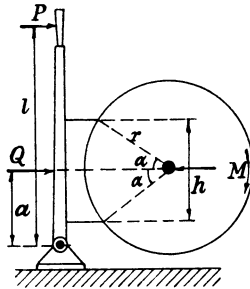


Fig. 50.

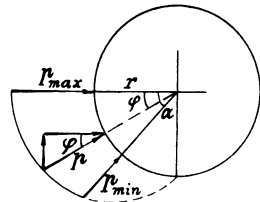


Fig. 51.

Damit wird schließlich

$$f \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi + \arccos \varphi) + C. \tag{27}$$

Somit ist

$$Q = b \cdot r \cdot p_{\max} \cdot (\arccos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha) \tag{28}$$

Durch Division der Gleichungen (26) und (28) folgt

$$Q = \frac{M}{\mu \cdot r} \cdot \frac{2 \cdot \arccos \alpha + \sin 2\alpha}{4 \cdot \sin \alpha} = \frac{M}{\mu \cdot r} \cdot \zeta. \tag{29}$$

Für ζ gilt die folgende Zusammenstellung³⁵⁾, deren Verlauf die Fig. 52 darstellt.

$\alpha =$	10	20	30	40	50	60°
$\frac{h}{2r} = \sin \alpha =$	0,1737	0,3420	0,5000	0,6428	0,7660	0,8660
$\zeta =$	0,995	0,980	0,957	0,926	0,891	0,854

Bei den gegebenen Zahlenwerten ist

$$\frac{h}{2r} = 0,50, \quad \text{also} \quad \zeta = 0,957; \quad \text{ferner ist} \quad \mu = 0,29.$$

Damit wird bei $\varnothing = \frac{1}{3}$ facher Sicherheit gegen zufällige Herabsetzung der Reibungsziffer

$$P = \varnothing \cdot Q \cdot \frac{a}{l} = \frac{\varnothing \cdot M}{\mu \cdot r} \cdot \zeta \cdot \frac{a}{l} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,957 \cdot 0,30}{3 \cdot 0,29 \cdot 0,30 \cdot 1,20} \approx 37 \text{ kg.}$$

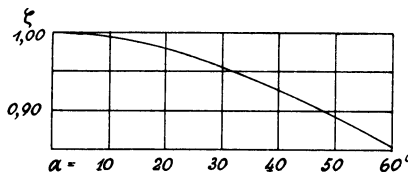


Fig. 52.

Infolge der Wölbung des Bremsklotzes greift die Reibungskraft μQ in einem gewissen Abstand r_0 von der Drehachse der Bremsscheibe an, und es gilt natürlich

$$\mu \cdot Q \cdot r_0 = M.$$

Setzt man hierin den Wert von Q aus Gleichung (29) ein, so folgt

$$r_0 = \frac{r}{\zeta}. \tag{30}$$

Am vorteilhaftesten wird nun die Reibungskraft von dem Bremshebel aufgenommen, wenn man $c = r_0$ macht. Mit den gegebenen Zahlenwerten ist

$$c = \frac{0,30}{0,957} = 0,314 \text{ m.}$$

Hervorzuheben ist, daß die Formel für P nur bei der durch $c = r_0$ bestimmten Anordnung gilt. Praktische Anforderungen an die Stärke des Bremsklotzes zwingen jedoch oft dazu, hiervon abzugehen. Ferner führt man die Anordnung gewöhnlich doppelt aus, um den Achsdruck Q aufzuheben. Man gelangt so zu der Ausführung der Fig. 53. Hierin ist

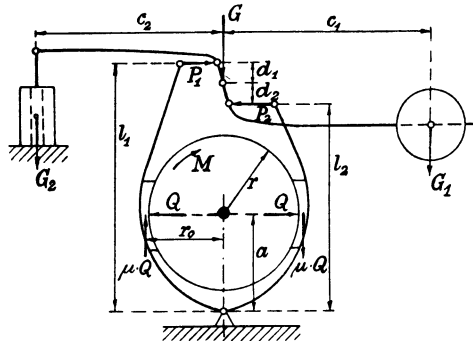


Fig. 53.

- G_1 das Gewicht, das die Bremse stets schließt,
- G_2 das Gewicht des Ankers des Lüftmagneten, der die Bremse löst,

³⁵⁾ Bengel, D. p. J. 1920.

G das Gewicht des oberen Hebels, das hier unmittelbar auf die Drehachse wirkend angenommen wird.

Es gilt dann für den Hebel von der Länge l_1

$$+P_1 \cdot l_1 - Q \cdot a + \mu \cdot Q \cdot r_0 = 0$$

und für den Hebel von der Länge l_2

$$-P_2 \cdot l_2 + Q \cdot a + \mu \cdot Q \cdot r_0 = 0.$$

Setzt man hierin gemäß den Formeln (29) und (30) ein

$$Q = \frac{M}{\mu \cdot r} \cdot \frac{\zeta}{2} \quad \text{und} \quad r_0 = \frac{r}{\zeta},$$

so wird bei ζ facher Sicherheit gegen zufällige Verringerung von μ

$$P_1 = \frac{M}{2 \cdot l_1} \cdot \left(\frac{\zeta \cdot \zeta}{\mu} \cdot \frac{a}{r} - 1 \right), \tag{31}$$

$$P_2 = \frac{M}{2 \cdot l_2} \cdot \left(\frac{\zeta \cdot \zeta}{\mu} \cdot \frac{a}{r} + 1 \right).$$

Man bemerkt, daß auch bei gleicher Hebellänge l die Kräfte P verschieden groß ausfallen.

Für den oberen Hebel ist dann mit umgekehrter Richtung der Kräfte P

$$G_1 \cdot c_1 - G_2 \cdot c_2 + G \cdot 0 - P_1 \cdot d_1 - P_2 \cdot d_2 = 0.$$

Führt man beide l und d gleich aus, so folgt

$$G_1 \cdot c_1 - G_2 \cdot c_2 = M \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{\zeta \cdot \zeta}{\mu}. \tag{32}$$

Beispiel 33. Anzugeben ist der größte Bremsdruck P , der auf das Rad eines dreiechsigen Personenwagens vom Leergewicht $Q = 16,6 \text{ t}$ ausgeübt werden darf, damit die Räder nicht festgebremst werden.

Bezeichnet

i die Anzahl der Räder des Eisenbahnwagens,

μ_1 die Reibungsziffer zwischen den Bremsklötzen und dem Rad,

μ_2 die Reibungsziffer zwischen der Schiene und dem Rad,

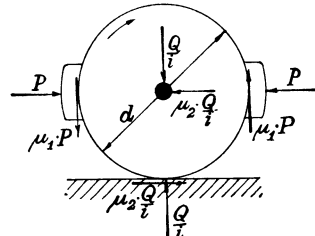


Fig. 54.

so liefert die Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente gemäß Fig. 54, wenn der Berichtigungsfaktor ζ bei den verhältnismäßig kurzen Bremsklötzen als belanglos vernachlässigt wird,

$$\mu_1 \cdot P \cdot d = \mu_2 \cdot \frac{Q}{i} \cdot \frac{d}{2},$$

also

$$\frac{P}{Q} \cdot i = \frac{\mu_2}{2 \cdot \mu_1}.$$

Bei trockenem Wetter, wofür die Kurven von Wichert und Galton in Fig. 42 allein vergleichbar sind, gilt dann die Zusammenstellung:

$v =$	20	15	10	6	3	2	1	0	m/sk
$\mu_1 =$	0,169	0,189	0,221	0,266	0,327	0,358	0,398	0,450	
$\mu_2 =$	0,059	0,064	0,066	0,073	0,092	0,109	0,135	0,240	
$\frac{P}{Q} \cdot i =$	0,175	0,169	0,149	0,137	0,141	0,152	0,157	0,267	

Mithin ist für die Angaben der Aufgabe

$$P = \frac{16,6 \cdot 0,175}{6} = 4,84 \text{ t}$$

zu Beginn der Bremsung. Der Druck muß im weiteren Verlauf heruntergehen auf $P = 3,79 \text{ t}$ und kann zuletzt steigen auf $7,39 \text{ t}$. Da bei den gebräuchlichsten Luftdruckbremsystemen eine Verringerung des erstmaligen Bremsdruckes nicht angängig ist, muß von Anfang an mit höchstens $P = 3,8 \text{ t}$ Bremsdruck gearbeitet werden, der nur zuletzt gesteigert wird.

Beispiel 34. Der Flachschieber einer Sattldampflokomotive, die mit Dampf von $p = 12 \text{ at}$ Überdruck arbeitet, sei 360 mm breit und 240 mm lang. Anzugeben ist die erforderliche Antriebskraft P .

Die größte Druckkraft, mit der der Schieber auf seinen Spiegel gepreßt wird, ist

$$Q = F \cdot p = 36 \cdot 24 \cdot 12 = 10\,370 \text{ kg.}$$

Bei reichlicher Schmierung mit Öl ist $\mu = 0,10$, also

$$P = \mu \cdot Q = 0,10 \cdot 10\,370 = 1037 \text{ kg.}$$

Wird dem Öl etwas Flockengraphit zugesetzt, so sinkt bei großer Ölersparnis die Reibungsziffer auf $\mu = 0,08$. Damit wird

$$P = 0,08 \cdot 10\,370 = 830 \text{ kg.}$$

Bei mangelhafter Schmierung steigt die Reibungsziffer auf $\mu = 0,12$. In dem Fall ist

$$P = 0,12 \cdot 10\,370 = 1245 \text{ kg.}$$

Fällt die Schmierung einmal gänzlich aus, so ist $\mu = 0,16$, also

$$P = 0,16 \cdot 10\,370 = 1660 \text{ kg.}$$

Für diesen Wert zuzüglich der Stopfbüchsenreibung ist jedenfalls das Triebwerk zu berechnen.

Für die Abnutzung der Schieberreibungsfläche ist zu beachten, daß wegen der Öffnungen im Schieberspiegel der Auflagerdruck rund das 1,75fache des Dampfdruckes ist³⁶⁾.

Die mittlere Kolbenkraft der Maschine ist bei $D = 45 \text{ cm}$ Zylinderdurchmesser und $p_m \approx 3,6 \text{ at}$ mittlerem Dampfdruck

$$P_1 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98 \cdot p_m = \frac{\pi}{4} \cdot 45^2 \cdot 0,98 \cdot 3,6 = 5600 \text{ kg,}$$

worin der Faktor 0,98 die Verringerung der Fläche durch die Kolbenstange berücksichtigt.

Hat nun der Kolben den Hub $s_1 = 60 \text{ cm}$ und der Schieber den Hub $s = 10 \text{ cm}$, so ist die auf den gleichen Hub umgerechnete Schieberreibungskraft $P \cdot \frac{s}{s_1}$ und damit ergibt sich das Verhältnis der durch die Schieberreibung bewirkten Belastung der Maschine zu ihrer Gesamtkraft

$$x = \frac{P \cdot s}{P_1 \cdot s_1} = \frac{1037 \cdot 10}{5600 \cdot 60} = 0,031 .$$

Beispiel 35. Für einen Dampfkolben vom Durchmesser $D = 45 \text{ cm}$ einer Einzylinder-Dampfmaschine ist der mittlere Reibungswiderstand W zu bestimmen, wenn die zwei gußeisernen Dichtungsringe die Höhe $h = 3,0 \text{ cm}$ und die Stärke $s = 1,5 \text{ cm}$ haben (Fig. 55).

³⁶⁾ Wagner, Z. d. V. d. I. 1899.

Die federnden Kolbenringe legen sich mit einem Flächendruck p_0 an die Zylinderwand, der im Durchschnitt 0,5 at beträgt. Der mittlere Dampfdruck ist bei der Nennleistung $p_m = 3,0$ at (in Lokomotivzylindern 3,6 at), bei der Höchstleistung 4,5 at. Der mittlere Gegendruck beim Ausschub in den Kondensator beträgt $p = 0,2$ at, bei Auspuff in die Luft entsprechend 1,2 at.

Dann ist die von den beiden Kolbenringen bei unbenutzter Maschine auf die Wandung ausgeübte Druckkraft $P_0 = 2 \cdot \pi \cdot D \cdot h \cdot p_0$. Der mittlere Überdruck auf der einen Kolbenseite ist $p_1 = p_m + p_2$, der mindestens zu $\frac{3}{4}$ durch den Schlitz des Ringes zwischen Kolben und Ring tritt, so daß sich dieser mit der Kraft anlegt

$$P_1 = \pi \cdot (D - 2s) \cdot h \cdot \frac{3}{4} \cdot (p_m + p_2).$$

Entsprechend ist die vom Dichtungsring der Gegenseite auf die Wand ausgeübte Kraft

$$P_2 = \pi \cdot (D - 2s) \cdot h \cdot \frac{3}{4} \cdot p_2.$$

Die Reibungsziffer der glatten Flächen³⁷⁾ beträgt bei geringer Schmierung $\mu = 0,12$ und geht bei guter Schmierung mit Zusatz von Graphitemulsion herunter auf $\mu = 0,08$. Als guter Mittelwert ist anzusehen $\mu = 0,10$.

Damit erhält man den Reibungswiderstand

$$W = \mu \cdot \pi \cdot D \cdot h \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} p_0 + \frac{1}{2} p_m + p_2 - \frac{s}{D} \cdot (p_m + 2 p_2) \right], \quad (33)$$

also mit den obigen Zahlenwerten für die Auspuffmaschine bei der Nennleistung

$$W = 0,10 \cdot 1,5 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 3 \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 3,0 + 1,2 - \frac{1,5}{45} \cdot (3,0 + 2 \cdot 1,2) \right]$$

$$= 63,6 \cdot (0,67 + 1,5 + 1,2 - 0,18) = 203 \text{ kg,}$$

bei der Höchstleistung

$$W = 63,6 \cdot (0,67 + 2,25 + 1,2 - 0,23) = 248 \text{ kg,}$$

für die Kondensationsmaschine

bei der Nennleistung

$$W = 63,6 \cdot (0,67 + 1,5 + 0,2 - 0,11) = 144 \text{ kg,}$$

bei der Höchstleistung

$$W = 63,6 \cdot (0,67 + 2,25 + 0,2 - 0,16) = 185 \text{ kg.}$$

Für eine liegende Dampfmaschine kommt noch der Einfluß des Gewichtes des Kolbens und der halben Kolbenstange hinzu mit $G \sim 100$ kg, so daß sich W erhöht um $0,10 \cdot 100 = 10$ kg.

Die mittlere Treibkraft des Kolbens ist nach Bd. I, S. 7 mit $p_m = 3$ at bei der

$$\text{Nennleistung} \quad P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98 \cdot p_m = 4670 \text{ kg,}$$

$$\text{Höchstleistung} \quad P = 1,5 \cdot 4670 = 7020 \text{ kg.}$$

Die Kolbenreibung verzehrt also von der Treibkraft in der Auspuffmaschine

$$\text{bei Nennleistung} \quad \frac{203}{4670} = 0,0435,$$

$$\text{bei Höchstleistung} \quad \frac{248}{7020} = 0,0353,$$

³⁷⁾ Gemessen von Haedicke, Z. d. V. d. I. 1906.

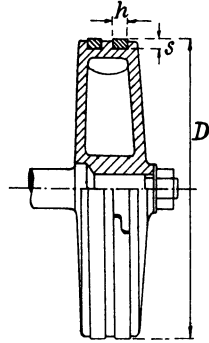


Fig. 55.

Kondensationsmaschine

$$\begin{aligned} \text{bei Nennleistung} \quad & \frac{144}{4670} = 0,0308, \\ \text{bei Höchstleistung} \quad & \frac{185}{7020} = 0,0264. \end{aligned}$$

Bei der Gasmaschine sind während des Treibhubes je nach dem Höchstdruck der Verpuffung 3 bis 5 Kolbenringe zur Dichtung nötig. Man kann überschlägig ansetzen, wenn der mittlere Druck des Treibhubes p_m ist, für

$$\begin{array}{l} \text{Ring:} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{letzten} \\ \frac{p}{p_m} = \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad p \sim 0,5 \text{ at,} \end{array}$$

wozu noch jedesmal $p_0 \sim 0,5$ at tritt.

Beispiel 36. Für eine Einzylinder-Dampfmaschine ist die Stopfbüchsenreibung der Kolbenstange vom Durchmesser $d = 9$ cm zu bestimmen, wenn $d_1 = 13$ cm und $h = 12$ cm beträgt (Fig. 56).

Sobald die Stopfbüchse etwas eingelaufen ist, legt sich die elastische Packung mit etwa $p_0 = 0,5 - 1,0$ at an die Stange an. Dazu tritt der durch die Grundbüchse zuströmende mittlere Dampfdruck $p_1 = 3,0$ at bei Nennleistung der Maschine, der schon vor dem Ende der Packung durch ihren gleichmäßigen Widerstand auf Null abgenommen hat, so daß ungünstig gerechnet auf die ganze Höhe h der mittlere Druck $\frac{1}{2}p_1$ kommt.

Es gilt somit

$$W = \pi \cdot d_1 \cdot h \cdot (p_0 + \frac{1}{2} \cdot p_1) \mu \quad (34)$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten bei guter Ausführung, also $\mu \sim 0,07$:

$$W = \pi \cdot 13 \cdot 12 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 3) \cdot 0,07 = 86 \text{ kg.}$$

Bei Lokomotiven, wo die Kolbenstange verstaubt, erhöht die sonst zu vernachlässigende Reibung in der Stopfbüchsenbrille das Ergebnis auf das 1,5fache.

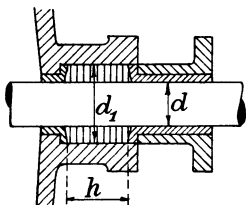


Fig. 56.

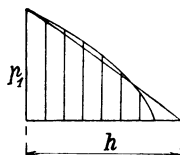


Fig. 57.

Wird dieselbe Rechnung wie in Beispiel 35 durchgeführt, so ergibt sich, daß die Stopfbüchse von der mittleren Dampfkraft verbraucht bei der

$$\text{Nennleistung} \quad \frac{86}{4670} \sim 0,018,$$

$$\text{Höchstleistung} \quad \frac{111}{7020} \sim 0,016.$$

Daß in der Stopfbüchse der Dampfdruck entsprechend dem Abstand von der Grundbüchse geradlinig abnimmt, ist eine für die Rechnung bequeme Annahme. Zuerst dürfte der Druck langsamer und erst am Ende rascher fallen, etwa derart, daß der nach gleichen Abständen erreichte Spannungsabfall um so größer wird, je kleiner die zugehörige Spannung ist (Fig. 57). Wie man sieht, ist der Unterschied im allgemeinen unerheblich, wenn man die ganze Packungslänge h in Rechnung stellt, von der zur Sicherheit ein kurzes Stückchen unausgenutzt bleiben sollte.

Beispiel 37. Bei einer Ventilspindel eines Dampfmaschinenventils sei $d = 16$ mm, $d_1 = 36$ mm, $h = 30$ mm, $p = 10$ at. Anzugeben ist der Reibungswiderstand für $\mu = 0,08$.

Man erhält wieder aus Gleichung (34)

$$W = \pi \cdot 3,6 \cdot 3,0 \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 10) \cdot 0,08 \sim 16 \text{ kg.}$$

Beispiel 38. Zu berechnen ist der mittlere Reibungswiderstand des Kreuzkopfes einer Einzylinder-Dampfmaschine vom Zylinderdurchmesser $D = 45$ cm, die mit 9 at Eintrittsdampfspannung arbeitet, und dem Kondensatorgegendruck 0,1 at.

Nach Bd. I, S. 36 ist der mittlere Kreuzkopfdruck $N_m = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,52$ bei der Nennleistung der Maschine und bei der Höchstleistung das 1,54fache hiervon. Bei guter Schmierung ist anzusetzen $\mu = 0,08$.

Damit folgt bei der

$$\text{Nennleistung } W = 0,08 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 45^2 \cdot 0,52 = 66 \text{ kg,}$$

$$\text{Höchstleistung } W = 1,54 \cdot 66 = 102 \text{ kg.}$$

Der Reibungsverlust beträgt also im Verhältnis zur Kolbenkraft bei der

$$\text{Nennleistung } \frac{66}{4670} = 0,0141 ,$$

$$\text{Höchstleistung } \frac{102}{7020} = 0,0145 .$$

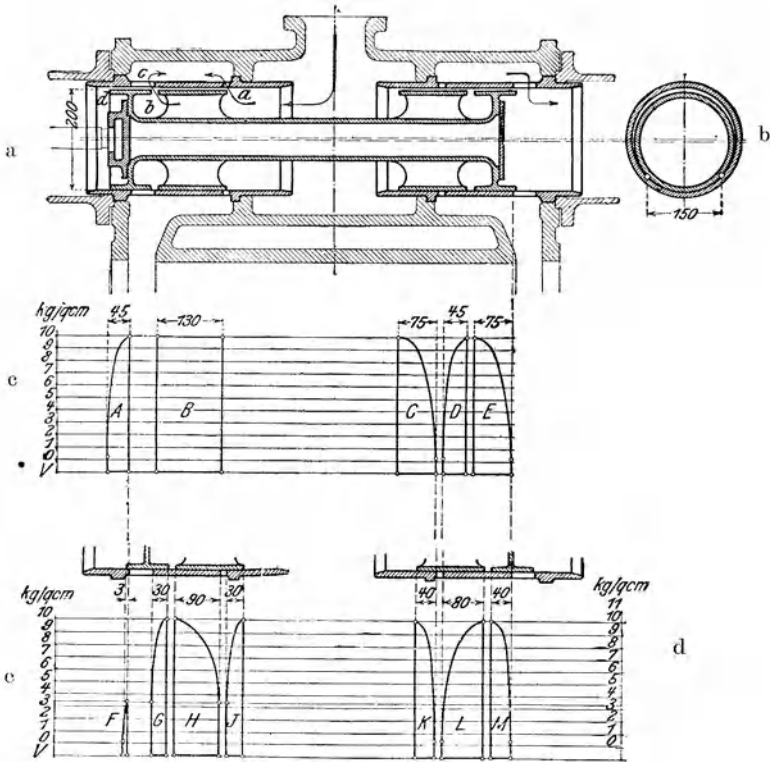


Fig. 58.

Beispiel 39. Anzugeben ist der Reibungswiderstand eines Lokomotivkolbenschiebers für überhitzten Dampf von $p = 10$ at Überdruck ohne Dichtungsringe gemäß Fig. 58a³⁸⁾.

³⁸⁾ Becher, Z. d. V. d. I. 1913.

Der eingeschliffene Schieber nutzt sich im Betriebe sehr schnell derart einseitig ab, wie es die Fig. 58 b übertrieben darstellt. Man kann im Mittel annehmen, daß er etwa mit $\frac{3}{4}$ seines Durchmessers D anliegt. Bei Beginn der Dampfeinströmung hat er die gezeichnete Stellung, und den Druckabfall in den Dichtungsflächen enthält die Fig. 58 c, die nach den Angaben zu Fig. 57 gezeichnet ist. Den danach bestimmten mittleren Druck sowie die mit $\mu = 0,07$ berechnete Reibungskraft $W = \frac{3}{4} \cdot D \cdot b \cdot p_m \cdot \mu$ enthält die folgende Zusammenstellung.

Breite	a	b	c	d	e
	4,5	13,0	7,5	4,5	7,5 cm
$p_m =$	9,4	10,9	9,0	9,4	9,0 at
$W' =$	44,4	148,9	70,8	44,4	70,8 \approx 379 kg.

Bei Beginn der Kompression bzw. Vorausströmung hat der Schieber die in Fig. 58 d gezeichnete Stellung. Es ist dann entsprechend gemäß Fig. 58 e

Breite	f	g	h	i	k	l	m
	0,3	3,0	9,0	3,0	4,0	8,0	4,0 cm
$p_m =$	10,9	9,4	9,0	9,4	9,4	9,0	9,4 at
$W'' =$	34	89,6	85,0	29,6	39,5	80,8	39,5 \approx 307 kg.

Dazu tritt noch der Einfluß des Schiebergewichtes $G \approx 70$ kg mit

$$W''' = \mu \cdot G \approx 5 \text{ kg.}$$

Der mittlere Schieberreibungswiderstand kommt dem Mittel aus W' und W'' zuzüglich W''' nahe:

$$W = \frac{1}{2} (379 + 307) + 5 = 348 \text{ kg.}$$

Um diese Reibung, den damit verbundenen Verschleiß und die daraus entstehenden Undichtigkeiten zu vermeiden, werden solche Schieber zweckmäßig von der Schieberstange getragen und durch federnde Ringe gedichtet³⁸⁾.

Beispiel 40. Die beiden um $\alpha = 27^\circ$ gegen die Wagerechte geneigten Spannseile eines Drahtseilbahnschutznetzes sind durch je zwei Anker mit einem Fundamentblock aus Beton verbunden. Die größte Spannkraft in jedem Seil beträgt 8,40 t. Welche Abmessungen erhält das Fundament, wenn guter Tonboden bzw. lettiger Moorboden vorausgesetzt wird, bei $\varnothing = 1,2$ facher Sicherheit?

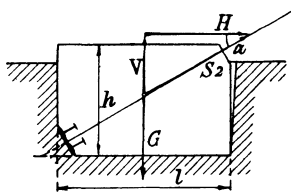


Fig. 59.

Die Spannkraften S ergeben bei der Zerlegung nach Fig. 59 die lotrechte Seitenkraft $V = 2 \cdot S \cdot \sin \alpha$ und die wagerechte Seitenkraft $H = 2 \cdot S \cdot \cos \alpha$. Es ist nun anzusetzen

$$H = \left(\frac{G}{\varnothing} - V \right) \cdot \mu_0$$

worin $G = b \cdot h \cdot l \cdot \gamma$ das Blockgewicht darstellt. Hieraus folgt mit den vorstehenden Werten für H und V

$$b \cdot h \cdot l = \frac{2 \cdot \varnothing}{\gamma} \cdot S \left(\frac{\cos \alpha}{\mu_0} + \sin \alpha \right), \quad (35)$$

also mit $\gamma = 2,3 \text{ t/m}^3$ und $\mu_0 = 0,60$ bzw. $0,30$

$$b \cdot h \cdot l = \frac{2 \cdot 1,2}{2,3} \cdot 8,40 \cdot \left(\frac{0,891}{0,60} + 0,454 \right) = 17,0 \text{ m}^3$$

bzw.

$$b \cdot h \cdot l = 8,77 \cdot (2,970 + 0,454) = 29,8 \text{ m}^3.$$

Wählt man im ersteren Fall

$$h = 2,0 \text{ m}, \quad b = 2,6 \text{ m},$$

so wird

$$l = 3,27 \text{ m};$$

wählt man im zweiten Fall

$$h = 2,5 \text{ m}, \quad b = 3,2 \text{ m},$$

so wird

$$l = 3,73 \text{ m}.$$

Beispiel 41. Das Trageil einer Drahtseilbahn liege auf einer Stütze mit der Kraft $V = 1,77 \text{ t}$ auf, die Spannkraft auf der einen Seite der Stütze habe die wagerechte Seitenkraft $H = 18,0 \text{ t}$. Anzugeben ist die Größe der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft auf der anderen Seite der Stütze.

Der Stützdruck V liefert die Reibungskraft

$$H_r = \mu \cdot V.$$

Man kann nun annehmen, daß das Seil in der etwas größeren Rille des gekrümmten Auflagerschuhes nur auf einer Breite von etwa $b = 3 \text{ mm}$ und auf einer Länge von etwa $l = 60 \text{ cm}$ anliegt. Dann ist der Flächendruck

$$p = \frac{V}{l \cdot b} = \frac{1770}{60 \cdot 0,3} \approx 100 \text{ at}.$$

Bei Schmierung mit Talg ist demnach gemäß S. 32 $\mu = 0,015$ und damit

$$H_r = 0,015 \cdot 1770 \approx 27 \text{ kg}.$$

Bei Schmierung mit Staufferfett ist $\mu \approx 0,17$, also

$$H_r = 0,17 \cdot 1770 \approx 300 \text{ kg}.$$

Nur bei Schmierung mit dem richtigen Fett ist die Reibung der Seile im Auflagerschuh zu vernachlässigen.

Beispiel 42. Beim ersten Bau der äußeren Maximiliansbrücke in München von $2 \cdot 44,0 \text{ m}$ Spannweite, die als Steinbrücke mit 3 Gelenken (Bd. I, S. 21) ausgeführt wurde, erhielt jeder Kämpfer und der Scheitel 33 Gelenke nach Fig. 60 statt nach Bd. I, S. 126, die vor dem Einsetzen mit Stearin geschmiert wurden, um das Rosten zu verhindern. Als der Kämpferdruck für jedes Gelenk in radialer Richtung $N_r = 117,80 \text{ t}$ und senkrecht dazu $N_t = 3,544 \text{ t}$ auf der einen Seite bzw. $N_r = 116,19 \text{ t}$ und $N_t = 2,476 \text{ t}$ auf der anderen Seite betrug, rutschte die größtenteils fertige Brücke langsam von den viel zu flachen und unrichtig geneigten Gelenken ab³⁹⁾.

Aus der Gleichung $\mu \cdot N_r \leq N_t$ ergibt sich die Reibungsziffer

$$\mu = \frac{2,476}{116,19} = 0,0213$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{3,544}{117,80} = 0,0301$$

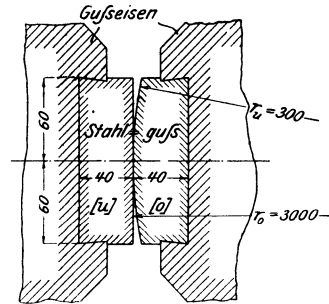


Fig. 60.

für die unbearbeiteten, aber mit Stearin geschmierten Stahlgußflächen.

Glatte Flächen, die bei 55 cm Länge und etwa 4 cm Anlagebreite ungefähr 500 at Flächendruck bekommen hätten, haben sogar nur die Reibungsziffer 0,0060 (S. 32). Die berechnete Reibungsziffer ist dort, wo allein die innere Reibung der an den Mantelflächen haftenden Schmierschicht überwunden wird, häufig gemessen worden⁴⁰⁾.

Beispiel 43. In einem Aufzug vom Eigengewicht $G = 400 \text{ kg}$ befinde sich die Nutzlast $Q = 225 \text{ kg}$ um die Strecke $a = 20 \text{ cm}$ außerhalb der Mitte. Anzugeben ist der Gleitwiderstand bei dem Abstand $b = 1,4 \text{ m}$ der Führungsbacken.

³⁹⁾ Dietz, Z. d. V. d. I. 1904.

⁴⁰⁾ Z. B. Mabery, J. of the American Soc. of Mech. Eng. 1910; Schlesinger, Z. d. V. d. I. 1910.

Aus der Momentengleichung (Fig. 61) $N \cdot b = Q \cdot a$ folgt

$$N = Q \cdot \frac{a}{b},$$

also der Führungswiderstand

$$W = 2 \cdot \mu \cdot N = 2 \cdot \mu \cdot Q \cdot \frac{a}{b}$$

oder mit $\mu = 0,12$ für wenig glatte, mäßig gefettete Flächen

$$W = 2 \cdot 0,12 \cdot 225 \cdot \frac{20}{140} = 7,7 \text{ kg.}$$

Bei Schachtförderanlagen, wo die Spurlatten nicht immer genau genug liegen und der Ausschlag der Lasten größer werden kann, ist erfahrungsgemäß⁴¹⁾

$$W = 0,012 \cdot Q, \quad (36)$$

worin Q die gesamte Belastung angibt, die auf der betreffenden Seite des Schachtes hängt. Dazu tritt noch der wesentlich größere Luftwiderstand des Fahrkorbes

$$W_L = 4 \cdot F \cdot v^{1,275}, \quad (37)$$

worin F die Bodenfläche des Fahrkorbes in m^2 angibt und v die größte Fahrgeschwindigkeit in m/sk .

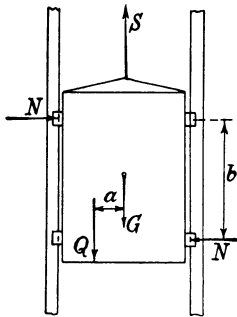


Fig. 61.

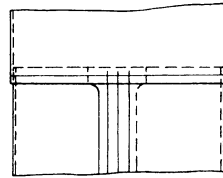
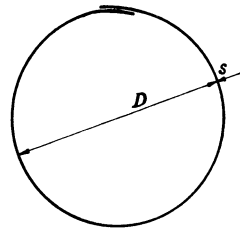


Fig. 62.

Beispiel 44. Für einen Dampfkesselmantel vom dem inneren Durchmesser $D = 2,40 \text{ m}$ und der Blechstärke $s = 2,2 \text{ cm}$, der den Überdruck $p = 10 \text{ at}$ aufnehmen soll, ist die Längs- und Quervernietung zu bestimmen.

Die Vernietungen werden meistens als Überlappungsvernietungen nach Fig. 62 ausgeführt. Man wählt in dem Fall die Nietstärke⁴⁰⁾

$$d = \sqrt{5 \cdot s} - 0,4 = \sqrt{5 \cdot 2,2} - 0,4 = 2,9 \text{ cm.}$$

Die durch die Niete zwischen den Blechen hervorgerufene Reibungskraft beträgt bei sorgsamer Herstellung und guter Verstemmung für 1 cm^2 Nietquerschnitt mindestens $w = 1000 \text{ kg}$ ⁴²⁾ (genauere Angaben s. Bd. IV).

Bei der Längsnaht von der beliebigen Länge l ist die vom Dampfdruck p ausgeübte Kraft $P = D \cdot l \cdot p$, von der die eine Hälfte vom vollen Blech, die andere Hälfte von der Vernietung aufgenommen wird. Sind i Niete in j Reihen hintereinander vorhanden, so gilt bei der Sicherheit \ominus gegen Gleiten

$$\ominus \cdot \frac{P}{2} = i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot w.$$

Durch Verbinden beider Gleichungen erhält man sofort

$$i = \frac{\ominus \cdot D \cdot l \cdot p}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot w}.$$

⁴¹⁾ Havlicek, Österr. Z. f. d. Berg- u. Hüttenwesen 1910.

⁴²⁾ Versuche von Bach, Z. d. V. d. I. 1892/94/95, 1912.

Bezeichnet jetzt τ den Abstand zweier Niete einer Reihe, die Nietenteilung, so gilt ja $l = \frac{2}{j} \cdot \tau$ und somit

$$\tau = \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot \frac{d^2}{D} \cdot \frac{w}{p \cdot \mathfrak{S}}, \quad (38)$$

also mit den obigen Zahlenwerten und $\mathfrak{S} = 1,5$ bei dreireihiger Längsnaht

$$\tau = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 2,9^2 \cdot 1000}{2 \cdot 240 \cdot 10 \cdot 1,5} = 11 \text{ cm.}$$

Bei der Quernaht ist die auf die Böden wirkende Trennungskraft

$$P' = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p,$$

und für i' Niete gilt

$$\mathfrak{S} \cdot P' = i' \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot w.$$

Hier werden die Niete gewöhnlich in einer Reihe angeordnet, und man erhält aus $\pi \cdot D = i' \cdot \tau'$

$$\tau' = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot w}{D \cdot p \cdot \mathfrak{S}}, \quad (39)$$

also mit den obigen Zahlenwerten

$$\tau' = \frac{\pi \cdot 2,9^2 \cdot 1000}{240 \cdot 10 \cdot 1,5} = 7,3 \text{ cm.}$$

Zweckmäßig setzt man die Niete etwas näher zusammen, damit sie gut dicht halten:

$$\tau' = 2,4 d = 7,0 \text{ cm,}$$

so daß die Sicherheit beträgt

$$\mathfrak{S}' = \frac{7,3}{7,0} = 1,56.$$

Oft rechnet man nur bei der zweireihigen Nietung mit der Sicherheit 1,5 und erhöht sie bei der dreireihigen um 10 v. H., um die ungleichmäßige Verteilung der Kraft über die einzelnen Nietreihen zu berücksichtigen. Bei der einreihigen geht man dann mit der Sicherheit um 5 v. H. herunter⁴³⁾.

Bei Laschennietungen wird die Nietstärke gewöhnlich etwas kleiner gewählt: $d = \sqrt{5} \cdot s - 0,6 \text{ cm}$. Die Kraft beträgt in dem Fall mindestens 1700 kg für 1 cm² Nietquerschnitt⁴³⁾.

Wird ein prismatischer Körper, etwa die Führungsfläche des Tisches einer Hobelmaschine, mit der Kraft Q in eine Keilnute vom Spitzwinkel $2\delta = 110^\circ$ gepreßt (Fig. 63), so müssen die beiden Gegendrücke der Seitenflächen, die aus Symmetriegründen gleich sind, der Kraft Q das Gleichgewicht halten. Es folgt somit aus dem Kräfte-

dreieck der Fig. 63 $N = \frac{Q}{2 \cdot \sin \delta}$. Der

Bewegung senkrecht zur Zeichenebene

wirkt nun an jeder Seitenfläche der Reibungswiderstand $\mu \cdot N$ entgegen. Also ist der Gesamtwiderstand

$$W = 2 \cdot \mu \cdot N = \frac{\mu}{\sin \delta} \cdot Q \quad (40)$$

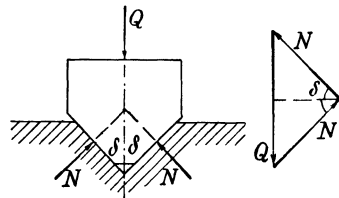


Fig. 63.

⁴³⁾ Bach, Die Maschinenelemente, 1907.

Auf einer zu Q senkrechten Führungsfläche wäre der Widerstand $W = \mu \cdot Q$. Die Keilnute vergrößert also die Reibungsziffer auf $\mu' = \frac{\mu}{\sin \delta}$.

Dieselben Verhältnisse gelten für die Supportführungen von Drehbänken u. dgl. nach Fig. 64.

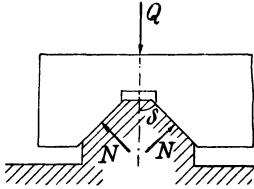


Fig. 64.

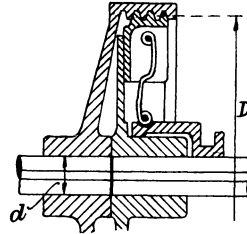


Fig. 65.

Beispiel 45. Bei der Reibungskupplung von Dohmen-Leblanc (Fig. 65) werden $i = 4$ Schieber, die in Führungen der auf dem Ende der einen Welle befestigten Scheibe gleiten, mit dem Spitzenwinkel $2\delta = 40^\circ$ durch federnde Kniehebel in die Rillen des auf dem zweiten Wellenende sitzenden Gehäuses gedrückt. Anzugeben ist die Kraft Q , die auf einen Schieber auszuüben ist, für eine Welle von $d = 70$ mm Durchmesser, die ein Drehmoment $M = 8230$ emkg überträgt, bei $D = 78$ cm mittlerem Rillendurchmesser, wenn mit $\var� = \frac{1}{3}$ facher Sicherheit gerechnet wird.

Nach den Angaben von Beispiel 26 gilt mit Formel (40)

$$\frac{i}{2} \cdot Q \cdot \frac{\mu}{\sin \delta} \cdot D = \var� \cdot M,$$

worin für die sich glattschleifenden trockenen Anlageflächen $\mu = 0,16$ zu setzen ist. Man erhält so

$$Q = \frac{2 \var� \cdot M \cdot \sin \delta}{D \cdot i \cdot \mu} = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 8230 \cdot 0,3420}{78 \cdot 4 \cdot 0,16} \approx 150 \text{ kg.}$$

Werden die beiden in der Berührungsfläche F auf den bewegten Körper wirkenden Kräfte N und W zu einer Mittelkraft vereinigt, so bildet sie mit N den Reibungswinkel⁴⁴⁾ ϱ , und man erhält aus der Fig. 66:

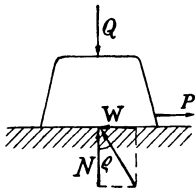


Fig. 66.

$$\text{tg } \varrho = \frac{W}{N} = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu. \tag{41}$$

Beispiel 46. Es sind die äußersten Gleichgewichtslagen eines Holzbalkens vom Gewicht G und der Länge l zu bestimmen, der zwischen zwei unter den Winkeln $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 30^\circ$ gegen die Wagerechte geneigten Ebenen aus Beton liegt (Fig. 67).

Der einfacheren Rechnung wegen werde zuerst von der Reibung trotz der hohen Reibungsziffer $\mu_0 = 0,46$ abgesehen. Dann sind die Kräfte N_1 und N_2

⁴⁴⁾ Parant, Mem. de l'Acad. roy. des Sciences, Paris 1704.

senkrecht zu den betreffenden Ebenen gerichtet und, da sonst nur noch das in der Balkenmitte angreifende Gewicht G vorhanden ist, so müssen sich die drei Kräfte im Gleichgewichtsfall in einem Punkt O schneiden, so daß hiermit die vereinfachte Aufgabe durch Probieren gelöst werden kann.

Hat der Balken dabei die Neigung γ gegen die Wagerechte, so gilt rechnerisch

$$\begin{aligned} \text{a) } & + N_1 \cdot \sin \alpha - N_2 \cdot \sin \beta = 0 \\ \text{b) } & + G - N_1 \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot \cos \beta = 0 \\ \text{c) } & + N_1 \cdot l \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma \right) \\ & - G \cdot \frac{1}{2} l \cdot \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

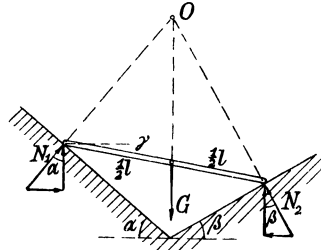


Fig. 67.

Wird die Gleichung a) mit $\cos \alpha$ und die Gleichung b) mit $\sin \alpha$ erweitert, so erhält man durch Subtraktion beider

$$N_2 \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) = G \cdot \sin \alpha,$$

also nach S. 35

$$N_2 = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Ebenso ergibt sich nach Erweiterung mit $\cos \beta$ bzw. $\sin \beta$ durch Addition

$$N_1 = G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Wird dieser Wert in die Gleichung c) eingesetzt und der Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma$ zerlegt in $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und γ , so ist

$$G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cdot \cos \gamma + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cdot \sin \gamma \right] = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \cos \gamma$$

oder nach Division durch $\frac{1}{2} G \cdot \cos \gamma$

$$\frac{2 \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma) = 1.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{2 \sin \beta \cos \alpha} = \frac{1}{2} (\cotg \beta - \cotg \alpha).$$

Wird die Reibung berücksichtigt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Die um den Reibungswinkel ϱ gegen die N geneigten Gegenkräfte W_1 bzw. W_2 sind im Sinne der Bewegung entweder beide nach rechts oder beide nach links gegen die N geneigt (Fig. 68), sie schneiden sich dann in O_1 bzw. O_2 , und durch diese Punkte muß jetzt das Schwerpunktslot gehen. Der Erfolg ist derselbe, als wenn α um ϱ vergrößert bzw. verkleinert und β um ϱ verkleinert bzw. vergrößert wäre. Man erhält so ohne Rechnung, die das allgemein gültige Ergebnis nur bestätigt,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \cdot [\cotg(\beta \mp \varrho) - \cotg(\alpha \pm \varrho)].$$

Solange G in der Mitte von l vereinigt gedacht werden kann, haben die Größen von G und l keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Für die Zahlenrechnung bestimmt man aus Gleichung (41) $\operatorname{tg} \varrho = \mu_0 = 0,46$, $\varrho = 24^\circ 43'$ und erhält dann

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\cotg 54^\circ 43' - \cotg 15^\circ 17'), \\ \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\cotg 5^\circ 17' - \cotg 64^\circ 43') \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{1}{2} \cdot (0,7076 - 3,6597) = -1,476 ,$$

also

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{1}{2} \cdot (10,8164 - 0,4723) = +5,172 ,$$

$$\gamma_2 \sim -56^\circ , \quad \gamma_1 \sim +79^\circ .$$

Bei dem großen Reibungswinkel ist der Balken in jeder möglichen Lage noch mit großer Sicherheit im Gleichgewicht, wie die Fig. 68 ohne weiteres erkennen läßt. Anders liegt die Sache, wenn μ_0 klein ist.

Wird ein Körper, der sich mit der Kraft N auf eine Unterlage legt, durch eine Zugschnur, in die eine Schraubenfeder eingeschaltet ist, mit einer Kraft P_1 gezogen, so tritt Bewegung mit einer gewissen Geschwindigkeit v_1 ein, sobald $P_1 \geq \mu \cdot N$ ist, und die Feder zeigt eine ziemlich bedeutende Verlängerung, die als Maß von P_1 angesehen werden kann.

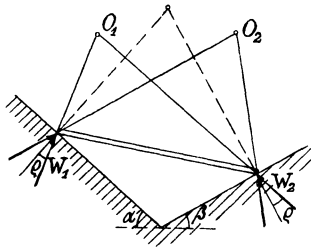


Fig. 68.

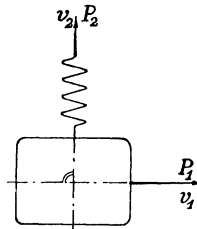


Fig. 69.

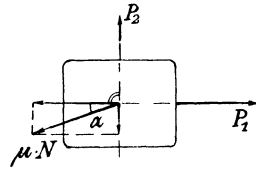


Fig. 70.

Der Körper werde jetzt an einer zweiten Zugschnur ohne Feder mit der so ermittelten Kraft P_1 gezogen und dann gleichzeitig senkrecht dazu mit eingeschalteter Feder durch eine zweite Kraft P_2 (Fig. 69). Man bemerkt nun, daß die Feder sich nur wenig dehnt, selbst wenn die Geschwindigkeit v_2 der zweiten Bewegung eine verhältnismäßig große ist⁴⁵⁾: Der nach einer Richtung bewegte Körper, in der er einen bestimmten, unter Umständen ziemlich hohen Reibungswiderstand findet, ist während der Bewegung in der dazu senkrechten Richtung im ersten Augenblick nahezu reibungslos.

Wirken P_1 und P_2 gleichzeitig längere Zeit auf den Körper ein, so stellt sich bald der Reibungswiderstand $\mu \cdot N$ entgegengesetzt zur Richtung der Mittelkraft von P_1 und P_2 ein (Fig. 70), und es ist⁴⁶⁾

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_2}{P_1} = \frac{v_2}{v_1} ,$$

also

$$P_1 = \mu \cdot N \cdot \cos \alpha = \mu \cdot N \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

⁴⁵⁾ Meyer, beschrieben von Mies, D. p. J. 1913.

⁴⁶⁾ Camerer, Z. d. V. d. I. 1899.

oder

$$P_1 = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}}, \quad (42)$$

vorausgesetzt, daß die Reibungsziffer zwischen dem Körper und der Unterlage nach jeder Richtung hin denselben Wert hat.

Beispiel 47. Der Tauchkolben einer Prüfmaschine für Indikatorfedern habe den Durchmesser $d = 30$ cm; er werde abgedichtet durch einen Lederstulp von $h = 1$ cm Höhe. Dann ist bei $p = 5$ at Überdruck der Reibungswiderstand des Kolbens

$$\mu \cdot N = \pi \cdot d \cdot h \cdot p \cdot \mu = \pi \cdot 3,0 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 0,04 = 1,89 \text{ kg}$$

und der Kolben bewegt sich in seiner Achsenrichtung etwa mit $v_1 = 0,1$ cm/sk Geschwindigkeit.

Wird er dabei aber mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v_2 = 10$ cm/sk um seine Achse gedreht, so ist nach Formel (42) der Bewegungswiderstand nur noch

$$P_1 = \frac{1,89}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{0,1}\right)^2}} = \frac{1,89}{\sqrt{10001}} = \frac{1,89}{100} = 0,019 \text{ kg},$$

also verschwindend gering im Verhältnis zu den bewegten Gewichten.

Beispiel 48. Ein gebremster Kraftwagen rutscht auf einer geneigten, schlüpfrigen Straße mit einer Geschwindigkeit von etwa $\frac{1}{2}$ m/sk herunter. Im unbelasteten Zustande liegt der Schwerpunkt des ganzen Wagens so weit nach vorn, daß die Vorderräder am stärksten belastet sind, und der Wagen rutscht mit den Vorderrädern voran. Im vollbeladenen Zustand liegt aber der Schwerpunkt des Ganzen näher an den Hinterrädern, und der Wagen befindet sich dann im labilen Gleichgewicht. Er hat das Bestreben, sich so zu drehen, daß der Schwerpunkt die tiefste Lage annimmt, und dieser Drehung wirkt an den Rädern nur eine ganz geringe Reibungskraft in seitlicher Richtung entgegen, so daß sich der Wagen querstellt und schließlich ganz herumdreht.

Beispiel 49. Anzugeben ist die Sicherheit gegen Entgleisen des Tisches einer Hobelmaschine mit Keilnutenführung ($2\delta = 110^\circ$), wenn das Gewicht des Tisches und des Arbeitsstückes $G_1 + G_2 = 1950$ kg beträgt und der von der Rückseite des Stiches unter dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ gegen die Lotrechte auf das Arbeitsstück ausgeübte Druck $Q = 1900$ kg.

Für die Rechnung genügt es, eine Keilnute unter der Gesamtbelastung anzunehmen, da die Summe der Wirkungen beider Führungen denselben Betrag ergibt. Es wird die Kraft Q zerlegt in die wagerechte $Q \cdot \sin \alpha$ und die lotrechte $Q \cdot \cos \alpha$, zu der sich die Lasten $G_1 + G_2$ addieren. Die Zerlegung dieser Kräfte in Richtung der Seitenfläche der Keilnute und senkrecht dazu (Fig. 71) liefert die Bedingung

$$\ominus \cdot Q \cdot \sin \alpha \cdot \sin \delta = (Q \cdot \cos \alpha + G_1 + G_2) \cdot \cos \delta.$$

Die zur Seitenfläche senkrechten Kräfte bleiben außer Ansatz, weil ihre Reibungskräfte verschwinden, da sich der Tisch mit verhältnismäßig großer Geschwindigkeit senkrecht zur Zeichenebene bewegt und somit für jede Bewegung in der Zeichenebene reibungslos ist.

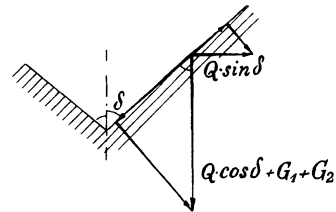


Fig. 71.

Man erhält deshalb

$$\mathfrak{S} = \frac{\cotg \delta}{\tg \alpha} \cdot \left(1 + \frac{G_1 + G_2}{Q \cdot \cos \alpha} \right), \quad (43)$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\mathfrak{S} = \frac{0,7002}{1} \cdot \left(1 + \frac{1950}{1900 \cdot 0,7071} \right) = 1,714.$$

Da sich Q durch unvorhergesehene Umstände einmal ganz erheblich gegenüber den dem Entwurf zugrunde gelegten Annahmen erhöhen kann, so ist eine ziemlich hohe Sicherheit erforderlich.

Beispiel 50. Eine Kegelreibungskupplung für Kraftwagen nach Fig. 72 soll das Drehmoment $M = 1955$ cmkg mit $\mathfrak{S} = 1,25$ facher Sicherheit übertragen. Der Neigungswinkel beträgt i. M. $\alpha = 10^\circ$ und der Halbmesser $r = 25$ cm. Anzugeben ist die Kraft P , mit der die Kupplung zusammenzupressen ist.

Es ist anzusetzen

$$f d N \cdot \mu \cdot r = \mathfrak{S} \cdot M.$$

Der Anpressung entgegen wirkt die Seitenkraft

$$f d N \cdot \sin \alpha = P.$$

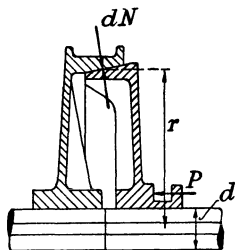


Fig. 72.

Die zweite, wesentlich größere Seitenkraft $f d N \cdot \cos \alpha$, die bei nicht umlaufender Bremsscheibe die ebenfalls entgegengesetzt zu P gerichtete Reibungskraft $\mu \cdot f d N \cdot \cos \alpha$ hervorruft, bleibt außer Ansatz, da beim Einrücken der Kupplung die eine Scheibe sich mit großer Geschwindigkeit gegen die andere bewegt¹⁵⁾. Man erhält somit

$$P = \frac{\mathfrak{S} \cdot M \cdot \sin \alpha}{\mu \cdot r}, \quad (44)$$

also mit den obigen Zahlenwerten und $\mu = 0,10$ für geölte Flächen

$$P = \frac{1,25 \cdot 1955 \cdot 0,1736}{0,10 \cdot 25} = 170 \text{ kg.}$$

Ein Lederbelag in dem kegelförmigen Gehäuse erhöht die Reibungsziffer auf $\mu = 0,15$ bei etwas Ölschmierung, und damit wird

$$P' = \frac{P}{1,5} = 113 \text{ kg.}$$

Beispiel 51. Man verwendet bei nicht zu breiten Riemen oft eine ballige Scheibe, damit sich, wenn der auf der Mitte laufende Riemen (Fig. 73) aus irgendeinem Mangel nicht auf beiden Hälften gleich fest anliegt, die losere Hälfte sogleich nach dem größeren Durchmesser der Scheibe verschiebt und die fester anliegende nach einem kleineren, so daß schnell ein Ausgleich eintritt und die ganze Breite des Riemens in gleicher Weise an der Übertragung mitwirkt. Die Verschiebung ist nur dadurch möglich, daß der Riemen immer etwas auf der Scheibe gleitet (Abschnitt 17), und zwar besonders bei kleineren Scheiben oft recht erheblich. Er ist dann in der Querrichtung ganz oder nahezu reibungslos, und nur deshalb vermag der Unterschied der kleinen Seitenkräfte $P = (N_2 - N_1) \cdot \sin \alpha$ überhaupt eine Bewegung herbeizuführen.

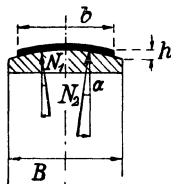


Fig. 73.

Die üblichen Maße sind bei gegebener Riemenbreite b cm

$$\text{Scheibenbreite} \quad B = 1,1 b + 1 \text{ cm,}$$

$$\text{Scheibenerhöhung} \quad h \approx \frac{1}{3,5} \cdot \sqrt{10 B} \text{ cm.}$$

Daraus ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h \cdot \frac{b}{B}}{\frac{1}{2}b} = \frac{2h}{B}.$$

Setzt man überschlägig den Unterschied der beiden Anpreßdrücke zu $\frac{1}{10}$ des Mittelwertes N , der häufig genau genug zu $10b$ kg bestimmt werden kann, so wird $P = b \cdot \sin \alpha$. Es gilt dafür die Zusammenstellung:

$b = 5$	10	15	20	25	cm
$B = 7$	12	18	23	28	„
$h = 2,5$	3	4	4,5	5	„
$\operatorname{tg} \alpha = 0,715$	0,500	0,445	0,391	0,357	
$\sin \alpha = 0,878$	0,559	0,487	0,421	0,379	
$P \approx 4,4$	5,6	7,3	8,4	9,5	kg.

Zum Betrieb eines beliebigen Getriebes sei eine bewegende Kraft P_0 erforderlich, wenn man die Reibungswiderstände zwischen den einzelnen Teilen des Getriebes außer Ansatz läßt. Werden die Reibungswiderstände W in Rechnung gestellt, so ist eine Kraft $P = P_0 + W$ für den tatsächlichen Betrieb nötig. Ein Getriebe ist nun um so vorteilhafter, je geringer die Reibungswiderstände darin sind, denn ein um so größerer Anteil der bewegenden Kraft P wird darauf verwendet, die verlangte Arbeit zu leisten, und ein um so kleinerer Anteil wird in der Maschine selbst im allgemeinen nutzlos verzehrt.

Das Güteverhältnis der Vorrichtung wird durch das Verhältnis der zum Antrieb erforderlichen Kraft P_0 ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände W zu der tatsächlich mit Einrechnung der Reibungswiderstände erforderlichen Kraft P bestimmt:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{P_0}{P_0 + W} = \frac{1}{1 + \frac{W}{P_0}}, \quad (45a)$$

das auch als Wirkungsgrad bezeichnet wird. In manchen Fällen ist es vorteilhafter, mit den bewegenden Drehmomenten M_0 bzw. M zu rechnen, und es gilt entsprechend

$$\eta = \frac{M_0}{M} = \frac{M_0}{M_0 + M_r} = \frac{1}{1 + \frac{M_r}{M_0}}. \quad (45b)$$

Der größte, praktisch nicht erreichbare Wert des Wirkungsgrades ist demnach für $W = 0$ $\eta = 1$.

Ist dagegen P_0 gegenüber W nicht besonders groß oder gar klein, so ergeben sich sehr niedrige Werte des Wirkungsgrades. Das trifft z. B. bei allen wenig belasteten Maschinen oder Getrieben zu, und im Fall des Leerlaufes wird $\eta = 0$. Angaben, die das nicht berücksichtigen, sind irreführend. Im folgenden wird der Wirkungsgrad stets für die Regelbelastung berechnet werden.

Sind mehrere Getriebe hintereinander zu einer Maschine vereinigt und hat das erste den Wirkungsgrad η_1 , so kommt von der Antriebs-

kraft P nur noch der Betrag $\eta_1 \cdot P$ auf das zweite Getriebe. Dort sinkt die weitergeleitete Kraft infolge des Wirkungsgrades η_2 des zweiten Getriebes auf den Betrag $\eta_2 \cdot (\eta_1 \cdot P)$ usw. Man kommt so zu dem Ergebnis, daß der Gesamtwirkungsgrad einer Maschine gleich dem Produkt der Wirkungsgrade der hintereinander arbeitenden Einzelgetriebe ist:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \quad (46)$$

Erfährt die Kraft P außerdem in jedem Einzelgetriebe durch Übersetzung (Abschnitt 1 od. 10) eine Verkleinerung oder Vergrößerung, so wird an dem Schluß betreffend der Wirkungsgrade nichts geändert.

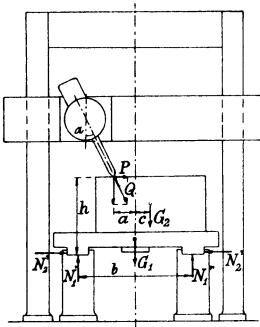


Fig. 74.

Beispiel 52. Der $l = 2,40$ m lange Tisch einer Hobelmaschine wiege $G_1 = 1200$ kg, das Arbeitsstück $G_2 = 750$ kg; es sei so aufgespannt, daß der Schwerpunkt um $c = 0,15$ m aus der Mitte liegt. Der Stahl greift daran mit der wagerechten, in Richtung der Tischlänge verlaufenden Kraft $P = 2000$ kg an im Abstand $a = 0,30$ m von der Mitte entgegengesetzt zu c und $h = 0,45$ m von den wagerechten, in der Entfernung $b = 0,75$ m befindlichen Führungsflächen des Tisches. Außerdem wirkt der Stichel noch auf seiner Rückseite unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ gegen die Lotrechte geneigt mit der Kraft $Q = 1900$ kg auf das Arbeitsstück ein (Fig. 74). Anzugeben ist der Wirkungsgrad des Hobeltisches, wenn die Reibungsziffer der Führungen $\mu_1 = 0,02$ beträgt und die des Arbeitsstückes $\mu_2 = 0,16$.

Man zerlegt die Kraft Q in ihre Seitenkräfte $Q \cdot \sin \alpha$ und $Q \cdot \cos \alpha$. Dann ist

$$N_1' \cdot b = G_1 \cdot \frac{1}{2} b + G_2 \cdot \left(\frac{1}{2} b - c \right) + Q \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} b + a \right) - Q \cdot \sin \alpha \cdot h,$$

also

$$N_1' = \frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_2 \cdot \left(1 - \frac{2c}{b} \right) + \frac{1}{2} Q \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{2a}{b} \right) - Q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{b}$$

und entsprechend

$$N_1'' = \frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_2 \cdot \left(1 + \frac{2c}{b} \right) + \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{2a}{b} \right) + Q \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{b}.$$

Wird die Kraft P in der wagerechten Ebene um die Strecke a nach der Mitte der Maschine verschoben, so ist ein Drehmoment hinzuzufügen (Bd. I, S. 63) von der Größe $P \cdot a$, das aufgenommen wird von zwei Kräften N_2' , die um etwa $\frac{3}{4} l$ voneinander entfernt an den Seiten der Führungen angreifen. Es ist also

$$N_2' = P \cdot \frac{a}{\frac{3}{4} l}.$$

Verschiebt man jetzt P noch einmal in der lotrechten Mittelebene der Maschine um die Strecke h nach unten, so verteilt sie sich jetzt auf die beiden wagerechten Führungsflächen, und das hinzutretende Drehmoment bewirkt, daß die Kräfte N_1 sich am einen Tische um einen Betrag $P \cdot \frac{h}{\frac{3}{4} l}$ erhöhen und am entgegengesetzten Ende um den gleichen Betrag vermindern. Für die Zwecke der vorliegenden Rechnung bleibt also der Mittelwert von N_1 unverändert. Auch die Einzelwerte N_1' und N_1'' haben hier, wo die Stabilität und vorteilhafteste Befestigung des Arbeitsstückes nicht untersucht werden soll, keinen Wert.

Sieht man von der Reibung ab, so ist $P_0 = P$. Der Reibungswiderstand ist nun

$$\begin{aligned} W &= \mu_1 \cdot (N'_1 + N''_1 + N_2 + 2N'_2) + \mu_2 \cdot Q \\ &= \mu_1 \cdot \left(G_1 + G_2 + Q \cdot \cos \alpha + Q \cdot \sin \alpha + 2 \cdot P \cdot \frac{4a}{3l} \right) + \mu_2 \cdot Q \\ &= 0,02 \cdot \left[1200 + 750 + 1900 \cdot (0,866 + 0,50) + 2 \cdot 2000 \cdot \frac{4 \cdot 0,30}{3 \cdot 2,40} \right] \\ &\quad + 0,16 \cdot 1900 = 408 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Beim Rückgang ist $Q = P = 0$, und damit wird

$$W_0 = 0,02 \cdot (1200 + 750) = 39 \text{ kg.}$$

Für einen Arbeitsgang ist demnach die Summe der Reibungswiderstände 447 kg. Damit folgt der Wirkungsgrad des Tisches

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{\sum W}{P_0}} = \frac{1}{1 + \frac{447}{2000}} = \frac{1}{1,224} = 0,82.$$

Für die Hobelmaschine sei ferner bestimmt der Wirkungsgrad des vierfachen Zahnradantriebes $\eta_2 = 0,83$, des Riemenantriebes $\eta_3 = 0,94$, des Deckenvorgeleges $\eta_4 = 0,95$. Dann ist der Gesamtwirkungsgrad nach Formel (46)

$$\eta = 0,82 \cdot 0,83 \cdot 0,94 \cdot 0,95 \approx 0,61.$$

Beispiel 53. An einer Dampfmaschine beträgt der Wirkungsgrad des Kolbens $\eta_1 = 0,969$, der Kolbenstangenstopfbüchse $\eta_2 = 0,982$, der Kreuzkopfführung $\eta_3 = 0,986$, der Zapfen des Kreuzkopfes, der Kurbel, des Hauptwellenlagers insgesamt $\eta_4 = 0,990$, des Schwungrades, verursacht durch den Luftwiderstand und die Reibung im zweiten Lager der Hauptwelle, $\eta_5 \approx 0,985$, der beiden Exzenter je $\eta_6 = 0,975$, der beiden Schieberstangenführungen und -stopfbüchsen je $\eta_7 = 0,950$, der Anteil, den die Grundschieberreibung von der Maschinenkraft verzehrt, $x_1 = 0,055$, der Anteil der Expansionsschieberreibung $x_2 = 0,025$. Anzugeben ist der Wirkungsgrad der Maschine.

Bezeichnet P die vom Dampf auf den Kolben ausgeübte Kraft, so verringert sich diese beim Durchgang bis in die Hauptwelle auf $P \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4$. Davon ist an der Welle aufzuwenden für die Reibung der Schieber usw. $x_1 \cdot P \cdot \frac{1}{\eta_6} \cdot \frac{1}{\eta_7}$ und $x_2 \cdot P \cdot \frac{1}{\eta_6} \cdot \frac{1}{\eta_7}$, also in Abzug zu bringen. Das Ergebnis wird durch den Wirkungsgrad des Schwungrades weiter verringert auf

$$P \cdot \left(\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 - \frac{1}{\eta_6 \cdot \eta_7} \cdot [x_1 + x_2] \right) \cdot \eta_5.$$

Der Faktor von P stellt den Gesamtwirkungsgrad dar:

$$\eta = \left(0,969 \cdot 0,982 \cdot 0,986 \cdot 0,990 - \frac{0,055 + 0,025}{0,975 \cdot 0,950} \right) \cdot 0,985 = 0,83.$$

Der Wirkungsgrad von Ventildampfmaschinen ist, wie hiernach leicht einzusehen ist, um $0,05 \div 0,06$ höher als der von Schiebermaschinen.

4. Der Keil.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil mit dem Spitzenwinkel 2α soll durch die auf den Rücken einwirkende Kraft P_0 gleichmäßig vorwärtsgeschoben werden (Fig. 75 a). Seine Seitenflächen erfahren hier-

bei von den anliegenden Druckflächen senkrechte Gegendrücke N , die wegen der Symmetrie der ganzen Anordnung einander gleich sind. Das aus den drei Kräften gebildete Gleichgewichtsdreieck der Fig. 75 b liefert sofort den Zusammenhang

$$\frac{1}{2} \cdot P_0 = N \cdot \sin \alpha. \quad (47)$$

Hierbei ist jedoch die Reibung an den Seitenflächen nicht berücksichtigt, die die beiden Kräfte $\mu \cdot N$ der Fig. 76 entgegengesetzt zur

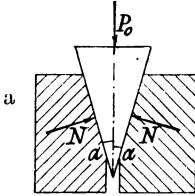


Fig. 75.

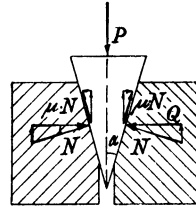
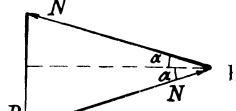


Fig. 76.

Bewegungsrichtung hervorruft. Nach Zerlegung der N und $\mu \cdot N$ gemäß Fig. 76 lautet die Gleichgewichtsbedingung für die senkrechten Seitenkräfte

$$-2 \cdot N \cdot \sin \alpha - 2 \mu \cdot N \cdot \cos \alpha + P = 0,$$

aus der folgt

$$P = 2 \cdot N \cdot \cos \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu) \quad (48 \text{ a})$$

Häufig ist die Seitenkraft $Q = \frac{N}{\cos \alpha}$ unmittelbar gegeben. Dann ist

$$P = 2 \cdot Q \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu) \quad (48 \text{ b})$$

Der Wirkungsgrad des Keiles wird hiernach

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \mu \cdot \operatorname{cotg} \alpha}. \quad (49)$$

Ist die Kraft P im Verhältnis zu den senkrechten Seitenkräften der Gegendrücke N zu klein, so bewegt sich der Keil unter Umständen rückwärts, wobei die Reibungskräfte $\mu \cdot N$ umgekehrt zu den Angaben der Fig. 76 gerichtet sind. Man erhält dann

$$-2 \cdot N \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \mu \cdot N \cdot \cos \alpha + P_1 = 0,$$

und daraus folgt

$$P_1 = 2 \cdot N \cdot \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu) = 2 \cdot Q \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \mu). \quad (48 \text{ c})$$

Diese Kraft nimmt den Wert 0 an, d. h. der Keil bleibt stecken, ohne daß eine Druckkraft auf seine Rückseite ausgeübt wird, wenn der Klammerausdruck gleich Null ist. Die Bedingung für diesen Grenzfall ist demnach

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \varrho$$

und der Wirkungsgrad beim Eintreiben ist dann nach Formel (49)

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1}{1 + 1} = 0,50.$$

Wird $\alpha < \varrho$ ausgeführt, so ist, damit der Keil wieder zurückgezogen werden kann, eine entgegengesetzt zur Richtung von P in Fig. 76 wirkende Kraft erforderlich, deren Größe die Gleichung (48 c) angibt. Der Keil ist dann selbstsperrend. Der Wirkungsgrad eines selbstsperrenden Keiles nach Fig. 76 ist also stets kleiner als 0,5.

Beispiel 54. Anzugeben ist der Neigungswinkel 2α , den ein Keil mit Zulagen nach Fig. 77 erhalten muß, wenn er $\mathfrak{S} = 3, 4, 5$ fache Sicherheit gegen Lösen haben soll. Ferner ist festzustellen die zum Eindrücken erforderliche Kraft P , sowie die zum Lösen von der Gegenseite her aufzuwendende, wenn die Verbindung einer wechselnden Kraft $Q = 4,2$ t standhalten soll.

Als Bedingung für den Neigungswinkel erhält man

$$\mathfrak{S} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varrho,$$

also mit $\mu = 0,16$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\mu}{\mathfrak{S}} = \frac{0,16}{3} = 1 : 18,75, & 2\alpha &= 6^\circ 6', \\ &= \frac{0,16}{4} = 1 : 25, & 2\alpha &= 4^\circ 34', \\ &= \frac{0,16}{5} = 1 : 31,25, & 2\alpha &= 3^\circ 40'. \end{aligned}$$

Würde der Keil nur so weit eingetrieben, daß gerade $N \propto Q$ ist, so würde die Verbindung sich lockern, wenn bei dem stetigen Wechsel der Richtung von Q , wie er z. B. beim Antrieb von Pumpen häufig vorkommt, diese Kräfte die entgegengesetzte Richtung zu der in die Fig. 77 eingezeichneten haben. Der Keil muß also wesentlich stärker angezogen werden, vorteilhaft derart, daß in dem betrachteten Fall noch immer die Kraft Q besteht^{26 c)}. Dann ist im unbelasteten Zustand die Anspannung $2Q$ und, wenn die Kräfte Q in dem in die Zeichnung eingezeichneten Sinne wirken, sogar $3Q$.

Die dem Eintreiben des Keiles widerstehenden Kräfte N ergeben sich dann aus den Kräfte dreiecken der Fig. 77 zu

$$N = \frac{2 \cdot Q}{\cos \alpha},$$

während die Nasen der Vorlagen die Kräfte $N_1 = 2 \cdot Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$ aufzunehmen haben.

Aus den Formeln (48 b) und (48 c) folgt

$$\begin{aligned} P &= 4 \cdot 4,2 \cdot 0,2133 = 3,585 \text{ t,} \\ &= 4 \cdot 4,2 \cdot 0,200 = 3,360 \text{ t,} \\ &= 4 \cdot 4,2 \cdot 0,192 = 3,227 \text{ t;} \\ P_1 &= -4 \cdot 4,2 \cdot 0,1067 = -1,793 \text{ t,} \\ &= -4 \cdot 4,2 \cdot 0,120 = -2,017 \text{ t,} \\ &= -4 \cdot 4,2 \cdot 0,138 = -2,319 \text{ t.} \end{aligned}$$

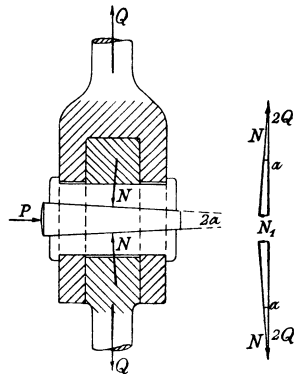


Fig. 77.

Wenn diese Verbindung überhaupt noch ausgeführt wird, wählt man gewöhnlich $\mathfrak{S} = 4$. Dann ist der Wirkungsgrad beim Eintreiben nach Formel (49)

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{0,16}{0,04}} = \frac{1}{5}.$$

Beispiel 55. Die Schalenkupplung nach Fig. 78 soll bei der Wellenstärke $d = 6$ cm das Drehmoment $M = 5184$ cmkg mit $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{3}$ facher Sicherheit übertragen. Anzugeben ist der Neigungswinkel α der äußeren Kegelfläche, wenn die Sicherheit gegen Lösen $\mathfrak{S}_2 = 4$ beträgt, die zum Festdrücken erforderliche Kraft P , sowie die zum Lösen erforderliche P_1 .

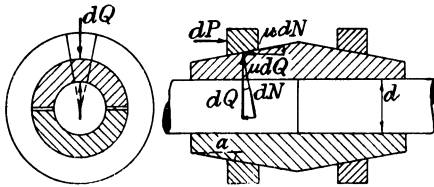


Fig. 78.

Wirkt auf einen sehr kleinen Teil des Schalenkreises die Kraft dQ , so gilt die Gleichung

$$\mathfrak{S}_1 \cdot M = f\mu \cdot dQ \cdot \frac{d}{2},$$

ferner folgt aus den Kräftedreiecken an dem entsprechenden Ringteilchen

$$dP = \mu \cdot dQ + dQ \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

also

$$P = f dQ \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu).$$

Wird jetzt der ersten Gleichung entnommen

$$f dQ = \frac{2 \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot M}{\mu \cdot d},$$

so ergibt sich

$$P = \frac{2 \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot M}{\mu \cdot d} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)$$

und entsprechend

$$P_1 = \frac{2 \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot M}{\mu \cdot d} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right).$$

Wenn nun \mathfrak{S}_2 fache Sicherheit gegen Lösen bestehen soll, muß sein

$$\mathfrak{S}_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \mu \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu}{\mathfrak{S}_2}.$$

Mit den obigen Zahlenangaben wird hieraus für $\mu = 0,20$ (vergrößert, um das Ecken der Ringe zu berücksichtigen)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,20}{4} = 1:20,$$

$$P = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5184}{3 \cdot 6} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 2880 \text{ kg},$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5184}{3 \cdot 6} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 1728 \text{ kg}.$$

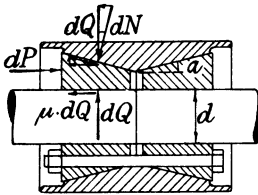


Fig. 79.

Beispiel 56. Die beiden federnden Ringe der Sellerskupplung nach Fig. 79 werden durch $i = 3$ Schrauben angezogen. Es ist dieselbe Rechnung wie in Beispiel 55 mit denselben Zahlenwerten durchzuführen, wenn P und P_1 die Kräfte bedeuten, die auf eine Schraube entfallen.

Man entnimmt der Fig. 79 für die senkrechten Kräfte der Zeichnung

$$dN \cdot \cos \alpha - \mu \cdot dN \cdot \sin \alpha = dQ,$$

woraus folgt

$$dN = \frac{dQ}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha}.$$

Für die wagerechten Kräfte der Zeichnung gilt

$$dP = \mu \cdot dQ + dN \cdot \sin \alpha + \mu \cdot dN \cdot \cos \alpha$$

und mit dem vorstehenden Wert von dN

$$dP = \mu \cdot dQ \cdot \left(1 + \frac{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\mu}}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} \right).$$

Nun ist wieder wie in Beispiel 56

$$f \mu \cdot dQ \cdot \frac{d}{2} = \mathfrak{E} \cdot M,$$

und man erhält durch die Summierung über die ganze Kupplung

$$i \cdot P = \frac{2 \cdot \mathfrak{E} \cdot M}{d} \cdot \left(1 + \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \mu} \right).$$

Die zum Lösen erforderliche Kraft ergibt sich, indem μ negativ gerechnet wird, zu

$$P_1 = \frac{2 \cdot \mathfrak{E} \cdot M}{i \cdot d} \cdot \frac{2 - \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\mu} - \mu \right)}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Die Grenze der Selbstsperrung wird erreicht für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{1}{\mu} - \mu}.$$

Da die Schrauben schon eine Sicherung bilden, so kann die Sicherheit der Keile allein niedriger als in Beispiel 56, etwa zu $\mathfrak{E} = 2,75$ angesetzt werden. Mit $\mu = 0,22$ zwischen den absichtlich ziemlich rauh gelassenen Flächen erhält man dann

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2,75} \cdot \frac{2}{\frac{1}{0,22} - 0,22} \approx 1 : 6,$$

den gewöhnlich ausgeführten Wert.

Damit wird die Kraft, mit der jede Schraube angezogen werden muß,

$$P = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 5184}{3 \cdot 6} \cdot \frac{2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{0,22} - 0,22 \right)}{1 - \frac{0,22}{6}} = 2185 \text{ kg.}$$

Die zum Lösen nötige Kraft wird

$$P_1 = 768 \cdot \frac{2 - \frac{1}{6} \cdot 4,32}{1,037} = 948 \text{ kg.}$$

Beispiel 57. Bei einer Spreizringkupplung mit Schubkeil nach Fig. 80 sind die Gegendrucke N verschieden groß. Gegeben sei $Q_1 = 3410 \text{ kg}$, $Q_2 = 1690 \text{ kg}$, ferner der Spitzenwinkel des symmetrischen Keiles $2\alpha = 22^\circ 40'$, also $\operatorname{tg} \alpha = 1 : 5$, $\mu = 0,10$ bei mäßig geschmierten Flächen. Anzugeben ist der Einpreßdruck P .

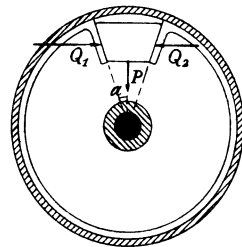


Fig. 80.

Die Formel (48b) nimmt in dem Fall die Form an

$$\begin{aligned} P &= (Q_1 + Q_2) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu) \\ &= (3410 + 1690) \cdot (0,20 + 0,10) = 1530 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die Fig. 81 a zeigt einen Keil, der mit der einen wagerechten Fläche auf einer Unterlage aufliegt und mit der anderen, um den Winkel α

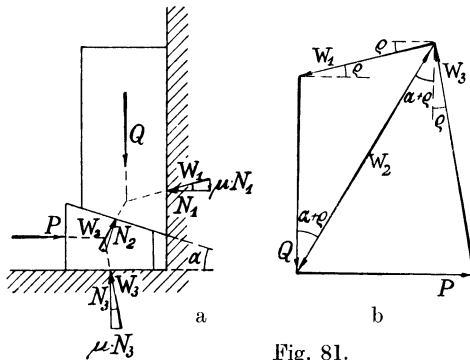


Fig. 81.

geneigten einen mit der Last Q belasteten Pfosten anhebt, der sich gegen eine senkrechte Führung stützt. Bei Beginn der Keilbewegung wird sich der Pfosten mit dem Keil gegen die Wand schieben und, nachdem er dort den Gegenruck N_1 gefunden hat, auf dem Keil und gleichzeitig an der Wand in die Höhe gleiten. Die Reibungskraft $\mu \cdot N_1$ ist demnach nach unten gerichtet und die zwischen Keil und Pfosten wirkende $\mu \cdot N_2$ nach der Keilspitze hin. Ihre Zusammensetzung mit den Kräften N_1 bzw. N_2 ergibt dann die Widerstände W_1 und W_2 , deren Richtungen aus der Fig. 81 a hervorgehen. Wenn nun der Pfosten im Gleichgewicht sein soll, müssen sich die Kräfte Q , W_1 , W_2 in einem Punkt schneiden und ein geschlossenes Kräfte-dreieck bilden (Fig. 81 b).

Auf den Keil wirkt nun die Gegenkraft W_2 des Pfostens in der umgekehrten Richtung der Fig. 81 a, ferner in der wagerechten Fläche die aus dem lotrechten Gegenruck N_3 und dem Reibungswiderstand $\mu \cdot N_3$ erhaltene Gegenkraft W_3 , die um den Reibungswinkel ϱ gegen N_3 geneigt ist, und schließlich die die Bewegung hervorrufende wagerechte Kraft P . Auch diese drei Kräfte müssen, damit Gleichgewicht besteht, sich in einem Punkt schneiden und ein geschlossenes Dreieck ergeben, das zweckmäßig gleich an das erste angesetzt wird.

Der Sinussatz liefert dann aus dem ersten Kräfte-dreieck

$$W_1 = Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\varrho\right)} = Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos(\alpha + 2\varrho)},$$

$$W_2 = Q \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varrho\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\varrho\right)} = Q \cdot \frac{\cos \varrho}{\cos(\alpha + 2\varrho)}$$

und aus dem zweiten Dreieck ebenso

$$W_3 = W_2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\varrho\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)} = Q \cdot \frac{\cos(\alpha + \varrho)}{\cos(\alpha + 2\varrho)},$$

$$P = W_2 \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\varrho)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)} = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varrho) \tag{50a}$$

Soll der Keil gelöst werden, so wirken die Reibungswiderstände nach der entgegengesetzten Richtung; der überall gleich vorausgesetzte Reibungswinkel erhält also das negative Vorzeichen. Somit ist die bei der Lösung aufzuwendende Kraft

$$P_1 = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 2\varrho). \tag{50 b}$$

Der Keil wird selbstsperrend, d. h. zum Lösen ist eine entgegengesetzte zu der in die Skizze 81 a eingetragenen Kraft P gerichtete P_1 erforderlich, wenn $\alpha < 2\varrho$ ist. Soll eine \mathfrak{S} -fache Sicherheit gegen selbsttätiges Lösen bestehen, so gilt

$$\mathfrak{S} \cdot \alpha = 2\varrho. \tag{51}$$

Beispiel 58. Für die Keilverbindung nach Fig. 82 ist die dem Beispiel 54 entsprechende Rechnung durchzuführen.

Gemessen wurde an einer derartigen Verbindung beim Herausdrücken des Keiles $\operatorname{tg}\varrho = 0,16^{26^\circ}$, immerhin erscheint es angebracht, mit Rücksicht auf ein unbeabsichtigtes Eindringen von Öl und die ständigen Erschütterungen beim Wechsel der Kraft Q nur mit $\mu = 0,12$ zu rechnen. Außerdem wählt man die Sicherheit noch ziemlich hoch: $\mathfrak{S} \geq 5$. Man erhält so mit $\operatorname{tg}\varrho = 0,120$, also $\varrho = 6^\circ 51'$ gemäß Formel (51):

bei $\mathfrak{S} =$	5	6	7	8
$\alpha =$	$2^\circ 44'$	$2^\circ 17'$	$1^\circ 57'$	$1^\circ 43'$
$\operatorname{tg}\alpha =$	0,0478	0,0398	0,0342	0,0299
	$= 1 : 20,9$	$1 : 25,1$	$1 : 29,2$	$1 : 33,4$

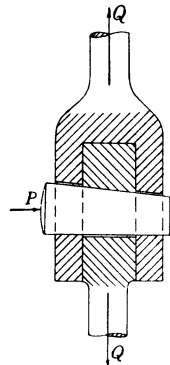


Fig. 82.

Hiermit liefert die Gleichung (50a) in der Form

$$P = 2Q \cdot \operatorname{tg} 2\varrho \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{S}}\right)$$

mit $Q = 4,2 \text{ t}$

$2\varrho \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{S}}\right) =$	$13^\circ 57'$	$13^\circ 55'$	$13^\circ 53'$	$13^\circ 51'$
$\operatorname{tg} 2\varrho \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{S}}\right) =$	0,2485	0,2478	0,2471	0,2465
$P =$	2087	2081	2076	2071 kg,

also kaum noch von dem Neigungswinkel abhängig.

Entsprechend erhält man

$$\begin{array}{cccc}
 2\rho \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = 13^\circ 25' & 13^\circ 27' & 13^\circ 29' & 13^\circ 31' \\
 \operatorname{tg} 2\rho \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = 0,2385 & 0,2391 & 0,2397 & 0,2404 \\
 -P_1 = 2003 & 2008 & 2013 & 2019 \text{ kg,}
 \end{array}$$

also nur 4 ÷ 2,5 v. H. kleiner als P .

5. Die Traglager.

Die Angaben des Abschnittes 3 über die Reibungsziffer lehren, daß dort, wo es darauf ankommt, den Reibungswiderstand möglichst klein zu halten, gut geglättete Flächen unter Benutzung eines Schmiermittels zu verwenden sind. Das gilt besonders für Zapfen und Lager. Am häufigsten sind die Traglager, bei welchen die die Belastung aufnehmenden Lagerschalen den zylindrischen Mantel des Zapfens ganz oder teilweise umfassen.

Die Schmierfähigkeit des Öles beruht darauf, daß es infolge seiner Kapillarität das Bestreben hat, sich dorthin zusammenzudrängen, wo die Gleitflächen, die durch die Ölschicht voneinander getrennt gehalten werden, sich am nächsten kommen, also die Gefahr der reinen metallischen Berührung und dadurch der Anfressung und Erhitzung am größten ist. Für die Schmierwirkung des Öles und die Größe der Reibungsziffer des Lagers ist seine Zähigkeit allein maßgebend⁴⁷⁾. Eine geringe Abweichung hiervon ist vorläufig nur für eine Mischung des Voltol-Öles mit einem beliebigen Mineralöl festgestellt worden⁴⁸⁾. Bei größerem Flächendruck ist ein entsprechend zäheres Öl zu nehmen, damit die Schmierschicht nicht zu dünn wird und etwa zerreißt. Der mittlere Flächendruck, der bei der Belastung durch P kg im Lager von der Länge l cm und der Bohrung d cm herrscht, wird stets berechnet aus der Formel

$$p = \frac{P}{l \cdot d} \text{ at.} \quad (52)$$

Da bei der Untersuchung eines Öles in besonderen Ölprüfmaschinen das Ergebnis oft von Zufälligkeiten im Zustande der aufeinander bewegten Metallflächen abhängt⁴⁹⁾, so wird die Zähigkeit des Öles in Deutschland fast ausschließlich mit dem Englerschen Viskosimeter dadurch bestimmt, daß die Zeit gemessen wird, die eine Menge von 200 cm³ zum Durchströmen eines feinen, 20 mm langen Trichterrohres von 2,8 mm Durchmesser braucht. Die Englerziffer $E = 1$ hat Wasser von 20° C — diese Temperatur wurde gewählt, um eine bequeme Messung ohne Anwendung von Kühlvorrichtungen zu erhalten — und ein Öl, das beispielsweise 5 mal soviel Zeit braucht wie Wasser von 20° C, hat die Englerziffer 5. Da die Zähigkeit mit steigender Temperatur stark abnimmt, so ist die Messung eigentlich bei derselben Temperatur anzustellen, bei der das Öl im Lager benutzt wird.

⁴⁷⁾ Ubbelohde, Petroleum 1912.

⁴⁸⁾ Biel, Z. d. V. d. I. 1920.

⁴⁹⁾ z. B. Z. d. V. d. I. 1911, S. 1533ff.

Ist γ das spezifische Gewicht des Öles bei der Gebrauchstemperatur, wie üblich im Verhältnis zu Wasser von 4° C angegeben, so ermittelt man seine spezifische Zähigkeit z im Verhältnis zu Wasser von 4° aus der Englerziffer gemäß der Umrechnungsformel⁵⁰⁾

$$\frac{z}{\gamma} = 4,072 \cdot E - \frac{3,513}{E}. \quad (53)$$

Da nun Wasser von 4° C die absolute Zähigkeit 0,000180 kg · sk/m² besitzt⁵⁰⁾, so ist die absolute Zähigkeit eines Öles

$$z_0 = 0,000180 \cdot z \text{ kg} \cdot \text{sk}/\text{m}^2 \quad (54)$$

Für fast alle Mineralöle erreicht bei $t_1 = 185^\circ$ das Verhältnis

$\frac{z}{\gamma}$ den Wert 1, und der Verlauf der Zähigkeit wird fast genau durch eine gerade Linie dargestellt, wenn sowohl die Temperatur als auch die Werte

$\frac{z}{\gamma}$ in logarithmischem Maßstab aufgetragen werden. Aus der Fig. 83 ergibt sich so die Beziehung zwischen den Zähigkeiten bei t° und bei 20° ⁵¹⁾

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{z}{\gamma}\right)_t &= \log t_1 - \log t \\ \log\left(\frac{z}{\gamma}\right)_{20} &= \log t_1 - \log 20 \\ &= \frac{2,267 - \log t}{0,966}, \quad (55) \end{aligned}$$

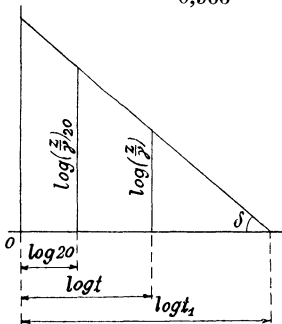


Fig. 83.

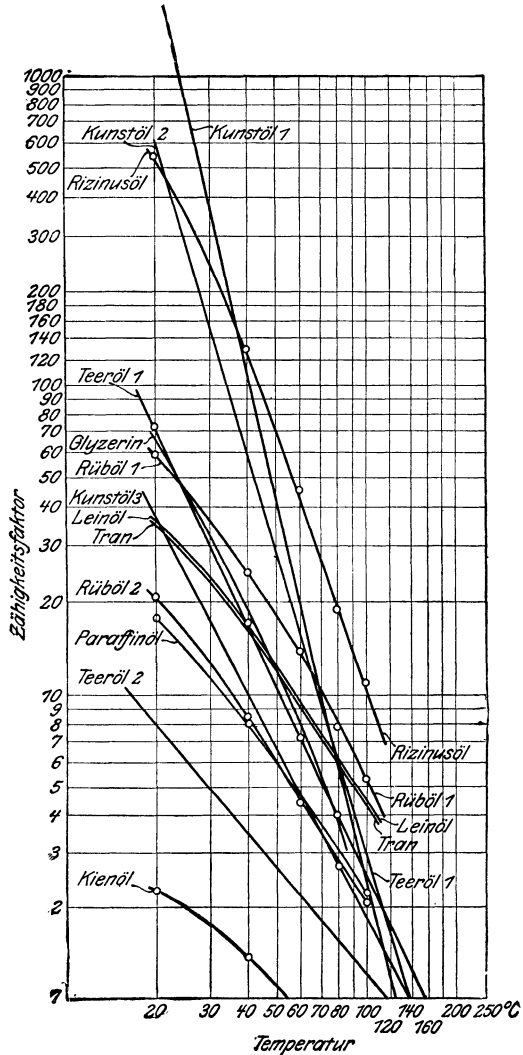


Fig. 84.

woraus mit guter Annäherung die Zähigkeit für eine beliebige Temperatur $t < 100^\circ$ berechnet werden kann. Das Ergebnis aus Versuchen und Rechnungen ist in Fig. 84 für eine Reihe von Ölen in logarithmischem Maßstab aufgetragen⁵¹⁾. Bemerkens-

⁵⁰⁾ Ubbelohde, Tafeln zum Englerschen Viskosimeter, 1907.

⁵¹⁾ Oelschläger, Z. d. V. d. I. 1918.

wert ist, daß die vegetabilischen Öle durchweg auch in diesem Maßstab eine Krümmung der Linien zeigen; für sie gilt also die Gleichung (55) nicht.

Sehr häufig werden die Öle gemischt. Die Zähigkeit der Mischung wird durch das weniger zähe Öl ganz erheblich stärker beeinflußt als durch das andere. Die Mischung von n_1 Gewichtsteilen eines zähen Öles mit der Englerziffer E_1 und von n_2 Gewichtsteilen eines weniger zähen Öles mit der Englerziffer E_2 hat hinreichend genau⁵¹⁾ die Englerziffer

$$E_m = \frac{n_1 \cdot E_1 + n_2 \cdot E_1^{\frac{1}{2}} \cdot E_2^{\frac{3}{2}}}{n_1 + n_2 \cdot E_1^{\frac{1}{2}} \cdot E_2^{\frac{1}{2}}} \quad (56)$$

Jedes Öl hat eine bestimmte günstigste Temperatur, bei der es die geringste Reibungsziffer ergibt, die freilich meist nicht genügend bekannt ist und z. B. bei schlechtem Zylinderöl oft nur 120° beträgt⁵²⁾. Bei zu hoher Temperatur wird bei gegebenem Flächendruck die Schichtstärke so klein, daß an einzelnen Stellen metallische Berührung eintritt, was die Reibung sofort sehr stark ansteigen läßt.

Durch Zusatz von 0,5÷1,0 v. H. einer Graphitemulsion⁵³⁾, die hauptsächlich dadurch wirkt, daß das Öl durch die Flocken mehr zusammengehalten und nicht so leicht weggedrückt wird⁵⁴⁾, kann die Schmierfähigkeit wieder erheblich erhöht werden, derart, daß die Reibungsziffer μ je nach der Güte des Öles auf das 0,6÷0,8fache heruntergeht⁵⁵⁾. Dazu tritt noch die besondere Eigenschaft des reinen Flockengraphits, weich und schlüpfrig zu sein, also keine Reibung zu verursachen. Freilich, wenn schon das günstigste Öl genommen ist, erreicht man mit dem Graphitzusatz nur noch eine gewisse Ölersparnis⁵⁶⁾, der im übrigen nur zeitweise nicht dauernd beizugeben ist^{55c)}.

Die wichtigsten Angaben über die Öle enthält die Fig. 84 und die folgende Zusammenstellung⁵⁷⁾.

