

CALCUL
DES
PONTS MÉTALLIQUES
A POUTRES DROITES ET CONTINUES.

CALCUL
DES
PONTS MÉTALLIQUES

A POUTRES DROITES ET CONTINUES

PAR

G. PIARRON DE MONDÉSIR

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ATTACHÉ A LA GRANDE SOCIÉTÉ DES CHEMINS DE FER RUSSES.



PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

SUCCESSEUR DE V^{or} DALMONT,

PRÉCÉDEMMENT CARILIAN-GOEURY ET V^{or} DALMONT,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, N^o 49.

1860

AVANT-PROPOS.



Le but de ce travail est surtout de faciliter les calculs auxquels donne lieu l'application de la théorie de la flexion des poutres à la construction des ponts métalliques à poutres droites et continues.

Les méthodes de calcul actuellement en usage exigent des éliminations laborieuses.

Celle de Navier, consistant dans la détermination préalable des valeurs des réactions sur les appuis, donne lieu à des calculs extrêmement compliqués.

La méthode dont on se sert habituellement est celle donnée par M. Clapeyron. Elle consiste dans la détermination préalable des valeurs des moments de rupture sur les appuis.

Cette méthode a été simplifiée tout récemment par M. Bresse, ingénieur des ponts et chaussées.

En résumé, dans l'état actuel de la question, le calcul d'un pont métallique de $n + 1$ travées dépend de la détermination de n inconnues par n équations.

C'est cette détermination, qui devait se faire arithmétiquement et pour chaque cas particulier, que nous sommes parvenu à effectuer algébriquement, et d'une manière générale, avec le concours de certaines séries dont la loi de formation est aussi simple que le calcul nécessaire à leur établissement.

Les formules générales que nous donnons ici constituent donc une nouvelle méthode affranchie des complications et des chances d'erreur de l'élimination, et avec laquelle on peut maintenant aborder le calcul d'un pont d'un nombre quelconque de travées.

De ces formules générales se déduisent divers principes sur les *maxima* et *minima* des moments de rupture, efforts tranchants et réactions au moyen desquels la courbe-enveloppe des moments *maxima* se trace d'une manière sûre et exempte de tout tâtonnement.

Ce travail est divisé en cinq chapitres.

Le premier est consacré à l'établissement de formules générales exprimant les valeurs des réactions, efforts tranchants et moments de rupture sur les piles et culées en fonction des poids et ouvertures des travées.

Le second est consacré à la discussion de ces formules et à la démonstration des principes qui servent à établir le tracé normal de la courbe-enveloppe des moments *maxima*.

Le troisième contient des applications des formules à des exemples.

Le quatrième traite spécialement le cas des travées égales.

Enfin le cinquième donne des formules pour les ponts encastrés sur les culées, et la solution du problème des *ponts équilibrés*, c'est-à-dire des ponts dont le travail est le même pour toutes les travées sous l'influence d'une surcharge nulle ou uniformément répartie.

Gatchina (Russie), décembre 1859.



PONTS MÉTALLIQUES

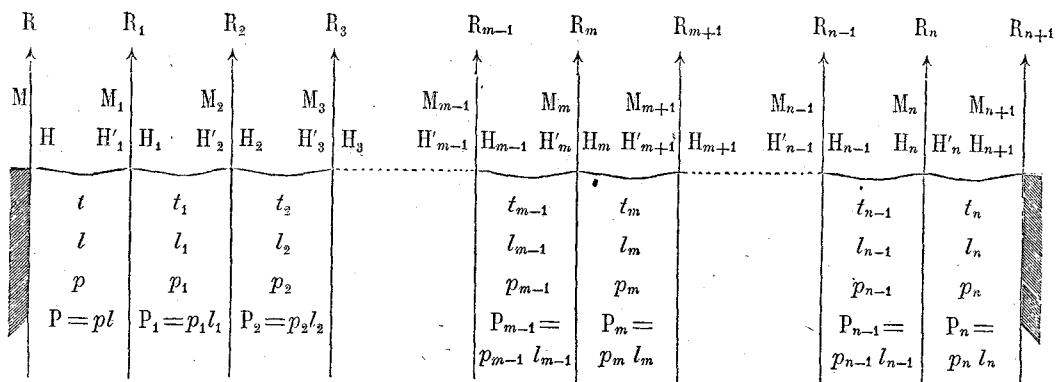
A POUTRES DROITES.

CHAPITRE I.

ÉTABLISSEMENT DE FORMULES GÉNÉRALES POUR LE CALCUL D'UN PONT MÉTALLIQUE
A POUTRES DROITES ET CONTINUES.

I. *Résumé de la théorie de la flexion des poutres métalliques.* — Considérons une poutre métallique de forme prismatique reposant horizontalement sur $n + 2$ appuis, et appartenant à un pont de $n + 1$ travées (*fig. 1*).

Figure 1.



l, l_1, l_2, \dots, l_n sont les ouvertures des travées;

p, p_1, p_2, \dots, p_n les poids uniformément répartis dans l'étendue d'une travée par unité de longueur;

P, P_1, P_2, \dots, P_n les poids totaux de chaque travée.

Sous l'influence des poids qui la chargent, la poutre tend à fléchir vers le milieu des travées et à se roidir sur les piles. Elle exerce sur chaque point d'appui une pression dont la valeur ne saurait être déterminée *a priori*.

En supposant les appuis supprimés, et la poutre suspendue par des poids égaux aux pressions dont il s'agit, l'état d'équilibre de la poutre ne sera point changé, et chaque pression pourra être remplacée par une tension dirigée verticalement de bas en haut, et à laquelle on donne le nom de *réaction*.

Ce sont ces réactions que nous désignerons par les lettres : $R, R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}$.

La poutre étant ainsi suspendue devient un *corps entièrement libre*. Les conditions de son équilibre seront données par les équations générales d'équilibre d'un *corps entièrement libre* soumis à l'action de forces F . Ces équations sont au nombre de six, savoir (*) :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad (1); & \quad \Sigma F_y = 0 & \quad (2); & \quad \Sigma F_z = 0 & \quad (3); \\ \Sigma M_x F = 0 & \quad (4); & \quad \Sigma M_y F = 0 & \quad (5); & \quad \Sigma M_z F = 0 & \quad (6). \end{aligned}$$

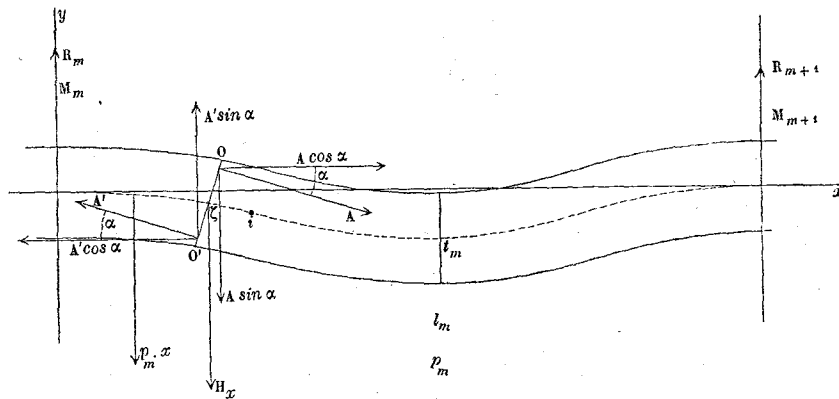
ΣF_x est la somme des composantes des forces F suivant l'axe des x .