Hauptklasse	Anwendungsgebiet	Einheitsgewicht bei 15° C kg/dm ³	Zähigkeit			Entflammungstemperatur °C	Erstarrungstemperatur °C	
			Engler-Ziffer	absolut g · sk/cm ²	zugehörige Temperatur °C			
I. Mineralöle.	Eismaschinen	0,85 — 0,91	4,5 — 15 1,9 — 2,5	0,27 — 0,99 0,09 — 0,14	20 50	145	— 21	
	Spindeln	0,90	5 — 15 2 — 3	0,32 — 0,99 0,10 — 0,18	20 50	140 — 170		
	Feine Meßmaschinen	0,85	2 — 3	0,10 — 0,18	50	140		
A. Leichtmaschinenöle	Dampfturbinen	0,87 — 0,90	9 — 13 2,6 — 3	0,57 — 0,85 0,14 — 0,18	20 50	175	I: < - 10 II: < - 5 III: < 0 IV: < + 5	
	Zylinder von Luftkompressoren	0,87 — 0,90	9,5 — 22 2,7 — 5	0,60 — 1,45 0,15 — 0,32	20 50	200		
	Lager für kaltgehende Maschinenteile	0,87 — 0,91	15 — 25 2,5 — 4,5	0,99 — 1,67 0,14 — 0,29	20 50	200		< 0

⁵²⁾ Kapff, Z. d. V. d. I. 1901.

⁵³⁾ Eingeführt von Acheson, Electrical World 1907.

⁵⁴⁾ Putz, D. p. J. 1913.

⁵⁵⁾ Wagner, Z. d. V. d. I. 1899; Benjamin, Z. d. Bayr. Rev.-Vereins 1908; v. Hanffstengel, Glasers Ann. 1920.

⁵⁶⁾ Saytzeff, Z. d. V. d. I. 1914.

⁵⁷⁾ Holde, Z. d. V. d. I. 1912.

Hauptklasse	Anwendungsgebiet	Einheitsgewicht bei 15° C kg/dm ³	Zähigkeit			Entflammungstemperatur °C	Erstarrungstemperatur °C	
			Engler-Ziffer	absolut g · sk/cm ²	zugehörige Temperatur °C			
B. Schwermaschinenöle	Lager für kaltgehende Maschinenteile	0,90 — 0,915	30—40 5— 7	1,98—2,68 0,32—0,46	20 50	175	I: < -10 II: < -5 III: < 0 IV: < +5	
	Transmissionslager u. dgl.	0,90 — 0,93	5— 7	0,32—0,46	50	190—160		
	Dynamomaschinen	0,875—0,90	6— 8	0,38—0,52	50	200		
C. Öle für Verbrennungskraftmaschinen	Kleine und mittlere Gasmaschinen		12,5—77 3,4—8,2	0,83—5,14 0,21—0,54	20 50	190—210	I: < -10 II: < -5 III: < 0 IV: < +5	
	Großgasmaschinen		77—133 8 —15	5,14—8,67 0,53—0,99	20 50	210		
	Zylinder von Dieselmotoren		9 —10 5 — 7	0,59—0,66 0,32—0,45	50 50	220 180		< -5 < -10
	Lager von Dieselmotoren							
	Kraftwagen	0,87 — 0,94 0,87 — 0,945	6 — 8 8 —14	0,38—0,55 0,51—0,96	50 50	195 210		< -12
D. Öle für Dampfmaschinenzylinder	Naßdampf	0,89 — 0,94	20 —40 3,5— 5	1,30—2,68 0,21—0,32	50 100	250—180		
	Heißdampf	0,90 — 0,91	5 — 8	0,32—0,55	100	300—310		
E. Dunkle Öle für Eisenbahnwagenachs.	Sommeröl	0,90 — 0,94	40 —60 7 —10	2,68—4,14 0,45—0,66	20 50	145—160	steigt im 6 mm-U-Rohr 10 mm hoch bei - 5° bei -20°	
	Winteröl	0,90 — 0,94	25 —45 4,5—7,5	1,67—3,10 0,28—0,51	20 50	135—150		
II. Pflanzenöle.								
A. Rüböl	wo Heißlaufen befürchtet wird	0,914					I: < -10 II: < -5 III: < 0	
B. Olivenöl	Spinnmaschine u. dgl.	0,918						
C. Rizinusöl	Zylinder von Flugzeugen	0,965	120—140	8,5	20		scheidet schon über 0° C Stearin aus	
III. Andere Fette usw.								
Vaselin	beste Starrschmiere	0,855—0,905						
Glyzerin	Hebezeuge im Freien i. Winter	1,225						

Nur bei sehr kleiner Belastung P und sehr großer Umlaufgeschwindigkeit v stellt sich der Zapfen nach Fig. 85 a im Lager ein, und die zugehörige Druckverteilung zeigt Fig. 85 b. Bei sehr großer Belastung P und sehr kleiner Umlaufgeschwindigkeit v legt sich der Zapfen im Sinn

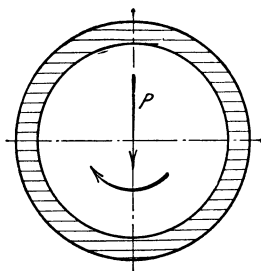


Fig. 85a.

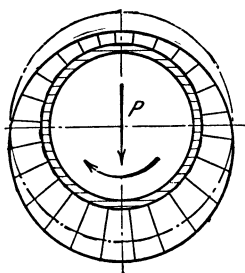


Fig. 85b.

der Drehbewegung verschoben nach Fig. 86 a an die Lagerschale an, und die entsprechende Druckverteilung zeigt Fig. 86 b⁵⁸). Es folgt dies daraus, daß bei zueinander geneigten Flächen, die allein unter einer

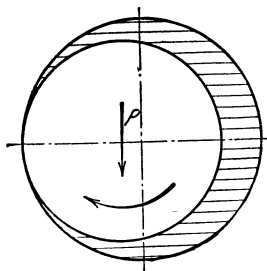


Fig. 86a.

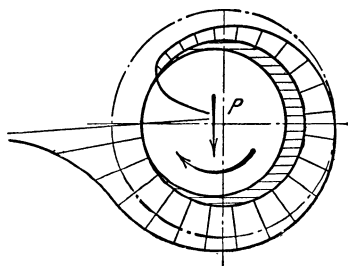


Fig. 86b.

Druckkraft P eine Schmierschicht auf die Dauer halten können, der Druck in der Ölschicht den in Fig. 87 für verschiedene Verhältnisse von $\frac{\delta_{\min}}{\delta_m}$ dargestellten Verlauf annimmt⁵⁹), dessen Berechnung an dieser Stelle unterbleiben muß. So ergibt sich dann für eine abgewinkelte Lagerfläche nach Fig. 88 oben unter mittleren Verhältnissen für die Größe von P und v die im unteren Teil der Fig. 88 angegebene Druckverteilung. An den Stellen, wo die Ölschicht am dünnsten und am dicksten ist, herrscht der mittlere Druck p_0 . Werden die verschiedenen Drücke p' in radialer Richtung um den Zapfen aufgetragen, so erhält man⁶⁰) die

⁵⁸) Sommerfeld, Z. f. Math. u. Phys. 1904.

⁵⁹) Reynolds, Phil. Transactions of the Royal Soc. 1886.

⁶⁰) Gümbel, Monatsbl. d. Berl. Bez.-V. d. I. 1914; Kutzbach, Z. d. V. d. I. 1915.

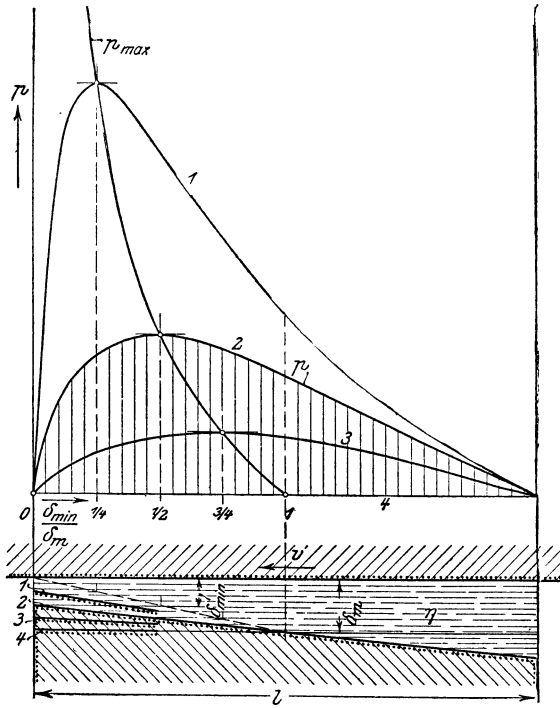


Fig. 87.

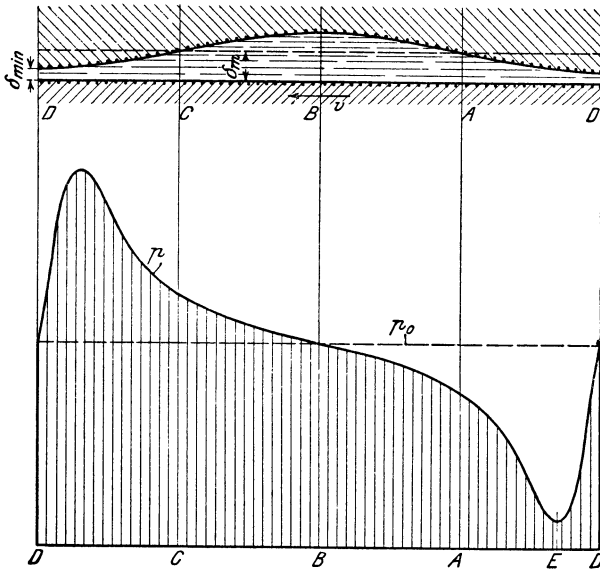


Fig. 88.

Darstellung der Fig. 89. Aus ihr folgt ohne weiteres, daß der Anschluß einer drucklosen Ölzuführung an der Stelle *E* stattfinden muß. Diese Stelle verschiebt sich jedoch nach den Angaben der Fig. 87 je nach der Größe von $\frac{\delta_{\min}}{\delta_m}$ in dem Quadranten *AD*. Die etwa weiter daraus gezogene Folgerung, daß Schmiernuten, die die Druckfläche in mehrere Teile zerlegen, ungünstig wirken, ist aber unrichtig⁶¹⁾.

Zieht man die auf demselben Durchmesser wirkenden Drücke p' überall voneinander ab, so erhält man als p'' den Überdruck, der auf

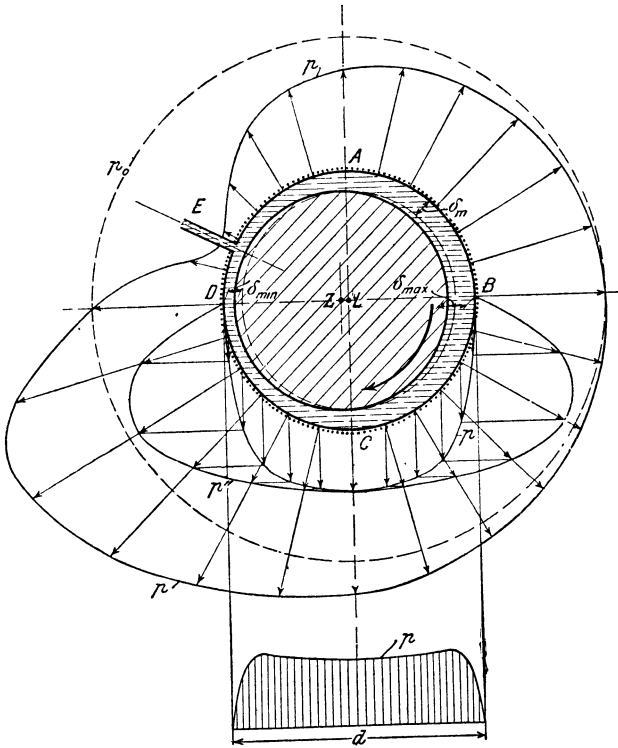


Fig. 89.

jede Mantellinie der unteren Lagerschale kommt; sein Verlauf ist ebenfalls in Fig. 89 eingetragen. Dieser Überdruck p'' kann nun an jeder Stelle in einen wagerechten und einen senkrechten Seitendruck zerlegt werden, wie das die Fig. 89 auch angibt. Die wagerechten Seitendrucke heben sich paarweise auf, und die senkrechten p geben den vierten Linienzug der Fig. 89. Werden die p senkrecht über dem Durchmesser d aufgetragen (Fig. 89 unten), so zeigt sich, daß die Verteilung eine im

⁶¹⁾ Kucharski, D. p. J. 1919.

großen und ganzen gleichmäßige ist, womit die Formel (52) ihre Berechtigung findet⁶⁰⁾. Da der Öldruck an den seitlichen Rändern des Lagers Null ist, so ist der wahre mittlere Druck $p_n = \zeta \cdot p$. Der Verbesserungsfaktor $\zeta < 1$ ist jedoch nicht genau bekannt⁶²⁾ und zudem bei der Auswertung der Versuche nicht berücksichtigt worden.

Beim langsamen Durchfließen des Lagers steigt die Temperatur des Schmieröles an und seine Zähigkeit nimmt entsprechend ab. Infolgedessen ist der Reibungswiderstand des Lagers an verschiedenen Stellen nicht derselbe; jedoch muß für die Zwecke der Praxis die Angabe eines Mittelwertes genügen.

Zur Feststellung der mittleren Reibungsziffer im Lager dient die Reibungswage, deren erste Ausführung die Skizze 90 veranschaulicht⁶³⁾. Das Lager wird mit dem daran befestigten Balken, der zwischen zwei Anschlägen wagerecht liegt, auf die Versuchswelle vom Durchmesser d gehängt; seine Belastung ist $P = G + 2Q$, worin angibt

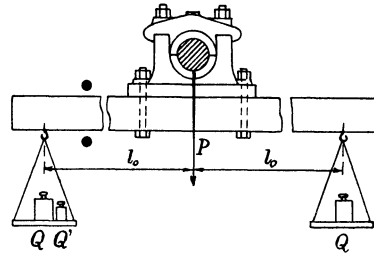


Fig. 90.

G das Gewicht des Balkens und Lagers,
 Q die Belastung jeder Wageschale.

Dreht sich jetzt die Welle rechts herum, so ist links am Hebelarm l_0 ein Übergewicht Q' aufzubringen, um das Moment der Zapfenreibung

$$M = \mu \cdot P \cdot \frac{1}{2} d \quad (57)$$

zu überwinden. Man erhält so

$$\mu = \frac{2 \cdot Q' \cdot l_0}{P \cdot d}. \quad (58)$$

Bei einer neueren Ausführung⁶⁴⁾ wird das Lager unmittelbar durch ein über eine Rolle wirkendes Gewicht belastet und das Moment der Zapfenreibung vermittels einer am Hebelarm l_0 angreifenden Federwage gemessen (Fig. 91). Ein in Öl tauchender Dämpfungskolben dämpft die beim Anlaufen eintretenden Schwingungen.

Die Ergebnisse der Versuche sind folgende⁶⁵⁾:

Alle Lager müssen erst einlaufen, ehe sie mit geringer Reibung und kleinem Ölverbrauch arbeiten, was durch Beigabe von Flockengraphit beschleunigt werden kann, der alle kleinen Unebenheiten der Lagerschalen ausfüllt. Am besten laufen weiche Lagerschalen aus Weißmetall und Bronze ein. Fast gar nicht laufen sich Gußeisenschalen

⁶²⁾ Kucharski, Z. f. d. ges. Turbw. 1918.

⁶³⁾ Hirn, etwa 1850.

⁶⁴⁾ Lasche, Z. d. V. d. I. 1902.

⁶⁵⁾ Stribeck, Z. d. V. d. I. 1902.

oder gehärtete Stahlschalen ein; sie müssen nötigenfalls in der ersten Betriebszeit mehrmals nachgearbeitet werden.

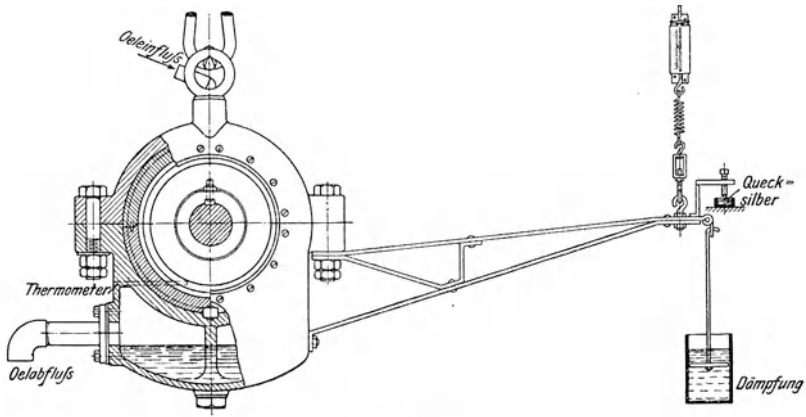


Fig. 91.

Auch gut eingelaufene Lager müssen sich jedesmal erst wieder auf die Dauertemperatur eingelaufen haben. Die Kurven *b* der Fig. 92

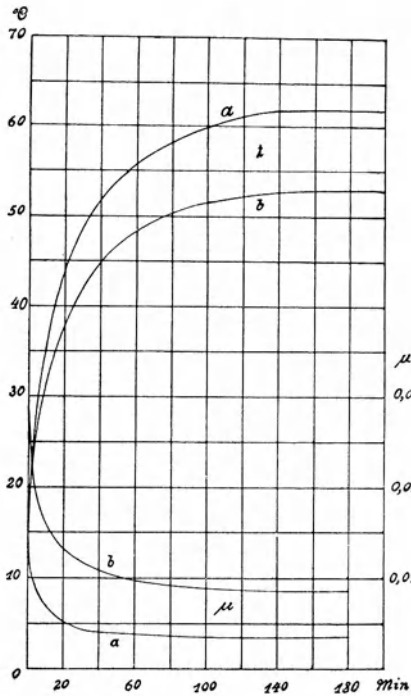


Fig. 92.

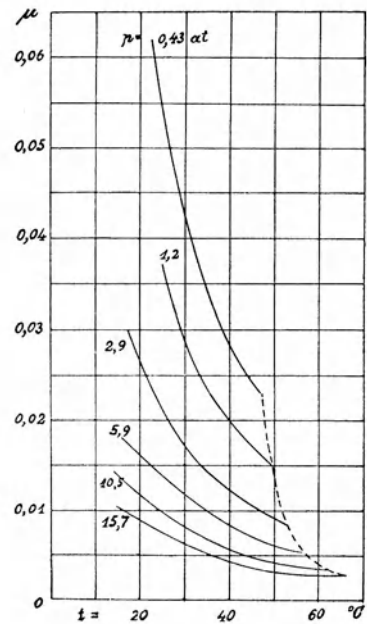


Fig. 93.

zeigen, daß bei einem Sellerslager von $d = 7$ cm Wellenstärke mit Ringschmierung bei $p = 2,9$ at die Beharrungstemperatur bei $n = 760$ Umdrehungen in der Minute erst nach $2\frac{1}{2}$ Stunden erreicht ist, während die Reibungsziffer schon nach 2 Stunden ihren Endwert erlangt hat. Etwas günstiger sind die Verhältnisse bei einem Weißmetallager, für das die Kurven a gelten mit $p = 10,5$ at. Bei den meisten Hebezeugen ist also die Reibung immer sehr viel höher als etwa bei dauernd umlaufenden Wellenleitungen oder Kraftmaschinen. Den Verlauf der Reibungsziffer mit steigender Erwärmung des Lagers bei verschiedenen Lagerdrücken p bis zum Eintritt des Beharrungszustandes zeigt die Fig. 93 ebenfalls für 760 Umdrehungen in der Minute entsprechend der Gleitgeschwindigkeit $v = 2,79$ m/sk, und zwar bei der Außentemperatur 20° .

Die Reibungsziffer μ für den Beharrungszustand nimmt mit wachsendem Flächendruck p zuerst ab. Es bedarf eines um so größeren Druckes, um den kleinsten Wert zu erhalten, je größer die Umfangsgeschwindigkeit v des Zapfens ist. Bei demselben Lager sinkt sie aber bei jedem Flächendruck auf denselben Wert 0,0035 bei Gußeisen, 0,0020 bei Weißmetall als Lagerschale für dasselbe Mineralöl mit der Engler-Ziffer 28,4 bei 25° (Fig. 94), um dann bei kleinen Geschwindigkeiten wieder anzusteigen. Die Ausgangsreibungsziffer der Ruhe ist stets dieselbe $\mu_0 = 0,0140$ bei Gußeisen und 0,0230 bei Weißmetall. Die Fig. 94 gilt bei allen Drücken und Umfangsgeschwindigkeiten für die gleiche Temperatur 25° und ein Weißmetallager.

Die Fig. 92–94 ergeben ferner:

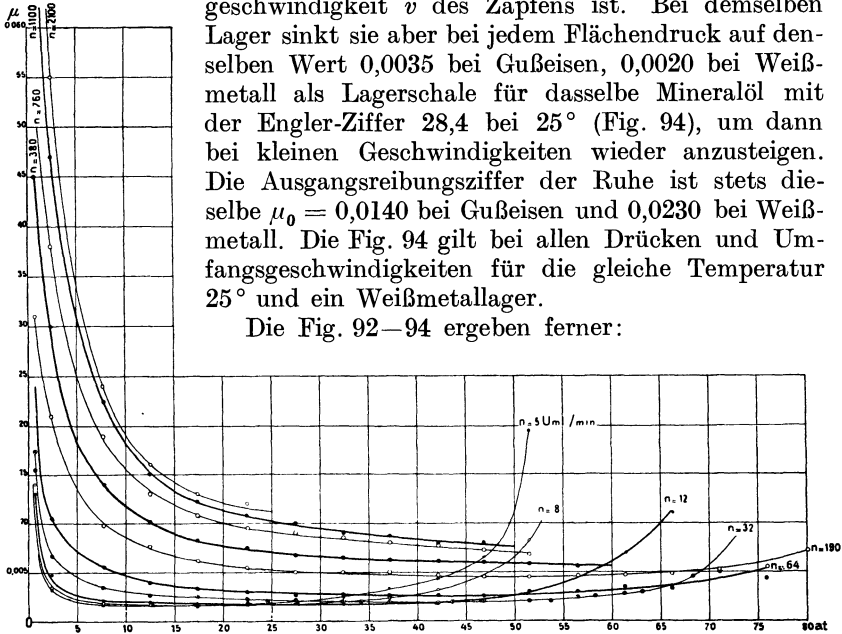


Fig. 94.

Die Reibungsziffer sinkt mit zunehmendem Flächendruck p ⁶⁶⁾ und mit steigender Temperatur t ⁶⁷⁾, sie wächst mit steigender Umfangsgeschwindigkeit v des Zapfens⁶⁸⁾ und ist naturgemäß auch abhängig

⁶⁶⁾ Thurston, Friction and last work, 1873.

⁶⁷⁾ Woodbury, Engng. 1884.

⁶⁸⁾ Tower, 1883.

von der Art des Öles⁶⁹⁾, wenn auch bei richtiger Wahl des letzteren dieser Einfluß von geringster Bedeutung ist, denn bei höherer Temperatur nähern sich ja die Zähigkeitswerte aller Öle. Überschlägig entspricht μ der $\sqrt[3]{z_0}$ ⁷¹⁾. Bei der niedrigsten Reibungsziffer ist das Produkt $v \cdot z_0$ unveränderlich⁴⁸⁾. Die Abhängigkeit vom Metall des Zapfens und Lagers ist nur ganz geringfügig⁶⁴⁾,⁶⁵⁾ und verschwindet häufig gänzlich⁷⁰⁾.

Für Weißmetall- oder Bronzelager mit Ringschmierung von dem Zapfenverhältnis $l : d = 1 \div 1,5$ ist bei Verwendung von „Gasmotorenöl“ innerhalb der Grenzen⁷¹⁾

$$4 > v > 0,4 \text{ m/sk}, \quad 45 > t > 25^\circ,$$

und
$$3 < p < 12 + 2 \cdot \sqrt{10} v \text{ at}$$

$$\mu = \frac{1,23 \cdot v^{0,45}}{p^{0,65} \cdot t^{1,04}} \quad (59 \text{ a})$$

bzw. für $12 + 2 \cdot \sqrt{10} v > p > 50 \text{ at}$

$$\mu = \frac{0,45 \cdot v^{0,45}}{p^{0,30} \cdot t^{1,04}} \quad (59 \text{ b})$$

Für ein Sellers-Gußeisenlager mit Ringschmierung vom Zapfenverhältnis $l : d = 3,3$ ist ebenfalls bei Benutzung von „Gasmotorenöl“ innerhalb der Grenzen

$$4 > v > 0,1 \text{ m/sk}, \quad 8 > p > 1$$

$$\mu = \frac{1,36 \cdot v^{0,605}}{p^{0,58} \cdot t^{1,29}} \quad (60)$$

Ringschmierung ist brauchbar bis etwa $v = 12 \text{ m/sk}$; darüber hinaus nimmt die Öllieferung des Schmierringes schnell ab⁶⁴⁾. Man wendet dann Spülschmierung an. Mit $0,8 \text{ dm}^3/\text{min}$ Mineralöl ergab sich⁷²⁾ in einem Weißmetall- oder Bronzelager bei $p \geq 3 \text{ at}$ μ unabhängig von v und innerhalb der Grenzen

$$30 < t < 60^\circ, \quad 4 < p < 15 \text{ at}$$

$$\mu = \frac{1,34}{p^{1,11} \cdot t^{0,82}} \quad (61 \text{ a})$$

bzw. bei

$$60 < t < 100^\circ, \quad 3 < p < 15 \text{ at}$$

$$\mu = \frac{0,89}{p^{0,91} \cdot t^{0,82}} \quad (61 \text{ b})$$

Nur näherungsweise ist also bei Lagerschalen, die den Zapfen voll umschließen⁷⁴⁾,

$$\mu \cdot p = \text{const.}$$

Die Beziehung gilt nicht für geteilte Lagerschalen⁷⁰⁾. Für Stahlzapfen in etwa halb umfassenden Weißmetallschalen von Eisenbahnwagen ist im Beharrungszustand i. M. $\mu = 0,0095$ bei Schmierung mit Rüböl oder einem entsprechenden Mineralöl unabhängig von p und v ⁷⁵⁾. Nach längerem Stillstand ist $\mu = 0,054$ ⁶⁵⁾.

⁶⁹⁾ Martens, Mitt. aus d. Kgl. Materialprüfungsamt.

⁷⁰⁾ Heilmann, Z. d. V. d. I. 1905.

⁷¹⁾ Nach den Angaben von Stribeck bestimmt.

⁷²⁾ Nach den Angaben von Lasche bestimmt.

⁷³⁾ Balfry, Engng. 1913.

⁷⁴⁾ Tower; Dettmar, D. p. J. 1900; Saytzeff, Z. d. V. d. I. 1914.

⁷⁵⁾ Kirchweyer, Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1864.

Wenn also die mittlere Temperatur des Öles im Lager bekannt ist, kann μ hiernach bestimmt werden. Nach mehrstündigem Einlaufen ist für sachgemäß geschmierte

Hauptkurbellager gewöhnlicher Dampfmaschinen ⁵²⁾	$t \approx 35^\circ$
Kurbelzapfenlager	„ „ „	$t \approx 40^\circ$
Lager gewöhnlicher Dynamomaschinen und Elektromotoren ^{74b)}	$t \approx 35^\circ$
Dampfturbinenlager, die von dem durchströmenden Öl gekühlt werden ⁶⁴⁾	$t \approx 70^\circ$
Sellers-Ringschmierlager ⁷¹⁾		

$$t = 28 \cdot v^{0,50} \cdot p^{0,12}, \quad (62)$$

ruhende Lager gewöhnlicher Bauart die Übertemperatur t_1 über die des umgebenden Raumes⁷²⁾ bei $15 < t_1 < 80^\circ$

$$t_1 = 310 \cdot (\mu \cdot p \cdot v)^{0,763} \quad (63a)$$

Wird diese Gleichung mit den Gleichungen (61) zusammengenommen, so ergibt sich die Lagertemperatur t bei der Raumtemperatur t_2 aus

$$t^{1,625} + t_2 \cdot t^{0,625} = \frac{360}{310} \cdot v^{0,763} \quad (63b)$$

Der obere Zahlenwert gilt für $30 < t < 60^\circ$, der untere für $60 < t < 100^\circ$. Die Gleichung trifft genau zu für $p = 4$ at.

Die Belastung p , die bei kleinen Geschwindigkeiten v bis zu etwa 2,5 m/sk bei gleichmäßig umlaufenden Zapfen bis zu 50 at, bei in dem Lager unter wechselnder Belastung „atmendem“ Zapfen augenblicksweise bis zu 120 at betragen kann, wenn auch die mittlere Durchschnittsbelastung 20 at nicht überschreitet, darf steigen⁷³⁾

bei etwa $v = 9$ m/sk	nur bis $p = 13$ at,
„ „ $v = 12$ „ „ „	$p = 14,5$ „
„ „ $v = 18$ „ „ „	$p = 16$ „
„ „ $v = 22,5$ „ „ „	$p = 16,5$ „

Beispiel 59. Der Kurbelzapfen einer Dampfmaschine von der Länge $l = 17$ cm und der Stärke $d = 13$ cm erfahre bei der Nennleistung der Maschine die mittlere Druckkraft $P_m \approx 4380$ kg, die Anzahl der Umdrehungen in der Minute sei $n = 115$. Anzugeben ist das Moment des Reibungswiderstandes im Beharrungszustand. Die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens ist nach Formel (25)

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot 0,13 \cdot 115}{60} = 0,783 \text{ m/sk,}$$

die Beharrungstemperatur $t = 40^\circ$.

Der mittlere, im allgemeinen zugelassene Zapfendruck ist

$$p_m = \frac{P_m}{l \cdot d} = \frac{4380}{13 \cdot 17} \approx 20 \text{ at,}$$

der bei der Höchstbelastung der Maschine bis auf das 1,5fache ansteigt.

Da die Schmierung durch das Atmen des Zapfens sehr begünstigt wird, so können in Ermangelung anderer Unterlagen die des Ringschmierlagers gemäß Formel (59b) übernommen werden:

$$\mu = \frac{0,45 \cdot 0,783^{0,45}}{20^{0,30} \cdot 40^{1,04}} = \frac{0,45 \cdot 0,896}{2,46 \cdot 46,5} = 0,0035.$$

Hiermit erhält man nach Formel (57)

$$M = 0,0035 \cdot 4380 \cdot \frac{0,13}{2} \approx 1,0 \text{ mkg.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeiten sind

$$v_1 = \frac{\pi \cdot 0,23 \cdot 115}{60} = 1,39 \text{ m/sk,}$$

$$v_2 = \frac{\pi \cdot 0,16 \cdot 115}{60} = 0,96 \text{ m/sk,}$$

die Beharrungstemperatur $t = 35^\circ$.

Die Reibungsziffern werden in Ermangelung anderer Angaben der Formel (59a) entnommen:

$$\mu_1 = \frac{1,23 \cdot 1,39^{0,45}}{7,3^{0,65} \cdot 35^{1,04}} = \frac{1,23 \cdot 1,16}{3,64 \cdot 40,5} = 0,0097,$$

$$\mu_2 = \frac{1,23 \cdot 0,96^{0,45}}{8,4^{0,65} \cdot 35^{0,45}} = \frac{1,23 \cdot 0,98}{3,98 \cdot 40,5} = 0,0075.$$

Damit wird nach Formel (57)

$$M_1 = \mu_1 \cdot p_1 \cdot \frac{l_1 \cdot d_1^2}{100 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 0,0097 \cdot 7,3 \cdot \frac{35 \cdot 23^2}{100} = 6,5 \text{ mkg,}$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0075 \cdot 8,4 \cdot \frac{24 \cdot 16^2}{100} = 1,9 \text{ mkg.}$$

Beispiel 61. Der Kreuzkopfzapfen einer Dampfmaschine habe die Länge $l = 9,0$ cm und den Durchmesser $d = 6,0$ cm, er erfahre bei der Nennleistung der Maschine die mittlere Druckkraft $P_m = 4380$ kg, die Anzahl der Umdrehungen der Maschine sei $n = 115$ in der Minute. Anzugeben ist das Moment des Reibungswiderstandes.

Die Schubstange schwingt um den Zapfen nur um den Winkel $\beta = 11^\circ 20'$ nach beiden Seiten aus. Die mittlere Geschwindigkeit des Kurbelendes der 180 cm langen Stange liegt zwischen 0 und der Umlaufgeschwindigkeit der Kurbel vom Halbmesser 0,375 m

$$v_{\max} = \frac{\pi \cdot 0,75 \cdot 115}{60} = 4,52 \text{ m/sk,}$$

beträgt also $v_m \approx 2,3$ m/sk. Somit ist die mittlere Lagergeschwindigkeit

$$v = 2,3 \cdot \frac{3}{180} = 0,038 \text{ m/sk.}$$

Die mittlere Lagertemperatur dürfte etwa $t = 35^\circ$ betragen, ferner ist der mittlere Zapfendruck

$$p_m = \frac{P_m}{l \cdot d} = \frac{4380}{9 \cdot 6} = 81,0 \text{ at.}$$

Damit ergibt die Formel (59b), die hier freilich über ihren durch die Versuche gedeckten Geltungsbereich benutzt wird:

$$\mu = \frac{0,45 \cdot 0,038^{0,605}}{81^{0,58} \cdot 35^{1,39}} = \frac{0,45 \cdot 0,142}{12,7 \cdot 98,1} = 0,0051.$$

Aus Formel (57) folgt dann

$$M = 0,0051 \cdot 4380 \cdot 0,03 \approx 0,7 \text{ mkg.}$$

Die Zapfenreibungsmomente der Beispiele 59 bis 61, die dieselbe Dampfmaschine vom mittleren Gesamtdrehmoment $M_m = 960$ mkg betreffen, ergeben zusammen $\Sigma M = 10,1$ mkg. Der Gesamtwirkungsgrad der Zapfen beträgt mithin nach Formel (45b)

$$\eta = 1 - \frac{10,1}{960} = 0,989.$$

Beispiel 62. Zu berechnen ist das Moment der Exzenterreibung für ein Exzenter von der Breite $b = 8$ cm und dem Durchmesser $d = 42$ cm, das mit $n = 115$ Umdrehungen in der Minute umläuft und bei guter Schmierung des Schiebers die mittlere Druckkraft $P_m = 1040$ kg erfährt.

Man erhält den mittleren Druck

$$p = \frac{1040}{8 \cdot 42} = 3,1 \text{ at,}$$

die Umfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi \cdot 0,42 \cdot 115}{60} = 2,52 \text{ m/sk,}$$

die Temperatur ist bei günstigen Verhältnissen etwa $t = 45^\circ$.

Dann ergibt wieder Formel (59 a)

$$\mu = \frac{1,23 \cdot 2,52^{0,45}}{3,1^{0,65} \cdot 45^{1,04}} = \frac{1,23 \cdot 1,52}{2,08 \cdot 52,5} = 0,017,$$

mithin wird das Reibungsmoment

$$M = \frac{1}{2} \cdot 0,017 \cdot 1040 \cdot 0,42 = 3,7 \text{ mkg.}$$

Beispiel 63. Eine Wellenleitung von $d = 8$ cm Durchmesser laufe in der Minute mit $n = 150$ Umdrehungen und belaste $i = 12$ Sellersche Ringschmierlager je mit $p = 3$ at. Anzugeben ist das Reibungsmoment der Welle bei der Anfangstemperatur $t_0 = 15^\circ$ und bei der im Beharrungszustand eingetretenen.

Die Umfangsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\pi \cdot 0,08 \cdot 150}{60} = 0,63 \text{ m/sk.}$$

Hiermit ergibt Formel (62) die Beharrungstemperatur

$$t_1 = 28 \cdot \sqrt{0,63 \cdot 3^{0,12}} = 28 \cdot 0,794 \cdot 1,14 = 25,5^\circ$$

und nun folgt aus Formel (60) die Reibungsziffer

$$\mu_0 = \frac{1,36 \cdot 0,63^{0,605}}{3^{0,58} \cdot 15^{1,29}} = \frac{1,36 \cdot 0,757}{1,89 \cdot 33} = 0,017$$

bzw.

$$\mu_1 = \frac{1,36 \cdot 0,757}{1,89 \cdot 65} = 0,0084.$$

Damit wird das Reibungsmoment

$$M_0 = i \cdot \mu \cdot p \cdot l \cdot d \cdot \frac{d}{200} = \frac{12 \cdot 0,017 \cdot 3 \cdot 3,3 \cdot 8^3}{200} = 5,16 \text{ mkg}$$

bzw.

$$M_1 \sim \frac{1}{2} M_0 = 2,58 \text{ mkg.}$$

6. Die Spurlager.

Fällt die Wirkungslinie der belastenden Kraft P mit der Drehachse der Welle zusammen, so daß sich der Zapfen auf die ebene, senkrecht zur Drehachse stehende Endfläche stützt (Fig. 96), so greift in jedem Flächenteilchen dF dieser Stützzapfenfläche die zugehörige Belastung $\frac{P}{dF}$ im Schwerpunkt der Fläche an, solange die nur durch die dünne Ölschicht getrennten Berührungsflächen eben genug und parallel sind. Sie erzeugt dort den der Bewegung entgegengesetzten Reibungswider-

stand $W = \mu \cdot \frac{P}{dF}$, und das Zapfenreibungsmoment der ganzen Fläche ist demnach

$$M = \int \mu \cdot \frac{P}{dF} \cdot dF \cdot r_0 = \mu \cdot P \cdot r_0.$$

Den Schwerpunktsradius erhält man nach Bd. I Formel (83) zu

$$r_0 = \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot d\alpha \cdot r \cdot \frac{2}{3} r - \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot d\alpha \cdot r_1 \cdot \frac{2}{3} r_1}{\frac{1}{2} \cdot r \cdot d\alpha \cdot r - \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot d\alpha \cdot r_1} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^3}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2}.$$

Hiermit ergibt sich schließlich im Fall möglichst ebener Gleitflächen

$$M = \frac{1}{3} \cdot \mu \cdot P \cdot d \cdot \frac{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^3}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^2}. \tag{64}$$

Da die äußeren Flächenteilchen des Zapfens wesentlich schneller umlaufen als die inneren, so nutzt sich dort das weichere Metall im Laufe der Zeit auch entsprechend mehr ab als innen, weil die Ölschicht doch gelegentlich zerreißt und so wenigstens auf kurze Zeit an einzelnen Stellen metallische Berührung stattfindet. Infolgedessen liegen bald die äußeren Flächenteilchen weniger innig aufeinander als die inneren, und die letzteren arbeiten jetzt unter einem höheren Flächendruck p aufeinander, bis ein Ausgleich stattgefunden hat derart, daß die beiden gleich breiten Flächenelemente dF und dF_1 des Ringausschnittes F' der Fig. 97 den gleichen Anteil der Druckkraft P aufnehmen.

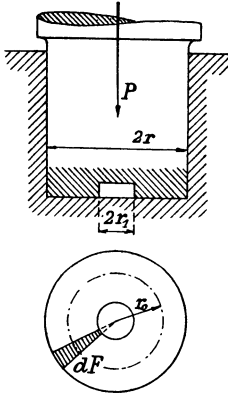


Fig. 96.

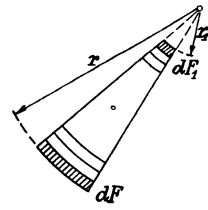


Fig. 97.

Man erhält hieraus

$$dP = dF \cdot p = dF_1 \cdot p_1,$$

und da nach Fig. 97

$$dF : dF_1 = r : r_1$$

ist, so folgt

$$p : p_1 = r_1 : r.$$

Der Flächendruck steht im umgekehrten Verhältnis der Entfernung von der Drehachse.

Liegt nun die Fläche des Zapfens voll auf, so daß $r_1 = 0$ ist, so kann die vorstehende Gleichung scheinbar erfüllt werden durch $p = 0$. Für die Zeit des

Einlaufens trifft das jedenfalls nicht zu, und für das vollendete Einlaufen ist es auch unmöglich, weil dann erst der nächste Flächenstreifen der Fig. 97 zum Anliegen kommt und dann bald auch wieder den Flächendruck 0 erhält und so fort. Die Gleichung wird befriedigend erfüllt durch $p_1 = \infty$, wenn in diesem Fall ∞ der Wert ist, bei dem das Material des innersten Flächenstreifens merklich nachgibt. Damit nun der Flächendruck innen nicht so hoch ansteigt, erhält der volle Spurzapfen in der Mitte mindestens eine Bohrung, die zur Ölzuführung benutzt wird.

Die Mittelkraft der beiden gleichen Druckkräfte $dF \cdot p$ und $dF_1 \cdot p_1$, die auf die beiden äußersten Teilchen der Fläche F' einwirken, geht durch die Mitte ihres Abstandes, ebenso die Mittelkraft der auf die beiden nächsten Streifen entfallenden, ebenfalls einander gleichen Kräfte und so fort. Demnach greift die gesamte auf die betrachtete Fläche kommende Druckkraft $\frac{P}{F'}$ in der Entfernung

$$r' = r_1 + \frac{1}{2} \cdot (r - r_1) = \frac{1}{2} \cdot (r + r_1)$$

von der Drehachse an.

Das Moment des Reibungswiderstandes für den eingelaufenen Stützzapfen ist also

$$M = \sum \mu \cdot \frac{P}{F'} \cdot F' \cdot r'$$

oder

$$M = \frac{1}{4} \cdot \mu \cdot P \cdot d \cdot \left(1 + \frac{d_1}{d}\right). \quad (65)$$

Versuche zur Ermittlung der Reibungsziffer von Spurlagern mit Wasserkühlung und Valvoline als Schmiermaterial⁷⁶⁾ ergaben im Dauerzustand bei glatten Stahllauffringen und mit Weißmetallausgegossenen Bronze-

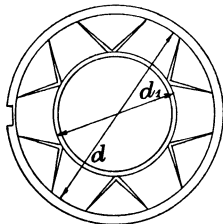


Fig. 98 a.

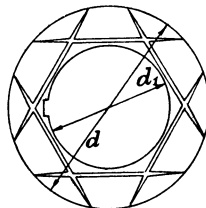


Fig. 98 b.

druckringen mit Schmiernuten nach Fig. 98a die in Fig. 99 mit b bezeichneten gestrichelten Linien der Temperaturen des ablaufenden Öles und die ausgezogenen der zugehörigen Reibungsziffer in Abhängigkeit von

dem Flächendruck p und der mittleren Umlaufgeschwindigkeit der Druckfläche. Waren die Druckringe glatt und die Schmiernuten nach Fig. 98 b in die Stahllaufflächen eingeschnitten, so ergaben sich die Linien c der Fig. 99. Für Stahlzapfen auf Bronze mit den noch immer gebräuchlicheren Schmiernuten nach Fig. 98 a, denen als Schmiermittel gutes Rüböl zulief, ergaben sich⁷⁷⁾ die in Fig. 100 dargestellten, aus

⁷⁶⁾ Lasche, Z. d. V. d. I. 1906.

⁷⁷⁾ Neumann, Z. d. V. d. J. 1918.

Formel (64) berechneten Reibungsziffern bei der günstigsten Temperatur 50° C.

Die Reibungsziffer liegt also wesentlich höher als bei Traglagern. Sie wird erheblich verkleinert, wenn die Schmiernuten im umlaufenden Teil möglichst tangential geführt sind, weil dann das Öl durch die Schleuderkraft in radialer Richtung zwischen die Flächen getrieben wird.

Bezeichnet man in Fig. 83 die Ordinaten mit $\log y$ und die Abszissen mit $\log x$, so gilt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log \frac{y_1}{y_2}}{\log \frac{x_2}{x_1}}$$

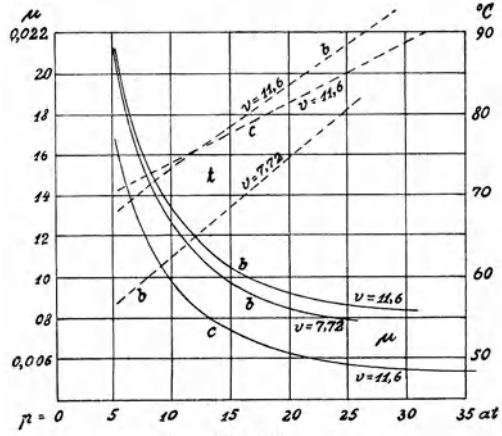


Fig. 99.

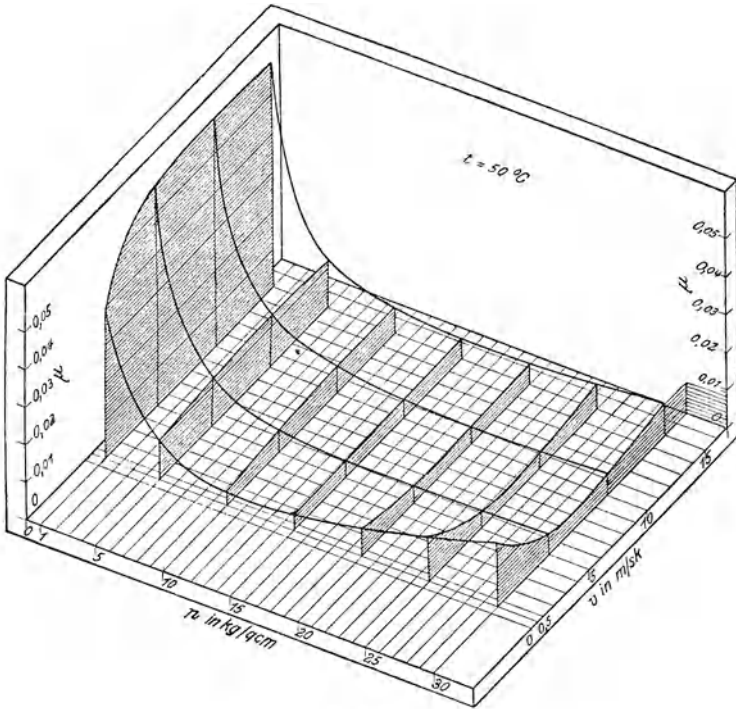


Fig. 100.

oder, wenn jetzt zum Numerus übergegangen wird,

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\operatorname{tg} \delta} = \frac{y_1}{y_2},$$

woraus folgt

$$y_1 \cdot x_1^{\operatorname{tg} \delta} = y_2 \cdot x_2^{\operatorname{tg} \delta} = c. \quad (66)$$

Häufig erscheinen nun Kurvenzüge, wenn sie in logarithmischen Koordinaten aufgetragen werden, mit großer Annäherung als gerade Linien. Die Kurven folgen dann dem Exponentialgesetz der Formel (66).

Werden die μ -Kurven der Fig. 99 logarithmisch aufgetragen, so erhält man für die Umfangsgeschwindigkeiten $7 < v < 12$ m/sk

bei Schmiernuten nach Fig. 98 a im Druckring

$$\begin{aligned} \text{für } 6 < p < 15,5 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,077}{v^{0,17} \cdot p^{0,63}}, \\ 15,5 < p < 23 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,047}{v^{0,17} \cdot p^{0,43}}, \\ 23 < p < 31,5 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,0125}{v^{0,17} \cdot p^{0,18}}. \end{aligned} \quad (67)$$

bei Schmiernuten nach Fig. 98 b im Lauftring

$$\begin{aligned} \text{für } 5 < p < 13,5 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,0385}{v^{0,17} \cdot p^{0,78}}, \\ 13,5 < p < 26,5 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,0195}{v^{0,17} \cdot p^{0,51}}, \\ 26,5 < p < 35,6 \text{ at} \quad \mu &= \frac{0,0155}{v^{0,17} \cdot p^{0,29}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Beispiel 64. Das wassergekühlte Drucklager einer Schiffsturbinenwelle besteht aus $i = 5$ Ringen nach Fig. 98 b mit dem äußeren Durchmesser $d = 298$ mm und dem inneren Durchmesser $d_1 = 185$ mm. Die Schmiernuten verringern die Fläche um 11 v. H. Es läuft um mit $n = 900$ Umdrehungen in der Minute und hat die Druckkraft $P = 50$ t aufzunehmen⁷⁶). Zu bestimmen ist das Drehmoment der Zapfenreibung.

Der Flächendruck der Lauffläche ist

$$p = \frac{P}{i \cdot F} = \frac{50\,000}{5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (29,8 + 18,5) \cdot (29,8 - 18,5) \cdot 0,89} = 26,2 \text{ at,}$$

die mittlere Umlaufgeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi \cdot d_m \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot (0,298 + 0,185) \cdot 900}{2 \cdot 60} = 11,4 \text{ m/sk.}$$

Damit kann man den Kurven c der Fig. 99 die Reibungsziffer $\mu = 0,0056$ und die Temperatur des ablaufenden Öles $t = 86^\circ$ entnehmen.

Das Drehmoment der Spurzapfenreibung beträgt hiermit zu Anfang nach Formel (64)

$$M = 5 \cdot \frac{0,0056}{4} \cdot 10\,000 \cdot \frac{29,8}{100} \cdot \frac{1 - \left(\frac{18,5}{29,8}\right)^3}{1 - \left(\frac{18,5}{29,8}\right)^2} = 27,81 \cdot 1,24 = 34,5 \text{ mkg.}$$

Nach gutem Einlaufen ist gemäß Formel (65)

$$M = 5 \cdot \frac{0,0056}{4} \cdot 10\,000 \cdot \frac{29,8}{100} \cdot \left(1 + \frac{18,5}{29,8}\right) = 27,81 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1,622 = 33,9 \text{ mkg.}$$

Der Unterschied ist also bei derartigen Ringlagern ziemlich geringfügig.

Das Gesamtdrehmoment der fraglichen Antriebsmaschine beträgt etwa 3580 mkg. Der Wirkungsgrad des Spurlagers, ungerechnet die größeren Verluste durch die Öl- und Wasserpumpen, ist somit

$$\eta = 1 - \frac{33,9}{3580} = 0,990.$$

Beispiel 65. Der Kammzapfen einer Dampfschiffswelle besteht aus $i = 6$ Ringen vom mittleren Durchmesser $d_m = 40$ cm und der Breite $b = 5$ cm. Er sei belastet mit $P = 35$ t und mache in der Minute $n = 120$ Umdrehungen. Anzugeben ist das Drehmoment der Zapfenreibung.

Der Flächendruck zwischen den Laufringen ist, wenn für die Schmiernuten 6 v. H. der Fläche abgezogen werden,

$$p = \frac{P}{i \cdot \pi \cdot d_m \cdot b \cdot 0,94} = \frac{35\,000}{6 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 5 \cdot 0,94} \approx 9,9 \text{ at,}$$

die mittlere Umlaufgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\pi \cdot 0,40 \cdot 120}{60} = 2,51 \text{ m/sk.}$$

Wird in Ermangelung weiterer Unterlagen die Formel (67a) auch für die vorliegende Umlaufgeschwindigkeit benutzt, so erhält man

$$\mu = \frac{0,077}{2,51^{0,17} \cdot 9,9^{0,63}} = \frac{0,077}{1,17 \cdot 4,24} = 0,0155$$

und somit nach Formel (65)

$$M = \frac{1}{4} \cdot 0,0155 \cdot 35\,000 \cdot \frac{45}{100} \cdot \left(1 + \frac{35}{45}\right) = 109 \text{ mkg.}$$

Das Gesamtdrehmoment der Maschine beträgt etwa 11000 mkg, also der Wirkungsgrad des Kammzapfens

$$\eta = 1 - \frac{109}{11\,000} = 0,990.$$

Beispiel 66. Das Reibungsmoment eines eingelaufenen Spurlagers einer Wasserturbine vom Außendurchmesser $d = 14$ cm und der inneren Bohrung $d_1 = 2$ cm, das bei der Umfangsgeschwindigkeit $v = 0,50$ m/sk mit $P = 8,5$ t belastet wird, ist zu berechnen.

Der Flächendruck beträgt bei Abzug von 15 v. H. für die Schmiernuten

$$p = \frac{8500}{\frac{\pi}{4} \cdot 16 \cdot 12 \cdot 0,85} = 59,1 \text{ at.}$$

Die Reibungsziffer etwa aus Formel (67c) zu ermitteln ist nicht angängig, da sich der vorliegende Fall zu weit von dem Gültigkeitsbereich der Formel entfernt. Man schätzt lieber gemäß den Angaben S. 30 $\mu = 0,02$.

Dann liefert Formel (65)

$$M = \frac{1}{4} \cdot 0,02 \cdot 8500 \cdot \frac{14}{100} \cdot \left(1 + \frac{2}{14}\right) = 6,8 \text{ mkg.}$$

Die Formel (64) ergibt im vorliegenden Fall $M = 8,1$ mkg, also das 1,19fache des nach Einlaufen zutreffenden Wertes.

Beispiel 67. Zu berechnen ist die Druckkraft P , mit der eine Lamellen-Reibungskupplung nach Fig. 101 mit $i = 8$ Reibflächen vom äußeren Durch-

messer $d = 40$ cm und dem inneren Durchmesser $d_1 = 33$ cm anzupressen ist, wenn sie bei $\ominus = \frac{1}{4}$ facher Sicherheit das Drehmoment $M = 1955$ mkg übertragen soll.

Da die Flächen sich bald einlaufen, so ist Formel (65) zu benutzen:

$$\ominus \cdot M = \frac{i}{4} \cdot \mu \cdot P \cdot d \cdot \left(1 + \frac{d_1}{d}\right),$$

worin bei Stahl auf Bronze nach den Angaben S. 30 $\mu = 0,10$ einzusetzen ist. Hieraus folgt mit den gegebenen Zahlenwerten

$$P = \frac{1,25 \cdot 1955 \cdot 4}{8 \cdot 0,1 \cdot 40 \left(1 + \frac{33}{40}\right)} = 168 \text{ kg.}$$

Ist der eine Teil der Ringe aus Eichenholz und der andere aus abgedrehtem Flußeisen, so beträgt die Reibungsziffer $\mu = 0,50$, und es wird

$$P' = \frac{1}{2} P \approx 34 \text{ kg.}$$

Durch Weiterentwicklung⁷⁸⁾ der Untersuchungen von Reynolds wurde das in Fig. 102 dargestellte Michell-Spurlager^{79b)} gefunden, das selbst bei den größten Kräften nur einen einzigen Tragring braucht, der auf einer Anzahl von annähernd quadratischen

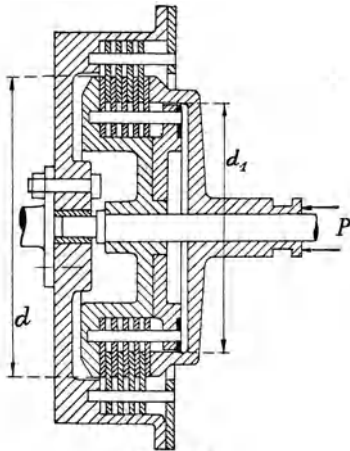


Fig. 101.

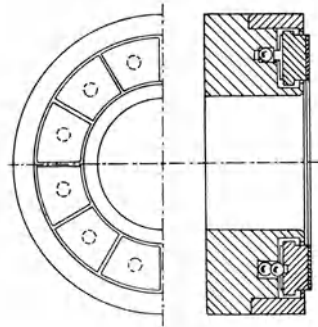


Fig. 102.

Segmenten läuft, die so gestützt werden, daß sie sich gemäß der Fig. 87 etwas geneigt zur Lauffläche stellen. An den Rändern der Segmentplatten ist der Öldruck 0 und er steigt nach der Mitte zu derart an, daß dort etwa das 3 fache des mittleren Druckes

$$p = \frac{P}{i \cdot F} \quad (69)$$

vorhanden ist, wenn bedeutet:

- P die gesamte Druckkraft in kg,
- F die Fläche eines Segmentes in cm^2 ,
- i die Anzahl der Segmente.

⁷⁸⁾ Michell, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1905.

Wird die Vorderkante der Segmente etwas abgerundet⁷⁹⁾, so wird der Öldruck und damit die Tragfähigkeit des Lagers noch erhöht.

Für quadratische Segmente von der Breite $a = 4,5$ cm, deren Unterstützung um den Betrag $e = 0,12 a$ hinter der Mitte der Druckfläche liegt, ergab sich mit einem Öl, das bei der mittleren Temperatur $t = 55^\circ$ die absolute Zähigkeit $z_0 = 0,00225$ kg · sk/m² hatte, die Reibungsziffer^{79b)}

$$\mu = 0,00308 \cdot \sqrt{\frac{v}{p}} \cdot (1 \pm 0,14) \cdot \sqrt{p} \quad (70)$$

gültig für

$$6 < v < 50 \text{ m/sk}, \quad 3 \div 9 < p < 100 \text{ at.}$$

Bei einer anderen mittleren Temperatur ist der Wert von μ im Verhältnis der Wurzeln aus den absoluten Zähigkeiten zu ändern. Bei $p \approx 100$ at ist $\mu \approx 0,002$ unabhängig von der mittleren Umlaufgeschwindigkeit v des Lauftringes.

Werden die vorn abgerundeten Segmente genau in der Mitte gestützt, so ergibt sich wieder für die mittlere Temperatur $t = 55^\circ$

$$\mu = 0,00762 \cdot \sqrt{\frac{v}{p}}. \quad (71)$$

Diese Anordnung liefert also größere Reibungsziffern, die in hohem Maße von dem Keilwinkel der Ölschicht abhängt⁸⁰⁾. Erst bei $p = 110$ at haben die Formeln (70) und (71) dasselbe Ergebnis.

Wird die Stützung um den Betrag $e = 0,12 a$ nach vorn gelegt, so erhält man

$$\mu = 0,004 \quad (72)$$

für alle Drücke und Geschwindigkeiten.

Bei Drücken bis $p = 5$ at kann Wasser an Stelle von Öl genommen werden, wodurch die Reibungsziffer im Verhältnis der Wurzeln aus den absoluten Zähigkeiten verkleinert wird.

Werden statt der annähernd quadratischen Platten kreisförmige, in der Mitte gestützte, genommen⁸¹⁾, so wird der theoretische Vorteil der Konstruktion nicht voll ausgenutzt. Derartige Lager haben die Reibungsziffer $\mu = 0,01 \div 0,003$.

Beispiel 68. Ein Michell-Lager vom Außendurchmesser $d = 220$ mm und der Breite $a = 45$ mm der $i = 12$ Tragsegmente laufe mit $n = 3000$ Umdrehungen in der Minute um und sei mit $P = 6$ t belastet. Das Schmieröl fließe mit der Temperatur $t_1 = 56^\circ$ zu und mit $t_2 = 76^\circ$ ab. Anzugeben ist sein Reibungsmoment.

Formel (69) gibt den mittleren Druck

$$p \approx \frac{6000}{12 \cdot 4,5^2} = 24,7 \text{ at.}$$

Die mittlere Umlaufgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\pi \cdot 0,175 \cdot 3000}{60} = 27,5 \text{ m/sk.}$$

Die mittlere Temperatur ist etwa

$$t = \frac{1}{2} \cdot (56 + 76) = 66^\circ.$$

Gemäß Formel (55) erhält man

$$\frac{\log\left(\frac{z}{\gamma}\right)_{66}}{\log\left(\frac{z}{\gamma}\right)_{55}} = \frac{2,267 - \log 66}{2,267 - \log 55} = \frac{2,267 - 1,820}{2,267 - 1,740} = 0,85.$$

⁷⁹⁾ Engng. 1915; v. F., Brown, Boveri u. Cie-Mitteilungen 1918.

⁸⁰⁾ Gümbel, Z. f. d. ges. Turbw. 1917.

⁸¹⁾ Kingsbury, J. of the Am. Soc. of Naval Eng. 1912.

Bei Verwendung desselben Öles, mit dem die Zahlenangaben der Formel (70) erhalten sind, und wenn die geringe Änderung des spezifischen Gewichtes $\gamma \approx 0,89$ zwischen 55° und 66° außer acht gelassen wird, ist hiernach die für die vorteilhafteste Anordnung geltende Formel (70) mit dem Faktor [Formel (54)]

$$\sqrt{\frac{z_{66}}{z_{55}}} = \left(\frac{0,00225}{0,89 \cdot 0,00018} \right)^{\frac{1}{2} \cdot (0,85 - 1)} = 0,82$$

zu multiplizieren. Man erhält so die Reibungsziffer

$$\mu = 0,00308 \cdot \sqrt{\frac{27,5}{24,7}} \cdot (1 + 0,14 \cdot \sqrt{24,7}) \cdot 0,82 = 0,0045.$$

Hiermit liefert die Formel (64)

$$M = \frac{1}{3} \cdot 0,0045 \cdot 6000 \cdot 0,22 \cdot \frac{1 - \left(\frac{0,13}{0,22}\right)^3}{1 - \left(\frac{0,13}{0,22}\right)^2} = 2,38 \text{ mkg.}$$

7. Der Rollwiderstand.

Rollt eine starre Walze auf einer ebenfalls starren, wagerechten Unterlage (Fig. 103), so findet die Berührung nur in einer Mantellinie A der Rolle statt. Die lotrechte Kraft Q , mit der die Walze auf die Unterlage gepreßt wird, und der Gegen-

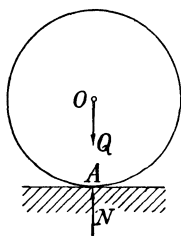


Fig. 103.

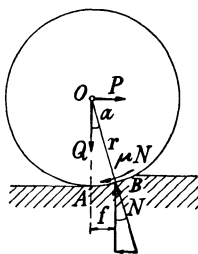


Fig. 104.

druck N der letzteren fallen in dieselbe Wirkungslinie und heben sich gegenseitig auf, so daß der geringste äußere Einfluß ausreicht, um die Rollbewegung einzuleiten⁸²⁾. Dem Fall entspricht etwa ein wenig belastetes Stahlrad auf einer Stahlschiene, die mit der ganzen Länge auf einer Betonmauer aufliegt.

Ist die Unterlage nachgiebig, wie etwa eine frische Chaussee-schotterung, und die Walze starr, so stellt die Fig. 104 die Verhältnisse dar. Die Gegenkraft N greift jetzt in der Mitte der vor der Walze befindlichen Erhöhung an und ist senkrecht zur Berührungsfläche von der Breite AB , also nach dem Mittelpunkt O der Walze gerichtet. Um den Körper zu rollen, ist eine etwa an der Rollennachse angreifende, parallel zur Lauffläche gerichtete Kraft P erforderlich und ferner außer der gewöhnlich sehr kleinen wagerechten Seitenkraft von N die am Rollenumfang angreifende Reibung $\mu \cdot N$. Wäre die letztere nicht da, so würde bei geringer Zusammendrückung der Unterlage nur eine gleitende Verschiebung der Rolle eintreten.

Die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen ergeben mit den Bezeichnungen der Fig. 104, wenn auch $\mu \cdot N$ ebenso wie N zerlegt wird,

⁸²⁾ Reynolds, Phil. Transactions of the Royal Soc. 1876; Gümbel, Die unmittelbare Reibung fester Körper, 1920.

$$Q - N \cdot \cos \alpha + \mu \cdot N \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$P - N \cdot \sin \alpha - \mu \cdot N \cdot \cos \alpha = 0.$$

Aus der ersten folgt

$$Q = N \cdot \cos \alpha \cdot (1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha)$$

und aus der zweiten

$$P = N \cdot \cos \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu).$$

Durch Division ergibt sich hieraus mit $\mu = \operatorname{tg} \varrho$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varrho}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varrho} = \operatorname{tg} (\alpha + \varrho).$$

In allen praktischen Fällen verschwindet α gegenüber ϱ , so daß sich für $\alpha \approx 0$ die vereinfachte Fig. 105 ergibt mit $N = Q$. Dann liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung mit A als Drehachse $P \cdot r = Q \cdot f$, also die erforderliche Zugkraft an der Achse zu

$$P = Q \cdot \frac{f}{r}. \tag{73}$$

Die vorhergehende Gleichung in der abgekürzten Form

$$\operatorname{tg} \varrho = \mu > \frac{P}{Q} = \frac{f}{r}$$

stellt die Bedingung dar, unter der Rollen eintritt; ist etwa $\mu < \frac{f}{r}$, so gleitet der Körper.

Ist die Rolle nachgiebig und die Unterlage starr, wie etwa ein Gummirad auf harter Straße, so bestehen die Verhältnisse der Fig. 106.

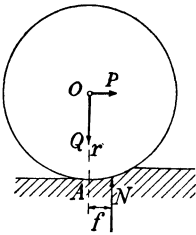


Fig. 105.

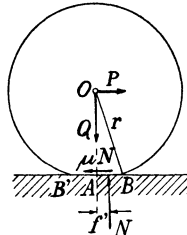


Fig. 106.

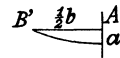


Fig. 107.

Im Ruhezustand liegt A in der Mitte der Abplattung von der Breite $\overline{BB'} = b$ und der Höhe a (Fig. 107), und Q und N , die beide durch A gehen, halten sich das Gleichgewicht. Beim Rollen verschiebt sich N um den Betrag f' nach vorn, weil die Mantellinie B' sich von der Fahrbahn abhebt und B sich entsprechend fester anlegt.

Aus der Momentengleichung $P \cdot (r - a) = N \cdot f'$ folgt mit

$$r^2 = (r - a)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

oder

$$a^2 - 2ra + r^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2,$$

also

$$a - r = \pm \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} = r \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2r}\right)^2}$$

bzw., da hier nur das untere Vorzeichen zutrifft und $\frac{b}{2r}$ immer sehr klein ist,

$$r - a = r \cdot \left(1 - \frac{1}{8} \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{P}{N} = \frac{P}{Q} = \frac{f'}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \frac{b^2}{r^2}\right).$$

Die Gleichung geht in die obige (73) über, wenn der Klammerausdruck mit f' zu dem Wert f zusammengezogen wird, da nur der Gesamtausdruck durch Versuche bestimmt werden kann.

Man bemerkt, daß in beiden Grenzfällen das Ergebnis das gleiche ist, also auch dann, wenn sowohl die Rolle als auch die Lauffläche nachgiebig ist.

Nur insofern tritt ein Unterschied ein, als jetzt N senkrecht zu der flachen Wölbung von Rolle und Unterlage steht, also gemäß Fig. 108 die Mittellinie der Rolle in einem Punkt O' über dem Mittelpunkt O schneidet. Gleichzeitig wird der Winkel α noch kleiner als bei den vorherigen Annahmen.

Da sich im Fall der Fig. 106 und 108 der Halbmesser r der Rolle um den Betrag a verkürzt, so findet stets ein gewisser Schlupf beim Rollen statt^{82b)}, ohne daß die Rolle gleitet.

Es bleibt noch der Fall zu erörtern, daß die Rollbahn elastisch ist. Die hinter der Rolle wieder emporsteigende Bahn legt sich mit einem Druck daran an, der bei vollkommener Elastizität der Unterlage gleich dem Druck N ist und ebenso weit wie dieser von A entfernt ist. Der Fall entspricht also, weil die Mittelkraft der beiden N durch die Berührungslinie A geht, dem zuerst besprochenen der vollkommen starren Körper. Da die Rolle, deren augenblickliche Drehachse A ist, sich auf der Rückseite bei B' von der Unterlage nahezu senkrecht abhebt, so entsteht dort keine Reibungskraft, die die Verhältnisse etwa ändern würde.

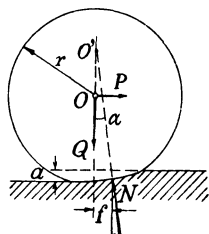


Fig. 108.

Bei unvollkommener Elastizität der Unterlage oder, wenn auch nur eine ganz geringe Zeit nötig ist, um die vollständige Rückbewegung auszuführen, ist die hinter der Stelle A wirkende Gegenkraft kleiner als die davor angreifende und befindet sich außerdem näher an A , so daß dann ein je nach dem Grade der Elastizität mehr oder weniger großer Teil von $Q \cdot f'$ als Moment des Rollwiderstandes in Ansatz kommt.

Für den Hebelarm f des Rollwiderstandes gelten folgende Mittelwerte⁸⁰⁾:

Material der		f mm
Walze	Unterlage	
Gußeisen	Gußeisen	0,05
Stahlräder	Stahlschienen	0,05
Pockholz	Pockholz	0,5
Ulmenholz	Pockholz	0,8
weiches Holz	weiches Holz	1,5
weiches Holz	Stein	1,3

Die Zugkraft P kann auch gelegentlich am oberen Rand der Rolle angreifen, und es gilt dann

$$P' \cdot 2r = Q \cdot f. \tag{74}$$

Sie kann auch, wie der Kettenzug eines Fahrrades oder Lastkraftwagens, in geneigter Richtung am Halbmesser r_1 eines auf der Rollachse festen Zahnrades angreifen. In dem Fall gilt entsprechend

$$P' \cdot r_1 = Q \cdot f.$$

Beispiel 69. Zu bestimmen ist der Neigungswinkel α einer aus Flußeisen gebildeten schiefen Ebene, auf der eine Stahlrolle vom Halbmesser $r = 60$ mm gerade anfängt abzurollen.

Gemäß Fig. 109 wird das Gewicht G der Rolle in die beiden Seitenkräfte $P = G \cdot \sin \alpha$ parallel zur schiefen Ebene und $N = G \cdot \cos \alpha$ senkrecht dazu zerlegt. Dann ergibt Formel (73)

$$G \cdot \sin \alpha = G \cdot \cos \alpha \cdot \frac{f}{r},$$

also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{r} = \frac{0,05}{60} = 0,00083,$$

mithin

$$\alpha \sim 3' = \frac{1}{2}^\circ.$$

Bei sehr sorgfältiger Aufmessung⁸³⁾ waren die Genauigkeitsgrenzen der Messung $\frac{1}{10}^\circ$ und α ergab sich kleiner als dieser Betrag.

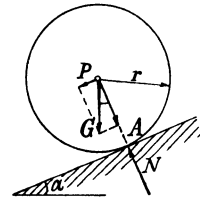


Fig. 109.

Beispiel 70. Für einen zweirädrigen Drahtseilbahnwagen vom Gesamtgewicht $Q = 550$ kg, der auf einer Neigung $\operatorname{tg} \alpha = 1 : 3,5$ fährt, ist die erforderliche Zugkraft anzugeben. Der Raddurchmesser beträgt $D = 25$ cm, der Zapfendurchmesser $d = 35$ mm.

Die Last Q wird entsprechend der Fig. 109 zerlegt. Das Moment des Rollwiderstandes ist dann

$$M_1 = Q \cdot \cos \alpha \cdot f,$$

das Moment der Zapfenreibung nach Formel (57)

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot Q \cdot d,$$

das Moment der Zugkraft, die an der Radachse angreift, bei Aufwärtsbewegung

$$M_3 = (P - Q \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{D}{2}.$$

⁸³⁾ Jahn, Z. d. V. d. I. 1918.

Es gilt also

$$M_3 = M_1 + M_2$$

oder mit den vorstehenden Werten und

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$P = \frac{Q}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{2 \cdot f}{D} + \mu \cdot \frac{d}{D} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right). \quad (75)$$

Mit $f = 0,005$ cm und $\mu = 0,060$ bei Starrschmiere nach dem Einlaufen ergibt sich

$$P = \frac{550}{\sqrt{1 + 0,286^2}} \cdot \left(0,286 + \frac{2 \cdot 0,005}{25} + 0,060 \cdot \frac{3,5}{25} \cdot \sqrt{1,082} \right)$$

$$= 529 \cdot (0,286 + 0,00004 + 0,0087) = 198 \text{ kg.}$$

Bei der Ingangsetzung ist μ ungefähr doppelt so groß.

Bei der Abwärtsbewegung des Wagens ist

$$P = 529 \cdot (0,286 - 0,0004 - 0,0087) = 146 \text{ kg.}$$

In welcher Höhe des Wagens das Zugseil angreift, ist für die vorliegende Rechnung gleichgültig, da die Änderung der Höhenlage nur eine andere Verteilung des Radruckes bewirkt (Beispiel 130, Bd. I).

Beispiel 71. Zu bestimmen ist die Neigung des Gleises, bei der ein Eisenbahnwagen beginnt, von selbst abzurollen.

Bezeichnet Q' den Anteil des ganzen Wagengewichtes Q , der auf ein Rad entfällt, so gilt nach Fig. 109 als treibende Kraft $Q' \cdot \sin \alpha$ am Radhalbmesser R , als Gegendruck der Schiene $Q' \cdot \cos \alpha$ mit dem Hebelarm f des Rollwiderstandes. Der Achszapfen vom Halbmesser r wird belastet durch $Q' - \frac{1}{2}G$, wenn G das Gewicht des Radsatzes darstellt, und das Moment der Zapfenreibung, die in erster Linie das Abrollen hindert, ist $\mu' \cdot (Q' - \frac{1}{2}G) \cdot r$.

Entsprechend lassen sich dieselben Gleichungen mit den zugehörigen Anteilen der übrigen Räder niederschreiben. Durch Addition erhält man dann mit $Q' = b \cdot l \cdot p'$, worin bedeutet

l die Länge des Zapfens in cm,

b die Breite der Lagerschale in cm,

p' den von Q' darauf hervorgerufenen Flächendruck in at,

$$Q \cdot \sin \alpha \cdot R = Q \cdot \cos \alpha \cdot f + \Sigma \mu' \cdot p' \cdot l \cdot b \cdot r - \Sigma \mu \cdot \frac{2G}{4} \cdot r,$$

wenn ein zweiachsiger Wagen angenommen wird.

Nun ist $\mu' \cdot p'$ nach S. 72 unter sonst gleichen Verhältnissen nahezu unveränderlich und man kann also für $\Sigma(\mu' \cdot p')$ den Wert $\mu \cdot p = \mu \cdot \frac{Q}{l \cdot b}$ einsetzen. Ebenso wird im letzten Glied der Mittelwert für die Reibungsziffer $\mu = \frac{1}{4} \cdot \Sigma \mu'$ gesetzt. Man kann demnach bei gleichen Rädern so rechnen, als ob die ganze Last auf ein einziges Rad kommt.

Nach Division durch $Q \cdot \cos \alpha \cdot R$ geht dann die obige Gleichung über in

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{R} + \frac{\mu}{\cos \alpha} \cdot \left(1 - \frac{2G}{Q} \right) \cdot \frac{r}{R}. \quad (76)$$

Die Neigung wird am kleinsten, wenn Q den geringsten Wert annimmt. Für leere offene Güterwagen ist $Q = 7,3$ t, ein Radsatz wiegt $G = 1,2$ t, der Halbmesser des Radlaufkreises ist $R \approx 50$ cm, der Halbmesser des Zapfens $r = 4,5$ cm, ferner ist $f = 0,005$ cm und $\mu = 0,054$ bei etwa 10 ÷ 15 Minuten Stillstand. Damit wird mit $\cos \alpha \approx 1$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,005}{50} + \frac{0,054}{1} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 1,2}{7,3} \right) \cdot \frac{4,5}{50} = 0,0001 + 0,00326 = 0,00336.$$

Die größte Neigung⁸⁴⁾, die Gleise in Bahnhöfen haben dürfen, ist $\operatorname{tg} \alpha = 0,0025$; somit ist die Sicherheit gegen selbsttätiges Abrollen bei Windstille

$$\zeta = \frac{33,6}{25} = 1,34.$$

Beispiel 72. Anzugeben ist die in wagerechter Richtung wirkende Kraft P , die erforderlich ist, um eine Steinplatte vom Gewicht $Q = 5,2 \text{ t}$ durch hölzerne Rollen vom Halbmesser $r = 8 \text{ cm}$ und dem Gesamtgewicht $G = 40 \text{ kg}$ auf Holzbohlen fortzurollen.

Nur bei der in Fig. 110 wiedergegebenen Lage des Steines zu den Rollen verteilt sich sein Gewicht Q gleichmäßig über beide Rollen. Trotzdem kann nach den Angaben in Beispiel 70 so gerechnet werden, als ob die ganzen Lasten Q und G auf eine einzige Rolle wirken. Auch wenn P nicht, etwa durch Vermittlung einer Brechstange an der Unterfläche des Steines angreift, so wirkt das bei höherer Lage von P entstehende Drehmoment nur auf Mehrbelastung der vorderen und Entlastung der hinteren Rolle, was auf das Ergebnis ja ohne Einfluß ist.

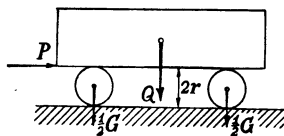


Fig. 110.

Das Moment des Rollwiderstandes an der Unterlage ist $M_1 = (Q + G) \cdot f_1$, das des Rollwiderstandes am Stein ist $M_2 = Q \cdot f_2$, das Moment der bewegenden Kraft ist gemäß Formel (74) $M = P \cdot 2r$. Man erhält so aus

$$P \cdot 2r = (Q + G) \cdot f_1 + Q \cdot f_2$$

$$P = \frac{Q \cdot (f_1 + f_2) + G \cdot f_1}{2r},$$

also mit $f_1 = 0,15 \text{ mm}$, $f_2 = 0,13 \text{ mm}$

$$P = \frac{5200 \cdot (0,15 + 0,13) + 40 \cdot 0,15}{2 \cdot 80} = 9,11 + 0,04 \approx 9,2 \text{ kg}.$$

Beispiel 73. Von den vier Laufrädern des Auslegers eines Portalkranes erfahren die zwei vorderen je die Höchstbelastung $Q' = 11,37 \text{ t}$, die zwei hinteren je $Q'' = 0,26 \text{ t}$. Anzugeben ist die Größe des zum Schwenken des Auslegers erforderlichen Zahndruckes P , der im Abstand $R_1 = 1,35 \text{ m}$ von der Drehachse wirkt (Fig. 111). Gegeben ist ferner der Halbmesser des mittleren Laufkreises $R = 1,50 \text{ m}$, der mittlere Raddurchmesser $2r = 0,60 \text{ m}$, der Zapfendurchmesser der Räder $2r_1 = 7 \text{ cm}$, die Zapfenlänge $l_1 = 11 \text{ cm}$, der Stirndurchmesser der Radnabe $2r_2 = 12 \text{ cm}$.

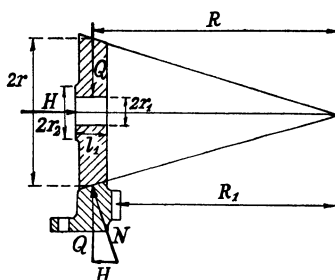


Fig. 111.

Es ist die Gesamtbelastung

$$Q = 2 \cdot (Q' + Q'') = 2 \cdot (11,37 + 0,26) = 23,26 \text{ t}.$$

Der Gegendruck N der Schiene wird zerlegt in Q und H , und aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$H = Q \cdot \frac{r}{R}$$

und damit

$$N = \sqrt{Q^2 + H^2} = Q \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

⁸⁴⁾ Techn. Vereinbarungen über den Bau und die Betriebseinrichtungen der Haupt- und Nebeneisenbahnen.

Das Moment des Rollwiderstandes ist

$$M_1 = N \cdot f = Q \cdot f \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = 23\,260 \cdot 0,005 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{30}{150}\right)^2} \approx 120 \text{ cmkg.}$$

Das Moment der Tragzapfenreibung ist mit $\mu = 0,10$ (vgl. S. 71) nach Formel (57)

$$M_2 = \mu \cdot Q \cdot r_1 = 0,10 \cdot 23\,260 \cdot 3,5 \approx 8140 \text{ cmkg.}$$

Das Moment der Spurzapfenreibung nach Formel (63)

$$M_3 = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot H \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot 0,10 \cdot 23\,260 \cdot \frac{30}{150} \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3}{1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2} \approx 380 \text{ cmkg.}$$

Treibend wirkt das Moment

$$M = P \cdot R_1 = P \cdot 135 \text{ cmkg.}$$

Man erhält somit

$$P = \frac{1}{135} \cdot (120 + 8140 + 380) = 64 \text{ kg.}$$

Da sich beim ersten Anfahren die Reibungsziffer vergrößert auf $\mu = 0,14$ und der Rollwiderstand nur einen ganz geringen Anteil zu P beiträgt, so kann genau genug angegeben werden

$$P_{\max} = 1,4 \cdot P = 90 \text{ kg.}$$

Für eisenbereifte Räder von Straßenfuhrwerken ist f naturgemäß von der Art der Straße abhängig. Es ist⁸⁵⁾ auf

glatten Granitplatten	$f = 1,5$	mm,
Gleisen der Straßenbahn . . . i. M.	$f = 2,5$	„ ,
guter Asphaltstraße	$f = 6,0$	„ ,
gutem Holzpflaster	$f = 1,5$	„ ,
sehr guten Erdwegen	$f = 4,5$	„ ,
losem Sand	$f = 15 \div 30$	„ ,

Für Vollgummibereifung von Lastkraftwagen⁸⁶⁾ ist auf guter harter Chaussee $f = 2,4$ mm.

Beispiel 74. Zu berechnen ist die nötige Zugkraft P , um ein Landfuhrwerk von $G = 1100$ kg Eigengewicht und $Q = 3000$ kg Ladung auf einer guten Asphaltstraße fortzuschaffen. Die Achsschenkel haben den Durchmesser $d = 5$ cm, die Vorderräder den Durchmesser $D_1 = 1,0$ m, die Hinterräder den Durchmesser $D_2 = 1,2$ m. Die Last werde gleichmäßig auf alle 4 Räder verteilt vorausgesetzt.

Als widerstehende Momente sind die des Rollwiderstandes und der Zapfenreibung anzusetzen, das bewegende Moment bildet die Zugkraft am Radhalbmesser. Es gilt also für die Vorderräder

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (G + Q) \cdot f + \frac{1}{2} \cdot (G + Q) \cdot \mu \cdot \frac{d}{2}.$$

Eine entsprechende Gleichung ergibt sich für die Hinterräder. Damit wird

$$P \cdot \frac{D_1 + D_2}{2} = (G + Q) \cdot (2f + \mu \cdot d),$$

⁸⁵⁾ Berechnet aus den Messungsergebnissen von Gerstner, Handbuch der Mechanik, 1831; Morin, Expériences sur le tirage des voitures, 1839/42; Brix, Über die Reibung und den Widerstand der Fuhrwerke auf Straßen von verschiedener Beschaffenheit, 1850.

⁸⁶⁾ Nach Wimperis, Engng. 1910.

also

$$P = 2 \cdot (2f + \mu \cdot d) \cdot \frac{G + Q}{D_1 + D_2}. \quad (77)$$

Mit $f = 0,60$ cm und $\mu = 0,10$ wird

$$P = 2 \cdot (2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 5) \cdot \frac{4100}{220} = 63 \text{ kg}.$$

Bei etwa 8stündiger Arbeitszeit am Tage mit passenden Pausen beträgt die Zugkraft eines

leichten Pferdes	60 kg	bei	$v = 1,1$ m/sk	Geschwindigkeit,
mittleren „	75 „	„	$v = 1,1$ „	„
schweren „	90 „	„	$v = 1,1$ „	„
Menschen	15 „	„	$v = 0,8$ „	„
„	25 „	„	$v = 0,4$ „	„

Sie kann vorübergehend auf das Doppelte gesteigert werden.

Ist die Fahrbahn uneben, so daß das Rad im Punkte B der Fig. 112 gegen eine um den Betrag a erhabene Erhöhung stößt, so gilt, wenn die Zugkraft P an der Radachse angreift, die Momentengleichung

$$P \cdot (r - a) = Q \cdot \frac{b}{2},$$

wobei der sehr kleine Betrag $Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot a$ weggelassen wird. Mit dem oben bestimmten Wert von $r - a$ folgt hieraus

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \frac{b^2}{r^2} \right).$$

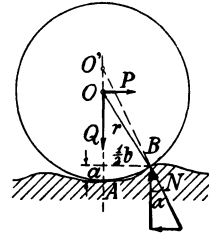


Fig. 112.

Nun ergibt die Ableitung des Wertes $r - a$ umgekehrt

$$\frac{b}{2r} = \sqrt{\frac{2a}{r}},$$

und es ist demnach

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{2 \cdot \frac{a}{r} \cdot \left(1 + \frac{a}{r} \right)} \quad (78)$$

bei langsamem Rollen. Bei schnellem Rollen steigt der Einfluß der Unebenheiten mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Die Rechnung setzt voraus, daß die Vorsprünge der Fahrbahn starr sind. Bei nachgiebigen oder elastischen Vorsprüngen ist nur ein Teilbetrag von a in die Formel (78) einzusetzen. Sind z. B. auf die eiserne Fahrbahn niedrige Messingstreifen von der Stärke a gelötet, so stimmt die Formel mit den Versuchsergebnissen⁸⁷⁾ überein, wenn i. M. mit $0,50 a$ gerechnet wird. Bei Wagen auf rauhen Straßen verringert sich der Widerstand noch dadurch, daß nicht alle vier Räder gleichzeitig vor gleich hohen Vorsprüngen stehen.

⁸⁷⁾ Bülz, Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 154/5, 1914.

Als Durchschnittswerte für vierrädrige, eisenbereifte Straßenfahrwerke⁶⁵⁾ kann man ansetzen bei

vorzüglichem Steinpflaster	$a = 0,030$ mm,
gutem „	0,067 „ ,
schlechtem „	0,225 „ ,
chaussierter Straße, glatt und geteert	0,035 „ ,
„ „	0,095 „ ,
„ „ mit Staub und Schlamm bedeckt	0,150 „ ,
„ „ in schlechter Beschaffenheit	0,55 „ .

Beispiel 75. Zu berechnen ist die für den Wagen in Beispiel 74 erforderliche Zugkraft auf einer gewöhnlichen staubigen oder schlammigen Chaussee.

Der Klammerausdruck der Formel (78) kann als belanglos weggelassen werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{Q}{2} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \frac{a}{R_1}} + \sqrt{2 \cdot \frac{a}{R_2}} + \mu \cdot \left(\frac{d}{D_1} + \frac{d}{D_2} \right) \right] \\
 &= \frac{4100}{2} \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot 0,015}{50}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,015}{60}} + 0,10 \cdot \left(\frac{5}{100} + \frac{5}{120} \right) \right] \\
 &= \frac{4100}{2} \cdot (0,0245 + 0,0224 + 0,0050 + 0,0042) = 115 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

Vorausgesetzt ist eine im ebenen Gelände verlaufende Straße. Bei der im Flachlande gebräuchlichen Straßensteigung $\text{tg } \alpha = 0,025$ wird nach Formel (75) für die Aufwärtsbewegung

$$P = \frac{4100}{\sqrt{1 + 0,025^2}} \cdot (0,025 + 0,0235 + 0,0046 \cdot 1,0003) = 216 \text{ kg.}$$

Die Belastung ist also, wenn längere Steigungen von der Größe vorkommen, für zwei schwere Pferde schon zu groß.

Bei einer Steigung der Straße von $\text{tg } \alpha = 0,050$, wie sie im Hügelland oft vorkommt, ist

$$P = \frac{4100}{\sqrt{1 + 0,05^2}} \cdot (0,050 + 0,0235 + 0,0046 \cdot 1,00125) = 319 \text{ kg.}$$

Der Wagen erfordert dann 4 mittelschwere Pferde.

Beispiel 76. An einem Lastkraftwagen mit Vollgummibereifung ist auf einer wagerechten, guten harten Chaussee bei Windstille für den Fahrwiderstand des geschleppten Wagens mit ausgekuppeltem Motor⁸⁶⁾ festgestellt worden bei

$v =$	4	8	12	16	20	24	28	32	36 km/st
$\frac{P}{Q} =$	0,0181	0,0190	0,0203	0,0226	0,0248	0,0300	0,0362	0,0430	0,0493.

Hiernach läßt sich angeben für

$$0 < v < 12 \text{ km/st } \frac{P}{Q} = 17,6 + \frac{6}{80} v + \frac{1}{80} v^2 \text{ kg/t,}$$

$$12 < v < 21 \text{ km/st } \frac{P}{Q} = 20,3 \cdot \sqrt[2,5]{\frac{v}{12}} \text{ kg/t,}$$

$$21 < v < 36 \text{ km/st } \frac{P}{Q} = 25,1 \cdot \left(\frac{v}{21} \right)^{1,25} \text{ kg/t.}$$

Mit einem leichten Lastkraftwagen mit Vollgummibereifung von $D \sim 0,90$ m Durchmesser sind festgestellt worden⁸⁸⁾ auf

⁸⁸⁾ v. Kennelly u. Schmig, Institute of Electr. Eng., Cleveland 1917.

Asphaltstraßen	bei $16 < v < 24$ km/st	$\frac{P}{Q} = 14,5 + \frac{v}{4}$ kg/t,
Holzpfaster	„ $16 < v < 23$ „	$\frac{P}{Q} = 18,0 + \frac{v}{4}$ „ „
guter harter Chaussee	„ $14 < v < 23$ „	$\frac{P}{Q} = 24,0 - \frac{2}{3}v + \frac{v^2}{30}$ kg/t,
schlechter „	„ $14 < v < 24$ „	$\frac{P}{Q} = 28,0 - \frac{1}{4}v + \frac{v^2}{50}$ „ „
Kopfsteinpflaster	„ $13 < v < 20$ „	$\frac{P}{Q} = 29,0 - \frac{2}{3}v + \frac{v^2}{15}$ „ „
weicher Landstraße	„ $13 < v < 21$ „	$\frac{P}{Q} = 36,5 - \frac{3}{4}v + \frac{v^2}{30}$ „ „
Granitsteinen in Zement	„ $15 < v < 23$ „	$\frac{P}{Q} = 17,5 + \frac{v^2}{40}$ kg/t.

Die letzteren Angaben enthalten nur den reinen Straßen- und dazu den Luftwiderstand.

Für Fahrräder gilt bei $1,7 > v > 10$ msk Fahrtgeschwindigkeit als Gesamtwiderstand^{89a)}

$$W = 0,64 + 0,0922 \cdot v + 0,022 \cdot v^2.$$

Straßenlokomotiven von $0,8 \div 1,0$ m Raddurchmesser haben auf fester Straße einen Fahrwiderstand von 22 kg/t ^{89b)}.

Bei auf Schienen laufenden Rädern biegt sich die Schiene unter dem Raddruck stets etwas durch, wie es die Fig. 113 etwa andeutet. Das Rad scheint somit eine etwas geneigte Bahn heraufzurollen. Jedoch läuft die Aushöhlung der Bahn mit dem Rade nahezu unverändert mit, und außerdem ist die Tangente an die Schienenkurve an der Rollstelle parallel zur Bewegungsrichtung des Rades. Diese Durchbiegung ist also ohne Einfluß auf den Rollwiderstand.

Drehensichzwei durch die Kräfte Q aufeinander gepreßte Rollen von den Halbmessern r_1 und r_2 um ihre Achsen O_1 und O_2 , so verschiebt sich an jeder Rolle der darauf wirkende Gegendruck N_1 bzw. N_2 um die Strecke f von der Mittellinie $\overline{O_1O_2}$

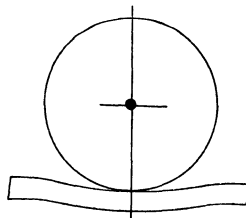


Fig. 113.

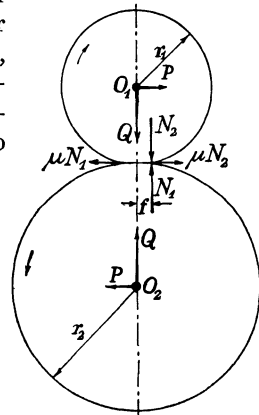


Fig. 114.

nach rückwärts im Sinne der Bewegung jeder Rolle (Fig. 114). Um die Rolle 1 gegen den Rollwiderstand zu drehen, ist sie durch ein Drehmoment M_1 anzutreiben. Da nun $N_1 = N_2 = Q$ ist, so gilt für reines Rollen, also $P < \mu \cdot N$,

$$+M_1 - Q \cdot f + P \cdot r_1 = 0$$

⁸⁹⁾ Schaefer, D. p. J. 1908; Dahme, Z. d. V. d. I. 1919.

und für die Rolle 2 entsprechend

$$+Q \cdot f + P \cdot r_2 = 0.$$

Wird der hieraus folgende Wert von P in die erstere Gleichung eingesetzt, so folgt⁹⁰⁾

$$M_1 = Q \cdot f \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right). \quad (79)$$

Die Gleichung trifft auch für das Rollen in einem Hohlzylinder zu.

Steht etwa die Rolle 2 fest und rollt 1 darauf im Sinne des eingetragenen Pfeiles ab, so gilt dieselbe Überlegung. Nun wirkt jetzt auf die Rolle 2 noch ein Drehmoment $M_2 = M_1$ in entgegengesetzter Richtung, das sie festhält.

Beispiel 77. Zu berechnen ist die im Abstände $l_0 = 0,60$ m von der Drehachse angreifende Kraft P_0 , die zum Schwenken eines Handdrehkranes nach Fig. 115 nötig ist, bei der Nutzlast $Q = 3$ t, ihrer Ausladung $a = 4,0$ m, dem

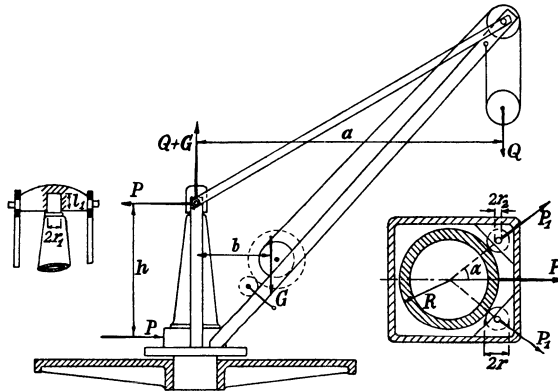


Fig. 115.

Gewicht der drehbaren Teile $G = 2,8$ t, seinem Hebelarm $b = 1,0$ m, dem Abstand von der Mitte des oberen Drehzapfens bis zur Mitte der unteren Druckrollen $h = 1,8$ m. Gegeben sei ferner der Durchmesser des oberen Drehzapfens $2r_1 = 11$ cm, seine Länge $l_1 = 16$ cm, der Rollendurchmesser $2r = 15$ cm, ihr Zapfendurchmesser $2r_2 = 4,5$ cm, die Zapfenlänge $l_2 = 6$ cm, der Säulendurchmesser an der Laufstelle der Rollen $2R = 65$ cm, der Winkel zwischen den Rollenachsen und der Mittelachse des Auslegers $\alpha = 40^\circ$.

Der obere Spurzapfen hat das ganze Gewicht des Auslegers mit der Last zu tragen; die Seitenflächen des Zapfens und des Rollenlagers erhalten die gleiche wagerechte Kraft P . Die Momentengleichung für die am Ausleger wirkenden Kräftepaare lautet bei Gleichgewicht

$$+Q \cdot a + G \cdot b - P \cdot h = 0.$$

Hieraus folgt

$$P = Q \cdot \frac{a}{h} + G \cdot \frac{b}{h} = 3000 \cdot \frac{4,0}{1,8} + 2800 \cdot \frac{1,0}{1,8} \approx 8220 \text{ kg.}$$

⁹⁰⁾ Stribeck, Z. d. V. d. J. 1901; Löffler, Mechanische Triebwerke und Bremsen, 1912.

Der auf eine Stützrolle kommende Druck P_1 ergibt sich leicht aus dem Kräfte-dreieck zu

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{8220}{2 \cdot 0,766} \approx 5370 \text{ kg.}$$

Da ein richtiges Einlaufen der Zapfen hier nicht stattfindet, so ist zu rechnen mit $\mu = 0,10$.

Man erhält so das Reibungsmoment des Stützzapfens nach Formel (64)

$$M = \frac{1}{3} \cdot \mu \cdot (Q + G) \cdot d_1 = \frac{1}{3} \cdot 0,10 \cdot 5800 \cdot 11 = 2127 \text{ cmkg,}$$

das Reibungsmoment des Tragzapfens nach Formel (57)

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P \cdot d_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,10 \cdot 8220 \cdot 11 = 4523 \text{ cmkg,}$$

das Reibungsmoment der 4 Tragzapfen der Rollen

$$M_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P_1 \cdot d_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,10 \cdot 5370 \cdot 4,5 = 2416 \text{ cmkg,}$$

das Moment des Rollwiderstandes nach Formel (79) mit $f = 0,005 \text{ cm}$

$$M_4 = 2 \cdot P_1 \cdot f \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2 \cdot 5370 \cdot 0,005 \cdot \left(1 + \frac{15}{65}\right) = 66 \text{ cmkg.}$$

Das gesamte, zum Schwenken nötige Drehmoment ist also $\Sigma M = 91,32 \text{ mkg}$, mithin die gesuchte Kraft

$$P_0 = \frac{\Sigma M}{l_0} = \frac{91,32}{0,60} \approx 152 \text{ kg.}$$

8. Der Spurkranz.

Ein Laufkran von der Spannweite b und dem Radstand a (Fig. 116) erfahre bei einer bestimmten Laststellung die Raddrücke N_1, N_2, N_3, N_4 . Ist nun ein Rad, z. B. 1, etwas größer als die anderen — Unterschiede von 1 mm im Durchmesser kommen häufig vor⁹¹⁾ —, so eilt es entsprechend vor und der Kran stellt sich schief, wobei der Spurkranz

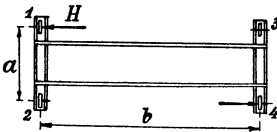


Fig. 116.

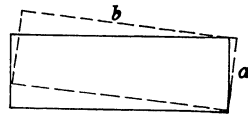


Fig. 117.

des voreilenden Rades die Schiene berührt und so eine wagerechte Gegenkraft H erfährt. Hat H eine hinreichende Größe angenommen, so verschiebt sich der Kran entweder in der Richtung von H als Ganzes oder führt eine Drehung um das diagonal gegenüberliegende Rad 4 aus.

Zunächst ist zu entscheiden, unter welchen Umständen das eine oder andere eintritt. Für den Fall der Verschiebung im ganzen ist

$$H = \mu \cdot (N_1 + N_2 + N_3 + N_4),$$

für den der Drehung ist nach Fig. 117

$$H \cdot a = \mu \cdot (N_3 \cdot a + N_2 \cdot b + N_1 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}).$$

⁹¹⁾ Pape, D. p. J. 1910.

Im Grenzfall sind beide H einander gleich, woraus folgt

$$N_1 + N_2 + N_4 = N_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} + N_2 \cdot \frac{b}{a}. \quad (80)$$

Beispiel 78. Zu bestimmen ist das Radstandverhältnis $\frac{b}{a}$, bei dem Drehung des Laufkranes eintritt, für verschiedene Werte der Raddrücke N .

Es sei

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{Q}{4}.$$

Dann liefert Formel (80)

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 3 - \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 9 - 6 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

also

$$\frac{b}{a} = 1,33$$

als Grenzwert. Bei jedem größeren Betrag verschiebt sich der Kran seitlich.

Es sei

$$N_1 = N_2 = 0,3 Q \quad \text{und} \quad N_3 = N_4 = 0,2 Q.$$

Dann ergibt sich aus

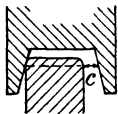


Fig. 118.

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad & 0,3 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0,8 - 0,3 \frac{b}{a} \\ & 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 7,11 - 5,33 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ & \frac{b}{a} = 1,15. \end{aligned}$$

Es sei umgekehrt $N_1 = N_2 = 0,2 Q$ und $N_3 = N_4 = 0,3 Q$. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} 0,2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} &= 0,7 - 0,2 \cdot \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} &= 1,25. \end{aligned}$$

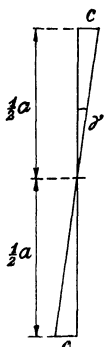


Fig. 119.

Da b im allgemeinen, sogar bei Portalkranen, erheblich größer ist als a , so findet unter gewöhnlichen Umständen keine den Kran wieder gerade richtende Drehung statt, sondern der Kran schiebt sich an dem Spurkranz zur Seite, wobei das voreilende Rad auch in der Laufrichtung etwas gleitet (S. 105). Mit $\mu = 0,22$ erhält man somit, wenn Q das Gesamtgewicht des Kranes einschließlich der Last angibt, $H = 0,22 \cdot Q$.

Die Größe der möglichen Schiefstellung hängt ab von dem Radstand a und dem Spielraum c zwischen den Spurkränzen und der Schiene (Fig. 118), und zwar ist der Schiefstellwinkel γ gemäß Fig. 119 bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \cdot c}{a}. \quad (81)$$

Es liegen demnach immer zwei Spurkränze mit gleicher Kraft H an der Schiene an. Als Durchschnittswert⁹¹⁾ kann etwa $\gamma \sim \frac{1}{200}$ gelten.

Die Kegelschnitte. Ein Kegel entsteht dadurch, daß eine gerade, nach beiden Richtungen ins Unendliche verlaufende Linie AA um die Achse OO' , die sie in O unter dem Winkel α schneidet, gedreht wird (Fig. 120).

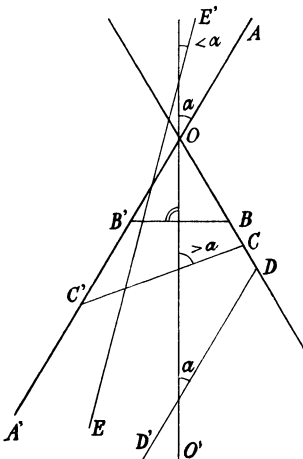


Fig. 120.

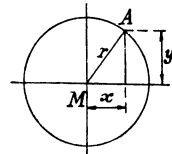


Fig. 121.

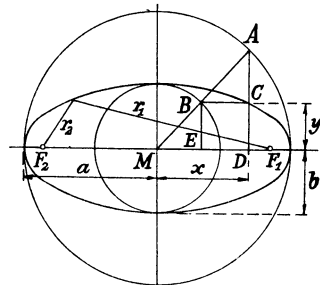


Fig. 122.

Legt man durch den Kegel einen ebenen Schnitt BB' senkrecht zur Achse OO' , so entsteht ein Kreis (Fig. 121). Für jeden beliebigen Punkt des Kreisumfanges gilt mit den Bezeichnungen der Fig. 120 die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{82}$$

Wird der Schnitt CC' unter einem beliebigen Winkel zwischen 90° und α gegen die Achse gelegt, so entsteht eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sich um so mehr voneinander unterscheiden, je mehr der Schnittwinkel sich dem Wert α nähert (Fig. 122). Gezeichnet wird die Ellipse aus den beiden Halbachsen a und b , indem man durch die Schnittpunkte A und B der aus ihnen geschlagenen Kreise mit einem beliebigen Halbmesser MA je eine zu a bzw. b Senkrechte AC bzw. BC zieht, die sich in einem Punkt C der Ellipse schneiden. Man entnimmt der Fig. 122 aus den ähnlichen Dreiecken BAC und MBE das Verhältnis

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b},$$

woraus sich nach Quadrierung die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ergibt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{83}$$

Für jeden Punkt der Ellipse ist die Summe der Brennpunktabstände CF_1 und CF_2 dieselbe:

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

und zwar ist

$$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Wird die Schnittebene DD' parallel zu einer Mantellinie, also unter dem Winkel α gegen die Achse OO' geführt (Fig. 120), so entsteht die Parabel, die in der Richtung nach D' ins Unendliche verläuft (Fig. 123). Jeder Punkt der Parabel hat von einem Punkt F und einer senkrecht zur Achse verlaufenden Geraden den gleichen Abstand: $\overline{FC} = \overline{DC}$. Den Abstand $\overline{FM} = p$ bezeichnet man als Parameter der Parabel. Aus dem Dreieck FBC erhält man nach dem Satz des Pythagoras:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

woraus die Scheitelgleichung der Parabel folgt

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

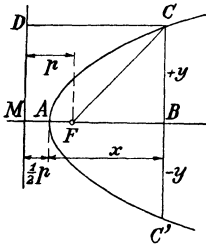


Fig. 123.

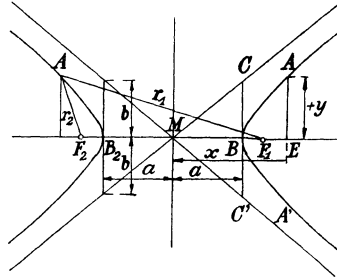


Fig. 124.

Wird in Fig. 120 der Kegelschnitt EE' gegen die Achse OO' unter einem Winkel geführt, der kleiner ist als α , so entsteht die Hyperbel, die in zwei getrennte gleiche Äste bei E und bei E' zerfällt. Für jeden beliebigen Punkt A der Hyperbel (Fig. 124) ist der Unterschied der Brennpunktstrahlen $\overline{F_1A}$ und $\overline{F_2A}$ derselbe:

$$r_1 - r_2 = 2a, \tag{84}$$

wenn $\overline{MB_1} = \overline{MB_2} = a$ als große Halbachse der Hyperbel bezeichnet wird und entsprechend das von den die Kurve in den unendlichfernen Punkten tangierenden Asymptoten auf der Scheiteltangente abgeschnittene Stück $\overline{BC} = b$ als kleine Halbachse. Es ist ferner

$$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man hiermit

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{und} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

damit folgt aus der obigen Grundgleichung durch zweimaliges Quadrieren die Mittelpunkgleichung der Hyperbel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{85}$$

Ist $a = b$, so geht sie über in

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{86a}$$

Diese Kurve, deren Asymptoten senkrecht zueinander und um 45° gegen die Mittelachse geneigt sind, ist die gleichschenklige Hyperbel. Werden die Asymptoten als Achsen genommen, so gilt

$$x' \cdot y' = c. \tag{86b}$$

Ist die Hohlkehle des Spurkranzes im Verhältnis zur Abrundung der Schiene klein und wird vorläufig von dem Gleiten des Rades

in der fortschreitenden Richtung abgesehen, so ergeben sich für die Neigung α des Spurkranzes und die Schiefstellung γ die Verhältnisse⁹²⁾ der Fig. 125. Die obere Projektion *a* gibt eine Ansicht gegen das Rad auf der um den Winkel γ gegen die Zeichenebene geneigten Schiene mit der Auflagerstelle A_1 des Laufmantels des Rades und dem Berührungspunkt B_1 von Spurkranz und Schiene, dessen Bahn beim Rollen

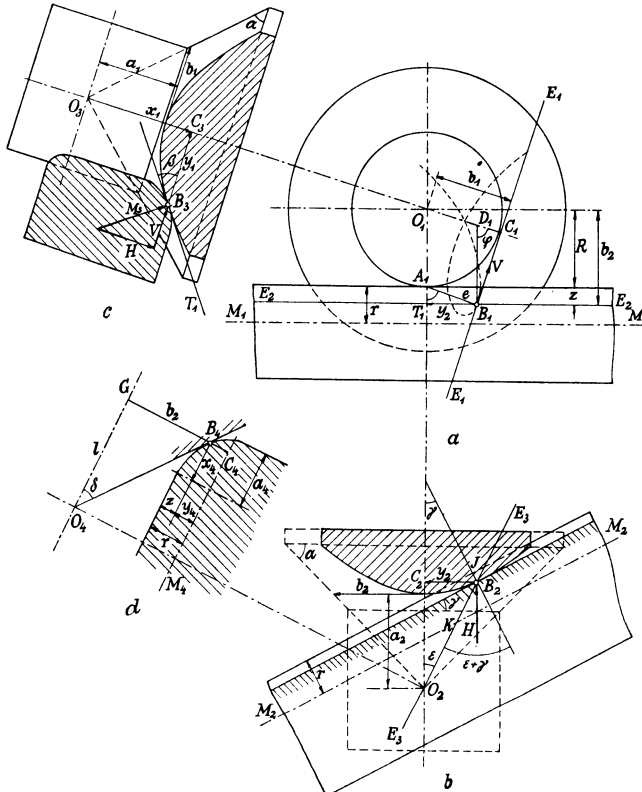


Fig. 125.

des Rades die eingetragene verlängerte Zykloide (S. 150) ist. Die untere Projektion *b* stellt den wagerechten Schnitt E_2 durch den Berührungspunkt dar; der Spurkranz wird nach einer Hyperbel geschnitten, der Führungszylinder der Schiene vom Halbmesser r und der Achse MM nach einer Geraden.

Ist $\overline{O_2C_2} = x$ und $\overline{C_2B_2} = y$, so lautet die Gleichung dieser Hyperbel gemäß Formel (85)

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1.$$

⁹²⁾ Schubert, Die Fördertechnik 1914/15.

Durch Differentiation

$$\frac{2 \cdot x_2 \cdot dx_2}{a_2^2} - \frac{2 \cdot y_2 \cdot dy_2}{b_2^2} = 0$$

ergibt sich hieraus die Richtung ihrer Tangente, der Schnittgeraden des Führungszylinders

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{x_2}{y_2} \cdot \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2.$$

Nun ist nach Fig. 125 b diese Neigung gegen die Laufrichtung des Rades $\cotg \gamma$ und ferner $\frac{b_2}{a_2} = \cotg \alpha$, also

$$\cotg \alpha = \frac{x_2}{y_2} \cdot \cotg^2 \alpha. \quad (87)$$

In der oberen Projektion 125 a ist durch die Tangente an die Bahn des Punktes B eine Ebene E_1 senkrecht zur Zeichenebene gelegt worden, die in der linken Projektion 125 c in wahrer Größe dargestellt ist. Die Mittelpunktgleichung dieser Schnitthyperbel des Spurkranzes ist mit $O_3C_3 = x_1$ und $B_3C_3 = y_1$ wieder

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1,$$

und durch Differentiation ergibt sich wie oben

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2$$

Mit $\frac{dy_1}{dx_1} = \cotg \beta$ und $\frac{b_1}{a_1} = \cotg \alpha$ erhält man

$$\cotg \beta = \frac{x_1}{y_1} \cdot \cotg^2 \alpha \quad (88)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $B_1D_1C_1$ und $B_1A_1F_1$ folgt

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_3C_3} = \overline{B_1D_1} \cdot \frac{\overline{B_1F_1}}{\overline{B_1A_1}}$$

oder

$$y_1 = R \cdot \frac{y_2}{e}.$$

Da nun der Abstand des Punktes B von der Projektion O der Kegelspitze in allen parallel zur Kegelachse geführten Schnitten denselben Wert hat, so ist

$$x_1 = x_2.$$

Man erhält so

$$\cotg \beta = \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{e}{R} \cdot \cotg^2 \alpha. \quad (88 a)$$

und durch Vergleich mit Gleichung (87)

$$\cotg \beta = \frac{e}{R} \cdot \cotg \gamma. \quad (89)$$

Da γ und R bekannt sind, muß nur noch e bestimmt werden. Nach Fig. 125 a ist

$$e^2 = y^2 + z^2.$$

Nach der Hyperbelgleichung ist

$$\begin{aligned} y_2^2 &= b_2^2 \cdot \left(\frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right) = \frac{b_2^2}{a_2^2} \cdot (x_2^2 - a_2^2) = \cotg^2 \alpha \cdot (x_2^2 - b_2^2 \cdot \tg^2 \alpha) \\ &= x_2^2 \cdot \cotg^2 \alpha - b_2^2, \end{aligned}$$

und nach den Gleichungen (88 a) und (89)

$$\cotg^2 \alpha \cdot x_2^2 = y_2^2 \cdot \frac{\cotg^2 \gamma}{\cotg^2 \alpha}.$$

Damit folgt

$$y_2^2 = \frac{b_2^2}{\tg^2 \alpha \cdot \cotg^2 \gamma - 1} = \frac{(R+z)^2}{\tg^2 \alpha \cdot \cotg^2 \gamma - 1}. \quad (90)$$

Um z zu ermitteln, wird in Fig. 125 b durch B_2O_2 ein Schnitt E_3 senkrecht zur Lauffläche der Schiene gelegt, der die Kegelachse unter dem Winkel ε schneidet. Klappt man ihn um die Spur E_3 in die Zeichenebene um, so ergibt sich die Fig. 125 d, in der die Abrundung der Schiene in einer Ellipse geschnitten ist. Ihre Gleichung lautet

$$\frac{x_4^2}{a_4^2} + \frac{y_4^2}{b_4^2} = 1.$$

Durch Differentiation ergibt sich wieder ihre Tangentenneigung im Berührungspunkt B_4 zu

$$\frac{dy_4}{dx_4} = - \frac{x_4}{y_4} \cdot \left(\frac{r}{a_4} \right)^2.$$

Nun ist nach Fig. 125 d

$$\frac{dy_4}{dx_4} = - \tg \delta = \frac{b_2}{l} = \frac{R+z}{l}$$

und nach Fig. 125 b

$$a_4 = HJ = \frac{r}{\cos(\gamma + \varepsilon)},$$

also

$$\frac{b_2}{l} = + \frac{x_4}{y_4} \cdot \cos^2(\gamma + \varepsilon).$$

Der Ellipsengleichung wird entnommen

$$x_4 = a_4 \cdot \sqrt{1 - \frac{y_4^2}{r^2}} = \frac{r}{\cos(\gamma + \varepsilon)} \cdot \sqrt{1 - \frac{y_4^2}{r^2}},$$

und damit wird

$$\begin{aligned} \frac{R+z}{l} &= r \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) \sqrt{\frac{r^2 - y_4^2}{r^2 \cdot y_4^2}} \\ &= (\cos \gamma \cdot \cos \varepsilon - \sin \gamma \cdot \sin \varepsilon) \cdot \sqrt{\frac{r^2 - y_4^2}{y_4^2}}. \end{aligned}$$

Nun liefert Fig. 125 b

$$\sin \varepsilon = \frac{y_2}{l} \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon = \frac{x_2}{l}.$$

Setzt man hierin noch wie oben

$$x_2 = y_2 \cdot \cotg \gamma \cdot \tg^2 \alpha$$

und aus Gleichung (90)

$$y_2 = \sqrt{\frac{R+z}{\cotg^2 \gamma \cdot \tg^2 \alpha - 1}},$$

so erhält man nach einigen Umformungen

$$y_4 = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 \gamma \cdot (\tg^2 \alpha - \tg^2 \gamma)}}},$$

worin unter gewöhnlichen Umständen genau genug

$$\cos^2 \gamma \approx 1, \quad \tg^2 \gamma \approx 0$$

gesetzt werden kann.

Der Fig. 125 d entnimmt man noch $z = r - y_4$, also

$$z = r \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}\right) \approx r \cdot (1 - \sin \alpha). \quad (91)$$

Wird dieser Wert ebenso wie der von y_2 aus Gleichung (90) in die Gleichung für e^2 eingesetzt, so folgt schließlich

$$\left(\frac{e}{R}\right)^2 = \frac{1 + 2 \cdot \frac{r}{R} \cdot (1 - \sin \alpha) + \left(\frac{r}{R} \cdot \cotg \gamma \cdot \tg \alpha \cdot (1 - \sin \alpha)\right)^2}{\cotg^2 \gamma \cdot \tg^2 \alpha - 1}. \quad (92)$$

Hiermit ist der Wert von $\cotg \beta$ aus Formel (89) gegeben:

$$\cotg \beta \approx \cotg \alpha \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{r}{R} \cdot (1 - \sin \alpha) + \left(\frac{r}{R} \cdot \cotg \gamma \cdot \tg \alpha \cdot (1 - \sin \alpha)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die von der Schiene auf den Spurkranz im Punkt B ausgeübte Kraft wird zerlegt in eine axial gerichtete Seitenkraft H und eine senkrecht hierzu stehende V . Wird von der Reibung zwischen Rad und Schiene augenblicklich abgesehen, so ist nach Fig. 125 c

$$V_0 = H \cdot \tg \beta$$

Wird die Reibung berücksichtigt, so ist mit $\mu = \tg \varrho$

$$V = H \cdot \tg(\beta + \varrho). \quad (93)$$

Damit erhält man das Drehmoment der Spurkranzreibung $M_s = V \cdot e$ und die Kraft, die am Laufradumfang angreifen muß, um die Spurkranzreibung zu überwinden, ist

$$P = \frac{M_s}{R} = V \cdot \frac{e}{R}.$$

oder mit Gleichung (93) und (89)

$$P = H \cdot \operatorname{tg}(\beta + \varrho) \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta},$$

worin noch aus der ersten Gleichung des Abschnittes 8 einzusetzen ist

$$H = (Q + G) \cdot \operatorname{tg} \varrho.$$

Man erhält so, wenn beachtet wird, daß der Widerstand an zwei Rädern auftritt, also zu verdoppeln ist,

$$P = 2 \cdot (Q + G) \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta + \mu}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \mu} \cdot \frac{\mu}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (94)$$

Außerdem tritt an den Stirnflächen der Naben zweier Räder Spurlagerreibung durch die Kraft H auf.

Wird der häufigste Mittelwert $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ gewählt, also $1 - \sin \alpha = 0,5528$, ferner $\mu = 0,22$, so ergibt sich $\operatorname{tg} \beta$ und $\frac{1000 \cdot P}{Q + G}$ aus der folgenden Zusammenstellung. Die letzteren Werte sind in Fig. 126 aufgetragen.

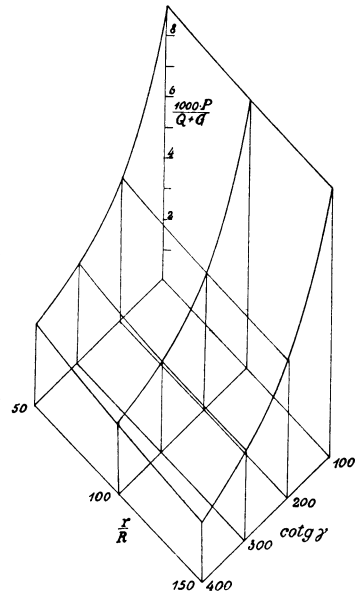


Fig. 126.

$\operatorname{cot} \gamma =$	100	200	300	400	
$\frac{R}{r} =$					
50	0,2387	0,2169	0,1914	0,1669	$\operatorname{tg} \beta$
100	0,2462	0,2388	0,2300	0,2179	
150	0,2480	0,2449	0,2401	0,2338	
$\frac{R}{r} =$					
50	8,930	4,654	3,290	2,648	$\frac{1000 \cdot P}{Q + G}$
100	8,814	4,462	3,020	2,320	
150	8,788	4,416	2,966	1,922	

Beispiel 79. Ein Laufkran habe das Eigengewicht $G = 7$ t, die Nutzlast $Q = 6,3$ t. Der Raddurchmesser sei $R = 30,0$ cm, die Abrundung der Schiene $r = 5,6$ mm, der Radstand $a = 270$ cm, der größte Spielraum zwischen Rad und Schiene $c = 4,5$ mm, der Tragzapfendurchmesser $d = 8,5$ cm, der Außendurchmesser der Buchse, gegen die sich die Radnabe stützt, $d_1 = 12,0$ cm. Anzugeben ist der größte Bewegungswiderstand des Kranes.

Seine Schiefstellung beträgt

$$\gamma = \frac{2c}{a} = \frac{2 \cdot 0,45}{270} = \frac{1}{300},$$

das Radverhältnis ist

$$\frac{r}{R} = \frac{5,6}{300} = \frac{1}{53,5}.$$

Mit der Neigung des Spurkranzes $\operatorname{tg} \alpha = 0,250$ und der Reibungsziffer $\mu = 0,22$ entnimmt man der Fig. 126

$$\frac{P_1}{Q + G} = 3,24 \text{ kg/t.}$$

also

$$P = 3,24 \cdot 13,3 = 43,2 \text{ kg.}$$

Die Spurzapfenreibung ergibt an zwei Rädern bei Belastung der angedrückten Fläche durch die Kraft $0,22 \cdot (Q + G)$ mit $\mu_2 \sim 0,06$ nach Formel (63)

$$\frac{P_2}{Q + G} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,06 \cdot 0,22 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8,5}{12}\right)^3}{1 - \left(\frac{8,5}{12}\right)^2} \cdot 1000 = 4,55 \text{ kg/t.}$$

Hierzu kommt die Tragzapfenreibung mit $\mu_3 \sim 0,06$ nach Formel (57)

$$\frac{P_3}{Q + G} = 0,06 \cdot \frac{8,5}{60} \cdot 1000 = 8,50 \text{ kg/t}$$

und schließlich der Rollwiderstand nach Formel (73) mit $f = 0,005$ cm

$$\frac{P_4}{Q + G} = \frac{0,005}{30} \cdot 1000 = 0,17 \text{ kg/t.}$$

Der Gesamtwiderstand beträgt somit

$$P = (7,0 + 6,3) \cdot (3,24 + 4,55 + 8,50 + 0,17) = 13,3 \cdot 16,46 = 219 \text{ kg.}$$

Wenn die Räder verschiedenen Durchmesser haben, so gleitet das eine oder andere auf der Schiene (S. 95), und zwar ein zu großes Rad rückwärts, ein zu kleines vorwärts. Dieses Gleiten mit der Gleitgeschwindigkeit v_0 kann bei Vorwärtsgleiten aufgefaßt werden als Rollen mit einem größeren Halbmesser R_0 auf einer Rolllinie im Abstand z_0 von der eigentlichen Gleitfläche (Fig. 127). Bei Rückwärtsgleiten ist umgekehrt $R_0 < R$. Man ermittelt den Abstand z_0 aus der Beziehung

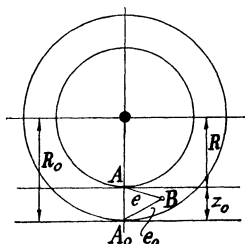


Fig. 127.

$$v_0 = \frac{v}{R} \cdot z_0, \quad (95)$$

worin v_0 die gegebene Gleitgeschwindigkeit und v die Radgeschwindigkeit am auf dem Halbmesser R rollenden Rade bedeutet.

Für den Berührungspunkt B zwischen Spurkranz und Schiene gilt jetzt alles obige, wenn ausgegangen wird von der Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{R_0}{e_0} \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

worin nach Fig. 127 eingesetzt wird

$$e_0^2 = y_2^2 + (z_0 - z)^2.$$

Man erhält so

$$\cotg \beta_0 \sim \frac{\cotg \alpha}{1 \pm \frac{z_0}{R}} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z_0}{R} \cdot \frac{\tg \alpha}{\tg \gamma} \right)^2 + 2 \cdot \frac{r}{R} \cdot (1 - \sin \alpha) \right. \\ \left. \left[1 \pm \frac{z_0}{R} \cdot \left(\frac{\tg \alpha}{\tg \gamma} \right)^2 \right] + \left(\frac{r}{R} \cdot (1 - \sin \alpha) \cdot \frac{\tg \alpha}{\tg \gamma} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (96)$$

Das obere Vorzeichen gilt für ein zu kleines Rad, das untere für ein zu großes. Die Formel (94) gilt im übrigen unverändert. Man bemerkt, daß unter gewöhnlichen Verhältnissen das geringe Gleiten eines Rades von ganz nebensächlichem Einfluß auf P ist.

Ist die Hohlkehle des Rades größer als die der Schiene, so ändern sich die Verhältnisse dahin, daß das Rad bei der Verschiebung auf der

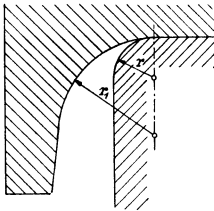


Fig. 128.

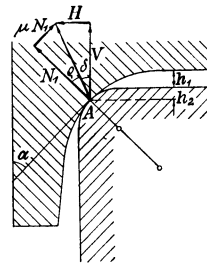


Fig. 129.

Schiene sehr bald in eine Stellung kommt, wo es sich von der eigentlichen Lauffläche der Schiene abhebt. Die betreffende Grenzlage ist in Fig. 128 dargestellt, und es steigt dann auf der Schiene um einen Betrag h_1 bis in die durch Fig. 129 veranschaulichte Grenzlage⁸⁷⁾.

Da sich der Radhalbmesser von R auf $R + h_1 + h_2$ vergrößert, so muß das Rad unter allen Umständen auf der Schiene in der Bewegungsrichtung gleiten. Infolgedessen verringert sich die Reibungsziffer senkrecht zu dieser Richtung ganz bedeutend, schätzungsweise von $\mu = 0,22$ auf $\mu' = 0,11$, und das Rad rutscht somit in eine zweite Grenzlage mit kleinerem h_1 .

In Fig. 129 bedeutet V_1 die Belastung des fraglichen Rades 1 und H den Seitenschub, der durch die Reibung der drei anderen Räder ausgeübt wird:

$$H = \mu \cdot (V_2 + V_3 + V_4) = \mu \cdot (Q + G - V_1).$$

Das ruhende Eigengewicht des Kranes verteilt sich gleichmäßig über die vier Räder, das der Laufkatze wird mit dem der Last zusammengenommen. Für eine beliebige Stellung der Last auf der Spannweite b des Kranes, im Abstände x vom betrachteten Rad, ist dann genau genug (vgl. Bd. I S. 69)

$$V_1 = \frac{G}{4} + \frac{Q}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{b} \right).$$

Hiermit ergibt sich nach Fig. 129

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{H}{V_1} = \mu \cdot \frac{\frac{3}{4} G + \frac{Q}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{b}\right)}{\frac{1}{4} G + \frac{Q}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)}.$$

Nun ist nach Fig. 129

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\delta + \varrho),$$

also

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \varrho}{1 - \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varrho}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\mu \cdot (Q + G)}{\frac{G}{4} \cdot (1 - 3\mu^2) + \frac{Q}{2} \cdot (1 - \mu^2) - \frac{Q}{2} \cdot \frac{x}{b} (1 + \mu^2)} \quad (97)$$

Der Grenzwinkel α ist hiernach außer von der Reibungsziffer noch von der Laststellung abhängig.

Die betreffende Stelle der Hohlkehle kann nun als ein kleines Stück eines Kegelmantels aufgefaßt werden, so daß im übrigen die Beziehungen der vorhergehenden Entwicklung gelten.

Beispiel 80. Für den in Beispiel 79 untersuchten Laufkran werde der Bewegungswiderstand berechnet unter Annahme einer Hohlkehle vom Halbmesser $r_1 = 6,5$ mm. Das Katzensgewicht ist in die Nutzlast Q einbezogen.

Mit den gegebenen Zahlenwerten $G = 7$ t und $Q = 6,3$ t, $\mu = 0,22$ bzw. $\mu' = 0,11$ erhält man aus Formel (97) die untenstehenden Beträge von $\operatorname{cotg} \alpha$.

Hiermit ergibt sich $1 - \sin \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$. Mit $\frac{r}{R} = \frac{1}{53,5}$ und $\gamma = \frac{1}{300}$

$\frac{x}{b} =$	0,1	0,5	0,9	μ
$\operatorname{cotg} \alpha$	0,6064 0,2665	0,4762 0,2133	0,3919 0,1779	0,22 0,11
$1 - \sin \alpha$	0,1443 0,0339	0,0972 0,0218	0,0687 0,0158	0,22 0,11
$\operatorname{cotg} \beta$	1,0123 0,3083	0,7250 0,2459	0,5494 0,1987	0,22 0,11
P_1 kg	30,48 15,68	32,50 18,12	36,58 22,34	0,22 0,11
P_2 kg	39,67 19,84	44,02 22,01	51,16 25,58	0,22 0,11
$P_3 + P_4$ kg	115,31	115,31	115,31	—
P kg	185,5 150,8	191,8 155,4	203,0 162,3	0,22 0,11

wie in Beispiel 79 liefert Formel (92) die eingetragenen Werte von $\cotg \beta$. Auch hier braucht das Gleiten noch nicht berücksichtigt zu werden. Damit folgt aus Formel (94) der auf den Radumfang bezogene Spurkranzwiderstand P_1 . Nachdem H aus dem Zähler der Gleichung für $\tg \delta$ berechnet ist, erhält man den Widerstand der Nabenreibung der beiden anliegenden Räder zu P_2 . Die beiden weiteren Widerstände P_3 und P_4 ergeben sich aus Beispiel 79.

Je nach der Katzenstellung schwankt also der Bewegungswiderstand P in kurzen Zeitabschnitten zwischen den Endwerten der Zusammenstellung. Die Anordnung der Hohlkehle verringert also den Spurkranzwiderstand zum Teil erheblich; freilich geht der Gesamtwiderstand nur um $7 \div 15$ v. H. zurück.

Beispiel 81. Die Abrundung einer Eisenbahnschiene beträgt $r = 14$ mm, die Hohlkehle der Eisenbahnwagenräder in neuem Zustand $r_1 = 15$ mm, der Halbmesser der Räder $R \approx 500$ mm. Zu berechnen ist der Fahrwiderstand eines Wagens vom Eigengewicht G und der Nutzlast Q .

Nach Formel (97) ist beim Anfahren mit $\mu = 0,24$ (S. 29) und $x = \frac{1}{2} b$

$$\cotg \alpha = \frac{0,24 \cdot (8,3 + 15,0)}{\frac{8,3}{4} \cdot (1 - 3 \cdot 0,24^2) + \frac{15,0}{2} \cdot (1 - 0,24^2) - \frac{15,0}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,24^2)} = 1,1825.$$

Hieraus folgt

$$1 - \sin \alpha = 0,3545$$

$$\text{und nach Formel (89) mit } \frac{R}{r} = 35,7 \text{ und } \tg \gamma \approx \frac{1}{300}$$

$$\cotg \beta = 1,1825 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot 0,3543}{35,7} + \left(\frac{300 \cdot 0,3543}{35,7 \cdot 1,1825} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

also $\tg \beta = 0,6615$.

Nun ist nach Formel (94) der Spurkranzwiderstand einer Achse

$$\frac{1000 \cdot P_1}{Q + G} = \frac{1000 \cdot 0,24 \cdot 0,9015}{300 \cdot 0,6615 \cdot 0,8413} \approx 1,30 \text{ kg/t.}$$

Hierzu tritt die Spurzapfenreibung am Hals des Tragzapfens hervorgerufen durch die Kraft $H = \mu_1 \cdot (Q + G)$. Mit der Zapfenreibungsziffer $\mu_1 = 0,054$ bei längerem Stehen des Wagens bzw. $\mu'_1 \approx \frac{1}{2} \mu_1$, wenn das Anfahren wieder kurz nach dem Stillsetzen erfolgt, erhält man mit $d = 9,5$ cm und $d_1 = 12,5$ cm nach Formel (63)

$$\frac{1000 \cdot P_2}{Q + G} = \frac{1000}{3} \cdot \left\{ \begin{matrix} 0,054 \\ 0,027 \end{matrix} \right\} \cdot 0,24 \cdot \frac{12,5}{50} \cdot \frac{1 - \left(\frac{9,5}{12,5} \right)^3}{1 - \left(\frac{9,5}{12,5} \right)^2} = \left\{ \begin{matrix} 1,43 \\ 0,72 \end{matrix} \right\} \text{ kg/t.}$$

Weiter tritt hinzu die Tragzapfenreibung mit $\mu_2 = 0,054$ beim Anfahren nach längerem Stehen bzw. $\mu_2 = 0,027$ bei alsbaldigem Wiederaanfahren nach Formel (57)

$$\frac{1000 \cdot P_3}{Q + G} = \frac{0,054}{0,027} \cdot \frac{9,5}{100} = \left\{ \begin{matrix} 5,13 \\ 2,57 \end{matrix} \right\} \text{ kg/t.}$$

und schließlich der Rollwiderstand nach Formel (73) mit $f = 0,005$ cm

$$\frac{1000 \cdot P_4}{Q + G} = \frac{0,005}{50} \cdot 1000 = 0,10 \text{ kg/t.}$$

Alle Zahlenwerte gelten für eine Achse. Bei dem zweiachsigen Güterwagen ist demnach, da beide Achsen die gleiche oder entgegengesetzte Stellung haben können,

$$\frac{1000 \cdot P'}{Q + G} = 2 \cdot (1,30 + 1,43 + 5,13 + 0,10) \sim 15,9 \text{ kg/t}$$

bzw.

$$= 2 \cdot (1,30 + 0,72 + 2,57 + 0,10) \sim 9,4 \text{ kg/t.}$$

Steht nur eine Achse schief, so ergibt eine entsprechende Addition

$$\frac{1000 \cdot P''}{Q + G} = 1,30 + 1,43 + 2 \cdot (5,13 + 1,00) \sim 13,2 \text{ kg/t.}$$

bzw.

$$= 1,30 + 0,72 + 2 \cdot (2,57 + 0,10) \sim 7,4 \text{ kg/t.}$$

und wenn beide Achsen nicht mit den Spurkränzen anlaufen

$$\frac{1000 \cdot P'''}{Q + G} = 10,5 \text{ bzw. } 5,3 \text{ kg/t.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Achsen mit den Spurkränzen anlaufen, ist nun $\frac{4}{9}$, die, daß nur ein Spurkranz anläuft, ebenfalls $\frac{4}{9}$ und die, daß beide frei sind, $\frac{1}{9}$. Messungsergebnisse müssen also je nach den Umständen zwischen den angegebenen Werten streuen. Der Mittelwert wird erhalten, wenn jeder einzelne Betrag so oft eingesetzt wird, wie er wahrscheinlich ist. Man erhält so für den zweiachsigen Wagen

$$\frac{1000 \cdot P}{Q + G} \sim 14,1 \text{ bzw. } 8,1 \text{ kg/t.}$$

Für einen dreiachsigen Wagen erhält man unter sonst gleichen Verhältnissen den Gesamtwiderstand

$\frac{1000 \cdot P}{Q + G} = 23,85$	21,15	18,45	15,75 kg/t.
bzw. = 14,10	12,05	12,10	8,90 „
Wahrscheinlichkeit	8	12	6
	$\frac{27}{27}$	$\frac{27}{27}$	$\frac{1}{27}$

also Mittelwert 21,3 bzw. 12,6 kg/t. Gemessen wurde im ersteren Fall der Mittelwert 21,2 kg/t⁹³⁾.

Nach längerem Stehen ist der Anfahrwiderstand eines einzelnen Wagens hiernach i. M. das 1,72fache wie beim Wiederanfahren nach 2 bis 3 Minuten Aufenthalt. Die Messungen ergeben i. M. das 1,8fache, so daß μ'_1 bzw. μ'_2 oben etwas zu hoch gerechnet sind. Der Höchstwert des Anfahrwiderstandes wird bereits nach etwa 12 bis 15 Minuten Stehen erreicht.

Der Anfahrwiderstand in kg/t eines Zuges von mehr als 8 Wagen ist nur das 0,55fache des eines einzelnen Wagens⁹³⁾, weil dann der Einfluß der schiefstehenden Achsen nicht mehr so in den Vordergrund tritt und sich die Wagen anscheinend durch Vermittlung der Puffer gegenseitig geradstellen.

Bei nur zwei Wagen gilt schon der Faktor 0,65.

Der Fahrtwiderstand eines regelspurigen Eisenbahnzuges ist im wesentlichen abhängig von den oben berechneten Widerständen und dazu dem Luftwiderstand, der einerseits wieder von dem mittleren, nur in Betracht kommenden Anteil der Stirnflächen der Wagen und dem Quadrat der Fahrtgeschwindigkeit abhängt.

⁹³⁾ v. Glinski, Z. d. V. d. I. 1912.

Bezeichnet

Q das mittlere Gewicht eines besetzten bzw. beladenen Wagens,

für vierachsige Durchgangswagen	$Q \sim 44$	t,
„ „ „ Abteilwagen	$Q \sim 37$	„
„ dreiachsige „ „	$Q \sim 23$	„
„ zweiachsige offene Güterwagen, voll	$Q \sim 24$	„
„ „ „ „ „ leer	$Q \sim 8$	„
„ „ „ „ „ halbvoll	$Q \sim 19$	„
„ „ „ „ „ leer	$Q \sim 10,4$	„

F_m die mittlere in Betracht kommende Stirnfläche eines Wagens,

für vierachsige Personenwagen	$0,52 \cdot F_m \sim 1,0$	m ² ,
„ dreiachsige „ „	$0,52 \cdot F_m \sim 0,75$	„
„ gedeckte Güterwagen	$0,52 \cdot F_m \sim 0,75$	„
„ offene zweiachsige Güterwagen, leer	$0,52 \cdot F_m \sim 1,0$	„
„ „ „ „ „ voll	$0,52 \cdot F_m \sim 0,6$	„

V die Fahrtgeschwindigkeit in km/st,

so gilt⁹⁴⁾ für den Widerstand eines Wagens im Beharrungszustand

$$w_0 = 2,5 + \frac{0,52 \cdot F_m}{Q} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2 \text{ kg/t.} \tag{98}$$

Bei einer Neigung der Strecke von $\pm \text{tg } \alpha$ ist dieser Wert zu w_0 zu addieren.

Bei starkem Seitenwind ist nach den Versuchsergebnissen⁹⁴⁾ V um 23 km/st zu erhöhen, bei mittlerem Wind schräg von vorn ist V um 10 bis 20 km/st zu erhöhen, je nach der Windstärke, über die nähere Angaben nicht gemacht werden.

Beispiel 82. Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man aus Formel (98) den Wagenwiderstand⁹⁴⁾ bei

D-Zügen	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{44} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	kg/t,
Eilzügen	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{37} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	„
Personenzügen	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	„
schweren Kohlen-Güterzügen . . .	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	„
gewöhnlichen Güterzügen, die Hälfte der Wagen offen, die Hälfte gedeckt, die Hälfte leer, die Hälfte voll:	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	kgst
Eilgüterzügen aus halbbeladenen gedeckten Wagen:	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	„
Leerzügen aus offenen Wagen . .	$w_0 = 2,5 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2$	„

Vorausgesetzt ist Windstille und ebene, kurvenfreie Strecke.

⁹⁴⁾ Strahl, Z. d. V. d. I. 1913; eine eingehende Kritik der verschiedenen Widerstandsformeln bringt v. Gliński, Glasers Annalen 1918.

In Krümmungen des Gleises werden die Wagen von der Mittelkraft aus dem Zug des vorhergehenden und des folgenden Wagens an die innere Schiene herangedrückt. Die so entstehende Spurkranzreibung erhöht den Widerstand ganz wesentlich. Er hängt von einer Reihe von Umständen ab⁹⁵⁾, deren Verfolgung recht umständlich ist. Bei zwei- und dreiachsigen Wagen auf einer Krümmung vom Halbmesser R m ist als mit den Versuchsergebnissen übereinstimmender Mittelwert anzusetzen⁹⁶⁾

$$w_k = \frac{650}{R - 50} \text{ kg/t.} \quad (99)$$

Dabei ist eine gewisse Erweiterung des Schienenabstandes s in der Krümmung vorzunehmen, um ein Klemmen der Spurkränze zu vermeiden. Wenn ein Wagen langsam in eine Kurve einfährt, läuft die Vorderachse in ihrem Spurkranz gegen die äußere Schiene und die Hinterachse stellt sich radial ein, wie Fig. 130 angibt.

Ist s die Spurweite, bei Vollbahnen 1435 mm,

s_1 der Spielraum, den die Spurkränze einer Achse auf gerader Strecke haben, bei Vollbahnen 10 bis 25 mm,

s_2 die Spurerweiterung in der Kurve, bei Vollbahnen 0 bis 30 mm,

so ist der Fig. 130 der Anlaufwinkel δ der Vorderachse zu entnehmen:

$$\text{tg } \delta = \frac{a}{R + \frac{s}{2} - s_1} \approx \frac{a}{R}.$$

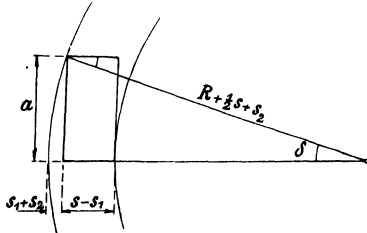


Fig. 130.

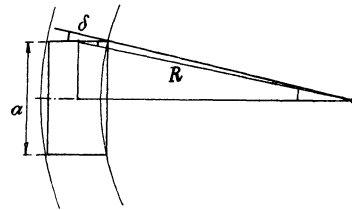


Fig. 131.

Bei schnellerem Durchfahren stellt sich der Wagen bald derart ein, daß Vorder- und Hinterrad mit ihren Spurkränzen an der inneren Schiene anliegen, wie Fig. 131 darstellt. Er hat sich gegenüber der Stellung der Fig. 130 um den

kleinen Winkel $\frac{s_1 + s_2}{a}$ gedreht. Man erhält jetzt den Anlaufwinkel nach dem

Satz vom Außenwinkel als Summe dieses und des Winkels $\frac{1}{2} \frac{a}{R}$ zu

$$\delta \sim \text{tg } \delta = \frac{1}{2} \frac{a}{R} + \frac{s_1 + s_2}{a}.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für $\text{tg } \delta$ ergibt sich die erforderliche Spurerweiterung⁹⁷⁾

$$s_2 = \frac{a^2}{2R} - s_1. \quad (100)$$

⁹⁵⁾ Boedecker, Z. d. B. 1915/16.

⁹⁶⁾ v. Röckl, Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnw. 1881.

⁹⁷⁾ v. Helmholtz, Z. d. V. d. I. 1906.

Getrennt vom Wagenwiderstand ist der der Lokomotive und des Tenders zu behandeln⁹⁸⁾. Bezeichnet

G_1 das auf die nicht gekuppelten Achsen von Lokomotive und Tender entfallende Gewicht in t,

G_2 das auf die gekuppelten Achsen entfallende,

$G = G_1 + G_2$ das Gesamtgewicht von Lokomotive und Tender,

F die Querprojektionsfläche der Lokomotive in m²,

so kann G_1 wie das Wagengewicht behandelt werden. Der Luftwiderstand ist um 10 v. H. größer als der Fläche F entspricht⁹⁹⁾, weil noch hinter der ersten Fläche liegende Teile mitwirken. Man erhält so⁹⁴⁾

$$w_1 = 2,5 \cdot \frac{G_1}{G} + c \cdot \frac{G_2}{G} + \frac{0,6 \cdot F}{G} \cdot \left(\frac{V}{10}\right)^2 \text{ kg/t.} \quad (101)$$

Hierin ist einzusetzen für Lokomotiven mit zwei Dampfzylindern bei

2 gekuppelten Achsen	$c \approx 5,8$ kg/t,
3 „ „	$c \approx 7,3$ „
4 „ „	$c \approx 8,4$ „
5 „ „	$c \approx 9,3$ „

Bei Lokomotiven mit 4 Dampfzylindern sind diese Werte um 0,2 zu erhöhen. Bei den heutigen großen Lokomotiven ist $F \approx 10$ m².

Starker Seitenwind erhöht den Widerstand so, daß V um 18 km/st erhöht werden muß. Der Unterschied von 5 km/st gegenüber den Wagen erklärt sich dadurch, daß der zwischen die einzelnen Wagen tretende Seitenwind den Widerstand durch den auf die Stirnfläche jedes Wagens ausgeübten Druck erhöht, was bei der Lokomotive fortfällt.

Bei Feldbahnen verschwindet naturgemäß das $\left(\frac{V}{10}\right)^2$ enthaltende Glied, und es ist¹⁰⁰⁾ für die Spurweite von 60 cm der Widerstand der Wagen vom Eigengewicht $G \approx 2,15$ t und der Tragfähigkeit $Q = 5,0$ t

$$w_0 = 3 \text{ kg/t,} \quad (102 \text{ a})$$

derjenige der Tenderlokomotive von $G \approx 12$ t Dienstgewicht

$$w_1 = 1,2 \text{ kg/t.} \quad (102 \text{ b})$$

Der Krümmungswiderstand beträgt^{100a)}

$$\begin{aligned} \text{bei 60 cm Spurweite: } w_k &= \frac{200}{R - 5} \text{ kg/t,} \\ \text{„ 75 „ „ } w_k &= \frac{350}{R - 10} \text{ „ „} \\ \text{„ 90 „ „ } w_k &= \frac{380}{R - 17} \text{ „ „} \\ \text{„ 100 „ „ } w_k &= \frac{400}{R - 20} \text{ „ „} \end{aligned} \quad (103)$$

⁹⁸⁾ Sanzin, Z. d. V. d. I. 1911.

⁹⁹⁾ Frank, Z. d. V. d. I. 1903/07.

¹⁰⁰⁾ Blum, Z. d. V. d. I. 1919.

^{100a)} Hanomag-Nachrichten 1921.

Beispiel 83. Zu berechnen ist die Anzahl i der gedeckten Wagen, die die in Beispiel 29 angegebene $3/4$ gekuppelte Güterzuglokomotive, deren Tender das Dienstgewicht 30 t hat, als Eilgüterzug mit $V = 55$ km/st auf einer Strecke mit der durchschnittlichen Steigung $\text{tg } \alpha = \frac{1}{100}$ gerade befördern kann.

Nach Beispiel 29 ist die größte Zugkraft der Lokomotive auf wagerechten, feuchten Schienen bei der verlangten Geschwindigkeit etwa $P = 2600$ kg. Ferner ist die Belastung der nicht gekuppelten Achsen $G_1 = 10,2 + 30 = 42,0$ t, die Belastung der gekuppelten Achsen $G_2 = 41,8$ t, das Gewicht eines Wagens im Durchschnitt $G_0 = 19$ t, der Zahlenwert $c = 7,3$ kg/t. Um mittleren Wind zu berücksichtigen, wird V um 10 km/st erhöht.

Durch Zusammennehmen der entsprechenden Formel aus Beispiel 82 und der Formel (101) erhält man so

$$P = G_1 \cdot (2,5 + \text{tg } \alpha) + G_2 \cdot (c + \text{tg } \alpha) + 6 \cdot \left(\frac{V + 10}{10} \right)^2 + i \cdot G_0 \cdot \left[2,5 + \text{tg } \alpha + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{V + 10}{10} \right)^2 \right].$$

Hieraus folgt mit den obigen Zahlenwerten

$$i = \frac{2600 - 40,2 \cdot 2,51 - 41,8 \cdot 7,31 - 6 \cdot 6,5^2}{19 \cdot 4,20} \approx 24.$$

Die Strecke enthalte mehrere Krümmungen von $R = 320$ m Halbmesser, dann verringert sich am Ende der Krümmung die Fahrtgeschwindigkeit ganz erheblich. Die dafür zutreffende Zugkraft der Lokomotive wird vorläufig auf $P' = 2900$ kg geschätzt und dann die obige Gleichung nach $\left(\frac{V' + 10}{10} \right)^2$ aufgelöst. Mit dem zu $w_0 + \text{tg } \alpha$ hinzutretenden Summanden $w_k = \frac{650}{270} = 2,41$ und, wenn nur mit $i' = 20$ Wagen gerechnet wird, folgt

$$\left(\frac{V' + 10}{10} \right)^2 = \frac{2900 - 40,2 \cdot 4,92 - 41,8 \cdot 9,72 - 20 \cdot 19 \cdot 4,92}{6 + \frac{20 \cdot 19}{25}},$$

also

$$\frac{V' + 10}{10} = \sqrt{\frac{2900 - 198 - 406 - 1870}{6 + 15,2}} = 3,41,$$

mithin

$$V' = 24 \text{ km/st,}$$

wofür die geschätzte Zugkraft etwa zutrifft.

9. Die Kugel- und Rollenlager.

Ein Kugellager zur Aufnahme einer senkrecht zur Wellenachse wirkenden Kraft P (Traglager) besteht gewöhnlich aus einem auf die Welle aufgesetzten Laufring vom Halbmesser r , einem in den Lagerkörper eingesetzten Laufring vom Halbmesser R und einer Anzahl bis auf $1/500$ mm übereinstimmender Kugeln vom Halbmesser r_1 (Fig. 132 und 134). Die Kugeln und Laufringe sind sorgfältig geschliffen und gehärtet.

Ist z die Gesamtzahl der im Ringe befindlichen Kugeln, so gilt nach Fig. 132

$$P = N_0 + 2N_1 \cdot \cos \alpha + 2N_2 \cdot \cos 2\alpha + \dots + 2N_n \cdot \cos n\alpha,$$

worin $n \cdot \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist oder, da $z \cdot \alpha = 2\pi$ ist, $n < \frac{1}{4}z$.

Bezeichnet δ die Zusammendrückung einer Kugel, die sie unter den beiden Kräften N von seiten der Laufringe erfährt, so ist die Zusammendrückung δ_0 der von N_0 beanspruchten Kugel am größten, die Beanspruchung wird mit steigendem Winkel $n \cdot \alpha$ immer kleiner und erreicht den Wert 0 für $n \cdot \alpha \sim \frac{\pi}{2}$. Der einfachste Zusammenhang, der diese Änderung ausdrückt, ist

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_0 \cdot \cos \alpha, \\ \delta_2 &= \delta_0 \cdot \cos 2\alpha \dots, \end{aligned}$$

Nun ist unter sonst gleichen Umständen¹⁰¹⁾

$$\frac{N^2}{\delta^3} = \frac{N_0^2}{\delta_0^3} = c,$$

mithin

$$N_1 = N_0 \cdot \cos^3 \alpha, \quad N_2 = N_0 \cdot \cos^3 2\alpha \dots$$

also¹⁰²⁾

$$P = N_0 \cdot (1 + 2\cos^3 \alpha + 2\cos^3 2\alpha + \dots + 2\cos^3 n\alpha) \quad (104)$$

Rechnet man den Klammerausdruck für verschiedene Kugelzahlen z aus, so ergibt sich innerhalb der Grenzen $10 > z > 26$

$$\frac{P}{N_0} \sim \frac{z}{4,37}.$$

Vorausgesetzt ist, daß die Laufringe unter dem Kugeldruck keine Verbiegungen erfahren. Wird doch mit einer kleinen Verbiegung der Ringe, besonders des Lagerringes gerechnet, so dürfte innerhalb der angegebenen Grenzen

$$N_0 = \frac{5 \cdot P}{z} \quad (105)$$

die größte vorkommende Kugelbelastung¹⁰²⁾ sein.

Bei den gebräuchlichen gehärteten Stahlkugeln ist auf ebener gehärteter Lauffläche die größte Belastung, bei der die Kugeln vom Durchmesser $d = 2r_1$ cm noch hinreichend elastisch bleiben und jedenfalls durch den Druck noch keine Haarrisse erhalten, bestimmt durch

$$\frac{N_0}{d^2} = k \text{ kg/cm}^2 \quad (106)$$

mit $k = 480 \text{ at}^{103)}$.

¹⁰¹⁾ Hertz, Crelles Journ. f. Math. 1882. Föppl, Vorlesungen über techn. Mechanik, 1897.

¹⁰²⁾ Stribeck, Z. d. V. d. I. 1901.

¹⁰³⁾ Stribeck, Schimming, Z. d. V. d. I. 1901.

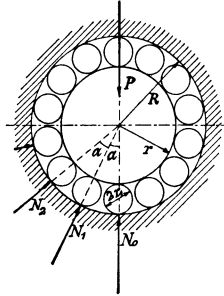


Fig. 132.

Im allgemeinen bleibt man mit Rücksicht auf einen einwandfreien Dauerbetrieb wesentlich darunter. Bei ebenen oder kegelförmigen Laufringen gilt als zulässig $k = 40$ at.

Bei Laufringen, deren Krümmungshalbmesser senkrecht zur Laufrichtung der Kugeln (Fig. 133) $r_2 = \frac{2}{3} d$ ist, beträgt $k = 100$ at.

Bei dem als am vorteilhaftesten erkannten Wert ¹⁰⁵⁾

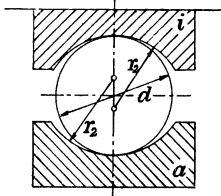


Fig. 133.

$$r_2 = 0,563 d \text{ am äußeren Laufring}$$

$$r_2 = 0,521 d \text{ „ inneren „}$$

ist $k = 150$ at.

Je besser sich der Laufring der Kugelkrümmung anschließt, desto stärker können die Kugeln beansprucht werden. Bei den zuletzt angegebenen Werten von r_2 liegen die Seiten der Kugeln noch gerade so weit frei, daß dort keine hinderliche Reibung auftritt.

Kugellager sind immer für die größtmögliche Belastung zu berechnen, also bei Riementrieben für die der ersten Betriebsanspannung des Riemens entsprechende Belastung. Bei Zahnrädern rechnet man mit Belastungsschwankungen, die das Dreifache des normalen Zahndruckes betragen ¹⁰⁴⁾.

Beispiel 84. Für eine Welle von $d_0 = 7$ cm Durchmesser und für die Belastung $2P = 4000$ kg soll ein aus zwei Kugelringen bestehendes Kugellager berechnet werden.

Die Verbindung der Gleichungen (105) und (106) ergibt bei der günstigsten Form der Ringe

$$150 \cdot d^2 = \frac{5 \cdot P}{z}$$

oder

$$d^2 \cdot z = \frac{5 \cdot P}{150} = \frac{5 \cdot 2000}{150} = 66,7 \text{ cm}^2.$$

Wählt man jetzt

$$d = \frac{3}{4}'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{7}{8}'' \quad \text{bzw.} \quad 1''$$

— die Kugeldurchmesser werden immer in $\frac{1}{8}''$ angegeben —, so folgt

$$z = \frac{66,7}{1,905^2} = 18 \quad \text{bzw.} \quad \frac{66,7}{2,2225^2} = 14 \quad \text{bzw.} \quad \frac{66,7}{2,540^2} = 10.$$

Den Durchmesser $2r$ eines Laufringes kann man zu 82 mm annehmen, dann wird der Durchmesser des Kreises der Kugelmitten

$$2r' = 101 \quad \text{bzw.} \quad 104 \quad \text{bzw.} \quad 107,5 \text{ mm}$$

und man erhält als Kugeldurchmesser

$$d = \frac{2\pi r'}{z} = 17,65 \quad \text{bzw.} \quad 23,35 \quad \text{bzw.} \quad 33,75 \text{ mm.}$$

Der erste Betrag ist zu klein und scheidet aus, der zweite läßt noch rund 1 mm Spiel zwischen den Kugeln, der dritte Wert ist zu nehmen, wenn die Kugeln durch einen Käfig geführt werden sollen.

Der Grund für die Anordnung von etwas nachgiebigen Kugelkäfigen ¹⁰⁵⁾ ist der folgende: Verbiegt sich die Achse etwas, so daß sich der innere Laufring

¹⁰⁴⁾ Gaertner, D. p. J. 1918.

¹⁰⁵⁾ Brühl, 1901, veröffentlicht Z. d. V. d. I. 1909.

um den Winkel β schief stellt, so laufen die in der Ebene des Winkels β liegenden Kugeln nach Fig. 134 auf einem Halbmesser $r'' > r$, dagegen die in der dazu senkrecht gelegenen Ebene auf dem unveränderten Halbmesser r . Für irgendwelche dazwischen befindliche Kugeln liegt dieser Halbmesser zwischen den beiden Grenzwerten r und r'' . Da sich nun der innere Lauftring mit der Welle mitdreht, so bewegen sich die auf dem größeren Kreis rollenden Kugeln schneller als die auf dem normalen Lauftringhalbmesser befindlichen und laufen so auf die davorstehenden auf, was auf die Dauer zu erheblichen Beschädigungen der Kugeln führt und, da die Kugeln mit ziemlichem Druck gegeneinander gepreßt werden, starke Reibung und infolgedessen Warmlaufen des Lagers mit sich bringt. Aus der Fig. 134 geht ohne weiteres hervor, daß r'' um so größer gegenüber r wird, je größer der Kugelhalbdurchmesser d , der Krümmungshalbmesser r_2 der Laufringe und je kleiner überhaupt r ist.

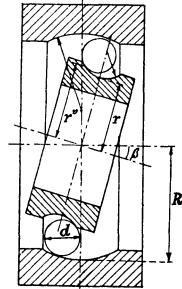


Fig. 134.

Das Drehmoment des Rollwiderstandes beträgt nach Formel (79) mit den Bezeichnungen der Fig. 132

$$M = Q \cdot f \cdot \left(1 + \frac{r}{r_1} + 1 + \frac{r_1}{R} \right),$$

worin $f \approx 0,0067$ mm der Hebelarm des Rollwiderstandes bei der größten zulässigen Belastung der Kugeln ist¹⁰⁶) und $Q = N_0 + 2 N_1 + 2 N_2 + \dots + 2 N_n$ die Gesamtbelastung aller tragenden Kugeln. Für $10 < z < 20$ ist¹⁰²) $Q = 1,22 \cdot P$, und man erhält

$$M = 1,22 \cdot P \cdot f \cdot \frac{2 r_1 + r + \frac{r_1^2}{R}}{r_1}$$

oder mit dem obigen Zahlenwert von f

$$M = 0,000815 \cdot P \cdot \left(\frac{R}{r_1} + \frac{r_1}{R} \right) \text{ cmkg} \quad (107)$$

unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit der Welle, also auch beim Anlaufen.

Bei einer kleineren Belastung P' des Lagers ist, wie die Versuche¹⁰⁷) ergeben,

$$f' = f \cdot \sqrt[2,5]{\frac{P}{P'}}, \quad (108)$$

also größer als bei der Regelbelastung. Erhöht sich die Belastung über die letztere hinaus, so steigt f wieder an und zwar nahezu ebenso wie es bei Verkleinerung von P zunimmt¹⁰⁷). Das rührt davon her, daß bei der Regelbelastung gerade die den mathematischen Berührungspunkt umgebenden Teile der Kugel eine besonders starke Zusammen-

¹⁰⁶) Der größere Wert bei Stribeck ist durch Einsetzen eines fehlerhaften Betrages von $\frac{R}{r_1}$ entstanden.

¹⁰⁷) Heß, American Maschinist 1909.

drückung erfahren, so daß der Hebelarm f sich dem gegenüber dem Fall geringerer Belastung etwas verkürzt; bei weiterem Ansteigen der Belastung werden aber auch die weiter nach außen liegenden Teile der Druckstelle zusammengepreßt und f vergrößert sich deshalb wieder.

Beispiel 85. Anzugeben ist das widerstehende Moment des in Beispiel 84 berechneten Kugellagers.

Man erhält aus Formel (107)

$$M = 2 \cdot 0,000815 \cdot 2000 \cdot \left(\frac{107 + 25,4}{25,4} + \frac{25,4}{132,4} \right) \approx 17,6 \text{ cmkg.}$$

Bei halber Belastung erhöht sich nach Formel (108) das Moment um das $\sqrt[2,5]{2} = 1,32$ fache und bei 1,5facher Überlastung um denselben Betrag.

Wird das Lager etwa nach Fig. 135 ausgeführt, so zerlegt sich die Belastung $\frac{P}{2}$ jedes Laufringes gemäß Fig. 136 in eine wagerechte H , die sich gegenseitig aufheben und eine senkrecht zur Kugelfläche gerichtete $N = \frac{\frac{1}{2}P}{\cos \alpha}$. Die Kugeln laufen jetzt aber in der geneigten Ebene auf den Halbmessern $\frac{r}{\cos \alpha}$ bzw. $\frac{R}{\cos \alpha}$. Damit ergibt sich das widerstehende Moment bei Vollbelastung zu

$$M_1 = 0,000815 \cdot P \cdot \left(\frac{R}{r_1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{r_1}{R} \right). \quad (107a)$$

Für $\alpha = 30^\circ$, also $\cos \alpha = 0,866$, wird hiernach bei sonst gleichen Abmessungen wie oben $M_1 = 23,0$ cmkg, rund 30 v.H. höher.

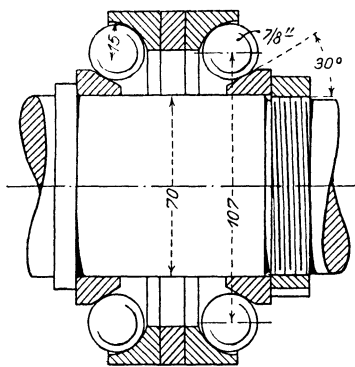


Fig. 135.

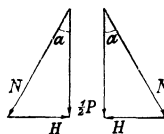


Fig. 136.

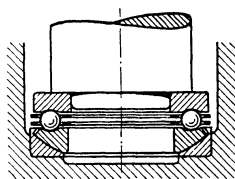


Fig. 137.

Stützkugellager werden entsprechend den Tragkugellagern ausgebildet (Fig. 137). Damit alle Kugeln gleichmäßig tragen, muß der festliegende Kugellager außen kugelförmig geschliffen werden. Die Kugeln brauchen einen Kugellagerkäfig, da sie ineinander laufen, sowie die beiden Laufringe nicht genau zentrisch zueinander stehen¹⁰⁸). Wird die stehende Welle gleichzeitig durch ein Halskugellager geführt, so muß

¹⁰⁸) Szambathy, D. p. J. 1912.

der Mittelpunkt der Wölbung der Unterlagerplatte mit der Mitte des Halslagers zusammenfallen¹⁰⁸).

Für die Belastung P kg gilt bei z Kugeln von d cm Durchmesser

$$P = z \cdot d^2 \cdot k. \quad (109)$$

Bei schnellaufenden Wellen werden nun die Kugeln durch die Schleuderkraft etwas nach außen gedrängt und arbeiten infolgedessen nicht ausschließlich rollend. Um den Verschleiß durch die eintretende Reibung klein zu halten, wird die zulässige Beanspruchung von der Umdrehungszahl der Welle abhängig¹⁰⁹) gemacht:

Umdrehungen in der Minute n :	1	200	2000
Beanspruchungszahl k :	200	35	15

Die Kraft, die zum Rollen einer Kugel gebraucht wird, ist nach der Rechnung in Beispiel 73, wenn darin das Kugelgewicht G vernachlässigt wird und $Q = \frac{P}{z}$ eingesetzt wird,

$$P = \frac{P}{z} \cdot \frac{2f}{d}.$$

Ist nur R der Halbmesser des Kugelaufkreises, so ist das widerstehende Moment des Spurlagers

$$M = P_r \cdot R \cdot z = f \cdot P \cdot \frac{2R}{d}, \quad (110)$$

worin für den Wälzarm f bei der Regelbelastung $k \approx 80$ derselbe Wert 0,0067 mm einzusetzen ist wie bei den Traglagern.

Ist die Belastung des Lagers kleiner P' , so steigt der Hebelarm auf f' an¹⁰⁷):

$$f' = f \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}. \quad (111)$$

Erhöht sich die Belastung über die Regelbelastung hinaus, so steigt f ebenfalls wieder in demselben Maße wie bei entsprechender Verringerung der Belastung.

Beispiel 86. Für eine Welle von $d_0 = 8$ cm Durchmesser und für die Belastung $P = 3000$ kg bei $n = 150$ Umdrehungen in der Minute soll ein Spurlager berechnet werden.

Man erhält aus Gleichung (109) mit $k = 45$ at

$$d^2 \cdot z = \frac{3000}{45} = 66,7 \text{ cm}^2.$$

Wählt man jetzt

$$d = \frac{3}{4}'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{7}{8}'' \quad \text{bzw.} \quad 1'',$$

so folgt

$$z = \frac{66,7}{1,905^2} = 18 \quad \text{bzw.} \quad \frac{66,7}{2,223^2} = 14 \quad \text{bzw.} \quad \frac{66,7}{2,54^2} = 10.$$

¹⁰⁹) Deutsche Waffen- u. Munitionsfabriken, Uhlands prakt. Masch.-Konstr. 1916.

Der Durchmesser des Kreises der Kugelmitten beträgt etwa

$$2r' = 110 \quad \text{bzw.} \quad 115 \quad \text{bzw.} \quad 120 \text{ mm,}$$

der Spielraum der Kugeln ist etwa $\frac{1}{3}d$. Damit erhält man den Kugeldurchmesser zu

$$d = \frac{2\pi r'}{z} \cdot \frac{8}{9} = 17,0 \quad \text{bzw.} \quad 22,9 \quad \text{bzw.} \quad 33,5 \text{ mm.}$$

Der richtige Wert ist somit $d = \frac{7}{8}''$.

Das widerstehende Moment dieses Lagers beträgt nach den Formeln (110) und (111)

$$M = 0,00067 \cdot 3000 \cdot \frac{11,5}{2,223} \cdot \sqrt[3]{\frac{80}{45}} = 12,6 \text{ cmkg.}$$

Kugeltraglager sind nicht verwendbar, wenn etwa infolge von Temperaturveränderungen Verschiebungen in Richtung der Achse eintreten können. Kugellager sind allgemein bei hoher Umdrehungszahl nur gering zu belasten, weil auch bei den Traglagern der Einfluß der Reibung an den Zwischenstücken des Käfigs bei hohen Geschwindigkeiten stark ansteigt. In beiden Fällen sind Rollenlager vorteilhafter.

Für Rollenlager von der Rollenlänge l cm, dem Rollendurchmesser d cm, der Anzahl z der Rollen, die mittels kleiner Ansatzzapfen in seitlichen Führungsringen befestigt sind, und der Belastung P kg ergibt sich entsprechend wie bei den Kugellagern

$$k = \frac{N_0}{l \cdot d} = \frac{5 \cdot P}{z \cdot l \cdot d} \text{ at.} \quad (112)$$

Hierin ist einzusetzen¹⁰²⁾ für

$$\begin{array}{ll} \text{ungehärtete Stahlrollen} & k = 11 \text{ at,} \\ \text{gehärtete} & \text{,,} \quad k = 40 \text{ ,,} \end{array}$$

Als Hebelarm des Rollwiderstandes für die Höchstbelastung gilt bei

$$\begin{array}{ll} \text{ungehärteten Rollen und Laufringen} & f = 0,0215 \text{ mm,} \\ \text{gehärteten} & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad f = 0,010 \text{ ,,} \end{array}$$

Bei einer geringeren Belastung P' ist der zugehörige Hebelarm

$$f' = f \cdot \sqrt[1,75]{\frac{P}{P'}}. \quad (113)$$

Beispiel 87. Für eine Welle von $d_0 = 7$ cm Durchmesser und der Belastung $P = 600$ kg ist ein Rolltraglager zu bestimmen sowie das Moment seines Rollwiderstandes.

Es wird gewählt $l = 1,5 d_0$, dann liefert Formel (112) für ungehärtete Rollen

$$d \cdot z = \frac{5 \cdot P_z}{k \cdot l} = \frac{5 \cdot 600}{11 \cdot 1,5 \cdot 7} = 26 \text{ cm.}$$

Ferner gilt die Beziehung

$$d \cdot z < \pi \cdot (d_0 + d),$$

also mit den vorstehenden Zahlenwerten

$$d > \frac{26}{\pi} - 7,0 = 1,3 \text{ cm.}$$

Damit folgt die Anzahl der Rollen zu

$$z = \frac{26}{1,3} = 20.$$

Das widerstehende Moment des Lagers ist nach Formel (107)

$$M = 0,00215 \cdot 1,22 \cdot 600 \cdot \left(\frac{9,6}{1,3} + \frac{1,3}{9,6} \right) \approx 12,0 \text{ cmkg.}$$

Man bemerkt, daß Rollenlager mit ungehärteten Rollen und Laufflächen nur für verhältnismäßig kleine Belastungen in Frage kommen.

Um außer der senkrecht zur Wellenachse wirkenden Belastung P noch einen bestimmten Seitenschub H in der Achsenrichtung mit voller Sicherheit aufnehmen zu können, lagert man die Welle auf zwei entgegengesetzt eingebauten Timkenlagern¹¹⁰⁾ mit kegelförmigen Rollen nach Fig. 138. Der Neigungswinkel des Rollenmantels bestimmt sich aus

$$\text{tg } \alpha = \frac{H}{P}.$$

In die Formel (112) ist dann statt P einzusetzen

$$\frac{P}{\cos \alpha} = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{H}{P} \right)^2}.$$

Dasselbe gilt für die Berechnung des widerstehenden Momentes nach Formel (107). Gerechnet wird im übrigen mit dem mittleren Rollendurchmesser d .

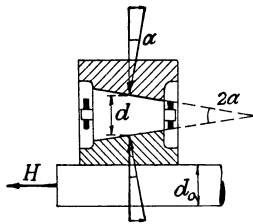


Fig. 138.

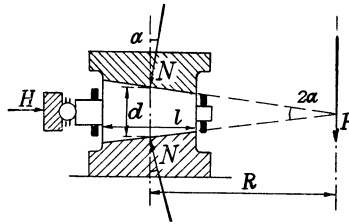


Fig. 139.



Fig. 140.

Stützrollenlager müssen im allgemeinen mit kegelförmigen Rollen nach Fig. 139 versehen werden, damit reines Rollen stattfindet, und zwar gilt

$$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{2} d}{R}.$$

Damit ergibt sich bei z Rollen

$$N = \frac{P}{z} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \approx \frac{P}{z} \cdot \left(1 + \frac{d^2}{R^2} \right) \quad (114)$$

und der nach außen wirkende Seitenschub jeder Rolle gemäß Fig. 140

$$H = 2 \cdot N \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \frac{P}{z} \cdot \text{tg } \alpha$$

¹¹⁰⁾ Dierfeld, D. p. J. 1918.

oder

$$H = \frac{P}{z} \cdot \frac{d}{R}, \quad (115)$$

der gewöhnlich durch ein besonderes Druckkugellager aufgenommen wird.

Es kann gesetzt werden für

gehärtete Rollen auf gehärteten Laufbahnen $k = 40 \text{ at}$,
 gußeiserne „ „ gußeisernen „ „ $k = 25 \text{ „}$,

Für das Moment des Rollwiderstandes ergibt Formel (110) in Verbindung mit (114)

$$M = 2 f \cdot P \cdot \left(\frac{R}{d} + \frac{d}{R} \right) \quad (116)$$

mit $f = 0,05 \text{ mm}$ bei der Regelbelastung für ungehärtete Rollen und Laufbahnen.

Beispiel 88. Das Spurlager des 150-t-Hammerkranes in Bremerhaven¹¹¹⁾ hat $z = 35$ Stahlrollen von $d = 17,5 \text{ cm}$ mittlerem Durchmesser, $l = 25 \text{ cm}$ Länge bei $R = 110 \text{ cm}$ mittlerem Halbmesser. Es wird belastet mit $P = 380 \text{ t}$ bei leerem Kran und 530 t bei der Höchstbelastung. Die Rollen stützen sich nicht gegen ein Kugelinglager, sondern gegen Spurkränze der gußeisernen Rollbahnen von $h = 2 \text{ cm}$ Höhe. Der aufzunehmende Seitenschub von $H = 86 \text{ t}$ wirkt auf ein im Fuß angeordnetes Halslager von $d_1 = 45 \text{ cm}$ Durchmesser und $l_1 = 26 \text{ cm}$ Länge, sowie auf zwei den Winkel $2\delta = 60^\circ$ einschließende Druckräder in der oberen Führung von $D = 100 \text{ cm}$ Durchmesser bei $b = 13 \text{ cm}$ Breite, deren Zapfen die Stärke $d_2 = 15 \text{ cm}$ haben. Anzugeben ist das zum Drehen des Hammerauslegers erforderliche Drehmoment.

Für die oberen Rollen ist gemäß der Rechnung in Beispiel 77 mit $f = 0,05 \text{ mm}$

$$M_1 = \frac{2 \cdot H \cdot f}{2 \cdot \cos \delta} = \frac{86\,000 \cdot 0,05}{0,866 \cdot 1000} \approx 5,0 \text{ mkg},$$

für ihre Zapfen mit dem Höchstwert der Reibungsziffer $\mu = 0,14$

$$M_2 = \frac{2 \cdot H}{2 \cdot \cos \delta} \cdot \mu \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{86\,000 \cdot 0,14 \cdot 0,15}{0,866 \cdot 2} = 1043 \text{ mkg}.$$

Für das untere Halslager ist entsprechend

$$M_3 = H \cdot \mu \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 86\,000 \cdot 0,14 \cdot 0,45 = 2709 \text{ mkg}.$$

Für die Kegelrollen ist, da die Rollenbeanspruchung

$$k = \frac{P}{z \cdot l \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{d^2}{R^2} \right) = \frac{530\,000}{35 \cdot 25 \cdot 17,5} \cdot \left(1 + \frac{17,5^2}{110^2} \right) = 35 \text{ at}$$

beträgt, gemäß Formel (116)

$$M_4 = 2 \cdot 0,05 \cdot 530 \cdot \left(\frac{110}{17,5} + \frac{17,5}{110} \right) \cdot \sqrt[1,75]{\frac{40}{35}} = 370 \text{ mkg}.$$

Für die Reibung der Rollen an den beiden Spurkränzen ist, da sie außen kugelförmig mit dem Mittelpunkt auf der Achse der Kransäule abgedreht sind, gemäß Formel (115) einfach

$$M_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \frac{d}{R} \cdot \mu \cdot 2 \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 \right),$$

¹¹¹⁾ Z. d. V. d. I. 1899.

worin der Klammerausdruck den Halbmesser der Rollen bis Mitte Spurkranz angibt. Wird hierin noch eingesetzt $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{R}$ und $\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \frac{d^2}{R^2}$, so folgt mit $\mu = 0,14$

$$M_5 = \frac{530\,000 \cdot 0,175 \cdot 0,14}{1,10 \cdot 100} \cdot \left(1 + \frac{17,5^2}{110^2}\right) \cdot \left(\frac{17,5}{2} + \frac{25 \cdot 17,5}{2 \cdot 110} - 1\right) = 1180 \text{ mkg.}$$

Das gesamte erforderliche Drehmoment ist demnach $M = 5307 \text{ mkg.}$ Um die Drehung unter allen Umständen zu bewirken, wird der Antriebsmotor noch um etwa 30 v.H. stärker ausgeführt worden mit $M \approx 7000 \text{ mkg.}$ wovon auch noch die Widerstände der Zwischenübersetzung zu bewältigen sind.

Beispiel 89. Die Ringspurzapfen der Turbinen in einem Kraftwerk am Niagarafall verbrannten innerhalb einer Minute, wenn die Ölzufuhr einmal aussetzte. Sie wurden durch Rollenlager nach Fig. 141 ersetzt¹¹²⁾, deren widerstehendes Moment zu bestimmen ist. Die Regelbelastung beträgt $P = 70 \text{ t}$, die höchste vorübergehend auftretende $\dot{P}_{\max} = 125 \text{ t}$, die Regelumlaufzahl $n = 250$, die höchste $n_{\max} = 500$; ferner ist $d = 10,16 \text{ cm}$, $l = 4,45 \text{ cm}$, $R_1 = 39,4 \text{ cm}$, $R_2 = 45,6 \text{ cm}$, $R_3 = 52,0 \text{ cm}$, $R_4 = 58,0 \text{ cm}$, $d_1 = 3,81 \text{ cm}$, die Anzahl der Rollen $z = 16 \cdot 3$, die in einem großen, scheibenartigen Käfig geführt werden.

Bei der höchsten Dauerbelastung, für die das Lager berechnet wurde, ist nach den obigen Angaben $k = 40 \text{ at}$ einzusetzen, und man erhält damit

$$P = z \cdot l \cdot d \cdot k = \frac{16 \cdot 3 \cdot 4,45 \cdot 10,16 \cdot 40}{1000} = 87 \text{ t.}$$

Bei der Höchstbelastung ist dann

$$k_{\max} = 40 \cdot \frac{125}{87} = 57,5 \text{ at.}$$

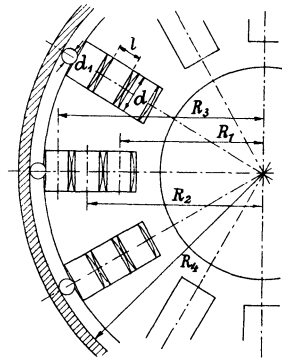


Fig. 141.

Das Moment des Rollwiderstandes ist nun nach Formel (116) bei der Regelbelastung mit

$$\begin{aligned} f &= 0,001 \cdot \sqrt[1]{\frac{87}{70}}, \\ M_1 &= 2 \cdot f \cdot \frac{P}{3} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{d} + \frac{d}{R_1} + \frac{d}{R_2} + \frac{d}{R_3} \right) \\ &= 2 \cdot 0,001 \cdot 1,13 \cdot \frac{70\,000}{3} \cdot \left(\frac{39,4 + 45,6 + 52}{10,16} + 10,16 \cdot [0,0254 + 0,0219 \right. \\ &\quad \left. + 0,0192] \right) = 747 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Hierzu tritt ein Reibungsmoment, das durch die Drehung der zylindrischen Rollen entsteht. Wird eine Rolle durch die Kraft P' angedrückt und dreht sie sich um ihre Mitte über einen kleinen Winkel α , so wirkt die durch die Belastung $\frac{1}{2}P'$ der einen Hälfte entstehende Reibungskraft $\mu \cdot \frac{1}{2} \cdot P'$ am Hebelarm $\frac{1}{4}l$, so daß an jeder Rolle das Reibungsmoment $M' = 2 \cdot \mu \cdot \frac{1}{2} \cdot P' \cdot \frac{1}{4}l$ auftritt. Damit wird bei z Rollen, also $z \cdot P' = P$

$$M_2 = \frac{1}{4} \cdot \mu \cdot P \cdot l,$$

also mit $\mu = 0,005$

$$M_2 = \frac{1}{4} \cdot 0,005 \cdot 70\,000 \cdot 4,45 = 389 \text{ cmkg.}$$

Nun wirkt auf die hintereinander liegenden drei Rollen noch die Schleuderkraft $Z = 352 \text{ kg}$ (Bd. III), die sie nach außen drückt und die nach den Angaben

¹¹²⁾ Dierfeld, D. p. J. 1911.

S. 50 keinen Reibungswiderstand findet. Die Kraft Z wird durch die außen angeordneten, in einem besonderen Ring geführten Kugeln aufgenommen. Die Kugeln vertragen eine Belastung von etwa $P_1 = 100 \cdot d^2 = 1450$ kg. Demnach ist

$$f_1 = 0,00067 \cdot \sqrt[2,5]{\frac{1450}{352}} = 0,00118 \text{ cm}$$

und damit entsprechend Formel (107)

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{z}{3} \cdot f_1 \cdot Z \cdot \left(\frac{R_4}{R_4 - d_1} + \frac{R_4 - d_1}{R_4} \right) \\ &= \frac{48}{3} \cdot 0,00118 \cdot 352 \cdot \left(\frac{58,0}{54,19} + \frac{54,19}{58,0} \right) = 13 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Das gesamte widerstehende Moment des Lagers ist also $M \sim 1150$ cmkg.

Die Hauptvorteile der Kugel- und Rollenlager gegenüber den Gleitlagern sind die, daß sie keine Einlaufzeit brauchen, die für die Gleitlager immer eine gewisse Gefahr mit sich bringt, daß sie ferner von der Schmierung ziemlich unabhängig sind (Beispiel 89) und daß sie schließlich auch bei absatzweisem Betrieb, wo sich die Gleitzapfen immer erst wieder mit einer neuen Ölschicht von etwas gesteigerter Temperatur umgeben müssen, um günstig zu laufen, keinen erhöhten Widerstand bieten.

Beispiel 90. Die zum Anfahren von Straßenbahnwagen, die G kg wiegen, auf wagerechter Strecke erforderliche Zugkraft P beträgt nach Versuchen¹¹³⁾

$$\begin{aligned} \text{bei Gleitlagern} & P = 0,0179 \cdot G \text{ kg,} \\ \text{„ Kugellagern} & P = 0,0056 \cdot G \text{ kg.} \end{aligned}$$

Bei schneller Fahrt sind die Unterschiede zugunsten der Kugellager nur noch gering. Bei $V = 40$ km/st Geschwindigkeit braucht ein Personen-Eisenbahnwagen für Normalspur mit Kugellagern nur noch 10 v.H. weniger Zugkraft als einer mit Gleitlagern¹¹⁴⁾.

10. Die Räderübersetzung.

Auf einer gemeinsamen Achse seien zwei Seiltrommeln von den Halbmessern R und R_1 befestigt. Über die Trommeln werden zwei Seile in entgegengesetzter Richtung geschlungen. An dem einen hänge die Last Q , an dem anderen werde nach beliebiger Richtung mit der Kraft P gezogen (Fig. 142). Wird das eine Seil aufgewunden, so wickelt sich das andere ab.

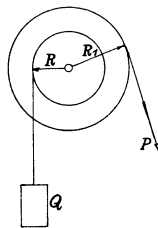


Fig. 142.

Die Anordnung kann als Hebel aufgefaßt werden, und Gleichgewicht besteht, wenn die Drehmomente der beiden Kräfte in bezug auf die gemeinsame Drehachse einander gleich sind: Antriebsmoment gleich Lastmoment

$$M_A = M_L$$

oder

$$P \cdot R_1 = Q \cdot R, \quad (117 \text{ a})$$

¹¹³⁾ Adler, Elektrotechnik u. Maschinenbau 1917.

¹¹⁴⁾ Deutsche Waffen- u. Mun.-Fabriken, El. Kraftb. u. Bahnen 1912.

wobei vorläufig von allen etwa auftretenden Widerständen abgesehen wird.

Die Gleichung (117 a) kann auch geschrieben werden

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{R_1} = \frac{2\pi \cdot R \cdot n}{2\pi \cdot R_1 \cdot n}, \quad (118 a)$$

wenn n die Anzahl der in einer bestimmten Zeit, gewöhnlich ja einer Minute, gemachten Umdrehungen angibt. Man kann diesen Zusammenhang aussprechen: Die Längen der auf- bzw. abgewickelten Seile verhalten sich umgekehrt wie die an ihnen angreifenden Kräfte. Der Zusammenhang (118a) lehrt weiter: Auf derselben Achse sitzende Räder übersetzen die angreifenden Kräfte im umgekehrten Verhältnis ihrer Halbmesser.

Die Gleichungen (117 a) und (118a) bleiben unverändert, wenn an Stelle der Seilrolle mit dem Halbmesser R_1 eine Kurbel tritt, solange die an der Kurbel angreifende Kraft P senkrecht zu dem Kurbelarm R_1 gerichtet ist und ihre Größe nicht ändert.

Werden die Reibungswiderstände mit dem Drehmoment M_w berücksichtigt, so geht Gleichung (117 a) über in

$$M_A = M_L + M_w$$

oder

$$\frac{M_A}{M_L} = \frac{M_L + M_w}{M_L} = \frac{1}{\eta},$$

wie Formel (45 b) ergibt. Man erhält so für die Anordnung der Fig. 142 die genaue Formel

$$M_A = M_L \cdot \frac{1}{\eta}. \quad (117 b)$$

und damit

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\eta}. \quad (118 b)$$

Bei dem in Fig. 143 skizzierten Zahnräder-vorgelege wird die der Kraft P in Fig. 142 entsprechende P' durch den Zahndruck des zweiten, in das größere eingreifenden Rades bewirkt, und es gilt demgemäß für die Lastrolle

$$P' \cdot R_1 = Q \cdot R = M_L,$$

wenn wieder M_L abkürzungsweise das Drehmoment der Last bezeichnet.

Auf das kleinere Zahnrad wirkt der Zahndruck P' des größeren in umgekehrter Richtung zurück. Es gilt also für die zweite Welle mit dem umgekehrten Pfeil von P'

$$P' \cdot r_1 = P \cdot R_2 = M_A,$$

wenn abkürzungsweise M_A das Antriebsmoment bezeichnet.

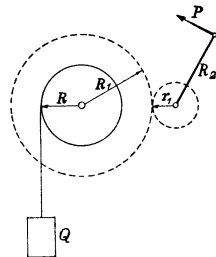


Fig. 143.

Wird jetzt der Wert von P' aus der zweiten Gleichung in die erste eingesetzt, so folgt

$$\frac{M_A}{M_L} = \frac{r_1}{R_1}. \quad (119 a)$$

Auf verschiedenen Achsen sitzende Räder übersetzen die daran wirkenden Drehmomente derart, daß Antriebs- und Lastmoment in demselben Verhältnis stehen wie die Halbmesser der auf den zugehörigen Achsen sitzenden Übersetzungsräder, wenn die Reibungswiderstände außer acht gelassen werden.

Berücksichtigt man die Widerstände im Triebwerk und setzt an: η_0 als Wirkungsgrad der Seiltrommel, enthaltend die Seilwiderstände und die durch die Trommelbelastung hervorgerufene Lagerreibung der Lastwelle, entsprechend η'_1 als Wirkungsgrad des auf der Lastwelle sitzenden Zahnrades, η''_1 als Wirkungsgrad des auf der Antriebswelle sitzenden Zahnrades, η_2 als Wirkungsgrad der Kurbel, so gilt

$$P' \cdot R_1 \cdot \eta'_1 = M_L \cdot \frac{1}{\eta_0};$$

Das durch die darauf entfallenden Widerstände verringerte Drehmoment des Zahndruckes muß noch dem durch die darauf entfallenden Widerstände vergrößerten Lastmoment das Gleichgewicht halten.

Entsprechend ist

$$M_A \cdot \eta_2 = P' \cdot r_1 \cdot \frac{1}{\eta''_1},$$

und durch Zusammennehmen beider Gleichungen folgt dann

$$\frac{M_A}{M_L} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{1}{\eta_0 \cdot \eta'_1 \cdot \eta''_1 \cdot \eta_2}.$$

Gewöhnlich nimmt man $\eta'_1 \cdot \eta''_1 = \eta_1$ als Wirkungsgrad des Zahnradvorgeleges zusammen, und dann ist genau gerechnet

$$\frac{M_A}{M_L} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{1}{\eta_0 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}. \quad (119 b)$$

Bei zusammenarbeitenden Zahnrädern muß naturgemäß die Entfernung entsprechender Stellen der Zähne voneinander, gemessen auf den sogenannten Teilkreisen, die bei Drehung der Räder aufeinander abrollen, dieselbe sein. Anderenfalls würden sich die Räder klemmen.

Ist Z_1 die Anzahl der Zähne des Rades vom Halbmesser R_1 und z_1 die Anzahl der Zähne des Rades vom Halbmesser r_1 , und bezeichnet τ die gemeinsame Teilung beider Räder, so ist

$$2\pi \cdot R_1 = Z_1 \cdot \tau \quad \text{und} \quad 2\pi \cdot r_1 = z_1 \cdot \tau. \quad (120)$$

Die Teilung wird stets als ein Vielfaches von π angegeben, damit nicht etwa unzweckmäßige Abrundungen der Zahlen Fehler in die Verzahnung bringen.

Aus den Gleichungen (120) folgt

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{z_1}{Z_1}.$$

Das Übersetzungsverhältnis der Räder wird durch das Verhältnis ihrer bis zu den Teilkreisen reichenden Halbmesser bestimmt oder einfacher durch das Verhältnis ihrer Zähnezahlen.

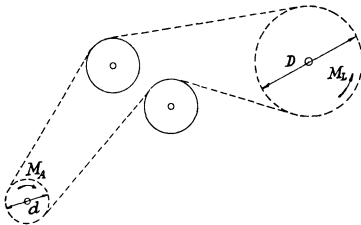


Fig. 144.

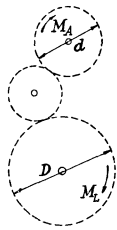


Fig. 145.