$\Sigma M_x F$ est la somme des moments de ces forces pris par rapport à l'axe des x .

Les trois premières équations expriment que le corps ne peut se mouvoir parallèlement à lui-même dans aucune direction, et les trois dernières qu'il ne peut tourner sur lui-même dans aucun sens.

Supposons maintenant que la poutre ait été sciée par un point ζ de la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée situé à une distance x de la $m^{\text{ème}}$ pile (*fig. 2*).

Figure 2.



(*) Traité de mécanique de Poisson, t. I, page 503.

(Nous supposons ici la section oo' faite à gauche du point d'*inflexion* i , où la courbe décrite par la travée cesse d'être convexe pour devenir concave.)

L'équilibre de la poutre sera détruit.

Les fibres de la partie supérieure ζo de la section oo' , lesquelles dans l'état d'équilibre étaient allongées, tendront à se raccourcir. Celles de la partie inférieure $\zeta o'$, qui étaient raccourcies, tendront au contraire à s'allonger. D'un autre côté, la partie gauche de la poutre sciée restant suspendue, serait entraînée de bas en haut.

Pour rétablir l'équilibre, il faut et il suffit :

1° D'appliquer à chaque fibre tendant à se raccourcir une force A dirigée dans le sens de cette fibre, agissant de gauche à droite et capable de la maintenir dans sa position primitive;

2° D'appliquer une force semblable A' agissant de droite à gauche à chaque fibre tendant à s'allonger;

3° D'appliquer sur l'axe ζ , contenant les fibres *neutres* qui n'ont subi ni allongement ni raccourcissement, une force verticale H_x agissant dans le sens de la gravité et capable de maintenir l'équilibre vertical du système.

La poutre étant ainsi suspendue et sciée restera en équilibre sous l'action des forces extérieures qui sont toutes verticales, et des forces intérieures qui peuvent être considérées comme parallèles à un plan vertical parallèle lui-même aux arêtes de la poutre.

Dans ce cas particulier, les six équations générales d'équilibre se réduiront à trois, savoir :

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1); \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2); \quad \Sigma M_z F = 0 \quad (6).$$

Plaçons l'origine des coordonnées sur l'axe de la $m^{\text{ème}}$ pile à la hauteur de l'axe neutre de la poutre.

Désignons :

par $\Sigma^m P$ la somme $P + P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}$,

par $\Sigma^m R$ la somme $R + R_1 + R_2 + \dots + R_m$,

et par α l'angle formé par la fibre neutre ζ de la section oo' avec l'horizontale.

La composante des forces extérieures suivant l'axe des x étant nulle, la première équation d'équilibre se réduit à :

$$\Sigma A \cos \alpha - \Sigma A' \cos \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma A = \Sigma A'.$$

La seconde équation d'équilibre prend la forme suivante, en observant que $\Sigma A \sin \alpha = \Sigma A' \sin \alpha$:

$$\Sigma^{m-1}P + p_m x + H_x - \Sigma^m R = 0;$$

d'où l'on déduit :

$$H_x = \Sigma^m R - \Sigma^{m-1}P - p_m x.$$

La force H_x est ce que l'on nomme l'*effort tranchant* dans la section oo' . Elle tend à séparer deux sections voisines en les sollicitant à glisser l'une sur l'autre suivant la verticale.

Si dans l'équation précédente nous faisons $x = 0$, nous aurons pour la valeur de l'effort tranchant à droite de la $m^{\text{ème}}$ pile, quantité que nous appellerons H_m :

$$H_m = \Sigma^m R - \Sigma^{m-1}P.$$

(L'effort tranchant à gauche de la $m^{\text{ème}}$ pile sera désigné par H'_m .)

Nous pourrions donc écrire en général :

$$H_x = H_m - p_m x.$$

Enfin la troisième équation d'équilibre sera :

$$\Sigma M_x A + \Sigma M_x A' = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-2} (P \Sigma^{m-1} l_1) - \Sigma^{m-1} (R \Sigma^{m-1} l) - (\Sigma^m R - \Sigma^{m-1} P)x + \frac{p_m x^2}{2}.$$

En faisant :

$$\Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{2} + \frac{P_1 l_1}{2} + \frac{P_2 l_2}{2} + \dots + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{2};$$

$$\Sigma^{m-2} (P \Sigma^{m-1} l_1) = P(l_1 + l_2 + \dots + l_{m-1}) + P_1(l_2 + \dots + l_{m-1}) + \dots + P_{m-2} l_{m-1};$$

$$\Sigma^{m-1} (R \Sigma^{m-1} l) = R(l + l_1 + l_2 + \dots + l_{m-1}) + R_1(l_1 + l_2 + \dots + l_{m-1}) + \dots + R_{m-1} l_{m-1}.$$

La quantité $\Sigma M_x A + \Sigma M_x A'$ est ce que l'on appelle le *moment d'élasticité* de la poutre prismatique.

Le second terme de l'équation est ce que l'on nomme le *moment de rupture* de la poutre au point où nous l'avons supposée sciée.

Si dans l'équation des moments nous faisons $x = 0$, nous aurons pour le moment

de rupture sur la $m^{\text{ème}}$ pile, quantité que nous désignerons par M_m , la valeur suivante :

$$M_m = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-2}(P\Sigma^{m-1}l_1) - \Sigma^{m-1}(R\Sigma^{m-1}l).$$

L'équation des moments peut donc s'écrire ainsi d'une manière générale :

$$\Sigma M_x A + \Sigma M_x A' = M_m - H_m x + \frac{p_m x^2}{2}.$$

Il nous reste maintenant à définir le moment d'élasticité $\Sigma M_x A + \Sigma M_x A'$.

Si l'on soumet une tige de fer de longueur L et de section S à l'action d'une force A qui tend à l'allonger, et si l'on désigne par i l'allongement produit, on remarquera que les variations de A et de i seront proportionnelles, tant que la force A ne dépassera pas 15 kilogrammes par millimètre carré.