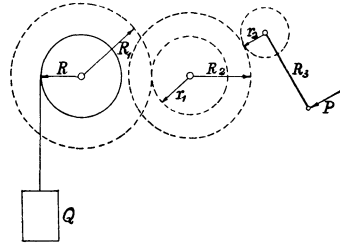


Fig. 146.

An den erörterten Verhältnissen wird nichts geändert, wenn die Räder gar nicht unmittelbar ineinander greifen, sondern erst durch Vermittlung einer nötigenfalls über Führungsräder laufenden Gelenkkette oder auch eines glatten Riemens oder Seiles, wie das Fig. 144 andeutet. Das Zwischenglied kann auch wieder ein starres Rad sein, wie Fig. 145 angibt.

Macht die Lastwelle n_1 Umdrehungen, so sind nach Formel (120) $n_1 \cdot Z_1$ Zähne in Eingriff mit ebenso vielen des auf der Antriebswelle sitzenden Rades gekommen, das also bei z_1 auf dem Umfang befindlichen Zähnen n_2 Umdrehungen gemacht haben muß derart, daß $n_1 \cdot Z_1 = n_2 \cdot z_1$ ist oder

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_1}{Z_1} = \frac{r_1}{R_1}.$$

Die Räderübersetzung übersetzt nicht nur die Drehmomente, sondern auch die Umdrehungszahlen der Wellen, und zwar letztere im direkten Verhältnis der Radhalbmesser oder Zähnezahlen, so daß das Produkt aus Drehmoment und Umdrehungszahl in der Minute unverändert bleibt.

Für eine doppelte Räderübersetzung nach Fig. 146 gilt naturgemäß die der Gleichung (119 b) entsprechende Beziehung:

$$\frac{M_A}{M_L} = \frac{P \cdot R_3}{Q \cdot R} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{1}{\eta_0 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3}. \quad (121)$$

Beispiel 91. Die Last $Q = 800$ kg soll von 2 Arbeitern an einer Winde mit einfachem Vorgelege nach Fig. 143 die Höhe $h = 12$ m gehoben werden. Die Windentrommel habe den Halbmesser $R = 12$ cm, bis Mitte Seil gerechnet. Anzugeben sind die Zähnezahlen des Vorgeleges und die im Mittel zum Heben gebrauchte Zeit.

Die Kraft, die ein Arbeiter dauernd, naturgemäß mit Pausen, an der Kurbel liefert, ist etwa 15 kg, sie kann vorübergehend auf 20 kg gesteigert werden. Der

Halbmesser der Handkurbel beträgt bei einmännigen Kurbeln $R_2 \leq 35$ cm, bei zweimännigen 38 bis 40 cm. Die Arbeitsgeschwindigkeit ist i. M. $v = 0,75$ m/sk und steigt oder sinkt um etwa 0,25 m/sk.

Der Wirkungsgrad der Trommel wird i. M. angesetzt zu $\eta_0 = 0,96$, der einer Zahnradübersetzung zu $\eta_1 = 0,93$, der Kurbel zu $\eta_2 = 0,98$.

Dann folgt aus Gleichung (119b) die erforderliche Übersetzung

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 35}{800 \cdot 12} \cdot 0,96 \cdot 0,93 \cdot 0,98 = \frac{1}{10,4}.$$

Als geringste Zähnezahzahl von Zahnrädern für Handwinden gilt $z_1 = 10$; damit wird die des auf der Trommelwelle sitzenden Rades $Z_1 = 104$. Ist die Zahnradteilung die bei zweimännigen Handkurbelwellen gebräuchliche $\tau = 0,8 \cdot \pi$ cm, so ergibt sich aus Formel (120) der Durchmesser

$$d_1 = \frac{z_1 \cdot \tau}{\pi} = 10 \cdot 0,8 = 8,0 \text{ cm}$$

und der des anderen Rades

$$D_1 = \frac{Z_1 \cdot \tau}{\pi} = 83,2 \text{ cm},$$

beide im Teilkreis gemessen.

Aus dem Zusammenhang $2\pi \cdot R \cdot n_1 = h$ ergeben sich die nötigen Umdrehungen der Trommelwelle

$$n_1 = \frac{2\pi \cdot R}{h},$$

die Umdrehungen der Kurbelwelle sind demnach

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{R_1}{r},$$

und der Kurbelweg ist nach Formel

$$s = 2\pi \cdot R_2 \cdot n_2 = v \cdot t.$$

Hieraus folgt die zum Aufwinden nötige Zeit

$$t = \frac{2\pi \cdot R_2 \cdot n_2}{v} = \frac{2\pi \cdot R_2}{v} \cdot n_1 \cdot \frac{R_1}{r_1} = \frac{2\pi \cdot R_2}{v} \cdot \frac{h}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{R_1}{r_1}$$

oder

$$t = \frac{h}{v} \cdot \frac{R_2}{r} \cdot \frac{R_1}{r_1} = \frac{12}{0,75} \cdot \frac{35}{12} \cdot 10,4 = 486 \text{ sk.}$$

Beispiel 92. Für den Drehkran der Fig. 115 ist das Rädervorgelege zu bestimmen bei dem auf die Trommel von $R = 16$ cm Halbmesser kommenden Seilzug $Q = 1600$ kg für den Fall, daß zwei Arbeiter an der Kurbelwelle drehen.

Es ist ein doppeltes Rädervorgelege nötig, und man erhält aus Formel (121) das erforderliche Übersetzungsverhältnis

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 35}{1600 \cdot 16} \cdot 0,96 \cdot 0,93 \cdot 0,93 \cdot 0,98 = \frac{1}{30},$$

das zerlegt wird in $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$.

Die größere Übersetzung $\frac{1}{5}$ wird der Kurbel zunächst angebracht, die kleinere der Last zunächst, weil dann die Räder die kleinsten Durchmesser erhalten.

Wählt man wieder als kleinste Zähnezahzahl $z_1 = z_2 = 10$, so wird $Z_2 = 60$ und $Z_1 = 50$. Hat das der Kurbel zunächst gelegene Räderpaar die Teilung $\tau_2 = 0,8 \cdot \pi$ und das der Last zunächst gelegene die Teilung $\tau_1 = 1,2 \cdot \pi$, so sind die Räderdurchmesser $d_2 = 8$ cm, $D_2 = 48$ cm, $d_1 = 12$ cm, $D_1 = 60$ cm.

Wenn häufig kleinere Lasten, etwa bis zu $\frac{1}{3}$ der Höchstbelastung, zu heben sind, so schaltet man, um die kleinen Lasten schneller heben zu können, durch

Verschieben der Kurbelwelle eine andere Übersetzung ein, die statt $\frac{1}{6}$ nur $\ddot{u} = \frac{d_3}{D_3} = \frac{1}{2}$ zu sein braucht. Nun ist aber der Achsenabstand

$$a = \frac{1}{2} \cdot (d_3 + D_3) = \frac{1}{2} \cdot (d_2 + D_2) = 28 \text{ cm}$$

festgelegt, so daß man die Abmessungen dieser Räder nicht beliebig wählen kann.

Durch Zusammenfassen der beiden gegebenen Beziehungen erhält man leicht

$$D_3 = \frac{2a}{1 + \ddot{u}} = \frac{2 \cdot 28}{1 + \frac{1}{2}} = 37,33 \text{ cm,}$$

ferner gilt nach Formel (120)

$$D_3 = Z_3 \cdot \frac{\tau}{\pi}.$$

Man kann jetzt wählen

$$\frac{\tau}{\pi} = 0,8 \qquad 0,9 \qquad 1,0 \text{ cm}$$

und erhält dann

$$Z_3 = \frac{D_3}{\frac{\tau}{\pi}} \approx 48 \qquad 42 \qquad 38$$

entsprechend dem Durchmesser

$$D_3 = 38,4 \qquad 37,8 \qquad 38,0 \text{ cm.}$$

Demnach muß werden

$$d_3 = 2a - D_3 = 17,6 \qquad 18,2 \qquad 18,0 \text{ cm,}$$

also

$$z_3 = \frac{d_3}{\frac{\tau}{\pi}} = 22,0 \qquad 20,2 \qquad 18,0.$$

Die Teilung $0,9 \cdot \pi$ ist somit unbrauchbar. Die beiden anderen liefern brauchbare Räder, die aber beide nicht genau die verlangte Übersetzung haben. Gewöhnliche Stirnräder gestatten nicht die Innehaltung einer gegebenen Übersetzung bei festgelegtem Achsenabstand, wenn runde Maße für $\frac{\tau}{\pi}$ gelten sollen.

Beispiel 98. Von einem Elektromotor, der $n_1 = 1350$ Umdrehungen in der Minute macht, soll eine Maschine angetrieben werden mit $n_2 = 56$ Umdrehungen in der Minute. Anzugeben ist die erforderliche Übersetzung.

Man erhält sogleich das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{56}{1350} = \frac{1}{24,1},$$

das man etwa zerlegt in $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4,8}$.

Hat die Riemenscheibe des Motors den Durchmesser $d_1 = 16$ cm, so muß die auf der Vorgelegewelle sitzende zugehörige Scheibe den Durchmesser $D_1 = 5 \cdot 16 = 80$ cm erhalten.

Sitzt nun auf der anzutreibenden Maschine eine Riemenscheibe vom Durchmesser $D_2 = 110$ cm, so muß die zugehörige auf der Vorgelegewelle den Durchmesser $d_2 = \frac{1}{4,8} \cdot 110 = 23$ cm haben.

Die vorstehende Rechnung setzt voraus, daß die Riemen nicht auf den Scheiben gleiten (Abschnitt 17).

Eine zur Erzielung der verschiedenartigsten Übersetzungen auf gedrängtem Raum oft benutzte Räderverbindung ist das Planetengetriebe.

Die einfachste Anordnung ist das Umlaufgetriebe der Fig. 147¹¹⁵⁾. Mit der Schubstange der Balancier-Dampfmaschine ist das Zahnrad vom Halbmesser r_2 fest verbunden; es greift ein in ein mit der Hauptwelle A der Maschine fest verbundenes Rad vom gleichen Halbmesser r_1 . Während eines Umlaufes des Zapfens B auf dem Kreis vom Halbmesser R dreht sich das Rad 2 einmal in dem angegebenen Sinn um seine Achse und bewegt dadurch das gleiche Rad 1 ebenfalls einmal um sich selbst. Da aber das Rad 2 außerdem einmal um 1 in dem Drehsinn des letzteren herumgelaufen ist, so macht das Rad 1 also bei einer Umdrehung des Zapfens B 2 Umdrehungen in demselben Sinne.

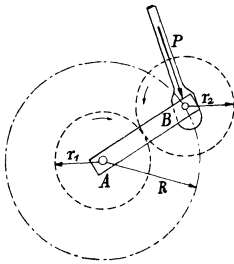


Fig. 147.

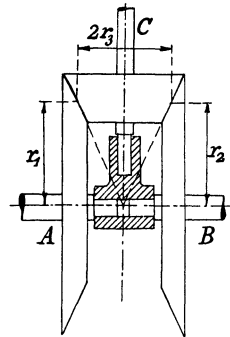


Fig. 148.

Sind die Räder verschieden groß, so ergibt eine gleiche Überlegung als minutliche Umdrehungszahl n_1 der Welle bei n_2 Umdrehungen des Zapfens B in der Minute

$$n_1 = n_2 \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right). \quad (122)$$

Eine unter der Bezeichnung Differentialgetriebe häufig benutzte Ausführung stellt die Fig. 148 dar. Auf den gleichachsig gelagerten Wellen A und B sitzen Kegelräder vom Halbmesser r_1 bzw. r_2 , in die ein auf der die beiden Hauptwellenachsen senkrecht schneidenden Welle C sitzendes Zahnrad vom Halbmesser r_3 eingreift. Es sind dann folgende Bewegungen möglich:

1. Die Welle A steht fest, die Welle C dreht sich mit n_3 Umdrehungen in der Minute um sich selbst. Sie rollt dann auf Rad 1 mit $\frac{2}{n_3} = \frac{1}{n_3} \cdot \frac{r_3}{r_1}$ Umläufen in der Minute entgegengesetzt zu ihrer Drehrichtung. Stände die Welle C fest, so würde sich die Welle B im Sinne des Rollens von C mit der Umdrehungszahl $n_2'' = n_3 \cdot \frac{r_3}{r_2}$ drehen. Da nun aber die Welle C mit der Umdrehungszahl n_3' in

¹¹⁵⁾ Watt 1781.

demselben Sinne auf dem Rade 2 umläuft, so addieren sich beide Bewegungen und man erhält

$$n_2 = n'_3 + n''_3 = n_3 \cdot \left(\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_3}{r_2} \right). \quad (123)$$

Im vorliegenden Fall mit $r_1 = r_2$ wird

$$n_2 = 2 \cdot n_3 \cdot \frac{r_3}{r_2}.$$

2. Die Welle A steht fest, die Welle B dreht sich mit n_2 Umdrehungen in der Minute.

Man erhält sogleich aus Formel (123) die Umdrehungszahl der Welle C zu

$$n_3 = \frac{n_2}{\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_3}{r_2}},$$

und ihre Umlaufzahl wie oben

$$n'_3 = n_3 \cdot \frac{r_3}{r_1} = \frac{n_2}{1 + \frac{r_1}{r_2}}. \quad (124)$$

Der Umlauf der Welle C hat dieselbe Richtung wie der Drehsinn der Welle B .

Für $r_1 = r_2$ wird

$$n_3 = \frac{n_2}{2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \quad \text{und} \quad n'_3 = \frac{n_2}{2}.$$

3. Die Welle C steht fest, die Welle A dreht sich mit n_1 Umdrehungen in der Minute.

Das Rad 3 dreht sich mit $n_3 = n_1 \cdot \frac{r_1}{r_3}$ Umdrehungen in der Minute um seine Achse und treibt das Rad 2 mit $n_2 = n_3 \cdot \frac{r_3}{r_2} = n_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$ Umdrehungen entgegengesetzt zur Drehrichtung der Welle A um.

Für $r_1 = r_2$ wird $n_2 = n_1$.

4. Die Welle A dreht sich mit n_1 Umdrehungen in der Minute und die Welle B mit n_2 Umdrehungen in der Minute in demselben Sinne. Durch zweimalige Anwendung des Falles 2 erhält man als minutliche Umdrehungszahl der Welle C

$$n_3 = \frac{n_2}{\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_3}{r_2}} - \frac{n_1}{\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{r_1}} = \frac{n_2 - n_1}{\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_3}{r_2}} \quad (125)$$

und als minutliche Umlaufzahl im Sinne der beiden anderen Drehungen

$$n'_3 = \frac{n_2}{1 + \frac{r_1}{r_2}} + \frac{n_1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = n_1 \cdot \frac{1 + \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{r_2}{r_1}}. \quad (126)$$

Für $r_1 = r_2$ folgt

$$n_3 = \frac{n_2 - n_1}{2} \cdot \frac{r_1}{r_3} \quad \text{und} \quad n'_3 = \frac{n_2 + n_1}{2}.$$

5. Die Wellen A und B drehen sich mit den minutlichen Umdrehungszahlen n_1 bzw. n_2 in umgekehrtem Sinne.

Durch dieselbe Überlegung wie unter 4 folgt

$$n_3 = \frac{n_2 + n_1}{\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_3}{r_2}} \quad \text{und} \quad n'_3 = -\frac{n_2}{1 + \frac{r_1}{r_2}} - \frac{n_1}{1 + \frac{r_2}{r_1}}. \quad (127)$$

$$(128)$$

Für $r_1 = r_2$ wird

$$n_3 = \frac{n_2 + n_1}{2} \cdot \frac{r_1}{r_3} \quad \text{und} \quad n_3' = \frac{n_2 - n_1}{2}.$$

Die letztere Formel bildet den Grund zu der Bezeichnung Differentialgetriebe. Ist noch $n_1 = n_2$, so bleibt die Welle C an ihrem Platz.

6. Die Welle A dreht sich mit n_1 Umdrehungen in der Minute und die Welle C mit n_3 derart, daß die Drehrichtungen übereinstimmen.

Aus Fall 1 ergibt sich sogleich die Umlaufzahl der Welle C in entgegengesetzter Drehrichtung zu

$$n_3' = n_3 \cdot \frac{r_3}{r_1} - n_1 \quad (129)$$

und die Drehzahl der Welle B in entgegengesetzter Richtung zur Drehung der Welle A zu

$$n_2 = n_3 \cdot \left(\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{r_1} \right) - n_1. \quad (130)$$

Für $r_1 = r_2$ wird

$$n_2 = 2 n_3 \cdot \frac{r_3}{r_2} - n_1.$$

7. Die Welle A dreht sich mit n_1 Umdrehungen in der Minute und die Welle C mit n_3 derart, daß die Drehrichtungen entgegengesetzt sind.

Man erhält entsprechend dem Fall 6

$$n_3' = n_3 \cdot \frac{r_3}{r_1} + n_1 \quad (131)$$

übereinstimmend mit der Drehrichtung der Welle A und

$$n_2 = n_3 \cdot \left(\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{r_1} \right) + n_1 \quad (132)$$

entgegengesetzt zur Drehrichtung der Welle A .

Für $r_1 = r_2$ wird

$$n_2^r = 2 \cdot n_3 \cdot \frac{r_3}{r_1} + n_1.$$

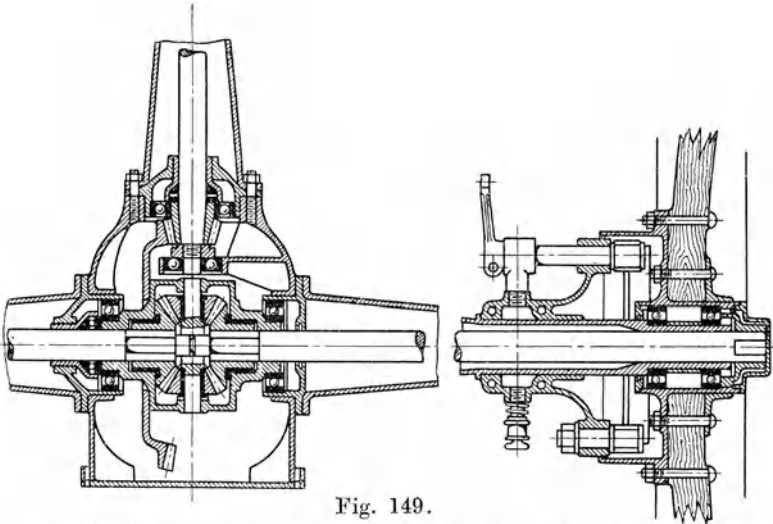


Fig. 149.

Beispiel 94. Die gebräuchlichste Anwendung des Differential-Planetengetriebes, den Antrieb eines Kraftwagens, zeigt die Fig. 149.

Die vom Geschwindigkeitswechsel kommende Hauptwelle des Wagens treibt vermittels eines Kegelzahnradpaars den kastenförmigen Körper um, in dessen Wandungen zwei Differentialkegelräder gelagert sind. Sie bilden eine starre Kupplung, die die beiden Hälften der Hinterradachse gleichmäßig mitnimmt, solange beide Räder gleiche Umdrehungen machen. Wenn in einer Kurve das eine Rad langsamer läuft als das andere, so tritt der Fall 5 der obigen Darlegungen ein, und beide Achsenhälften verdrehen sich frei gegeneinander.

Vielfältige Anwendung finden Stirnrädergetriebe als rückkehrende Umlaufräderwerke¹¹⁶⁾. Die einfachste Anordnung zeigt die Fig. 150.

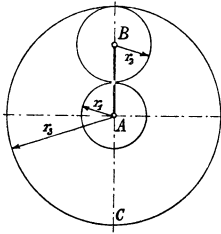


Fig. 150.

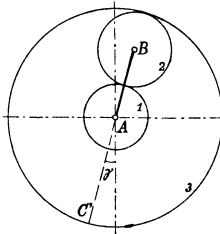


Fig. 151.

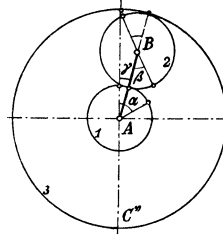


Fig. 152.

Der Halbmesser des ersten, sich mit n_1 Umdrehungen in der Minute drehenden Zentralrades ist r_1 , derjenige des Umlaufrades, das n_2 Umdrehungen in der Minute macht, r_2 , und der des zweiten feststehenden Zentralrades, das hier als Hohlräder ausgeführt ist, r_3 . In der Fig. 151 ist das ganze System um die Achse A derart gedreht worden, daß der Steg AB n_3 Umdrehungen gemacht hat, wobei vorläufig der leichteren Übersichtlichkeit halber n_3 als ein kleiner echter Bruch gelten soll, daß also der Punkt C des Rades 3 die Lage C' angenommen hat. Dabei hat der Steg AB auf dem Umfang des Rades 3 den Bogen $r_3 \cdot \gamma$ zurückgelegt.

Da nun Rad 3 feststehen soll, wird es wieder in die alte Lage zurückgedreht (Fig. 152); dabei dreht sich Rad 2 um den Winkel β derart, daß $r_2 \cdot \beta = r_3 \cdot \gamma$ ist, und bewegt einerseits Rad 1 aus der Stellung der Fig. 151 um den Bogen $r_2 \cdot \beta$ in die Lage der Fig. 152, so daß sich letzteres im ganzen um den Winkel α entsprechend n_1 Umdrehungen in der Minute gedreht hat.

Es gilt dann ohne weiteres

$$r_1 \cdot \alpha = r_1 \cdot \gamma + r_2 \cdot \beta$$

und in Verbindung mit der vorstehenden Beziehung

$$r_1 \cdot \alpha = r_1 \cdot \gamma + r_3 \cdot \gamma,$$

woraus folgt

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 1 + \frac{r_3}{r_1} = \frac{n_1}{n_s}. \quad (133)$$

¹¹⁶⁾ Schlesinger, Werkstatts-Technik 1910.

Um die Übersetzung zu vergrößern, setzt man auf die Achse B zwei sogenannte Schwesterräder gemäß Fig. 153. Man entnimmt ihr sofort bei einer Drehung des Steges um den Winkel γ

$$\begin{aligned} r_4 \cdot \gamma &= r_3 \cdot \beta, \\ r_1 \cdot \alpha &= r_1 \cdot \gamma + r_2 \cdot \beta, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 1 + \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} = \frac{n_1}{n_s}. \quad (134 \text{ a})$$

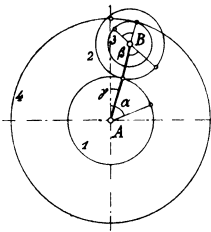


Fig. 153.

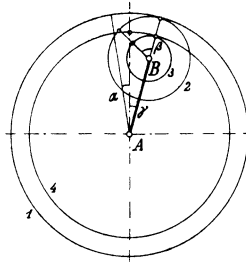


Fig. 154.

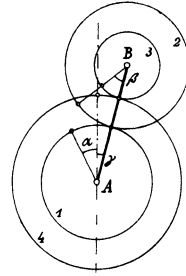


Fig. 155.

Wird das volle Zentralrad 1 durch ein zweites Hohlrad 1 ersetzt, wie Fig. 154 angibt, so gilt jetzt

$$r_4 \cdot \gamma = r_3 \cdot \beta$$

wie oben, aber

$$r_1 \cdot \alpha = r_1 \cdot \gamma - r_2 \cdot \beta,$$

also

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 1 - \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} = \frac{n_1}{n_s}. \quad (134 \text{ b})$$

Dabei ist der Drehsinn von Rad 1 gegenüber der Anordnung nach Fig. 153 der umgekehrte.

Ersetzt man beide Hohlräder durch Vollräder gemäß Fig. 155, so gilt wieder

$$r_4 \cdot \gamma = r_3 \cdot \beta,$$

$$r_1 \cdot \alpha = r_1 \cdot \gamma - r_2 \cdot \beta,$$

also

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n_1}{n_s} = 1 - \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3}. \quad (134 \text{ c})$$

Beispiel 95. Das Zahnrad 0 der Fig. 156 macht $n_0 = 200$ Umdrehungen in der Minute. Anzugeben sind die minutlichen Umdrehungszahlen der beiden gleichen Ritzel 5 und 6, wenn gegeben ist

$$z_1 = 20, \quad z_2 = 30, \quad z_3 = 40, \quad z_4 = 30.$$

Das Rad 0 vertritt hier den Steg, die Räder 1 und 6 haben die gleiche Umdrehungszahl der Welle, auf der sie befestigt sind. Man erhält sofort aus Formel (134c)

$$n_1 = 200 \cdot \left(1 - \frac{30 \cdot 30}{40 \cdot 20}\right) = 200 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -25,$$

also entgegengesetzt zu der Drehrichtung des Rades 0.

Entsprechend erhält man die Umdrehungszahl der Räder 4 und 5, indem man in Formel (134c) die Zeiger 1 und 4 sowie 2 und 3 vertauscht

$$n_4 = 200 \cdot \left(1 - \frac{20 \cdot 40}{30 \cdot 30}\right) = 200 \cdot \left(+\frac{1}{9}\right) = +22,22$$

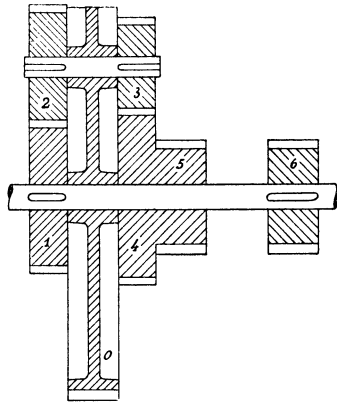


Fig. 156.

in gleichem Sinne wie n_0 .

Die Umdrehungszahl der Welle B bestimmt sich nach Formel (122) zu

$$n_2 = n_0 \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = 200 \cdot \left(1 + \frac{30}{20}\right) = 500.$$

Ändert man die Zähnezahlen nur etwas ab in

$$z_1 = 23, \quad z_2 = 29, \quad z_3 = 39, \quad z_4 = 31,$$

so ergibt sich

$$n_1 = 200 \cdot \left(1 - \frac{31 \cdot 29}{39 \cdot 23}\right) = 200 \cdot \left(-\frac{2}{897}\right) = -0,447,$$

$$n_4 = 200 \cdot \left(1 - \frac{39 \cdot 23}{31 \cdot 29}\right) = 200 \cdot \left(+\frac{2}{899}\right) = +0,446,$$

$$n_2 = 200 \cdot \left(1 + \frac{29}{23}\right) \approx 452.$$

Die Übersetzung ist also bei kleinen Änderungen der Zähnezahlen sehr stark veränderlich.

Beispiel 96. Man kann mit den Anordnungen der Fig. 153–155 sehr hohe Übersetzungen erzielen, jedoch sind bei höheren Umdrehungszahlen die Geschwindigkeiten unzulässig groß. Der Übelstand wird vermieden durch die Anordnung¹¹⁷⁾ der Fig. 157, bei der Rad 0 feststeht. Es sei

$$z_0 = 125, \quad z_1 = 100, \quad z_2 = 40, \quad z_3 = 47, \quad z_4 = 20.$$

Wird Rad 4 auf der einen Welle A mit $n_4 = 2400$ Umdrehungen in der Minute angetrieben, so ergibt Formel (133) die Umdrehungszahl des Steges zu

$$n_s = n_4 \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_4}} = \frac{2400}{1 + \frac{100}{20}} = 400.$$

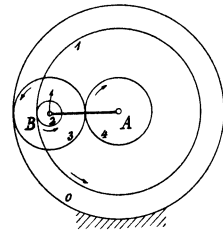


Fig. 157.

Für die Umdrehungszahl des Rades 1 gilt die Formel (134b):

$$n_1 = n_s \cdot \left(1 - \frac{r_3 \cdot r_1}{r_0 \cdot r_2}\right) = 400 \cdot \left(1 - \frac{47 \cdot 100}{125 \cdot 40}\right) = 24,$$

¹¹⁷⁾ Wolfram, Werkstattstechnik 1912.

so daß die gesamte Übersetzung zwischen den Rädern 1 und 4, die auf den gleichachsigen Wellen A sitzen, $\ddot{u} = \frac{1}{100}$ beträgt.

Für die praktische Ausführung der Planetenräder ist wichtig, daß bei Vollrädern (Fig. 155) die Beziehung für die Steglänge AB

$$s = r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

oder nach Formel (120)

$$s = \frac{r_1}{\pi} \cdot (z_1 + z_2) = \frac{r_2}{\pi} \cdot (z_3 + z_4)$$

genau innegehalten wird. Da bei größeren Übersetzungen, für die Planetenräder hauptsächlich in Anwendung kommen, die Räder 1 und 4 bzw. 2 und 3 nur wenig voneinander verschieden sein können, so müssen

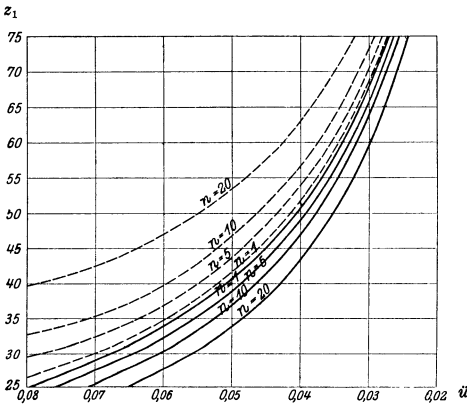


Fig. 158.

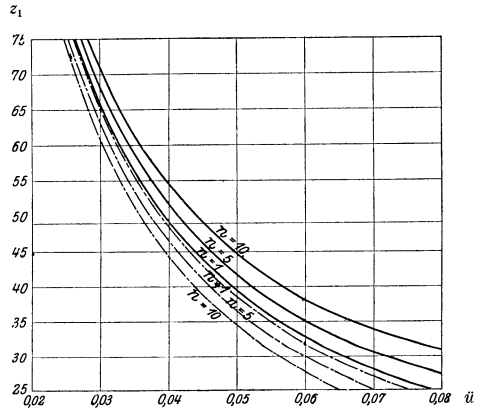


Fig. 159.

sie auch die gleiche Teilung erhalten, so daß die obige Gleichung übergeht in

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4.$$

Eine große Übersetzung erhält man nun, wenn $z_2 \cdot z_4 - z_1 \cdot z_3$, der Unterschied von Nenner und Zähler in dem Bruch der Formel (134 c) möglichst klein wird. Das geschieht, wenn man bei beliebiger Wahl der Zähnezahl z_1 ansetzt¹¹⁸⁾

$$z_2 = z_1 \pm n, \quad z_3 = z_1 \pm n \mp 1, \quad z_4 = z_1 \pm 1, \quad (135)$$

welche Gleichungen die erste Hauptbedingung erfüllen und worin n eine beliebige, nicht zu große, ganze Zahl ist. Die Formel (134 c) für die erzielte Übersetzung nimmt dann die Form an

$$\ddot{u} = + \frac{2 z_1 \pm n}{(z_1 \pm n) \cdot (z_1 + 1)} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{u} = - \frac{2 z_1 \pm n}{(z_1 \pm n) \cdot (z_1 - 1)}.$$

¹¹⁸⁾ Gelbhaar, Werkstatts-Technik 1912.

Die erstere Anordnung mit $z_4 = z_1 + 1$ ist zu wählen, wenn beide Drehrichtungen übereinstimmen sollen, die zweite mit $z_4 = z_1 - 1$, wenn sie entgegengesetzt sein sollen. In den Fig. 158 und 159 sind nun die Übersetzungen $\ddot{u} = \frac{n_1}{n_s}$ als Abszissen und die Zähnezahlen z_1 als Ordinaten für verschiedene n aufgetragen worden. Die Fig. 158 gilt für gleichsinnige Drehung, in ihr gelten die ausgezogenen n -Linien für das negative n und die gestrichelten für das positive n . Die Fig. 159 gilt für entgegengesetzte Drehung, in ihr gelten die ausgezogenen n -Linien für das positive n und die gestrichelten für das negative n . Hiermit kann die passende Ausführung der Räder leicht gefunden werden.

Beispiel 97. Die Hauptspindel einer Fräsmaschine mache $n = 380$ Umdrehungen in der Minute, die Vorschubspindel soll $n_1 = 12$ Umdrehungen in der Minute machen. Die Übersetzung hat durch ein Planetengetriebe nach Fig. 155 zu erfolgen, und zwar mit unverändertem Drehsinn. Anzugeben sind die erforderlichen Räder.

Das Übersetzungsverhältnis ist

$$\ddot{u} = \frac{12}{380} = 0,0316.$$

Man entnimmt nun der Fig. 158

für $n = 1$	$z_1 = 62$	bzw.	63
5	60		65
10	57,6		68.

Da der Wert 57,6 unbrauchbar ist, so wird $z_1 = 58$ angenommen bei $n \infty 8$. Man erhält so mit den Formeln (135) die folgende Zusammenstellung:

n	z_1	z_2	z_3	z_4	$s \cdot \frac{\pi}{\tau}$
1	62	63	62	63	125
	63	62	61	64	125
5	60	65	64	61	125
	65	60	59	66	125
8	58	66	65	59	124
	10	68	58	69	126

Soll etwa $\frac{\tau}{\pi} = 0,4$ cm werden, so könnte man eine der vier ersten Anordnungen nehmen mit der Steglänge $s = 50$ cm.

Bei entgegengesetzter Drehrichtung ist die Fig. 159 in derselben Weise zu benutzen, und man erhält mit den Formeln (135) die Zusammenstellung:

n	z_1	z_2	z_3	z_4	$s \cdot \frac{\pi}{\tau}$
1	64	65	66	63	129
	65	64	65	64	129
5	62	67	68	61	129
	67	62	63	66	129
10	60	70	71	59	130
	70	60	61	69	130

Sind beide Zentralräder Hohlräder (Fig. 154), so lautet die Grundbedingung bei gleicher Teilung aller Räder

$$z_1 - z_2 = z_4 - z_3,$$

wobei noch weiter die Bedingungen bestehen

$$z_2 < \frac{1}{2} \cdot z_1, \quad z_3 < \frac{1}{2} \cdot z_4.$$

Wählt man wieder z_1 beliebig, so ergeben sich die günstigsten Verhältnisse, wenn man etwa ansetzt

$$z_2 = \frac{z_1}{2} - 15 - n, \quad z_3 = \frac{z_1}{2} - 15 - n \pm 1, \quad z_4 = z_1 \pm 1. \quad (136)$$

Es wird dann

$$\ddot{u} = + \frac{z_1 + 30 + 2n}{z_1^2 - 28z_1 - 2z_1 \cdot n} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{u} = - \frac{z_1 + 30 + 2n}{z_1^2 - 32z_1 - 2z_1 \cdot n}.$$

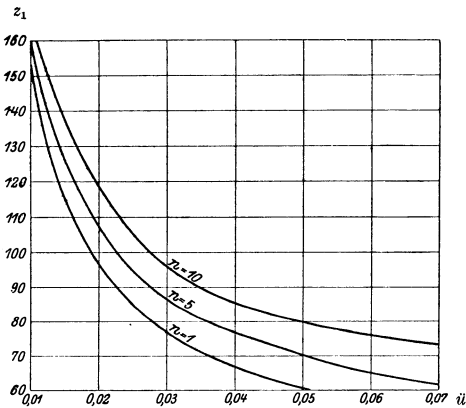


Fig. 160.

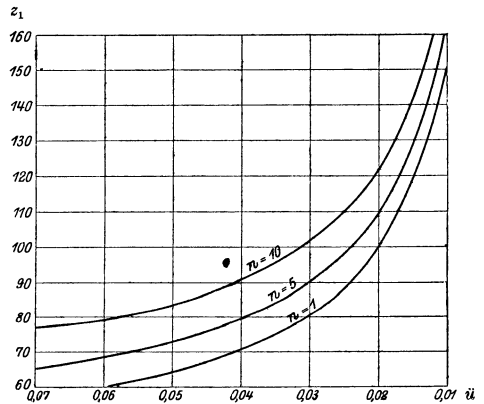


Fig. 161.

Die Auftragung der z_1 in Abhängigkeit von \ddot{u} für verschiedene n ergibt dann die Fig. 160 für den Summanden $+ 1$ in den Gleichungen (136) und die Fig. 161 für den Summanden $- 1$. Ein Vergleich dieser Figuren mit den vorhergehenden lehrt, daß man hier leichter größere Übersetzungsverhältnisse erreichen kann als dort.

Beispiel 98. Die Hauptwelle einer Werkzeugmaschine mache $n_s = 400$ Umdrehungen in der Minute, die Vorschubspindel soll 5 Umdrehungen in der Minute machen bei gleichbleibender Drehrichtung. Anzugeben sind die Zähnezahlen der erforderlichen Räder, wenn die Anordnung der Fig. 154 zugrunde gelegt wird.

Man erhält das Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \frac{5}{400} = 0,0125$$

und entnimmt jetzt der Fig. 160

$n_1 =$	1	5	10
$z_1 =$	130	141	151

Da jedoch mit Rücksicht auf die Formeln (136) für z_2 und z_3 nur gerade Zahlen für z_1 brauchbar sind, so findet man z_1 und entsprechend n etwa nach folgender Zusammenstellung:

n	z_1	z_2	z_3	z_4	$s \cdot \frac{\pi}{\tau}$	\ddot{u}
1	130	49	50	131	81	1 : 80,2
4	140	51	52	141	89	1 : 81,6
9	150	51	52	151	99	1 : 78,8

Der Annäherung wegen entspricht \ddot{u} in den beiden unteren Zeilen nicht genau der Vorschrift; die wirklichen Werte nach Formel (134b) sind in der letzten Spalte angegeben.

Bei der Anordnung nach Fig. 153 erhält man bei überall gleicher Teilung für die Steglänge

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3.$$

Man nimmt wieder z_1 beliebig an und wählt jetzt

$$z_2 = z_1 \pm n, \quad z_3 = z_1 \text{ bzw. } z_1 \pm n, \quad z_4 = 3 z_1 \pm n \text{ bzw. } 3 z_1, \quad (137)$$

welche Gleichungen die vorstehende Bedingung erfüllen. Die Übersetzung gemäß Formel (134 a) lautet dann

$$\ddot{u} = \left(\frac{2 z_1 \pm n}{z_1} \right)^2 \text{ bzw. } 4,$$

letzteres, wenn $z_3 = z_2$ genommen wird.

Auch in den anderen Fällen weicht \ddot{u} nicht viel mehr als eine Einheit von 4 ab, so daß diese Anordnung für größere Übersetzungen keine Bedeutung hat.

Bei Übersetzungen über $1/100$ hinaus muß man die Teilungen der beiden Räderpaare etwas voneinander verschieden nehmen. Auch dafür sind Kurventafeln aufgestellt worden¹¹⁸⁾.

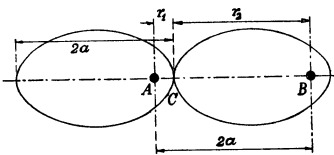


Fig. 162.

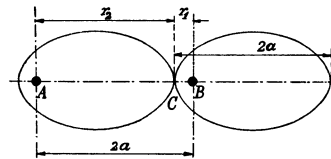


Fig. 163.

Bisweilen wird eine zwischen zwei bestimmten Werten \ddot{u}_1 und \ddot{u}_2 stetig wechselnde Übersetzung verlangt, die durch elliptische Räder erreicht wird, deren Achsen A bzw. B durch je einen Brennpunkt der betreffenden Ellipse gehen.

Die Fig. 162 stellt die eine Grenzlage mit der Übersetzung $\ddot{u}_1 = \frac{r_1}{r_2}$ dar, die Fig. 163 die andere mit der Übersetzung $\ddot{u}_2 = \frac{r_2}{r_1}$. Die Übersetzungsgrenzen können also nicht beliebig gewählt werden, sondern

sind einander reziprok. Die Figuren ergeben ohne weiteres, daß ein ordnungsmäßiges Zusammenarbeiten nur möglich ist, wenn beide Räder gleich sind und den Achsenabstand haben

$$2a = r_1 + r_2. \quad (138)$$

Bei der in Fig. 164 wiedergegebenen beliebigen Lage der beiden Räder zueinander müssen aus der Lage der Fig. 163 gleiche Bögen aufeinander abgerollt sein. Infolgedessen liegt der Berührungspunkt C stets auf der Kreuzungsstelle der Verbindungsgeraden der Brennpunkte \overline{AB} bzw. $\overline{A'B'}$, denn nach den Angaben S. 97 ist ja $\overline{AC} + \overline{A'C} = \overline{BC} + \overline{B'C} = 2a$ und die Winkel bei C sind somit gleich. Außerdem gilt noch gemäß den Fig. 162 und 164

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = r_1 - r_2,$$

wenn a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse bezeichnet.

Quadriert man diese Gleichung und setzt für $2a$ den Wert aus Gleichung (138) ein, so folgt

$$(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4b^2.$$

Durch Auflösen der beiden Klammern erhält man die Größe der kleinen Halbachse zu

$$b = \sqrt{r_1 \cdot r_2} \quad (139)$$

Nun ist das Verhältnis der beiden Grenzübersetzungen

$$\psi = \frac{\dot{u}_1}{\dot{u}_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad (140)$$

Nimmt man die Wurzel hieraus und quadriert die Gleichung (139),

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\psi}, \quad r_1 \cdot r_2 = b^2,$$

so folgt durch Multiplikation $r_1 = b \cdot \sqrt[4]{\psi}$

und durch Division $r_2 = \frac{b}{\sqrt[4]{\psi}}$.

Setzt man beide Werte in die Gleichung (138) ein,

$$2a = b \cdot \left(\sqrt[4]{\psi} + \frac{1}{\sqrt[4]{\psi}} \right),$$

so wird das Halbachsenverhältnis der Räder gegeben durch

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{\psi}}{\sqrt[4]{\psi} + 1}. \quad (141)$$

Natürlich müssen beide Räder die Bedingung erfüllen, daß die Zahn-
teilung auf dem Umfang aufgeht, der den Wert $\pi \cdot (a + b) \cdot \varkappa$ hat. Der
Zahlenwert \varkappa hängt ab von dem Verhältnis $\frac{a-b}{a+b}$ und beträgt³⁰⁾ bei

$\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = 0$	0,05	0,1	0,15	0,2
$\varkappa = 1$	1,00063	1,0025	1,0056	1,0100

Es gilt also

$$\pi(a + b) \cdot \varkappa = z \cdot \tau.$$

Wird hierin für b der Wert aus Formel (141) eingesetzt, so ist

$$a \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sqrt[4]{\psi}}{\sqrt{\psi} + 1} \right) \cdot \varkappa = z \cdot \frac{\tau}{\pi} \quad (142)$$

die Bestimmungsgleichung für die große Achse der Räder und damit
des Achsenabstandes $2a$ bei bestimmter Zähnezahzahl und Teilung τ .

Beispiel 99. Für eine kleine Hobelmaschine ist vorgeschrieben das Ver-
hältnis der beiden Grenzübersetzungen $\psi = \frac{1}{5}$, die Zähnezahzahl $z = 48$ und die
Teilung $\tau = 0,45 \cdot \pi$. Anzugeben ist die Größe der elliptischen Räder.

Man entnimmt der Formel (141) das Halbachsenverhältnis

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{1 : 9}}{\sqrt{1 : 9} + 1} = \frac{2 \cdot 0,5775}{1,3333} = 0,866$$

und berechnet nun

$$\frac{1 - \frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{0,154}{1,866} = 0,072,$$

also

$$\varkappa \approx 1,00063 + \frac{0,22}{0,5} \cdot 0,00187 = 1,00145.$$

Damit liefert die Gleichung (142)

$$a = \frac{48 \cdot 0,45}{1,866 \cdot 1,00145} = 11,56 \text{ cm},$$

woraus der Achsenabstand folgt $2a = 23,12 \text{ cm}$, die kleine Halbachse

$$b = 11,56 \cdot 0,866 = 10,0 \text{ cm},$$

die beiden Brennpunktsabstände

$$r_1 = 10,0 \cdot 0,5775 \approx 5,78 \text{ cm},$$

$$r_2 = 10,0 : 0,5775 = 17,34 \text{ cm}.$$

Die Übersetzung schwankt regelmäßig zwischen

$$\ddot{u}_1 = \frac{5,78}{17,34} = \frac{1}{3}, \quad \ddot{u}_2 = \frac{17,34}{5,78} = 3.$$

11. Die Reibungsräder.

Auf der Lastwelle A sitze etwa eine Seiltrommel vom Halbmesser R , auf die das Lastseil aufgewunden werden soll (Fig. 165); das Lastmoment ist demnach $M_L = Q \cdot R$. In den Lagern der Welle vom Halbmesser r_1 treten Reibungswiderstände auf, die ein Moment M'_W ergeben. Um die Welle A anzutreiben, befindet sich auf der parallelen Welle B vom Halbmesser r_2 ein Reibungsrاد vom Halbmesser R_2 , das mit der Kraft P an der Stelle C gegen ein entsprechendes, auf der Welle A sitzendes Rad vom Halbmesser R_1 gedrückt wird.

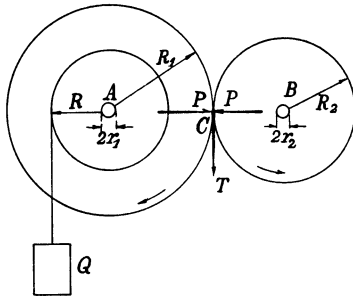


Fig. 165.

Es liegt also der Fall der Fig. 114 vor, und tatsächlich ist der Betrieb nur möglich, wenn mindestens die antreibende Scheibe sich etwas elastisch zusammendrückt, so daß die Kraft P eine kleine Verschiebung f entgegengesetzt zur Drehrichtung erfährt. So erklärt sich, daß die Anordnung versagt, wenn das Antriebsrad etwa aus gehärtetem, glattem Stahl ist¹¹⁹).

Die Druckkraft P ruft zwischen den Rädern die Umfangskraft T hervor, die in Fig. 165 an der Welle A angreifend gezeichnet ist, und es gilt naturgemäß $T \leq \mu \cdot P$, bzw. wenn mit einer ζ fachen Sicherheit gerechnet wird,

$$\zeta \cdot T = \mu \cdot P.$$

Bei der häufig vorkommenden Lage der Kräfte P und Q senkrecht zueinander und, wenn nach G_1 das Gewicht der Welle A mit der Seiltrommel und dem Reibungsrاد bedeutet, hat das Moment der Lagerreibung den Wert

$$M'_W = \mu_1 \cdot \sqrt{P^2 + (Q + G_1)^2} \cdot r_1 = \mu_1 \cdot P \cdot r_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{Q + G_1}{P}\right)^2}.$$

Das Moment des Rollwiderstandes an dem Reibungsrاد der Welle A ist nach Formel (79)

$$M'_R = P \cdot f \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Somit gilt für die angetriebene Welle

$$T \cdot R_1 = M'_L + M'_W + M'_R$$

und entsprechend für die treibende Welle

¹¹⁹, Lonchamp, Bull. de la Soc. industrielle de Mulhouse 1897.

mit

$$M_A = T \cdot R_2 + M''_W + M''_R$$

$$M''_W = \mu_1 \cdot P \cdot r_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{G_2}{P}\right)^2},$$

worin G_2 das Gewicht der Welle B mit dem darauf sitzenden Reibungsräder usw. angibt, und

$$M''_R = P \cdot f \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Aus der Gleichung für $\mathfrak{S} \cdot T$ und der Momentengleichung für die Welle A erhält man

$$\frac{\mu}{\mathfrak{S}} \cdot P \cdot R_1 = M_L + M'_W + M'_R,$$

also die erforderliche Anpressungskraft

$$P = \frac{\mathfrak{S} \cdot M_L}{\mu \cdot R_1 \cdot \eta_1}, \quad (143)$$

worin der Wirkungsgrad der getriebenen Welle ist

$$\eta_1 = 1 - \frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{Q + G_1}{P}\right)^2} + f \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \right]. \quad (144)$$

Ebenso erhält man aus der Momentengleichung für die Welle B mit den obigen Werten für T und P

$$M_A = \frac{M_L}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}, \quad (145)$$

worin der Wirkungsgrad der Welle B sich ergibt aus

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{G_2}{P}\right)^2} + f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \right]. \quad (146)$$

Als Reibungsziffer ist festgestellt worden bei Gußeisen auf

Gußeisen, ziemlich rau	$\mu = 0,22$ ²⁵⁾
„ , glatt gelaufen	0,16 ²⁶⁾
Holz: Eiche	0,30 ³¹⁾
Ulme	0,36 ³¹⁾
Buche	0,29 ³¹⁾
Pappel	0,35 ³¹⁾
Pockholz	0,22 ¹¹⁹⁾
Lederbelag	0,33 ¹¹⁹⁾
gepreßtem Hanfpapier	0,40 ¹¹⁹⁾

Beispiel 100. Für den Reibungshammer nach Fig. 166 mit dem Bärge­wicht $Q = 150$ kg ist die Anpressungskraft P zu bestimmen und die Breite b der hölzernen Treibstange.

Aus der Gleichung

$$2 \cdot \mu \cdot P = \mathfrak{S} \cdot G$$

folgt sogleich mit $\mu = 0,30$ für Gußeisen und Eichenholz und $\zeta = 1,5$

$$P = \frac{1,5 \cdot 150}{2 \cdot 0,30} = 375 \text{ kg.}$$

Die ebene Fläche des Holzes, deren Einzelteile nicht nach der Seite ausweichen können, darf ziemlich hoch belastet werden; man wählt gewöhnlich $k = 20 \text{ kg/cm}$. Damit wird die Breite

$$b = \frac{P}{k} = \frac{375}{20} \approx 19 \text{ cm.}$$

Um den Achsdruck P zu verringern, werden die Reibungsräder für parallele Wellen gewöhnlich als Keilnutenräder ausgeführt (Fig. 167).

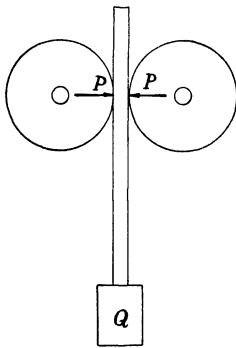


Fig. 166.

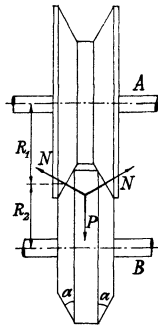


Fig. 167.

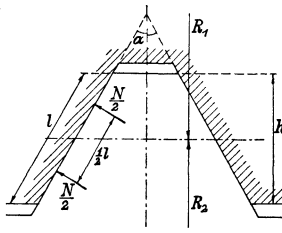


Fig. 168.

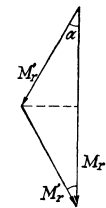


Fig. 169.

Die senkrecht zu den Achsen gerichtete Druckkraft P wird aufgenommen durch die senkrecht zu den Richtungsflächen wirkenden

den Kräfte N ; zwischen ihnen besteht der Zusammenhang $P = 2 N \cdot \sin \alpha$. Somit gilt für die Umfangskraft

$$\zeta \cdot T = 2 \cdot \mu \cdot N = \frac{\mu}{\sin \alpha} \cdot P,$$

(vgl. Beispiel 45).

Bei der Bestimmung des Wirkungsgrades dieses Getriebes ist zu beachten, daß nur die um R_1 bzw. R_2 von den Radachsen entfernten Stellen aufeinanderrollen; alle anderen gleiten, weil sie verschiedene Geschwindigkeiten haben, um so mehr, je weiter sie von der Rillenmitte entfernt sind. Das in jeder Reibungsfläche entstehende Reibungsmoment kann nach Fig. 168 angesetzt werden zu $M'_r = \mu \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{l}{2}$, die sich für die Mittelebene zusammensetzen zu dem Gesamtmoment (Fig. 169)

$$M_r = \frac{2 M'_r}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \cdot N \cdot l \cdot \frac{\mu}{\cos \alpha},$$

Mit $N = \frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$ geht dieser Ausdruck über in

$$M_r = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot \frac{\mu}{\sin 2\alpha}.$$

Dieses Drehmoment ist sowohl zu den widerstehenden Momenten der Welle A als auch der Welle B zu addieren, und durch die gleiche Rechnung wie oben ergibt sich

$$P = \frac{\mathfrak{S} \cdot M_L \cdot \sin \alpha}{\mu \cdot R_1 \cdot \eta_1} \quad (147)$$

mit

$$\eta_1 = 1 - \frac{\mathfrak{S} \cdot \sin \alpha}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{Q + G_1}{P} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{R_1} \cdot \frac{\mu}{\sin 2\alpha} + f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (148)$$

Ferner gilt wieder die Gleichung (140) mit

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{\mathfrak{S} \cdot \sin \alpha}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{G_2}{P} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{R_2} \cdot \frac{\mu}{\sin 2\alpha} + f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (149)$$

Bei den zylindrischen Rädern von der Breite b cm, die sich nur in einer schmalen Druckfläche berühren, wird mit Rücksicht auf geringe Abnutzung nur

$$k = \frac{P}{b} = 5 \text{ kg/cm}$$

zugelassen. Bei den Keilnutenrädern, die in verhältnismäßig großen Gußeisenflächen aneinanderliegen, in denen keine Verdrückung erfolgt, ist zulässig

$$k = \frac{N}{l} = 35 \text{ kg/cm.}$$

Beispiel 101. Eine Winde soll die Last $Q = 300$ kg an dem Trommelhalbmesser $R = 8$ cm mit der Geschwindigkeit $v = 1$ m/sk heben. Der Antrieb erfolgt durch Vermittlung eines Zahnradgertriebes von der Übersetzung $\ddot{u}_1 = 1 : 6$ und eines Reibungsrädergertriebes von einem Elektromotor aus, der in der Minute $n_1 = 1200$ Umdrehungen macht. Anzugeben sind die Abmessungen, der Achsdruck und der Wirkungsgrad des Reibungsgertriebes.

Für die Trommel gilt die Formel (25), mithin ist ihre Umdrehungszahl in der Minute

$$n = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{60 \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 8} \approx 120.$$

Die erforderliche Übersetzung ist hiernach

$$\ddot{u} = \frac{n}{n_1} = \frac{120}{1200} = \frac{1}{10}.$$

Mit der Zahnradübersetzung $\ddot{u}_1 = \frac{1}{6}$ bleibt für die Reibungsräder die Übersetzung $\ddot{u}_2 = \frac{5}{3}$.

Wählt man jetzt als Durchmesser der Vorgelegewelle $d_1 = 5$ cm, der Antriebswelle $d_2 = 4$ cm, des auf der Vorgelegewelle sitzenden Reibungsrades $D_1 = 40$ cm, so erhält das auf der Antriebswelle sitzende den Durchmesser

$$D_2 = \frac{5}{3} \cdot 40 = 24 \text{ cm,}$$

beide bis zur Mitte der Rillen gemessen.

Mit dem Wirkungsgrad der Trommel $\eta'_0 = 0,96$ und dem der Zahnradübersetzung $\eta''_0 = 0,925$ ist das Lastmoment des Reibungsgetriebes

$$M_L = Q \cdot R \cdot \ddot{u}_1 \cdot \frac{1}{\eta'_0} \cdot \frac{1}{\eta''_0}.$$

Wird für die Keilräder wie üblich gewählt $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$, also $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1,09}} = 0,957$ und $\sin \alpha = \frac{0,3}{\sqrt{1,09}} = 0,288$, und ihre Tiefe $h = 1,0$ cm angenommen, so wird die Länge der Berührungsfläche

$$l = \frac{h}{\cos \alpha} = 1,045 \text{ cm.}$$

Mit dem Hebelarm des Rollwiderstandes $f = 0,05$ mm, der Reibungsziffer $\mu = 0,16$ für glattgelaufene, trockene Gußeisenräder, der Zapfenreibungsziffer beim Anlaufen i. M. $\mu_1 \approx 0,04$, der Sicherheit $\mathfrak{S} = 1,5$ gegen Änderung der Reibungsziffer μ und gegen starke Überlastung, und dem Gewicht der gesamten Welle $G_1 = 22$ kg wird, wenn noch vorläufig $P \approx 65$ kg geschätzt wird, nach Formel (148)

$$\begin{aligned} \eta'_1 = 1 - \frac{1,5 \cdot 0,288}{0,16} \cdot \left[0,04 \cdot \frac{5}{40} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{22}{65}\right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,045^2 \cdot 0,16}{20 \cdot 2 \cdot 0,288} \right. \\ \left. + 0,005 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right) \right] = 1 - 2,70 \cdot (0,00528 + 0,00821 + 0,00067) = 0,962, \end{aligned}$$

mithin wird nach Formel (147)

$$P = \frac{1,5 \cdot 300 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 0,288}{0,96 \cdot 0,925 \cdot 6 \cdot 0,16 \cdot 20 \cdot 0,962} = 63,3 \text{ kg.}$$

Hiermit erhält man

$$N = \frac{P}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{63,3}{2 \cdot 0,288} = 110 \text{ kg.}$$

Die Anzahl i der Nuten bestimmt sich dann aus

$$k = \frac{N}{i \cdot l} \quad \text{zu} \quad i = \frac{N}{k \cdot l} = \frac{110}{35 \cdot 1,045} \approx 3.$$

Mit den obigen Zahlenwerten und dem Gewicht $G_2 = 20$ kg liefert Formel (149)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{1,5 \cdot 0,288}{0,16} \cdot \left[0,04 \cdot \frac{4}{24} \cdot 1,058 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,045^2 \cdot 0,16}{12 \cdot 2 \cdot 0,288} + 0,005 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right) \right] \\ = 1 + 2,70 \cdot (0,00705 + 0,01263 + 0,00067) = 1,055, \end{aligned}$$

also

$$\eta_2 = 0,947$$

und

$$\eta = 0,947 \cdot 0,962 \approx 0,91.$$

Hiermit folgt das erforderliche Antriebsmoment nach Formel (145) zu

$$\begin{aligned} M_A = \frac{300 \cdot 8 \cdot 24}{6 \cdot 0,925 \cdot 0,96 \cdot 0,91 \cdot 40} \\ = 297 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Das Andrücken kann durch eine Hebelanordnung nach Fig. 170 erfolgen.

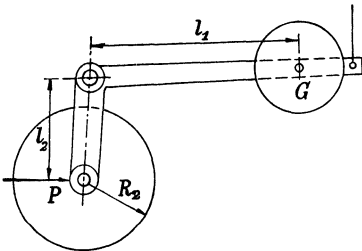


Fig. 170.

Der Antrieb ist ausgerückt, sobald der Hebel l_1 durch einen Schnurzug angehoben wird. Ist etwa $l_2 = 30$ cm und $G = 25$ kg, so wird die Länge des Belastungshebels

$$l_1 = l_2 \cdot \frac{P}{G} = \frac{30 \cdot 63,3}{25} = 66 \text{ cm.}$$

Man bemerkt, daß sich Reibungsrädergetriebe nur für verhältnismäßig kleine Kräfte eignen. Sie sind außerdem nicht für geringe Geschwindigkeiten anwendbar.

Häufiger als zur Verbindung paralleler Wellen finden die Reibungsräder Anwendung bei sich senkrecht kreuzenden Achsen als Diskusgetriebe, das bei Verschiebung des Antriebsrades vom Halbmesser R_2 auf der genutzten Welle eine beliebige Übersetzung und sogar die Umsteuerung gestattet (Fig. 171).

Da die Antriebsscheibe meist einen Leder- oder Papierbelag hat, während die getriebene Scheibe aus glattem Gußeisen besteht, so drückt sich nur die erstere unter der Kraft P zusammen, und man kann etwa annehmen $f = 3,0$ mm. Die zylindrische Antriebscheibe von der Breite b ruft an der getriebenen Scheibe ein Reibmoment $M_r = \mu \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{2}$ hervor, dessen

Gegenmoment an der Treibscheibe nur die Wirkung hat, daß sich die Lagerbelastungen ein wenig ändern. Die Kraft P bewirkt ferner an dem Lager der Welle A Spurzapfenreibung, während das Traglager nur durch das Gewicht G_1 der Welle und der getriebenen Scheibe, sowie die Reibungskraft $\mu \cdot P$ belastet wird.

Es gelten demgemäß die Formeln

$$\eta_1 = 1 - \frac{\varrho}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \left(\frac{G_1}{P} \pm \mu \right) + \mu_2 \cdot \frac{r_0 + r_1}{2 R_1} + \frac{\mu}{4} \cdot \frac{b}{R_1} \right], \quad (150a)$$

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{\varrho}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sqrt{\left(\frac{G_2}{P} \mp \mu \right)^2 + 1} + 1 + \frac{f}{R_2} \right], \quad (150b)$$

worin μ_2 die Reibungsziffer der Spurzapfenreibung bedeutet. Je nach der Drehrichtung ist das Vorzeichen von μ in dem Glied der Tragzapfenreibung zu wählen.

Beispiel 102. An einem Diskusgetriebe nach Fig. 171 sei $d_1 = 5$ cm, $d_2 = 4$ cm, $d_0 = 8$ cm, $b = 5$ cm, $R_{1 \max} = 40$ cm, $R_{1 \min} = 8$ cm, $R_2 = 15$ cm, $G_1 = 45$ kg, $G_2 = 35$ kg, $\mu = 0,33$ (Lederbelag), $\mu_1 = \mu_2 \approx 0,050$, $f = 0,30$ cm, das Lastmoment $M_L = 50$ cmkg. Zu bestimmen ist die Anpressungskraft P und der Wirkungsgrad des Getriebes.

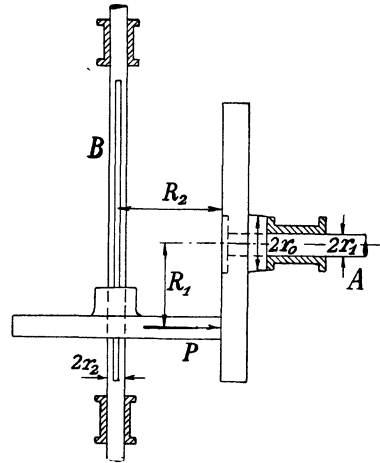


Fig. 171.

Man wählt bei $R_{1\text{min}}$ die Sicherheit $\zeta = 1$ und erhält nach Formel (150a), wenn vorläufig $P = 25$ kg geschätzt wird,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 - \frac{1}{0,33} \cdot \left[0,050 \cdot \frac{5}{16} \cdot \left(\frac{45}{25} + 0,33 \right) + 0,050 \cdot \frac{13}{2 \cdot 16} + \frac{0,33}{4} \cdot \frac{5}{16} \right] \\ &= 1 - 3,030 \cdot (0,0333 + 0,0203 + 0,0258) = 0,759. \end{aligned}$$

Damit wird nach Formel (143) die Anpressungskraft

$$P = \frac{1 \cdot 50}{0,33 \cdot 8 \cdot 0,759} \approx 25 \text{ kg},$$

der entspricht

$$k = \frac{25}{5} = 5 \text{ kg/cm}.$$

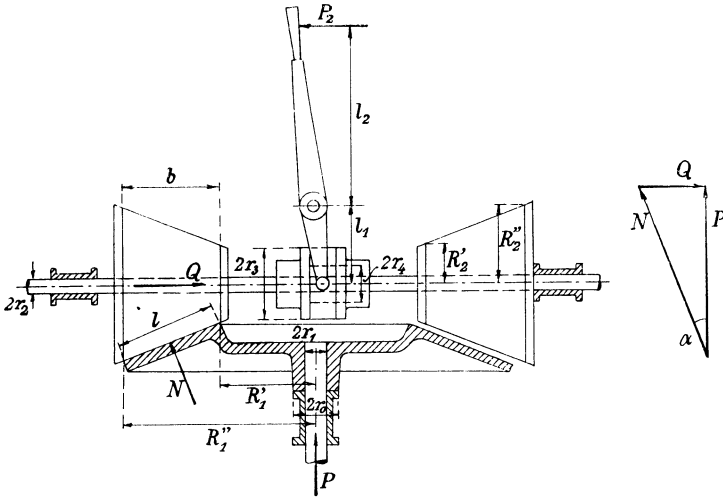


Fig. 172.

Nach Formel (150b) ergibt sich dann der Wirkungsgrad der Antriebswelle aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2} &= 1 + \frac{1}{0,33} \cdot \left[0,050 \cdot \frac{4}{30} \cdot \left(1 + \left(\frac{35}{25} - 0,33 \right)^2 + \frac{0,30}{15} \right) \right] \\ &= 1 + 3,030 \cdot (0,00976 + 0,0200) = 1,0901 \end{aligned}$$

zu $\eta_2 = 0,918$.

Der Gesamtwirkungsgrad ist in dem Fall also $\eta = 0,918 \cdot 0,759 = 0,697$.

Greift die Diskusscheibe am äußersten Halbmesser $R_{1\text{max}}$ an, so ist bei gleichem Lastmoment der Sicherheit jetzt

$$\zeta = 1 \cdot \frac{40}{8} = 5.$$

Der Wirkungsgrad η_1 bleibt unverändert, da das Verhältnis $\frac{\zeta}{R_1}$ sich nicht geändert hat; dagegen wird

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{5}{0,33} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 0,00976 + 0,0200 \right) = 1,333,$$

also $\eta_2 = 0,750$ und somit

$$\eta = 0,750 \cdot 0,759 = 0,569,$$

übereinstimmend mit dem Messungsergebnis¹¹⁹⁾.

Durch die ballige Ausführung der Treibscheibe kann der Wirkungsgrad noch etwas verbessert werden.

Für das kegelförmige Wendegetriebe nach Fig. 172 erhält man mit den mittleren Halbmessern R_1 bzw. R_2 der treibenden und getriebenen Scheibe

$$\mu \cdot N = T \cdot \mathfrak{S},$$

ferner für die erste Welle

$$T \cdot R_1 = M_L + \mu_1 \cdot r_1 \cdot (G_1 \pm \mu \cdot N) + \mu_2 \cdot \frac{r_0 + r_1}{2} \cdot P + N \cdot f \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Daraus folgt wieder

$$N = \frac{\mathfrak{S} \cdot M_2}{\mu \cdot R_1 \cdot \eta_1} \quad (151)$$

mit

$$\eta_1 = 1 - \frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \left(\frac{G_1}{N} \pm \mu \right) + \mu_2 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_0 + r_1}{2 R_1} + f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (152a)$$

Entsprechend ergibt sich für die zweite Welle aus

$$M_A = T \cdot R_2 + \mu_1 \cdot r_2 \cdot \sqrt{P^2 + (G_2 \mp \mu \cdot N)^2} + \mu_2 \cdot Q \cdot \frac{r_3 + r_4}{2} + N \cdot f \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

wieder die Formel (145) für M_A mit

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{\mathfrak{S}}{\mu} \cdot \left[\mu_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{G_2}{N} \mp \mu \right)^2} + \mu_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{r_3 + r_4}{2 R_2} + f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (152b)$$

Die Kraft, mit der der Umsteuerhebel anzudrücken ist, wird bestimmt zu

$$P_2 = Q \cdot \frac{l_1}{l_2} = N \cdot \sin \alpha \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Beispiel 103. Ein Reibungswendegetriebe nach Fig. 172 soll $M_L = 300$ cmkg übertragen bei der Übersetzung $\ddot{u} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{3}{2}$ und der Sicherheit $\mathfrak{S} = \frac{4}{3}$. Gegeben sei

$$\begin{array}{lll} 2 R_1 = 36 \text{ cm}, & 2 R_2 = 24 \text{ cm}, & \mu = 0,36, \\ 2 r_1 = 4,5 \text{ ,,}, & 2 r_2 = 3,5 \text{ ,,}, & \mu_1 = 0,050, \\ 2 r_0 = 8 \text{ ,,}, & 2 r_3 = 10 \text{ ,,}, & \mu_2 = 0,050, \\ G_1 = 25 \text{ kg}, & 2 r_4 = 6 \text{ ,,}, & f = 0,15 \text{ cm}, \\ l_1 = 18 \text{ cm}, & G_2 = 25 \text{ kg}, & l_2 = 50 \text{ cm}. \end{array}$$

Zu bestimmen ist die Anpressungskraft N , die Radbreite l , der Wirkungsgrad η , das erforderliche Antriebsmoment M_A und die Druckkraft P_2 .

Man erhält aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

$$\sin \alpha = 0,555 \quad \text{und} \quad \cos \alpha = 0,833.$$

Die Formel (152a) ergibt dann, wenn vorläufig geschätzt wird $N \approx 70$ kg

$$\eta_1 = 1 - \frac{4}{3 \cdot 0,36} \cdot \left[0,050 \cdot \frac{4,5}{36} \cdot \left(\frac{25}{70} + 0,36 \right) + 0,050 \cdot 0,833 \cdot \frac{12,5}{2 \cdot 36} + 0,15 \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} \right) \right] = 1 - 3,70 \cdot (0,00448 + 0,00723 + 0,02084) = 0,888.$$

Damit folgt

$$N = \frac{4 \cdot 300}{3 \cdot 18 \cdot 0,36 \cdot 0,888} = 69,7 \text{ kg.}$$

Hiermit wird die Radbreite mit $k = 5$ kg/cm

$$l = \frac{69,7}{5} \approx 14 \text{ cm,}$$

und ferner

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_1 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos \alpha = 18 - 7 \cdot 0,833 \approx 12 \text{ cm,} \\ R''_1 &= R_1 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos \alpha = 18 + 6 = 24 \text{ ,,} \\ R'_2 &= R_2 - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin \alpha = 12 - 7 \cdot 0,555 \approx 8 \text{ ,,} \\ R''_2 &= R_2 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sin \alpha = 12 + 4 = 16 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Die Formel (152b) liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2} &= 1 + \frac{4}{3 \cdot 0,36} \cdot \left[0,050 \cdot \frac{3,5}{24} \cdot \sqrt{0,833^2 + \left(\frac{25}{70} - 0,36 \right)^2} + 0,050 \cdot 0,555 \cdot \frac{16}{2 \cdot 24} + 0,15 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} \right) \right] \\ &= 1 + 3,70 \cdot (0,00607 + 0,00925 + 0,02084) = 1,134. \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad beträgt also

$$\eta = \frac{0,888}{1,134} = 0,784.$$

Damit wird das Antriebsmoment

$$M_A = \frac{300 \cdot 2}{0,784 \cdot 3} = 255 \text{ cmkg.}$$

und die Druckkraft am Umsteuerhebel

$$P_2 = 70 \cdot 0,555 \cdot \frac{18}{50} = 14 \text{ kg.}$$

Der Achsdruck wird völlig aufgehoben bei dem Reibungsgetriebe der Zentrator-Kupplung. Sie besteht aus 3 elastischen Stahlringen, die auf der Stahlbuchse der schnellaufenden Antriebswelle abrollen (Fig. 173). Mit der gegenüberliegenden Seite rollen sie auf einem feststehenden Gehäuse. In dem einen Ring sitzt eine Scheibe, die sich auf einem Zapfen drehen kann, der seinerseits in der einen Abschlußwand befestigt ist, die die langsam umlaufende Welle antreibt. Das Ganze ist also ein Planetengetriebe nach Fig. 150. Die Anpressungskraft Q wird dadurch erzeugt, daß der geschlitzte

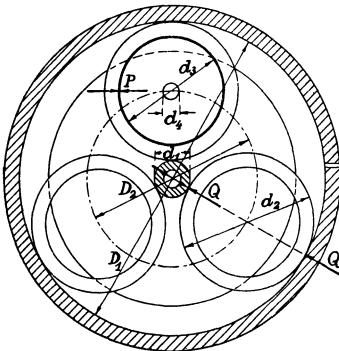


Fig. 173.

feststehende, außen kegelförmige Ring mehr oder weniger durch das äußere, hier nicht gezeichnete Gehäuse zusammengedrückt werden kann.

Das Drehmoment der angetriebenen Welle ist

$$M_L = P \cdot \frac{1}{2} \cdot D_2$$

und das Antriebsmoment mit Hilfe der Formel (133)

$$M_A = \frac{M_L + \mu \cdot P \cdot \frac{1}{2} d_4}{1 + \frac{D_1}{d_1}} + 3 \cdot Q \cdot f \cdot \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right) + 3 \cdot Q \cdot f \cdot \left(1 + \frac{d_2}{D_1}\right) \cdot \frac{d_1}{d_2} + \mu \cdot P \cdot \frac{1}{2} d_3 \cdot \frac{d_1}{d_2},$$

ferner gilt

$$\mathfrak{S} \cdot M_A = \mu \cdot 3Q \cdot \frac{d_1}{2}.$$

Hiermit und mit dem obigen Wert für M_L geht die Gleichung über in

$$M_A = \frac{M_L}{1 + \frac{D_1}{d_1}} \cdot \frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_2} \quad (153)$$

mit

$$\eta_1 = 1 - \frac{2 \cdot f \cdot \mathfrak{S}}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{d_1} + \frac{2}{d_2} + \frac{1}{D_1}\right), \quad (154 a)$$

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{\mu \cdot d_3}{D_2} \cdot \left(\frac{d_4}{d_3} + \frac{d_1}{d_2} + \frac{D_1}{d_2}\right). \quad (154 b)$$

Beispiel 104. Eine Zentrortkupplung soll das Lastmoment $M_L = 120$ cmkg bei $\mathfrak{S} = \frac{2}{3}$ facher Sicherheit übertragen und die Drehung der Welle im Verhältnis $\ddot{u} = \frac{1}{8}$ übersetzen. Gegeben ist $d_1 = 24$ mm. Anzugeben sind die übrigen Größen und der Wirkungsgrad, sowie das erforderliche Antriebsmoment.

Aus dem Übersetzungsverhältnis $\frac{1}{\ddot{u}} = 1 + \frac{D_1}{d_1}$ folgt

$$D_1 = (\ddot{u} - 1) \cdot d_1 = 8 \cdot 24 = 192 \text{ mm.}$$

Hiermit ergibt sich

$$d_2 = \frac{1}{2}(D_1 - d_1) = 84 \text{ mm}$$

und

$$D_2 = d_1 + d_2 = 106 \text{ mm.}$$

Mit $f = 0,05$ mm und $\mu = 0,10$ bei geschmierten Flächen wird nach Formel (154 a)

$$\eta_1 = 1 - \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 4}{0,10 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{2}{84} + \frac{1}{192}\right) = 0,917$$

und mit $d_3 = 64$ mm, $d_4 = 16$ mm wird nach Formel (154 b)

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{0,10 \cdot 64}{106} \cdot \left(\frac{16}{64} + \frac{24}{84} + \frac{192}{84}\right) = 1,170,$$

also

$$\eta = \frac{0,917}{1,170} = 0,783.$$

Das Ergebnis bleibt praktisch unverändert, wenn etwa bei guter Schmierung und sehr glatten Flächen $\mu = 0,08$ eingesetzt wird.

Das Antriebsmoment wird hiernach gemäß Formel (153)

$$M_A = \frac{120}{1 + \frac{192}{24}} \cdot \frac{1}{0,783} \approx 17 \text{ cmkg}$$

und die Anpressungskraft

$$Q = \frac{2 \cdot 4 \cdot 17}{3 \cdot 0,10 \cdot 3 \cdot 2,4} = 63 \text{ kg.}$$

12. Die Zahnräder.

a) **Die zyklischen Kurven.** Durch Abrollen eines Kreises auf einer Geraden entsteht die Zyklode, und zwar die gemeine Zyklode, wenn der erzeugende

Punkt auf dem Kreisumfang liegt. Man zeichnet sie, indem man den Umfang des Kreises vom Halbmesser r in eine Anzahl beliebiger, aber vorteilhaft gleicher Teile teilt und diese Teile auf der Geraden abträgt (Fig. 174). Wenn nun Punkt 1 des Kreises mit Punkt 1' der Geraden zusammenfällt, hat der Anfangspunkt A sich um denselben Betrag gehoben, wie Punkt 1 sich gesenkt. Man zieht also die zur Rollgeraden parallele durch 1, nimmt die Sehne $\overline{1A}$ in den Zirkel und schlägt damit aus 1' einen Kreisbogen, der die durch 1 gezogene Parallele in dem gesuchten Kurvenpunkt 1'' schneidet usw. Aus der Konstruktion folgt sogleich die Gleichung der Kurve. Die Abszisse auf der Geraden ist

$$x = r \cdot \varphi - r \cdot \sin \varphi = r \cdot (\varphi - \sin \varphi),$$

und die Ordinate senkrecht hierzu ist

$$y = r - r \cdot \cos \varphi = r \cdot (1 - \cos \varphi). \tag{155}$$

Liegt der erzeugende Punkt außerhalb des Rollkreises (Fig. 175), so entsteht die verlängerte Zyklode, liegt er innerhalb des Kreises, die verkürzte (Fig. 173). Man zeichnet sie, indem man wieder die Kreisteile 1, 2, 3 ... auf der Geraden als 1', 2', 3' ... abträgt, in diesen Punkten die Lote $\overline{1'''} , \overline{2'''} , \overline{3'''} \dots$ errichtet bis nach der Bahn des Kreismittelpunktes O und von dort einen Kreisbogen mit $OA = a$ schlägt. Der Punkt 1'', 2'', ... in

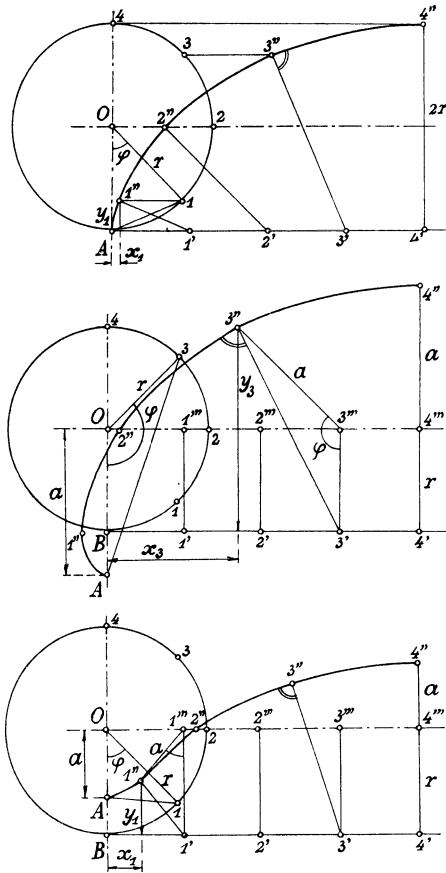


Fig. 174—176.

dem dieser Kreisbogen von dem aus 1', 2' ... mit der Sehne $\overline{1A} , \overline{2A} \dots$ geschlagenen Bogen geschnitten wird, ist der zugehörige Punkt der Kurve. Als Gleichungen der Kurven erhält man wie oben

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \varphi - a \cdot \sin \varphi, \\ y &= r - a \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \tag{156}$$

Bewegt sich der Rollkreis vom Halbmesser r außen auf dem Umfang eines zweiten Kreises vom Halbmesser R , so entsteht die Epizykloide (Fig. 177). Läuft der Rollkreis innen auf dem Umfang des Grundkreises, so entsteht die

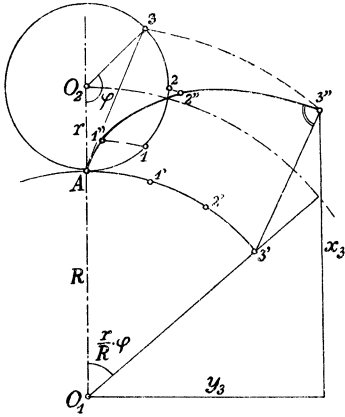


Fig. 177.

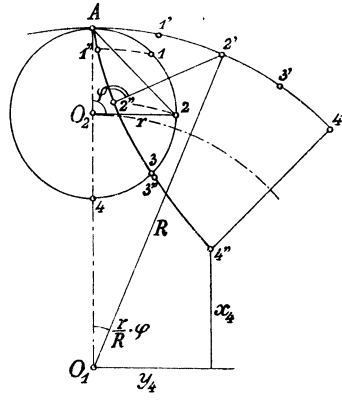


Fig. 178.

Hypozykloide (Fig. 178). Bei beiden unterscheidet man wieder je nach der Lage des erzeugenden Punktes zum Rollkreisumfang die gemeine, die verlängerte und die verkürzte Kurve.

Die Konstruktion ist die gleiche wie oben, nur treten an die Stelle der Lote die durch die betreffenden Punkte des Grundkreises gezogenen Mittelpunktsstrahlen. Die Gleichungen der Kurven ergeben sich leicht zu

$$\begin{aligned} x &= (R \pm r) \cdot \cos\left(\frac{r}{R} \cdot \varphi\right) \mp a \cdot \cos\left(\frac{R \pm r}{R} \cdot \varphi\right), \\ y &= (R \pm r) \cdot \sin\left(\frac{r}{R} \cdot \varphi\right) - a \cdot \sin\left(\frac{R \pm r}{R} \cdot \varphi\right), \end{aligned} \quad (157)$$

worin die oberen Vorzeichen für die Epizykloide, die unteren für die Hypozykloide gelten.

Wird $r = \infty$, so geht die Epizykloide über in die Evolvente (Fig. 179). Sie wird konstruiert, indem man den Kreis vom Halbmesser R in gleiche Teile teilt, in jedem Teilpunkt die Tangente an den Kreis zieht und die Länge der Tangente gleich der Bogenlänge vom Teilpunkt bis zum Anfangspunkt A macht. Ihre Gleichungen sind

$$\begin{aligned} x &= r \cdot (\cos \varphi + \varphi \cdot \sin \varphi), \\ y &= r \cdot (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi). \end{aligned} \quad (158)$$

Gemeinsam ist allen zyklischen Kurven die Eigenschaft, daß die Normale in irgendeinem Punkt $1''$, $2'' \dots$ durch den Berührungspunkt $1'$, $2' \dots$ des rollenden Kreises und des Grundkreises für die betreffende Stelle geht, was sich aus der Aufzeichnung der Kurven sofort ergibt.

b) Allgemeine Darlegungen. Reibungsräder eignen sich im allgemeinen nur für verhältnismäßig kleine Kräfte, bei größeren Kräften oder

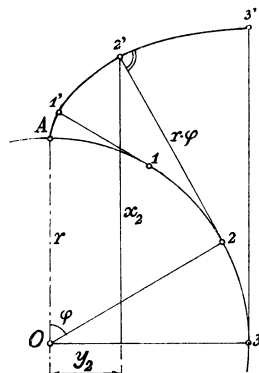


Fig. 179.

langsamen Bewegungen sind ineinandergreifende Zahnräder zu nehmen. Man unterscheidet die Stirnräder bei parallelen Wellen, die Kegelräder bei sich schneidenden Wellen, die Schraubenräder bei sich kreuzenden Wellen.

Bei den Stirnrädern bezeichnet man als Teilkreise diejenigen, mit denen entsprechende Reibungsräder aufeinanderrollen würden, in denen also die Umfangsgeschwindigkeiten beider Räder dieselben sind.

In Fig. 180 seien aus zwei Stirnrädern mit den Achsen O_1 und O_2 die augenblicklich ineinandergreifenden Zähne herausgeschnitten. Da

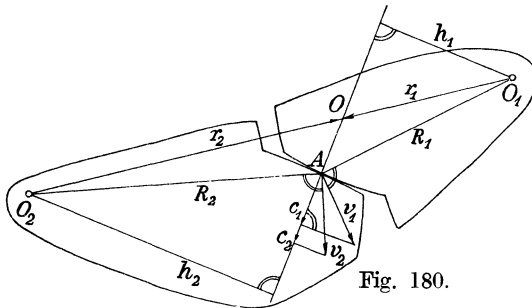


Fig. 180.

die beiden Zahndruckkräfte sich im Berührungspunkt A aufheben sollen, so müssen die Zahnprofile so bestimmt werden, daß sie in jedem Berührungspunkt dieselbe Normale haben. Die Halbmesser nach dem augenblicklichen

Berührungspunkt A seien R_1 und R_2 , die zu

ihnen senkrechten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 .

Zerlegt man die v in c_1 bzw. c_2 in Richtung der gemeinsamen Berührungsnormale beider Zahnkurven und senkrecht dazu, fällt ferner die Lote h_1 und h_2 von den Mittelpunkten auf die Berührungsnormale, so ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken für beide Räder

$$\frac{c}{v} = \frac{h}{R}.$$

Da nun bei ordnungsmäßigem Arbeiten der Räder die Berührung dauernd bestehen bleiben muß, so kann nur $c_1 = c_2$ sein, also

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{v_2}{R_2} : \frac{v_1}{R_1}.$$

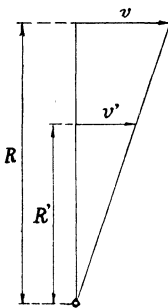


Fig. 181.

Zieht man jetzt noch die Verbindungslinie O_1O_2 der Radmittelpunkte und bezeichnet die Länge bis zum Schnittpunkt mit der Normalen als r_1 und r_2 , so folgt aus den entstandenen ähnlichen Dreiecken

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

mithin ist

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{R_2} : \frac{v_1}{R_1}.$$

Da nun die Räder gleichmäßig umlaufen sollen, so muß für jedes Rad das Verhältnis der Geschwindigkeit zum zugehörigen Halbmesser unveränderlich sein (vgl. Fig. 181); folglich ist auch das Verhältnis der

beiden $\frac{v}{R}$ für die zusammenarbeitenden Räder unveränderlich, also

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{konst.}$$

Für jeden Berührungspunkt der beiden Zahnprofile muß die beiden gemeinsame Normale, in der ja der Zahndruck wirkt, durch denselben Punkt O der Zentrale gehen, den Berührungspunkt der beiden Teilkreise von den Halbmessern r_1 und r_2 ¹²⁰).

Im allgemeinen kommen also die zyklischen Kurven als Zahnprofile zur Anwendung. Man kann jedoch zu jedem gegebenen Zahnprofil eines Rades ein richtig damit zusammenarbeitendes Profil der Zähne des zweiten Rades zeichnen¹²¹).

Gegeben sind in Fig. 182 die beiden Teilkreise von den Halbmessern r_1 und r_2 , sowie die Zahnkurve des Rades I. Man rollt die Teilkreise bis zu den beliebigen Punkten B_1 bzw. B_2 aufeinander ab, etwa unter Zu-

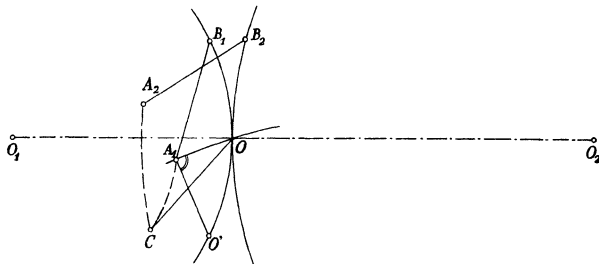


Fig. 182.

hilfenahme der gemeinsamen Tangente (Bd. I, S. 2), trägt $\overline{OO'} = \overline{B_1O}$ nach rückwärts auf dem Teilkreis ab, bestimmt darauf den Punkt A_1 , der in dem Augenblick, wo B_1 und B_2 , sowie der Punkt O' der Zahnkurve aufeinanderfallen, in Berührung mit dem gesuchten Punkt A_2 des zweiten Profils sein soll, derart, daß A_1O' in A_1 senkrecht zur Zahnkurve steht, und zieht durch A_1 den Kreis aus O_1 und trägt schließlich $\overline{OC} = \overline{B_1A_1}$ dorthin ab. Nun wird durch C der Kreis aus O_2 geschlagen und $\overline{B_2A_2} = \overline{B_1A_1}$ dorthin abgetragen. Dann ist A_2 der gesuchte Punkt.

Wird so mehrfach verfahren, so erhält man eine durch die Punktfolge C gebildete Linie, die den Ort angibt, wo die einzelnen Punktpaare A_1A_2 sich decken. Diese Eingriffslinie ist bei neuzeitlichen Rädern fast stets eine Gerade, von der beim Entwurf der beiderseitigen Zahnprofile ausgegangen wird. Die Kopfkreise der beiden Räder schneiden auf der Eingriffslinie die Eingriffsstrecke ab, auf der die Zähne ineinandergreifen (vgl. Fig. 187).

¹²⁰) Euler, Comment. IX, 1769.

¹²¹) Reuleaux, Der Konstrukteur, 1865.

Für ein richtiges Zusammenarbeiten der Räder ist nun erforderlich, daß außer der in Abschnitt 10 bereits genannten Bedingung der gleichen Teilung und der oben entwickelten über die Zahnform noch die weitere erfüllt wird, daß die beiden einander gleichen Wälzbogen b_0 der Teilkreise, die zu der Eingriffstrecke gehören, größer sind als die Zahn-
teilung τ . Das Verhältnis $e = \frac{b_0}{\tau}$ nennt man die Eingriffsdauer, für die also gilt: $e > 1$.

Wird die Größe des durch den Zahndruck N hervorgerufenen Biegemomentes eines Zahnes in bezug auf seinen Fuß für den Verlauf einer Teilung aufgetragen¹²²⁾, so ist bei der Eingriffsdauer 1 damit auch der Verlauf der Anstrengung des Zahnfußes gemäß Fig. 183 wiedergegeben. Ist die Eingriffsdauer 2, so überdecken sich die entsprechend verlängerten Momentenkurven zur Hälfte nach Fig. 184; und da stets

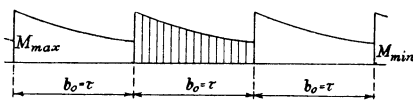


Fig. 183.

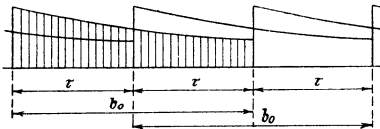


Fig. 184.

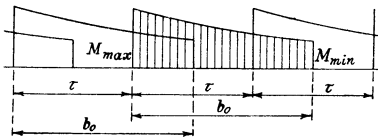


Fig. 185.

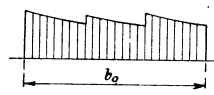


Fig. 186.

zwei Zähne die Kraft N aufnehmen, so könnte sie unter Voraussetzung gleicher Verteilung auf beide Zähne bei sonst gleicher Zahnform und -beanspruchung verdoppelt werden. Liegt die Eingriffsdauer zwischen diesen beiden Grenzwerten, z. B. $e = 1,5$, so verteilt sich der Zahndruck N während des ersten und letzten Teiles der Eingriffsdauer auf zwei Zähne, muß aber während des mittleren Teiles von einem Zahn allein aufgenommen werden (Fig. 185). Unter Voraussetzung gleicher Verteilung auf beide Zähne gibt somit die Fig. 186 die Beanspruchung eines Zahnes an. Sie ist dadurch entstanden, daß die Summe der Biegemomente der zugehörigen äußeren Teile in Fig. 185 halbiert worden ist.

Es kommt also darauf an, der Kurve der Fig. 186 eine solche Form zu geben, daß der Sprung bei den Übergängen nicht zu groß wird und die Beanspruchung nicht zu sehr schwankt. Dazu ist eine entsprechend lange Eingriffsdauer nötig. Die gleichmäßige Verteilung des Zahndruckes auf zwei Zähne findet bei richtig entworfenen und sauber gefrästen Zähnen, die spielraumfrei zusammenarbeiten, wenigstens annähernd

¹²²⁾ Lasche, Z. d. V. d. I. 1899.

statt, dagegen bei roh gegossenen Zähnen, die neben den unvermeidlichen Ungenauigkeiten einen Spielraum von $\frac{1}{20}\tau$ haben, nicht. Man kann etwa schätzen bei

gefrästen Rädern die Verteilung zwischen 0,40 bis 0,60 ,
 roh gegossenen „ „ „ „ „ 0,20 „ 0,80 .

Zu Beginn des Eingriffes berührt die Zahnwurzel des treibenden Rades 1 den Zahnkopf des getriebenen 2, in der Mitte des Eingriffes berühren sich beide im Zentralpunkt, am Ende des Eingriffes berührt der Zahnkopf des treibenden Rades 1 die Zahnwurzel des getriebenen 2. Die Zahnreibung wirkt also in der ersten Hälfte des Eingriffes auf den Fuß des treibenden Rades und den Kopf des getriebenen stemmend,

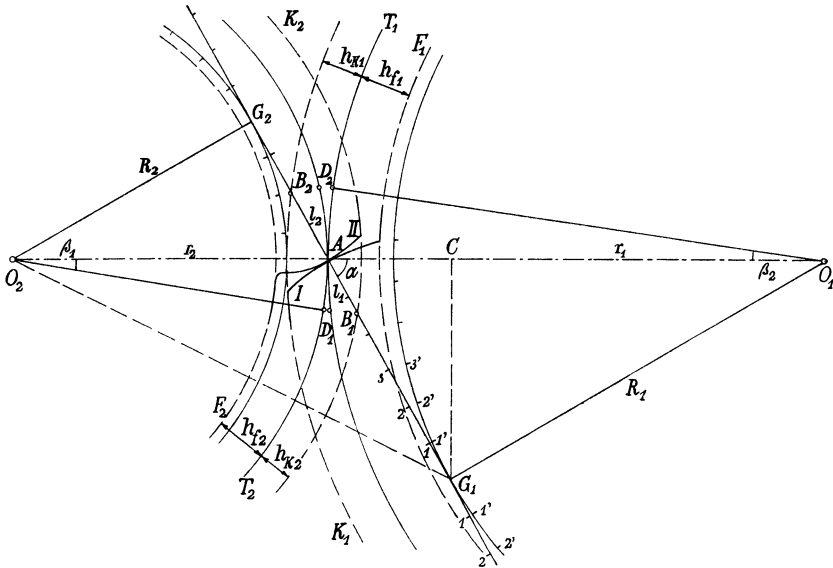


Fig. 187.

in der zweiten Hälfte des Eingriffes auf den Kopf des treibenden Rades und den Fuß des getriebenen streichend¹²³⁾.

e) Die Evolventenverzahnung¹²⁰⁾. Die Zahnkurve, die zu einer geraden Eingriffslinie gehört und die obigen Grundbedingungen der Verzahnung erfüllt, ist eine Evolvente. Man zeichnet sie nach Fig. 187. Durch den Berührungspunkt A der beiden gegebenen Teilkreise von den Halbmessern r_1 und r_2 wird die geneigte Eingriffssgerade gelegt; aus den Radmittelpunkten O_1 und O_2 werden dann die sie tangierenden Grundkreise von den Halbmessern R_1 und R_2 beschrieben. Man trägt nun von G_1 bzw. G_2 auf der Eingriffssgeraden beliebige gleiche Teile nach beiden Richtungen ab und ebenso dieselben Teile auf den zugehörigen

¹²³⁾ Büchner, Z. d. V. d. I. 1902.

Grundkreisen. Jetzt wird mit der Länge $\overline{G_1A}$ aus G_1 ein kleiner Kreisbogen durch A geschlagen, dann mit der Länge $\overline{1'A}$ aus $1'$ ebenso an den vorigen Kreisbogen anschließend und so fort. Die einzelnen kurzen Kreisbögen setzen sich zu der Evolvente I zusammen. Entsprechend wird die Evolvente II gezeichnet.

Ist der Halbmesser des einen Rades ∞ , so entsteht die Zahnstange, deren Zahnprofil eine zur erzeugenden Linie senkrechte Gerade ist. Für die Innenverzahnung ist dieselbe Konstruktion der Fig. 187 sinngemäß anzuwenden, sie liefert dann konkave Zahnflanken am großen Rad.

Die Zahnkurve ist der Teil der Evolvente zwischen dem Kopfkreis K_1 und dem Fußkreis F_1 bzw. zwischen K_2 und dem Grundkreis G_2 . Das bis zum Fußkreis F_2 fehlende Stück wird durch eine willkürliche Kurve, oft eine radiale Gerade gebildet. Grund- und Fußkreis fallen zusammen, wenn die Bedingung erfüllt ist (Fig. 187)

$$r - h_f = r \cdot \sin \alpha.$$

Nun gilt ja nach Formel (120)

$$r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{z}{2} = m \cdot \frac{z}{2}, \quad (159)$$

worin bedeutet

z die Zähnezahzahl des Rades,

τ die Zahnteilung des Rades,

$m = \frac{\tau}{\pi}$ den Modul der Verzahnung.

Damit geht die obige Gleichung über in

$$m \cdot \frac{z}{2} - h_f = m \cdot \frac{z}{2} \cdot \sin \alpha$$

oder

$$1 - \frac{2 \cdot h_f}{m \cdot z} = \sin \alpha,$$

woraus folgt

$$z_0 = \frac{2 \cdot \frac{h_f}{m}}{1 - \sin \alpha}. \quad (160)$$

Für ein Rad mit Innenverzahnung gilt derselbe Zusammenhang für das Aufeinanderfallen von Grund- und Kopfkreis.

Beispiel 105. Für $\frac{h_f}{m} = \frac{7}{6}$, dem gebräuchlichsten Wert, ist die Zähnezahzahl anzugeben, bei der Grund- und Fußkreis zusammenfallen.

Es ist für $\alpha = 75^\circ$ 70° 65°

$\sin \alpha = 0,966$ $0,940$ $0,906$

also nach Formel (160) $z_0 = 69$ 39 25

Bei kleineren Zähnezahlen muß der Zahnfuß willkürlich bis an den Fußkreis verlängert werden.

Werden die beiden Radmittelpunkte O_1 und O_2 auf der Zentrale etwas weiter voneinander entfernt, so stellt sich die Gerade $\overline{G_1G_2}$ der Fig. 187 etwas steiler, aber die Evolvente bleibt dieselbe, solange der Grundkreis derselbe ist¹²⁴⁾. Entsprechend stellt sich die Eingriffsgerade bei Annäherung der Mittelpunkte etwas flacher. Der Eingriff wird also durch fehlerhafte Aufstellung nicht verändert, was die Evolventenverzahnung besonders wertvoll macht. Es arbeiten hiernach auch Evolventenräder mit verschiedenen geneigten Erzeugungsgeraden fehlerlos zusammen¹²⁵⁾.

Von der um den Winkel α gegen die Zentrale geneigten Eingriffslinie G_1G_2 schneiden die beiden Kopfkreise K_1 und K_2 die Eingriffsstrecke B_1B_2 heraus, die allein für den Eingriff benutzt wird. Die größtmögliche Länge der Eingriffsstrecke ist G_1G_2 ¹²⁴⁾, denn ein darüber hinausgehendes Stück liefert keinen weiteren Beitrag zur eingreifenden Zahnfußkurve, vielmehr schneidet dann der Kopf des Gegenzahnes, dessen Bahn eine verlängerte Epizykloide ist, in das Fußprofil ein.

Sind die Zahnköpfe gerade so hoch, daß die Punkte G und B der Fig. 187 zusammenfallen, so gilt

$$\overline{O_2G_1^2} = \overline{G_1C^2} + \overline{O_2C^2}$$

oder

$$(r_2 + h_{K_2})^2 = (r_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (r_1 + r_2 - r_1 \cdot \sin^2 \alpha)^2.$$

Löst man die Klammern auf, so ergibt sich

$$\frac{h_{K_2}}{r_2} = \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + 2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \right)} - 1 \quad (161a)$$

oder mit Formel (159) und (120)

$$\frac{h_{K_2}}{m} = \frac{z_2}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{z_1^2}{z_2^2} + 2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \right)} - 1 \right] \quad (161b)$$

als Grenzwert der Kopfhöhe bei gegebenen Zähnezahlen und Neigungswinkel α der erzeugenden Geraden.

Wird diese Gleichung nach $\frac{z_1}{z_2}$ aufgelöst, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen

$$u_1 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)_{\min} = \sqrt{1 + \frac{\frac{h_{K_2}}{z_2 \cdot m} + \left(\frac{h_{K_2}}{z_2 \cdot m} \right)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \right)^2}} - 1 \quad (162)$$

als kleinstes Übersetzungsverhältnis, das bei gegebenem Winkel α , der Zähnezahl z_2 und dem Verhältnis der Kopfhöhe zum Modul $\frac{h_{K_2}}{m}$ ohne

¹²⁴⁾ Saalschütz, Zur Theorie der Evolventenverzahnung, 1870.

¹²⁵⁾ Hoppe, Verhandl. d. V. f. Gewerbefleiß 1873.

starken Verschleiß bzw. ohne Unterschneidung möglich ist¹²⁶). Die Fig. 188 gibt hiernach den Verlauf von u an für die Zähnezahlen $z_2 = 10 \div 200$, die Kopfhöhenverhältnisse $\frac{h_{K2}}{m} = 1,5 \div 0,5$ und die

Winkel $\alpha = 75^\circ, 70^\circ, 65^\circ$.

Bei Innenverzahnung geht dieselbe Beziehung

$$\overline{O_2G_1^2} = \overline{G_2C^2} + \overline{O_2C^2}$$

über in

$$(r_2 + h_{K2})^2 = (r_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (r_1 \cdot \sin^2 \alpha - r_1 + r_2)^2.$$

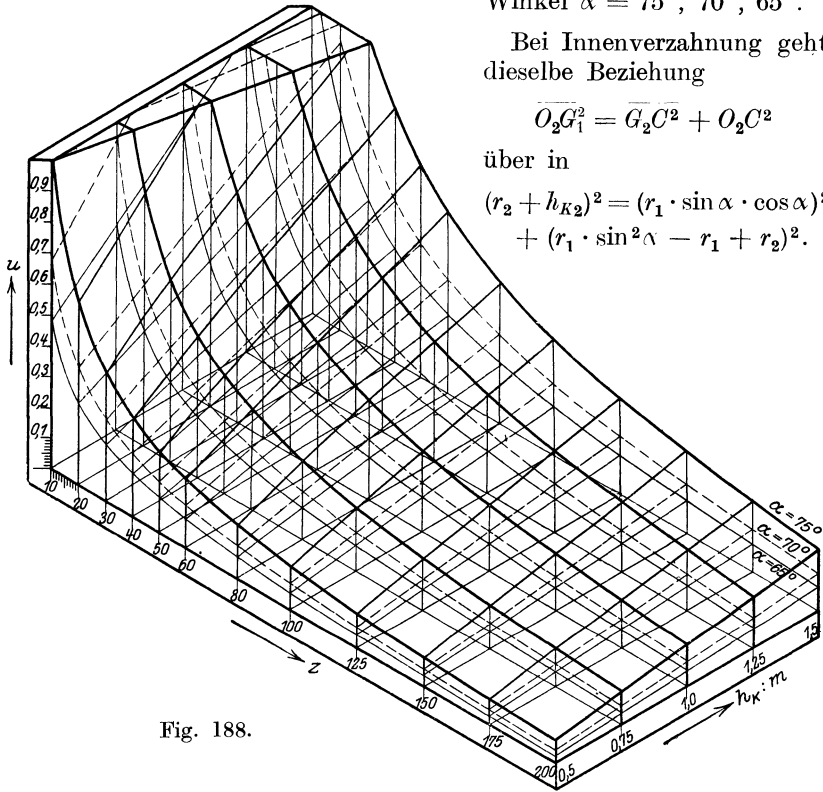


Fig. 188.

Statt der Formel (161b) erhält man hieraus

$$\frac{h_{K2}}{m} = \frac{z_2}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \cdot \left(\frac{z_1^2}{z_2^2} - 2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \right)} - 1 \right] \quad (161c)$$

und entsprechend lautet Formel (162) dann

$$u_1 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)_{\min} = \sqrt{1 + \frac{h_{K2}}{m \cdot z_2} + \left(\frac{h_{K2}}{m \cdot z_2} \right)^2 \over (\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha)^2} + 1$$

oder

$$u_{1i} = u_{1a} + 2. \quad (163)$$

¹²⁶) Wehage, D. p. J. 1905; Toussaint, Die Werkzeugmaschine 1916; Stephan, Werkstatt-Technik 1920.

Beispiel 106. Für den gebräuchlichsten Neigungswinkel der erzeugenden Geraden $\alpha = 75^\circ$ ¹²⁷⁾, die gebräuchlichste Kopfhöhe $h_{K_2} = m$ ¹²⁸⁾, der die Fußhöhe $h_{F_2} = \frac{1}{3}m$ entspricht, und die Zähnezah $z_2 = 100$ des einen Rades ist die kleinste zulässige Zähnezah des anderen Rades anzugeben.

Man entnimmt für die Außenverzahnung der Fig. 188 bzw. der Formel (162)

$$u_1 = 0,266 \approx 1 : 3,76,$$

also

$$z_1 = z_2 \cdot u_1 = 27.$$

Für $\alpha = 70^\circ$ ergibt sich $u_1 = 0,160 \approx 1 : 6,3$, $z_1 = 16$,
 für $\alpha = 65^\circ$ „ „ $u_1 = 0,108 \approx 1 : 9,3$, $z_1 = 11$.

Hat das kleinere Rad weniger Zähne, so entsteht die Unterschneidung, die besonders bei kleinen Zähnezahlen und großem Winkel α ganz erheblich sein kann. Man pflegt dem bisweilen durch eine „korrigierte Zahnform“ abzuweichen¹²⁹⁾; einfacher und zweckmäßiger ist die geeignete Wahl der Kopfhöhe und des Neigungswinkels der erzeugenden Geraden.

Bei Innenverzahnung erhält man gemäß Formel (163) mit denselben Zahlenwerten für

$\alpha = 75^\circ$	70°	65°
$u_1 = 2,266$	$2,160$	$2,108$
$z_1 = 227$	216	211

als kleinste Zähnezah des großen Rades, wenn das kleine etwa $z_2 = 100$ Zähne haben soll. Die Unterschneidung kommt also hierbei seltener in Frage.

Dem Teil $\overline{AB_2} = l_2$ der Eingriffstrecke (Fig. 187) entsprechen auf den Teilkreisen die Bögen $\overline{AD_2}$, zu deren einem der Zentriwinkel β_2 im Rade 1 gehört. Das gleiche gilt für den Teil $\overline{AB_1} = l_1$. Bezeichnet man ferner den zur Zahnkurve FAK gehörigen Zentriwinkel mit φ , den zur Kopfstrecke AK gehörigen mit φ_K , den zur Fußstrecke FA gehörigen mit φ_f , so ist natürlich $\varphi_K + \varphi_f = \varphi$ und nach den Formeln (158)

$$\varphi_f = \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{R_2^2} - 1},$$

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{r + h_K}{R}\right)^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{r + h_K}{R}\right)^2 - 1}.$$

Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ist nun

$$(l_1 \cdot \sin \alpha)^2 = (h_{K_2} - l_1 \cdot \cos \alpha) \cdot [(2r_2 + 2h_{K_2}) - (h_{K_2} - l_1 \cdot \cos \alpha)],$$

ferner ist der Fig. 187 zu entnehmen

$$(r_2 + h_{K_2}) \cdot \sin(\beta_1 - \varphi_{K_2}) = l_1 \cdot \sin \alpha.$$

Wird die vorletzte Gleichung nach l_1 aufgelöst, so folgt leicht in Verbindung mit Gleichung (162)

$$l_1 = r_2 \cdot \cos \alpha \cdot u_1$$

¹²⁷⁾ Willis, Principles of Mechanism, 1841.

¹²⁸⁾ Reuleaux, Konstruktionslehre für den Maschinenbau, 1856.

¹²⁹⁾ Schmidt, Werkstatt-Technik 1919.

Setzt man diesen Wert in die letzte Gleichung ein und drückt φ_{K2} durch die vorhergehenden Formeln aus, so ergibt sich

$$\beta = u_1 \cdot \cotg \alpha - \operatorname{arctg} [(u_1 + 1) \cdot \cotg \alpha] \\ + \operatorname{arcsin} \left[u_1 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha}{1 + 2 \cdot \frac{h_{K2}}{z_2 \cdot m}} \right] + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

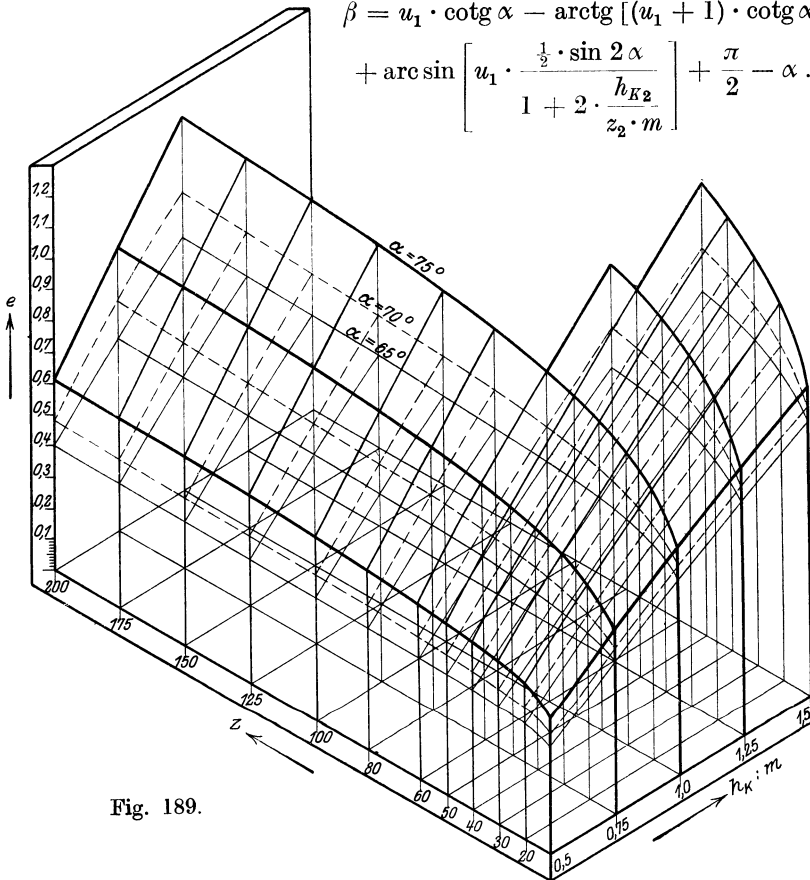


Fig. 189.

Bei der zahlenmäßigen Berechnung braucht nur das erste Glied bestimmt zu werden, da sich die anderen innerhalb der praktisch erforderlichen Genauigkeit vollständig aufheben.

Damit ist die Eingriffsdauer^{126c)}

$$e = \frac{l}{\tau} = \frac{r_2 \cdot \operatorname{arc} \beta_1 + r_1 \cdot \operatorname{arc} \beta_2}{\tau}$$

oder mit Benutzung des Zusammenhanges (159)

$$e = \frac{\cotg \alpha}{2\pi} \cdot (z_1 \cdot u_2 + z_2 \cdot u_1) \quad (164)$$

Zerlegt man die Formel (164) in zwei Beträge

$$e_1 = \frac{\cotg \alpha}{2\pi} \cdot z_2 \cdot u_1 \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{\cotg \alpha}{2\pi} \cdot z_1 \cdot u_2,$$

so können diese Beträge der Fig. 189 entnommen werden, die den Verlauf von e_1 in Abhängigkeit von α , z , $\frac{h_K}{m}$ darstellt.

Die entsprechende Rechnung für die Innenverzahnung liefert nicht eine so einfache Formel wie (164).

Beispiel 107. Zu bestimmen ist die Eingriffsdauer zweier zusammenarbeitender Räder mit Außenverzahnung von $z_1 = 30$, $z_2 = 100$ Zähnen bei der gebräuchlichen Kopfhöhe $h_K = m$.

Man erhält sofort aus Fig. 189

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha = 75^\circ: & e = 0,957 + 1,135 = 2,09, \\ 70^\circ: & e = 0,825 + 0,926 = 1,75, \\ 65^\circ: & e = 0,739 + 0,794 = 1,53. \end{aligned}$$

Berühren sich zwei zusammenarbeitende Zähne in einem gegebenen Augenblick im Punkte C_0 (Fig. 190) und ist der Eingriff kurze Zeit später nach dem Punkt C gewandert, so sind die beiden zugehörigen Berührungspunkte C_1 bzw. C_2 , die durch Schlagen der Kreisbögen aus O_1 und O_2 durch C bestimmt werden. Bezeichnet man $\overline{C_0C_1} = d_{s_1}$ und $\overline{C_0C_2} = d_{s_2}$, so gleiten beide Zähne um den Betrag $d_{s_2} - d_{s_1}$ aufeinander¹³⁰⁾. Der sich von Punkt zu Punkt ändernde Quotient

$$g_1 = \frac{d_{s_2} - d_{s_1}}{d_{s_1}} \quad \text{bzw.} \quad g_2 = \frac{d_{s_1} - d_{s_2}}{d_{s_2}}$$

heißt das spezifische Gleiten der Zahnflanken¹²³⁾.

Dreht sich das Rad 1 um einen kleinen Winkel $d\delta$, so beschreibt die Gerade $\overline{G_1C} = r_1 \cdot \cos \alpha - x$ den Zahnbogen d_{s_1} ; das Rad 2 dreht sich gleichzeitig um den Winkel $d\delta \cdot \frac{r_1}{r_2}$ und die Gerade

$$\overline{G_2C} = r_2 \cdot \cos \alpha + x$$

beschreibt dabei den Bogen d_{s_2} . Man erhält so

$$g_1 = \frac{(r_2 \cdot \cos \alpha + x) \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot d\delta - (r_1 \cdot \cos \alpha - x) \cdot d\delta}{(r_1 \cdot \cos \alpha - x) \cdot d\delta}$$

oder

$$g_1 = + \frac{x \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)}{r_1 \cdot \cos \alpha - x} \tag{165a}$$

und entsprechend

$$g_2 = - \frac{x \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)}{r_2 \cdot \cos \alpha + x}. \tag{165b}$$

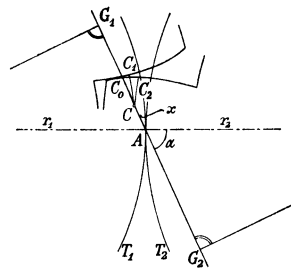


Fig. 190.

¹³⁰⁾ Kohn, Z. d. V. d. I. 1895/96; Goebel, ebenda 1896; Lasche, ebenda 1899.

Beide Ausdrücke werden 0 für $x = 0$, also im Zentralpunkt A , der erstere wird ∞ für $x = r_1 \cdot \cos \alpha = AG_1$, wenn also die Eingriffslinie gänzlich ausgenutzt wird. Da damit ein sehr starker Verschleiß verbunden wäre, so ist sogar eine zu große Annäherung des Eingriffes an die Endpunkte G_1 bzw. G_2 zu vermeiden. Für $x < 0$, wird g_1 negativ, die Richtung des Gleitens wechselt im Zentralpunkt. Das spezifische Gleiten bestimmt in erster Linie die eintretende Abnutzung, die ferner noch abhängt von der Zahl der Eingriffe in einer festgelegten Zeit und von der Reibungsziffer.

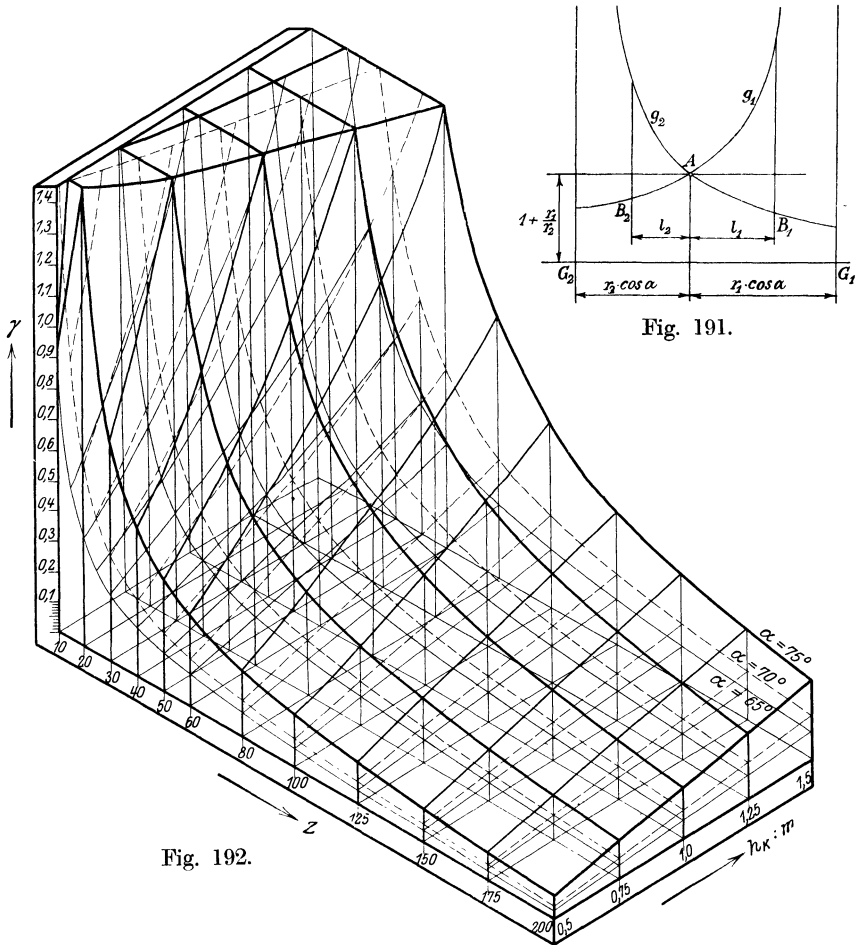


Fig. 191.

Fig. 192.

Die Ausdrücke für g stellen gleichseitige Hyperbeln dar, deren eine Asymptote durch G geht und deren andere um den Betrag $1 + \frac{r_1}{r_2}$ gegen die Nullachse gesenkt ist, wie Fig. 191 zeigt.

Setzt man jetzt $x = l_1$ bzw. l_2 , um den größten vorkommenden Wert des spezifischen Gleitens zu erhalten, so liefern die Gleichungen (165) und (163)

$$g_{1\max} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot \frac{u_2}{1 - u_2} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \cdot \gamma_1$$

bzw.

$$g_{2\max} = \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{u_1}{1 - u_1} = \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \gamma_2, \tag{166}$$

worin die Werte γ der Fig. 192 entnommen werden können.

Beispiel 108. Die größten Werte des spezifischen Gleitens sind zu ermitteln für ein Räderpaar mit Außenverzahnung von $z_1 = 30$, $z_2 = 100$ Zähnen bei der Kopfhöhe $h_K = m$.

Man erhält aus den Formeln (166) bzw. der Fig. 192

$$\alpha = 75^\circ: g_{1\max} = 1,3 \cdot 2,97 = 3,86, \quad g_{2\max} = \frac{13}{3} \cdot 0,36 = 1,57,$$

$$70^\circ: \quad 1,3 \cdot 0,905 = 1,18, \quad \frac{13}{3} \cdot 0,191 = 0,83,$$

$$65^\circ: \quad 1,3 \cdot 0,495 = 0,64, \quad \frac{13}{3} \cdot 0,120 = 0,52.$$

Der Neigungswinkel $\alpha = 75^\circ$ liefert demnach einen recht erheblichen Verschleiß gegenüber den kleineren Winkeln. Die Verhältnisse können etwas gebessert werden, indem man die Kopfhöhe niedriger macht, etwa $h_K = 0,7 \cdot m$ ¹³¹⁾. Immerhin ist auch dann noch für $\alpha = 75^\circ$

$$g_{1\max} = 1,3 \cdot 1,26 = 1,51, \quad g_{2\max} = \frac{13}{3} \cdot 0,24 = 1,04.$$

Bei Vollbeanspruchung des Triebes muß $g_{1\max} \leq 1$ sein, wenn die Abnutzung nicht zu groß werden soll¹³²⁾.

Bei der Innenverzahnung gilt

$$\overline{G_1C} = r_1 \cdot \cos \alpha + x, \quad \overline{G_2C} = r_2 \cdot \cos \alpha + x.$$

Hieraus ergibt sich wie oben

$$g_1 = + \frac{x \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)}{r_1 \cdot \cos \alpha + x}, \quad g_2 = - \frac{x \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)}{r_2 \cdot \cos \alpha + x} \tag{165c}$$

Beide Ausdrücke werden 0 für $x = 0$ und ∞ für $-x = r_1 \cdot \cos \alpha$ bzw. $r_2 \cdot \cos \alpha$. Da bei der Innenverzahnung die Punkte G_1 und G_2 auf derselben Seite der Zentrale O_1O_2 liegen, so haben die g -Kurven die in Fig. 193 wiedergegebene Lage.

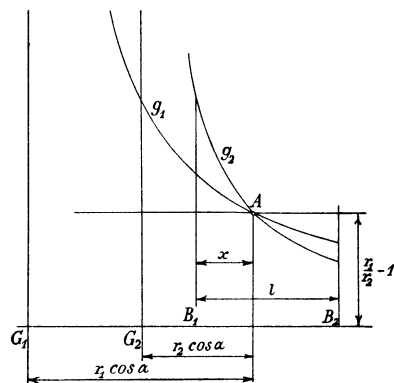


Fig. 193.

¹³¹⁾ Lindner, Z. d. V. d. I. 1900.

¹³²⁾ Nach Angaben von Lasche, Z. d. V. d. I. 1899; Stribeck, ebenda 1894.

Damit das spezifische Gleiten nicht zu groß wird, muß der Eingriff bereits vor G_2 beendet sein. Ein so einfacher Zusammenhang wie die Formeln (166) läßt sich hier nicht geben.

Beispiel 109. Anzugeben ist die Kopfhöhe des Rades mit Innenverzahnung wenn der Größtwert des spezifischen Gleitens 1 sein soll, bei den Zähnezahlen $z_1 = 100$, $z_2 = 30$.

Ausschlaggebend ist nach Fig. 193 g_2 mit negativem x . Mit dem vorgeschriebenen Wert geht also die zweite Gleichung (165c) über in

$$r_2 \cdot \cos \alpha - x = +x \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right).$$

Hieraus folgt die Länge der Eingriffstrecke zu

$$-x = r_2 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_2}{r_1}. \quad (167a)$$

Behandelt man die für die Außenverzahnung maßgebende Gleichung (165a) ebenso, so folgt aus

$$r_1 \cdot \cos \alpha - x = x \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)$$

die Strecke

$$+x = \frac{r_2 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r_1}{r_2}}{2 + \frac{r_1}{r_2}}, \quad (167b)$$

Bei kleinen Übersetzungsverhältnissen $\frac{r_2}{r_1}$ ist die Innenverzahnung ungünstiger, insofern als bei der Außenverzahnung eine größere Strecke x der Eingriffslinie benutzt werden kann; bei großen Werten von $\frac{r_2}{r_1}$ ist sie dagegen günstiger. In beiden Fällen das gleiche Ergebnis liefert $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$.

Die Fig. 194 ergibt die Gleichung

$$(x \cdot \sin \alpha)^2 = (x \cdot \cos \alpha - h_{K1}) \cdot (2r_1 - x \cdot \cos \alpha + h_{K1}),$$

Fig. 194.

woraus man mit Formel (167a) leicht erhält

$$\frac{h_{K1}}{m} = \frac{z_1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 - \left(\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)^2} - \left(1 - \frac{z_2}{z_1} \cdot \cos^2 \alpha \right) \right]$$

oder, wenn bei den gebräuchlichen Werten der Übersetzung die Wurzel näherungsweise bestimmt wird,

$$\frac{h_{K1}}{m} = \frac{z_1}{2} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1} \cdot \sin \alpha \right)^2 \right]. \quad (168)$$

Die gegebenen Zahlenwerte liefern hiermit

$\alpha =$	75°	70°	65°
$\cos \alpha =$	0,2588	0,3420	0,4226
$\sin \alpha =$	0,9659	0,9397	0,9063
$\frac{h_{K1}}{m} =$	0,286	0,506	0,766

Auch bei der Innenverzahnung muß man die Evolvente mit verhältnismäßig kleiner Neigung gegen die Zentrale entwerfen, um günstige Betriebsverhältnisse zu erzielen.

Da die Anzahl der Eingriffe und damit die Abnutzung der Zähne, besonders wenn g unzulässig hoch ist, von der Umfangsgeschwindigkeit

keit v der Räder abhängt, so pflegt man mit steigender Geschwindigkeit die spezifische Belastung des Zahnes herabzusetzen. Man rechnet gewöhnlich mit der Gleichung

$$N = c \cdot b \cdot \tau = c \cdot b \cdot m \cdot \pi \tag{169}$$

für den Höchstwert des Zahndruckes N kg und eine gegebene oder angenommene Zahnbreite b cm und entnimmt für gefräste Gußeisenzähne den Wert c kg/cm² der Fig. 195, indem man sich bei bester Herstellung und Unterhaltung mehr der oberen Kurve a ¹³³⁾ nähert und bei durchschnittlicher Bearbeitung und Instandhaltung etwa der unteren b ¹³⁴⁾. Bei guten Werkzeugmaschinen wird oft nur die Hälfte des Mittelwertes

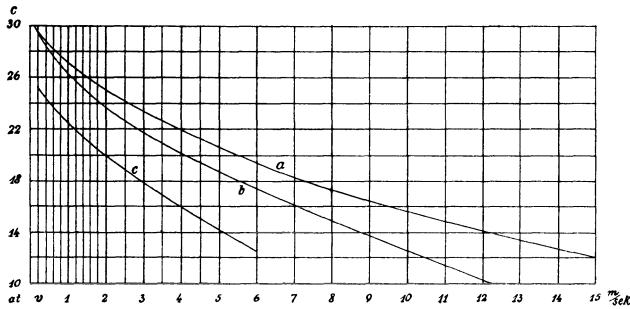


Fig. 195.

beider Kurven gewählt¹³⁵⁾. Für roh gegossene Gußeisenräder gilt etwa die Kurve c ¹³⁴⁾.

Bei anderen Materialien nimmt man gewöhnlich die folgenden Vielfachen davon¹³⁴⁾:

Stahlformguß je nach Güte	2,0 ÷ 2,5
geschmiedeter Flußstahl	3,0
Stahlbronze	2,33
Phosphorbronze	2,4
Rotguß	1,33
Rohhaut, Musselin ¹³⁶⁾	1,0
Weißbuchenholz	0,5

Richtiger wäre es, die durchschnittliche Betriebsdauer und die durchschnittliche Größe des Zahndruckes zu berücksichtigen. Das Ergebnis der Schätzung von c auf dieser Grundlage¹³⁷⁾ schließt sich jedoch den obigen Kurven ziemlich gut an.

Beispiel 110. Für das in Beispiel 95 angegebene Getriebe sind die Moduln der Verzahnung anzugeben, wenn in das Getriebe $M_4 = 45$ cmkg eingeleitet werden.

¹³³⁾ Friedrich Stolzenberg & Co., Berlin.
¹³⁴⁾ Friedr. Krupp, Grusonwerk, Magdeburg.
¹³⁵⁾ Ludw. Loewe & Co., Berlin.
¹³⁶⁾ Reymann, Werkstatts-Technik 1913.
¹³⁷⁾ Schaefer, D. p. J. 1910.

Wird der Wirkungsgrad des Gesamtgetriebes vorläufig bei mittlerer Schmierung zu $\eta = 0,80$ geschätzt, so steht das Rad 1 unter der Einwirkung des Drehmomentes

$$M_1 = M_4 \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \eta = 45 \cdot 100 \cdot 0,80 = 3600 \text{ cmkg.}$$

Man entnimmt nun der Fig. 187 den Zusammenhang zwischen Drehmoment M und Zahndruck N

$$M = N \cdot R = N \cdot r \cdot \sin \alpha,$$

ferner der Gleichung (169)

$$N = c \cdot b \cdot m \cdot \pi$$

und der Gleichung (120)

$$2r = m \cdot z.$$

Hiermit ergibt sich

$$M = c \cdot b \cdot m \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot z \cdot \sin \alpha,$$

also

$$m = \sqrt{\frac{2 \cdot M}{z \cdot c \cdot b \cdot \pi \cdot \sin \alpha}}. \quad (170)$$

Es wird vorläufig geschätzt $v \approx 0,5$ m/sk; damit liefert die Kurve b der Fig. 195 für Gußeisen $c = 28$ at. Wählt man ferner $\alpha = 70^\circ$, also $\sin \alpha \approx 0,940$, so wird bei $z_1 = 125$ Zähnen und der Zahnbreite $b = 7,5$ cm

$$m_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot 100 \cdot 0,80}{125 \cdot 28 \cdot 7,5 \cdot \pi \cdot 0,940}} = 0,305 \text{ cm.}$$

Genommen wurde mit Rücksicht auf die Achsenabstände in diesem Fall die nicht normale Teilung $\tau = 0,3078 \cdot \pi$ cm.

Damit folgt der Raddurchmesser

$$d_1 = z_1 \cdot m_1 = 125 \cdot 0,3078 = 38,46 \text{ cm,}$$

also die Umfangsgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{d_1 \cdot \pi \cdot n_1}{60} = \frac{0,3846 \cdot \pi \cdot 24}{60} = 0,485 \text{ m/sk,}$$

der Annahme genau genug entsprechend.

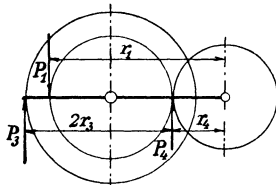


Fig. 196.

Bei den anderen Rädern tritt der größte Zahndruck zwischen den Rädern 0 und 3 auf. An dem Steg greifen nun die in Fig. 196 eingetragenen Kräfte an, und es gilt demnach

$$P_3 \cdot (r_4 + 2r_3) - P_1 \cdot r_1 + P_4 \cdot r_4 = 0$$

oder

$$M_3 = M_1 - M_4.$$

Somit erhält man mit $z_3 = 40$ und $b_3 = 5,5$ cm, wenn ferner noch geschätzt wird für guten Stahlfornguß $c = 21 \cdot 2,5$ at

$$m_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot (100 \cdot 0,80 - 1)}{40 \cdot 21 \cdot 2,5 \cdot 5,5 \cdot \pi \cdot 0,940}} = 0,405 \approx 0,40 \text{ cm.}$$

Hieraus folgt

$$d_3 = m_3 \cdot z_3 = 0,40 \cdot 40 = 16 \text{ cm}$$

und die Radgeschwindigkeit

$$v_3 = \frac{16 \cdot \pi \cdot (400 - 24)}{60 \cdot 100} = 3,16 \text{ m/sk,}$$

der nach Kurve b der Fig. 195 $c = 21,4$ at entspricht, so daß die obige Schätzung zutreffend war.

Der Wirkungsgrad der Verzahnung ergibt sich aus Formel (45 b), die sich im vorliegenden Fall umformt zu

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{M_{r1}}{M_1} + \frac{M_{r2}}{M_2},$$

worin M_1 und M_2 die Drehmomente des Zahndruckes N an den beiden zusammenarbeitenden Rädern 1 und 2 und M_{r1} bzw. M_{r2} die Mittelwerte der Drehmomente der Reibungskraft $\mu \cdot N$ an beiden Rädern angeben.

Aus den Fig. 187 und 191 erhält man sofort für die Außenverzahnung

$$\begin{aligned} M_1 &= N \cdot r_1 \cdot \sin \alpha, & M_2 &= N \cdot r_2 \cdot \sin \alpha, \\ M_{r1} &= \frac{\int_0^{l_1} \mu \cdot N \cdot (r_1 \cdot \cos \alpha - x) \cdot dx}{l_1} + \frac{\int_0^{l_2} \mu \cdot N \cdot (r_1 \cdot \cos \alpha + x) \cdot dx}{l_2} \\ &= \mu \cdot N \cdot (2r_1 \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2), \\ M_{r2} &= \frac{\int_0^{l_1} \mu \cdot N \cdot (r_2 \cdot \cos \alpha + x) \cdot dx}{l_1} + \frac{\int_0^{l_2} \mu \cdot N \cdot (r_2 \cdot \cos \alpha - x) \cdot dx}{l_2} \\ &= \mu \cdot N \cdot (2r_2 \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}l_1) \end{aligned}$$

oder, wenn die Werte von l gemäß der Ableitung der Formel (164) eingesetzt werden,

$$M_{r2} = \mu \cdot N \cdot \cos \alpha \cdot (2r_2 - \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot u_2 + \frac{1}{2} \cdot r_2 \cdot u_1).$$

Damit wird schließlich^{126c)}

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{\mu \cdot \cotg \alpha}{2} \cdot \left[8 + u_1 \cdot \left(1 - \frac{z_2}{z_1} \right) + u_2 \cdot \left(1 - \frac{z_1}{z_2} \right) \right]. \quad (171)$$

Hierzu tritt noch der Einfluß der Zapfenreibung, der sich entsprechend berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{M'_{r1}}{M_1} + \frac{M'_{r2}}{M_2} &= \frac{\mu_1 \cdot N \cdot r_{z1}}{N \cdot r_1 \cdot \sin \alpha} + \frac{\mu_1 \cdot N \cdot r_{z2}}{N \cdot r_2 \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_1} + \frac{r_{z2}}{r_2} \right), \end{aligned} \quad (172)$$

worin r_z den Halbmesser des Zapfens bezeichnet und μ_1 die Zapfenreibungsziffer.

Beispiel 111. Anzugeben ist der Wirkungsgrad eines gut geschmierten, gefrästen Zahnräderpaares von $z_1 = 30$, $z_2 = 100$ Zähnen bei der Zahnkopfhöhe $h_k = m$ für die Neigungswinkel $\alpha = 75^\circ, 70^\circ, 65^\circ$.

Bei eingelaufenen Rädern kann in dem Fall $\mu = 0,04$ angesetzt werden. Auf dem Versuchsstand gemessene Werte des Wirkungsgrades¹³⁸⁾ ergeben sogar $\mu = 0,03$ und $0,02$ bei ganz in Öl laufenden Rädern. Für die Zapfenreibungsziffer kann reichlich hoch angesetzt werden $\mu_1 = 0,02$, ferner sei überschlägig

$$\frac{r_{z1}}{r_1} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{r_{z2}}{r_2} = \frac{1}{8}.$$

¹³⁸⁾ Rikli, Z. d. V. d. I. 1911.

Dann erhält man aus Fig. 188 bzw. Formel (162) gemäß den Gleichungen (171) und (172) für

$$\alpha = 75^\circ: \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{0,04 \cdot 0,268}{2} \cdot \left(8 - 0,266 \cdot \frac{7}{3} + 0,748 \cdot \frac{7}{10} \right) + \frac{0,02}{0,966} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= 1 + 0,0424 + 0,0078 = 1,050,$$

$$\alpha = 70^\circ: \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{0,04 \cdot 0,364}{2} \cdot \left(8 - 0,160 \cdot \frac{7}{3} + 0,476 \cdot \frac{7}{10} \right) + \frac{0,02}{0,940} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= 1 + 0,0579 + 0,0080 = 1,064,$$

$$\alpha = 65^\circ: \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{0,04 \cdot 0,466}{2} \cdot \left(8 - 0,108 \cdot \frac{7}{3} + 0,332 \cdot \frac{7}{10} \right) + \frac{0,02}{0,906} \cdot \frac{3}{8}$$

$$= 1 + 0,0744 + 0,0083 = 1,083.$$

Damit wird

$$\eta = 0,952 \quad \text{bzw.} \quad 0,940 \quad \text{bzw.} \quad 0,924.$$

Um den Wirkungsgrad nicht zu verringern und das spezifische Gleiten möglichst klein zu halten, dürfte demnach etwa der günstigste Neigungswinkel sein

$$\alpha = 70^\circ 42,6' \quad \text{mit} \quad \cotg \alpha = \frac{3,5}{10}.$$

Kürzt man die Zahnkopfhöhe noch auf $h_k = 0,8 \cdot m$, so bleibt das spezifische Gleiten sicher unter 1.

Die Forderungen geringsten spezifischen Gleitens und des günstigsten Wirkungsgrades schließen sich gegenseitig aus¹³⁹⁾.

Beispiel 112. Anzugeben ist der Wirkungsgrad eines Zahnräderpaares mit Außenverzahnung von $z_2 = 100$ und $z_1 = 20, 30, 40, 60, 80, 100$ Zähnen für den Neigungswinkel $\alpha = 70^\circ 42'$ und die Kopfhöhe $h_k = 0,8 m$, wenn im übrigen die Angaben des Beispiels 111 gelten.

Man erhält gemäß den Formeln (171) und (172), sowie der Formel (162) für

$$z_1 = 20: \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{0,04 \cdot 0,350}{2} \cdot (8 - 0,114 \cdot 4 + 0,585 \cdot 0,8) + \frac{0,02 \cdot 3}{0,944 \cdot 8}$$

$$= 1 + 0,05609 + 0,00794 = 1,06403; \quad \eta \approx 0,940,$$

$$z_1 = 30: \frac{1}{\eta} = 1 + 0,007 \cdot \left(8 - 0,114 \cdot \frac{7}{3} + 0,413 \cdot 0,7 \right) + 0,00794$$

$$= 1,06411; \quad \eta \approx 0,940,$$

$$z_1 = 40: \frac{1}{\eta} = 1 + 0,007 \cdot (8 - 0,114 \cdot 1,5 + 0,320 \cdot 0,6) + 0,00794$$

$$= 1,06409; \quad \eta \approx 0,940,$$

$$z_2 = 60: \frac{1}{\eta} = 1 + 0,007 \cdot \left(8 - 0,114 \cdot \frac{2}{3} + 0,206 \cdot 0,4 \right) + 0,00794$$

$$= 1,06399; \quad \eta \approx 0,940,$$

$$z_2 = 80: \frac{1}{\eta} = 1 + 0,007 \cdot \left(8 - 0,114 \cdot \frac{1}{4} + 0,169 \cdot 0,2 \right) + 0,00794$$

$$= 1,06398; \quad \eta \approx 0,940,$$

$$z_2 = 100: \frac{1}{\eta} = 1 + 0,007 \cdot (8 - 0 + 0) + 0,00794 = 1,06394; \quad \eta \approx 0,940.$$

¹³⁹⁾ Gümbel, Z. f. d. ges. Turbwes. 1916.

Das Übersetzungsverhältnis hat auf den Wirkungsgrad keinen praktisch bemerkbaren Einfluß, was auch die Versuche bestätigen¹³⁸). Man kann also im allgemeinen bei richtiger Zahnform rechnen

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 4 \cdot \mu \cdot \cotg \alpha + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_1} + \frac{r_{z2}}{r_2} \right). \quad (173)$$

Zu beachten ist, daß die Reibungsziffer bei ungenügender Schmierung den dreifachen, bei ganz trockenen Zähnen den vierfachen Wert annehmen kann. Dem ersteren Fall entspricht dann $\eta' \approx 0,85$.

Bei roh gegossenen Zahnrädern kann man nach längerem Einlaufen (gegebenenfalls unter Beigabe eines Schleifmittels) und reichlicher Fettung etwa $\mu = 0,055$ ansetzen. Dem würde unter sonst gleichen Verhältnissen nach Formel (173) entsprechen

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 4 \cdot 0,055 \cdot 0,35 + 0,008 = 1,085, \quad \text{also} \quad \eta = 0,922.$$

Beispiel 113. Zu bestimmen ist der Wirkungsgrad des Getriebes der Beispiele 95 und 110 für den üblichen Neigungswinkel $\alpha = 75^\circ$.

Auch hier trifft die Formel (173) genau genug zu. Man erhält für die Räder 3 und 4 mit

$$d_3 = 16 \text{ cm}, \quad d_4 = 8 \text{ cm}, \quad d_{z3} = 3,5 \text{ cm}, \quad d_{z4} = 2,5 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{\eta_4} = 1 + 4 \cdot 0,04 \cdot 0,268 + \frac{0,02}{0,966} \cdot \left(\frac{2,5}{8} + \frac{3,5}{16} \right) = 1 + 0,0429 + 0,0110 = 1,0539.$$

Für die Räder 0 und 3 gilt entsprechend

$$\frac{1}{\eta_3} = 1 + 0,0429 + \frac{0,02}{0,966} \cdot \frac{3,5}{16} = 1,0474.$$

Für die Räder 1 und 2 ergibt sich mit

$$d_1 = 19,23 \text{ cm}, \quad d_2 = 14,46 \text{ cm}, \quad d_{z1} = 4 \text{ cm}, \quad d_{z2} = 3,5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + 0,0429 + \frac{0,02}{0,966} \cdot \left(\frac{3,5}{14,46} + \frac{4}{19,23} \right) = 1,0522.$$

Damit wird der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \frac{1}{1,0539 \cdot 1,0474 \cdot 1,0522} = 0,860,$$

gute Schmierung vorausgesetzt.

Rechnet man ungünstig mit $\mu = 0,06$ und erhöht auch die Zapfenreibungsziffer μ_1 auf 0,03, so wird

$$\eta = \frac{1}{1,0809 \cdot 1,0711 \cdot 1,0783} = 0,800.$$

d) **Die Zykloidenverzahnung**¹⁴⁰). Man zeichnet die Zahnform der Zykloidenverzahnung mit Hilfe zweier Rollkreise mit den Mittelpunkten Ω_1 bzw. Ω_2 und den Halbmessern ϱ_1 bzw. ϱ_2 nach den Angaben zu den Fig. 177 und 178. Der Kopf des Zahnes 1 entsteht durch Rollen von ϱ_2 auf r_1 , der Fuß durch Rollen von ϱ_1 auf r_1 , entsprechend der Kopf des Zahnes 2 durch Rollen von ϱ_1 auf r_2 und der Fuß durch Rollen von ϱ_2 auf r_2 . Jede Zahnflanke setzt sich also aus zwei verschiedenen, entgegengesetzt gekrümmten Kurven zusammen, die im Zentralpunkt A inein-

¹⁴⁰) Desargues (1593–1662), Camus 1733; Eytelwein, Die Statik der festen Körper, 1808.

ander übergehen (Fig. 197). Dieselben Angaben gelten auch für Innenverzahnung und für Zahnstangen.

Bei einem Paar Einzelräder, die nur miteinander zusammenarbeiten sollen, kann man die Rollkreishalbmesser beliebig wählen, gebräuchlich¹⁴¹⁾ ist $\rho = 0,4 r$. Bei Satzrädern¹⁴²⁾, die mit beliebigen anderen aus demselben Satz zusammenarbeiten sollen, müssen alle Rollkreise gleich sein. Da nun die Hypozykloide von $\rho = \frac{1}{2} r$ eine radial gerichtete Gerade ist, so ist das der größte Wert des Rollkreishalbmessers, der für das kleinste Rad des Satzes zu nehmen ist. Evolventenräder sind ohne weitere Satzräder¹²⁵⁾; allerdings die nach dem Abwälzverfahren hergestellten nicht genau, da die Begrenzung der Zähnezahlen

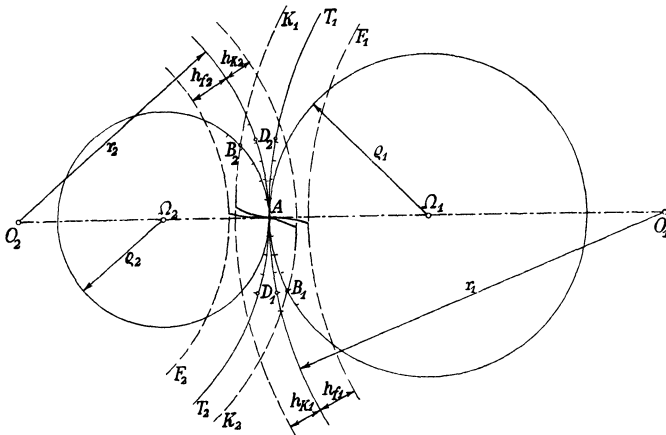


Fig. 197.

bei der Benutzung desselben Fräasers für mehrere verschiedene Zähnezahlen und seine Zahnung für den Schnitt von Einfluß auf die Gestalt der Zahnflanken sind¹⁴³⁾.

Zykloidenräder arbeiten nur dann richtig zusammen, wenn beide Teilkreise durch den Stoßpunkt der beiden je eine Zahnform bildenden Kurven gehen. Sie verlangen also eine genaue Einstellung der Radachsen.

Die Eingriffstrecke $l = B_1AB_2$ ist gegeben durch die von den Kopfkreisen abgeschnittenen Stücke AB_1 bzw. AB_2 der beiden Rollkreise (Fig. 197). Ihnen entsprechen auf den Teilkreisen die gleichen Längen \widehat{AD}_1 und \widehat{AD}_2' bzw. AD_2 und AD_1' . Als Eingriffdauer gilt wieder $e = \frac{l}{\tau}$, deren Wert gewöhnlich aus der Zeichnung abgegriffen wird.

¹⁴¹⁾ Weisbach, Ingenieur- u. Maschinen-Mechanik 1851/60.

¹⁴²⁾ Willis, Transact. of the Inst. of Civil Eng. 1837.

¹⁴³⁾ Barth, Die Grundlagen der Zahnradbearbeitung, 1911; Gerlach, Werkstattstechnik 1913.

Um das spezifische Gleiten zu bestimmen, hat man zuerst für jedes Zahnflankenstück den Wert ds zu bilden. Nun ist für jede beliebige Kurve nach dem Satz des Pythagoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

und durch Differentiation der Kurvengleichungen (157) mit $a = r$ erhält man gemäß Bd. I S. 106

$$dx = -(r \pm \varrho) \cdot \sin\left(\frac{\varrho}{r} \cdot \varphi\right) \cdot d\varphi \pm \varrho \cdot \sin\left(\frac{r \pm \varrho}{r} \cdot \varphi\right) \cdot d\varphi,$$

$$dy = +(r \pm \varrho) \cdot \cos\left(\frac{\varrho}{r} \cdot \varphi\right) \cdot d\varphi - \varrho \cdot \cos\left(\frac{r \pm \varrho}{r} \cdot \varphi\right) \cdot d\varphi.$$

Beide Gleichungen sind ins Quadrat zu erheben und dann zu addieren. Beachtet man noch die aus den Formeln auf S. 35 leicht zu folgendernden Gleichungen

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta),$$

so ergibt sich für die Epizykloide, für die das obere Vorzeichen gilt,

$$ds = 2 \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot (r + \varrho) \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi$$

und für die Hypozykloide, für die das untere Vorzeichen gilt,

$$ds = 2 \cdot \frac{\varrho}{r} (r - \varrho) \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

Bezeichnet abkürzungsweise $H \frac{\varrho_2}{r_2}$ das Bogenelement ds für die durch Rollen des Kreises vom Halbmesser ϱ_2 innerhalb des Teilkreises r_2 entstehende Hypozykloide und $E \frac{\varrho_2}{r_2}$ das Bogenelement ds für die entsprechende Epizykloide, so wird gemäß Fig. 197 das spezifische Gleiten am

$$\text{Zahnkopf des Rades 1: } g_{1k} = \frac{H \frac{\varrho_2}{r_2} - E \frac{\varrho_2}{r_1}}{E \frac{\varrho_2}{r_1}},$$

$$\text{Zahnfuß „ „ 1: } g_{1f} = \frac{E \frac{\varrho_1}{r_2} - H \frac{\varrho_1}{r_1}}{H \frac{\varrho_1}{r_1}},$$

$$\text{Zahnkopf „ „ 2: } g_{2k} = \frac{H \frac{\varrho_1}{r_1} - E \frac{\varrho_1}{r_2}}{E \frac{\varrho_1}{r_2}},$$

$$\text{Zahnfuß des Rades 2: } g_{2f} = \frac{E \frac{\varrho_2}{r_1} - H \frac{\varrho_2}{r_2}}{E \frac{\varrho_2}{r_2}}.$$

Hierin sind die obigen Werte von \mathbf{a} s einzusetzen, und man bemerkt, daß in demselben Bruch die Rollwinkel φ bei jeder Stellung der Zähne zueinander die gleichen sind. Man erhält ¹²³⁾ so nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} g_{1k} &= - \frac{1 + \frac{r_1}{r_2}}{+1 + \frac{r_2}{\varrho_2} \cdot \frac{r_1}{r_2}}, & g_{2k} &= + \frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{+1 + \frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{r_1}}, \\ g_{1f} &= + \frac{1 + \frac{r_1}{r_2}}{-1 + \frac{r_1}{\varrho_1}}, & g_{2f} &= - \frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{-1 + \frac{r_2}{\varrho_2}}. \end{aligned} \quad (174)$$

Daß die Vorzeichen des spezifischen Gleitens am Fuß und Kopf verschieden sind, rührt davon her, daß die Richtung des Gleitens zu beiden Seiten des Zentralpunktes A verschieden ist. Es hängt nur von den Verhältnissen der Teil- und Rollkreishalbmesser ab, ist also für jeden Flanken- teil unveränderlich.

Beispiel 114. Anzugeben ist das spezifische Gleiten für ein Räderpaar von $z_1 = 30$, $z_2 = 100$ Zähnen, dessen Rollkreishalbmesser das 0,5-, 0,4-, 0,3fache der Teilkreishalbmesser betragen. Die Formeln (174) ergeben sogleich

für $\varrho =$	0,5	0,4	0,3
$g_{1k} =$	$-\frac{1 + \frac{3}{10}}{1 + \frac{10}{5} \cdot \frac{3}{10}}$	$-\frac{1 + \frac{3}{10}}{1 + \frac{10}{4} \cdot \frac{3}{10}}$	$-\frac{1 + \frac{3}{10}}{1 + \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{10}}$
	= -0,8125	= -0,7433	= -0,650,
$g_{1f} =$	$+\frac{1 + \frac{3}{10}}{-1 + \frac{10}{5}}$	$+\frac{1 + \frac{3}{10}}{-1 + \frac{10}{4}}$	$+\frac{1 + \frac{3}{10}}{-1 + \frac{10}{3}}$
	= +1,30	= +0,8667	= +0,5571,
$g_{2k} =$	$+\frac{1 + \frac{10}{3}}{1 + \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{3}}$	$+\frac{1 + \frac{10}{3}}{1 + \frac{10}{4} \cdot \frac{10}{3}}$	$+\frac{1 + \frac{10}{3}}{1 + \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3}}$
	= +0,5655	= +0,4645	= +0,3578,
$g_{2f} =$	$-\frac{1 + \frac{10}{3}}{-1 + \frac{10}{5}}$	$-\frac{1 + \frac{10}{3}}{-1 + \frac{10}{4}}$	$-\frac{1 + \frac{10}{3}}{-1 + \frac{10}{3}}$
	= -4,333	= -2,889	= -1,857.

Bei größerer Übersetzung ist der Fuß des großen Rades ziemlich ungünstig auf Abnutzung beansprucht, und zwar gleichmäßig während des ganzen Eingriffes. Es kann das dadurch verbessert werden, daß für das große Rad der Rollkreis halbmesser ein gut Teil kleiner gewählt wird, als die gebräuchliche Vorschrift angibt. Nimmt man im vorliegenden Fall $\varrho_2 = 0,2 \cdot r_2$, so wird

$$g_{2r} = -1,083 \quad \text{und} \quad g_{1K} = -0,520,$$

womit praktisch vorteilhafte Verhältnisse erzielt sind.

Für eine beliebige Eingriffsstelle C ist das Drehmoment des Zahndruckes N in bezug auf die Achse O_2 gemäß Fig. 198

$$M'_2 = N \cdot \overline{O_2 E_2} = N \cdot [(r_2 - \varrho_2) \cdot \cos \varphi + \varrho_2]$$

und das der am Fuß des Rades 2 angreifenden Reibungskraft

$$M'_{r_2} = \mu \cdot N \cdot \overline{C E_2} = \mu \cdot N \cdot (r_2 - \varrho_2) \cdot \sin \varphi.$$

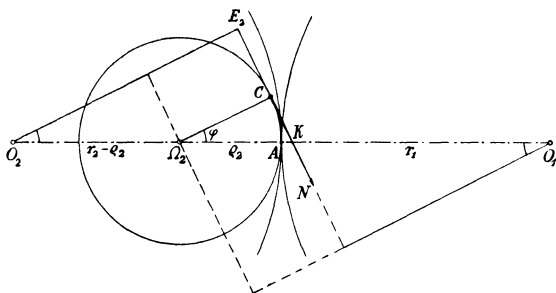


Fig. 198.

Entsprechend ist das Drehmoment des Zahndruckes in bezug auf die Achse O_1

$$M'_1 = N \cdot \overline{O_1 E_1} = N \cdot [(r_1 + \varrho_2) \cdot \cos \varphi - \varrho_2]$$

und das der am Kopf des Rades 1 angreifenden Reibungskraft

$$M'_{r_1} = \mu \cdot N \cdot \overline{C E_1} = \mu \cdot N \cdot (r_1 + \varrho_2) \cdot \sin \varphi.$$

Die mittleren Drehmomente für die gesamte Eingriffsstrecke, soweit der Rollkreis 2 in Frage kommt, erhält man durch Bildung des Ausdrucks

$$M_m = \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} M' \cdot \varrho_2 \cdot d\varphi}{\varrho_2 \cdot \text{arc } \varphi}.$$

Es ergeben sich so die folgenden Mittelwerte der Drehmomente, wenn φ_2 den größten Rollwinkel bezeichnet,

$$M_2 = N \cdot \left((r_2 - \varrho_2) \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\text{arc } \varphi_2} + \varrho_2 \right),$$

$$M_1 = N \cdot \left((r_1 + \varrho_2) \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\text{arc } \varphi_2} - \varrho_2 \right),$$

$$M_{r_2} = \mu \cdot N \cdot (r_2 - \varrho_2) \cdot \frac{1 - \cos \varphi_2}{\operatorname{arc} \varphi_2},$$

$$M_{r_1} = \mu \cdot N \cdot (r_1 + \varrho_2) \cdot \frac{1 - \cos \varphi_2}{\operatorname{arc} \varphi_2}.$$

Nun ist nach Formel (45 b)

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{M_{r_1}}{M_1} + \frac{M_{r_2}}{M_2}$$

oder

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \mu \cdot \left(\frac{1 - \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2 - \operatorname{arc} \varphi_2 \cdot \frac{\varrho_2}{r_1 + \varrho_2}} + \frac{1 - \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2 + \operatorname{arc} \varphi_2 \cdot \frac{\varrho_2}{r_2 - \varrho_2}} \right).$$

Das wäre der Wirkungsgrad, wenn nur an einer Stelle Eingriff stattfände. Nun findet aber an einem zweiten Zahn noch ein entsprechender Eingriff über den Winkel φ_1 statt, und der Zahndruck verteilt sich bei gefrästen oder gut gehobelten Zähnen etwa im Verhältnis 0,6 : 0,4. Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} = & 1 + 0,4 \cdot \mu \cdot (1 - \cos \varphi_2) \cdot \left(\frac{1}{\sin \varphi_2 - \frac{\varrho_2}{r_1 + \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2} + \frac{1}{\sin \varphi_2 + \frac{\varrho_2}{r_2 - \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2} \right) \\ & + 0,6 \cdot \mu \cdot (1 - \cos \varphi_1) \cdot \left(\frac{1}{\sin \varphi_1 - \frac{\varrho_1}{r_2 - \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1} + \frac{1}{\sin \varphi_1 + \frac{\varrho_1}{r_1 - \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1} \right) \\ & + 0,4 \cdot \mu_1 \cdot \left(\frac{\frac{r_{z1}}{r_1 + \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2}{\sin \varphi_2 - \frac{\varrho_2}{r_1 + \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2} + \frac{\frac{r_{z2}}{r_2 - \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2}{\sin \varphi_2 + \frac{\varrho_2}{r_2 - \varrho_2} \cdot \operatorname{arc} \varphi_2} \right) \\ & + 0,6 \cdot \mu_1 \cdot \left(\frac{\frac{r_{z1}}{r_2 + \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \frac{\varrho_1}{r_2 + \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1} + \frac{\frac{r_{z2}}{r_1 - \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1}{\sin \varphi_1 + \frac{\varrho_1}{r_1 - \varrho_1} \cdot \operatorname{arc} \varphi_1} \right), \quad (175) \end{aligned}$$

worin die beiden letzten Glieder noch die Zapfenreibung in gleicher Weise berücksichtigen.

Beispiel 115. Für eine Zykloidenverzahnung von $z_1 = 30$ und $z_2 = 100$ Zähnen ist der Wirkungsgrad zu bestimmen, wenn das Rollkreisverhältnis $\frac{\varrho_1}{r_1} = 0,4$ und $\frac{\varrho_2}{r_2} = 0,4$ bzw. $0,2$ beträgt und das der Zapfen $\frac{r_{z1}}{r_1} = \frac{1}{4}$ und $\frac{r_{z2}}{r_2} = \frac{1}{8}$.

Einer maßstäblichen Zeichnung für $h_k = m$ entnimmt man

$$\sin \varphi_1 = \frac{13}{24} = 0,542,$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{16}{80} = 0,200 \quad \text{bzw.} \quad \frac{13,5}{40} = 0,338,$$

also

$$\varphi_1 = 32^\circ 48' \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 11^\circ 32' \quad \text{bzw.} \quad 19^\circ 45'$$

und daraus folgend

$$\arccos \varphi_1 = 0,573 \quad \text{und} \quad \arccos \varphi_2 = 0,201 \quad \text{bzw.} \quad 0,345.$$

$$1 - \cos \varphi_1 = 0,159 \quad \text{und} \quad 1 - \cos \varphi_2 = 0,0202 \quad \text{bzw.} \quad 0,0588.$$

Damit ergibt sich mit $\mu = 0,04$ und $\mu_1 = 0,02$

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,6 \cdot 0,02 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,159 + \frac{0,25}{3,333 + 0,4} \cdot 0,573}{0,542 - \frac{0,4}{3,333 + 0,4} \cdot 0,573} + \frac{2 \cdot 0,159 + \frac{0,125}{0,3 - 0,4 \cdot 0,3} \cdot 0,573}{0,542 + \frac{0,4}{1 - 0,4} \cdot 0,573} \right) \\ + 0,4 \cdot 0,02 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,0202 + \frac{0,25}{1 + 0,4 \cdot 3,333} \cdot 0,201}{0,201 - \frac{0,4}{0,3 + 0,4} \cdot 0,201} + \frac{2 \cdot 0,0202 + \frac{0,125}{1 - 0,4} \cdot 0,201}{0,201 + \frac{0,4}{1 - 0,4} \cdot 0,201} \right)$$

bzw. für das letzte Glied

$$+ 0,4 \cdot 0,02 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,0588 + \frac{0,25}{1 + 0,2 \cdot 3,333} \cdot 0,345}{0,338 - \frac{0,2}{0,3 + 0,2} \cdot 0,345} + \frac{2 \cdot 0,0588 + \frac{0,125}{1 - 0,2} \cdot 0,345}{0,338 - \frac{0,2}{1 - 0,2} \cdot 0,345} \right).$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,012 \cdot \left(\frac{0,318 + 0,0374}{0,542 - 0,0614} + \frac{0,318 + 0,398}{0,542 + 0,382} \right) \\ + 0,008 \cdot \left(\frac{0,0404 + 0,0215}{0,200 - 0,115} + \frac{0,0404 + 0,0419}{0,200 + 0,134} \right)$$

bzw. für das letzte Glied

$$+ 0,008 \cdot \left(\frac{0,1176 + 0,5177}{0,338 - 0,138} + \frac{0,1176 + 0,0539}{0,338 - 0,0862} \right).$$

also

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,0182 + 0,0097 = 1,0279$$

bzw.

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,0182 + 0,0309 = 1,0491.$$

Man bemerkt, daß auch hier geringe Abnutzung mit geringerem Wirkungsgrad verbunden ist.

Es folgt schließlich

$$\eta = 0,974 \quad \text{bzw.} \quad 0,954.$$

Der Wirkungsgrad der Zykloidenverzahnung ist unter sonst gleichen Verhältnissen günstiger als der der Evolventenverzahnung.

Wie die Fig. 197 erkennen läßt, legen sich die Zykloidenzähne so ineinander, daß eine ausgebauchte Fläche auf einer ausgehöhlten liegt, und umgekehrt. Die Berührung findet somit in einer größeren Fläche statt als bei der Evolventenverzahnung, und man könnte die spezifische Belastung demnach höher ansetzen. Es wird auch bisweilen mit dem 1,5fachen der in Fig. 195 angegebenen Werte gerechnet. Meistens behält man jedoch dieselben Werte bei, besonders natürlich bei roh gegossenen Zähnen, aber auch bei den anderen, um den schädlichen Einfluß eines etwas fehlerhaften Achsenabstandes auszugleichen.

Bei der Zykloidenverzahnung zeigt sich am Ausgangspunkt A der Profilbildung ein Sprung in der Größe des spezifischen Gleitens, der sich im Laufe des Betriebes durch die erhöhte Abnutzung jener Stelle etwas ausgleicht. Durch diese Abnutzung wird die aus zwei ineinander übergehenden Kreisbogen von entgegengesetzter Krümmung bestehende Eingriffslinie an der Stelle allmählich zu einer Geraden abgeflacht. Im Gegensatz hierzu ist bei der Evolventenverzahnung das spezifische Gleiten an den Enden des Eingriffs am größten und wirkt somit auf besondere Abnutzung der entsprechenden Stellen der Zähne. Dadurch wird im Laufe des Betriebes die ursprünglich gerade Eingriffslinie an den Enden etwas gekrümmt.

Es liegt nun nahe, eine Eingriffslinie, der sich die beiden üblichen Profilarten allmählich nähern, von vornherein zu wählen, um die Abnutzung nach Möglichkeit zu verringern¹⁴⁴). Wird die Eingriffslinie zusammengesetzt aus einem mittleren geraden Stück, das gegen die Zentrallinie O_1O_2 um den Winkel $\alpha = 75^\circ$ geneigt ist, und zwei bestimmten, sich daran anschließenden Kreisbögen, so setzt sich das Zahnprofil nach einer nicht eingebürgerten Bezeichnungsweise¹⁴⁵) zusammen aus einer Orthozykloide und einer Zyko-Orthoide. Die so entstandene Verzahnung wird abkürzungsweise als Ozoidenverzahnung¹³³) bezeichnet. Sie entspricht im allgemeinen einer Evolventenverzahnung, ohne die starke Steigung des spezifischen Gleitens am Zahnfuß, und ist besonders für große Übersetzungen mit kleiner Zähnezahl am kleinen Rad vorteilhaft. Sie liefert außerdem einen kräftigeren Zahnfuß als die gewöhnliche Evolventenverzahnung.

Wird die Zykloidenverzahnung mit nur einseitigem Eingriff benutzt etwa derart, daß ein einziger Rollkreis auf dem Teilkreis des kleineren Rades abrollt und in dem Teilkreis des größeren, so erhält das kleinere Rad auf der ganzen Zahnhöhe ausgebauchte Zähne und das größere ausgehöhlte¹³⁹). Das spezifische Gleiten ist dann auf der ganzen Länge das gleiche. Der Eingriff beginnt natürlich erst im Teilkreis, und der Fußkreis des kleinen Rades liegt nur ein wenig darunter. Die Kopfhöhe kann zu $h_K = \frac{1}{2} \tau = 1,57 m$ gewählt werden, die Stärke des Zahnes im Teilkreise zu $\frac{5}{8} \tau \approx 1,96 m$. Diese Verzahnung dürfte sich sehr gut für große Einzelräder eignen. Sie vereinigt den Vorzug geringer gleichmäßiger Abnutzung mit dem des guten Wirkungsgrades.

e) Die Triebstockverzahnung. Aus der gewöhnlichen Zykloidenverzahnung entsteht die Triebstockverzahnung, indem man den Teilkreis des größeren Rades als Rollkreis verwendet, der auf dem Teilkreis des kleineren Rades abrollt. Für die Zahnstange ergibt sich somit als zugehörige Verzahnung des kleineren Rades die Evolvente.

Das Gegenprofil des kleineren Rades schrumpft zu einem Punkt zusammen und wird bei der üblichen praktischen Ausführung zu einem

¹⁴⁴) Lindner, Z. d. V. d. I. 1900; Franz, Die Ozoidenverzahnung, 1913.

¹⁴⁵) Reuleaux, Kinematik, 1900.

gleichachsigen Kreis vom Halbmesser r_0 erweitert. An Stelle der in der Fig. 199 vom Punkte A aus gezeichneten Epizykloide tritt so ihre im Abstände r_0 gelegene Äquidistante. Ihre Höhe bestimmt sich dadurch, daß die Eingriffsdauer $e > 1$ sein muß, daß also der Endpunkt B der Eingriffstrecke von A weiter als um die Teilung τ , auf dem Teilkreis gemessen, entfernt sein muß. Der Eingriff selbst findet nur auf der einen Seite der Zentrale O_1AO_2 statt. Der Zahnfuß des kleineren Rades wird als beliebiger Kreisbogen mit einem etwas größeren Halbmesser als r_0 gezeichnet.

Zu beachten ist jedoch, daß die Äquidistante stets eine fehlerhafte Zahnform liefert, was z. B. daraus folgt, daß der Eingriff nicht auf dem Teilkreis beginnt; und kleine Fehler bewirken schon ganz erhebliche Geschwindigkeitsschwankungen, also Stöße im Getriebe und entsprechend Verluste und Abnutzungen¹⁴⁶⁾. Eine fehlerfreie Anordnung wird

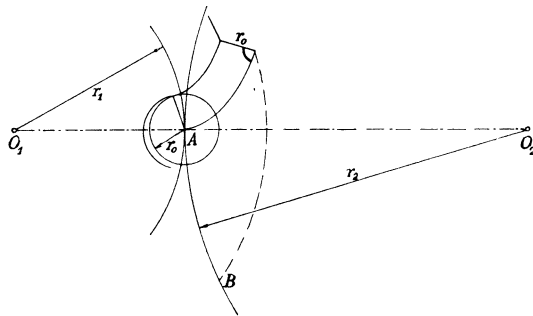


Fig. 199.

erhalten, wenn die Mitten der Triebstöcke auf einem Kreis vom Halbmesser $r' = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ angeordnet werden und man nun die Eingriffslinie und das Gegenprofil nach den Regeln der allgemeinen Verzahnung (Fig. 182) konstruiert¹⁴⁷⁾.

Infolge der großen Unterschiede der Krümmung beider zusammenarbeitender Profile sind die Gleit- und Abnutzungsverhältnisse sehr ungünstig, so daß diese Verzahnung mit festen Randeisenstäben in dem einen Rade, meist einer Zahnstange, nur für ganz rohe Getriebe Anwendung findet. In größerem Umfange wird sie benutzt für den Eingriff in Gallsche oder sonstige Treibketten, die zylindrische Zapfen oder Stege besitzen.

Die Verhältnisse werden ganz bedeutend verbessert, wenn die Zylinder des einen Rades sich auf ihren Achsen frei drehen können. Es ergibt sich so das Grissongetriebe, das hauptsächlich für große Übersetzungen angewendet wird. Es besteht aus zwei nebeneinander

¹⁴⁶⁾ Hartmann, Z. d. V. d. I. 1905.

¹⁴⁷⁾ Gerlach, Z. d. V. d. I. 1908.

arbeitenden, um eine halbe Teilung versetzten Trieben nach Fig. 200, deren eines Rad also nur einzählig ist. Zahnkurve ist die im Abstände r_0 gezeichnete Äquidistante der verkürzten Epizykloide, die der Mittelpunkt der Triebstockrollen beim Abwälzen des Kreises vom Halbmesser $r_2 + r_0$ auf dem Daumenkreise vom Halbmesser $r_1 = a - r_2 - r_0$ beschreibt.

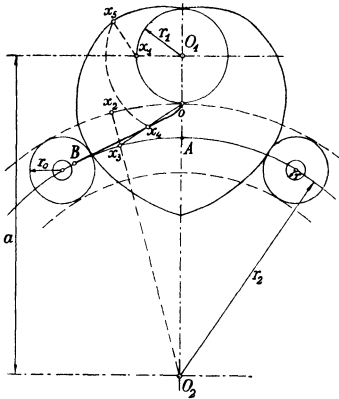


Fig. 200.

Zeichnet man nach dem in Fig. 182 angegebenen Verfahren die Eingriffslinie auf, so erhält man die Kurve OB , die also mit Ausnahme eines kurzen Endstückes nahezu geradlinig verläuft¹⁴⁸⁾. Man teilt den Kreisumfang $2\pi r_1$ in eine Anzahl gleicher Teile und trägt beispielsweise $\overline{Ox_1}$ auf dem Kreis vom Halbmesser $r_2 + r_0$ als $\overline{Ox_2}$ auf, bestimmt durch Ziehen des Halbmessers $\overline{x_2O_2}$ den Punkt x_3 auf dem Teilkreis der

Rollen, zieht jetzt die Gerade x_3O und trägt darauf die Strecke $r_0 = x_3x_4$ ab. Dann ist x_4 ein Punkt der Eingriffslinie. Schlägt man jetzt aus O_1 mit $\overline{O_1x_4}$ einen Kreisbogen und aus x_1 einen Kreisbogen mit dem Halbmesser $\overline{Ox_4}$, so gibt der Schnittpunkt x_5 beider Kreise den zugehörigen Punkt der Daumenkurve an.

Die allgemeine Bestimmung des Wirkungsgrades führt auf recht umständliche Ausdrücke. Gemessen¹⁴⁸⁾ wurde für ein Getriebe mit der Übersetzung $1 : 18$, wenn wie gewöhnlich der Daumen treibt, bei Vollbelastung $\eta = 0,946$, bei halber Belastung $\eta = 0,890$, dagegen, wenn das Rad treibt, bei Vollbelastung $\eta = 0,905$ und bei halber Belastung $\eta = 0,823$. Diese Änderung des Wirkungsgrades ist dadurch zu erklären, daß die Reibungsziffer der Rollen auf ihren Zapfen und die an den Daumen denselben Betrag hat, weil das ganze Getriebe gewöhnlich in Öl läuft. Das Gleiten verteilt sich somit auf den Zapfen und den Rollenumfang um so mehr, je geringer der Zahndruck ist und je schneller das Rad läuft, letzteres, weil zu Anfang jedes Eingriffes die Rolle erst auf die Drehgeschwindigkeit zu bringen ist.

Ein Mangel des Grissongetriebes ist, daß es in der angegebenen Form nur für ganzzahlige Übersetzungen, und zwar ziemlich hohe zu verwenden ist. Er läßt sich dadurch beheben, daß man mehrere Daumen in derselben Ebene anordnet, die entsprechend niedriger gemacht werden und sich so der üblichen Zahnform nähern¹⁴⁹⁾. Wenn dann die Rollen ziemlich groß und breit ausgeführt werden, wird eine Räderübertragung erzielt, die für große Kräfte und die verschiedensten Übersetzungen bei hohem Wirkungsgrad und geringer Abnutzung geeignet ist. Er-

¹⁴⁸⁾ Roser, Untersuchung des Grissongetriebes, 1901.

¹⁴⁹⁾ Ulmer, Betriebstechnik 1920.

forderlich ist naturgemäß, daß die Wellen genau parallel zueinander liegen.

f) Die Stirnräder mit Pfeilzähnen. In Fig. 201 stellen die schraffierten Teile den Mittelschnitt zweier zusammenarbeitender Zahnräder mit Evolventenzahnung dar. Die Zähne laufen nun von der Mitte nach den Seiten des Rades nicht senkrecht zur Zeichenebene, sondern um einen Winkel γ dazu geneigt¹⁵⁰⁾. Sie bilden also den Ausschnitt einer Schraube mit dem Sprung $h = AC_1 = AC_2$, so daß für die Radbreite b gilt

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{2h}. \quad (176)$$

Die aus der Beziehung

$$M = N \cdot r \cdot \sin \alpha,$$

die bei der Herleitung der Formel (165) angegeben wurde, folgende Zahnkraft N zerlegt sich hier gemäß Fig. 202 in die beiden Seiten-

kräfte $N_1 = \frac{N}{2 \cdot \sin \gamma}$. Der spezifische Zahndruck ergibt sich demnach bei der Länge $b_1 = \frac{N}{2 \cdot \sin \gamma}$ jeder Zahnhälfte zu

$$c = \frac{N_1}{b_1 \cdot \tau} = \frac{N}{b \cdot \tau} \text{ kg/cm}^2,$$

ebenso groß wie bei Rädern mit geraden, ungebrochenen Zähnen.

Ein wesentlicher Vorteil der Pfeilräder liegt darin, daß die Eingriffsdauer vergrößert wird auf

$$e = \frac{b_0 + h}{b_0} = 1 + \frac{h}{b_0}, \quad (177)$$

worin b_0 den Eingriffbogen einer gleichen Verzahnung mit parallel zur Achse verlaufenden Zähnen angibt. Die Berührung beider Zähne erfolgt in geraden Linien, die gegeneinander geneigt sind, und zwar derart, daß sie alle Tangenten an dem Grundkreis der Verzahnung sind. Zieht man diese Geraden (Fig. 203), so bemerkt man, daß der Eingriff anfangs nur durch einen Punkt gebildet wird und ebenso wieder am Ende, daß dazwischen die Eingriffstrecken wechselnde Länge haben, die sich in der Mitte über die ganze Zahnlänge b_1 erstreckt, wenn der Sprung gerade gleich der Zahnteilung τ ist¹⁵¹⁾. Es bildet sich also

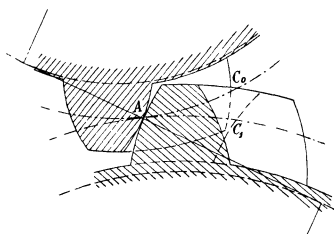


Fig. 201.

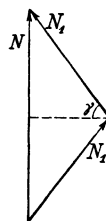


Fig. 202.

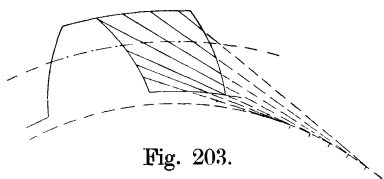


Fig. 203.

¹⁵⁰⁾ Neumann, Hagener Gußstahlwerke, 1878.

¹⁵¹⁾ Bauer, Österr. Zeitschr. f. Berg- u. Hüttenw. 1890.

ein Eingriffsfeld wie bei der Schnecke (S. 207), dessen Gesamtlänge Formel (177) bestimmt. Den längsten Eingriff erhält man, wenn der Sprung h gleich der Eingriffslänge b_0 ist: $e_{\max} = 2$. Man kann also in dem Fall bei gefrästen Zähnen unter Annahme einer 1,2 fachen Sicherheit damit rechnen, daß ein Zahn das 0,6 fache des Zahndruckes N aufnimmt.

Zur Bestimmung des Wirkungsgrades ist die Rechnung S. 167 zu wiederholen. Man setzt an:

$$M_1 = N \cdot r_1 \cdot \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{2} \cdot M_{r1} = \frac{\int_0^{l_1} \mu \cdot N_1 \cdot (r_1 \cdot \cos \alpha - x) \cdot dx}{l_1} + \frac{\int_0^{l_2} \mu \cdot N_1 \cdot (r_1 \cos \alpha + x) \cdot dx}{l_2}$$

$$= \mu \cdot N_1 \cdot (2 r_1 \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot l_1 + \frac{1}{2} \cdot l_2),$$

$$N_1 = \frac{N}{2 \cdot \sin \gamma}.$$

Man erhält so mit der zulässigen Unterdrückung der beiden letzten Klammernglieder in M_{r1}

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{N}{2 \cdot \sin \gamma} \cdot \frac{2 r_1 \cdot \cos \alpha}{N \cdot r_1 \cdot \sin \alpha} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{N}{2 \cdot \sin \gamma} \cdot \frac{2 r_2 \cdot \cos \alpha}{N \cdot r_2 \cdot \sin \alpha}$$

oder

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 4 \cdot \mu \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma}. \quad (178)$$

An Werkzeugmaschinen findet man bei den Rädern mit Schraubenzähnen nur die eine Hälfte des Pfeilrades ausgeführt. Der Zahndruck N_1 drückt dann (Fig. 202) die Welle mit der Kraft

$$N_2 = N_1 \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \cotg \gamma$$

in axialer Richtung gegen ein Spurlager, dessen Reibungsmoment bei Ermittlung des Gesamtwirkungsgrades noch zu berücksichtigen ist.

Beispiel 116. Bei roh gegossenen Stahlformgußrädern ist gewöhnlich¹⁵²⁾

$$\gamma = 60 \div 65^\circ, \quad \frac{h_K}{m} = 0,8 \div 0,95, \quad h \propto \tau,$$

$$\alpha = 68 \div 72^\circ, \quad \frac{h_f}{m} = 1,1 \div 1,35,$$

und zwar sind die kleinen Werte die häufigeren. Anzugeben ist die Radbreite b für

$$\begin{array}{ccc} \gamma = 60^\circ & 62\frac{1}{2}^\circ & 65^\circ \\ \frac{h}{\tau} = 0,8 & 1 & 1,2. \end{array}$$

¹⁵²⁾ Bach, Die Maschinenelemente, 1892.

Man erhält aus Formel (176)

$$b = 2 \cdot h \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

also die folgende Zusammenstellung:

$\gamma =$	60°	$62\frac{1}{2}^\circ$	65°	
$\operatorname{tg} \gamma =$	1,732	1,921	2,145	
$\frac{h}{\tau} = 0,8$	2,77	3,07	3,44	$\frac{b}{\tau}$
1	3,46	3,84	4,29	
1,2	4,16	4,61	5,15	

Am gebräuchlichsten ist $\frac{b}{\tau} = 3,4 \div 4,6$.

Beispiel 117. Gefräste Räder werden mit denselben Fräsern hergestellt wie Räder mit geraden Zähnen. Der richtige Eingriff erfolgt also in Schnitten, die senkrecht zu den Zähnen liegen. Infolgedessen hat die Teilung, die in der senkrecht zur Radachse stehenden Radebene gemessen wird, den Wert $\frac{\tau}{\sin \gamma}$. Die Gleichung (120) gilt demnach hier nicht, sondern es ist

$$2r = \frac{m}{\sin \gamma} \cdot z. \quad (179)$$

Ein Ritzel von $z = 30$ Zähnen mit dem Modul $m = 0,5$ cm hat somit den Durchmesser

bei $\gamma =$	90°	60°	45°	30°	20°
$\frac{1}{\sin \gamma} =$	1	1,155	1,414	2,00	2,935
$d =$	15,0	17,33	21,2	30,0	43,85 cm.

Pfeilräder gleicher Teilung übertragen also ein größeres Drehmoment als Räder mit geraden Zähnen. Die Gleichung für das Drehmoment $M = N \cdot r \cdot \sin \alpha$ geht bei der hier ausschließlich vorkommenden Eingriffsdauer $e = 2$ gemäß den obigen Angaben und mit Benutzung der Formeln (169) und (179) über in

$$0,6 \cdot M = c \cdot b \cdot \frac{m}{\sin \gamma} \cdot \pi \cdot \frac{m}{\sin \gamma} \cdot \frac{z}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Rechnet man mit $\operatorname{cotg} \alpha = 0,35$, also

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{1 + 0,35^2} = 1,060,$$

so folgt hieraus

$$M = 2,47 \cdot c \cdot b \cdot z \cdot \left(\frac{m}{\sin \gamma} \right)^2. \quad (180)$$

Bei Ritzeln aus Nickelstahl und Rädern mit einem Zahnring aus geschmiedetem Flußstahl, die vollständig in Öl laufen, wird oft bei $v = 22,5$ m/sk Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis $c = 20$ at gewählt¹⁵³⁾, das ist etwa das 2,5fache des Wertes, den die Kurve a der Fig. 195 bei weiterer Verlängerung ergeben würde, also ziemlich niedrig. In Deutschland und Amerika geht man mit Rücksicht auf die günstige Schmierung und gute Ausführung bis auf 36 kg/cm^2 und gelegentlich noch etwas höher bei $14,5 < v < 36 \text{ m/sk}$ ¹⁵⁴⁾.

¹⁵³⁾ Parsons, nach Kutzbach, Z. d. V. d. I. 1916.

¹⁵⁴⁾ Westinghouse Maschine Co., nach Kutzbach, a. a. O.

Soll also das Getriebe $M = 1000$ mkg übertragen, so ist die Breite der Verzahnung nach Formel (180) bei vorsichtiger Wahl von c

$$b = \frac{1000 \cdot 100}{2,47 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0,5^2} \cdot \sin^2 \gamma = 270 \sin^2 \gamma,$$

mithin bei den oben angegebenen Winkeln γ

$$b = 270 \quad 202 \quad 135 \quad 67,5 \quad 31,5 \text{ cm.}$$

Hieraus ergibt sich der Wert der Pfeilräder am klarsten. Man nimmt bei Dampfturbinenrädern der Art, die mit Übersetzungen von $\frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$ arbeiten, höchstens $\gamma = 45^\circ$, oft 30° und bisweilen sogar 20° . Die Kopfhöhe der Zähne beträgt gewöhnlich $h_K = 0,6 \cdot m$.

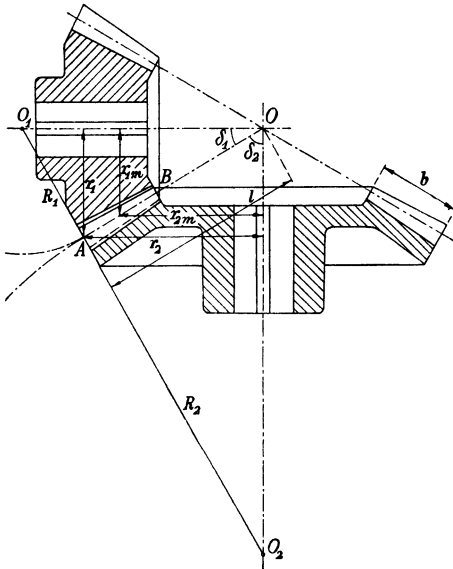


Fig. 204.

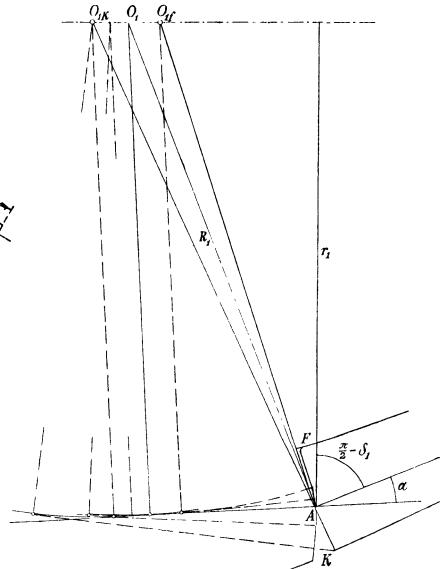


Fig. 205.

Der Wirkungsgrad wird nach Formel (178) berechnet mit $\mu = 0,03$. Im vorliegenden Fall ergibt sich danach allein für die Verzahnung bei $\gamma = 30^\circ$ und

$$\alpha = 70^\circ 42' : \frac{1}{\eta} = 1 + 4 \cdot 0,03 \cdot \frac{0,35}{0,50}, \quad \text{also } \eta = 0,922,$$

$$\alpha = 75^\circ : \frac{1}{\eta} = 1 + 4 \cdot 0,03 \cdot \frac{0,268}{0,50}, \quad \text{also } \eta = 0,940.$$

Gemessen wurde im letzteren Fall einschließlich der Lagerreibung¹⁵⁵⁾ unter Vollbelastung $\eta = 0,936$.

g) Die Kegelhäder. In den meisten Anwendungsfällen schneiden sich die beiden Wellen rechtwinklig (Fig. 204). Die Zähne werden auf der Länge AB von A aus immer kleiner, da alle Linien nach dem Schnittpunkt O der beiden Achsen zusammenlaufen. Man berechnet sie nach

¹⁵⁵⁾ Bach, Z. d. V. d. I. 1908.

den Angaben S. 165 für die mittlere Stärke. Die Verzahnung wird dort bestimmt, wo sie am genauesten gemessen werden kann, also an der Stelle A , der Außenseite des Rades.

Die Teilung ist dort im Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AO}}{CO} &= \frac{r_1}{r_{1m}} = \frac{r_{1m} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin \delta_1}{r_{1m}} = 1 + \frac{b}{2 \cdot r_{1m}} \cdot \frac{r_{1m}}{\sqrt{r_{1m}^2 + r_{2m}^2}} \\ &= 1 + \frac{b}{2 \cdot r_{1m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2}} \end{aligned} \quad (181)$$

größer als berechnet. Sie wird gewöhnlich mit Hilfe der Ergänzungskegel¹⁵⁶⁾ gezeichnet mit den Halbmessern $O_1A = R_1$ bzw. $O_2A = R_2$, die senkrecht zu AO stehen. Um hinreichend genau zu verfahren, pflegt man die Längen der R rechnerisch zu ermitteln. Es ist nach Fig. 204

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1}{\cos \delta_1}, & R_2 &= \frac{r_2}{\cos \delta_2}, \\ r_1 &= l \cdot \cos \delta_2, & r_2 &= l \cdot \cos \delta_1, \\ r_1^2 + r_2^2 &= l^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{1}{\cos \delta_1} = \frac{l}{r_2} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2}}$$

oder

$$R_1 = r_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = r_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2} \quad (182a)$$

und entsprechend

$$R_2 = r_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2} = r_2 \cdot \sqrt{1 + \dot{u}_2^2}. \quad (182b)$$

Die Bestimmung hat wenigstens für das kleinere Rad insofern einen Fehler, als die Verzahnung genau auf einer Kugelfläche zu bestimmen wäre, deren Halbmesser $AO = l$ ist. Am einfachsten zerlegt man die Kugelfläche in mehrere tangierende Kegelflächen und erhält so für die Endstellen F und K der Zahnflanke die zugehörigen Mittelpunkte O_f und O_K der Fig. 205. Man fällt von O_f, O_1, O_K und noch je einem Zwischenpunkt Lote auf die durch A gelegte erzeugende Gerade und zeichnet die Zahnflanke aus Evolventenstücken, die durch Abrollen derselben Erzeugenden auf verschiedenen Grundkreisen entstehen. Bei Rädern die mehr als 24 Zähne haben, nimmt man gewöhnlich die einfache Aufzeichnung aus dem einen Mittelpunkt O_1 vor.

Das mittlere spezifische Gleiten der Verzahnung ergibt sich für die mittleren Halbmesser, indem eine Stirnradverzahnung zugrunde gelegt wird vom Halbmesser

$$R_{1m} = r_{1m} \cdot \sqrt{1 + \dot{u}_1^2}$$

¹⁵⁶⁾ Tredgold.

Es gilt also entsprechend früheren Rechnungen

$$M_1 = N \cdot r_{1m} \cdot \sin \alpha,$$

$$M_{r1} = \mu \cdot N \cdot 2 \cdot R_{1m} \cdot \cos \alpha = \mu \cdot N \cdot 2 \cdot r_{1m} \cdot \sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} \cdot \cos \alpha,$$

und man erhält leicht für den Wirkungsgrad

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 2 \cdot \mu \cdot \cotg \alpha \cdot (\sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} + \sqrt{1 + \ddot{u}_2^2}) + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_{1m}} + \frac{r_{z2}}{r_{2m}} \right). \quad (183)$$

Beispiel 118. Anzugeben ist die Verzahnung zweier Winkelräder von der Übersetzung $\ddot{u}_1 = 1 : 2,5$, deren kleineres bei $n_1 = 1050$ Umdrehungen in der Minute $M_1 = 200$ cmkg aufnehmen soll.