Si donc on désigne par E ce rapport constant de la force à l'allongement dans ces limites, on aura :

$$E = \frac{AL}{Si}.$$

En prenant le millimètre pour unité de longueur et le millimètre carré pour unité de surface, les expériences ont donné pour E la valeur moyenne :

$$E = 19.816,440.$$

Cette valeur de E se nomme : *coefficient d'élasticité à la traction*.

La valeur du coefficient d'élasticité à la compression étant sensiblement la même, les auteurs n'attribuent qu'une seule valeur à E , soit à la traction, soit à la compression, et cette quantité prend alors la dénomination générale de *coefficient d'élasticité*.

De l'équation précédente nous tirerons :

$$A = \frac{ESi}{L};$$

dans laquelle i représentera soit un allongement, soit un raccourcissement.

En appliquant cette formule aux fibres de la section oo' (*fig. 2*), nous ferons :

$$S = d\omega \quad \text{pour la fibre A,}$$

et

$$S = d\omega' \quad \text{pour la fibre A'.$$

Nous aurons de plus :

$$\frac{i}{L} = \frac{v}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{i'}{L} = \frac{v'}{\rho};$$

en désignant par v et v' les distances des fibres A et A' à la fibre neutre ζ , et par ρ le rayon de courbure de la poutre au point où est faite la section oo' .

Nous pourrions donc écrire :

$$A = \frac{E}{\rho} v d\omega \quad \text{et} \quad A' = \frac{E}{\rho} v' d\omega'.$$

La première équation d'équilibre deviendra :

$$\Sigma v d\omega = \Sigma v' d\omega'.$$

Elle indique que l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section oo' .

Le moment d'élasticité prend alors la forme :

$$\frac{E}{\rho} (\Sigma v^2 d\omega + \Sigma v'^2 d\omega').$$

La quantité $(\Sigma v^2 d\omega + \Sigma v'^2 d\omega')$ est ce que l'on nomme le *moment d'inertie* de la section oo' . On le désigne ordinairement par la lettre I.

Le moment d'élasticité est donc :

$$\frac{EI}{\rho}.$$

Quand la forme de la poutre sera symétrique par rapport à un plan horizontal, on aura :

$$I = 2\Sigma v^2 d\omega.$$

Pour pouvoir résoudre l'équation des moments, il faut exprimer ρ en fonction de x ;

et pour pouvoir évaluer le travail r par millimètre carré de la fibre la plus fatiguée de la section oo' , il faut, de plus, exprimer ρ en fonction de r .

Pour exprimer ρ en fonction de x , il suffit de recourir à la formule connue :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Les flexions des travées étant généralement très-petites, Navier, l'auteur de la théorie de la flexion des poutres, néglige le carré de la tangente $\frac{dy}{dx}$, et écrit simplement :

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Pour exprimer maintenant ρ en fonction de r , si nous désignons par h la distance de la fibre extrême à l'axe neutre, nous aurons :

$$r = \frac{Eh}{\rho}; \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{Eh}{r}.$$

Le moment d'élasticité pourra donc s'écrire des deux manières suivantes, en fonction de x et de r :

$$\Sigma M_z A + \Sigma M_z A' = EI \frac{d^2y}{dx^2} = \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{en faisant} \quad \varepsilon = EI;$$

$$\Sigma M_z A + \Sigma M_z A' = \frac{rI}{h}.$$

II. *Équations générales d'équilibre d'une travée quelconque d'un pont métallique.* — En résumé, la théorie de la flexion des poutres donne trois équations d'équilibre pour le calcul d'un pont métallique :

$$\Sigma v d\omega = \Sigma v' d\omega' \quad (1),$$

$$H_x = H_m - p_m x \quad (2),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{rI}{h} = M_m - H_m x + \frac{p_m x^2}{2} \quad (3).$$

La première ne peut servir qu'à déterminer la position de l'axe neutre, dans le cas où la section ne serait pas symétrique.

La deuxième est celle des efforts tranchants. Quand H_m sera déterminé, elle donnera la valeur de cette force qui tend à rompre les fibres en agissant normalement à leur direction.

La troisième est celle des moments. Quand on connaîtra H_m et M_m , elle donnera la valeur du moment de rupture en un pont quelconque de la $(m+1)^{ème}$ travée; et en comparant cette valeur à celle du moment d'élasticité $\frac{r^1}{h}$, on connaîtra le travail par millimètre carré de la fibre la plus fatiguée.

Le calcul d'un pont métallique dépend donc de la détermination des moments de rupture et des efforts tranchants sur les appuis.

Le problème à résoudre présente en réalité trois groupes d'inconnues : les réactions, les efforts tranchants et les moments de rupture. Un groupe quelconque étant connu, on en déduira les deux autres au moyen des relations suivantes :

1° *Efforts tranchants et moments en fonction des réactions.*

$H = R;$	$M = 0;$
$H_1 = H + R_1 - P = \Sigma^1 R - P;$	$M_1 = \frac{Pl}{2} - Rl;$
$H_2 = H_1 + R_2 - P_1 = \Sigma^2 R - \Sigma^1 P;$	$M_2 = \Sigma^1 \frac{Pl}{2} + Pl_1 - \Sigma^1 (R \Sigma^1 l);$
$H_3 = H_2 + R_3 - P_2 = \Sigma^3 R - \Sigma^2 P;$	$M_3 = \Sigma^2 \frac{Pl}{2} + \Sigma^1 (P \Sigma^2 l_1) - \Sigma^2 (R \Sigma^2 l);$
.....
$H_m = H_{m-1} + R_m - P_{m-1} = \Sigma^m R - \Sigma^{m-1} P;$	$M_m = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-2} (P \Sigma^{m-1} l_1) - \Sigma^{m-1} (R \Sigma^{m-1} l);$

2° *Réactions et moments en fonction des efforts tranchants.*

$R = H;$	$M = 0;$
$R_1 = H_1 - H + P;$	$M_1 = -Hl + \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{2} - Hl;$
$R_2 = H_2 - H_1 + P_1;$	$M_2 = M_1 - H_1 l_1 + \frac{P_1 l_1}{2} = \Sigma^1 \frac{Pl}{2} - \Sigma^1 Hl;$
$R_3 = H_3 - H_2 + P_2;$	$M_3 = M_2 - H_2 l_2 + \frac{P_2 l_2}{2} = \Sigma^2 \frac{Pl}{2} - \Sigma^2 Hl;$
.....
$R_m = H_m - H_{m-1} + P_{m-1};$	$M_m = M_{m-1} - H_{m-1} l_{m-1} + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{2} = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} - \Sigma^{m-1} Hl.$

3° Réactions et efforts tranchants en fonction des moments.

$$\begin{array}{l}
 R = -\frac{M_1}{l} + \frac{P}{2}; \\
 R_1 = M_1 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} \right) - \frac{M_2}{l_1} + \frac{P_1}{2} + \frac{P}{2}; \\
 R_2 = -\frac{M_1}{l_1} + M_2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) - \frac{M_3}{l_2} + \frac{P_2}{2} + \frac{P_1}{2}; \\
 R_3 = -\frac{M_2}{l_2} + M_3 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) - \frac{M_4}{l_3} + \frac{P_3}{2} + \frac{P_2}{2}; \\
 \dots \\
 R_m = -\frac{M_{m-1}}{l_{m-1}} + M_m \left(\frac{1}{l_{m-1}} + \frac{1}{l_m} \right) - \frac{M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2} + \frac{P_{m-1}}{2};
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 H = -\frac{M_1}{l} + \frac{P}{2}; \\
 H_1 = \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{P_1}{2}; \\
 H_2 = \frac{M_2 - M_3}{l_2} + \frac{P_2}{2}; \\
 H_3 = \frac{M_3 - M_4}{l_3} + \frac{P_3}{2}; \\
 \dots \\
 H_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2}.
 \end{array}
 \right.$$

Les valeurs de H_m et de M_m en fonction des réactions résultent de la définition elle-même des efforts tranchants et moments de rupture.

Il en est de même de la valeur de R_m en fonction des efforts tranchants.

La valeur de M_m en fonction des efforts tranchants se déduit immédiatement de l'équation d'équilibre des moments dans laquelle il suffit de faire $x = l_{m-1}$.

Les deux derniers groupes de formules se déduisent des deux précédents.

On peut donc choisir à volonté le groupe d'inconnues à déterminer d'abord.

Suivant qu'on choisira pour inconnues les réactions, les efforts tranchants ou les moments, l'équation d'équilibre des moments prendra les trois formes suivantes :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-2} (P\Sigma^{m-1}l_1) - \Sigma^{m-1} (R\Sigma^{m-1}l) - (\Sigma^m R - \Sigma^{m-1} P) x + \frac{p_m x^2}{2} \quad (R)$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} - \Sigma^{m-1} Hl - H_m x + \frac{p_m x^2}{2}. \quad (H)$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M_m - \left(\frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2} \right) x + \frac{p_m x^2}{2}. \quad (M)$$

L'équation (R) est celle qui sert de base à la méthode de Navier.

L'équation (M) a été donnée par M. Clapeyron, qui en a fait la base de sa méthode (*).

Quant à l'équation (H), on n'en a fait aucun usage jusqu'à ce jour,

(*) Voir pour la description des méthodes Navier et Clapeyron l'ouvrage sur les ponts métalliques de MM. Molinos et Pronier.

III. *Équation fondamentale exprimant que les courbes décrites par deux travées voisines ont même tangente sur la pile qui les sépare.* — Reportons-nous à l'équation générale d'équilibre des moments :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M_m - H_m x + \frac{P_m x^2}{2}.$$

Si nous intégrons cette équation une première fois, nous obtiendrons la relation suivante pour la détermination de la valeur de la tangente en un point quelconque de la courbe décrite par la $(m + 1)^{\text{ème}}$ travée :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left(M_m x - \frac{H_m x^2}{2} + \frac{P_m x^3}{6} + C \right).$$

Pour déterminer la constante C, intégrons une seconde fois, nous aurons :

$$y = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M_m x^2}{2} - \frac{H_m x^3}{6} + \frac{P_m x^4}{24} + Cx \right).$$

Ici la constante est nulle, parce que, d'après l'hypothèse admise dès le début, la poutre repose horizontalement sur ses appuis, et que $y = 0$ pour $x = 0$.

Faisons dans cette dernière équation $x = l_m$, nous aurons :

$$0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M_m l_m^2}{2} - \frac{H_m l_m^3}{6} + \frac{P_m l_m^4}{24} + C l_m \right);$$

d'où nous tirerons :

$$C = - \left(\frac{M_m l_m}{2} - \frac{H_m l_m^2}{6} + \frac{P_m l_m^3}{24} \right).$$

Si nous reportons cette valeur de C de l'équation dans la tangente, elle deviendra :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left[M_m x - \frac{H_m x^2}{2} + \frac{P_m x^3}{6} - \left(\frac{M_m l_m}{2} - \frac{H_m l_m^2}{6} + \frac{P_m l_m^3}{24} \right) \right].$$

Faisons successivement dans cette équation : $x = 0$ et $x = l_m$, et nous aurons :

1° Pour la tangente de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ travée sur la $m^{\text{ème}}$ pile,

$$t_m = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M_m l_m}{2} - \frac{H_m l_m^2}{6} + \frac{P_m l_m^3}{24} \right).$$

2° Pour la tangente de la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée sur la $(m+1)^{\text{ème}}$ pile.

$$t_{m+1} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M_m l_m}{2} - \frac{H_m l_m^2}{3} + \frac{P_m l_m^2}{8} \right).$$

Si maintenant, dans cette dernière équation, nous remplaçons m par $m-1$, nous aurons :

Pour la tangente de la $m^{\text{ème}}$ travée sur la $m^{\text{ème}}$ pile :

$$t'_m = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M_{m-1} l_{m-1}}{2} - \frac{H_{m-1} l_{m-1}^2}{3} + \frac{P_{m-1} l_{m-1}^2}{8} \right).$$

En égalant ensemble les valeurs de t_m et de t'_m , nous obtiendrons la relation suivante :

$$\frac{l_m}{2} \left(M_m - \frac{H_m l_m}{3} - \frac{P_m l_m}{12} \right) + \frac{l_{m-1}}{2} \left(M_{m-1} - \frac{2H_{m-1} l_{m-1}}{3} + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{4} \right) = 0.$$

Telle est l'équation fondamentale de raccordement qui exprime que les courbes décrites par deux travées consécutives ont même tangente sur la pile qui les sépare, ou en d'autres termes, que la poutre décrit une courbe continue entre les deux points d'appui extrêmes.

De même que l'équation générale d'équilibre des moments, cette relation fondamentale va se présenter sous trois formes différentes, suivant que l'on choisira pour inconnues les réactions, les efforts tranchants ou les moments de rupture sur les appuis.