Gewählt wird bei $\alpha = 70^\circ 42'$, also $\sin \alpha \approx 0,940$, $z_1 = 20$, mithin $z_2 = 50$ Zähne.

Aus der Gleichung $M_1 = N \cdot r_{1m} \cdot \sin \alpha$ folgt, wenn noch die Zahnbreite $b \approx 3 \tau$ gewählt wird,

$$M_1 = c \cdot 3 m \pi \cdot m \pi \cdot z_1 \frac{m}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Man schätzt für Gußeisen vorläufig $c \approx 28$ und erhält so aus

$$M_1 = c \cdot 1,393 \cdot m^3 \cdot z_1$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{200}{1,393 \cdot 28 \cdot 20}} = 0,637 \text{ cm.}$$

Dem entspricht $r_1 = 0,637 \cdot \frac{20}{2} = 6,37$ cm und die mittlere Umfangsgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{\pi \cdot 6,37}{30} = 0,565 \text{ m/sk,}$$

woraus Kurve b der Fig. 195 als zulässige Belastung $c = 27,8$ at ergibt, so daß die Schätzung sehr gut zutrif. Die Zahnbreite wird ferner

$$b = 3 \cdot 0,637 \cdot \pi \approx 6,0 \text{ cm}$$

und damit der äußere Halbmesser nach Formel (181)

$$r_1 = 6,37 + 3,0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2,5^2}} = 6,37 + 1,12 \approx 7,50 \text{ cm.}$$

Hieraus folgt der Modul der Außenseite des Rades

$$m_1 = m \cdot \frac{r_1}{r_{1m}} = 0,637 \cdot \frac{7,50}{6,37} = 0,75 \text{ cm.}$$

Die Aufzeichnung der Verzahnung des kleinen Rades enthält die Fig. 205 in 1,2facher Größe, und zwar der Deutlichkeit halber für $h_k = m$. Vorteilhafter und gebräuchlicher ist bei der ziemlich kleinen Zähnezahl $h_k = 0,7$ m.

Ist $r_{z1} = 2$ cm und $r_{z2} = 3$ cm, so liefert Formel (183) mit $\mu = 0,04$ und $\mu_1 = 0,02$ den Wirkungsgrad aus

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 2 \cdot 0,04 \cdot 0,35 \cdot (\sqrt{1,16} + \sqrt{7,25}) + \frac{0,02}{0,940} \cdot \left(\frac{2}{7,5} + \frac{3}{2,5 \cdot 7,5} \right)$$

$$= 1 + 0,028 \cdot 3,764 + 0,0213 \cdot 0,427 = 1,1145,$$

mithin $\eta = 0,897$.

Der Wirkungsgrad ist von der Übersetzung abhängig und sinkt mit starker Übersetzung nicht unerheblich. Für $ü_1 = 1 : 5$ wäre z. B. unter sonst gleichen Verhältnissen

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,028 \cdot (\sqrt{1,04} + \sqrt{26}) + 0,009 = 1,191,$$

mithin $\eta_5 = 0,839$.

Aber auch bei der Übersetzung 1 : 1 ist er nicht unbedeutend kleiner als bei Stirnrädern:

$$\frac{1}{\eta_1} = 1 + 0,028 \cdot 2 \cdot 1,414 + 0,009 = 1,087,$$

mithin $\eta_1 = 0,920$.

Schließen die beiden Achsen A und B einen beliebigen Winkel δ ein, so ergibt die Fig. 206

$$\frac{r_1}{R_1} = \cos \delta_1, \quad r' = \frac{r_2}{\cos \delta},$$

$$a_1 = r_1 \cdot \cotg \delta, \quad r_1 + r' = a_1 \cdot \tg \delta.$$

Werden in die letzte Gleichung die beiden vorhergehenden eingesetzt, so geht sie über in

$$\begin{aligned} r_1 + \frac{r_2}{\cos \delta} &= r_1 \cdot \cotg \delta_1 \cdot \tg \delta \\ &= r_1 \cdot \tg \delta \cdot \frac{\cos \delta_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \delta_1}} \end{aligned}$$

Hierin wird die erste Gleichung eingesetzt, und man erhält nach Division durch $r_1 \cdot \tg \delta$

$$\frac{1}{\tg \delta} \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_1} \cdot \frac{1}{\cos \delta} \right) = \frac{\frac{r_1}{R_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2}},$$

woraus sich leicht bestimmt

$$\frac{R_1}{r_1} = \sqrt{1 + \frac{1 - \cos^2 \delta}{(\cos \delta + \ddot{u}_2)^2}}. \tag{184}$$

Damit lassen sich die weiteren Rechnungen wie oben durchführen. Auch Kegelräder können Pfeilzähne erhalten¹⁵⁷⁾. Ist der Neigungswinkel γ der Winkelverzahnung zur Tangente an irgendeinen beliebigen Radkreis überall der gleiche, so bildet die Projektion des Zahnes auf eine zur Radachse senkrechte Ebene die logarithmische Spirale. Leichter auszuführen ist die archimedische Spirale, bei der die trigonometrische Tangente des Winkels der an die Schraubenlinie gezogenen Tangente im umgekehrten Verhältnis zu der Entfernung von der Rad-

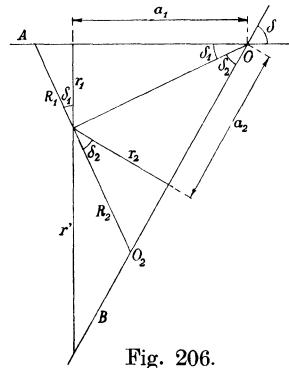


Fig. 206.

¹⁵⁷⁾ Schiebel, Werkstattstechnik 1913.

achse steht³⁰⁾. Ausgeführt wird meistens auf dem Halbmesser r_m $\gamma_m = 37\frac{1}{2}^\circ$. Je nach der Breite b der Zähne geht dieser Winkel nach außen auf $30 - 32^\circ$ herunter und steigt nach innen auf $45 - 50^\circ$ ¹⁵⁸⁾.

Das gleichschenklige Dreieck der Fig. 202 ändert sich demnach genau genug in das der Fig. 207 mit $\gamma_1 \approx 34^\circ$ und $\gamma_2 \approx 43^\circ$.

Hieraus ergibt sich

$$N_1 = N \cdot \frac{\cos \gamma_2}{\sin (\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad N_2 = N \cdot \frac{\cos \gamma_1}{\sin (\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Durch die Vereinigung der Herleitung der Wirkungsgradformeln (158) und (183) erhält man aus

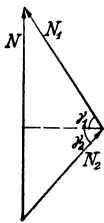


Fig. 207.

$$\begin{aligned} M &= N \cdot r_m \cdot \sin \alpha, \\ M'_r &= \mu \cdot N_1 \cdot 2 \cdot R' \cdot \cos \alpha, \\ M''_r &= \mu \cdot N_2 \cdot 2 \cdot R'' \cdot \cos \alpha, \\ R'_1 &= R_{1m} \cdot \frac{r_2 + \frac{1}{4} \cdot b \cdot \cos \delta_1}{r_2} = R_{1m} + \frac{b}{4} \cdot \ddot{u}_1 \\ &= r_{1m} \cdot \sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} + \frac{b}{4} \cdot \ddot{u}_1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \\ \\ \text{und} \end{array}$$

$$R''_1 = r_{1m} \cdot \sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} - \frac{b}{4} \cdot \ddot{u}_1$$

für den Wirkungsgrad den Ausdruck (185)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} &= 1 + \frac{2 \cdot \mu \cdot \cotg \alpha}{\sin (\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot \left(\cos \gamma_2 \cdot \left[\sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} + \sqrt{1 + \ddot{u}_2^2} + \frac{b}{4} \cdot \left(\frac{\ddot{u}_1}{r_{1m}} + \frac{\ddot{u}_2}{r_{2m}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos \gamma_1 \cdot \left[\sqrt{1 + \ddot{u}_1^2} + \sqrt{1 + \ddot{u}_2^2} - \frac{b}{4} \cdot \left(\frac{\ddot{u}_1}{r_{1m}} + \frac{\ddot{u}_2}{r_{2m}} \right) \right] \right) + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_{1m}} + \frac{r_{z2}}{r_{2m}} \right). \end{aligned}$$

Beispiel 119. Soll das in Beispiel 118 berechnete Räderpaar mit Pfeilzähnen versehen werden, so ergibt sich unter sonst gleichen Verhältnissen der Wirkungsgrad mit den obigen Werten aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} &= 1 + \frac{2 \cdot 0,04 \cdot 0,35}{0,974} \cdot \left(0,731 \cdot \left[\sqrt{1,16} + \sqrt{7,25} + \frac{6,0}{4} \cdot \left(\frac{0,4}{6,38} + \frac{2,5}{6,38 \cdot 2,5} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 0,829 \cdot (1,077 + 2,693 - 0,329) \right) + \frac{0,02}{0,940} \cdot 0,427 \\ &= 1 + 0,1682 + 0,0091 = 1,177 \end{aligned}$$

zu $\eta = 0,850$

bei allerdings auch trotz der unveränderten Abmessungen vergrößerter Übertragungsfähigkeit.

Die Zahnkopfhöhe wird hier gewöhnlich zu $h_K = 0,6 \cdot m$ gewählt¹⁵⁸⁾.

Ein besonderes Kegelradgetriebe ist das in Fig. 208 dargestellte Wechselgetriebe, bei dem ein auf der Welle c verschiebbares zylindrisches

¹⁵⁸⁾ A. Citroen & Co., Paris.

Stirnrad a in eins der verschiedenen großen Kegelräder b auf der unter dem Winkel δ geneigten Welle d eingreift¹⁵⁹⁾. Bei einfacher Herstellung der betreffenden Evolventenverzahnung bietet die Anordnung noch den Vorteil, daß der Eingriff in Geraden mit wechselnder Neigung erfolgt wie bei Pfeilrädern, was die Abnutzung verringert.

h) Die Schraubenräder. Die Stirnräder mit schraubenförmigen Zähnen werden auch zur Verbindung zweier im Raum aneinander unter

einem beliebigen, meist allerdings einem rechten Winkel vorbeilaufenden Achsen benutzt. Für die Übersetzung gilt natürlich auch hier

$$\ddot{u}_1 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

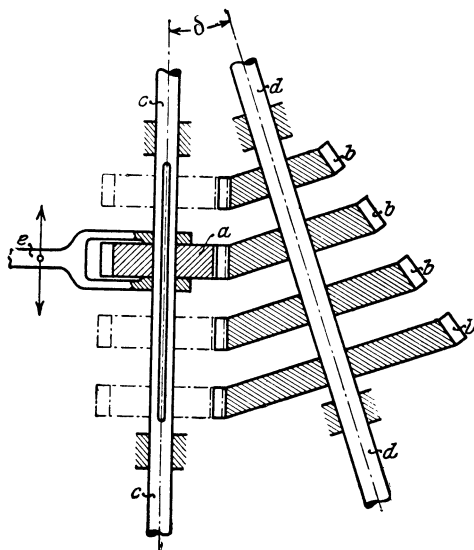


Fig. 208.

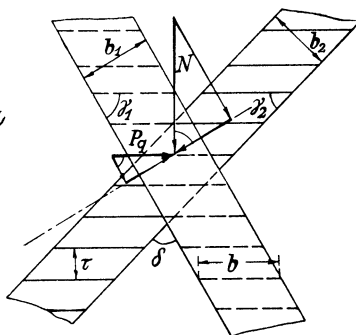


Fig. 209.

Die weiteren Verhältnisse lassen sich am leichtesten übersehen, wenn die Räder wie in Fig. 209 auf die Zeichenebene abgewickelt dargestellt werden¹⁶⁰⁾. Man erhält sogleich den Zusammenhang der Winkel

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \delta = 2\pi$$

und weiter die Gleichung (179)

$$2r_1 = z_1 \cdot \frac{m}{\sin \gamma_1} \quad \text{bzw.} \quad 2r_2 = z_2 \cdot \frac{m}{\sin \gamma_2}.$$

Hieraus folgt durch Division das Verhältnis der Radhalbmesser zu

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} = \ddot{u}_1 \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1}. \quad (186)$$

Nur für $\gamma_1 = \gamma_2$, im Fall $\delta = 90^\circ$ für $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$, entspricht das Verhältnis der Radhalbmesser der Übersetzung.

¹⁵⁹⁾ Hermann, Z. d. V. d. I. 1916.

¹⁶⁰⁾ Philipp, Z. f. gewerbl. Unterr. 1910/16.

Infolge des Zusammenhanges (186) ist es möglich, bei vorgeschriebenem Achsenabstand a und einem von vornherein festgelegten Verzahnungsmodul m jede verlangte Übersetzung, etwa $\ddot{u}_2 = \frac{z_2}{z_1}$ zu erzielen. Man kann schreiben

$$a = r_1 + r_2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{z_1}{\sin \gamma_1} + \frac{z_2}{\sin \gamma_2} \right) = \frac{m}{2} \cdot z_1 \left(\frac{1}{\sin \gamma_1} + \frac{\ddot{u}_2}{\sin \gamma_2} \right)$$

oder mit dem obigen Zusammenhang zwischen den Winkeln

$$\frac{2a}{m \cdot z_1} = \frac{1}{\sin \gamma_1} - \frac{\ddot{u}_2}{\sin(\delta + \gamma_1)}, \quad (187)$$

worin allein γ_1 unbekannt ist. Die Gleichung wird am einfachsten durch Probieren gelöst.

Die Eingriffsdauer ist hier, wie die Fig. 209 ohne weiteres ergibt, durch die Formel (164) gegeben. Auch das spezifische Gleiten in Richtung der Zahnhöhe ist dasselbe wie bei der Evolventenzahnung mit geraden Zähnen (Formel 165). Dazu tritt aber noch eine Verschiebung der Zähne in Richtung der Zahnlänge b . Bei Drehung des Rades 1 um einen kleinen Winkel $d\varphi$ verschiebt sich der Zahn des Rades 1 um $r_1 \cdot d\varphi \cdot \cotg \gamma_1$ nach der einen Seite und der damit zusammenarbeitende des Rades 2 nach der anderen Seite um $r_1 \cdot d\varphi \cdot \cotg \gamma_2$. Man bestimmt das spezifische Gleiten q in der Querrichtung ebenso wie das senkrecht dazu und erhält

$$q_1 = \frac{r_1 \cdot d\varphi \cdot \cotg \gamma_1 + r_1 \cdot d\varphi \cdot \cotg \gamma_2}{r_1 \cdot d\varphi \cdot \cotg \gamma_1} = 1 + \frac{\cotg \gamma_2}{\cotg \gamma_1}$$

und entsprechend

$$q_2 = 1 + \frac{\tg \gamma_2}{\tg \gamma_1}.$$

Nun ist ja

$$\tg \gamma_1 = \tg(2\pi - \gamma_2 - \delta) = -\tg(\gamma_2 + \delta),$$

womit eine leichte Umformung liefert

$$q_2 = \frac{\cotg \gamma_2 + \tg \gamma_2}{\cotg \gamma_2 + \cotg \delta}, \quad q_1 = \frac{\cotg \gamma_1 + \tg \gamma_1}{\cotg \gamma_1 + \cotg \delta}. \quad (188)$$

Das spezifische Quergleiten ist für ein gegebenes Räderpaar unveränderlich. Es hat für $\delta = 0$ (Abschnitt f) den Wert 0 und für $\delta = 90^\circ$ den Höchstbetrag $q = 1 + \tg^2 \gamma$.

Da man zur Verhütung eines stärkeren Verschleißes das spezifische Gleiten sonst kleiner als 1 zu halten sucht, so sind die Schraubenräder nicht für die Übertragung großer Kräfte geeignet. Man berechnet sie gewöhnlich so, daß bei der Höchstbelastung nur der dritte Teil der aus Fig. 195 folgenden spezifischen Beanspruchung zugelassen wird.

Zur Bestimmung des Wirkungsgrades sind einige Zwischenrechnungen nötig. Zuerst ist der Mittelwert des spezifischen Gleitens in Richtung der Zahnhöhe festzustellen. Es gilt ja die Formel (165)

$$g_1 = \frac{x \cdot (1 + \ddot{u}_1)}{r_1 \cdot \cos \alpha - x},$$

und man hat entsprechend früheren Rechnungen anzusetzen

$$2g_{1m} = \frac{1}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} \frac{x \cdot (1 + \ddot{u}_1)}{r_1 \cdot \cos \alpha - x} \cdot dx + \frac{1}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{x \cdot (1 + \ddot{u}_1)}{r_1 \cdot \cos \alpha + x} \cdot dx.$$

Der Ausdruck läßt sich schreiben

$$2g_{1m} = \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} -x \cdot \frac{d(r_1 \cdot \cos \alpha - x)}{r_1 \cdot \cos \alpha - x} + \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_2} \cdot \int_0^{l_2} +x \cdot \frac{d(r_1 \cdot \cos \alpha + x)}{r_1 \cdot \cos \alpha + x}.$$

Durch zweimalige Anwendung der teilweisen Integration (Bd. I, S. 105) folgt leicht

$$\begin{aligned} 2g_{1m} = & \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_1} \cdot \left[-x \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha - x) - (r_1 \cdot \cos \alpha - x) \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha - x) \right] \\ & + (r_1 \cdot \cos \alpha - x)] \\ & + \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_2} \cdot \left[+x \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha + x) - (r_1 \cdot \cos \alpha + x) \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha + x) \right] \\ & + (r_1 \cdot \cos \alpha + x)] \end{aligned}$$

oder nach Einsetzung der Grenzwerte von x

$$\begin{aligned} 2g_{1m} = & \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_1} \cdot \left[-l_1 \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha - l_1) - (r_1 \cdot \cos \alpha - l_1) \cdot (\ln(r_1 \cdot \cos \alpha - l_1) - 1) \right. \\ & \left. + r_1 \cdot \cos \alpha \cdot (\ln r_1 \cdot \cos \alpha - 1) \right] \\ & + \frac{1 + \ddot{u}_1}{l_2} \cdot \left[+l_2 \cdot \ln(r_1 \cdot \cos \alpha + l_2) - (r_1 \cdot \cos \alpha + l_2) \cdot (\ln(r_1 \cdot \cos \alpha + l_2) - 1) \right. \\ & \left. + r_1 \cdot \cos \alpha \cdot (\ln r_1 \cdot \cos \alpha - 1) \right]. \end{aligned}$$

Durch Auflösen der kleinen Klammern und Anwenden des Logarithmensatzes

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

ergibt sich weiter

$$2g_{1m} = (1 + \ddot{u}_1) \cdot r_1 \cdot \cos \alpha \cdot \left[\frac{1}{l_2} \cdot \ln \left(1 + \frac{l_2}{r_1 \cdot \cos \alpha} \right) - \frac{1}{l_1} \cdot \ln \left(1 - \frac{l_1}{r_1 \cdot \cos \alpha} \right) \right].$$

Nun ist nach früherem

$$l_2 = r_1 \cdot \cos \alpha \cdot u^2, \quad l_1 = r_2 \cdot \cos \alpha \cdot u_1,$$

worin u_1 und u_2 die unterste für die betreffende Zähnezahle mögliche Übersetzung ist (Fig. 188), während \ddot{u}_1 und \ddot{u}_2 die tatsächlich vorhandene Übersetzung darstellen. Damit wird schließlich

$$g_{1m} = \frac{(1 + \ddot{u}_1)}{2} \cdot \left[\frac{\ln(1 + u_2)}{u_2} - \frac{\ln \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cdot u_1 \right)}{\frac{r_2}{r_1} \cdot u_1} \right] \quad (189)$$

Ein entsprechender Ausdruck folgt für g_{2m} .

Die zusammenarbeitenden Zähne bewegen sich in zwei zueinander senkrechten Richtungen, und sinngemäß ergibt die Formel (42) die zur Überwindung der Reibung in Richtung der Zahnhöhe erforderliche Kraft

$$P_g = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{g}{q}\right)^2}}$$

und die zur Überwindung der Reibung in der Breite des Zahnes erforderliche

$$P_q = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{g_m}{q}\right)^2}}.$$

Der um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ gegen die Zeichenebene der Fig. 209 geneigte Zahndruck N zerlegt sich nun am Rade 1 in die Seitenkraft $N \cdot \cos \gamma_1$, die nur Druck in Richtung der Radachse hervorruft, und die Seitenkraft $N \cdot \sin \gamma_1$, die das Drehmoment liefert

$$M_1 = N \cdot \sin \gamma_1 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha.$$

Entsprechend zerfällt P_q in eine Seitenkraft $P_q \cdot \sin \gamma_1$, die entgegengesetzt zu dem Achsdruck $N \cdot \cos \gamma_1$ gerichtet ist, und die in der Richtung von $N \cdot \sin \gamma_1$ verlaufende $P_q \cdot \cos \gamma_1$. Ferner liefert die Summe aller P_g nach der bereits mehrfach benutzten Überlegung das Gesamtdrehmoment

$$M_{rg} \approx P_g \cdot 2 r \cdot \cos \alpha.$$

Bezeichnet wieder r_z den Halbmesser der Radachse im Lager und r_s den mittleren Halbmesser des Spurringes, so ergibt sich der Wirkungsgrad aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} = 1 + \frac{1}{M_1} \cdot [& P_{g1} \cdot 2 r_1 \cdot \cos \alpha + P_{q1} \cdot \sin \gamma_1 \cdot r_1 \cdot \sin \alpha \\ & + \mu_1 \cdot (N \cdot \sin \gamma_1 + P_{q1} \cdot \cos \gamma_1) \cdot r_{z1} \\ & + \mu_1 \cdot (N \cdot \cos \gamma_1 - P_{q1} \cdot \sin \gamma_1) \cdot r_{s1}] \\ + \frac{1}{M_2} \cdot [& P_{g2} \cdot 2 r_2 \cdot \cos \alpha + P_{q2} \cdot \sin \gamma_2 \cdot r_2 \cdot \sin \alpha \\ & + \mu_1 \cdot (N \cdot \sin \gamma_2 + P_{q2} \cdot \cos \gamma_2) \cdot r_{z2} \\ & + \mu_1 \cdot (N \cdot \cos \gamma_2 - P_{q2} \cdot \sin \gamma_2) \cdot r_{s2}]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte von M , P_g , P_q folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} = 1 + 2 \cdot \mu \cdot \cotg \alpha \cdot \left[\frac{1}{\sin \gamma_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{q_1}{g_{1m}}\right)^2}} + \frac{1}{\sin \gamma_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{q_2}{g_{2m}}\right)^2}} \right] \\ + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{g_{1m}}{q_1}\right)^2}} \cdot \left[1 + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_1} \cdot \cotg \gamma_1 - \frac{r_{s1}}{r_1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{g_{2m}}{q_2}\right)^2}} \cdot \left[1 + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z2}}{r_2} \cdot \cotg \gamma_2 - \frac{r_{s2}}{r_2} \right) \right] \\
& + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{r_{z1}}{r_1} + \frac{r_{z2}}{r_2} + \frac{r_{s1}}{r_1} \cdot \cotg \gamma_1 + \frac{r_{s2}}{r_2} \cdot \cotg \gamma_2 \right). \quad (190)
\end{aligned}$$

Beispiel 120. Anzugeben ist die Verzahnung und ihr Wirkungsgrad für ein sich rechtwinklig kreuzendes Schraubenrädernetze von der Übersetzung $\dot{u}_1=2:1$, in das bei $n_1 = 165$ Umdrehungen in der Minute $M_1 = 350$ cmkg eingeleitet werden.

Es werde gewählt $z_1 = 26$ bzw. 22 Zähne, ferner sei der Halbmesser $r_1 = 12$ cm durch die Verhältnisse gegeben.

Aus der zweiten Gleichung (179) folgt dann

$$\frac{m}{\sin \gamma_1} = \frac{2 r_1}{z_1} = \frac{2 \cdot 12}{26} = 0,923 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2 \cdot 12}{22} = 1,091.$$

Man erhält weiter die Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis

$$v = \frac{\pi \cdot 0,12 \cdot 165}{30} = 2,07 \text{ m/sk}$$

und entnimmt nun der Kurve b der Fig. 195 die gewöhnlich für Gußeisen zulässige Belastung $c \approx 23$ kg/cm². Damit wird das Drehmoment

$$M_1 = \left(\frac{c}{3} \cdot b \cdot m \cdot \dot{\tau} \right) \cdot \sin \gamma_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2} \cdot \frac{m}{\sin \gamma_1} \right) \cdot \sin \alpha.$$

Wählt man also $b = 5,0$ cm und $\sin \alpha = 0,944$, so wird

$$m = \sqrt{\frac{350 \cdot 3 \cdot 2}{23 \cdot 5,0 \cdot \pi \cdot 26 \cdot 0,944}} = 0,485 \approx 0,5 \text{ cm.}$$

Für die Zähnezahl 22 werde der Einfachheit halber derselbe Wert von m genommen statt 0,528.

Hieraus ergibt sich

$$\sin \gamma_1 = \frac{0,50}{0,923} = 0,542 \quad \text{bzw.} \quad \frac{0,50}{1,091} = 0,449,$$

also

$$\gamma_1 = 32^\circ 50' \quad \text{bzw.} \quad 26^\circ 40'$$

und

$$\tg \gamma_1 = 0,645 \quad \text{bzw.} \quad 0,502.$$

Damit wird

$$\gamma_2 = 90 - \gamma_1 = 57^\circ 10' \quad \text{bzw.} \quad 63^\circ 20'$$

und

$$\sin \gamma_2 = 0,840 \quad \text{bzw.} \quad 0,894,$$

$$\tg \gamma_2 = 1,550 \quad \text{bzw.} \quad 1,991.$$

Die Formel (186) ergibt dann

$$r_2 = 12 \cdot 2 \cdot \frac{0,542}{0,840} = 15,49 \text{ cm}$$

bzw.

$$r_2 = 12 \cdot 2 \cdot \frac{0,449}{0,894} = 12,06 \text{ cm.}$$

Man pflegt die Räder gleich groß zu machen, wählt also die zweite Ausführung mit $z_1 = 22$ Zähnen. Dafür ergeben sich die Radbreiten

$$b_1 = b \cdot \sin \gamma = 5 \cdot 0,442 \approx 2,2 \text{ cm,}$$

$$b_2 = 5 \cdot 0,894 \approx 4,5 \text{ cm.}$$

Für $h_K = 0,7 \cdot m$ ergibt nun die Formel (162) die untersten zulässigen Übersetzungen

$$u_1 = \sqrt{1 + \frac{0,7}{44} + \left(\frac{0,7}{44}\right)^2} - 1 = 0,261,$$

$$u_2 = \sqrt{1 + \frac{0,7}{22} + \left(\frac{0,7}{22}\right)^2} - 1 = 0,484,$$

und es wird

$$\frac{r_2}{r_1} \cdot u_1 = 0,2625, \quad \frac{r_1}{r_2} \cdot u_2 = 0,4815.$$

Damit liefert die Gleichung (189) das mittlere spezifische Gleiten in der Höhenrichtung des Zahnes

$$g_{1m} = \frac{(1+2)}{2} \cdot \left(\frac{\log 1,484}{0,4343 \cdot 0,484} - \frac{\log 0,7375}{0,4343 \cdot 0,2625} \right) = 3,042,$$

$$g_{2m} = \frac{(1+0,5)}{2 \cdot 0,4343} \cdot \left(\frac{\log 1,261}{0,261} - \frac{\log 0,5185}{0,4815} \right) = 1,674,$$

also wegen der niedrigen Zähnezahls sehr hoch.

Für das spezifische Gleiten in der Querrichtung erhält man

$$q_1 = 1 + 0,502^2 = 1,252,$$

$$q_2 = 1 + 1,991^2 = 4,97.$$

Damit folgt

$$\sqrt{1 + \left(\frac{q_1}{g_{1m}}\right)^2} = 1,080, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{q_2}{g_{2m}}\right)^2} = 3,133,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{g_{1m}}{q_1}\right)^2} = 1,852, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{g_{2m}}{q_2}\right)^2} = 1,055.$$

Mit

$$\mu = 0,04, \quad \mu_1 = 0,02$$

$$r_{z1} = 9 \text{ cm}, \quad r_{z2} = 2,5 \text{ cm},$$

$$r_{s1} = 10 \text{ cm}, \quad r_{s2} = 3,0 \text{ cm}$$

ergibt sich schließlich aus Formel (190) bei ziemlich ungünstigen Verhältnissen

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,04 \cdot 2 \cdot 0,35 \cdot \left(\frac{1}{0,449 \cdot 1,080} + \frac{1}{0,894 \cdot 3,133} \right)$$

$$+ \frac{0,04}{1,852} \cdot \left[1 + \frac{0,02}{0,944} \cdot \left(\frac{9}{12 \cdot 0,502} - \frac{10}{12} \right) \right]$$

$$+ \frac{0,04}{1,055} \cdot \left[1 + \frac{0,02}{0,944} \cdot \left(\frac{2,5}{12,06 \cdot 1,991} - \frac{3,0}{12,06} \right) \right]$$

$$+ \frac{0,02}{0,944} \cdot \left(\frac{9}{12} + \frac{2,5}{12,06} + \frac{10}{12 \cdot 0,502} + \frac{3}{12,06 \cdot 1,991} \right),$$

$$\frac{1}{\eta} = 1 + 0,0705 + 0,0219 + 0,0378 + 0,0369 = 1,167,$$

also

$$\eta = 0,857.$$

Man bemerkt auch hier, wie die Bewegung nach zwei zueinander senkrechten Richtungen die Nachteile der Reibung in bezug auf den Wirkungsgrad, nicht auf die Abnutzung, verringert.

Hyperboloidräder¹⁶¹⁾, die denselben Zweck haben wie Schraubenträder, werden in der Maschinentechnik nicht benutzt.

13. Die Schrauben.

Wird eine schmale, als schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α zu denkende rechteckige Leiste um einen zur Bezugsebene senkrecht stehenden Kreiszyylinder herumgelegt, so entsteht die flachgängige Schraube (Fig. 210), die gewöhnlich als Bewegungsschraube angewendet wird.

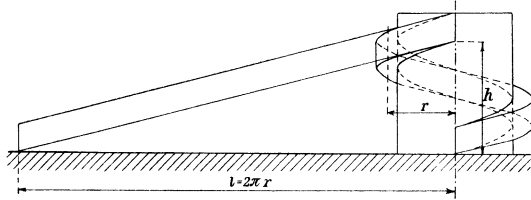


Fig. 210.

Die Entfernung zweier gleichgelegener Punkte auf derselben Mantelgeraden ist die Ganghöhe h der Schraube. Die auf einen Schraubengang kommende Länge der schiefen Ebene ist, wenn r den mittleren Halbmesser der Schraube bezeichnet, als Projektion auf die zur Schraubennachse senkrechte Ebene $l = 2\pi \cdot r$. Damit erhält man den Steigungswinkel der Schraube aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi \cdot r} \quad (191)$$

Wird eine flachgängige Schraube mit der Kraft Q in Richtung ihrer Achse belastet, so erfährt bei guter Ausführung jedes kleine Flächenteilchen dF des Ganges von der Mutter den Gegenruck dN , der um den Steigungswinkel α gegen die durch dF parallel zur Schraubennachse gezogene Mantelgerade geneigt ist. In die Fläche dF fällt die der Bewegung entgegengerichtete Reibungskraft $\mu \cdot dN$ (Fig. 211). Beide Kräfte setzen sich zu der Mittelkraft dW zusammen, deren Neigung gegen die Mantellinie beim Heben der Last $\alpha + \varrho$ ist.

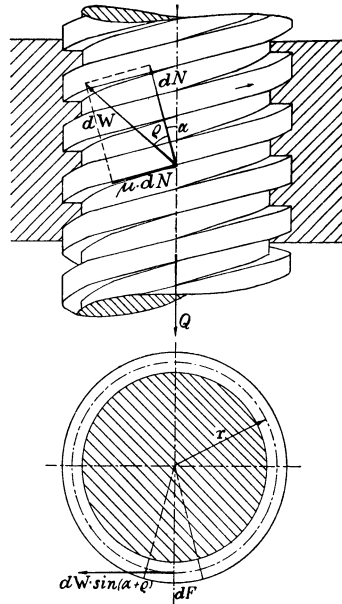


Fig. 211.

Die Gleichgewichtsbedingung für die in Richtung der Achse wirkenden Kräfte ergibt

$$Q = \int dW \cdot \cos(\alpha + \varrho) = \cos(\alpha + \varrho) \cdot W,$$

worin W die gesamte Kraft angibt, die auf alle in der Mutter befindlichen Gänge wirkt.

¹⁶¹⁾ Tessari, Torino Anati del R. Museo industr. 1871.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente lautet entsprechend

$$M = \int dW \cdot \sin(\alpha + \varrho) \cdot r = r \cdot \sin(\alpha + \varrho) \cdot W.$$

Wird diese Gleichung durch die erste dividiert, so folgt

$$\frac{M}{Q} = r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho). \quad (192 \text{ a})$$

Man kann nun nach S. 36 auflösen

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varrho}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varrho}$$

und hierin einsetzen $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ und nach Formel (191) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi \cdot r}$

Man erhält dann das zum Anziehen der Schraube nötige Drehmoment

$$M = Q \cdot r \cdot \frac{\frac{h}{2\pi \cdot r} + \mu}{1 - \mu \cdot \frac{h}{2\pi \cdot r}}. \quad (192 \text{ b})$$

Erfolgt die Bewegung der Schraube in umgekehrter Richtung, so daß die Last sich senkt, so kehrt sich die Richtung von $\mu \cdot dN$ um und W verschiebt sich um den Reibungswinkel ϱ nach der anderen Seite von N . Es ändert sich also nur das Vorzeichen von ϱ bzw. $\operatorname{tg} \varrho$, und das zum Lösen der Schraube erforderliche Drehmoment ist demnach

$$M_1 = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) = Q \cdot r \cdot \frac{\frac{h}{2\pi \cdot r} - \mu}{1 + \mu \cdot \frac{h}{2\pi \cdot r}}. \quad (193)$$

Da, wie auch die Fig. 211 andeutet, meistens $\varrho > \alpha$ ist, so ist dann das Vorzeichen von M_1 negativ, d. h. es hat die entgegengesetzte Richtung wie das zum Anziehen erforderliche Moment M . Die Schraube ist also selbstsperrend. Die Sicherheit \mathfrak{S} der Selbstsperrung bestimmt sich aus der Forderung, daß bei Anwachsen der Steigung auf das \mathfrak{S} fache $M_1 = 0$ wird. Man erhält so aus Formel (193)

$$\mathfrak{S} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\mu \cdot 2\pi \cdot r}{h} \quad (194)$$

Läßt man die Reibung außer acht, so fällt in Formel (192 b) μ fort und es wird

$$M_0 = Q \cdot r \cdot \frac{h}{2\pi \cdot r} \quad (195)$$

Damit ergibt sich der Wirkungsgrad des Schraubengewindes

$$\eta_1 = \frac{M_0}{M} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} = \frac{1 - \mu \cdot \frac{h}{2\pi r}}{1 + \mu \cdot \frac{2\pi r}{h}} \quad (196)$$

Hierzu tritt noch der Wirkungsgrad des Spurzapfens vom äußeren Halbmesser r_2 und dem der inneren Aussparung r_3 bei der Reibungsziffer μ_1 gemäß Formel (65):

$$\eta_2 = \frac{Q \cdot \frac{h}{2\pi}}{Q \cdot \frac{h}{2\pi} + \frac{1}{2} \mu_1 \cdot Q \cdot r_2 \cdot \left(1 + \frac{r_3}{r_2}\right)} = \frac{1}{1 + \pi \cdot \mu_1 \cdot \frac{r_2}{h} \cdot \left(1 + \frac{r_3}{r_2}\right)} \quad (197)$$

Beispiel 121. Anzugeben ist der Wirkungsgrad einer flachgängigen Schraube vom äußeren Gewindedurchmesser $d = 10$ cm, dem Kerndurchmesser $d_1 = 8$ cm, der Ganghöhe $h = \frac{3}{4}''$, dem Spurzapfendurchmesser $d_2 = 7,5$ cm, ferner die Sicherheit, mit der noch Selbstsperrung besteht.

Der mittlere Gewindedurchmesser ist

$$2r = \frac{1}{2} \cdot (d + d_1) = \frac{1}{2} \cdot (10 + 8) = 9 \text{ cm,}$$

die Steigung beträgt

$$h = \frac{3}{4} \cdot 2,54 = 1,905 \text{ cm.}$$

Damit wird nach Formel (196) mit der Reibungsziffer $\mu = 0,08$ für die gut geschmierte Stahlschraube in einer Bronzemutter

$$\eta_1 = \frac{1 - \frac{0,08 \cdot 1,905}{\pi \cdot 9}}{1 + \frac{0,08 \cdot \pi \cdot 9}{1,905}} = \frac{0,9946}{2,188} = 0,455$$

und nach Formel (197), wenn man $\mu_1 = 0,05$ bei absatzweisem Betrieb schätzt,

$$\eta_2 = \frac{1}{1 + \pi \cdot 0,05 \cdot \frac{7,5}{2 \cdot 1,905}} = \frac{1}{1,309} = 0,764.$$

Somit ergibt sich der Gesamtwirkungsgrad zu

$$\eta = 0,455 \cdot 0,764 = 0,348.$$

Das zum Bewegen der Schraube unter der Last $Q = 1$ t erforderliche Drehmoment ist nach Formel (195)

$$M = \frac{M_0}{\eta} = \frac{1000 \cdot 1,905}{2\pi \cdot 0,348} = 865 \text{ cmkg.}$$

Die Sicherheit der Selbstsperrung beträgt nach Formel (194)

$$\varrho = \frac{0,08 \cdot \pi \cdot 9}{1,905} = 1,188.$$

Dabei berücksichtigt man die Vergrößerung der Sicherheit durch die Spurzapfenreibung nicht, um bei besonders guten Schmierungs- und Reibungsverhältnissen, die die Reibungsziffer der Schraube heruntersetzen können, nicht sogleich aus dem Sicherheitsgebiet herauszukommen.

Wird die Schraube zweigängig ausgeführt, also mit $h = 2 \cdot 1,905$ cm bei sonst unveränderten Verhältnissen, so wird der Wirkungsgrad

$$\eta_1 = \frac{1 - 2 \cdot 0,0054}{1 + \frac{1}{2} \cdot 1,188} = \frac{0,9892}{1,594} = 0,621,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0,309} = 0,866,$$

also der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = 0,621 \cdot 0,866 = 0,539.$$

Die Anordnung ist, da $\eta < \frac{1}{2}$, nicht mehr selbstsperrend.

Das zum Bewegen der Schraube unter der Last $Q = 1$ t nötige Drehmoment beträgt jetzt

$$M' = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 1,905}{2\pi \cdot 0,539} = 1124 \text{ cmkg.}$$

Bei der dreigängigen Schraube von sonst gleichen Abmessungen ergibt sich entsprechend

$$\eta_1 = \frac{0,9838}{1,396} = 0,705, \quad \eta_2 = \frac{1}{1,103} = 0,907,$$

also

$$\eta = 0,705 \cdot 0,907 = 0,640$$

und

$$M = \frac{1000 \cdot 3 \cdot 1,905}{2\pi \cdot 0,640} = 1421 \text{ cmkg.}$$

Mit der Verbesserung des Wirkungsgrades durch die Vergrößerung der Steigung erhöht sich auch das zum Antrieb erforderliche Drehmoment, so daß man bei Handantrieb oft den kleineren Wirkungsgrad vorzieht, der noch den Vorteil der Selbstsperrung bietet.

Beispiel 122. Zu untersuchen ist die Weston-Senksperrbremse¹⁶²⁾ der Fig. 212 für den Fall, daß die Reibungsziffern sich ändern.

Die Last des Kranes übt auf das Zahnrad A vom Halbmesser r_0 die Umfangskraft P_0 aus und sie bewegt das Zahnrad soweit, daß es auf der Schraube vom mittleren Halbmesser r gegen das lose auf der Welle vom Halbmesser r_1 sitzende Sperrrad B mit der Kraft Q gedrückt wird. Dieselbe Gegenkraft übt die auf der Welle festsitzende Gegenscheibe C auf die andere Seite des Sperrrades vom Halbmesser r_2 aus, dessen Sperrklinke beim Heben der Last über die Zähne weggleitet.

In dem Getriebe wirken also folgende Drehmomente:

der Last

$$M_0 = P_0 \cdot r_0,$$

der Schraubenreibung

$$M_1 = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = Q \cdot k_1,$$

der Mutterreibung, das bei gut eingelaufenen Flächen den Wert hat

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_2 \cdot Q \cdot r_2 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = Q \cdot k_2,$$

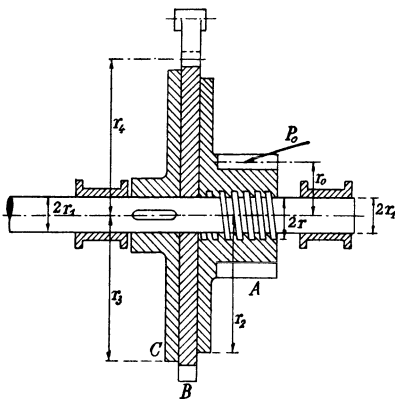


Fig. 212.

¹⁶²⁾ Bergmann, D. p. J. 1911.

der Reibung an der Gegenscheibe

$$M_3 = \frac{1}{2} \cdot \mu_3 \cdot Q \cdot r_3 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) = Q \cdot k_3,$$

der Traglagerreibung

$$M_4 = \mu_1 \cdot P_0 \cdot r_1 = P_0 \cdot k_4,$$

des Antriebsmotors M ,

worin die Werte k vorübergehend als Abkürzungen der längeren Ausdrücke gesetzt sind.

Es gilt nun bei der Aufwärtsbewegung der Last für das Zahnrad A :

$$M_0 = M_1 + M_2 = Q \cdot (k_1 + k_2),$$

für das Sperrad B :

$$M_2 = M_3, \quad \text{also} \quad k_2 = k_3,$$

für die Welle:

$$M = M_1 + M_3 + M_4 = Q \cdot (k_1 + k_2) = + M_0 \cdot \frac{k_4}{r_0}.$$

Durch Zusammennehmen der drei Gleichungen ergibt sich

$$M = M_0 + M_4 = M_0 \cdot \left(1 + \frac{k_4}{r_0}\right).$$

d. h. die Anordnung schließt sich beim Aufwinden der Last zu einer starren Kupplung zusammen.

Bei gleicher Reibungsziffer $\mu_2 = \mu_3$ und gleichem inneren Halbmesser r_1 müssen nach der zweiten Gleichung die äußeren Halbmesser der beiden Druckscheiben einander gleich sein, $r_2 = r_3$.

Hört das Antriebsmoment M auf zu wirken, so dreht das Lastmoment M_0 die Welle rückwärts, bis sich die Sperrklinke mit der Umfangskraft

$$P = \frac{M_0}{r_4} = P_0 \cdot \frac{r_0}{r_4}$$

gegen das Sperrad B legt. Die Welle wird jetzt belastet durch die beiden Kräfte P_0 und P , die nach Größe und Richtung zusammensetzen sind. Der Fehler ist klein, wenn allgemein damit gerechnet wird, daß beide Kräfte entweder dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben. Die Kraft, mit der das Sperrrad von beiden Seiten gefaßt wird, ist nach der ersten der obigen Gleichungen

$$Q = \frac{M_0}{k_1 + k_2};$$

sie ist also wesentlich von den Reibungsziffern der Schraube und der Druckflächen abhängig.

Soll die Last gesenkt werden, so ist ein Drehmoment M' , das entgegengesetzt zu M gerichtet ist, vom Antriebsmotor aufzuwenden. Dabei dreht sich die Schraube in dem Rad A zurück mit dem widerstehenden Moment $M'_1 = Q \cdot r \cdot (\text{tg } \varrho - \alpha)$, das ebenfalls entgegengesetzt zu M_1 gerichtet ist. Es gilt also für den ersten Augenblick des Andrehens

am Zahnrad A :

$$M_0 = M'_1 + M_2 = Q \cdot (k'_1 + k_2),$$

am Sperrad B :

$$M_2 + M_3 = P \cdot r_4 = M_0,$$

an der Welle:

$$M' = M'_1 + M_3 + M'_4 = Q \cdot (k'_1 + k_2) + M_0 \cdot k_4 \cdot \left(\frac{1}{r_0} \pm \frac{1}{r_4}\right).$$

Hieraus folgt durch die gleiche Rechnung wie oben für das Drehmoment des Motors bei Beginn des Lastsenkens

$$M' = 2M_3 + M'_1 = M_0 \cdot \left[\frac{2k_3}{k_1 + k_2} + k_4 \cdot \left(\frac{1}{r_0} \pm \frac{1}{r_4} \right) \right]$$

oder, da $k_3 = k_2$ ist, nach Einsetzen der Werte der k

$$M' = M_0 \cdot \left[\frac{2}{\frac{2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}{\mu_2 \cdot r_2 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)} + 1} + \mu_1 \cdot r_1 \cdot \left(\frac{1}{r_0} \pm \frac{1}{r_4} \right) \right]$$

Ist etwa $r_1 = 4$ cm, $r = 4,4$ cm, $r_0 = 9,6$ cm, $r_2 = r_3 = 15,0$ cm, $r_4 = 16,2$ cm, $h = 1,6$ cm, also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,6}{8,8 \cdot \pi} = 0,0579, \quad \alpha \approx 3^\circ 21',$$

$$M_0 = 1500 \text{ cmkg}, \quad \mu_1 = 0,03 \div 0,10, \quad \mu = \mu_2 = \mu_3 = 0,06 \div 0,16,$$

also $\varrho \approx 3^\circ 25' \div 9^\circ 5'$, so wird bei den niedrigsten Werten der Reibungsziffern

$$\begin{aligned} M'_1 &= 1500 \cdot \left[\frac{2}{\frac{2 \cdot 4,4 \cdot 0,1186}{0,06 \cdot 15 \cdot 1,267} + 1} + 0,03 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9,6} \pm \frac{1}{16,2} \right) \right] \\ &= 1500 \cdot \left(\begin{array}{c} 1,044 \\ + 0,020 \\ + 0,005 \end{array} \right) \end{aligned}$$

je nach der Richtung des Sperrklinkendruckes. Damit wird mit dem größten Wert des Lagerdruckes

$$M' = 1570 \text{ cmkg.}$$

Bei den höchsten Werten der Reibungsziffern ergibt sich entsprechend mit $\varrho + \alpha = 12^\circ 26'$

$$M'_1 = 1500 \cdot (1,222 + 0,067) = 1934 \text{ cmkg.}$$

Der günstigste Fall wäre hiernach der, daß die Reibungsziffer am Sperrad und in den Lagern klein ist, dagegen an der Schraube groß. Rechnet man mit $\mu_2 = \mu_3 = 0,06$, $\mu = 0,10$, $\mu_1 = 0,03$, was praktisch leicht erreichbar ist, so wird mit $\varrho = 5^\circ 42'$

$$\begin{aligned} M'_1 &= 1500 \cdot \left[\frac{2}{\frac{2 \cdot 4,4 \cdot 0,159}{0,06 \cdot 15 \cdot 1,267} + 1} + 0,03 \cdot 4 \cdot 0,166 \right] \\ &= 1500 \cdot (0,898 + 0,020) = 1376 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Dieses Drehmoment M_1 löst nun die Verbindung, so daß die Last frei heruntergeht. Dabei eilt sie der augenblicklich entlasteten Welle vor und schraubt so das Zahnrad A wieder gegen das Sperrad. Das Lösen und Wiederauffangen der Last erfolgt nun um so mehr ruckweise, je größer die Widerstandskräfte, also die Reibungsziffern am Sperrad sind und je mehr die Momente an der Schraube bei Hin- und Herdrehung sich unterscheiden. Letztere werden gleich für $\varrho = \alpha$, also im vorliegenden Fall auch bei niedrigster Reibungsziffer, d. h. bester Schmierung der Schraube. Man schmiert deshalb die Vorrichtung so gut wie irgendetmöglich und hält die Druck-

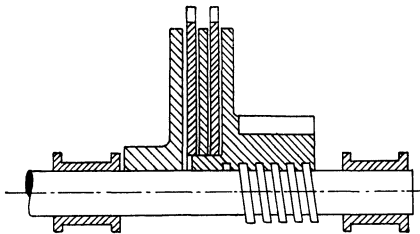


Fig. 213.

kraft Q dadurch klein, daß man das Sperrrad B und die Mutterscheibe in mehrere Lamellen zerlegt.

Bei einer Zerlegung in i Lamellen nach Fig. 213 wird $k_2 = (2i - 1) \cdot k_3$ und man erhält so

$$M' = M_0 \cdot \left[\frac{2}{\frac{k_1}{k_2} + 2i - 1} + k_0 \cdot \left(\frac{1}{r_0} \pm \frac{1}{r_4} \right) \right].$$

Unter sonst gleichen Verhältnissen wird mit $i = 2$ bei den niedrigsten Reibungsziffern

$$M' = 1500 \cdot \left(\frac{2}{0,916 + 3} + 0,020 \right) = 796 \text{ cmkg.}$$

Der Anpressungsdruck beträgt dann im Fall $i = 1$

$$Q = \frac{M_0}{k_1 + k_2} = \frac{1500}{4,4 \cdot 0,1186 + \frac{1}{2} \cdot 0,06 \cdot 15 \cdot 1,267} = 903 \text{ kg}$$

und im Fall $i = 2$, wo k_2 um das $(2i - 1)$ fache größer ist,

$$Q = \frac{1500}{0,522 + 3 \cdot 1,140} = 381 \text{ kg.}$$

Die Wirkung paßt sich in jeder Beziehung dem Lastmoment an.

Die häufigsten Mittelwerte der Reibungsziffern sind etwa $\mu_1 = 0,04$, $\mu = 0,10$, $\mu_2 = \mu_3 = 0,08$, und man wählt auf Grund praktischer Erfahrungen die Druckflächen so groß, daß das Produkt aus dem Flächendruck p kg/cm² und der Umfangsgeschwindigkeit v m/sk der Scheiben etwa die Zahl 30 ergibt¹⁶³⁾.

Ist der Querschnitt der um den Zylinder nach Fig. 210 herumgelegten Leiste ein gleichschenkliges Dreieck, so entsteht die scharf-gängige Schraube, deren Kantenwinkel β sei. Sie wird gewöhnlich als Befestigungsschraube benutzt.

Die in Richtung der Achse wirkende Belastung Q ruft in jedem in der Mutter anliegenden Flächenteilchen dF den Normaldruck dN hervor, der einerseits um den Kantenwinkel β nach innen geneigt ist und andererseits um den Steigungswinkel α von der zur Achse parallelen Mantelgeraden seitwärts abweicht (Fig. 214). In den Punkten A_1 und A_2 ist dN zerlegt in seine Seitenkräfte $dN' = dN \cdot \cos \beta$ und

$$dN'' = dN \cdot \sin \beta.$$

Im Punkt B ist die zum Schraubengang senkrechte Kraft dN' in ihre Seitenkräfte $dN' \cdot \cos \alpha$ parallel zur Achse und $dN' \cdot \sin \alpha$ senkrecht dazu zerlegt, ebenso die auf das Flächenteilchen wirkende Reibungskraft $\mu \cdot dN$ in die Seitenkräfte $\mu \cdot dN \cdot \sin \alpha$ parallel zur Achse und $\mu \cdot dN \cdot \cos \alpha$ senkrecht dazu.

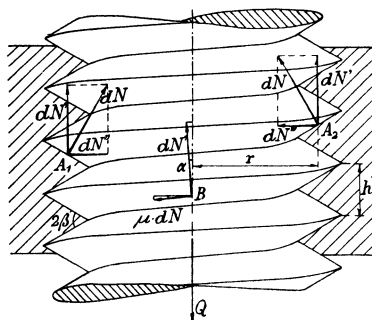


Fig. 214.

¹⁶³⁾ Nach Kammerer, Bergmann a. a. O.

Hiernach ergibt die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in Richtung der Schraubenachse für den ganzen Bereich der Mutter

$$\begin{aligned} Q &= \int (\mathbf{d}N' \cdot \cos \alpha - \mu \cdot \mathbf{d}N \cdot \sin \alpha) \\ &= \int (\mathbf{d}N \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - \mu \cdot \mathbf{d}N \cdot \sin \alpha), \\ &= (\cos \beta \cdot \cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) \cdot N. \end{aligned}$$

Die Kräfte $\mathbf{d}N''$ heben sich in der ganzen Mutter gegenseitig auf. Es verbleiben noch senkrecht zur Achsenrichtung die bei Punkt B eingetragenen Kräfte $\mathbf{d}N' \cdot \sin \alpha$ und $\mu \cdot \mathbf{d}N \cdot \cos \alpha$ mit dem Hebelarm r in bezug auf die Achse, so daß ihr Drehmoment beträgt

$$\begin{aligned} M &= \int r \cdot (\mathbf{d}N' \cdot \sin \alpha + \mu \cdot \mathbf{d}N \cdot \cos \alpha) \\ &= r \cdot (\cos \beta \cdot \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot N. \end{aligned}$$

Durch Division der Gleichungen für M und Q erhält man

$$\frac{M}{Q} = r \cdot \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha}$$

und daraus nach Division mit $\cos \alpha \cdot \cos \beta$

$$M = Q \cdot r \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu}{\cos \beta}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\mu}{\cos \beta}} \quad (198)$$

als Drehmoment für das Andrehen der Mutter unter der Belastung Q . Die Formel entspricht der (192), wenn man hier als Reibungsziffer $\mu' = \frac{\mu}{\cos \beta}$ einsetzt. Auch die folgenden Formeln erfahren nur die Änderung, daß die Reibungsziffer in der angegebenen Weise vergrößert wird.

Es ist für Whitworthgewinde

$$2\beta = 55^\circ, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos \beta} = 1,1274,$$

für das metrische Gewinde

$$2\beta = 60^\circ, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos \beta} = 1,1547.$$

An die Stelle der Spurzapfenreibung der Bewegungsschraube tritt hier der Reibungswiderstand der Mutter auf der Unterlage. Sein Drehmoment ist nach Formel (64)

$$M_2 = \frac{2}{3} \cdot \mu_2 \cdot Q \cdot r_2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^3}{1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2}, \quad (199)$$

worin $2r_2$ die Schlüsselweite darstellt. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \mu_2 \cdot \frac{r_2}{h} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^3}{1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2}. \quad (200)$$

Beispiel 123. Für das Whitworthgewinde sind die zur Überwindung der Gewinde- und Mutterreibung erforderlichen Drehmomente M_1 und M_2 zu bestimmen.

Anzuwenden sind die Formeln (198) und (199). Die Ausrechnung ergibt mit $\mu = 0,16$, also $\frac{\mu}{\cos \beta} = 0,18$ die folgende Zusammenstellung:

Außen- durchmesser d		Kern- durchmesser d_1	Steigung h	Schlüssel- weite D	$\frac{M_1}{Q}$	$\frac{M_2}{Q}$
Zoll	mm	mm	mm	mm	cm	cm
$\frac{1}{4}$	6,35	4,72	1,27	13	0,071	0,078
$\frac{1}{8}$	9,52	7,49	1,59	19	0,103	0,116
$\frac{1}{2}$	12,70	9,99	2,12	23	0,138	0,143
$\frac{5}{8}$	15,87	12,92	2,31	27	0,168	0,164
$\frac{3}{4}$	19,05	15,80	2,54	33	0,200	0,205
$\frac{7}{8}$	22,22	18,61	2,82	36	0,231	0,231
1	25,40	21,33	3,18	40	0,263	0,258
$1\frac{1}{8}$	28,57	23,93	3,63	45	0,297	0,280
$1\frac{1}{4}$	31,75	27,10	3,63	50	0,326	0,323
$1\frac{3}{8}$	34,92	29,50	4,23	54	0,360	0,350
$1\frac{1}{2}$	38,10	32,68	4,23	58	0,389	0,380
$1\frac{5}{8}$	41,27	34,77	5,08	63	0,427	0,411
$1\frac{3}{4}$	44,45	37,94	5,08	67	0,456	0,440
$1\frac{7}{8}$	47,62	40,40	5,65	72	0,490	0,471
2	50,80	43,57	5,65	76	0,519	0,500
$2\frac{1}{4}$	57,15	49,02	6,35	85	0,584	0,560
$2\frac{1}{2}$	63,50	55,37	6,35	94	0,642	0,622
$2\frac{3}{4}$	69,85	60,55	7,26	103	0,708	0,682
3	76,20	66,90	7,26	112	0,765	0,747
$3\frac{1}{4}$	82,55	72,57	7,82	121	0,828	0,801
$3\frac{1}{2}$	88,90	78,92	7,82	130	0,886	0,866
$3\frac{3}{4}$	95,25	84,40	8,47	138	0,950	0,925
4	101,60	90,75	8,47	147	1,011	0,990
$4\frac{1}{4}$	107,95	96,63	8,84	156	1,069	1,048
$4\frac{1}{2}$	114,30	102,98	8,84	165	1,109	1,095
$4\frac{3}{4}$	120,65	108,82	9,24	174	1,187	1,170
5	127,00	115,17	9,24	183	1,245	1,234

Wenn man berücksichtigt, daß die genaue Berechnung der beiden Drehmomente wenig Bedeutung hat, weil die gebräuchlichen Schrauben im allgemeinen Abweichungen von 5 Einheiten der zweiten Dezimalstelle von den angegebenen genauen Werten haben, die nur bei bester Herstellung auf 2 Einheiten der zweiten Dezimalstelle zurückgehen, und weil der Wert der Reibungsziffer ebenfalls schwankt,

so kann man sagen, daß die Hebelarme beider Drehmomente einander gleich und zwar gleich $\frac{1}{10}$ des äußeren Gewindedurchmessers sind.

Für das in Deutschland normale Gasgewinde nach Whitworth erhält man bei gleicher Reibungsziffer die folgende Zusammenstellung:

Innerer Rohrdurch- messer Zoll	Äußerer Gewindedurch- messer d mm	Kern- durchmesser d_1 mm	Steigung h mm	$\frac{M}{Q}$ cm
$\frac{1}{4}$	13	11,3	1,34	0,132
$\frac{3}{8}$	16,5	14,8	1,34	0,163
$\frac{1}{2}$	20,5	18,2	1,82	0,204
$\frac{5}{8}$	23	20,7	1,82	0,227
$\frac{3}{4}$	26,5	23,2	1,82	0,254
1	33	30	2,31	0,322
$1\frac{1}{4}$	42	39	2,31	0,404
$1\frac{1}{2}$	48	45	2,31	0,458
$1\frac{3}{4}$	52	49	2,31	0,494
2	59	56	2,31	0,558
$2\frac{1}{4}$	70	67	2,31	0,656
$2\frac{1}{2}$	76	73	2,31	0,710
3	89	86	2,31	0,827
$3\frac{1}{2}$	101,5	98,5	2,31	0,940
4	114	111	2,31	1,052

Auch hier kann man den Hebelarm M/Q des Gewindereibungsmomentes bis zum einzölligen Gasrohr gleich dem äußeren Gewindedurchmesser setzen. Für die größeren Nummern bis 2" ist der Hebelarm das 0,95fache des äußeren Gewindedurchmessers, für die ganz starken Rohre das 0,93fache.

Beispiel 124. Für das metrische Gewinde von Befestigungsschrauben¹⁶⁴⁾ ist der Hebelarm des Gewindereibungsmomentes zu bestimmen mit der Reibungsziffer $\mu = 0,16$, also $\frac{\mu}{\cos \beta} \approx 0,185$.

Man erhält nach Formel (198) die folgende Zusammenstellung:

Äußerer Durchmesser d mm	Kern- durchmesser d_1 mm	Ganghöhe h mm	Hebelarm $M : Q$ cm	Bemerkungen
1	0,65	0,25	0,012	Mechaniker- gewinde (geändertes Löwenherz- gewinde)
1,4	0,98	0,3	0,016	
2	1,44	0,4	0,022	
2,6	1,97	0,45	0,028	
3	2,31	0,5	0,033	
4	3,03	0,7	0,044	
5	3,89	0,8	0,054	
6	4,61	1,0	0,065	

¹⁶⁴⁾ Deutsche Industrienormen 1918.

Äußerer Durchmesser d mm	Kern-Durchmesser d_1 mm	Ganghöhe h mm	Hebelarm $M : Q$ cm	Bemerkungen
8	6,26	1,25	0,086	Maschinen- baugewinde (System Inter- national)
10	7,92	1,5	0,107	
12	9,57	1,75	0,128	
14	11,22	2	0,149	
16	13,22	2	0,167	
20	16,53	2,5	0,209	
24	19,83	3	0,251	
30	25,14	3,5	0,311	
36	30,44	4	0,372	
42	35,75	4,5	0,432	
48	41,05	5	0,492	
56	48,36	5,5	0,571	
64	55,67	6	0,650	
72	62,97	6,5	0,728	
80	70,28	7	0,807	
90	79,58	7,5	0,904	
100	88,89	8	1,010	
110	98,89	8	1,095	
120	107,50	9	1,196	
130	117,50	9	1,289	
140	127,50	9	1,382	
150	136,11	10	1,481	

Für das Maschinenbaugewinde kann der Hebelarm genau genug zu $\frac{1}{10}$ des äußeren Gewindedurchmessers angesetzt werden, für das Mechanikergewinde zu 0,11 des äußeren Durchmessers. Der Hebelarm der Mutterreibung entspricht dem des Whitworthgewindes.

Beispiel 125. Die Wirkung der Gegenmutter ist zu erörtern.

In vielen Fällen spannt die Hauptmutter den Schraubenbolzen mit einer Kraft P an derart, daß die Spannkraft von der Anlagefläche A der Fig. 215 an bis zum Ende der Hauptmutter auf den Wert 0 stetig herabsinkt. Wird jetzt eine Gegenmutter aufgeschraubt, so legt sie sich in der Fläche B mit der Kraft P_1 gegen die Hauptmutter, und die dadurch erzeugte Spannkraft im Bolzen nimmt wieder von B bis C stetig bis auf 0 ab. Der gesamte Spannkraftverlauf ist hiernach in die Fig. 215 eingetragen¹⁶⁵⁾. Man sieht, daß jetzt erst die Gewingegänge der Hauptmutter zwischen A und D anliegen, während die zwischen D und B befindlichen lose sind.

Die Gegenmutter entspannt also die Hauptmutter derart, daß beide zusammen dieselbe Wirkung haben wie die Hauptmutter allein. Sie ist demnach als Schraubensicherung von recht mangelhafter Wirkung.

Wird sie so fest angezogen, daß $P_1 = P$ wird, so entsteht die Spannkraftdarstellung der Fig. 216. Die Gegenmutter spannt den Bolzen allein mit der

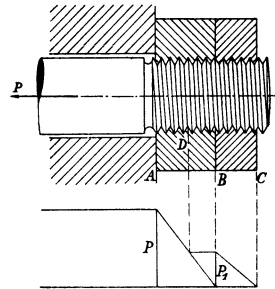


Fig. 215.

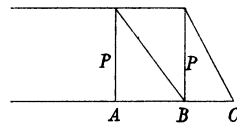


Fig. 216.

¹⁶⁵⁾ Seemann, D. p. J. 1918.

des betreffenden Schnittes mit beliebig auf der Zahnhöhe festgelegten Schraubenlinien erhalten oder auch, indem man durch O einen Fahrstrahl legt, sein Ende nach dem Zahnkopf der Schnecke hinüberprojiziert und auf der Achse von der durch $H'G'$ bzw. HG gezogenen Geraden den dem Bogen bis zum Fahrstrahl entsprechenden Anteil α der Steigung aufträgt und den so erhaltenen Punkt mit dem ersten geradlinig verbindet. Für den hinteren Teil der den Radzahn umfassenden Schraubenflanken sind die Schnitte in Fig. 217 an ihrem Platz gezeichnet. An dem vorderen Schraubengang verdecken sie sich gegenseitig zum größeren Teil.

Für jeden dieser Schnitte sind in Fig. 218 die Zahnstangenverzahnungen herausgezeichnet¹⁶⁶⁾. T_r und T_s sind der Teilkreis des Rades bzw. die Teilungsgerade der Schnecke, die sich in C berühren, KL ist die Eingriffslinie der vorderen Flanken PS bzw. TO , HJ diejenige der hinteren Flanken QR bzw. UV . Um das Gleiten der Zähne aufeinander zu veranschaulichen, sind die Zahnstangenflanken in gleiche Teile geteilt und die zugehörigen Teile der Radzahnflanken konstruiert worden. Für den Mittelschnitt 0 hat man die Evolventenverzahnung mit gerader Eingriffslinie nach Fig. 187 zu zeichnen. Bei den anderen Schnitten ist das Zahnstangenprofil aus Fig. 217 gegeben, und das dazugehörige des Rades ist nach den allgemeinen Verzahnungsregeln (Fig. 182) zu bestimmen.

Dazu ist die Richtung der Zahnstangenprofilote mit Genauigkeit festzulegen, was für einen Punkt in Fig. 217 angegeben ist¹⁶⁷⁾. Das Lot zu HG in einem beliebigen Punkt läßt sich ohne weiteres in der rechten Figur fällen, es trifft die Fußbegrenzungsebene KG im Punkt L . Es ist jedoch gegen die Zeichenebene um den Steigungswinkel γ der betreffenden Schraubenlinie geneigt, der an die Achse der Schnecke wo er sich in wahrer Größe zeigt, angetragen ist, indem dort zu der Schraubenlinie ein Lot errichtet wird. Dieses Lot ist von der Achse im Abstände y um $z = y \cdot \operatorname{tg} \gamma$ entfernt, welche Länge in die linke Figur übertragen wird, wo sie den Zentriwinkel φ bestimmt. Jetzt wird die durch L gehende Schraubenlinie von der Steigung der Schnecke gezeichnet, von der die rechte Figur das Stück LM enthält. Um nun das Lot im Punkt A_1A_2 anzugeben, wird an OA_2 der Winkel φ angetragen. Dann ist die ihm gegenüberliegende Seite des betreffenden Dreiecks die Lotlänge in der linken Projektion. Ihr Endpunkt wird nach rechts auf LM übertragen und damit ist auch dort das Lot im Fußpunkte A_1 bestimmt.

Man ersieht aus den Fig. 218, daß die Zahnprofile sowohl der Schnecke als auch des Rades in den Seitenschnitten ganz eigentümliche Kurven bilden, die besonders auf der rechten Seite der Schnecke, die sich aus dem Rad herausdreht, stark von der Evolventenverzahnung des Mittelschnittes abweichen.

¹⁶⁷⁾ v. Gliniski, Z. d. V. d. I. 1903.

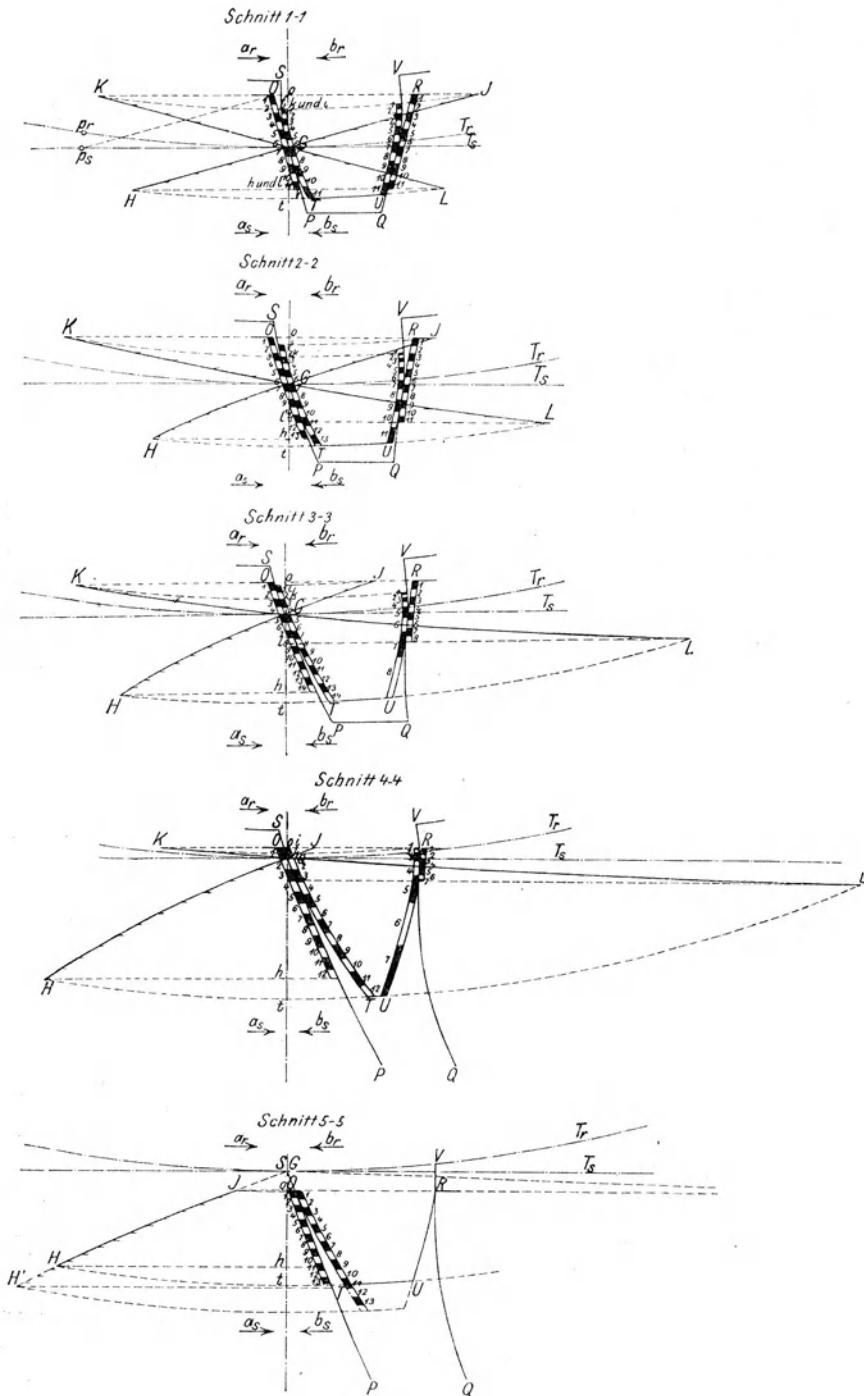


Fig. 218.

Trägt man die wagerechten Projektionen der verschiedenen Eingriffstrecken in die Grundrißprojektion der Schnecke in der durch die Schneckensteigung vorgeschriebenen Verschiebung gegeneinander ein und überträgt die betreffenden Endpunkte in den Schneckenquerschnitt, so ergibt sich das Eingriffsfeld¹⁶⁸⁾ der Fig. 219. Der Deutlichkeit halber ist allerdings nur die Eingriffsfläche des mittleren Schneckenzahnes in die Querschnittprojektion übertragen worden. In Fig. 217 war neben der gebräuchlichen seitlichen Abschrägung des Schneckenrades punktiert auch die die Schnecke weiter umfassende zylindrische Begrenzung des Rades angedeutet worden. Die Fig. 219 zeigt, daß dadurch das Eingriffsfeld nur unwesentlich vergrößert wird, und die beiden letzten Figuren der Fig. 218 ergeben, daß die Ansätze das spezifische Gleiten der Flanken ganz bedeutend erhöhen. Um dieses spezifische Gleiten möglichst zu verringern, führt man die Schnecke so kurz aus, daß der

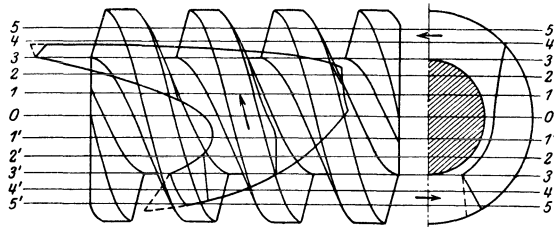


Fig. 219.

letzte Teil des Eingriffsfeldes, wo es am größten ist, nicht mehr benutzt wird. Außerdem entspricht der Verlängerung des Eingriffes eine Verringerung der Eingriffstiefe und umgekehrt. Die Verhältnisse verschlechtern sich, je größer der Steigungswinkel γ der Schraube ist, wenn nicht gleichzeitig der Verzahnungswinkel α verkleinert wird. Die kleinste Zähnezahl des Rades bei $\alpha = 75^\circ$ und $h_K = 0,3 \cdot \tau$ ist $z = 28$.

Zu beachten ist noch bei der Aufzeichnung des Eingriffsfeldes, daß die Eingriffstrecke der Verzahnung mindestens da aufhören muß, wo sie von dem aus dem Radmittelpunkt geschlagenen Kreis tangiert wird¹⁶⁹⁾. Darüber hinaus ist ja nach den Darlegungen S. 157 ein richtiger Eingriff nicht mehr möglich, und in der Nähe dieses Punktes ist das spezifische Gleiten bereits unzulässig groß. Man hat, insbesondere bei mehrgängigen Schnecken, hiernach den vorderen Teil des Eingriffsfeldes entsprechend zu kürzen, wie auch die Fig. 219 angibt, wo die vordere Abrundung weggeschnitten ist. Es muß dies durch Verringerung der Kopfhöhe der Schnecke geschehen oder besser durch Verkleinerung des Verzahnungswinkels α . Das gewählte Zeichnungsbeispiel ist also wenig vorteilhaft.

Ist M_2 das Drehmoment des Schneckenrades vom Halbmesser R , so kann man die um den Schneckenhalbmesser r von der Schnecken-

¹⁶⁸⁾ Stribeck, Z. d. V. d. I. 1897/98; Ernst, a. a. O.

¹⁶⁹⁾ Kull, D. p. J. 1906.

achse nach dem Rad hin verschobene axiale Kraft Q , die also im Punkt C der Fig. 217 angreift, ermitteln aus der Gleichung

$$M_2 = Q \cdot R.$$

Die in C zwischen dem Schnecken- und dem Radprofil wirkende Kraft N ist nun gegen die Mittelachse der Schnecke um den Steigungswinkel γ geneigt und senkrecht dazu um den Zahnstangenwinkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (Fig. 220). Man erhält so gemäß Formel (49) in Bd. I

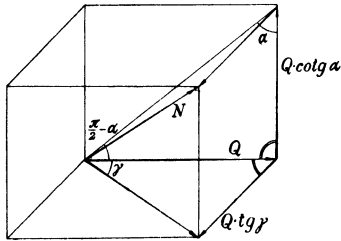


Fig. 220.

$$N^2 = Q^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{cotg}^2 \alpha). \quad (201)$$

Bezeichnet ferner

$$v_1 = \frac{2\pi \cdot r \cdot n_1}{60 \cdot \cos \gamma}$$

die Geschwindigkeit des Schneckenpunktes C und

$$v_2 = \frac{2\pi \cdot R \cdot n_2}{60} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{h}{l}$$

diejenige des Radpunktes C , in der Richtung der Zahnhöhe h , wobei l die mittlere Länge der Eingriffstrecke angibt, so gilt nach Formel (42) als widerstehende Kraft in Richtung der Schneckenbewegung

$$P_1 = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r} \cdot \ddot{u}_1 \cdot \cos \gamma \cdot \frac{h}{l} \sin \alpha\right)^2}}$$

und entsprechend als diejenige in Richtung der Radbewegung

$$P_2 = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \frac{\mu \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R} \cdot \ddot{u}_2 \cdot \frac{l_1}{h \cos \gamma} \cdot \sin \alpha\right)^2}}.$$

In die Berechnung ist also an Stelle von μ einzusetzen für das Rad

$$\mu_r = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R} \cdot \frac{h \cdot \ddot{u}_2}{h \cos \gamma \cdot \sin \alpha}\right)^2}}$$

und für die Schnecke

$$\mu_s = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r} \cdot \ddot{u}_1 \cdot \frac{h}{l} \cos \gamma \cdot \sin \alpha\right)^2}}.$$

Der Einfachheit halber ist hier nicht mit den an jedem Punkt des Eingriffsfeldes anders geneigten Teilkräften dN gerechnet worden, sondern bereits mit ihrem Mittelwert N , dessen Lage und Richtung die oben angegebene ist. Der gemachte Fehler ist jedenfalls unbedeutend.

Da nun, wie die Fig. 218 zeigen, die Eingriffslinien im allgemeinen nicht sehr von Geraden abweichen, so kann ohne großen Fehler für die Berechnung der Zahnreibung des Rades die für die Evolventenverzahnung gültige Rechnung benutzt werden. Man erhält als Raddrehmoment

$$M_2 = Q \cdot R = \frac{N \cdot R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{cotg} \alpha^2}}$$

und als Reibungsmoment gemäß der Herleitung von Formel (171)

$$M_{2r} = \mu \cdot N \cdot \cos \alpha (2R - \frac{1}{2} R_1 \cdot u_2 + \frac{1}{2} R \cdot u_1),$$

worin u_1 der Fig. 188 zu entnehmen ist. Für die Zahnstange ist $R_1 = \infty$ und $u_2 = 0$, so daß das Produkt in unbestimmter Form auftritt, die hier den Wert $\frac{2 \cdot h_{K1}}{(\frac{1}{2} \cos \alpha)^2}$ annimmt.

Unbestimmte Formen. Wenn zwei verschiedene Funktionen derselben Veränderlichen x , etwa $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für einen bestimmten Wert von x , etwa a ergeben $f_1(a) = 0$ und $f_2(a) = \infty$, so ist ihr Produkt der Betrag, dem sich $f_1(a + \delta) \cdot f_2(a + \delta)$ bei immer kleiner werdendem δ mehr und mehr nähert

Da nun $f_1(a) = 0$ ist und ebenso $\frac{1}{f_2(a)} = 0$, so kann das Produkt auch geschrieben werden

$$\frac{f_1(a + \delta)}{1 : f_2(a + \delta)} = \frac{f_1(a + \delta) - f_1(a)}{\frac{1}{f_2(a + \delta)} - \frac{1}{f_2(a)}}.$$

Bei verschwindend kleinem δ ist nun der Zähler das Differential $d f_1(x)$ für $x = a$ und ebenso der Nenner das Differential $d \frac{1}{f_2(x)}$ für $x = a$.

In dem besonderen Fall $x = a$, bei dem die gegebenen beiden Funktionen den Wert 0 bzw. ∞ annehmen, sind somit die sonst verschiedenen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung

$$f_1(a) \cdot f_2(a) = \frac{d f_1(a)}{d \frac{1}{f_2(a)}} \tag{202}$$

einander gleich, woraus der wahre Wert bestimmt werden kann. Hat der Quotient der ersten Differentiale wieder einen unbestimmten Wert, so ist noch einmal zu differenzieren.

In entsprechender Weise berechnet man auch Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

Im vorliegenden Fall ist nach Formel (162) mit Benutzung der Beziehung $m \cdot z_1 = 2 R_1$

$$u_2 = \sqrt{1 + \frac{2 h_{K1} + \left(\frac{2 h_{K1}}{R_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2}} - 1,$$

also nach Bd. I, S. 105

$$\frac{d u_2}{d R_1} = \frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2} \cdot \left(-\frac{2 h_{K1}}{R_1^2} - 4 h_{K1}^3 \cdot \frac{2}{R_1^3}\right)}{\frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \alpha\right)^2 + \frac{2 h_{K1}}{R_1} + \left(\frac{2 h_{K1}}{R_1}\right)^2}}.$$

Ferner ist ebenso zu bestimmen (Bd. I, S. 105)

$$\frac{d^1 \frac{1}{R_1}}{d R_1} = - \frac{1}{R_1^2}.$$

Die Division beider Ausdrücke ergibt für $R_1 = \infty$

$$u_2 \cdot R_1 = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2} \cos \alpha} \cdot (+2 h_{K1} + 0)}{\sqrt{(\frac{1}{2} \cos \alpha)^2 + 0 + 0}} = \frac{2 h_{K1}}{(\frac{1}{2} \cos \alpha)^2}.$$

Man erhält so

$$\begin{aligned} \frac{M_{2r}}{M_2} &= \mu_r \cdot \cos \alpha \cdot \left[2 - \frac{h_{K1}}{R} : (\frac{1}{2} \cos \alpha)^2 + \frac{u_1}{2} \right] \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{cotg}^2 \alpha} \\ &= \mu_r \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \left[2 - \frac{h_{K1}}{R} : (\frac{1}{2} \cos \alpha)^2 + \frac{u_1}{2} \right] \cdot \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (203a)$$

Die Seitenkraft $Q \cdot \operatorname{tg} \gamma$ drückt den Bund der Radwelle an das Lager und ruft dort Spurkranzreibung hervor vom Drehmoment (Formel 65)

$$M'_2 = \frac{1}{2} \mu'_2 \cdot Q \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot r_2 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right).$$

Damit wird

$$\frac{M'_2}{M_2} = \frac{1}{2} \cdot \mu'_2 \cdot \frac{r_2}{R} \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}, \quad (203b)$$

worin r_1 den Wellenhalbmesser und r_2 den Außenhalbmesser des Spurringes bedeutet.

Entsprechend belastet die Seitenkraft $Q \cdot \sin \alpha$ die Traglager, und das Drehmoment der dort entstehenden Reibung ist nach Formel (57)

$$M'_2 = \mu''_2 \cdot \frac{Q}{\sin \alpha} \cdot r_1,$$

also

$$\frac{M'_2}{M_2} = \frac{\mu''_2}{\sin \alpha} \cdot \frac{r_1}{R}. \quad (203c)$$

Für die mit der Kraft Q belastete Schnecke ergibt Formel 198 das Drehmoment einschließlich der Schneckenreibung zu

$$M_{1r} = Q \cdot r \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma + \frac{\mu_s}{\sin \alpha}}{1 - \frac{\mu_s}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \gamma},$$

also, wenn durch $M_1 = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg} \gamma$ dividiert wird

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{M_{1r}}{M_1} = \frac{1 + \frac{\mu_s}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{cotg} \gamma}{1 - \frac{\mu_s}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \gamma} \quad (204a)$$

Der Teilkreisdurchmesser des Rades ist

$$D = \frac{z \cdot \tau}{\pi} = \frac{30 \cdot 25,4}{\pi} = 242,6 \text{ mm.}$$

Der Teilrißdurchmesser der Schnecke betrage

$$2r = 76,6 \text{ mm.}$$

Somit wird

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{2\pi \cdot r} = 0,1056 \quad \text{bzw.} \quad 0,2112 \quad \text{bzw.} \quad 0,3167,$$

ferner ist

$$\operatorname{cotg} \alpha = 0,268 \quad \text{und} \quad \sin \alpha = 0,966,$$

die Kopfhöhe der Zähne im Mittelschnitt $h_K = \frac{\tau}{3}$, der Durchmesser der Radachse $d_1 = 50 \text{ mm}$, der Durchmesser des Drucklagerringes des Rades $d_2 = 80 \text{ mm}$, der Durchmesser der Schneckenlager $d_3 = 35 \text{ mm}$, ihr Mittenabstand $l = 230 \text{ mm}$, der Laufringdurchmesser des Kugeldrucklagers der Schnecke $d_4 = 55 \text{ mm}$, der Kugeldurchmesser $d_0 = \frac{3}{8}''$.

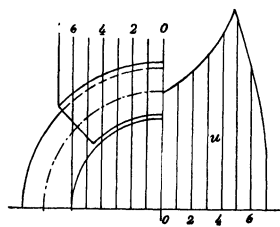


Fig. 222.

Für das Rad von $b = 70 \text{ mm}$ Breite, dessen Zähne seitlich unter 45° abgeschragt sind, ist nun an einer Reihe von Schnitten aus Fig. 222 die Kopfhöhe h_{K2} zu bestimmen. Es wird dann $\frac{h_{K2}}{m} = \frac{\pi}{\tau} \cdot h_{K2}$ ausgerechnet und dafür der Fig. 188 der zugehörige Wert von u_1 entnommen, wie die folgende Zusammenstellung angibt.

Schnitt	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_{K2} =$	0,845	0,890	1,045	1,26	1,60	1,55	1,10	0,62 cm
$\frac{h_{K2}}{m} =$	1,045	1,100	1,292	1,559	1,979	1,916	1,360	0,767 „
$u_1 =$	0,774	0,807	0,918	1,066	1,298	1,253	0,945	0,400 „
$h_{K1} =$	0,845	0,805	0,725	0,600	0,525	0,125	0	0 „

Die sich hieraus ergebenden Mittelwerte $u_1 = 0,935$ und $h_{K1} = 0,45 \text{ cm}$, $h_{K2} = 1,11 \text{ cm}$ sind in die Formel (203) einzusetzen. Als mittlere Eingriffslänge wird $l = 1,6 \cdot \tau$ geschätzt.

Die Reibungsziffer zwischen der Stahlschnecke und dem Phosphorbronzerad werde bei Laufen im Ölbad zu $\mu = 0,045$ angenommen, die Reibungsziffer der Lager zu $\mu'_2 = \mu'_3 = 0,02$. Damit ergibt sich für die eingängige Schnecke

$$\mu_s = \frac{0,045}{\sqrt{1 + \left(\frac{7,66}{24,26} \cdot \frac{1,11}{1,6 \cdot 2,54} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{0,966} \right)^2 \cdot (1 + 0,1056^2)}} \sim 0,045,$$

$$\mu_r = \frac{0,045}{\sqrt{1 + \left(\frac{24,26}{7,66} \cdot \frac{1,6 \cdot 2,54}{1,11} \cdot 30 \cdot 0,966 \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + 0,1056^2}}} \sim 0,000133,$$

entsprechend für die zweigängige

$$\mu_s \sim 0,045 \quad \text{und} \quad \mu_r \sim 0,000271,$$

für die dreigängige

$$\mu_s \sim 0,045 \quad \text{und} \quad \mu_r \sim 0,000418.$$

Es ergibt sich so für $y = 1$

$$\frac{M_{2,r}}{M_2} = 0,000133 \cdot \left(2 - \frac{8 \cdot 0,45}{24,26 \cdot 0,0672} + \frac{0,935}{2} \right) \cdot 0,268 \cdot \sqrt{1 + \frac{0,1056^2}{1 + 0,268^2}} \approx 0,$$

wie nach den Darlegungen S. 50 zu erwarten war; auch für $y = 2$ und 3 bleibt der Betrag verschwindend klein.

Für die Spurkranzreibung des Rades wird bei $y = 1$

$$\frac{M'_2}{M_2} = \frac{0,02 \cdot 8,0}{2 \cdot 24,26} \cdot \left(1 + \frac{5}{8} \right) \cdot \frac{0,1056}{\sqrt{1 + 0,1056^2 + 0,268^2}} = 0,0005$$

und bei $y = 2$ und 3 : 0,0011 bzw. 0,0016.

Für die Traglagerreibung des Rades erhält man

$$\frac{M''_2}{M_2} = \frac{0,02}{0,966} \cdot \frac{5,0}{24,26} = 0,0043.$$

Für die Schnecke liefert Formel (204a) bei $y = 1$

$$\frac{M_{1,r}}{M_1} = \frac{1 + \frac{0,045}{0,966 \cdot 0,1056}}{1 - \frac{0,045}{0,966} \cdot 0,1056} = \frac{1,439}{0,995} = 1,445$$

entsprechend bei $y = 2$ den Wert 1,228, bei $y = 3$ den Wert 1,115.

Hierzu kommt der Einfluß des Kugeldrucklagers mit

$$\frac{M'_1}{M_1} = \frac{0,00067 \cdot 5,5}{0,1056 \cdot 0,95 \cdot 3,85} = 0,0096$$

bzw. 0,0048 bzw. 0,0032

und der der Traglagerreibung

$$\frac{M''_1}{M_1} = \frac{0,02 \cdot 3,5}{7,66 \cdot 0,1056} \cdot \left[\sqrt{0,0528^2 + \left(0,134 + \frac{3,83}{23,0} \right)^2} + \sqrt{0,0528^2 + \left(0,134 - \frac{3,83}{23,0} \right)^2} \right]$$

= 0,0318 bzw. 0,0183 bzw. 0,0144.

Wenn nun alle Beträge addiert werden, wird

$$\begin{aligned} \text{für } y = 1: & \quad \frac{1}{\eta} = 1,489, & \text{ also } & \quad \eta = 0,673, \\ \text{„ } y = 2: & \quad \frac{1}{\eta} = 1,257, & \text{ „ } & \quad \eta = 0,796, \\ \text{„ } y = 3: & \quad \frac{1}{\eta} = 1,139, & \text{ „ } & \quad \eta = 0,878. \end{aligned}$$

Der heute gebräuchliche Ersatz der Schneckengleitlager durch Kugellager verbessert zwar den Wirkungsgrad, aber nicht erheblich.

Die Rechnung setzt günstige Eingriffsverhältnisse voraus, die bei der angenommenen Kopfhöhe nicht überall erfüllt sind (vgl. S. 207).

Gemessen wurde¹⁷⁰⁾ für die dreigängige Schnecke bei Vollbelastung und $v_1 = 2,9$ m/sk $\eta = 0,85$. Hierbei war infolge der Eingriffsmängel im Dauerbetrieb die Öltemperatur in dem Schnecke und Rad umgebenden Gehäuse über die Lufttemperatur um 85° gestiegen. Am günstigsten ist¹⁸⁸⁾ die Öltemperatur $t \approx 60^\circ$.

Sorgfältige Bearbeitung und richtiger Entwurf bewirkt tatsächlich eine Erhöhung des Wirkungsgrades. So wurde für ein anderes Schneckengetriebe mit

¹⁷⁰⁾ Bach und Roser, Z. d. V. d. I. 1903.

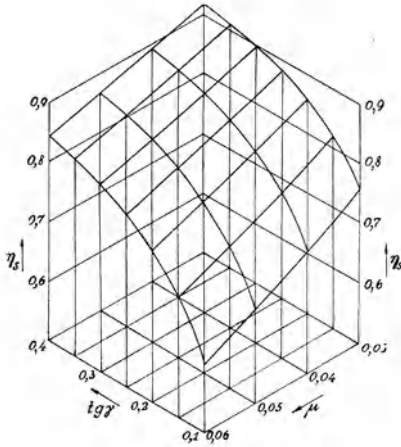


Fig. 223.

Schnecke $\tau = 1''$, die ganze Zahnhöhe $h = 0,7 \cdot \tau$, die Kopfhöhe $h_K = 0,3 \cdot \tau$, die Anzahl der Radzähne $z = 28$, mithin der Raddurchmesser

$$D = \frac{z \cdot \tau}{\pi} = \frac{28 \cdot 2,54}{\pi} \approx 22,6 \text{ cm,}$$

die Anzahl der Schneckengänge $y = 2$, der Teilraddurchmesser der Schnecke $r = 2,2 \text{ cm}$, mithin die Schneckensteigerung

$$\text{tg } \gamma = \frac{h}{2\pi \cdot r} = \frac{2 \cdot 2,54}{2 \cdot \pi \cdot 2,2} = 0,367,$$

der Zapfendurchmesser der Radwelle $d_1 = 4,0 \text{ cm}$, der Wellendurchmesser an der Spurkranzstelle $d_2 = 5,0 \text{ cm}$, der Wellendurchmesser der Schnecke $d_4 = 2,5 \text{ cm}$ bzw. $d_4 = 1,5 \text{ cm}$, der Spurkranzdurchmesser der Schneckenwelle $d_3 = 3,5 \text{ cm}$, der Abstand der beiden Lager $l = 22 \text{ cm}$, der Durchmesser des Handkettensrades $D_1 = 32 \text{ cm}$, der Zug daran $P_1 \approx 36 \text{ kg}$. Als Reibungsziffer werde wegen der Schmierung durch Starrfett und nicht ganz sauberer Bearbeitung durchweg $\mu = 0,08$ eingesetzt.

Mit dem Verzahnungswinkel $\alpha = 70^\circ 10'$, also $\text{cotg } \alpha = 0,360$, $\sin \alpha = 0,941$ erhält man, wenn noch geschätzt wird, die mittlere Eingriffslänge zu $1,6 \cdot \tau$ und $u_1 \approx 1$:

$$\mu_s = \frac{0,08}{\sqrt{1 + \left(\frac{22,6}{4,4} \cdot \frac{2}{28} \cdot \frac{0,7}{1,6} \cdot 0,941\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,367^2}} = 0,792,$$

$$\mu_r = \frac{0,08}{\sqrt{1 + \frac{1}{0,0205}}} = 0,0113.$$

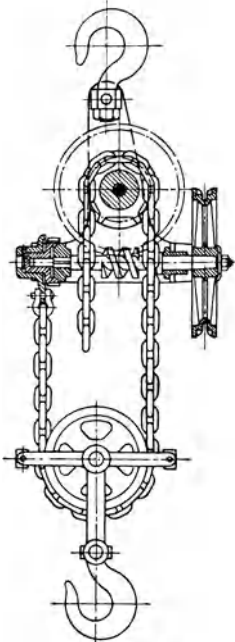


Fig. 224.