1° En prenant les réactions pour inconnues :

$$\frac{l_m}{2} \left[\Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-2} (P \Sigma^{m-1} l_1) - \Sigma^{m-1} (R \Sigma^{m-1} l) - \frac{l_m}{3} (\Sigma^m R - \Sigma^{m-1} P) + \frac{P_m l_m}{12} \right] + \frac{l_{m-1}}{2} \left[\Sigma^{m-2} \frac{Pl}{2} + \Sigma^{m-3} (P \Sigma^{m-2} l_1) - \Sigma^{m-2} (R \Sigma^{m-2} l) - \frac{2l_{m-1}}{3} (\Sigma^{m-1} R - \Sigma^{m-2} P) + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{4} \right] = 0. \quad (R')$$

2° En prenant les efforts tranchants pour inconnues :

$$\frac{l_m}{2} \left(\Sigma^{m-1} \frac{Pl}{2} - \Sigma^{m-1} H l - \frac{H_m l_m}{3} + \frac{P_m l_m}{12} \right) + \frac{l_{m-1}}{2} \left(\Sigma^{m-2} \frac{Pl}{2} - \Sigma^{m-2} H l - \frac{2H_{m-1} l_{m-1}}{3} + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{4} \right) = 0. \quad (H')$$

3° En prenant les moments pour inconnues :

$$\frac{l_m}{2} \left[M_m - \frac{l_m}{3} \left(\frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2} \right) + \frac{P_m l_m}{12} \right] + \frac{l_{m-1}}{2} \left[M_{m-1} - \frac{2l_{m-1}}{3} \left(\frac{M_{m-1} - M_m}{l_{m-1}} + \frac{P_{m-1}}{2} \right) + \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{4} \right] = 0. \quad (M')$$

Cette dernière équation a été donnée par M. Bresse, ingénieur des ponts et chaussées (*). Elle devient après réductions :

$$M_{m-1} l_{m-1} + 2(l_{m-1} + l_m) M_m + M_{m+1} l_m = \frac{1}{4} (P_{m-1} l_{m-1}^2 + P_m l_m^2). \quad (M'')$$

IV. *Valeurs générales des réactions, efforts tranchants et moments de rupture sur les piles et culées en fonctions des poids et ouvertures des travées.* — Nous avons maintenant le choix entre les équations de raccordement (R'), (H') et (M') pour rechercher la solution du problème énoncé ci-dessus.

La dernière est évidemment plus simple que les deux autres, et l'on peut en conclure, *à priori*, qu'elle doit donner lieu à des calculs moins compliqués.

Mais la méthode d'élimination que nous nous proposons d'employer simplifie considérablement les calculs.

Nous allons donc opérer successivement sur les trois équations ci-dessus; et nous en déduirons directement, sans avoir recours aux formules de la page 9, les valeurs générales que nous cherchons : 1° pour les réactions; 2° pour les efforts tranchants; 3° pour les moments de rupture.

Considérons d'abord l'équation (R').

Si dans cette équation nous faisons successivement :

$$m = 1 = 2 = 3 = \dots = n,$$

nous obtiendrons n équations entre les réactions :

$$R, R_1, R_2, \dots, R_n,$$

lesquelles sont au nombre de $n + 1$.

(*) Cours de mécanique appliquée, 4859, pages 445 et suiv.

$$\begin{aligned}
& R[1 + 3(\alpha_n + \epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n + \omega_n) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n(\alpha_n + \epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n)] + \\
& + R_1[1 + 3(\epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n + \omega_n) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n(\epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n)] + \\
& + R_2[1 + 3(\gamma_n + \dots + \chi_n + \omega_n) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n(\gamma_n + \dots + \chi_n)] + \dots + R_{n-1}(1 + 3\omega_n + 2\omega_n^2) + R_n = \\
& = P \left[1 + 3 \left(\frac{\alpha_n}{2} + \epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n + \omega_n \right) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n \left(\frac{\alpha_n}{2} + \epsilon_n + \gamma_n + \dots + \chi_n \right) \right] + \\
& + P_1 \left[1 + 3 \left(\frac{\epsilon_n}{2} + \gamma_n + \dots + \chi_n + \omega_n \right) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n \left(\frac{\epsilon_n}{2} + \gamma_n + \dots + \chi_n \right) \right] + \\
& + P_2 \left[1 + 3 \left(\frac{\gamma_n}{2} + \delta_n + \dots + \chi_n + \omega_n \right) + 2\omega_n^2 + 3\omega_n \left(\frac{\gamma_n}{2} + \delta_n + \dots + \chi_n \right) \right] + \dots + P_{n-1} \left(1 + \frac{3}{2}\omega_n + \frac{3}{4}\omega_n^2 \right) + \\
& + \frac{P_n}{4}. \tag{n}
\end{aligned}$$

De l'équation (1) nous tirerons immédiatement R_1 en fonction de R .

En reportant cette valeur de R_1 dans l'équation (2), nous aurons également R_2 en fonction de R .

En répétant ces substitutions dans les équations suivantes, nous obtiendrons successivement R_3, R_4, \dots, R_n en fonction de R .

Ces calculs ne tarderaient pas à devenir inextricables, car les divers coefficients de P_1, P_2, \dots et de R comprendraient bien vite un nombre de termes considérable.

Mais on remarquera de suite, en faisant l'élimination, que ces coefficients suivent dans leur formation une certaine loi, et qu'on peut les exprimer tous d'une manière très-simple en fonction des divers indices des séries suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\tau_0 = 1; & A_0 = 1; \\
\tau_1 = 2 + 2\alpha_1; & A_1 = 2 + \alpha_1; \\
\tau_2 = (2 + 2\epsilon_2)\tau_1 - \epsilon_2\tau_0; & A_2 = (2 + 2\epsilon_2)A_1 - \epsilon_2A_0; \\
\tau_3 = (2 + 2\gamma_3)\tau_2 - \gamma_3\tau_1; & A_3 = (2 + 2\gamma_3)A_2 - \gamma_3A_1; \\
\tau_4 = (2 + 2\delta_4)\tau_3 - \delta_4\tau_2; & A_4 = (2 + 2\delta_4)A_3 - \delta_4A_2; \\
\dots & \dots \\
\tau_n = (2 + 2\omega_n)\tau_{n-1} - \omega_n\tau_{n-2}; & A_n = (2 + 2\omega_n)A_{n-1} - \omega_nA_{n-2}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
B_1 = 1; & C_2 = 1; \\
B_2 = (2 + \epsilon_2); & C_3 = 2 + \gamma_3; \\
B_3 = (2 + 2\gamma_3)B_2 - \gamma_3B_1; & C_4 = (2 + 2\delta_4)C_3 - \delta_4C_2; \\
B_4 = (2 + 2\delta_4)B_3 - \delta_4B_2; & \dots \\
\dots & \dots \\
B_n = (2 + 2\omega_n)B_{n-1} - \omega_nB_{n-2}; & C_n = (2 + 2\omega_n)C_{n-1} - \omega_nC_{n-2};
\end{array}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= 1; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_4 &= 2 + \delta_4; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_n &= (2 + 2\omega_n)D_{n-1} - \omega_n D_{n-2}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{n-2} &= 1; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} &= 2 + \chi_{n-1}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_n &= (2 + 2\omega_n)K_{n-1} - \omega_n K_{n-2}; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{n-1} &= 1; & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_n &= 2 + \omega_n. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

On obtiendra ainsi avec le concours de ces séries :

$$R_1 = [4 + \alpha_1(\tau_0 + A_0 + \tau_1 + A_1)] \frac{P}{4} + \frac{P_1}{4} - [1 + \alpha_1(\tau_0 + \tau_1)] R. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} R_2 = & - [\alpha_1(\tau_0 + A_0 + \tau_1 + A_1) + \alpha_2(\tau_1 + A_1 + \tau_2 + A_2)] \frac{P}{4} + [3 + \epsilon_2(B_1 + B_2)] \frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{4} + \\ & + [\alpha_1(\tau_0 + \tau_1) + \alpha_2(\tau_1 + \tau_2)] R. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} R_3 = & [\alpha_2(\tau_1 + A_1 + \tau_2 + A_2) + \alpha_3(\tau_2 + A_2 + \tau_3 + A_3)] \frac{P}{4} + [\epsilon_2(B_1 + B_2) + \epsilon_3(B_2 + B_3)] \frac{P_1}{4} + \\ & + [3 + \gamma_3(C_2 + C_3)] \frac{P_2}{4} + \frac{P_3}{4} - [\alpha_2(\tau_1 + \tau_2) + \alpha_3(\tau_2 + \tau_3)] R. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} R_4 = & - [\alpha_3(\tau_2 + A_2 + \tau_3 + A_3) + \alpha_4(\tau_3 + A_3 + \tau_4 + A_4)] \frac{P}{4} + [\epsilon_3(B_2 + B_3) + \epsilon_4(B_3 + B_4)] \frac{P_1}{4} - \\ & - [\gamma_3(C_2 + C_3) + \gamma_4(C_3 + C_4)] \frac{P_2}{4} + [3 + \delta_4(D_3 + D_4)] \frac{P_3}{4} + \frac{P_4}{4} + [\alpha_3(\tau_2 + \tau_3) + \alpha_4(\tau_3 + \tau_4)] R. \end{aligned} \tag{4}$$

.....

$$\begin{aligned} R_n = & \pm [\alpha_{n-1}(\tau_{n-2} + A_{n-2} + \tau_{n-1} + A_{n-1}) + \alpha_n(\tau_{n-1} + A_{n-1} + \tau_n + A_n)] \frac{P}{4} \mp [\epsilon_{n-1}(B_{n-2} + B_{n-1}) + \\ & + \epsilon_n(B_{n-1} + B_n)] \frac{P_1}{4} \pm [\gamma_{n-1}(C_{n-2} + C_{n-1}) + \gamma_n(C_{n-1} + C_n)] \frac{P_2}{4} \mp [\delta_{n-1}(D_{n-2} + D_{n-1}) + \delta_n(D_{n-1} + D_n)] \frac{P_3}{4} \pm \\ & + \dots + [3 + \omega_n(O_{n-1} + O_n)] \frac{P_{n-1}}{4} + \frac{P_n}{4} \mp [\alpha_{n-1}(\tau_{n-2} + \tau_{n-1}) + \alpha_n(\tau_{n-1} + \tau_n)] R. \end{aligned} \tag{n}$$

Le moment sur la culée droite étant nul, nous aurons l'équation

$$\Sigma^n \frac{Pl}{2} + \Sigma^{n-1} (P\Sigma^n l_i) - \Sigma^n (R\Sigma^n l) = 0.$$

En remplaçant dans cette équation $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ par leurs valeurs en fonction de R données par les équations précédentes, on obtiendra, toutes réductions faites :

$$R = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4\alpha_n\tau_n} (\alpha_n A_n P - \epsilon_n B_n P_1 + \gamma_n C_n P_2 - \delta_n D_n P_2 + \dots \mp \omega_n O_n P_{n-1} \pm P_n). \quad (C)$$

Nota. On prendra le signe + pour P_n quand le nombre des travées sera impair.

La formule générale (C) permettra de calculer très-simplement et très-rapidement la valeur de R , réaction sur la culée gauche, en fonction des poids des travées et des divers indices des séries en τ, A, B, C, \dots et O dont les termes sont des fonctions des ouvertures des travées.

La valeur de R une fois calculée, les formules précédentes donneront celles de toutes les réactions sur les piles.

Pour obtenir la valeur générale de la réaction R_{n+1} sur la culée droite, il suffit de poser l'équation

$$R_{n+1} = \Sigma^n P - \Sigma^n R.$$

On obtiendra, toutes réductions faites et en observant que :

$$\begin{aligned} \tau_n A_{n-1} - A_n \tau_{n-1} &= \alpha_n; \\ \tau_n B_{n-1} - B_n \tau_{n-1} &= \epsilon_n (\tau_1 - \tau_0); \\ \tau_n C_{n-1} - C_n \tau_{n-1} &= \gamma_n (\tau_2 - \tau_1); \\ \tau_n D_{n-1} - D_n \tau_{n-1} &= \delta_n (\tau_3 - \tau_2); \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tau_n O_{n-1} - O_n \tau_{n-1} &= \omega_n (\tau_{n-1} - \tau_{n-2}); \end{aligned}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4\tau_n} [(\tau_n - \tau_{n-1})P_n - (\tau_{n-1} - \tau_{n-2})\omega_n^2 P_{n-1} + (\tau_{n-2} - \tau_{n-3})\gamma_n^2 P_{n-2} - \dots \pm (\tau_2 - \tau_1)\gamma_n^2 P_2 \mp (\tau_1 - \tau_0)\epsilon_n^2 P_1 \pm \alpha_n^2 P].$$

Considérons maintenant l'équation (H).

Si nous y faisons successivement :

$$m = 1 = 2 = 3 = \dots = n,$$

Nous obtiendrons un groupe de n équations entre les inconnues H, H_1, H_2, \dots, H_n lesquelles sont au nombre de $n + 1$.

Ces n équations de raccordement peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$H(3\alpha_1 + 2\alpha_1^2) + H_1 = P \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{3}{4} \alpha_2^2 \right) + \frac{P_1}{4}. \quad (1)$$

$$H(3\alpha_2 + 3\alpha_2\delta_2) + H_1(3\delta_2 + 2\delta_2^2) + H_2 = P \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{3}{2} \alpha_2\delta_2 \right) + P_1 \left(\frac{3}{2} \delta_2 + \frac{3}{4} \delta_2^2 \right) + \frac{P_2}{4}. \quad (2)$$

$$H(3\alpha_3 + 3\alpha_3\gamma_3) + H_1(3\delta_3 + 3\delta_3\gamma_3) + H_2(3\gamma_3 + 2\gamma_3^2) + H_3 = P \left(\frac{3}{2} \alpha_3 + \frac{3}{2} \alpha_3\gamma_3 + P_1 \left(\frac{3}{2} \delta_3 + \frac{3}{2} \delta_3\gamma_3 \right) + P_2 \left(\frac{3}{2} \gamma_3 + \frac{3}{4} \gamma_3^2 \right) + \frac{P_3}{4}. \quad (3)$$

$$H(3\alpha_4 + 3\alpha_4\delta_4) + H_1(3\delta_4 + 3\delta_4\delta_4) + H_2(3\gamma_4 + 3\gamma_4\delta_4) + H_3(3\delta_4 + 2\delta_4^2) + H_4 = P \left(\frac{3}{2} \alpha_4 + \frac{3}{2} \alpha_4\delta_4 \right) + P_1 \left(\frac{3}{2} \delta_4 + \frac{3}{2} \delta_4\delta_4 \right) + P_2 \left(\frac{3}{2} \gamma_4 + \frac{3}{2} \gamma_4\delta_4 \right) + P_3 \left(\frac{3}{2} \delta_4 + \frac{3}{4} \delta_4^2 \right) + \frac{P_4}{4}. \quad (4)$$