¹⁷¹⁾ Schömburg, D. p. J. 1913.

dem Übersetzungsverhältnis $\frac{y}{z} = \frac{3}{70}$ und der Teilung $\tau = 1,3 \cdot \pi \text{ cm}$ bei $n_1 = 720$ Umdrehungen in der Minute $\eta = 0,874$ bestimmt¹⁷¹⁾.

Den Haupteinfluß auf den Wirkungsgrad η hat die Schraubenreibung, dagegen verschwindet die Zahnreibung infolge der hohen Schraubengeschwindigkeit vollständig. Wie daran die Werte $\text{tg } \alpha$ und μ_s beteiligt sind, zeigt die Auftragung der Fig. 220. Der Wirkungsgrad steigt bei weiterer Erhöhung des Steigungswinkels γ nur noch wenig an.

Beispiel 127. Zu bestimmen ist der Wirkungsgrad des in Fig. 224 skizzierten Schneckenflaschenzuges. Es ist die Belastung $P_0 = 2000 \text{ kg}$, der Halbmesser der Kettenuß $r_0 = 5 \text{ cm}$, die Teilung von Rad und

Damit wird mit dem Mittelwert von $h_{K1} \approx 0,2 \cdot r$

$$\frac{M_{2r}}{M_2} = 0,0113 \cdot 0,360 \cdot \left(2 - \frac{0,2 \cdot 2,54 \cdot 4}{11,3 \cdot 0,112} + 0,50 \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{0,367^2}{1 + 3,360^2}} = 0,004 ;$$

$$\frac{M'_2}{M_2} = \frac{0,08 \cdot 5}{2 \cdot 22,6} \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{0,367}{\sqrt{1 + 0,367^2 + 0,360^2}} = 0,005 .$$

Die Traglager des Rades sind belastet durch die Last $\frac{1}{2} P_0$ in lotrechter Richtung und die Kraft

$$\frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{M}{R \cdot \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} P_0 \cdot r_0}{R \cdot \sin \alpha}$$

senkrecht dazu. Die Zusammensetzung ergibt die Mittelkraft

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot P_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R \cdot \sin \alpha} \right)^2} = 1000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{5}{22,6 \cdot 0,941} \right)^2} = 1027 \text{ kg},$$

somit wird

$$\frac{M''_2}{M_2} = \frac{0,08 \cdot 1027 \cdot 2}{1000 \cdot 5} = 0,033 .$$

Für die Schnecke ist

$$M_{1r} = \frac{1 + \frac{0,0792}{0,941} \cdot 2,73}{1 - \frac{0,0792}{0,941} \cdot 0,367} = 1,269 ,$$

$$\frac{M'_1}{M_1} = \frac{0,08 \cdot 3,5 \cdot 2,73}{2,2 \cdot 4} \cdot \left(1 + \frac{2,5}{3,5} \right) = 0,149 .$$

Für das schwächere Traglager gilt

$$\frac{M''_1}{M_1} = \frac{0,08 \cdot 1,5}{2 \cdot 2,2 \cdot 0,367} \cdot \sqrt{0,1835^2 + \left(0,134 - \frac{2,2}{2,2} \right)^2} = 0,014 ,$$

für das stärkere, das noch durch den Zug P_1 der Handkette belastet wird,

$$\frac{M''_1}{M_1} = \frac{0,08 \cdot 2,5}{2 \cdot 2,2 \cdot 0,367} \cdot \sqrt{0,1835^2 + \left(0,134 + \frac{2,2}{22} + \frac{36 \cdot 22,6}{1000 \cdot 5} \right)^2} = 0,049$$

Die Addition liefert nun

$$\frac{1}{\eta} = 0,004 + 0,005 + 0,033 + 1,269 + 0,149 + 0,014 + 0,049 = 1,523 ,$$

also

$$\eta = 0,657 .$$

Hiermit erhält man aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot D_1 = \frac{1}{2} \cdot P_0 \cdot r_0 \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{y}{z}$$

$$P_1 = \frac{2000 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1,523}{32 \cdot 28} = 34 \text{ kg}.$$

nur unerheblich von der obigen Schätzung abweichend.

Bei dem ermittelten Wirkungsgrad ist die Vorrichtung nicht selbstsperrend. Um nun die notwendige Selbstsperrung hervorzurufen, ist ein kegelförmiger Druckring vom mittleren Durchmesser $d_6 = 6$ cm mit der Neigung $\beta = 45^\circ$ angeordnet, der bei der ersten Rückwärtsbewegung der Last von einer Sperrklinke festgehalten wird¹⁷²⁾.

¹⁷²⁾ Becker 1880.

In dem Fall fällt der Betrag $\frac{M'_1}{M_1} = 0,149$ weg und dafür tritt an dem mindestens schlecht, am besten gar nicht geschmierten Reibkegel, für den als geringste Reibungsziffer $\mu_3 = 0,14$ angesetzt wird,

$$\frac{M'_1}{M_1} = \frac{0,14 \cdot 6 \cdot 2,73}{2,2 \cdot 2} \cdot 1,414 = 0,736.$$

Außerdem ändert sich die Belastung der Traglager der Schnecke, und es wird mit $P_1 \approx 10$ kg Kettengewicht

$$\frac{M''_1}{M_1} = \frac{0,08 \cdot 1,5}{2 \cdot 2,2 \cdot 0,367} \cdot \sqrt{0,1835^2 + \left(0,134 + \frac{2,2}{22}\right)^2} = 0,022$$

bzw.

$$\frac{M'_1}{M_1} = \frac{0,08 \cdot 2,5}{2 \cdot 2,2 \cdot 0,367} \cdot \sqrt{0,1835^2 + \left(0,134 - \frac{2,2}{22} + \frac{10 \cdot 22,6}{1000 \cdot 5}\right)^2} = 0,025.$$

Somit wird jetzt

$$\frac{1}{\eta} = 0,004 + 0,005 + 0,033 + 1,269 + 0,736 + 0,022 + 0,025 = 2,094.$$

Damit ist also soeben Selbstsperrung erzielt worden, denn man hat jetzt $\eta' = 0,478$.

Ehe die Eingriffs- und Abnutzungsverhältnisse der Schnecken genauer untersucht waren, glaubte man die Abnutzung durch eine größere Anlagefläche verbessern zu können, indem man die Schnecke dem Radumfang genauer anpaßte. Man erhielt so die Globoidschnecke¹⁷³⁾ nach Fig. 225. Sie entsteht dadurch, daß der die Zahnücke der Schnecke ausarbeitende Fräser im Kreise aus dem Radmittelpunkt schwingend durch den Schneckenkörper bewegt wird, während er sich mit entsprechender Geschwindigkeit um seine Achse dreht.

In dem Mittelschnitt II liegen sämtliche Radzähne an den Schnecken-
zähnen auf der ganzen Länge an, aber nicht in den seitlichen Schnitten, von denen nur zwei, I und III, gezeichnet sind. In ihnen findet nur ganz am Anfang der Schnecke Berührung statt, während von da ab bis zum Ende der Abstand immer größer wird. Das Eingriffsfeld reicht nur vom vorderen Teil der Schnecke bis zur Mitte, und die durchgehende Berührung im Mittelschnitt besteht nur aus einer ausspringenden Kante in der Mitte der Radzahnflanke¹⁷⁴⁾. Sie entsteht beim Fräsen des Rades mit einem der Schnecke gleich geformten Fräser, indem die einzelnen Schneidkanten dieses Schneckenfräsers je unter verschiedenen Steigungswinkeln immer durch dieselbe Linie in der Mitte der Radzahnflanke hindurchgehen. Die verschiedenen Steigungswinkel ergeben sich wieder durch den wechselnden Durchmesser der Schnecke; sie sind am kleinsten an den Enden der Schnecke und am größten in der Mitte. Die Radialprojektion auf den Radzahn mit den entsprechenden Schnecken-
zahnflanken zeigt die rechte untere Figur der Fig. 225.

Eine wesentliche Verbesserung bildet das Lorenz-Getriebe¹⁷⁵⁾, dessen Radzähne mit zwei einfachen Schneidstählen ungefähr in Form

¹⁷³⁾ Leonardo da Vinci, nach Pekrun, Z. d. V. d. I. 1912.

¹⁷⁴⁾ Lindner, Z. d. V. d. I. 1902.

¹⁷⁵⁾ Maschinenfabrik Lorenz in Ettlingen, 1893; Lindner, a. a. O.

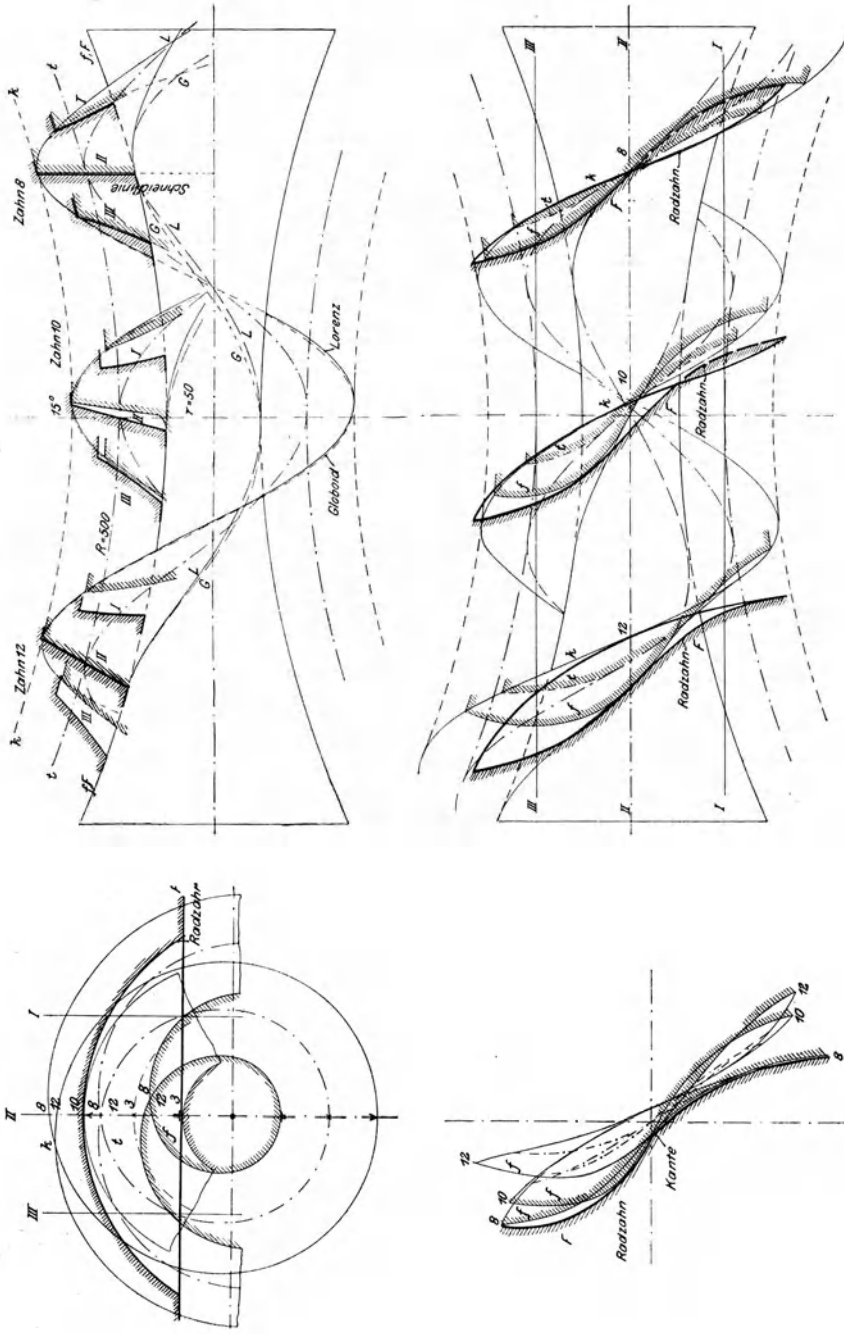


Fig. 225.

die Schneidlinie enthält, gleitet naturgemäß mit ihr über die Radzahnflanke der ganzen Breite nach hinweg. Zugleich legt sich der Radzahn mit seinen Randstreifen vorn und hinten berührend an den Schnecken Zahn an, und dazwischen weichen die Zahnflanken nur unmerklich voneinander ab, so daß praktisch — mit Rücksicht auf die eingeschlossene Schmierschicht — fast volle Flächenberührung besteht. Der Eingriff verläuft von dort aus weiter hinter der Mittelebene des Rades, und zwar in Linienberührung, jedoch mit ziemlich sanfter Anschmiegung der Flächen. Er geht bis ans Ende der Schnecke, wo er in der Mittelebene aufhört.

Der Wirkungsgrad einer dreigängigen Lorenzschnecke mit einem 33 zahnigen Rade ist bei Vollbelastung zu $\eta = 0,88$ bestimmt worden¹⁷⁴), wobei die Schneckenwelle mit etwa 920 Umdrehungen in der Minute lief und die Temperatur des im Kasten befindlichen Öles 67° betrug.

Eine Übertragung des Grissonschen Grundgedankens auf die Schnecke bildet das Pekrungetriebe¹⁷⁶). Auf radialen Zapfen vom Halbmesser r_5 sitzen auf dem Radumfang gehärtete Rollen vom Halbmesser r_6 , die nur mit einer Mantellinie am Mittelschnitt der Schnecke anliegen (Fig. 227).

Für den Wirkungsgrad gelten die Formeln (203) und (204). Die ersteren mit der Abänderung, daß an Stelle des kleinen μ_r der volle Betrag von μ einzusetzen ist, da die Rollen senkrecht zur Radbewegung nicht gleiten. Ferner ist darin für u das kleinstmögliche Übersetzungsverhältnis der Verzahnung im Mittelschnitt zu nehmen, wobei h_{K2} jetzt die halbe Höhe der Rolle angibt. Für die auf der Schnecke laufenden Rollen gilt nach Fig. 228

$$Q \cdot \cos \gamma \cdot f + \mu_2 \cdot Q \cdot r_5 = Q \cdot \sin \gamma \cdot r_6$$

und für die Schnecke

$$M_1 = Q \cdot r \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}.$$

Man erhält hieraus als Ersatz der Formel (204 a)

$$\frac{M_{r1}}{M_1} = \frac{1}{r_6} \cdot \left(f \cdot \cotg \gamma + \frac{\mu_2 \cdot r_5}{\sin \gamma} \right).$$

Hierin ist γ der mittlere Steigungswinkel der Globoidschnecke.

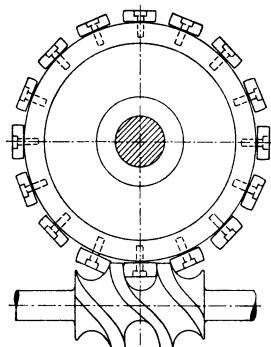


Fig. 227.

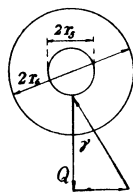


Fig. 228.

¹⁷⁶) Coswiger Maschinenfabrik in Coswig; Pekrun, Z. d. V. d. I. 1912.

15. Die Rolle, Seilsteifigkeit.

Wird ein über eine festgelagerte Rolle geschlagenes Seil an dem einen Ende mit der Last Q belastet und am anderen Ende mit der beliebig gerichteten Kraft P gezogen, so gilt, wenn vorläufig von allen Widerständen abgesehen wird, die Momentengleichung in bezug auf die Rollennachse (Fig. 229)

$$P \cdot r = Q \cdot r, \quad \text{also} \quad P = Q.$$

Bei der festen Rolle ist die Zugkraft gleich der Last.

Der Lagerdruck N muß den beiden Kräften P und Q das Gleichgewicht halten. Seine Wirkungslinie geht demnach durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden Seilkräfte, und seine Größe wird

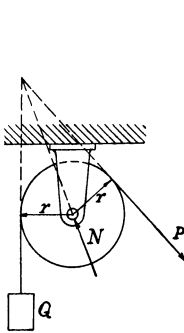


Fig. 229.

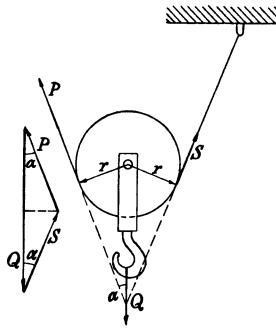


Fig. 230.

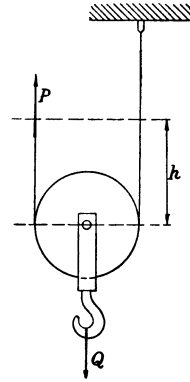


Fig. 231.

durch das parallel zu den drei Wirkungslinien gezeichnete Kräftedreieck bestimmt. Nur, wenn P und Q parallel laufen, wird $N = 2Q$, und seine Wirkungslinie ist dann natürlich ebenfalls parallel zu den der beiden anderen Kräfte.

Die feste Rolle ändert also an den Kraftverhältnissen nichts. Sie dient dazu, die Richtung der Zugkraft in zweckentsprechender Weise zu ändern.

Wird die Anordnung so getroffen, daß die Last Q an der Rolle angreift, während das eine Ende des Seiles festgemacht ist und am anderen die Zugkraft P wirkt (Fig. 230), so besteht ebenfalls nur dann Gleichgewicht, wenn die Wirkungslinien der beiden Seilspannkräfte P und S und die der Last Q sich in einem Punkt schneiden. Das ist nur in dem Fall möglich, daß beide Spannkräfte mit Q denselben Winkel α bilden. Aus der Momentengleichung in bezug auf die Achse der Rolle folgt wieder wie oben $P = S$. Damit ergibt das an die Fig. 230 heran-gezeichnete Kräftedreieck

$$P = \frac{\frac{1}{2}Q}{\cos \alpha}. \quad (205)$$

Erfolgt der Zug P parallel zur Last Q (Fig. 231), so erhält man sofort $P + S = Q$, also

$$P = \frac{1}{2} Q.$$

Bei der losen Rolle ist die Zugkraft gleich der Hälfte der Last, wenn beide Kräfte parallel sind.

Um die Last Q der Strecke h zu heben, ist einerseits das feste Seiltrum um die Länge h zu kürzen, andererseits auch das lose um dieselbe Strecke anzuziehen. Da die Kürzung des ersteren nur durch Hinwegziehen unter der Rolle stattfinden kann, so ist das lose Trum um $2h$ anzuziehen. Man bemerkt, daß das Produkt aus Kraft und Hubhöhe unverändert geblieben ist:

$$Q \cdot h = \frac{1}{2} Q \cdot 2h.$$

Oft werden die feste und die lose Rolle miteinander verbunden (Fig. 232).

Beispiel 128. Anzugeben ist der Weg, den die Mitte der losen Rolle eines Kranes beschreibt.

In Fig. 232 bezeichnen a und b die senkrechten Abstände des Befestigungspunktes A des Seiles und des Berührungspunktes B an der festen Rolle. Man erhält dann in bezug auf die um $\frac{1}{2}a$ bzw. $\frac{1}{2}b$ gegen A und B verschobenen Bezugsachsen aus den ähnlichen Dreiecken mit dem Spitzenwinkel α

$$\frac{x - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a - r - y} = \frac{x + \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a - r + y}$$

oder als Produktgleichung geschrieben

$$(x - \frac{1}{2}b) \cdot (\frac{1}{2}a - r + y) = (x + \frac{1}{2}b) \cdot (\frac{1}{2}a - r - y),$$

woraus durch Auflösen der Klammern folgt

$$x \cdot y = \frac{1}{2}b \cdot (\frac{1}{2}a - r).$$

Ein Vergleich mit Formel (86 b) lehrt¹⁷⁷⁾, daß der Lastangriffspunkt sich auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegt.

Im vorstehenden sind die Seile oder Gurte als vollkommen biegsam angenommen worden. In Wirklichkeit setzen sie jedoch

jeder Krümmung einen gewissen Widerstand entgegen, so daß ein auf eine Rolle auflaufendes Seil nicht plötzlich aus der geraden Linie in die Krümmung vom Halbmesser r übergeht. Die Krümmungsänderung verteilt sich vielmehr auf eine gewisse Strecke, und das untere Ende des Seiles bleibt infolgedessen seitlich um den Betrag e von der Berührungsstelle entfernt (Fig. 233). Beim Abflauen erfolgt der Übergang aus der Krümmung in die gerade Linie ebenfalls wieder allmählich, so daß bei ganz oder nahezu gleichen Seilkräften P und Q das gerade

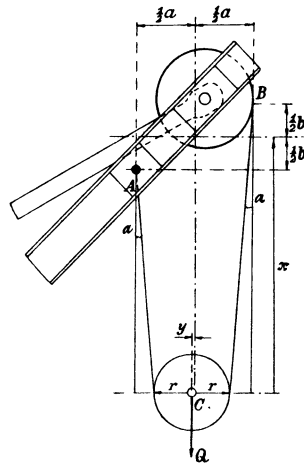


Fig. 232.

¹⁷⁷⁾ Schaefer, D. p. J. 1909.

Seilende unter dem gleichen Winkel φ und um denselben Betrag e näher an die Rollenmitte heranrückt.

Gemessen wird der Biege­widerstand bei geringer Geschwindigkeit, indem man den Gurt oder das Seil über eine Scheibe legt, deren Achse auf der wagerechten glatten Ebene rollt, sobald das Drehmoment von P das von Q überwiegt¹⁷⁸⁾. Im Grenzfall des Gleichgewichtes gilt also

$$P \cdot (r \cdot \cos \varphi - e) = Q \cdot (r \cdot \cos \varphi + e),$$

mithin

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 + \frac{e}{r \cdot \cos \varphi}}{1 - \frac{e}{r \cdot \cos \varphi}}$$

und nach Ausführung der Division

$$P = Q \cdot \left(1 + \frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} \right), \quad (206)$$

da die weiteren Glieder verschwindend klein werden.

Der Betrag $Q \cdot \frac{2e}{r \cdot \cos \varphi}$ heißt der Biege­widerstand des Seiles oder Gurtes.

Für sechslitzige Drahtseile von der Stärke s cm im Kreuzschlag, wo also die Litzen nach der entgegengesetzten Seite gewunden sind wie die Drähte in den Litzen, ist¹⁷⁹⁾ auf der Rolle vom Halbmesser r cm bei Belastung durch Q kg

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} = \frac{60}{r - 5} + 0,5 \cdot s^2, \quad (207)$$

und zwar ist die Schmierung des Seiles ohne Einfluß darauf.

Bei Hanfseilen ist¹⁸⁰⁾, je nachdem sie lose oder fest¹⁸¹⁾ geschlagen sind, i. M.

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} \sim \frac{1}{10} \cdot \frac{s^2}{r} \quad \text{bzw.} \quad 0,13 \cdot \frac{s^2}{r}. \quad (208)$$

Bei Gurten ist aus den S. 240 erörterten Gründen eine gewisse Abhängigkeit von der Gurtgeschwindigkeit festgestellt worden¹⁸²⁾. Trägt man die Messungsergebnisse in logarithmischen Koordinaten auf, so ergibt sich mit guter Annäherung für genähte Tuchgurte aus Baumwolle oder Hanf

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} = 2,68 \cdot \frac{s}{r} \cdot v^{1/2}, \quad (209)$$

¹⁷⁸⁾ v. Hanffstengel, Z. d. V. d. I. 1913.

¹⁷⁹⁾ Hirschland, D. p. J. 1906.

¹⁸⁰⁾ Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, 1877/81.

¹⁸¹⁾ Redtenbacher, Der Maschinenbau, 1862/65.

¹⁸²⁾ v. Hanffstengel, Mitt. d. V. d. I. über Forschungsarbeiten Heft 145, 1913.

worin die Geschwindigkeit v in m/sk einzusetzen ist. Für aus s Baumwolltuchlagen von je 0,10 cm Stärke zusammengeklebte Balatagurte mit einer Balata-deckschicht auf der einen Seite ist

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} = 1,61 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{1,37} \cdot v^{\frac{1}{2}}, \quad (210)$$

für aus s Baumwolltuchlagen von je 0,10 cm Stärke zusammengeklebte Gummigurte mit beiderseitiger Deckschicht von Gummi ist

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} = 1,07 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{1,09} \cdot v^{\frac{1}{2}}, \quad (211)$$

Die Versuche und Formeln decken das Gebiet

$$0,015 > \frac{s}{r} > 0,050 \quad \text{und} \quad 0,2 > v > 4 \text{ m/sk.}$$

Für einfache Ledertreibriemen gewöhnlicher Gerbung könnte man hiernach etwa schätzungsweise setzen

$$\frac{2e}{\cos \varphi} = 2,6 \left(\frac{s}{r}\right)^{1,2} \cdot v^{\frac{1}{2}},$$

womit ein Einzelversuch des Verfassers ungefähr übereinstimmt.

Bei Gliederketten ruft die Reibung der einzelnen Kettenglieder aneinander dieselbe Erscheinung hervor.

Je nachdem die Kette geschmiert ist oder nicht, gilt etwa ¹⁸⁰⁾ bei der Ketten-eisenstärke s

$$\frac{2e}{r \cdot \cos \varphi} = 0,1 \frac{s}{r} \quad \text{bzw.} \quad 0,15 \frac{s}{r}. \quad (212)$$

Bei Gelenkbolzenketten mit dem Bolzendurchmesser d ist unter der Kettenzugkraft Q das Moment der Zapfenreibung gemäß Formel (57)

$$M = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot Q \cdot d.$$

Um also die Biegung der Kette beim Auflaufen auf die Scheibe vom Halbmesser r hervorzurufen, ist die Zusatzkraft

$$Q' = \frac{M}{r} = \mu \cdot Q \cdot \frac{d}{2r}$$

nötig. Beim Ablauen von der Scheibe ist die Biegung wieder rückgängig zu machen, also ein gleiches Moment aufzuwenden. Demnach gilt für die Zugkraft P auf der Gegenseite der Scheibe

$$P = Q + 2Q' = Q \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{d}{r}\right). \quad (213)$$

Für gut geschmierte Stahlbolzenketten ergeben die Versuche ¹⁸²⁾

$$\mu = 0,10 \div 0,11,$$

für gut geschmierte Treibketten, die roher gearbeitet sind,

$$\mu = 0,13 \div 0,15.$$

Die niedrigeren Werte gelten für große Ketten, die höheren für kleine.

Zu beachten ist, daß bei den Stahlbolzenketten das Schmieröl aus den nicht mit Schmiernuten versehenen Auflagerflächen sehr bald herausgedrückt wird.

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich leicht bei i losen Rollen

$$P = \frac{Q}{2^i \cdot \eta^{i+1}} + \frac{G}{\eta} \cdot \left[\left(\frac{1}{2\eta} \right) + \left(\frac{1}{2\eta} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2\eta} \right)^i \right].$$

Der Klammerausdruck ist eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a = \frac{1}{2\eta}$ und dem Quotienten $q = \frac{1}{2\eta}$. Die Summe einer solchen Reihe von i Gliedern stellt sich dar als

$$\Sigma = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^{i-1}.$$

Ohne weiteres ergibt sich

$$q \cdot \Sigma = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^i.$$

Durch Subtraktion beider Reihen folgt

$$(q - 1) \cdot \Sigma = a \cdot (q^i - 1),$$

also die Summe

$$\Sigma = a \cdot \frac{q^i - 1}{q - 1}. \tag{215}$$

Damit erhält man schließlich

$$P = 2Q \cdot \left(\frac{1}{2\eta} \right)^{i+1} + 2G \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\eta} \right)^2 - \left(\frac{1}{2\eta} \right)^{i+2}}{1 - \frac{1}{2\eta}}. \tag{216}$$

Man entnimmt der Fig. 234, daß wenn die Last Q um eine Strecke h gehoben wird, die Kraft Q' bereits um $2h$ wandern muß und Q'' um $4h$, Q''' um $8h$, also allgemein P um $2^i \cdot h$.

Aus diesem Grunde heißt die Anordnung Potenzflaschenzug. Er ist im allgemeinen praktisch unbrauchbar und wird nur bei einzelnen Aufzügen zur Hubverminderung des die Stellung des Fahrkorbes anzeigenden Seiles benutzt.

Beispiel 129. Der Hubanzeiger eines Lastenaufzuges von $h = 18$ m Hubhöhe soll nur etwa $h_1 = \frac{1}{2}$ m Länge erhalten. Wieviel lose Rollen sind dem Potenzflaschenzug zu geben.

Aus dem Zusammenhang $h = 2^i \cdot h_1$ erhält man

$$2^i = \frac{h}{h_1} = \frac{18}{0,5} = 36,$$

also $i \approx 5$

und damit

$$h_1 = \frac{h}{2^5} = \frac{18}{32} = 0,5625 \text{ m.}$$

Der Wirkungsgrad hat hier kein Interesse.

Der gewöhnliche Flaschenzug besteht aus zwei Flaschen, worin die Rollen meistens auf derselben Achse nebeneinander angeordnet

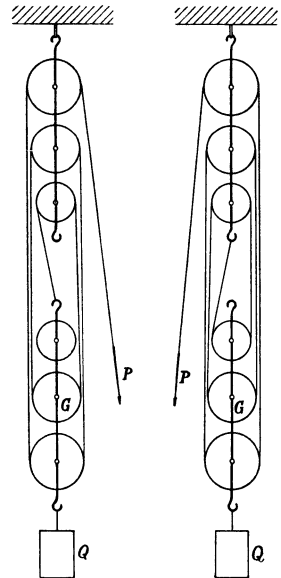


Fig. 235.

Fig. 236.

bei den halbumspannten Rollen

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + 0,15 \cdot \frac{3,2 \cdot 2}{71,1} + 2 \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{6} = 1,0162 : \eta_1 = 0,984,$$

bzw. mit $D = 37,5 \text{ cm}$ $\frac{1}{\eta_1} = 1,0283 : \eta_1 = 0,973,$

bei den viertelumspannten Rollen

$$\frac{1}{\eta_2} = 1 + 0,15 \cdot \frac{3,2 \cdot 2}{71,1} + 2 \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 1,0154 : \eta_2 = 0,985,$$

bei den achtelumspannten Rollen mit $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = 0,383$

$$\frac{1}{\eta_3} = 1 + 0,15 \cdot \frac{3,2 \cdot 2}{71,1} + 2 \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,383 = 1,0145 : \eta_3 = 0,987.$$

Es sind nun vorhanden 2 halbumspannte Rollen von 71,1 bzw. 37,5 cm Durchmesser, 2 viertelumspannte von 71,1 cm Durchmesser und 2 gleich große achtelumspannte. Somit ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_\Sigma = 0,984 \cdot 0,973 \cdot (0,985 \cdot 0,987)^2 = 0,906.$$

Damit wird

$$P = \frac{Q}{3 \cdot \eta_\Sigma} = \frac{30}{3 \cdot 0,906} = 11,05 \text{ t.}$$

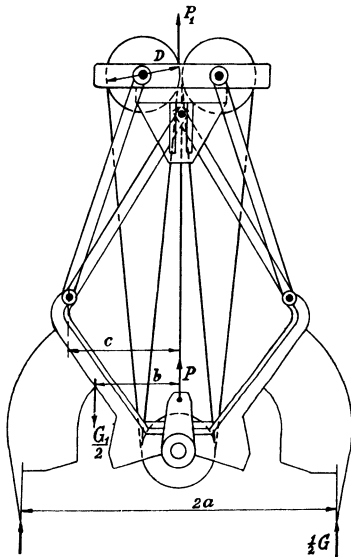


Fig. 239.

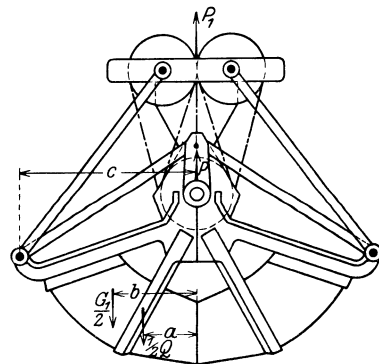


Fig. 240.

Beispiel 132. Auf den in Fig. 239 dargestellten Selbstgreifer¹⁸⁵⁾ mit einem Paar vierrolliger Flaschenzüge wirken bei Beginn des Greifens sein ganzes Eigengewicht $G = 2200 \text{ kg}$, das Gewicht des Unterteiles $G_1 = 1600 \text{ kg}$. Zu berechnen ist der Flaschenzug, dessen Rollen $D = 36 \text{ cm}$ Durchmesser haben, bei einem Drahtseil von $s = 1,8 \text{ cm}$ Durchmesser, bestehend aus $6 \cdot 30$ Drähten von je $0,8 \text{ mm}$ Stärke. Gegeben seien noch die Abstände $a = 84 \text{ cm}$, $b = 55 \text{ cm}$, $c = 59 \text{ cm}$, ferner die inneren Nabendurchmesser der Rollen $d = 8 \text{ cm}$.

Die erforderliche Zugkraft eines Flaschenzuges ist gemäß Fig. 239

$$P = \frac{1}{c} \cdot \left[\frac{G_1}{2} \cdot (c - b) + \frac{G}{2} \cdot (a - c) \right],$$

$$P = \frac{1}{59} \cdot (800 \cdot 4 + 1100 \cdot 25) = \frac{30800}{59} = 523 \text{ kg.}$$

¹⁸⁵⁾ Heinold, Z. d. V. d. I. 1916.

Der Wirkungsgrad einer Rolle bestimmt sich nach den Formeln (214) und (207) mit $\mu_1 = 0,10$ für die oft mangelhaft geschmierten, in Staub arbeitenden Zapfen, wenn noch die mittlere Seilkraft zu 160 kg geschätzt wird, aus

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{60}{160} + 0,50 \cdot \frac{1,8^2}{18 - 5} + 2 \cdot 0,10 \cdot \frac{8}{36} = 1,15$$

zu

$$\eta = 0,87.$$

Damit wird der Gesamtwirkungsgrad des Flaschenzuges nach Formel (219)

$$\eta_{\Sigma} = \frac{0,87}{4} \cdot \frac{1 - 0,87^2}{0,13} = 0,715.$$

und die Zugkraft am Seilende

$$P_1 = \frac{P}{i \cdot \eta_{\Sigma}} = \frac{523}{4 \cdot 0,715} = 183 \text{ kg.}$$

Auf den geschlossenen Greifer, der $Q = 0,6 \text{ m}^3$ Koks = 300 kg faßt, wirken die in Fig. 240 eingetragenen Kräfte an den Abständen $a = 38 \text{ cm}$, $b = 42 \text{ cm}$, $c = 94,5 \text{ cm}$. In dem Fall wird

$$P = \frac{1}{94,5} \cdot (150 \cdot 56,5 + 800 \cdot 52,5) = 534 \text{ kg.}$$

Der Greifer ist so gebaut, daß die erforderliche Flaschenzugkraft P während des ganzen Schließweges sich nur zwischen den angegebenen Grenzen ändert, also nahezu unveränderlich bleibt.

Für viele Zwecke ist ein Flaschenzug erwünscht, der selbstsperrend ist, was allerdings am einfachen Flaschenzug durch Anbringung einer selbsttätigen Seilklemme auch erreicht werden kann¹⁸⁶⁾. Vor der Einführung des Beckerschen Schraubenflaschenzuges (Beispiel 127) benutzte man in solchen Fällen den Ketten-Differentialflaschenzug nach Fig. 241, der bei nur drei Rollen eine sehr große Übersetzung liefert¹⁸⁷⁾.

Die endlose Kette läuft auf die obere kleine Rolle vom Halbmesser r_1 bei B ungespannt auf, während sie auf der anderen Seite bei C mit etwa $\frac{1}{2}Q$ angezogen wird. Um die Kette auf der Rolle festzuhalten, müssen also die oberen, fest miteinander verbundenen Räder mit zahnartigen Vorsprüngen versehen sein, die in die Kette eingreifen.

Ist auf der Zugseite der Unterflasche bei F die Kettenspannkraft P' , so beträgt sie auf der anderen Seite bei E $P' \cdot \eta$, und es gilt

$$Q = P' + P' \cdot \eta = P' \cdot (1 + \eta).$$

Für die oberen beiden Räder ist zu beachten, daß das Drehmoment des ablaufenden Trums stets das $\frac{1}{\eta}$ fache des des auflaufenden Trums

¹⁸⁶⁾ Heinrich Kessler, Oberlahnstein.

¹⁸⁷⁾ Weston, 1861.

ist, wie das im vorstehenden auch an der Unterflasche festgestellt wurde. Es gilt demnach gemäß Fig. 241

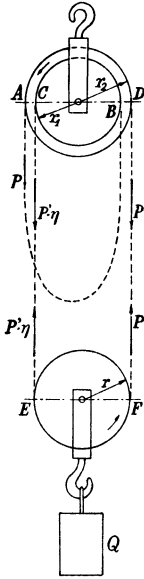


Fig. 241.

$$P \cdot r_2 + P' \eta \cdot r_1 = (0 \cdot r_1 + P' \cdot r_2) \cdot \frac{1}{\eta}.$$

Wird hierin eingesetzt $P' = \frac{Q}{1 + \eta}$, so folgt

$$P = Q \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (220)$$

Setzt man vorübergehend $\eta = 1$, so wird

$$P_0 = Q \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right),$$

also der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_{\Sigma} = \frac{P_0}{P} = \frac{1 + \eta}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{1 - \frac{r_1}{r_2}}{\frac{1}{\eta^2} - \frac{r_1}{r_2}} \quad (221)$$

Der Formel ist zu entnehmen, daß die Zugkraft P recht klein wird, wenn das Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ sich der 1 nähert. Gebräuchlich sind die Werte

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{11}{12} \quad \text{bzw.} \quad \frac{14}{15}.$$

Wird die Kette bei A um die Strecke l abwärts gezogen, so geht sie bei D um denselben Betrag in die Höhe. Damit rollt das andere Lasttrum bei C um $l \cdot \frac{r_1}{r_2}$ ab. Die beiden Kettenträger, an denen die Last hängt, werden also insgesamt um den Betrag $l - l \cdot \frac{r_1}{r_2}$ gekürzt und die Last somit um die Hälfte gehoben. Man erhält so bei dem Lastweg h

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (222)$$

16. Die Bandreibung.

Wird ein an dem einen Ende mit der Kraft S_1 angespanntes Band oder Seil über eine feststehende Scheibe hinweggezogen, so ist dazu eine erheblich größere Zugkraft S_2 am anderen Ende aufzuwenden (Fig. 242).

Es werde zur Bestimmung des Zusammenhanges innerhalb des umfaßten Winkels α ein Bogenteilchen $d\alpha$ herausgegriffen. Das zugehörige Teilchen des Seiles steht auf der einen Seite unter der Spannkraft S ,

auf der anderen Seite ist sie auf $S + dS$ gestiegen. Denn es ist zu S noch die Reibungskraft $\mu \cdot N$ hinzugekommen, entgegengesetzt zu der in Fig. 243 angegebenen Richtung.

Da dS gegenüber S verschwindet, so ergibt sich aus dem Kräfte-dreieck der Fig. 244 ohne weiteres

$$\frac{1}{2} N = S \cdot \sin \frac{1}{2} d\alpha$$

oder, da bei kleinen Winkeln der Sinus gleich dem Bogen ist,

$$N = S \cdot d\alpha .$$

Somit wird

$$dS = \mu \cdot S \cdot d\alpha .$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot d\alpha .$$

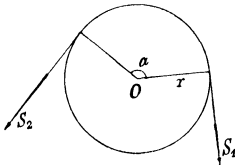


Fig. 242.

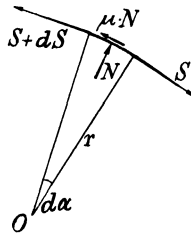


Fig. 243.

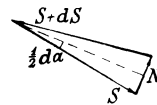


Fig. 244.

Die Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen S_1 und S_2 ergibt nach Formel (142) in Bd. I

$$\log \text{nat } S_2 - \log \text{nat } S_1 = \log \text{nat } \frac{S_2}{S_1} = \mu \cdot \alpha ,$$

und man erhält, wenn zum Numerus übergegangen wird¹⁸⁸⁾,

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu \cdot \alpha} . \tag{223}$$

Das Verhältnis der beiden Spannkraften hängt nur von der Größe der Reibungsziffer und des umfaßten, in Bogenmaß gemessenen Winkels ab, und nicht vom Halbmesser der Scheibe, deren Umfang also jede beliebige ausgebauchte Krümmung haben kann.

Die Formel (223) gilt, wenn die Richtung der Bewegung mit der der Kraft S_2 übereinstimmt. Bewegt sich das Band entgegengesetzt nach der Richtung der Kraft S_1 unter dem Gegenzug S_2 , so hat $\mu \cdot N$ die in Fig. 243 eingetragene Richtung, und es folgt durch die gleiche Überlegung wie oben

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{-\mu \cdot \alpha} = \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha}} \tag{224}$$

¹⁸⁸⁾ Euler, Petersburger Abh. 1765. Eytelwein, Handbuch der Mechanik fester Körper, 1842.

Die Größe des Wertes $e^{\mu \cdot \alpha}$ in Abhängigkeit von dem Winkel α und der Reibungsziffer μ gibt die Fig. 245 an.

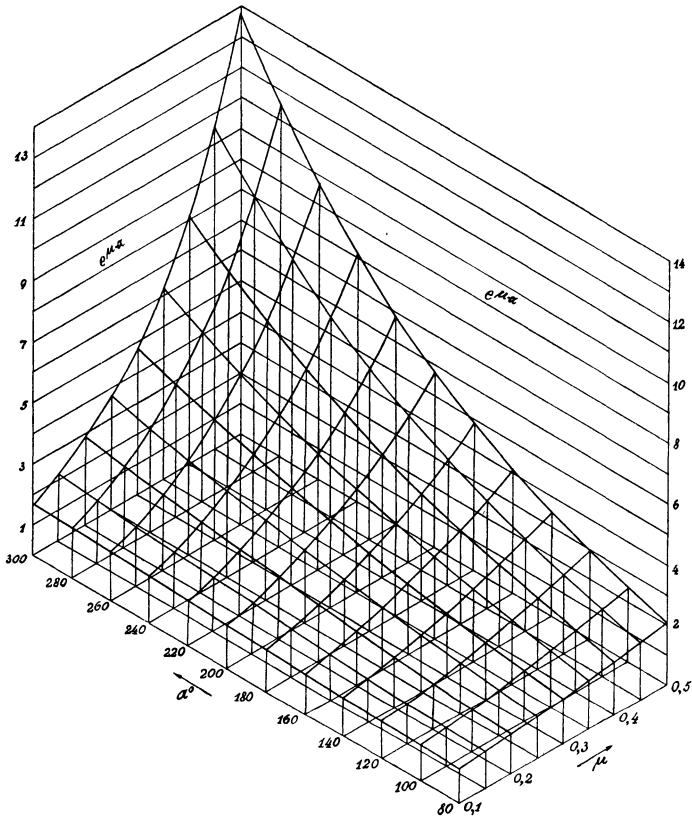


Fig. 245.

Für die Reibungsziffer ist anzusetzen
 bei Hanfseilen³⁰⁾ auf Eisentrommeln $\mu \approx 0,25$,
 „ „ „ „ Holztrommeln $\mu \approx 0,40$,
 „ runden, gefetteten Drahtseilen¹⁸⁸⁾ auf Gußeisen . $\mu = 0,13$,
 „ „ „ „ „ „ Eichenholz $\mu = 0,16$,
 „ „ „ „ „ „ Leder . . . $\mu = 0,16$,
 „ flachen Drahtseilen¹⁹⁰⁾ auf

	trocken	gewöhnlich geschmiert	stark geschmiert
Eichenholz . . .	0,65	0,21	0,15
Pappelholz . . .	0,65	0,32	0,17
Weißbuche . . .	0,65	0,13	0,10
Leder	0,17	0,16	0,12

bei Stahlbremsbändern³⁰⁾ auf Gußeisenscheiben $\mu \approx 0,18$.

¹⁸⁹⁾ Baumann, Preuß. Z. f. Berg-, Hütten- u. Salinenwesen, 1883.

¹⁹⁰⁾ Köttgen, Z. d. V. d. I. 1902.

Beispiel 133. Die Last $Q = 100$ kg soll langsam heruntergelassen werden, indem das Hanfseil über eine festliegende hölzerne Walze gleitet, die es mit dem Winkel $\alpha = 90^\circ$ umspannt (Fig. 246). Anzugeben ist die gegenhaltende Zugkraft P .

Man entnimmt der Zusammenstellung $\mu = 0,40$ und der Fig. 245 $e^{\mu \cdot \alpha} = 1,88$. Somit liefert Formel (224)

$$P = \frac{Q}{e^{\mu \cdot \alpha}} = \frac{100}{1,88} = 53 \text{ kg.}$$

Beispiel 134. Über eine gußeiserne Spilltrommel läuft ein Hanfseil. Anzugeben ist der Spannungswinkel α , der nötig ist, damit die Last $Q = 500$ kg durch eine Kraft $P = 5$ kg angezogen wird.

Es ist anzusetzen $\mu = 0,25$. Die Herleitung der Formel (223) ergibt $\mu \cdot \alpha = \log \text{nat} \frac{Q}{P}$, also

$$\alpha = 4 \cdot \log \text{nat} \frac{500}{5} = 4 \cdot \frac{\log 100}{\log e} = 4 \cdot \frac{2}{0,43429},$$

$$\alpha = 18,46 = 5,89 \cdot \pi,$$

d. h. es sind nahezu 3 volle Umschlingungen nötig.

Beispiel 135. Bei kurzen Drahtseilbahnen genügt eine halbe Umschlingung des Zugseiles aus Stahldraht auf der ledergefütterten Antriebsscheibe, für die $\mu = 0,16$ ist. Rechnet man noch mit $\frac{1}{3}$ facher Sicherheit im Fall besonderer Bewegungswiderstände oder frisch geschmierten Seiles, so daß μ bis auf 0,12 heruntergehen kann, so ist bei $\alpha = \pi$ das zulässige Verhältnis der beiden Seilspannkraft

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{0,12 \cdot \pi} = 1,458.$$

Bei einem größeren Verhältnis der Spannkraften wird die in Fig. 247 dargestellte Anordnung getroffen, mit einer vorgelegten Scheibe. Aus den beiden Beziehungen, die die Figur angibt,

$$\frac{a_1}{D} = \frac{a_2}{0,9 \cdot D} \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 = 1,2 \cdot D,$$

folgt leicht

$$a_1 = 0,632 \cdot D$$

und damit

$$\sin \beta = \frac{0,5}{0,632} = 0,7785,$$

also $\beta \approx 51^\circ$.

Der umschlossene Winkel ist mithin

$$\alpha = 2 \cdot (\pi + \beta) = 462^\circ = 8,06,$$

und man erhält so

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{0,12 \cdot 8,06} = 2,63.$$

Die Gegenscheibe am anderen Ende der Bahn steht unter dem Einfluß eines Spanngewichtes Q , so daß dort nach den Regeln für die lose Rolle die Spannkraften sind $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} Q$.

Liegt die Gegenscheibe höher als der Antrieb, so ist sie natürlich festzulegen und die Spanscheibe muß mit dem Antrieb zusammengelegt werden, wie Fig. 248

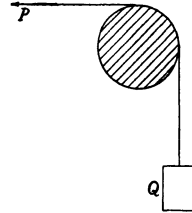


Fig. 246.

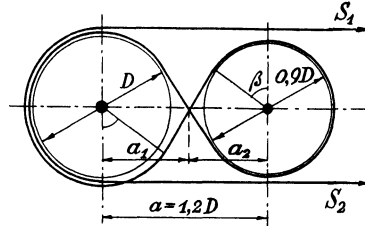


Fig. 247.

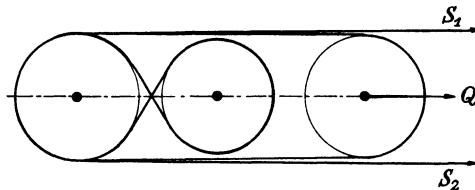


Fig. 248.

zeigt, mit einer losen Scheibe auf der Achse der zweirilligen Antriebsscheibe. Es ist dann $S_1 = \frac{1}{2} Q$, also $S_2 = 1,315 Q$. Wenn die Stärke des Zugseiles es erlaubt, kann man hiernach die Übertragung durch Vergrößerung des Spannunggewichtes Q bis zu einem gewissen Grade verbessern. Darüber hinaus ist die Antriebsscheibe dreirillig auszuführen.

Unter gewöhnlichen Betriebsverhältnissen mit $\mu = 0,16$ erhält man bei halb-
 umspannter Scheibe $\frac{S_2}{S_1} = 1,655$ und bei der zweirilligen Scheibe mit der vor-
 gelegten Hilfsscheibe $\frac{S_2}{S_1} = 3,63$. Man bemerkt, daß eine gar nicht so erhebliche
 Erhöhung der Reibungsziffer das Verhältnis $\frac{S_2}{S_1}$ bei größerem Winkel α ganz
 bedeutend verbessert.

Wenn das Verhältnis $\frac{S_2}{S_1}$ einen kleineren Wert annimmt, als die
 Zahl $e^{\mu \cdot \alpha}$ beträgt, so ändert sich bei im allgemeinen gleichbleibender
 Reibungsziffer μ einzig der Winkel derart, daß die Spannkraft S_1 auf
 einem Ruhewinkel α_1 unverändert bleibt und erst in dem darauffolgenden
 Gleitwinkel α_2 sich stetig von S_1 auf S_2 vergrößert¹⁸⁰⁾. Naturgemäß ist
 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, und α_2 bestimmt sich aus Formel (223) zu

$$\text{arc } \alpha_2 = \frac{1}{\mu} \cdot \log \text{nat } \frac{S_2}{S_1}.$$

Ist an einer Welle das Drehmoment M durch ein die Bremscheibe
 vom Halbmesser r mit dem Winkel α umfassendes Stahlband abzu-
 bremsen, so ist die auf den Umfang des Rades bezogene Bremskraft
 $Q = M$. Zwischen den beiden Spannkraften S_1 im ablaufenden und S_2
 im auflaufenden Trum des Bremsbandes (Fig. 249) herrscht dann die
 aus der Momentengleichung in bezug auf die Achse folgende Beziehung

$$S_2 - S_1 = Q.$$

Wird hierin die Gleichung (223) eingesetzt, so wird

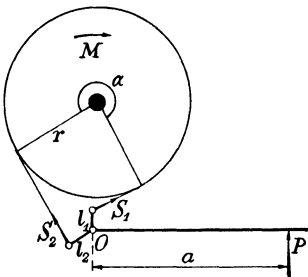


Fig. 249.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{M}{r} \cdot \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1}, \\ S_2 &= \frac{M}{r} \cdot \frac{e^{\mu \cdot \alpha}}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1}. \end{aligned} \quad (225)$$

In bezug auf die feste Drehachse O
 des Bremshebels gilt nun

$$+S_2 \cdot b_2 + S_1 \cdot b_1 + P \cdot a = 0, \quad (226)$$

worin die am Hebel in demselben Sinn wie
 das abzubremsende Moment M an der
 Scheibe drehenden Momente positiv gerechnet werden. Mit den vor-
 stehenden Gleichungen folgt hieraus

$$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = \frac{e^{\mu \cdot \alpha} + \frac{b_1}{b_2}}{1 - e^{\mu \cdot \alpha}}. \quad (227)$$

Hierin ist das Verhältnis $\frac{b_1}{b_2}$ positiv einzusetzen, wenn die beiden Drehmomente $S_1 \cdot b_1$ bzw. $S_2 \cdot b_2$ am Hebel in demselben Sinne drehen, anderenfalls negativ.

Beispiel 136. Es seien die verschiedenen Anordnungen der Bandbremsen gemäß Formel (227) zu untersuchen¹⁹¹⁾.

Der einfachste Fall ist $b_1 = 0$, d. h. das Bremsband ist mit dem ablaufenden Ende beliebig am Gestell befestigt. Da immer $e^{\mu \cdot \alpha} > 1$ ist, so wird $\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2}$ negativ und es sind die beiden Ausführungen der Fig. 250 und 251 möglich:

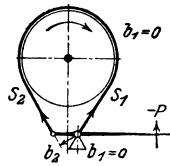


Fig. 250.

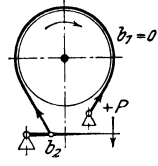


Fig. 251.

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -\infty$	-3	-2	-1,67	-1,5	-1.

Die Anordnung ist unzweckmäßig, da der Zahlenwert des Verhältnisses $\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2}$ immer sehr groß ausfällt, wie die Zusammenstellung ergibt, die die praktisch vorkommenden Werte zwischen senkrechten Strichen enthält.

Ist $+1 > \frac{b_1}{b_2} > 0$, so ergibt sich für den mittleren Wert $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ die folgende Zusammenstellung:

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -\infty$	-4	-2,5	-2	-1,75	-1.

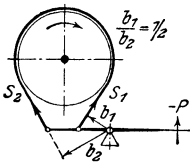


Fig. 252.

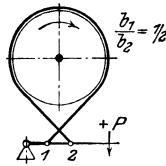


Fig. 253.

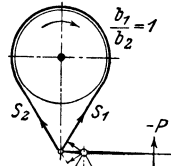


Fig. 254.

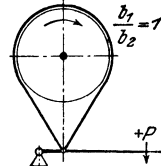


Fig. 255.

Abgesehen davon, daß der Fall der Fig. 253 praktisch nicht gut zu verwirklichen ist, ist die Anordnung nach Fig. 252 noch ungünstiger als die ersten.

Ist $\frac{b_1}{b_2} = +1$, so erhält man

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -\infty$	-5	-3	-2,33	-2	-1.

Es entstehen die Ausführungen nach Fig. 254 und 255, die den Vorteil bieten, für beide Drehrichtungen der Bremscheibe dieselbe Wirkung zu ergeben. Freilich sind die erforderlichen Kräfte P recht bedeutend.

¹⁹¹⁾ Siebeck, Z. d. V. d. I. 1910.

Wird $\frac{b_1}{b_2} > +1$, so ergeben sich die Fig. 256 und 257. Für $\frac{b_1}{b_2} = 2$ ist beispielsweise

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -\infty$	-7	-4	-3	-2,5	-1.

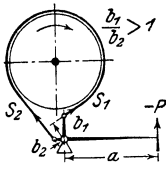


Fig. 256.

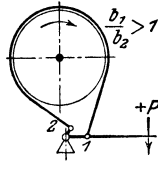


Fig. 257.

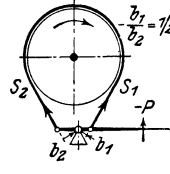


Fig. 258.

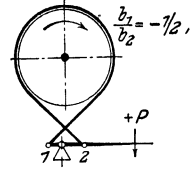


Fig. 259.

Man erkennt, daß die Ausführungen mit positivem Verhältnis $\frac{b_1}{b_2}$ um so ungünstiger werden, je größer es ist.

Es sei nun $0 > \frac{b_1}{b_2} > -1$, beispielsweise etwa $\frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{2}$. Dann ergeben sich die Fig. 258 und 259, wovon die letztere wieder praktisch unbrauchbar ist.

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -\infty$	-2	-1,5	-1,33	-1,25	-1.

Die Verhältnisse sind gegenüber der ersten Anordnung schon günstiger geworden.

Bei $\frac{b_1}{b_2} = -1$ wird für jeden Wert von $e^{\mu \cdot \alpha} \frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = -1$, und die Anordnung wäre die der Fig. 260 (die der Fig. 259 entsprechende wird beiseite gelassen). Bei kleinem Ausschlag des Hebels tritt überhaupt keine Bremsung ein, sondern erst bei ziemlich großem, weil dann die Hebelarme b_1 und b_2 infolge der Drehung verschieden groß werden.

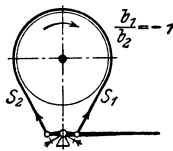


Fig. 260.

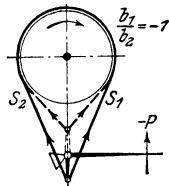


Fig. 261.

Die Anordnung ist für wechselnde Drehrichtung der Scheibe verwendbar, weil sie kräftiger wirkt als die der Fig. 254, wenn der Bremshebel so bewegt wird, daß dabei $b_2 > b_1$ wird. Für die entgegengesetzte Bewegung des Hebels ist sie unbrauchbar, denn wenn die Bremse unbelastet angespannt wird, wie bei Gewichtsbelastung und elektromagnetischer Auslösung, so wird die Spannkraft im Band überall dieselbe

$$S = - \frac{P \cdot a}{b_2 \cdot \left(\frac{b_1}{b_2} + 1 \right)},$$

also im vorliegenden Fall, wo der Klammerausdruck 0 ist, $S \rightarrow \infty$: die Bremse wird zu Bruch gehen. Eine andere Ausführungsform ist die der Fig. 261.

Es sei jetzt $-1 > \frac{b_1}{b_2} > -e^{\mu \cdot \alpha}$ (Fig. 262). Dann gilt die folgende Zusammenstellung für $\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2}$:

$e^{\mu \cdot \alpha} =$	1,5	2	2,5	3
$\frac{b_1}{b_2} = -1,5$	0	-0,5	-0,667	-0,75
-2	-	0	-0,333	-0,50
-2,5	-	-	0	-0,25

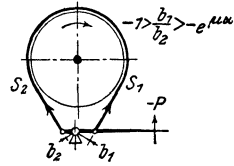


Fig. 262.

Man entnimmt der Fig. 262, daß bei Bewegung des Hebels in Richtung der eingetragenen Kraft P das Band von der Scheibe abgehoben, d. h. die Bremse gelöst wird. Die Anordnung ist also selbstsperrend, und man erhält, wenn in der Hebelgleichung $P \cdot a = 0$ gesetzt wird, mit $S_2 = S_1 + Q$

$$S_1 = -\frac{Q}{1 + \frac{b_1}{b_2}}, \quad S_2 = +\frac{Q \cdot \frac{b_1}{b_2}}{1 + \frac{b_1}{b_2}}. \quad (228)$$

Die Werte sind größer als die der Gleichungen (223) für S_1 und S_2 . Die Differentialbremsen mit Selbstsperrung gemäß der vorstehenden Darlegungen sind aber im allgemeinen unbrauchbar, weil sie bei hinreichend großer Umfangskraft Q und gegebener Belastung P des Hebels wohl sperren, dagegen bei kleiner werdendem Q die Scheibe gleiten lassen.

Macht man jetzt $\frac{b_1}{b_2} = -e^{\mu \cdot \alpha}$, so wird $\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = 0$. Damit ist die Grenze des Selbstsperrungsgebietes erreicht.

Wählt man $\frac{b_1}{b_2} < -e^{\mu \cdot \alpha}$, so gilt die folgende Zusammenstellung für $\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2}$:

$e^{\mu \cdot \alpha} =$	1,5	2	2,5
$\frac{b_1}{b_2} = -1,5$	0	-	-
-2	+1	0	-
-2,5	+2	+0,5	0
-3	+3	+1	+0,333
-4	+5	+2	+1

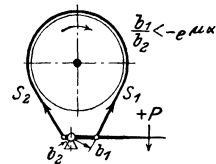


Fig. 263.

Die Anordnung ist die der Fig. 263; es ist das das praktisch benutzte Gebiet der Differentialbremse.

Wird schließlich $b_2 = 0$ gesetzt, also

$$\frac{b_1}{b_2} = -\infty,$$

so wird

$$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} = \frac{1}{1 - e^{\mu \cdot \alpha}}.$$

Dem entspricht die häufige Anordnung nach Fig. 264 und 265, und es gilt die Zusammenstellung:

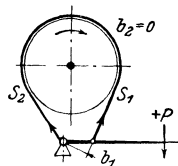


Fig. 264.

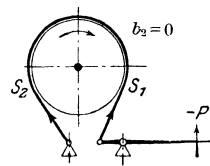


Fig. 265.

$e^{\mu \cdot \alpha} =$	1	1,5	2	2,5	3	∞ ,
$\frac{P \cdot a}{Q \cdot b_2} =$	$-\infty$	-2	-1	-0,667	-0,50	0.

Ein Vergleich mit der ersten Zusammenstellung für $b_1 = 0$ lehrt, daß jene Anordnung bei genau gleichen konstruktiven Maßnahmen eine sehr viel größere Bremskraft P erfordert als die vorliegende, also unzweckmäßig ist.

Beispiel 137. Eine Spreizringkupplung nach Fig. 266 habe den Durchmesser $D = 50$ cm, die Ringbreite $b = 9$ cm, der anpressende Schubkeil habe die Neigung $1 : 5$ auf beiden Seiten. Zu berechnen ist das übertragene Drehmoment M ¹⁹²).

Der Neigung $\operatorname{tg} \alpha = 1 : 5$ entspricht der Winkel $11^\circ 20'$, so daß der Spreizring auf dem Bogen $\alpha = 337^\circ = 5,882$ anliegt. Mit $\mu = 0,18$ für trockene Flächen wird $e^{\mu \cdot \alpha} = 2,88$. Da der Schubkeil geölt wird, so muß man damit rechnen, daß die Anlagefläche etwa die Reibungsziffer $\mu = 0,12$ haben kann, der $e^{\mu \cdot \alpha} = 2,03$ entspricht.

Ruft der Schubkeil auf der einen Seite die Spreizringspannkraft S_1 hervor, so ist sie auf der anderen Seite $S_2 = S_1 \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$. Dazu tritt noch eine Spannkraft $S_0 \approx 30$ kg, die aufzuwenden ist, um den lose in der Trommel sitzenden Ring auf den Trommeldurchmesser aufzubiegen. Man erhält so als Zugkraft am Keil gemäß Beispiel 57

$$P = (S_0 + S_1) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) + (S_0 + S_2) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

und als übertragenes Moment

$$M = (S_2 - S_1) \cdot \frac{D}{2}.$$

Nun ist die Anpressungskraft N an einer beliebigen Stelle nach Fig. 244 $N = S \cdot d\alpha$, und nach den obigen Angaben gilt

$$N = b \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha \cdot p,$$

also durch Gleichsetzen beider Ausdrücke

$$p = \frac{2 \cdot S}{b \cdot D}.$$

Damit die Abnutzung beim Einrücken nicht zu groß wird, ist der größte zugelassene Anpressungsdruck zwischen Gußeisenflächen $p_{\max} = 15$ at. Hieraus folgt

$$S_2 = b \cdot \frac{D}{2} \cdot p_{\max} = 9 \cdot 25 \cdot 15 \approx 3380 \text{ kg,}$$

also

$$S_1 = \frac{S_2}{e^{\mu \cdot \alpha}} = \frac{3380}{2,03} \approx 1660 \text{ kg,}$$

im ungünstigen Fall, und bei fehlender Schmierung

$$S'_1 = \frac{3380}{2,88} \approx 1170 \text{ kg.}$$

Dem entspricht der kleinste Anpressungsdruck

$$p_1 = \frac{15}{2,03} = 7,4 \text{ at}$$

bzw.

$$p'_1 = \frac{15}{2,88} = 5,2 \text{ at.}$$

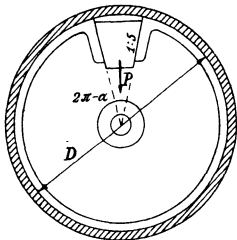


Fig. 266.

¹⁹²⁾ Eberle, Z. d. V. d. I. 1908.

Das übertragene Drehmoment ist nun

$$M = (3380 - 1660) \cdot 0,25 = 430 \text{ cm/kg}$$

bzw.

$$M' = (3380 - 1170) \cdot 0,25 = 550 \text{ cm/kg.}$$

Die Wirkung des Getriebes ist ziemlich erheblich von der Innehaltung der der Rechnung zugrunde gelegten Reibungsziffer abhängig.

Beispiel 138. Anzugeben ist der von einer Bandbremse bei der Umfangung $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$ auf die Welle ausgeübte Achsdruck, wenn die kleinere Bandspannkraft $S_1 = 100 \text{ kg}$ beträgt.

Mit $\mu = 0,18$ und $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$ ergibt sich $e^{\mu \cdot \alpha} = 2,21$, also $S_2 = 221 \text{ kg}$. Beide Kräfte schließen miteinander den Winkel

$$\pi - 0,7 \cdot \pi = 0,3 \cdot \pi = 0,3 \cdot 180 = 54^\circ$$

ein und es ist somit der Achsdruck

$$R = S_1 \cdot \sqrt{1 + 2,21^2 + 2 \cdot 2,21 \cdot \cos 54^\circ} = 100 \cdot \sqrt{1 + 4,884 + 1,365} \approx 270 \text{ kg.}$$

Der Achsdruck wird völlig aufgehoben, wenn zwei Differentialbremsbänder in entgegengesetzter Anordnung um die Scheibe gelegt werden, wie bei der Kraftmaschinenkupplung der BAMAG¹⁹³⁾ nach Fig. 267. Freilich ist dann der Spannkraftunterschied wesentlich kleiner, aber damit auch die Abhängigkeit von der etwaigen Änderung der Reibungsziffer. Bei der Ausführung ist $\alpha = 0,75 \cdot \pi$ und bei gut geschmierten Gleitflächen $\mu = 0,10$, also $e^{\mu \cdot \alpha} = 1,27$.

Es ist ferner absichtlich der Grenzfall der Selbstsperrung mit $\frac{b_1}{b_2} = 1,27$ gewählt worden, so daß das Einrücken der Kupplung ohne Kraftanstrengung erfolgt. Bei geringer Belastung gleitet sie dann (Beispiel 136) und faßt erst, wenn die Bremsscheibe dieselbe Geschwindigkeit hat wie das auf dem zweiten Wellenstumpf sitzende Gehäuse, in dem die festen Drehzapfen O gelagert sind. Sinkt die Geschwindigkeit der Zusatzmaschine etwa wegen Überbelastung, so rutscht die Kupplung ohne Stoß oder überhaupt Bewegung der Hebel und schließt sich wieder selbsttätig fest, sobald beide Wellen die gleiche Geschwindigkeit haben.

Das gesamte, bei voller Anspannung S_2 der Bänder übertragene Drehmoment wird nach Formel (225)

$$M = 2 \cdot S_2 \cdot r \cdot \frac{e^{\mu \cdot \alpha}}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1} = 0,213 D \cdot S_2,$$

also z. B. mit $S_2 = 2000 \text{ kg}$ und $D = 50 \text{ cm}$

$$M = 0,213 \cdot 2000 \cdot 0,50 = 213 \text{ m/kg.}$$

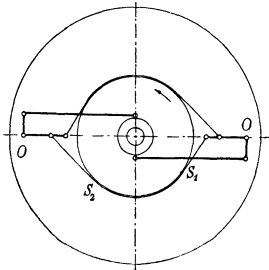


Fig. 267.

17. Der Riemen- und Seiltrieb.

Die meisten Riemen- und Seiltriebe arbeiten mit Vorspannung, d. h. der Riemen oder das Seil wird so auf die ruhenden Scheiben gelegt, daß in allen Teilen eine gewisse Spannkraft S_0 entsteht. Wird jetzt die eine Scheibe durch ein Drehmoment M_1 bewegt, während auf die andere ein entgegengesetztes Drehmoment M_2 einwirkt, so gilt ja nach den Darlegungen in Abschnitt 10

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

¹⁹³⁾ Ohnesorge, Z. d. V. d. I. 1908.

solange der Riemen infolge der Reibung auf den Scheiben festliegt, und die Spannkraft S_0 steigen in dem ziehenden Trum auf S_2 und sinken in dem losen Trum auf S_1 (Fig. 268). Wenn schließlich Über-

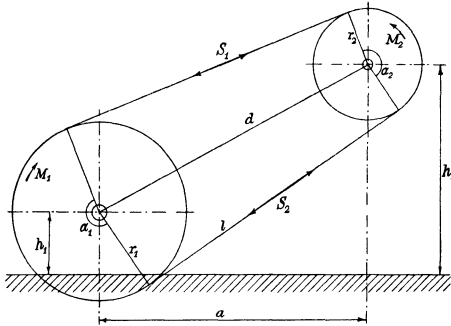


Fig. 268.

spannkraft bezeichnet. Beide zusammen ergeben wieder die Gl. (225), die häufig in folgender Form geschrieben wird:

$$S_2 = S_n \cdot \frac{e^{\mu \cdot \alpha}}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1} = \frac{S_n}{1 - e^{-\mu \cdot \alpha}} = \frac{S_n}{k} \quad (229)$$

Der Wert k heißt die Ausbeute des Riementriebes¹⁹⁴⁾. Es gilt dafür die Zusammenstellung:

$e^{\mu \cdot \alpha} = 1$	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	3,0
$k = 0$	0,3750	0,444	0,50	0,545	0,5833	0,6153	0,6667.

Nun ist zu berücksichtigen, daß der Riemen oder das Seil an den Scheiben nicht als geometrische Tangente anliegt, wie es Fig. 268 darstellt, sondern die Band- bzw. Seilsteifigkeit wirkt schon dahin, daß an der Auflaufstelle A der Umfassungswinkel α um den Betrag α' verkleinert und an der Ablaufstelle B um einen anderen Betrag α'' vergrößert wird (Fig. 269). Der Unterschied beider Winkel rührt zum Teil davon her, daß die Spannkraft S_2 wesentlich größer ist als S_1 und nicht, wie bei den Darlegungen über die Bandsteifigkeit in Abschnitt 15, gleich groß. Er wird noch weiter dadurch beeinflusst, daß der bei A auflaufende Riemen die umgebende Luft ebenso wie die umlaufende Scheibe mit sich reißt, die so ein Kissen zwischen Riemen und Scheibe bildet, bis sie wirklich hinausgedrückt ist¹⁹⁵⁾, während bei B der äußere Luftdruck den Riemen noch etwas gegen die Scheibe preßt, wenn die reine Gurtsteifigkeit schon überwunden sein sollte.

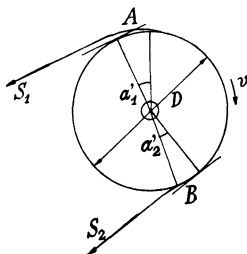


Fig. 269.

¹⁹⁴⁾ Boesner, Aus Theorie und Praxis des Riementriebes, 1914.

¹⁹⁵⁾ Kammerer, Mitt. des V. d. I. über Forschungsarbeiten, Heft 56/57, 1908.

Die Größe des Auspreßweges $r \cdot \alpha'$, der durch die eigentliche Gurtsteifigkeit kaum verändert wird, hängt ab von der Luftmenge, die etwa dem Quadrat der Riemengeschwindigkeit v entspricht, und wird um so größer, je breiter der Riemen ist; überschlägig werde dafür die Abhängigkeit von der Quadratwurzel der Riemenbreite b eingesetzt. Er wird um so kleiner, je größer die auf den cm Riemenbreite entfallende Spannkraft $\frac{S'}{b}$ an der Stelle ist, und man kann demnach ansetzen

$$\alpha' = \frac{C \cdot v^2 \cdot b^{\frac{3}{2}}}{S' \cdot r}. \quad (230)$$

Werden v in m/sk, b und r in cm, S' in kg und α' in Bogenmaß gemessen, so ist nach Versuchen, die mit demselben Riemetrieb im luftgefüllten und luftverdünnten Raum angestellt wurden¹⁹⁶⁾,

$$C = 0,118. \quad (231)$$

Freilich sind zur sicheren Festlegung aller Abhängigkeiten noch weitere Untersuchungen nötig. Bei Seilen und glatten Stahlbändern hat α' nur den durch die Seil- bzw. Bandsteifigkeit bedingten Wert. Den meistens kleineren Winkel α'' vernachlässigt man der Sicherheit halber gewöhnlich.

Der so um den Betrag α' verkleinerte Umfassungswinkel zerfällt nun noch bei geringer Belastung in einen Ruhewinkel α_0 , in dem die Spannung des Riemens unverändert bleibt¹⁹⁷⁾, und den Gleitwinkel $\bar{\alpha}$, in dem sie sich zwischen den Endwerten S_1 und S_2 ändert. Wenn man von den wenig nachgiebigen Stahlbändern absieht, so sind alle Riemen und Seile verhältnismäßig nachgiebig, so daß sie sich bei der Vergrößerung der Spannung auf der getriebenen Scheibe merklich dehnen und bei der Verringerung der Spannung auf der treibenden Scheibe wieder zusammenziehen. Infolgedessen gleitet jeder Riemen in diesem Arbeitswinkel $\bar{\alpha}$ auch bei verhältnismäßig geringer Belastung immer etwas.

Beispiel 139. Ein Riemen von $b = 18$ cm Breite laufe über zwei gußeisernen Riemenscheiben von $D = 61$ cm Durchmesser, die $n = 860$ Umdrehungen in der Minute machen. Anzugeben ist die Größe des Auspreßwinkels, wenn das Leertum mit $S_1 = 297$ kg angespannt ist und das ziehende mit $S_2 = 430$ kg.

Man erhält die Riemengeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi \cdot 0,61 \cdot 860}{60} \approx 27,50 \text{ m/sk.}$$

Damit liefert die Gleichung (230) für die Scheibe 1

$$\alpha'_1 = \frac{0,118 \cdot 27,5^2 \cdot 18^{\frac{3}{2}}}{297 \cdot 30,5} = 0,752 \approx 43^\circ,$$

und es wird ferner für die Scheibe 2

$$\alpha'_2 = 43 \cdot \frac{297}{430} \approx 29 \frac{3}{4}^\circ.$$

¹⁹⁶⁾ Skutsch, Verh. d. V. f. Gewerbefleiß 1913.

¹⁹⁷⁾ Grashof, Theorie der Getriebe, 1881; Brauer, Z. d. V. d. J. 1908.

Auf der treibenden Scheibe ist also bei Vollbelastung der Gleitwinkel $\tilde{\alpha} \approx 150^\circ$, auf der getriebenen nur rund 137° . Bei gleich großen Scheiben gleitet der Riemen im Fall der Überlastung hauptsächlich auf der getriebenen Scheibe¹⁹⁸⁾.

Sind die aus gleichem Material bestehenden Riemenscheiben verschieden groß, so liegt bei offenen Trieben nach Fig. 268 der geometrische Umfassungswinkel α auf der kleineren Scheibe um ebensoviel unter 180° als auf der größeren darüber. Der Riemen gleitet somit bei größerer Übersetzung gewöhnlich auf der kleineren Scheibe, und zwar läuft der Trieb immer wesentlich ungünstiger, wenn die große Scheibe treibt, als umgekehrt, weil dann das schwächer gespannte Trum auf die kleine Scheibe aufläuft, wodurch sich dort der größere Auspreßwinkel einstellt.

Eine erhebliche Verbesserung erzielt man in dem Fall dadurch, daß die kleinere Scheibe aus Holz hergestellt wird, weil dann die Reibungsziffer soweit ansteigt, daß die Verringerung des Gleitwinkels $\tilde{\alpha}$ ausgeglichen wird. Will man den umfaßten Winkel bei großen Laufgeschwindigkeiten nahezu ganz ausnutzen, so muß man gelochte Riemen verwenden, die der mitgerissenen Luft leichten Austritt gestatten.

Die Reibungsziffer μ zwischen dem Treibriemen und der Scheibe hängt nun von einer Reihe von Umständen ab. In erster Linie spielt die Fettung des Riemens eine Rolle. Bei stärkerer Fettung des Leders, für das eingehendere Untersuchungen¹⁹⁹⁾ nur vorliegen, ist μ unter sonst gleichen Umständen wesentlich höher als in verhältnismäßig trockenem Zustand, weil sich auf der Scheibe ein zwar sehr dünner, aber äußerst zäher Fettüberzug bildet, der um so gleichmäßiger ist, je glatter die Scheiben- und Riemenflächen sind. Nun findet wie bei den Zapfen im Lager eine Verschiebung der Schmierschichten gegeneinander statt, und bei der großen Zähigkeit der hier nicht erwärmten Schmiere stellt sich bei jeder Gleitgeschwindigkeit fast sofort wieder ein Beharrungszustand ein. Auf rauhen Scheiben, wo sich diese gleichmäßige Schmierschicht nicht ausbilden kann, ist die Reibung geringer als auf glatten Scheiben¹⁹⁸⁾.

Außer der Fettung ist von Einfluß der mittlere Flächendruck p_m at, mit dem sich der Riemen auf die Scheibe legt, und zwar sinkt die Reibungsziffer mit wachsendem p_m ; ferner die Gleitgeschwindigkeit c cm/sk zwischen Riemen und Scheibe und schließlich noch die Temperatur, deren Erhöhung die Zähigkeit der Schmierschicht verkleinert.

Bei etwa 20°C ergab sich²⁰⁰⁾ an einem wenig gefetteten, lohlgaren Lederriemen, wie er im Betrieb meistens vorkommt, mit nur geleimten Verbindungsstellen

$$\mu = -0,812 + 0,845 \cdot \left(\frac{p_m}{2}\right)^{-\frac{1}{7,5}} + 0,07 \cdot c^{\frac{1}{4}}, \quad (232a)$$

und zwar auf gußeisernen Scheiben. Auf einer besonders glatten schmiedeeisernen Scheibe hatte die erste Ziffer den Wert $-1,076$.

¹⁹⁸⁾ Skutsch, Versuche über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit gußeiserner Riemenscheiben, 1911.

¹⁹⁹⁾ Sellers, Lewis, Transact. of the American Soc. of Mech. Eng. 1885, übersetzt von Skutsch, Glasers Annalen 1914; Skutsch, D. p. J. 1914; Friederich, Z. d. V. d. I. 1915; Stephan, D. p. J. 1913.

²⁰⁰⁾ Stephan, Die Treibriemen und Riementreibe, 1920.

Nachgenähte Leimstellen verringern die Reibung, und es ergab sich als Mittelwert für den ganzen, etwas fetteren Riemen

$$\mu = -0,421 + 0,22 \cdot \left(\frac{p_m}{2}\right)^{-\frac{1}{7,5}} + 0,40 \cdot c^{\frac{1}{4}} \quad (232b)$$

auf gußeiserner Scheibe; auf einer schmiedeeisernen hatte die erste Ziffer den Wert $-0,444$.

Durch besonders starkes Fetten läßt sich der Faktor von $c^{\frac{1}{4}}$ noch weiter verdoppeln. Freilich geht der Zahlenfaktor des zweiten Gliedes dann so weit zurück, daß es nahezu verschwindet, und das erste steigt bis auf $-1,6$. Die Messungen umfaßten den Bereich

$$0,06 < \frac{p_m}{2} < 0,4 \text{ at}, \quad 0,3 < c < 18 \text{ cm/sk.}$$

Auf einer hölzernen Scheibe ergab ein gebrauchter lohgarer Riemen bei

$$\frac{p_m}{2} \sim 0,1 \text{ at} \quad \text{und} \quad 2 < c < 11,5 \text{ cm/sk}$$

$$\mu = 0 + 0,1 \cdot \left(\frac{p_m}{2}\right)^{-\frac{1}{7,5}} + 0,23 \cdot c^{\frac{1}{4}}. \quad (232c)$$

Für die anderen Riemenmaterialien muß man vorläufig die gleichen Werte der Reibungsziffer wie bei Lederriemen ansetzen. Die Reibungsziffer des leicht gefetteten Stahlbandes auf dem Korkbelag der Riemenscheibe entspricht etwa der zwischen Leder und glatter Scheibe²⁰¹⁾.

Durch das Gleiten, mit dem sich der Riemen der Belastung anpaßt, sind Riementriebe besonders wertvoll für schnellgehende Maschinen mit schweren bewegten Massen, die beim Ingangsetzen der Bewegung einen hohen Beschleunigungswiderstand (Bd. III) entgegenzusetzen.

Beispiel 140. Für einen wenig gefetteten Treibriemen (Formel 232a) sind die Reibungs- und Spannungsverhältnisse zahlenmäßig zu untersuchen.

Man entnimmt der Fig. 243 den Flächendruck des Riemens von der Breite

b cm zu $p = \frac{N}{b \cdot r \cdot d\alpha}$. Nun liefert die Fig. 244 die Beziehung $N = S \cdot d\alpha$

und damit wird

$$p = \frac{S}{b \cdot r}.$$

Die Spannkraft S kg erzeugt in dem Riemen vom Querschnitt $b \cdot s$ cm² die gleichförmig über den Querschnitt verteilte Spannung

$$\sigma = \frac{S}{b \cdot s} \text{ kg/cm}^2.$$

Setzt man diesen Wert in die vorstehende Gleichung ein, so folgt $\frac{p}{2} = \sigma \cdot \frac{s}{D}$ und der Mittelwert

$$\frac{p_m}{2} = \sigma_m \cdot \frac{s}{D}.$$

Die mittlere Anspannung beider Riementräger kann nun keine andere sein²⁰⁰⁾ als die Anfangsspannung σ_0 im Ruhezustand vermindert um die durch die Flieh-

²⁰¹⁾ Eloesser-Kraftband Ges. m. b. H., Charlottenburg.

kraft (Bd. III) des schnellaufenden Riemens erzeugte Spannung σ_r . Damit wird schließlich

$$\frac{P_m}{2} = (\sigma_0 - \sigma_r) \cdot \frac{s}{D}. \tag{233}$$

Für den ziemlich trockenen Riemen, der auf gußeiserner Scheibe die Reibungsziffer der Formel (232a) ergab, gilt nun die folgende Zusammenstellung für μ' , die beiden ersten Summanden jener Formel:

$\frac{D}{s} =$	20	30	40	50	75	100	150	200
$\sigma_0 - \sigma_r$								
10	0,115	0,166	0,204	0,236	0,293	0,338	0,401	0,449
15	0,066	0,115	0,152	0,180	0,236	0,277	0,338	0,383
20		0,080	0,115	0,143	0,196	0,236	0,293	0,338
25		0,054	0,088	0,115	0,166	0,204	0,261	0,303
30			0,066	0,093	0,143	0,180	0,236	0,273
35			0,052	0,074	0,124	0,160	0,215	0,255
40				0,059	0,107	0,143	0,206	0,236
50					0,080	0,115	0,166	0,204
60					0,059	0,093	0,143	0,180

und für den letzten Summanden:

$c =$	2,5	5	7,5	10	15	20	25	cm/sk
$\mu'' =$	0,088	0,105	0,116	0,125	0,138	0,148	0,157	

Nimmt man einschließlich der elastischen Dehnung und Wiederausdehnung des Riemens noch ein Gleiten mit der Geschwindigkeit $c = 2,5$ cm/sk an, so ergeben sich z. B. für das Verhältnis $\frac{D}{s} = 100$ die Reibungsziffern der nachstehenden Zusammenstellung. Wird ferner mit dem Gleitwinkel $\tilde{\alpha} = 175^\circ = 3,054$ gerechnet, so erhält man die Zahlen der dritten Zeile für das Verhältnis $\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu \cdot \tilde{\alpha}}$

Die beiden Spannungen gehen nun ineinander über, wie es die Fig. 270 zeigt. Man erhält daraus die mittlere Spannung σ_m , indem man den Flächeninhalt der Spannungskurve bestimmt und ihn durch die Länge $\tilde{\alpha}$ dividiert:

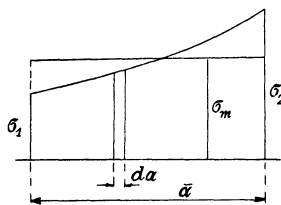


Fig. 270.

$$\sigma_m = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \cdot \int_0^{\tilde{\alpha}} \sigma \cdot d\alpha = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \cdot \int_0^{\tilde{\alpha}} \sigma_1 \cdot e^{\mu \cdot \alpha} \cdot d\alpha.$$

Nun ist nach Formel (140) in Bd. I

$$\int e^{\mu \cdot \alpha} \cdot d\alpha = \frac{1}{\mu} \cdot e^{\mu \cdot \alpha} + C,$$

also

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1}{\mu \cdot \tilde{\alpha}} \cdot \left(e^{\mu \cdot \tilde{\alpha}} - e^0 \right) = \frac{\sigma_1}{\mu \cdot \tilde{\alpha}} \cdot \left(e^{\mu \cdot \tilde{\alpha}} - 1 \right).$$

Hieraus folgt die Spannung im losen Trum

$$\sigma_1 = (\sigma_0 - \sigma_r) \cdot \frac{\mu \cdot \tilde{\alpha}}{e^{\mu \cdot \tilde{\alpha}} - 1}, \tag{234}$$

woraus sich für das gewählte Beispiel die vierte Zeile der Zusammenstellung ergibt. Die fünfte liefert nun die Formel (223).

$\sigma_0 - \sigma_f =$	10	15	20	25	30	35	40	50
$\mu =$	0,426	0,365	0,324	0,292	0,268	0,248	0,231	0,203
$e^{\mu \cdot \bar{\alpha}} =$	3,67	3,16	2,69	2,44	2,28	2,13	2,02	1,86
$\sigma_1 =$	4,9	8,0	11,7	15,5	20,8	23,0	27,6	36,1 at
$\sigma_2 =$	19,7	25,3	31,5	37,8	47,4	49,1	56,8	67,2 at.

Man rechnet gewöhnlich bei halbumspannter Scheibe mit dem Spannungsverhältnis $e^{\mu \cdot \bar{\alpha}} = 2$, also

$$\mu \cdot \bar{\alpha} = \frac{0,301}{0,4343} = 0,6935,$$

und bei $\bar{\alpha} = 175^\circ = 3,054$ folgt hieraus die erforderliche Reibungsziffer $\mu = 0,227$. Nimmt man wieder ein Gesamtgleiten von $c = 2,5$ cm/sk., also $\mu'' = 0,088$ an, so wird $\mu = 0,139$, und man erhält durch eine zeichnerische Interpolation die folgende Zusammenstellung von $\sigma_0 - \sigma_f$ und daraus wieder $\sigma_1 = (\sigma_0 - \sigma_f) \cdot \frac{0,6935}{1}$

$\frac{D}{s} =$	30	40	50	75	100
$\sigma_0 - \sigma_f =$	13	17	21	26	42
$\sigma_1 =$	9	12	14,5	18	29

Man bemerkt, daß die Vorspannung $\sigma_0 - \sigma_f$ immer etwas kleiner ist als der Mittelwert $\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$ der beiden Betriebsspannungen.

Wenn die mögliche Reibungsziffer vollständig ausgenutzt werden soll, ist zur Erzielung eines bestimmten Spannungsverhältnisses auf kleinen Scheiben eine fast genau im Verhältnis der Scheibendurchmesser kleinere Vorspannung zu nehmen. Da die Riemen auch eine mit der Verkleinerung der Scheiben wachsende Biegungsbeanspruchung erfahren (Bd. IV), so ergibt sich so bei den gebräuchlichen Scheibenverhältnissen ungefähr die gleiche Gesamtanstrengung. Große Spannkkräfte können bei verhältnismäßig geringem Gleiten nur auf hinreichend großen Scheiben übertragen werden.

Beispiel 141. Von einer Welle, die unter dem Drehmoment $M_1 = 4200$ cmkg $n_1 = 860$ Umdrehungen in der Minute macht und $h_1 = 0,83$ m über dem Maschinenhausfußboden liegt, soll eine zweite Welle, die mit $n_2 = 150$ Umdrehungen in der Minute umläuft und im wagerechten Abstand $a = 5,52$ m von der ersten entfernt $h_2 = 3,76$ m über dem Maschinenhausfußboden liegt, durch einen Doppelriemen von der Stärke $s = 1,0$ cm angetrieben werden. Die Antriebsscheibe habe den Durchmesser $D_1 = 60$ cm. Anzugeben ist die Riemenlänge, die Spannung in den beiden Trümmern, die erforderliche Riemenbreite und die Größe des Gleitens.

Man erhält den Durchmesser der zweiten Scheibe zu

$$D_2 = D_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = 60 \cdot \frac{860}{150} = 344 \text{ cm.}$$

Ausgeführt wird $D_2 = 350$ cm.

Der unmittelbare Achsenabstand beträgt nach Fig. 268

$$d = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a}\right)^2} = 552 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{376 - 83}{552}\right)^2} = 552 \cdot \sqrt{1,2818} = 624,85 \text{ cm.}$$

Der auf der kleineren Scheibe umfaßte Winkel ermittelt sich aus

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{175 - 30}{624,85} = 0,2319$$

zu $\alpha_1 = 2 \cdot 76^\circ 35' = 153^\circ 10'$.

Zur genauen Bestimmung der Gesamtlänge²⁰⁰⁾ schreibt man mit den Bezeichnungen der Fig. 268

$$L = 2 \cdot d \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r_2 - r_1}{d}\right)^2} + r_1 \cdot 2 \cdot \arccos \frac{r_2 - r_1}{d} + r_2 \cdot 2 \cdot \left(\pi - \arccos \frac{r_2 - r_1}{d}\right).$$

Setzt man vorübergehend $\frac{r_2 - r_1}{d} = x$, so gelten die folgenden Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \dots, \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots\right). \end{aligned}$$

Damit folgt nach Wiederherstellung des Wertes von x

$$L = 2 \cdot d + \pi \cdot (r_1 + r_2) + \frac{(r_1 - r_2)^2}{d} + \frac{(r_1 - r_2)^4}{1,714 \cdot d^3} + \dots, \quad (235)$$

also im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot 624,85 + \pi \cdot 205 + \frac{145^2}{624,85} + \frac{145^4}{1,714 \cdot 624,85} \\ &= 1249,70 + 644,03 + 33,64 + 1,06 = 1928,4 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Die Berechnung ist wesentlich genauer und weniger zeitraubend als der Umweg über die Kosinus- und Bogentafeln. Sie ergibt die Länge des ungespannten, stumpf gestoßenen Riemens.

Die Umlaufgeschwindigkeit des Riemens mit Berücksichtigung seiner Stärke enthält schon das Beispiel 139: $v = 27,5$ m/sk.

Man kann nun je nach dem Grade des Gleitens, das man zulassen will, das Spannungsverhältnis der beiden Riementrümer innerhalb gewisser Grenzen wählen.

Am gebräuchlichsten ist $\frac{S_2}{S_1} = e^{\alpha \cdot \bar{\alpha}} = 2$, wenn der umfaßte Winkel in der Nähe von 180° liegt. Der Übersicht wegen werde mit den drei Werten 1,8 — 2 — 2,2 gerechnet.

Man erhält dann aus Formel (229) mit

$$S_n = \frac{4200}{30,5} = 135,5 \text{ kg}$$

die in Zeile 3 der Zusammenstellung angegebenen Werte von S_2 und daraus die darunterstehenden von S_1 . Die Formel (234) liefert dann die Werte der Zeile 5 von $S_0 - S_f$.

Bei der großen Geschwindigkeit beansprucht die Fliehkraft den Riemen mit der in Zeile 6 stehenden Kraft S_f (Bd. III). Die Vorspannkraft S_0 folgt dann durch Addition der Zeilen 5 und 6 (Zeile 7). Da der Doppelriemen nach einer späteren Rechnung (Bd. IV) bei Herstellung aus Prima eichenlohegegerbtem Leder mit $\sigma_2 = 16,5$ kg/cm² beansprucht werden kann, so ergibt sich seine Breite aus

$$b = \frac{S_2}{s \cdot \sigma_2} \quad (\text{Zeile 8}).$$

Zu den Spannkraften S_1 und S_2 ist S_f zu addieren, damit werden dann die Auspreßwinkel gemäß Formel (230) berechnet:

$$\alpha'_1 = \frac{0,118 \cdot 27,5^2}{30} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{b^{\frac{3}{2}}}{S_2 + S_f}$$

an der treibenden kleineren Scheibe (Zeile 9) und

$$\alpha'_2 = \frac{0,118 \cdot 776}{30} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{b^{\frac{3}{2}}}{S_1 + S_f}$$

an der getriebenen größeren Scheibe (Zeile 10).