.....

$$H(3\alpha_n + 3\alpha_n\omega_n) + H_1(3\delta_n + 3\delta_n\omega_n) + H_2(3\gamma_n + 3\gamma_n\omega_n) + \dots + H_{n-1}(3\omega_n + 2\omega_n^2) + H_n = P \left(\frac{3}{2} \alpha_n + \frac{3}{2} \alpha_n\omega_n \right) + P_1 \left(\frac{3}{2} \delta_n + \frac{3}{2} \delta_n\omega_n \right) + P_2 \left(\frac{3}{2} \gamma_n + \frac{3}{2} \gamma_n\omega_n \right) + \dots + P_{n-1} \left(\frac{3}{2} \omega_n + \frac{3}{4} \omega_n^2 \right) + \frac{P_n}{4}. \quad (n)$$

En opérant sur ce groupe d'équations, comme nous l'avons fait sur le groupe précédent déduit de la relation (R'), nous obtiendrons avec le concours des séries :

$$H_1 = \alpha_1(\tau_0 + A_0 + \tau_1 + A_1) \frac{P}{4} + \frac{P_1}{4} - \alpha_1(\tau_0 + \tau_1)H. \quad (1)$$

$$H_2 = -\alpha_2(\tau_1 + A_1 + \tau_2 + A_2) \frac{P}{4} + \delta_2(B_1 + B_2) \frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{4} + \alpha_2(\tau_1 + \tau_2)H. \quad (2)$$

$$\dot{H}_3 = \alpha_3(\tau_2 + A_2 + \tau_3 + A_3) \frac{P}{4} - \epsilon_3(B_2 + B_3) \frac{P_1}{4} + \gamma_3(C_2 + C_3) \frac{P_2}{4} + \frac{P_3}{4} - \alpha_3(\tau_2 + \tau_3)H. \quad (3)$$

$$H_4 = -\alpha_4(\tau_3 + A_3 + \tau_4 + A_4) \frac{P}{4} + \epsilon_4(B_3 + B_4) \frac{P_1}{4} - \gamma_4(C_3 + C_4) \frac{P_2}{4} + \delta_4(D_3 + D_4) \frac{P_3}{4} + \frac{P_4}{4} + \alpha_4(\tau_3 + \tau_4)H. \quad (4)$$

$$H_n = \pm \alpha_n(\tau_{n-1} + A_{n-1} + \tau_n + A_n) \frac{P}{4} \mp \epsilon_n(B_{n-1} + B_n) \frac{P_1}{4} \pm \gamma_n(C_{n-1} + C_n) \frac{P_2}{4} \mp \delta_n(D_{n-1} + D_n) \frac{P_3}{4} \pm \dots + \omega_n(O_{n-1} + O_n) \frac{P_{n-1}}{4} + \frac{P_n}{4} \mp \alpha_n(\tau_{n-1} + \tau_n)H. \quad (n)$$

Exprimons que le moment sur la culée droite est nul au moyen de la formule générale, qui donne les moments en fonction des efforts tranchants (page 8), et nous aurons :

$$M_{n+1} = 0 = \Sigma^n \frac{Pl}{2} - \Sigma^n Hl.$$

Remplaçons maintenant dans cette dernière équation $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, par leurs valeurs en fonction de H données par les équations précédentes, et nous obtiendrons, toutes réductions faites :

$$H = R = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4\alpha_n\tau_n}(\alpha_n A_n P - \epsilon_n B_n P_1 + \gamma_n C_n P_2 - \delta_n D_n P_3 + \dots \mp \omega_n O_n P_{n-1} \pm P_n). \quad (C)$$

On retrouve ainsi la formule (C) précédemment obtenue au moyen de la relation (R').
Considérons enfin l'équation (M').

Si dans cette équation nous faisons successivement :

$$m = 1 = 2 = 3 = \dots = n,$$

nous obtiendrons le groupe suivant de n équations entre les n inconnues M_1, M_2, M_3, \dots et M_n .

$$\alpha_1 M + 2(1 + \alpha_1)M_1 + M_2 = \frac{1}{4}(\alpha_1 Pl + P_1 l_1); \quad (1)$$

$$\epsilon_2 M_1 + 2(1 + \epsilon_2)M_2 + M_3 = \frac{1}{4}(\epsilon_2 P_1 l_1 + P_2 l_2); \quad (2)$$

$$\gamma_3 M_2 + 2(1 + \gamma_3)M_3 + M_4 = \frac{1}{4}(\gamma_3 P_2 l_2 + P_3 l_3); \quad (3)$$

.....

$$\chi_{n-1} M_{n-2} + 2(1 + \chi_{n-1})M_{n-1} + M_n = \frac{1}{4}(\chi_{n-1} P_{n-2} l_{n-2} + P_{n-1} l_{n-1}); \quad (n-1)$$

$$\omega_n M_{n-1} + 2(1 + \omega_n)M_n + M_{n+1} = \frac{1}{4}(\omega_n P_{n-1} l_{n-1} + P_n l_n). \quad (n)$$

Ici le problème ne se présente plus sous le même aspect qu'avec les groupes déduits des équations (H) et (R'), puisque le nombre des inconnues se trouve réduit à n , le premier moment M sur la culée gauche et le dernier M_{n+1} sur la culée droite étant nuls.

On pourrait donc être tenté de chercher à déterminer directement, par une méthode d'élimination quelconque, les valeurs des moments en fonction des poids et ouvertures des travées.

Mais il est beaucoup plus simple d'introduire dans le calcul une $(n+1)^{ème}$ inconnue qui sera la réaction R sur la culée gauche, et de chercher à exprimer d'abord tous les moments en fonction de R .

Pour cela nous commencerons par écrire :

$$M_1 = \frac{Pl}{2} - Rl. \quad (0)$$

Nous transporterons ensuite cette valeur de M_1 dans l'équation (1), et nous obtiendrons M_2 en fonction de R .

En continuant ces substitutions, et en faisant usage des séries, nous obtiendrons très-facilement les valeurs de tous les moments en fonction de R.