Nun folgen die erforderlichen Reibungsziffern auf den Scheiben durch Division der Werte in Zeile 3 durch den in Bogenmaß ausgedrückten Gleitwinkel

$$\bar{\alpha}_1 = (153^\circ - \bar{\alpha}'_1) \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\alpha}_2 = (207^\circ - \bar{\alpha}'_2) \cdot \frac{\pi}{180}.$$

1.	$e^{\mu \cdot \alpha} =$	1,8	2,0	2,2
2.	$\mu \cdot \bar{\alpha} =$	0,588	0,693	0,788
3.	$S_2 =$	298	271	247 kg
4.	$S_1 =$	165,5	135,5	112,5 „
5.	$S_0 - S_f =$	225,5	195,5	171,5 „
6.	$S_f =$	131,5	120,5	109,5 „
7.	$S_0 =$	357	316	281 „
8.	$b =$	18,0	16,5	15,0 cm
9.	$\alpha'_1 =$	$29\frac{3}{4}^\circ$	$28\frac{3}{4}^\circ$	$27\frac{1}{4}^\circ$
10.	$\alpha'_2 \approx$	$7\frac{1}{2}^\circ$	$7\frac{1}{2}^\circ$	$7\frac{1}{2}^\circ$
11.	$\mu_1 =$	0,273	0,319	0,360
12.	$\mu_2 =$	0,169	0,199	0,226
13.	$\left(\frac{p_m}{2}\right)_1 =$	0,660	0,624	0,603 at
14.	$\left(\frac{p_m}{2}\right)_2 =$	0,113	0,107	0,103 „
15.	$\mu'_1 =$	0,081	0,088	0,092
16.	$\mu'_2 =$	0,318	0,327	0,333
17.	$\mu'_1' =$	0,192	0,231	0,268
18.	$c =$	56,8	118,6	215 cm/sk
19.	$100 \cdot \frac{c}{v} \approx$	2,1	4	7,8 %
20.	$c_e =$	7,1	6,8	6,6 cm/sk
21.	$\mu'_1 =$	0,106	0,1065	0,107
22.	$\mu'_{II} =$	0,163	0,213	0,253
23.	$c_I =$	0,25	0,73	1,47 cm/sk

Der Unterschied der Gleitwinkel $\bar{\alpha}$ macht sich in den Zeilen 11 und 12 sehr erheblich bemerkbar. Wird wieder ein ziemlich trockener Riemen angenommen, für den die Formel (232a) gilt, so folgt nach Bestimmung von $\frac{p_m}{2} = \frac{S_0 - S_f}{b \cdot s} \cdot \frac{s}{D}$

(Zeilen 13 und 14) der erste Teil der Reibungsziffer $\mu' = -0,812 + 0,845 \cdot \left(\frac{p_m}{2}\right)^{\frac{1}{7,5}}$

(Zeilen 15 und 16). Damit wird also $\mu'_1' = 0,07 \cdot c^{\frac{1}{4}} = \mu_1 - \mu'_1$ (Zeile 17) und die nötige Gleitgeschwindigkeit $c_1 = \left(\frac{\mu'_1'}{0,07}\right)^4$. Den Wert enthält die Zeile 18 in

absoluter Größe und die Zeile 19 in v. H. der Umlaufgeschwindigkeit. Man erkennt sofort, daß nur die erste Spalte soeben noch praktisch mit Vorteil verwendbare Werte liefert. Auf der zweiten Scheibe besteht in allen drei Fällen noch ein beträchtlicher Ruhewinkel, da $\mu'_2 > \mu_2$ ist. Durch die elastische Ausdehnung rutscht der Riemen auf der Scheibe mit der mittleren Geschwindigkeit c_e (Bd. IV), die Zeile 20 enthält. Sie gibt gleichzeitig den Wert des Gleitens auf der zweiten Scheibe an.

Bei großen Übersetzungen und hohen Umlaufgeschwindigkeiten ist auf eisernen Scheiben starkes Gleiten erforderlich, um eine hohe Ausbeute zu erzielen. Damit ist natürlich ein entsprechend hoher Verschleiß und geringer Wirkungsgrad verbunden.

Allerdings ist — wenigstens in den beiden letzten Spalten — der sichere Geltungsbereich der Formeln (232) weit überschritten worden.

Infolge des Gleitens auf der Antriebscheibe um 2,1 v. H. und auf der getriebenen um $\frac{1}{4}$ v. H. beim ersten Spannungsverhältnis ist die Übersetzung tatsächlich

$$\ddot{u} = \frac{350}{0,9975} \cdot \frac{0,979}{60} = 5,728 ,$$

während verlangt war $\ddot{u} = \frac{860}{150} = 5,737$.

Der Unterschied ist völlig belanglos, dagegen nicht mehr bei den anderen Spannungsverhältnissen. Da das Gleiten des Riemens von seiner Fettung abhängt, so kann man eine vorgeschriebene Übersetzung immer nur annähernd erreichen. Im allgemeinen genügt bei einem richtig gewählten Riementrieb die Abrundung auf den nächsthöheren im Handel zu beschaffenden Riemenscheibendurchmesser, um das Gleiten ungefähr auszugleichen.

Ist die kleinere Scheibe die getriebene, so werden die Verhältnisse noch ungünstiger, weil dann infolge der geringeren Spannkraft S'_1 an der Auflaufstelle der Auspreßwinkel noch größer, also der Gleitwinkel entsprechend kleiner wird.

Ist die kleinere Scheibe aus Holz, so tritt an Stelle der Zeile 15 aus Formel (232c)

$$\mu'_1 = 0,1 \cdot \left(\frac{P_m}{2}\right)_1^{\frac{1}{7,5}} \text{ (Zeile 21) und es bleibt dann } \mu'_1 \text{ als Unterschied gegen Zeile 11.}$$

Hieraus folgt wie oben $c_1 = \left(\frac{\mu'_1}{0,23}\right)^4$ (Zeile 23). Man sieht, daß das elastische Gleiten schon größer ist als das zur Erzielung der Spannungsunterschiede erforderliche. Während man große Übersetzungen bei hoher Umlaufgeschwindigkeit auf eisernen Scheiben höchstens mit dem Spannungsverhältnis 1,8 betreiben sollte, kann man unter gleichen Verhältnissen bis auf 2,5 gehen, wenn die kleinere Scheibe aus Holz ist.

Durch das Abschleudern der Luft beeinflussen sich die beiden Riemenscheiben stark, wenn der Achsenabstand zu gering genommen wird²⁰²⁾; der Auspreßwinkel wird dadurch auf jeder Scheibe vergrößert und damit wieder das Gleiten des Riemens.

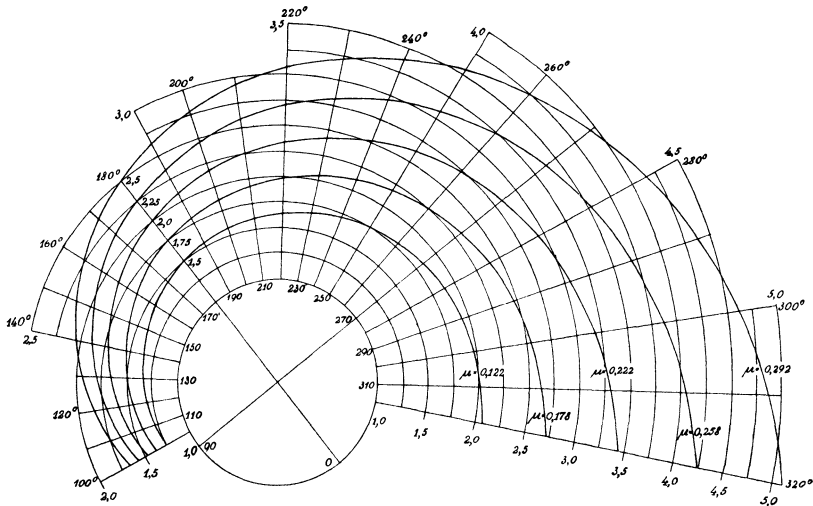


Fig. 271.

In der Fig. 271 sind für verschiedene Werte von μ , die bei $\bar{\alpha} = 180^\circ$ die eingetragenen Spannungsverhältnisse ergeben, die für andere

²⁰²⁾ z. B. Mittermayr, Z. d. V. d. I. 1919.

Winkel zutreffenden Werte von $e'' \cdot \alpha$ für den Gebrauch zusammengestellt, und zwar des bequemen Überblickes halber in Polarkoordinaten. Die Linien sind sogenannte logarithmische Spiralen.

Die errechnete Vorspannung des Riemens muß beim Auflegen nicht unbedeutend vergrößert werden, weil sich das Riemenmaterial unter einer bestimmten Belastung dauernd streckt. Es gibt zuerst ganz bedeutend nach, freilich mit der Zeit immer weniger^{199e}); dabei sinkt naturgemäß die Spannung. Sie ist bei Leder 2 Minuten nach dem Auflegen i. M. um das 1,5 fache größer als nach 28 Tagen. Von dieser Zeit an fällt sie nur noch langsam, so daß ein Nachspannen erst nach etwa 1 bis 1½ Jahren nötig wird. Es gilt²⁰⁰) i. M. für Lederriemen

reiner Eichenlohe-Grubengerbung	$\frac{\sigma_2 \text{ Min.}}{\sigma_{28 \text{ Tage}}} = 1,37$
gewöhnlicher lohgarer Gerbung	1,50
moderner Gerbung	1,67
hydrodynamischer Gerbung	1,28
Chromgerbung	1,73

Bei Textilriemen fällt die Spannung wesentlich schneller und stärker ab. Man kann den etwa nach 18 Tagen erreichten Betrag als Regelspannung ansetzen und muß dann etwa nach ¾ Jahren bereits wieder nachspannen. Es gilt i. M. für

gewebte Baumwollriemen	$\frac{\sigma_3 \text{ Min.}}{\sigma_{18 \text{ Tage}}} = 2,22$
„ „ Kamelhaarriemen	2,22
genähte Baumwolltuchriemen	2,0
Balatariemen	1,67
geflochtene Baumwollgarnriemen	2,13

Stahlbänder, die auf einem ganz dünnen, auf die Eisenscheibe geleimten Korkbelag von oft nur ½ mm Stärke oder auf Holzscheiben laufen, bieten den Vorteil, daß sie eine Nachspannung nicht erfordern. Das gleiche gilt für Drahtgliederriemen mit Papiergarnbewicklung²⁰²), die zum guten Durchziehen in richtiger Weise gewachst werden müssen.

Bei geneigten Werkzeugmaschinen-Antrieben mit obliegender Antriebsscheibe kann die Gleichmäßigkeit der Riemen Spannung durch Einlegen einer leichten Holzrolle mit seitlichen Führungsrändern zwischen die beiden Riementrümer bewirkt werden²⁰³), die durch ihr Eigengewicht etwas weiter heruntersinkt, wenn der Riemen schlaffer wird.

Der in Richtung der Verbindungsgeraden d in beiden Wellenmitten (Fig. 268) wirkende Achsdruck Q ist aus dem in Fig. 272 dargestellten Kräfte dreieck zu bestimmen:

$$Q^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Man kann nun einsetzen $\cos \alpha_2 = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} - 1$

und aus Fig. 268 entnehmen $\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{r_1 - r_2}{d}$.

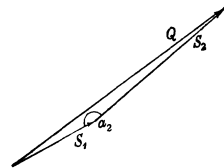


Fig. 272.

²⁰³) Ernst Zimmermann, Remscheid, 1920.

Damit erhält man

$$Q = S_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \left[\left(\frac{r_1 - r_2}{d}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]}. \quad (236)$$

Bei gleich großen Scheiben ergibt sich einfach

$$Q = S_1 + S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right). \quad (237)$$

Beispiel 142. Anzugeben ist der Achsdruck des in Beispiel 141 berechneten Riementriebes.

Es ist für

$$e^{\mu \cdot \alpha} = \begin{matrix} 1,8 & 2,0 & 2,2 \\ S_1 = 165,5 & 135,5 & 112,5, \end{matrix}$$

ferner

$$\frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{175 - 30}{624,85} = 0,2319.$$

Damit geht das letzte Glied unter der Wurzel in Formel (236) über in

$$+ \frac{S_2}{S_1} \cdot (-2 \cdot 0,2319^2 + 1) = + \frac{S_2}{S_1} \cdot 0,8925$$

und man erhält

$$Q = \begin{matrix} 400 & 353 & 315,4 \text{ kg.} \end{matrix}$$

Die Formel (237) liefert bei gleichen Zahlenwerten

$$Q' = \begin{matrix} 463,5 & 406,5 & 359,5 \text{ kg.} \end{matrix}$$

um

$$\begin{matrix} 16 & 15 & 14 \text{ v. H.} \end{matrix}$$

zu groß.

Da man den Lederriemen zu Anfang etwa mit dem 1,5fachen Betrag anzuspinnen hat, so steigt der Achsdruck auf

$$Q_0 = \begin{matrix} 600 & 530 & 470 \text{ kg,} \end{matrix}$$

das ist das

$$\begin{matrix} 4,44 & 3,92 & 3,48 \text{ fache} \end{matrix}$$

der Nutzspannkraft S_n .

Bei Textilriemen ist i. M.

$$Q_0 = \begin{matrix} 800 & 705 & 630 \text{ kg,} \end{matrix}$$

das

$$\begin{matrix} 5,92 & 5,21 & 4,66 \text{ fache} \end{matrix}$$

der Nutzspannkraft S_n .

Hierauf ist bei Bemessung von Lagern, besonders von Kugellagern, zu achten.

Der Wirkungsgrad des Riementriebes hängt ab von der Riemensteifigkeit, dem Gleiten auf den Scheiben, der Zapfenreibung und schließlich dem Luftwiderstand.

Zur Untersuchung der Wirkung der Riemensteifigkeit wird auf die Fig. 268 und 233 zurückgegriffen. Die Drehmomente an den beiden Wellen 1 und 2 sind mit den dort eingetragenen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} M_2 &= S_2 \cdot (r_2 \cdot \cos \varphi_2'' - e_2'') - S_1 \cdot (r_2 \cdot \cos \varphi_2' + e_2'), \\ M_1 &= S_2 \cdot (r_1 \cos \varphi_1'' + e_1'') - S_1 \cdot (r_1 \cos \varphi_1' - e_1'), \end{aligned}$$

worin die unten an r , e , φ gesetzten Ziffern die betreffenden Wellen

angeben und die oben angesetzten Striche die Angriffsstelle der Kräfte S_1 und S_2 .

Wird in beiden Gleichungen $S_2 \cdot r_2 \cdot \cos \varphi''$ herausgezogen und dann dividiert, so folgt

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_2 \cdot \cos \varphi_2''}{r_1 \cdot \cos \varphi_1''} \cdot \frac{1 - \frac{e_2''}{r_2 \cdot \cos \varphi_2''} - \frac{S_1 \cdot \cos \varphi_2'}{S_2 \cdot \cos \varphi_2''} \cdot \left(1 + \frac{e_2'}{r_2 \cdot \cos \varphi_2'}\right)}{1 + \frac{e_1''}{r_1 \cdot \cos \varphi_1''} - \frac{S_1 \cdot \cos \varphi_1'}{S_2 \cdot \cos \varphi_1''} \cdot \left(1 - \frac{e_1'}{r_1 \cdot \cos \varphi_1'}\right)}$$

Wird von den Nebeneinflüssen abgesehen, so gilt ja die zu Anfang des Abschnittes angeführte Gleichung $\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Die dahinter stehenden Faktoren der rechten Seite stellen also den Wirkungsgrad η_{st} dar.

Da vorläufig nur für den Mittelwert der Riemensteifigkeit einige Angaben vorliegen (S. 223), so wird der Ausdruck durch Gleichsetzen der sicher verschiedenen $\cos \varphi' = \cos \varphi''$ und $e' = e''$ den derzeitigen Kenntnissen angepaßt und vereinfacht in

$$\eta_{st} = \frac{\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{e_2}{r_2 \cdot \cos \varphi_2}\right)}{\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{e_1}{r_1 \cdot \cos \varphi_1}\right)},$$

der sich durch die Ausführung der Division bis zu den kleinen Gliedern erster Ordnung noch weiter vereinfacht:

$$\eta_{st} = 1 - \left(\frac{e_1}{r_1 \cdot \cos \varphi_1} + \frac{e_2}{r_2 \cdot \cos \varphi_2}\right). \quad (238)$$

Gleitet der Riemen auf der treibenden Scheibe 1 mit der Geschwindigkeit c_1 und auf der getriebenen 2 mit der Geschwindigkeit c_2 bei der ohne Berücksichtigung des Gleitens festgestellten Umlaufgeschwindigkeit v , so gilt für die Welle 1

$$\eta'_{Gl} = \frac{v}{v + c_1}$$

und für die Welle 2

$$\eta''_{Gl} = \frac{v - c_2}{v}.$$

Der Gesamtwirkungsgrad findet sich durch Multiplikation beider Anteile:

$$\eta_{Gl} = \frac{v - c_2}{v + c_1} \cdot \frac{1 - \frac{c_2}{v}}{1 + \frac{c_2}{v}} = 1 - \frac{c_1 + c_2}{v}, \quad (239)$$

worin die Beträge c sowohl das elastische Gleiten als auch das unelastische enthalten.

Sind die Zapfendurchmesser in den Lagern d_1 bzw. d_2 und die durch das Eigengewicht der Riemenscheiben G_1 bzw. G_2 in Verbindung mit dem Achsdruck des Riemens Q hervorgebrachten Lagerbelastungen P_1 bzw. P_2 , so ergibt sich bei Berücksichtigung der Lagerreibung an den beiden Wellen

$$\eta'_z = \frac{M_1}{M_1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_1 \cdot P_1 \cdot d_1} \quad \text{bzw.} \quad \eta''_z = \frac{M_2 - \frac{1}{2} \cdot \mu_2 \cdot P_2 \cdot d_2}{M_2},$$

also durch Multiplikation beider Gleichungen, nachdem vorher durch M_1 bzw. M_2 dividiert ist,

$$\eta_z = \frac{1 - \frac{\mu_2}{2} \cdot \frac{P_2 \cdot d_2}{M_2}}{1 + \frac{\mu_1}{2} \cdot \frac{P_1 \cdot d_1}{M_1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\mu_1 \cdot \frac{P_1 \cdot d_1}{M_1} + \mu_2 \cdot \frac{P_2 \cdot d_2}{M_2} \right). \quad (240)$$

Der Luftwiderstand glatter Riemen ist recht gering²⁰⁰); von größerem Einfluß ist bei schnellaufenden Trieben derjenige der Scheiben, der nur schätzungsweise zu $1/2$ bis 1 v. H. je nach der Geschwindigkeit angesetzt werden kann.

Den Gesamtwirkungsgrad erhält man durch Multiplikation der Einzelanteile:

$$\eta = \eta_{\text{St}} \cdot \eta_{\text{Gl}} \cdot \eta_z \cdot \eta_L,$$

wovon die beiden ersten und größten Beiträge auch das Übersetzungsverhältnis beeinflussen.

Beispiel 143. Anzugeben ist der Wirkungsgrad des in den Beispielen 141 und 142 berechneten Riementriebes.

Man erhält aus Gleichung (233) mit dem S. 223 für lohgare Ledertreibriemen angegebenen Wert von $\frac{e}{r \cdot \cos \varphi}$ bei

$$\begin{aligned} v &= 27,5 \text{ m/sk}, \quad r_1 = 30 \text{ cm}, \quad r_2 = 175 \text{ cm}, \quad s = 1 \text{ cm}, \\ \eta_{\text{St}} &= 1 - \frac{2,6}{2} \cdot 27,5^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{30^{1,2}} + \frac{1}{175^{1,2}} \right) \\ &= 1 - 1,3 \cdot 1,605 \cdot (0,0169 + 0,0020) = 0,961. \end{aligned}$$

Eine kleine Riemenscheibe setzt diesen Anteil des Wirkungsgrades stark herunter.

Die Gleichung (239) ergibt dann, wenn bei eisernen Scheiben nur die Werte für das Spannungsverhältnis 1,8 genommen werden, mit $c_1 = 56,8$ cm/sk und $c_2 = 7,1$ cm/sk

$$\eta_{\text{Gl}} = 1 - \frac{0,568 + 0,071}{27,5} = 0,977.$$

Dagegen ergibt sich, wenn die kleinere Scheibe aus Holz ist,

$$\eta_{\text{Gl}} = 1 - \frac{2 \cdot 0,066}{27,5} = 0,995$$

beim Spannungsverhältnis 2,2.

Da kleine eiserne Scheiben ein hohes Gleiten haben, wenn der Riemen voll ausgenutzt wird, so wirken sie auch aus diesem Grunde auf den Wirkungsgrad sehr ungünstig ein.

Als Wellenstärken werden angenommen $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 8$ cm. Beispiel 62 liefert dann für die Ringschmierlager der Welle 2 die Reibungsziffer $\mu_2 = 0,0084$; eine gleiche Rechnung für die Welle 1 ergibt $\mu_1 = 0,035$ im Dauerbetrieb.

Die Neigung des Riemenzuges gegen die Wagerechte folgt aus Fig. 268 zu

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h_2 - h_1}{a} = \frac{3,76 - 0,83}{5,52} = 0,5231,$$

also $\gamma = 27^\circ 35'$.

Die Größe des Riemenzuges beträgt nach Beispiel 142 unter ungünstigen Umständen $Q_0 = 600$ kg. Dazu tritt in senkrechter Richtung an Welle 1 das Gewicht der Riemenscheibe mit dem des Motorankers $G_1 \sim 340$ kg und an Welle 2 das Gewicht der gußeisernen Scheibe mit Welle $G_2 \sim 800$ kg.

Die entsprechenden Kräfedreiecke ergeben dann

$$P_1 = 600 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{340}{600}\right)^2} - 2 \cdot \frac{340}{600} \cdot 0,463 = 536 \text{ kg,}$$

$$P_2 = 600 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{800}{600}\right)^2} + 2 \cdot \frac{800}{600} \cdot 0,463 = 1187 \text{ kg.}$$

Damit folgt aus Formel (240)

$$\begin{aligned} \eta_z &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(0,035 \cdot \frac{536 \cdot 6}{4200} + 0,0084 \cdot \frac{536 \cdot 8}{4200} \cdot 5,728 \right) \\ &= 1 - \frac{536}{2 \cdot 4200} \cdot (0,035 \cdot 6 + 0,0084 \cdot 8 \cdot 5,728) = 0,978. \end{aligned}$$

Der Luftwiderstand ist bei der hohen Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben zu etwa $\eta_L = 0,990$ anzusetzen.

Damit wird der Gesamtwirkungsgrad bei gußeisernen Riemenscheiben

$$\eta = 0,961 \cdot 0,977 \cdot 0,978 \cdot 0,990 = 0,91.$$

Der gewählte Trieb ist allerdings ein besonders ungünstiger.

Durch Anbringen einer Spannrolle auf dem weniger gespannten Trum gemäß Fig. 273 kann der Trieb wesentlich verbessert werden. Man kann es stets so einrichten, daß der Gleitwinkel $\bar{\alpha}$ auf beiden Scheiben derselbe ist, so daß bei den verschieden großen Auspreßwinkeln α' sich ergibt $\alpha_1 = \bar{\alpha} + \alpha'_1$ und $\alpha_2 = \bar{\alpha} + \alpha'_2$. Jedoch ist damit das Gleiten auf den Scheiben noch immer verschieden, und zwar auf der kleineren wesentlich größer, weil der mittlere Anliedruck p_m , der in die Formeln (232) für die Reibungsziffern eingeht, auf der kleineren Scheibe größer ist.

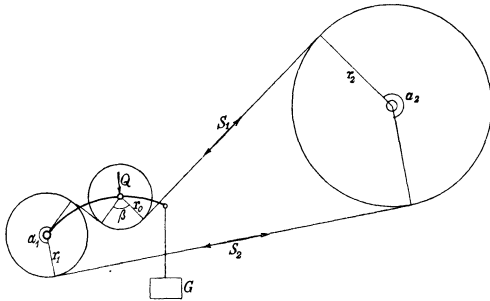


Fig. 273.

Beispiel 144. Der Trieb des Beispiels 140 ist zu untersuchen für den Fall, daß eine Spannrolle angebracht wird, die den umfaßten Winkel auf der kleinen Scheibe auf $\alpha_1 = 240^\circ$ vergrößert.

Die Aufzeichnung ergibt dann den Winkel $\alpha_2 = 215^\circ$. Es kann jetzt unbedenklich auch auf eisernen Scheiben mit dem Spannungsverhältnis $e^{\mu \cdot \bar{\alpha}} = 2,2$ gearbeitet werden (vgl. Fig. 271).

Die entsprechenden Zeilen 1 bis 10 der Zusammenstellung S. 247 bleiben unverändert. Mit

folgt jetzt $\bar{\alpha}_1 = 240 - 27\frac{1}{3} = 212\frac{2}{3}^\circ$ und $\alpha_2 = 215 - 7\frac{1}{2} = 207\frac{1}{2}^\circ$

$$\mu_1 = \frac{\log \text{nat } 2,2}{212\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{180}} = 0,212,$$

$$\mu_2 = \frac{\log \text{nat } 2,2}{207\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180}} = 0,219,$$

also nur wenig voneinander verschieden.

Es bleibt weiter unverändert

$$\frac{p_m}{2} = 0,603 \quad \text{bzw.} \quad 0,103$$

und damit

$$\mu'_1 = 0,092 \quad \text{bzw.} \quad \mu'_2 = 0,333.$$

Auf der Scheibe 2 ist wieder ein ziemlich beträchtlicher Ruhewinkel vorhanden. Auf der Scheibe 1 ergibt sich

$$\mu'' = 0,212 - 0,092 = 0,120$$

und damit das Gesamtgleiten zu

$$c_1 = \left(\frac{0,120}{0,07} \right)^4 \approx 8,1 \text{ cm/sk,}$$

nur wenig größer als das elastische Gleiten $c_0 = 6,6$ cm/sk.

Zum Andrücken der Spannrolle vom Halbmesser $r_0 \approx 0,7$ $r_1 = 20$ cm ist erforderlich (Fig. 273) die Kraft $Q = 2 \cdot S_1 \cdot \cos \frac{\beta}{2}$. Die Aufzeichnung liefert $\beta = 86\frac{1}{2}^\circ$. Mit $S_1 = 112,5$ kg erhält man hieraus

$$Q = 2 \cdot 112,5 \cdot 0,7284 = 164 \text{ kg.}$$

Einen Trieb mit Druckrollen²⁰⁴⁾, der besonders für ganz geringe Wellenabstände geeignet ist oder, wenn beide Riemenscheiben im gleichen Sinne umlaufen sollen, stellt die Fig. 274 dar. Das lose Trum ist völlig schlaff und erhält die Spannkraft S_1 dadurch, daß je eine Druckrolle es mit der Kraft N_1 bzw. N_2 gegen die Scheibe preßt. Man kann so je nach dem umfaßten Winkel α an jeder Scheibe ein anderes Spannungsverhältnis $e^{\mu \cdot \bar{\alpha}}$ erzielen. Es bestehen die Gleichungen

$$S'_1 = 2 \cdot \mu_0 \cdot N_1 \quad \text{bzw.} \quad S''_1 = 2 \cdot \mu_0 \cdot N_2,$$

worin bei Leder auf eisernen Scheiben $\mu_0 \approx 0,13$ gesetzt werden kann. Freilich ist dieser Wert nur bei den geringen Flächendrücken des gebräuchlichen Riementriebes gefunden worden; vielleicht ist er bei den hier vorkommenden sehr hohen Flächendrücken größer.

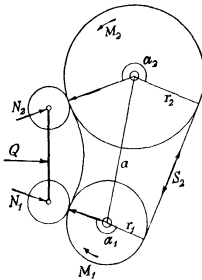


Fig. 274.

²⁰⁴⁾ Koch & Cie., Remscheid, 1919.

Beispiel 145. Die eiserne Riemenscheibe mit dem Halbmesser $r_1 = 13$ cm werde durch das Drehmoment $M_1 = 11$ mkg mit $n_1 = 1050$ Umdrehungen in der Minute gedreht. Der Riemen von $s = 5$ mm Stärke und $b = 8$ cm Breite treibe eine zweite im Abstände $a = 65$ cm befindliche Welle mit dem Übersetzungsverhältnis $1 : 3,5$, also der Umdrehungszahl $n_2 = 300$ an. Anzugeben sind die im Riemen auftretenden Spannkkräfte und die Kräfte N der Druckrollen.

Man erhält den Halbmesser der zweiten Scheibe zu

$$r_2 = 13 \cdot \frac{1050}{300} \approx 45 \text{ cm.}$$

Die Umlaufgeschwindigkeit des Riemens ist

$$v = \frac{\pi \cdot 0,26 \cdot 1050}{60} = 14,3 \text{ m/sk.}$$

Die Aufzeichnung liefert die umfaßten Winkel

$$\alpha_1 = 150^\circ, \quad \alpha_2 = 230^\circ$$

Infolgedessen nimmt man das Spannungsverhältnis auf der treibenden Scheibe nur zu $e^{\mu_1 \cdot \alpha_1} = 1,6$, auf der getriebenen zu $e^{\mu_2 \cdot \alpha_2} = 2,4$. Dem entspricht nach der Zusammenstellung S. 240 die Ausbeuteziffer

$$k_1 = 0,3750 \quad \text{bzw.} \quad k_2 = 0,5833 .$$

Die Nutzspannkraft ist nun

$$S_n = \frac{M_1}{r_1} = \frac{1100}{13} = 84,6 \text{ kg,}$$

also die Spannkraft im ziehenden Trum

$$S_2 = \frac{S_n}{k_1} = \frac{84,6}{0,375} = 225,7 \text{ kg}$$

und damit die beim Auf- bzw. Ablauf von der Scheibe erforderliche

$$S'_1 = \frac{S_2}{e^{\mu_1 \cdot \alpha_1}} = \frac{225,7}{1,6} = 141 \text{ kg}$$

auf der treibenden Scheibe und

$$S'_1 = \frac{225,7}{2,4} = 94 \text{ kg}$$

auf der getriebenen Scheibe.

Wird für die Schleuderkraft S_f ein Zuschlag von 2 kg gemacht, so ergibt sich der Auspreßwinkel beim Auflaufen auf die treibende Scheibe nach Formel (230)

$$\alpha'_1 = \frac{0,118 \cdot 14,3^2 \cdot 8 \frac{3}{4}}{228 \cdot 13} = 0,1841 \approx 10\frac{1}{2}^\circ .$$

Damit wird

$$\bar{\alpha}_1 = 150 - 10\frac{1}{2} = 139\frac{1}{2}^\circ ,$$

während $\alpha_2 = 230^\circ$ unverändert bleibt.

Man erhält somit die erforderlichen Reibungsziffern

$$\mu_1 = \frac{\log \text{nat } 1,6}{139\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180}} = 0,193, \quad \mu_2 = \frac{\log \text{nat } 2,4}{230 \cdot \frac{\pi}{180}} = 0,218 .$$

Durch Vereinigung der Gleichungen (233) und (234) ergibt sich jetzt

$$\left(\frac{p_m}{2}\right)_1 = \frac{S'_1}{b \cdot D_1} = \frac{e^{\mu_1 \cdot \bar{\alpha}_1} - 1}{\mu_1 \cdot \bar{\alpha}_1} = \frac{141 \cdot 0,6}{8 \cdot 26 \cdot \log \text{nat } 1,6} = 0,865 \text{ at,}$$

$$\left(\frac{p_m}{2}\right)_2 = \frac{S'_2}{b \cdot D_2} = \frac{e^{\mu_2 \cdot \bar{\alpha}_2} - 1}{\mu_2 \cdot \bar{\alpha}_2} = \frac{94 \cdot 1,4}{8 \cdot 90 \cdot \log \text{nat } 2,4} = 0,209 \text{ at.}$$

Hiermit folgt der erste Anteil der Reibungsziffer bei einem längere Zeit benutzten Lederriemen

$$\mu'_1 = -0,812 + 0,845 \cdot 0,865^{\frac{1}{7,5}} = 0,050,$$

$$\mu'_2 = -0,812 + 0,845 \cdot 0,209^{\frac{1}{7,5}} = 0,229,$$

also

$$\mu''_1 = 0,193 - 0,050 = 0,143.$$

Auf der getriebenen Scheibe besteht noch ein geringer Ruhewinkel, da $0,218 < 0,229$ ist.

Auf der treibenden Scheibe ist somit die nötige Gleitgeschwindigkeit

$$c = \left(\frac{0,050}{0,07}\right)^4 = 0,26 \text{ cm/sk.}$$

Die mittlere Gleitgeschwindigkeit des elastischen Gleitens beträgt schon 0,9 cm/sk (Bd. IV).

Die Spannungsverhältnisse sind demnach annähernd richtig gewählt, so daß sogar noch ein geringer Überschuß bei auftretenden Belastungsspitzen besteht. Im allgemeinen nimmt man darauf keine Rücksicht, da die immer nur kurze Zeit dauernden Belastungsspitzen durch erhöhtes Gleiten bei verringertem Wirkungsgrad aufgenommen werden.

Mit der Reibungsziffer $\mu_0 = 0,13$ ergeben sich die Andruckkräfte der Rollen:

$$N_1 = \frac{S'_1}{2 \cdot \mu_0} = \frac{141}{2 \cdot 0,13} = 542 \text{ kg,}$$

$$N_2 = \frac{94}{2 \cdot 0,13} = 362 \text{ kg.}$$

Die Spann- und Druckrollentriebe haben neben der vorteilhafteren Ausnutzung des Riemens den Vorzug, daß der Riemen nicht stärker angespannt werden kann, als der Betrieb es erfordert, und daß mindestens des Nachts die vollständige Entspannung mit Leichtigkeit durchgeführt werden kann, die den Riemen sehr schont.

Bei dem Achsenabstand und der Anspannung, mit denen die Riemen- triebe gewöhnlich arbeiten, ist der Durchhang der Riementrümer so gering, daß seine Einwirkungen unbeachtet bleiben können. Bei den Seiltrieben, deren Achsenabstände gewöhnlich erheblich größer sind, müssen sie oft wenigstens näherungsweise berücksichtigt werden²⁰⁵).

Das Seiltrum von der geradlinig gemessenen Länge

$$l = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{a}\right)^2} = a \cdot \zeta \quad (241)$$

²⁰⁵) Eine in der Genauigkeit über die Anforderungen der Praxis hinausgehende Berechnung gibt Duffing, Z. d. V. d. I. 1919.

und dem Gewicht q kg/m hängt unter der Wirkung der Spannkraft S durch um den Betrag (Bd. I Formel 125 b)

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot S}.$$

Die Richtung der Endtangente wird erhalten, wenn man den doppelten Durchhang aufträgt (Fig. 275) und von dort aus die Geraden nach den Endpunkten zieht. Man bemerkt, daß sich das Seil in dem mit der Kraft S_1 gespannten oberen Trum um die Winkel δ'_1 bzw. δ'_2 weiter an die Scheiben anlegt und in dem mit der Kraft S_2 gespannten unteren um entsprechende Winkel δ''_1 bzw. δ''_2 weniger anlegt, so daß der umfaßte Winkel gegeben ist durch

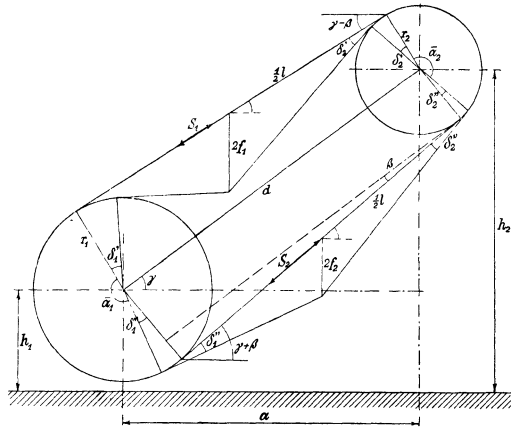


Fig. 275.

unteren um entsprechende Winkel δ''_1 bzw. δ''_2 weniger anlegt, so daß der umfaßte Winkel gegeben ist durch

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \delta'_1 - \delta''_1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \delta'_2 - \delta''_2. \quad (242)$$

Bei der geringen Breite der Seile und ihrer Form besteht kein Auspreßwinkel.

Der Sinussatz ergibt nun

$$\sin \delta'_1 = \frac{2 f_1}{\frac{1}{2} l} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \beta - \delta'_1 \right) = \frac{4 f_1}{l} \cdot \cos (\gamma - \beta - \delta'_1),$$

$$\sin \delta'_2 = \frac{2 f_1}{\frac{1}{2} l} \cdot \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \gamma + \beta - \delta'_2 \right) = \frac{4 f_1}{l} \cdot \cos (\gamma - \beta + \delta'_2),$$

$$\sin \delta''_1 = \frac{2 f_2}{\frac{1}{2} l} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \gamma + \beta - \delta''_1 \right) = \frac{4 f_2}{l} \cdot \cos (\gamma + \beta - \delta''_1),$$

$$\sin \delta''_2 = \frac{2 f_2}{\frac{1}{2} l} \cdot \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta - \delta''_2 \right) = \frac{4 f_2}{l} \cdot \cos (\gamma + \beta + \delta''_2).$$

Man kann jetzt schreiben

$$\sin \delta'_1 = \frac{4 f_1}{l} \cdot [\cos (\gamma - \beta) \cdot \cos \delta_1 + \sin (\gamma - \beta) \cdot \sin \delta'_1].$$

Die Winkel δ sind bei den hier in Frage kommenden Ausführungen noch so klein, daß man, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, $\cos \delta \approx 1$ setzen kann. Dann folgt ziemlich einfach

$$\sin \delta'_1 = \frac{\cos (\gamma - \beta)}{\frac{l}{4 f_1} - \sin (\gamma - \beta)} = \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta + \sin \gamma \cdot \sin \beta}{\frac{l}{4 f_1} - \sin \gamma \cdot \cos \beta + \cos \gamma \cdot \sin \beta}.$$

Nun ergibt die Fig. 275

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{a}{d}, & \cos \beta &= \frac{l}{d}, \\ \sin \gamma &= \frac{h_2 - h_1}{d}, & \sin \beta &= \frac{r_1 - r_2}{d};\end{aligned}$$

damit wird nach Multiplikation aller Glieder mit d^2

$$\sin \delta'_1 = \frac{a \cdot l + (h_2 - h_1) \cdot (r_1 - r_2)}{\frac{l \cdot d^2}{4 \cdot f_1} - (h_2 - h_1) \cdot l + a \cdot (r_1 - r_2)}.$$

Setzt man hierin ein

$$d^2 = a^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a} \right)^2 \right], \quad \frac{l}{4f_1} = \frac{2 S_1}{q \cdot a \cdot \zeta},$$

so folgt nach Division aller Glieder durch a^2

$$\sin \delta'_1 = \frac{\zeta + h' \cdot r'}{s' \cdot (1 + h'^2) - \zeta \cdot h' + r'}, \quad (243 \text{ a})$$

worin abkürzungsweise bezeichnet

$$h' = \frac{h_2 - h_1}{a}, \quad r' = \frac{r_1 - r_2}{a}, \quad s'_1 = \frac{2 \cdot S_1}{q \cdot a \cdot \zeta}. \quad (244)$$

Entsprechend erhält man

$$\sin \delta''_1 = \frac{\zeta - h' \cdot r'}{s'_2 \cdot (1 + h'^2) - \zeta \cdot h' - r'}, \quad (243 \text{ b})$$

$$\sin \delta'_2 = \frac{\zeta + h' \cdot r'}{s'_1 \cdot (1 + h'^2) + \zeta \cdot h' - r'}, \quad (243 \text{ c})$$

$$\sin \delta''_2 = \frac{\zeta - h' \cdot r'}{s'_2 \cdot (1 + h'^2) + \zeta \cdot h' + r'}. \quad (243 \text{ d})$$

Da sich bei kleineren Winkeln der Sinus vom Bogen nur wenig unterscheidet, so kann man genau genug die wirklich freihängende Länge der beiden Trümer ansetzen zu

$$\begin{aligned}l_1 &= l - r_1 \cdot \sin \delta'_1 - r_2 \cdot \sin \delta'_2, \\ l_2 &= l + r_1 \cdot \sin \delta'_1 + r_2 \cdot \sin \delta'_2,\end{aligned}$$

und der wahre Durchhang ist demnach

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{q \cdot l_1^2}{8 \cdot S_1} = \frac{q \cdot a^2 \cdot \zeta^2}{8 \cdot S_1} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{l} \cdot \sin \delta'_1 - \frac{r_2}{l} \cdot \sin \delta'_2 \right)^2 \\ f_2 &= \frac{q \cdot a^2 \cdot \zeta^2}{8 \cdot S_2} \cdot \left(1 + \frac{r_1}{l} \cdot \sin \delta'_1 + \frac{r_2}{l} \cdot \sin \delta'_2 \right)^2.\end{aligned}$$

Hiermit ist die vorstehende Berechnung zu wiederholen. Es folgt dann, wenn abkürzungsweise geschrieben wird

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 - \frac{r_1}{a \cdot \zeta} \cdot \sin \delta'_1 - \frac{r_2}{a \cdot \zeta} \cdot \sin \delta'_2, \\ \vartheta_2 &= 1 + \frac{r_1}{a \cdot \zeta} \cdot \sin \delta''_1 + \frac{r_2}{a \cdot \zeta} \cdot \sin \delta''_2, \\ \frac{l}{4f} &= \frac{2 \cdot S}{q \cdot a \cdot \zeta \cdot \vartheta} \end{aligned}$$

und damit allgemein

$$\sin \delta = \frac{\zeta \pm h' \cdot r'}{\frac{s'}{\vartheta} \cdot (1 + h'^2) \pm \zeta \cdot h' \pm r'} \tag{243 e}$$

Seiltriebe läßt man gewöhnlich nicht mit stärkerem Gleiten laufen, als die elastische Dehnung und Zusammenziehung nun einmal hervorbringt, wenn natürlich auch Unterschiede der Fettung geringe Unterschiede im Gleiten bzw. Anliegen verursachen. Die hierfür zutreffenden Reibungsziffern sind bereits S. 232 zusammengestellt. Man rechnet also durchweg bei gefetteten Drahtseilen auf Ledereinlagen mit $\mu = 0,16$, bei leicht gefetteten Hanf- und Baumwollseilen auf Gußeisen mit $\mu = 0,25$. Nähere Angaben über die Veränderlichkeit der Reibungsziffer mit dem Anlagedruck und der Gleitgeschwindigkeit liegen nicht vor.

Um die Reibung zu erhöhen, laufen festgeschlagene runde Seile in Keilnuten nach Fig. 276, deren Spitzenwinkel gewöhnlich $2\delta = 45^\circ$ beträgt. Lose geschlagene Quadratseile laufen in Rillen mit dem Spitzenwinkel $2\delta = 90^\circ$. Um ein gutes seitliches Anliegen zu erzielen, was bei den Quadratseilen nicht der Fall ist, stellte man die Seile bisweilen mit trapezförmigem Querschnitt her, deren Seitenflächen einen Winkel von 46° mit der Achse bilden²⁰⁶⁾. Nach den Darlegungen S. 48 ist dann in gewöhnlicher Weise zu rechnen, nur mit der Rei-

bungsziffer $\mu' = \frac{\mu}{\sin \delta}$, also

bei $\delta = 22\frac{1}{2}^\circ$ mit $\mu' \sim 0,65$,

bei $\delta = 45^\circ$ mit $\mu' \sim 0,35$.

Man erhält so die folgende Zusammenstellung, die zugleich die zugehörigen Ausbeuteziffern gibt:

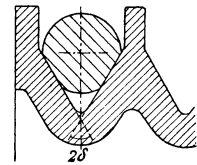


Fig. 276.

	$\tilde{\alpha} = 130$	140	150	160	170	180	190	200°
$e^{0,16} \cdot \tilde{\alpha}$	1,44	1,48	1,52	1,56	1,61	1,65	1,70	1,75
$e^{0,35} \cdot \tilde{\alpha}$	2,21	2,35	2,50	2,66	2,82	3,00	3,19	3,39
$e^{0,65} \cdot \tilde{\alpha}$	4,37	4,90	5,48	6,14	6,88	7,71	8,64	9,68
$k_{0,16}$	0,305	0,324	0,342	0,359	0,377	0,394	0,412	0,429
$k_{0,35}$	0,548	0,575	0,600	0,624	0,646	0,667	0,687	0,705
$k_{0,65}$	0,772	0,796	0,818	0,838	0,855	0,871	0,884	0,897

²⁰⁶⁾ Keller, Z. d. V. d. I. 1898.

Beispiel 146. Ein Drahtseiltrieb für $M_2 = 110$ mkg an der Seilscheibe vom Durchmesser $D_2 = 1,40$ m, die mit $n_2 = 180$ Umdrehungen in der Minute umläuft, wird bewegt von einer Welle, die $n_1 = 160$ Umdrehungen in der Minute macht. Der wagerechte Achsenabstand beträgt $a = 115,25$ m, die Höhe der ersten Welle über dem Maschinenhausfußboden $h_1 = 4,42$ m, die der zweiten $h_2 = 13,38$ m. Anzugeben sind die auftretenden Seilspannkkräfte und der Wirkungsgrad des Triebes.

Man erhält den Durchmesser der Antriebsscheibe zu

$$D_1 = D_2 \cdot \frac{n_2}{n_1} = 1,40 \cdot \frac{180}{160} \approx 1,60 \text{ m.}$$

und hiermit den auf der kleineren Scheibe umfaßten Winkel, wenn vorläufig von dem Durchhang der Seiltrümer abgesehen wird, aus

$$\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{r_1 - r_2}{d} = \frac{r_1 - r_2}{a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a}\right)^2}}.$$

Mit

$$r' = \frac{r_1 - r_2}{a} = \frac{0,10}{115,25} = 0,000868,$$

$$h' = \frac{h_2 - h_1}{a} = \frac{8,96}{115,25} = 0,0777$$

ergibt sich

$$\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{r'}{\sqrt{1 + h'^2}} = \frac{0,000868}{1,00302} = 0,000865,$$

also $\frac{\alpha_2}{2} = 89^\circ 57'$.

Infolge des Seildurchhanges vergrößert sich der Winkel auf schätzungsweise $\bar{\alpha}_2 = 185^\circ$.

Dem entspricht nach der Zusammenstellung

$$e^{\mu \cdot \alpha} = 1,675 \quad \text{und} \quad k = 0,403.$$

Es ist nun die Nutzspannkraft

$$S_n = \frac{M_2}{r_2} = \frac{110}{0,70} = 157 \text{ kg,}$$

also die Spannkraft im ziehenden Trum

$$S_2 = \frac{S_n}{k} = \frac{157}{0,403} \approx 390 \text{ kg}$$

und die im losen Trum

$$S_1 = \frac{S_2}{e^{\mu \cdot \alpha}} = \frac{390}{1,675} = 233 \text{ kg.}$$

Die erstere Kraft verlangt (Bd. IV) ein Seil von 13 mm Durchmesser aus 42 Drähten von je 1,4 mm Stärke, das etwa $q = 0,65$ kg/m wiegt.

Mit

$$\zeta = \sqrt{1 + h'^2 - r'^2} = \sqrt{1 + 0,006045 - 0,00000075} = 1,00302$$

ergibt sich

$$s'_1 = \frac{2 \cdot 233}{0,65 \cdot 115,25 \cdot 1,003} = 6,189,$$

$$s'_2 = 6,190 \cdot \frac{390}{233} = 10,368$$

und nun wird nach den Formeln (243), wenn von vornherein $\vartheta = 1$ gesetzt wird,

$$\sin \delta'_1 = \frac{1,00302 - 0,00007}{6,189 \cdot 1,00605 - 1,003 \cdot 0,0777 + 0,00087} = 0,1631 : \delta'_1 = 9^\circ 23',$$

$$\sin \delta''_1 = \frac{1,00295}{10,368 \cdot 1,00605 - 0,0779 + 0,0009} = 0,09688 : \delta''_1 = 5^\circ 33',$$

$$\sin \delta'_2 = \frac{1,00295}{6,226 + 0,0770} = 0,1591 : \delta'_2 = 9^\circ 9',$$

$$\sin \delta''_2 = \frac{1,00295}{10,430 + 0,0788} = 0,09525 : \delta''_2 = 5^\circ 28'.$$

Hiermit folgt schließlich

$$\tilde{\alpha}_1 = 180^\circ 6' + 9^\circ 23' - 5^\circ 33' = 183^\circ 56',$$

$$\tilde{\alpha}_2 = 179^\circ 54' + 9^\circ 9' - 5^\circ 28' = 183^\circ 35'.$$

Die Annahme $\tilde{\alpha} \sim 185^\circ$ war somit noch etwas zu reichlich, ohne daß freilich das praktische Rechnungsergebnis dadurch beeinflußt wird. Bei Drahtseiltrieben der gebräuchlichen Spannweiten kann die Berücksichtigung der Vergrößerung des umfaßten Winkels durch den Seildurchhang für die praktische Berechnung des immer unterbleiben.

Der Durchhang selbst beträgt

$$f_1 = \frac{a \cdot \zeta}{4 \cdot s'_1} = \frac{115,25 \cdot 1,0030}{4 \cdot 6,189} = 4,67 \text{ m,}$$

$$f_2 = \frac{28,88}{10,368} = 2,785 \text{ m.}$$

Die geringe Längenänderung durch die elastische Dehnung des Seiles hat darauf nur ganz geringfügigen Einfluß.

Da die geraden Verbindungslinien der Endpunkte beider Seiltrümer in der Mitte nur um 1,50 m voneinander entfernt sind, so ist der Trieb nur mit einer Unterstützungsscheibe von etwa $D_0 = 0,8$ m in der Mitte des Leertrums brauchbar, deren Höhenlage so bestimmt werden kann, daß die berechneten Winkel δ' an den Hauptscheiben unverändert bleiben.

Auch bei Drahtseilen der üblichen Litztenkonstruktion ist zu Anfang eine größere Anspannung nötig. Wenn das Seil mit der Ruhespannkraft

$$S_0 = \frac{S_1 \cdot (e^{\mu \cdot \tilde{\alpha}} - 1)}{\mu \cdot \tilde{\alpha}} = \frac{233 \cdot 0,675}{0,518} = 304 \text{ kg}$$

etwa 3÷4 Wochen nach dem Auflegen arbeiten soll, die dann nur noch langsam und wenig abnimmt, so muß 3 Minuten nach dem Anspannen eine um etwa 15 v.H. höhere Spannkraft vorhanden sein²⁰⁷⁾.

Der durch die Seilsteifigkeit hervorgerufene Anteil des Wirkungsgrades ist nach den Formeln (238) und (207)

$$\eta_{st} = 1 - \frac{1,3^2}{4} \cdot \left(\frac{60}{233 + 0,5} + \frac{60}{233 + 0,5} + \frac{60}{390 + 0,5} + \frac{60}{390 + 0,5} \right)$$

$$= 1 - 0,4225 \cdot (0,01165 + 0,01010 + 0,01005 + 0,00872) = 0,9829.$$

Das elastische Gleiten auf jeder Scheibe beträgt bei

$$v = \frac{\pi \cdot 1,6 \cdot 160}{60} = 13,41 \text{ m/sk}$$

Umlaufgeschwindigkeit $c = 0,21$ cm/sk. (Bd. IV.) Damit wird der betreffende Anteil des Wirkungsgrades

$$\eta_{gl} = 1 - \frac{2 \cdot 0,21}{1341} = 0,9997.$$

²⁰⁷⁾ Stephan, D. p. J. 1916.

Bei den Wellendurchmessern $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 6$ cm, $d_0 = 5$ cm und den Gesamtgewichten von Scheibe, Welle und dem zugehörigen Teil des Seilgewichtes $G_1 = 275$ kg, $G_2 = 245$ kg, $G_0 = 120$ kg wird, wenn der Achsdruck genau genug in wagerechter Richtung zu

$$Q = S_1 + S_2 = 233 + 390 = 623 \text{ kg}$$

angesetzt wird, gemäß Formel (239) mit $\mu_1 = \mu_2 \approx 0,04$ und $\mu_0 \approx 0,06$

$$\eta_z = 1 - \frac{0,04 \cdot 623}{2 \cdot 11\,000} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{275}{623}\right)^2} \cdot 7}{180} + \sqrt{1 + \left(\frac{245}{623}\right)^2} \cdot 6 + 1,5 \cdot \frac{120}{623} \right)$$

$$= 1 - 0,001133 \cdot (6,80 + 6,56 + 0,289) = 0,9845.$$

Als Anteil des Luftwiderstandes des Seiles und der 3 Scheiben werde $\eta = 0,9925$ geschätzt.

Damit wird der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = 0,9829 \cdot 0,9997 \cdot 0,9845 \cdot 0,9925 = 0,960.$$

Beispiel 147. Von dem Seilscheibenschwungrad einer Dampfmaschine von $D_1 = 4,50$ m Durchmesser, das mit $n_1 = 115$ Umdrehungen in der Minute umläuft, ist das Drehmoment $M_1 = 4000$ mkg durch Hanfseile von $d = 5,0$ cm Durchmesser weiter zu leiten auf eine mit $n_2 = 225$ Umdrehungen in der Minute laufende Welle, die in wagerechter Richtung $a = 12,40$ m und in lotrechter $h_2 - h_1 = 4,30$ m entfernt liegt. Zu berechnen sind die Seile und der Wirkungsgrad des Triebes.

Der Durchmesser der zweiten Seilscheibe ist

$$D_2 = 4,50 \cdot \frac{115}{225} = 2,30 \text{ m.}$$

Damit ergibt sich der auf dieser Scheibe umfaßte Winkel aus

$$\cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{4,50 - 2,30}{2 \cdot 12,40} = 0,08875$$

zu $\alpha_2 = 169^\circ 48'$. Geschätzt wird demnach vorläufig $\bar{\alpha}_2 = 175^\circ$.

Dafür liefert die Zusammenstellung bei festgeschlagenen Rundseilen

$$k = 0,863, \quad e^{\mu' \cdot \bar{\alpha}_2} = 7,34,$$

bei lose geschlagenen Quadratseilen

$$k = 0,661, \quad e^{\mu' \cdot \bar{\alpha}_2} = 2,91.$$

Die Nutzspannkraft der Seile beträgt

$$S_n = \frac{M_1}{r_1} = \frac{4000}{2,25} \approx 1800 \text{ kg.}$$

und die in den ziehenden Trümmern

$$S_2 = \frac{1800}{0,863} = 2086 \text{ kg} \quad \text{bzw.} \quad S_2 = \frac{1800}{0,661} = 2722 \text{ kg,}$$

die in den Leertrümmern

$$S_1 = \frac{2086}{7,34} = 280 \text{ kg} \quad \text{bzw.} \quad S_1 = \frac{2722}{2,91} = 936 \text{ kg.}$$

Läßt man als Höchstbeanspruchung der Seile auf der geraden Strecke bei mindestens 6jähriger Liegedauer für die lose geschlagenen Quadratseile von $F = 5^2 = 25$ cm² Querschnitt $\sigma = 16$ kg/cm² zu²⁰⁸⁾ und für die fest geschlagenen

²⁰⁸⁾ Bonte, Z. d. V. d. I. 1919.

Rundseile vom Querschnitt $F = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \approx 20 \text{ cm}^2$, die etwas weniger Fasern im Querschnitt enthalten, $\sigma = 15 \text{ kg/cm}^2$, so folgt die Anzahl der Seile zu

$$i = \frac{2086}{20 \cdot 15} = 7 \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{2722}{25 \cdot 16} = 7,$$

die je $q = 1,90$ bzw. $2,05 \text{ kg/m}$ wiegen.

Man berechnet jetzt die Hilfswerte

$$r' = \cos \frac{\alpha_2}{2} = 0,08875, \quad h' = \frac{4,3}{12,4} = 0,3469,$$

$$\zeta = \sqrt{1 + h'^2 - r'^2} = \sqrt{1 + 0,1096 - 0,0079} = 1,050,$$

$$s'_1 = \frac{2 \cdot 280}{7 \cdot 1,90 \cdot 12,4 \cdot 1,05} = 3,238 \quad \text{bzw.} \quad s'_1 = \frac{2 \cdot 936}{7 \cdot 2,05 \cdot 12,4 \cdot 1,05} = 10,02,$$

$$s'_2 = 3,238 \cdot 7,34 = 23,75 \quad \text{bzw.} \quad s'_2 = 10,02 \cdot 2,91 = 29,15,$$

$$\vartheta_1 = 1 - \frac{2,25}{12,4 \cdot 1,05} \cdot \frac{1,050 + 0,3469 \cdot 0,08875}{3,238 \cdot 1,1096 - 1,050 \cdot 0,3469 + 0,0888} - \frac{1,15}{12,4 \cdot 1,05} \cdot \frac{1,050 + 0,0308}{3,594 + 0,3642 - 0,0888} = 1 - 0,0564 - 0,0246 = 0,9190$$

bzw. entsprechend

$$\vartheta_1 = 1 - 0,0172 - 0,0084 = 0,9744,$$

$$\vartheta_2 = 1 + \frac{2,25}{12,4 \cdot 1,05} \cdot \frac{1,050 - 0,0308}{23,75 \cdot 1,1096 - 0,3642 - 0,0888} + \frac{1,15}{12,4 \cdot 1,05} \cdot \frac{1,0192}{26,34 + 0,3642 + 0,0888} = 1 + 0,0215 + 0,0106 = 1,0321$$

bzw. entsprechend

$$\vartheta_2 = 1 + 0,0175 + 0,0087 = 1,0262.$$

Damit wird schließlich

$$\sin \delta'_1 = \frac{1,050 + 0,0308}{\frac{3,594}{0,9190} - 0,3642 + 0,0888} = 0,2971 \quad \text{bzw.} \quad 0,0972,$$

$$\sin \delta'_1 = \frac{1,050 + 0,0308}{\frac{26,34}{1,0321} - 0,3642 - 0,0888} = 0,04315 \quad \text{bzw.} \quad 0,0328,$$

$$\sin \delta'_2 = \frac{1,050 + 0,0308}{3,911 + 0,3642 - 0,0888} = 0,2581 \quad \text{bzw.} \quad 0,0926,$$

$$\sin \delta'_2 = \frac{1,050 + 0,0308}{25,521 + 0,3642 + 0,0888} = 0,0416 \quad \text{bzw.} \quad 0,0319,$$

also

$$\delta'_1 - \delta'_1 = 17^\circ 17' - 2^\circ 38' = 14^\circ 29' \quad \text{bzw.} \quad 3^\circ 42',$$

$$\delta'_2 - \delta'_2 = 14^\circ 57' - 2^\circ 23' = 12^\circ 34' \quad \text{bzw.} \quad 3^\circ 29'.$$

Der auf der kleineren Scheibe umfaßte Winkel beträgt demnach

$$\alpha_2 = 169^\circ 48' + 12^\circ 34' = 182^\circ 22' \quad \text{bzw.} \quad 173^\circ 17'.$$

Die obige Schätzung entspricht also annähernd dem Wert für die lose geschlagenen Quadratseile. Für die fest geschlagenen Rundseile ist die Rechnung etwas zu ungünstig.

Der Durchhang der Seile in der Mitte ist mit den vorstehenden Zahlenwerten in den leeren Trümmern

$$f_1 = \frac{a \cdot \zeta \cdot \vartheta_1}{4 \cdot s'_1} = \frac{12,40 \cdot 1,050 \cdot 0,9744}{4 \cdot 3,238} = 0,977 \text{ m} \quad \text{bzw.} \quad 0,316 \text{ m,}$$

in den ziehenden Trümmern

$$f_2 = \frac{a \cdot \zeta \cdot \vartheta_2}{4 \cdot s'_2} = \frac{12,40 \cdot 1,050 \cdot 1,0321}{4 \cdot 23,75} = 0,141 \text{ m} \quad \text{bzw.} \quad 0,114 \text{ m.}$$

Die lose geschlagenen Seile haben in beiden Trümmern den geringeren Durchhang.

Beim Auflegen müssen die Seile wesentlich stärker angezogen werden, als die Rechnung ergibt. Freilich liegen darüber gar keine Versuchsunterlagen vor. Einstweilen dürfte vielleicht die doppelte Anspannung 3 Minuten nach Herstellung der Verbindung anzunehmen sein, wenn die berechnete Anspannung etwa 3 Wochen nach dem Auflegen noch vorhanden sein soll.

Das Gewicht der Seilscheibe von 2,3 m Durchmesser mit der Welle von $d = 12$ cm Stärke beträgt etwa $G = 1800$ kg. Wie eine Aufzeichnung leicht ergibt, wird dann der Achsdruck

$$P = 3350 \quad \text{bzw.} \quad 4550 \text{ kg.}$$

Der Wirkungsgrad setzt sich aus folgenden Beträgen zusammen: Anteil der Seilsteifigkeit nach Formel (238) und (208)

$$\eta_{st} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{1}{450} + \frac{1}{230} \right) = 0,9893$$

bzw.

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 0,10 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{0,222 + 0,435}{100} \right) = 0,9918.$$

Zur genauen Bestimmung des elastischen Gleitens liegen nicht alle Unterlagen vor, so daß nur geschätzt wird

$$\eta_{Gl} = 0,990.$$

Nach Formel (240) ist mit $\mu = 0,02$ allein für die kleinere Scheibe

$$\eta_z = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot \frac{3350 \cdot 12}{4000 \cdot \frac{115}{215}} = 0,9714 \quad \text{bzw.} \quad 0,9594.$$

Die Zapfenreibung des großen Schwungrades sowie sein Luftwiderstand wird am richtigsten dem Wirkungsgrad der Dampfmaschine zugerechnet.

Ebenfalls geschätzt wird der Einfluß des Luftwiderstandes der Seile und der kleineren Scheibe zu

$$\eta_L = 0,995.$$

Der Gesamtwirkungsgrad ist hiermit

$$\eta = 0,947 \quad \text{bzw.} \quad 0,937.$$

Der Trieb mit den lose geschlagenen Seilen hat infolge des erheblich kleineren Spannungsverhältnisses einen erhöhten Achsdruck, der den Wirkungsgrad herunternetzt. Der Unterschied in der Steifigkeit der Seile ist von ganz nebensächlicher Bedeutung. Der Unterschied im Wirkungsgrad zugunsten der fest geschlagenen Seile besteht allerdings nur dann, wenn man ihre Leistungsfähigkeit auch voll ausnutzt, sie also mit hohem Spannungsverhältnis und großem Durchhang im Leertrum betreibt, was freilich häufig nicht geschieht²⁰⁸).

Sachverzeichnis.

A

a Abstand, Festwert.
arc Bogen.
at Atmosphäre, Druck in kg/cm².
 α Winkel.
 α_w Wärmeausdehnungsziffer.
Achsschenkel 37.
Aggregatzustand 9.
Angriffstelle 12.
Arithmetische Reihe 76.
Atmosphäre 15.
Aufhängung 75, 121.
Aufzug 30.
Ausdehnungsstopfbüchse 16.
Ausleger 20.

B

b Breite, Abstand, Bogenlänge.
 β Winkel.
Belageisenquerschnitt 112.
Bewegung 10.
Biegemoment 63, 67, 109.
Bock, dreiseitiger 44, 46.
Bockkran 43.
Bogen 78, 95.
Bogenbrücke 21.
Bogenlampenaufhängung 21.
Bogenlänge 2.
Brückenbelastung 17.

C

c Feste Länge, Festwert.
C Integrationskonstante.
cm Zentimeter.
cos Kosinus.
cotg Kotangente.

D

d Durchmesser, Abstand.
dm Dezimeter.
d Differential.
D Durchmesser.
Dm Dekameter.
 δ Winkel, Dicke.
 Δ Unterschied.
Dach 37, 84.
Dachbinder 81.
Dachpfette 73, 84.
Derrickkran 21, 40, 62.

Differentialkurve 139.
Differentialrechnung 104, 147.
Drahtseilbahn 25, 77.
Drahtseilbahnwagen 124, 126, 127, 129.
Drahtseilscheibe 54.
Dreieck 4, 95, 96.
Drehkran 39, 65, 137, 142.
Drehmoment 51, 55, 58, 82.
Druck 14.
Durchhang 26, 143.
Dynamometer 11.

E

e Basis der natürlichen Logarithmen.
Einheitsgewicht 91.
Eisenbahnwagen 93.
Ellipse 102.
Erdumfang 1.
Exponentialreihe 147.

F

f Meßfehler, Durchhang.
F Fläche.
 φ veränderlicher Winkel.
Fabrikschornstein 16, 23, 45, 66, 100, 110, 120.
Fahrdraht 75.
Fehler 3, 6, 8.
Flächenberechnung 3, 4, 5.
Flächenmaß 3.
Flächendruck 14.
Förderanlage 74.

G

g Gramm.
G Gewicht.
 γ Winkel, Einheitsgewicht.
Gasbehälter 17.
Gasmaschinenventil 118.
Gegenwirkung 13.
Geländerbelastung 17.
Gelenkquader 126.
Geometrische Reihe 147.
Gerade 12, 94.
Gewicht 11, 89.
Gewichtseinheit 11.
Gewölbe 78.
Gießereikran 62.

Gleichgewicht 14, 20, 39, 41, 49, 51,
56, 61, 75.
Gleichgewichtsformen 121.
Größtwert 68.

H.

h Höhe.
H wagerechte Spannkraft.
Hammerdrehkran 134.
Hängewerk 22, 34.
Hebeelektromagnete 22, 42.
Homogen 91.

I.

i Anzahl.
Integralrechnung 104, 147.

K.

kg Kilogramm.
km Kilometer.
Kabelbahnwagen 132.
Kabelkran 23, 26, 32.
Kämpferdrucklinie 79.
Keil 110.
Kegel 5, 7, 8.
Kettenlinie 150.
Kilogramm 11.
Kippkante 141.
Kippmoment 133.
Kleinstwert 68.
Kolbenfläche 6.
Kolbenkraft 15.
Körper 1, 9.
Körpermaß 1.
Kosinus 27.
Kosinussatz 29.
Kotangente 27.
Kraft 11.
Kraftdarstellung 11, 20.
Krafteinheit 11.
Krafteck 38.
Kraftkreuz 88.
Kräfteedreieck 20.
Kräftevieleck 38.
Kräftepaar 58, 60.
Kräfteparallelogramm 33.
Kragträgerbrücke 128.
Kranträger 70, 72.
Kreis 2, 4, 94.
Kreisabschnitt 103.
Kreisausschnitt 99.
Kreisbogen 2.
Kreiskegel 5, 7, 8, 116.
Kreisring 117.
Kreiszyylinder 5, 8.
Kreuzkopf 15, 35.
Krümmung 122.
Kubikmeter 1.
Kugel 6, 8.

Kugelballon 119.
Kugelkalotte 118.
Kugelzone 118.
Kurbeltrieb 34.

L.

l Länge.
L Bogenlänge.
Längenbelastung 17.
Längenmaß 1.
Lasthakenquerschnitt 115.
Laufkran 109, 136.
Logarithmus 148.

M.

m Meter, Halbmesserverhältnis.
mm Millimeter.
M Moment.
Magnetspule 120.
Masse 9.
Mauerpfeiler 101, 141.
Menschengedrange 17.
Meßfehler 3.
Meter 1.
Mittelkraft 18, 25, 54.
Mittelpunkt 94.
Mittelwert 3.
Moment 51.
Momentenlinie 66, 68.

N.

N Widerlagerkraft.
Neigungswinkel 49, 87.

O.

O Mittelpunkt, Pol.

P.

p Flächendruck, Flüssigkeitsdruck,
Winddruck.
P Kraft, Last.
 π Ludolfische Zahl.
Parabel 2, 4, 107.
Parallele Kräfte 49.
Parallelogramm 4, 95.
Paralleltrapez 4, 97.
Pendelstütze 24.
Pol 50.
Polstrahlen 50.
Portalkran 137, 138.
Prisma 8.
Pyramide 8, 99.

Q.

q Längenbelastung.
Q Last, Querkraft.
Quader 8.
Quadratmeter 3.
Quadratwurzel 7.
Querkraft 63, 67.

R.

r Halbmesser.
R Halbmesser, Mittelkraft.
 Rauhreif 146.
 Rauminhalt 1.
 Raummaß 1.
 Rechteck 3, 94.
 Reihe 76, 147.
 Reihendampfmaschine 19.
 Resultante 18.
 Richtung 13.
 Riemenscheibe 30.

S.
s Sehne.
 sin Sinus.
S Spannkraft.
 ∫ Integral.
 ∑ Summe.
 ⊗ Sicherheit.
 Säulenbelastung 55.
 Scherenkran 44.
 Schiffschraube 108.
 Schleppdampfer 13, 29.
 Schleppwiderstand 19.
 Schneelast 37.
 Schornstein 16, 23, 45, 66, 100, 110, 120.
 Schrumpfvbindung 34.
 Schubstangenverhältnis 35.
 Schutznetz 156.
 Schwerebene 90.
 Schwerkraft 89.
 Schwerlinie 90.
 Schwerpunkt 89.
 Schwungrad 30, 53.
 Seileck 50, 57, 75.
 Seillänge 152.
 Seilscheibe 30, 54, 83.
 Seitenkraft 25, 39.
 Simpsonsche Regel 5.
 Sinus 27.
 Sinussatz 29.
 Speicherdrehkran 39.
 Spezifisches Gewicht 91.
 Stabilitätsmoment 133.
 Standdrehkran 65.
 Standsicherheit 128.
 Stirnzapfen 16, 109.
 Stopfbüchse 34.
 Stützdruck 33.
 Stützlinie 79.
 Summierung der Wirkungen 78.
 Symmetrieachse 94.
 Symmetrieebene 94.

T.

t Tonne.
t Temperatur.
 tg Tangente.
 Tangente 2, 27.
 Telegraphenleitung 43, 145.
 Tonne 11.
 Tragseil 25, 145.
 Träger, eingespannter 63.
 — auf 2 Stützen 64, 65, 66, 111.
 — mit beweglicher Last 69, 72.
 Trapez 4, 97.
 Trapezregel 5.
 Treibriemenlänge 117.
 Trigonometrie 27.

U.
u Veränderliche Größe, beliebige Verschiebung.
 Uferkran 36.
 Umdrehungsfläche 116.
 Umdrehungskörper 119.
 Unterzug 56.

V.
v Veränderliche Größe.
V Rauminhalt, lotrechte Stützkraft.
 Ventil 118.
 Verpuffungsdruck 15.
 Viereck 98.
 Viertelkreis 102.

W.
W Windkraft, Widerstand.
 Wagebalken 124, 127, 131.
 Welle 53, 54.
 Widerlagerkraft 78.
 Winddruck 17, 37.
 Winde 59, 60, 133.
 Winkeleisenquerschnitt 103.
 Winkelfunktion 27.
 Wirkungslinie 12.

X.
x Veränderlicher Wert.
X Seitenkraft.

Y.
y Veränderlicher Wert.
Y Seitenkraft.

Z.
z Veränderlicher Wert.
Z Seitenkraft.
 Zapfen 16.
 Zugseil 153.
 Zylinder 5, 6, 8.

Lehrbuch der technischen Mechanik. Von Professor **M. Grübler**, Dresden.
Erster Band: **Bewegungslehre.** Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit
144 Textfiguren. Preis M. 22.—

Zweiter Band: **Statik der starren Körper.** Mit 222 Textfiguren.
Preis M. 18.—*

Dritter Band: **Dynamik starrer Körper.** Mit 77 Textfig. Preis M. 24.—

Theoretische Mechanik. Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien
der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben.
Von Professor **A. E. H. Love.** Autorisierte deutsche Übersetzung der
zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster.** Mit 88 Textfiguren.
Preis M. 48.—; gebunden M. 54.—*

Mechanik für höhere Maschinenbauschulen. Von Professor Dr. **Karl
Laudien.** Mit etwa 230 Textfiguren. Unter der Presse.

Ingenieur-Mechanik. Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend
graphischer Behandlung. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-
Ingenieur, vormals Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung
an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Graphische Statik starrer Körper.** Mit 624 Textabbil-
dungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben.
Preis M. 14.—; gebunden M. 16.—*

Band 2—4 in Vorbereitung. Der zweite und dritte Band behandeln
die **gesamte Mechanik starrer und nichtstarrer Körper.**

Der vierte Band bringt die **Erweiterung der Festigkeitslehre und
Dynamik für Tiefbau-, Maschinen- und Elektroingenieure.**

Einführung in die Mechanik mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik.
Von Professor Dr. **Th. Pöschl** in Prag. Mit 102 Textabb. Preis M. 5.60*

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor **Ferd. Witten-
bauer** in Graz.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** Vierte, vermehrte und verbesserte
Auflage. 843 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 627 Textfiguren. Unver-
änderter Neudruck. Gebunden Preis M. 36.—*

Zweiter Band: **Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und
einer Formelsammlung. Dritte, verbess. Auflage. Mit 505 Textfiguren.
Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 39.—

Dritter Band: **Flüssigkeiten und Gase.** 586 Aufgaben nebst Lösungen
und einer Formelsammlung. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit
etwa 396 Textfiguren. In Vorbereitung.

Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen-
und Bauingenieure. Von **Ed. Autenrieth.** Dritte Auflage. Neu bear-
beitet von Professor Dr.-Ing. **Max Enßlin**, Stuttgart. Mit etwa 300 Text-
figuren. In Vorbereitung.

Technische Schwingungslehre. Von Diplom-Ingenieur Dr. phil. **Wilhelm
Hort.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. In Vorbereitung.

*Hierzu Teuerungszuschläge

Technische Thermodynamik. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle.**

Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 232 Textfiguren und 7 Tafeln.

Unter der Presse.

Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 202 Textabbildungen und 4 Tafeln.

Gebunden Preis M. 26.—*

Leitfaden der technischen Wärmemechanik. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 93 Textfiguren und 3 Tafeln. Steif broschiert Preis M. 18.—*

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur, vormals Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Niedere Algebra und Analysis — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung — Kegelschnitte.** Mit 320 Textfiguren und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Gebunden Preis M. 12.—*

Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für die Ingenieurwissenschaften wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen und angenäherten Verfahren einschl. der mechanischen und graphischen Hilfsmittel. Von Dipl.-Ing. Dr. phil. **W. Hort.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit etwa 230 Textfiguren und Abbildungen. Unter der Presse.

Lehrbuch der Mathematik. Für mittlere technische Fachschulen der Maschinenindustrie. Von Prof. Dr. **R. Neuendorff**, Oberlehrer an der Staatlichen höheren Schiffs- und Maschinenbauschule, Privatdozent an der Universität in Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 262 Textfiguren. Gebunden Preis M. 12.—*

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Von Dr. **Georg Scheffers**, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Erster Band: Mit 404 Textabbildungen. Preis M. 26.—; geb. M. 30.60*

Zweiter Band: Mit 396 Textabbildungen. Preis M. 52.—; geb. M. 60.—*

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. **A. W. Ludwig**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

Erster Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelsystem: Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel.** Mit 58 Textabbildungen. Preis M. 8.—*

C. W. Kreidels Verlag in Berlin und Wiesbaden

Praktische Winke zum Studium der Statik und zur Anwendung ihrer Gesetze. Ein Handbuch für Studierende und praktisch tätige Ingenieure. Von **Robert Otzen**, Geh. Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Dritte Auflage. Mit 125 Textabbildungen. Preis M. 20.—; gebunden M. 24.—

* Hierzu Teuerungszuschläge

Sachverzeichnis.

A.

a Abstand, große Halbachse.
 α Neigungswinkel, Umfassungswinkel.
Achsdruk 3, 249.
Ausbeute 240.
Aufzug 45.
Auspreßwinkel 240.

B.

b Abstand, Breite, kleine Halbachse.
 β Neigungswinkel, Zentriwinkel.
Balken auf geneigten Ebenen 48.
Bandbremse 235.
Bandreibung 230.
Belastung, spezifische 165, 181.
Berührung 1.
Bewegungsschraube 193.
Biege widerstand 222.
Blockzange 12.
Bremsband 234.
Bremsdruck 39.
Bremsklotz 29, 31.
Briefwage 18.
Brücke 45.
Brückenwage 24.
Buchbinderpresse 12.

C.

C Festwert.
c Festwert, Abstand, Geschwindigkeit, spezifische Belastung.

D.

D Durchmesser.
d Durchmesser, Abstand.
d Differential.
 δ Neigungswinkel, Dreh-, Voreilwinkel.
Dampfkesselnietung 46.
Dampfkolben 41.
Dampfmaschine 55.
Dezimalwage 25.
Differentialbremse 237.
Differential-Flaschenzug 229.
Differentialgetriebe 128, 130.

Diskusgetriebe 145.
Doppelhebel 12.
Drahtseil 222.
Drahtseilbahn 45, 87, 332.
Drahtseiltrieb 260.
Drehkran 94.
Drucklager 80.
Druckpumpe 3.
Druckrollentrieb 254.

E.

E Englerziffer.
e Abstand, Empfindlichkeit, Eingriffsdauer, Basis der natürlichen Logarithmen.
 ε Neigungswinkel.
 η Wirkungsgrad.
Eingriffsdauer 154, 160.
Eingriffsfeld 207.
Eingriffslinie 153.
Eingriffstrecke 157, 170.
Eisenbahnneigung 88.
Einzelräder 170.
Ellipse 97.
Elliptische Räder 137.
Empfindlichkeit 19, 20.
Englerziffer 62.
Epizykloide 151.
Ergänzungskegel 183.
Evolvente 151.
Evolventenverzahnung 155.
Exzenterreibung 76.

F.

F Querschnittsfläche.
f Funktion, Pfeilhöhe, Hebelarm des Rollwiderstandes.
 φ Veränderlicher Winkel.
Fahrwiderstand 92, 107, 109.
Fehler von Wagen 21.
Flachgängige Schraube 193.
Flachschieber 40.
Flaschenzug 224.
Flächendruck 28, 32, 62.

G.

G Gewicht.
g Spezifisches Gleiten.
 γ Neigungswinkel, Einheitsgewicht.
 Garnwage 18.
 Gasgewinde 202.
 Gegenmutter 203.
 Gelenkbolzenkette 223.
 Geometrische Reihe 225.
 Geschwindigkeit 29.
 Gleiskrümmung 110.
 Gleiten, spezifisches 161, 171.
 Gleitwinkel 241.
 Gliederkette 223.
 Globoidschnecke 216.
 Goniometrie 35.
 Graphitemulsion 64.
 Grissongetriebe 177.
 Grundkreis 155.
 Gurt 222.
 Güteverhältnis 53.

H.

H Wagerechte Kraft.
h Höhe, Ganghöhe, Sprung.
 Hammerdrehkran 120.
 Hanfseil 222.
 Hanfseiltrieb 262.
 Hebel 1.
 Hebelwage 17.
 Hobelmaschine 51, 54.
 Hohlkehle 105.
 Hubpunkt 9.
 Hydraulischer Speicherkran 226.
 Hyperbel 98.
 Hyperboloidräder 193.
 Hypozykloide 151.

I.

i Anzahl.

K.

k Ausbeute, Zahlenwert, zulässige Belastung.
 κ Zahlenwert.
 Kammzapfen 81.
 Kantenwinkel 199.
 Kegelräder 182.
 Kegelreibungskupplung 52.
 Kegelschnitte 97.
 Keil 55, 57.
 Keilnute 47.
 Keilnutenräder 34.
 Kniehebel 12, 15.
 Klotzbremse 37.
 Kolben 41.
 Kolbenringe 41.

Kolbenschieber 43.
 Kondensatorpumpe 4, 5, 6.
 Korrigierte Zahnform 159.
 Kraftwagen 51, 130.
 Kreis 97.
 Kreuzkopf 43.
 Kreuzkopffzapfen 75.
 Kugelbelastung 113, 114, 117.
 Kugellager 112.
 Kulisse 7.
 Kurbelwelle 74.
 Kurbelzapfen 73.

L.

l Länge.
 Lagerbelastung 73.
 Lagertemperatur 73.
 Lamellenreibungskupplung 81.
 Landfuhrwerk 90.
 Laufgewichtswage 22.
 Laufkran 103, 106.
 Leiter 36.
 Lokomotive 33.
 Lorenzgetriebe 216.
 Löwenherzgewinde 202.

M.

M Drehmoment.
m Modul.
 μ Reibungsziffer.
 Materialprüfmaschine 18.
 Mechanikergewinde 202.
 Metrisches Gewinde 202.
 Michell-Spurlager 82.
 Modul 156.

N.

N Gegenkraft.
 n Umdrehungszahl, Gewichtsteile einer Mischung.
 Nietmaschine 15, 16.
 Nietung 46.

O.

O Mittelpunkt.
 Öl 63, 64.
 Ölprüfmaschine 62.
 Ozoidenverzahnung 176.

P.

P Kraft.
p Parameter, Dampf-, Gas-, Wasser-, Flächendruck.
 π Ludolfische Zahl.
 ψ Verhältnis der Grenzübersetzungen.
 Parabel 98.
 Pekinggetriebe 219.
 Pfeilzähne 179, 185.

Planetengetriebe 128.
 Portalkrananlage 89.
 Potenzflaschenzug 225.
 Präzisionswaage 20.
 Prüfmaschine für Indikatorfedern 51.

Q.

Q Kraft, Last.
 q Spezifisches Quergleiten.
 Quergleiten 188, 208.

R.

R Mittelkraft, Halbmesser.
 r Halbmesser.
 ρ Reibungswinkel.
 Radreifen 29.
 Räderübersetzung 122.
 Reibung 28.
 Reibungshammer 141.
 Reibungskupplung 13, 32, 48, 52, 81.
 Reibungsräder 140.
 Reibungswaage 69, 70.
 Reibungswiderstand 28.
 Reibungswinkel 48.
 Reibungsziffer 29, 71, 72, 79, 141, 232, 242.
 Riemenlänge 246.
 Riemenscheibe 52.
 Riemtrieb 239.
 Ringspurlager 121.
 Rolle 87, 220.
 Rollenbelastung 118, 120.
 Rollentraglager 118.
 Rollkreis 170.
 Rollwiderstand 54, 87.
 Ruhewinkel 241.

S.

S Spannkraft.
 s Hub, Weg, Gurt-, Seilstärke.
 \ominus Sicherheit.
 \int Integral.
 Σ Summe.
 σ Zugbeanspruchung.
 Satzräder 170.
 Schachtförderanlage 46.
 Schalenkupplung 32, 58.
 Scharfgängige Schraube 199.
 Schaufelbagger 227.
 Scheibenkupplung 32.
 Schleifstein 31.
 Schlitten 31.
 Schmierfähigkeit 62.
 Schneckenflaschenzug 214.
 Schneckenrad 204.
 Schraube 193.
 Schraubenräder 187.
 Schutznetz 44.

Schwesterräder 132.
 Schwinge 2.
 Schwungrad-Andrehmaschine 4.
 Seilgreifer 13.
 Seilsteifigkeit 222.
 Seiltrieb 256.
 Seiltrommel 122.
 Selbstgreifer 14, 228.
 Selbstsperrung 57.
 Sellerskupplung 58.
 Senksperrbremse 196.
 Sicherheitsventil 3.
 Spannrolle 253.
 Spannungsverhältnis 248.
 Speicherkran 226.
 Spreizringkupplung 59, 238.
 Sprung 179.
 Spurerweiterung 110.
 Spurkranz 95.
 Spurlager 76, 120.
 Steigungswinkel 193.
 Steinbrecher 13.
 Steinzange 33.
 Straßenbahnwagen 122.
 Stopfbuchse 30, 42.
 Stützkugellager 116.
 Stützrollenlager 119.

T.

T Umfangskraft.
 t Zeit.
 t Temperatur.
 τ Teilung.
 Teilkreis 152.
 Teilung 124.
 Timkenlager 119.
 Tragkugellager 112.
 Traglager 62.
 Treibpunkt 9.
 Triebstockverzahnung 176.

U.

u kleinstes Übersetzungsverhältnis.
 \ddot{u} Übersetzungsverhältnis.
 Übersetzungsverhältnis 125, 157.
 Umfangsgeschwindigkeit 29.
 Umfangskraft 140.
 Umlaufgetriebe 128, 131.
 Umlaufrad 131.
 Unbestimmte Formen 209.
 Ungenauigkeit 23.
 Unterschneidung 159.

V.

V Lotrechte Kraft, Fahrtgeschwindigkeit.
 v Geschwindigkeit.

Ventil 8, 42.
 Verschußhebel 7.
 Viskosimeter 62.
 Vorspannung 239, 249.

W.

W Widerstandskraft.
w Widerstand.
 Wälzhebel 9.
 Wechselgetriebe 186.
 Welle 76.
 Wendegetriebe 147.
 Whitworthgewinde 201.
 Winde 125, 126, 143.
 Winkelhebel 1, 6.
 Wirkungsgrad 53.

X.

x veränderlicher Abstand, Ausschlag.

Y.

y veränderlicher Abstand.

Z.

Z Schleuderkraft.
z veränderlicher Abstand, Kugel-, Rollen-, Zähnezahl, Zähigkeit.
 Zahndruckverteilung 155.
 Zahnprofil 153.
 Zahnräder 150.
 Zahnradvorgelege 123.
 Zahnreibung 155.
 Zähigkeit 62.
 Zentesimalwage 25.
 Zentralrad 131.
 Zentratorkupplung 148.
 Zugkraft 33, 91, 92.
 Zyklische Kurven 150.
 Zykloide 150.
 Zykloidenverzahnung 169.

Verbesserungen zum ersten Band:

Seite 11, Zeile 5 v. u.: 1,000028 dm³.

„ 20, „ 11 „ : $\alpha = 35^\circ$.

„ 20, „ 3 „ : $S_1 = 26,6 \text{ mm} = 25 \cdot 26,6 = 665 \text{ kg}$.

„ 20, „ 2 „ : $S_2 = 32,5 \text{ mm} = 25 \cdot 32,5 = 860 \text{ kg}$.

„ 69—71, Beispiel 84 u. 85: statt l^2 ist l zu setzen und die Zahlenrechnung entsprechend zu ändern.

„ 72, Zeile 11 v. u.: $M_{\max} = \frac{1}{4} \cdot (P_1 + P_2) \cdot l \cdot \left(1 - \frac{a}{l} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}\right)^2$.

„ 109, Beispiel 110 erste Zeile: $l = 11,6 \text{ m}$.

Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen

Von

Dipl.-Ing. P. Stephan

Regierungs-Baumeister, Professor

Erster Band

Allgemeine Statik

Mit 300 Textfiguren

Gebunden Preis M. 40.—

Inhaltsverzeichnis.

- I. Die Grundlehren der Statik.
 - 1. Längen, Flächen, Räume.
 - 2. Körper und ihre Zustände.
 - 3. Kräfte.
 - 4. Kraft, Flächendruck, Längenbelastung.
- II. Die Kräfte und Drehmomente.
 - 5. Kräfte in derselben Wirkungslinie.
 - 6. Das Kräfte Dreieck.
 - 7. Das ebene Kräfteviereck.
 - 8. Kräfte im Raum an einem Punkt.
 - 9. Parallele Kräfte in derselben Ebene.
 - 10. Kräftepaare.
 - 11. Das Seileck für beliebig gerichtete Kräfte.
 - 12. Beliebige im Raum wirkende Kräfte.
- III. Das Gleichgewicht.
 - 13. Der Schwerpunkt.
 - 14. Formen des Gleichgewichtes.
 - 15. Die Standsicherheit.
 - 16. Das gespannte Seil.
- IV. Eingeschobene Grundlehren der Mathematik.
 - a) Trigonometrie.
 - b) Geometrische Beziehungen im Raum.
 - c) Differential- und Integralrechnung I.
 - d) Differential- und Integralrechnung II.

Lehrbuch der technischen Mechanik. Von Martin Gröbler, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Erster Band: **Bewegungslehre.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 144 Textfiguren.

Preis M. 22.—

Zweiter Band: **Statik der starren Körper.** Mit 222 Textfiguren.

Preis M. 18.—

Dritter Band: **Dynamik starrer Körper.** Mit 77 Textfiguren.

Preis M. 24.—

Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer. Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Von Dr.-Ing. Karl Laudien, Professor der staatlichen höheren Maschinenschule in Breslau. Mit 229 Textfiguren.

Preis M. 30.—

Ingenieur-Mechanik. Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. H. Egerer.

Erster Band: **Graphische Statik starrer Körper.** Mit 624 Textabbildungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. Preis M. 14.—; gebunden M. 16.—

Band 2—4 in Vorbereitung. Der zweite und dritte Band behandeln die gesamte Mechanik starrer und nichtstarrer Körper. Der vierte Band bringt die Erweiterung der Festigkeitslehre und Dynamik für Tiefbau-, Maschinen- und Elektroingenieure.

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Prof. Ferd. Wittenbauer in Graz.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** 848 Aufgaben nebst Lösungen. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 627 Textfiguren. Gebunden Preis M. 36.—

Zweiter Band: **Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. 1918.

Gebunden Preis M. 39.—

Dritter Band: **Flüssigkeiten und Gase.** Mit 419 Textfiguren. Dritte, verbesserte Auflage. Gebunden Preis etwa M. 60.—

Einführung in die Mechanik mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Von Professor Dr. Th. Pöschl in Prag. Mit 102 Textabbildungen.

Preis M. 5.60

Theoretische Mechanik. Von Professor A. E. H. Love in Oxford. Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. Hans Polster. Mit 88 Textfiguren.

Preis M. 48.—; gebunden M. 54.—

Technische Thermodynamik. Von Professor W. Schüle, Dipl.-Ing.

Erster Band: **Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen.** Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 225 Textfiguren und 7 Tafeln. Gebunden Preis M. 105.—

Zweiter Band: **Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen** nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage der „Technischen Wärmemechanik“. Mit 202 Textfiguren und 4 Tafeln. Gebunden Preis M. 75.—

Technische Hydrodynamik. Von Professor Dr. Franz Prásil in Zürich. Mit 81 Textfiguren.

Gebunden Preis M. 9.—

Hierzu Teuerungszuschläge

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. **H. Egerer**.

Erster Band: Niedere Algebra und Analysis — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung — Kegelschnitte. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Berichtigter Neudruck. Gebunden Preis M. 90.—

Zweiter Band: Differential- und Integralrechnung — Reihen und Gleichungen — Kurvendiskussion — Elemente der Differentialgleichungen — Elemente der Theorie der Flächen- und Raumkurven — Maxima und Minima. Mit 477 Textabbildungen und über 1000 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Gebunden Preis etwa M. 100.—

Dritter Band: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Flächen, Raumkurven, partielle Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, Fouriersche Reihen usw. In Vorbereitung

Lehrbuch der Mathematik. Für mittlere technische Fachschulen der Maschinenindustrie. Von Professor Dr. **R. Neuendorff** in Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 262 Textfiguren. Gebunden Preis M. 12.—

Planimetrie mit einem Abriß über die Kegelschnitte. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauche an technischen Mittelschulen. Von Professor Dr. **Adolf Heß** in Winterthur. Zweite Auflage. Mit 207 Textfiguren. Preis M. 6.60

Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker. Ein Lehr- und Aufgabenbuch für den Unterricht und zum Selbststudium. Von Professor Dr. **Ad. Heß** in Winterthur. Dritte Auflage. Mit 112 Textfiguren. Preis M. 6.—

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Von Professor Dr. **G. Scheffers** in Berlin.

Erster Band: Mit 404 Figuren im Text. Preis M. 26.—; geb. M. 30.60

Zweiter Band: Mit 396 Figuren im Text. Preis M. 52.—; gebunden M. 60.—

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Professor Dr. **W. Ludwig** in Dresden.

Erster Teil: Das rechtwinklige Zweitafelsystem. Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel. Mit 58 Textfiguren. Preis M. 8.—

Die Technologie des Maschinentechnikers. Von Professor Ing. **Karl Meyer** in Köln. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 431 Textfiguren. Gebunden Preis M. 28.—

Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau. Von **Heinrich Holzer**, Obergeringieur der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg. Mit vielen praktischen Beispielen und 48 Textfiguren. Preis M. 60.—; gebunden M. 68.—

Kompendium der Statik der Baukonstruktionen. Von Dr.-Ing. J. Pirlet, Privatdozent an der Techn. Hochschule zu Aachen. In zwei Bänden.

Zuerst erschien:

Zweiter Band: **Die statisch unbestimmten Systeme.**

Erster Teil: **Die allgemeinen Grundlagen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme.** Die Untersuchung elastischer Formänderungen. Die Elastizitätsgleichungen und deren Auflösung. Mit 136 Textfiguren. Preis M. 40.—; gebunden M. 46.—

Praktische Winke zum Studium der Statik und zur Anwendung ihrer Gesetze. Ein Handbuch für Studierende und praktisch tätige Ingenieure. Von Prof. Rob. Otzen, Geheimer Regierungs-Rat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 125 Textfiguren.

Preis M. 20.—; gebunden M. 24.—

(C. W. Kreidels Verlag in Berlin W 9)

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Dr.-Ing. C. Bach, Württ. Staatsrat, Professor des Maschineningenieurwesens, Vorstand des Ingenieur-Laboratoriums und der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Stuttgart. Achte, vermehrte Auflage. Unter Mitwirkung von Professor R. Baumann in Stuttgart. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 2 Buchdrucktafeln und 25 Tafeln in Lichtdruck. Gebunden Preis M. 88.—

Die Knickfestigkeit. Von Dr.-Ing. Rudolf Mayer, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. Preis M. 120.—; gebunden M. 130.—

Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke.

Elementares Lehrbuch. Von H. Buchholz. Mit 303 Textabbildungen. Preis M. 62.—; gebunden M. 68.—

Repetitorium für den Hochbau. Für den Gebrauch an Technischen Hochschulen und in der Praxis. Von Geheimem Hofrat Professor Dr.-Ing. E. h. Max Foerster in Dresden.

Erstes Heft: **Graphostatik und Festigkeitslehre.** Mit 146 Textfiguren. Preis M. 12.— (einschl. Teuerungszuschlag)

Zweites Heft: **Abriß der Statik der Hochbaukonstruktionen.** Mit 157 Textfiguren. Preis M. 12.— (einschl. Teuerungszuschlag)

Drittes Heft: **Grundzüge der Eisenkonstruktionen des Hochbaues.** Mit 283 Textfiguren. Preis M. 20.—

Taschenbuch für Bauingenieure. Unter Mitarbeit zahlreicher Fachgelehrter herausgegeben von Geh. Hofrat Professor Dr.-Ing. E. h. M. Foerster in Dresden. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 3070 Textfiguren. In zwei Teilen.

In einem Bande gebunden Preis M. 64.—

Taschenbuch für den Maschinenbau. Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachleute von Professor H. Dubbel, Ingenieur, Berlin. Dritte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 2620 Textfiguren und 4 Tafeln. In zwei Teilen.

In einem Band gebunden Preis M. 70.—; in zwei Bänden gebunden M. 84.—

Hilfsbuch für den Maschinenbau. Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Oberbaurat Fr. Freytag †, Professor i. R. Sechste, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1288 in den Text gedruckten Figuren, 1 farbigen Tafel und 9 Konstruktionstafeln. Gebunden Preis M. 60.—