Ces valeurs s'écriront alors ainsi qu'il suit :

$$M_1 = \frac{l}{4} (2P - 4R); \quad (0)$$

$$M_2 = \frac{l_1}{4} [-(\tau_1 + A_1)\alpha_1 P + P_1 + 4\alpha_1 \tau_1 R]. \quad (1)$$

$$M_3 = \frac{l_2}{4} [\alpha_2(\tau_2 + A_2)P - \epsilon_2 B_2 P_1 + P_2 - 4\alpha_2 \tau_2 R]. \quad (2)$$

$$M_4 = \frac{l_3}{4} [-\alpha_3(\tau_3 + A_3)P + \epsilon_3 B_3 P_1 - \gamma_3 C_3 P_2 + P_3 + 4\alpha_3 \tau_3 R]. \quad (3)$$

.....

$$M_n = \frac{l_{n-1}}{4} [\mp \alpha_{n-1}(\tau_{n-1} + A_{n-1})P \pm \epsilon_{n-1} B_{n-1} P_1 \mp \gamma_{n-1} C_{n-1} P_2 \pm \delta_{n-1} D_{n-1} P_3 \mp \dots - \chi_{n-1} K_{n-1} P_{n-2} + P_{n-1} \pm 4\alpha_{n-1} \tau_{n-1} R]. \quad (n-1)$$

$$M_{n+1} = 0 = \frac{l_n}{4} [\pm \alpha_n(\tau_n + A_n)P \mp \epsilon_n B_n P_1 \pm \gamma_n C_n P_2 \mp \delta_n D_n P_3 \pm \dots - \omega_n O_n P_{n-1} + P_n \mp 4\alpha_n \tau_n R]. \quad (n)$$

On tire immédiatement de cette dernière équation :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_n \tau_n} [\alpha_n A_n P - \epsilon_n B_n P_1 + \gamma_n C_n P_2 - \delta_n D_n P_3 + \dots \mp \omega_n O_n P_{n-1} \pm P_n]. \quad (C)$$

C'est l'équation (C) qu'on retrouve ainsi pour la troisième fois.

Telles sont les formules générales que nous nous étions proposé d'établir pour la détermination des valeurs des réactions, efforts tranchants et moments de rupture sur les piles et culées d'un pont métallique.

On voit qu'elles sont toutes fondées sur les séries données à la page 15.

La valeur seule de R est donnée directement en fonction des poids et ouvertures des travées, et les autres valeurs sont données en fonction de R.

Cette dernière forme est la plus avantageuse pour le calcul. Nous croyons donc inutile de développer ici les autres valeurs en fonction directe des poids et ouvertures des travées.

Ces formules sont applicables à un pont d'un nombre quelconque de travées inégales.

V. *Formules pour les ponts à travées symétriques.* — Quand les travées seront symétriques par rapport à l'axe du pont, les calculs pourront être simplifiés en ce sens qu'au lieu de calculer les séries de la page 15 jusqu'à l'indice n , on pourra s'arrêter à l'indice $\frac{n}{2}$ ou à l'indice $\frac{n+1}{2}$, suivant que le nombre des travées sera impair ou pair.

Nous allons considérer séparément ces deux cas.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un pont symétrique de $2n + 1$ travées.

(Nous désignerons par des indices les réactions, poids et moments de la partie droite).

Le moment M_n sur la $n^{\text{ème}}$ pile pourra s'exprimer des deux manières suivantes en fonction des réactions R et R'.

$$M_n = \frac{l_{n-1}}{4} [\pm (\tau_{n-1} + A_{n-1})\alpha_{n-1}P \mp \epsilon_{n-1}B_{n-1}P_1 \pm \gamma_{n-1}C_{n-1}P_2 \mp \dots + P_{n-1} \mp 4\alpha_{n-1}\tau_{n-1}R].$$

$$M_n = \frac{l_n}{4} [\mp \tau_n + A_n)\alpha_nP' \pm \epsilon_nB_nP'_1 \mp \gamma_nC_nP'_2 \pm \dots - \omega_n0_nP'_{n-1} + P_n \pm 4\alpha_n\tau_nR'].$$

Le moment M'_n sur la $(n + 1)^{\text{ème}}$ pile pourra également s'exprimer des deux manières suivantes :

$$M'_n = \frac{l_n}{4} [\mp (\tau_n + A_n)\alpha_nP \pm \epsilon_nB_nP_1 \mp \gamma_nC_nP_2 \pm \dots - \omega_n0_nP_{n-1} + P_n \pm 4\alpha_n\tau_nR].$$

$$M'_n = \frac{l_{n-1}}{4} [\pm (\tau_{n-1} + A_{n-1})\alpha_{n-1}P' \mp \epsilon_{n-1}B_{n-1}P'_1 \pm \gamma_{n-1}C_{n-1}P'_2 \mp \dots + P'_{n-1} \mp 4\alpha_{n-1}\tau_{n-1}R'].$$

En égalant entre elles les deux valeurs de M_n et les deux valeurs de M'_n , on aura deux équations entre R et R'.

La première sera :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\alpha_n\tau_n} [(\tau_{n-1} + A_{n-1})\alpha_nP - \epsilon_nB_{n-1}P_1 + \gamma_nC_{n-1}P_2 - \dots \pm \omega_nP_{n-1} \mp P_n \pm \omega_n0_nP'_{n-1} \mp \dots + \\ &+ \gamma_nC_nP'_2 - \epsilon_nB_nP'_1 + (\tau_n + A_n)\alpha_nP'] - \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} R. \end{aligned}$$

Et la seconde :

$$R' = \frac{1}{4\alpha_n\tau_{n-1}} [(\tau_n + A_n)\alpha_n P - \epsilon_n B_n P_1 + \gamma_n C_n P_2 - \dots \pm \omega_n O_n P_{n-1} \mp P_n \pm \omega_n P'_{n-1} \mp \dots + \\ + \gamma_n C_{n-1} P'_2 - \epsilon_n B_{n-1} P'_1 + (\tau_{n-1} + A_{n-1})\alpha_n P'] - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} R.$$

En égalant ensemble ces deux valeurs de R' , et en faisant les réductions indiquées (page 16) pour la valeur générale de R_{n+1} , on trouve :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_n(\tau_n^2 + \tau_{n-1}^2)} [(\tau_n A_n - \tau_{n-1} A_{n-1})\alpha_n P - (\tau_n B_n - \tau_{n-1} B_{n-1})\epsilon_n P_1 + (\tau_n C_n - \tau_{n-1} C_{n-1})\gamma_n P_2 - \\ - \dots \pm (\tau_n O_n - \tau_{n-1} O_{n-1})\omega_n P_{n-1} \mp (\tau_n - \tau_{n-1})P_n \pm (\tau_{n-1} - \tau_{n-2})\omega_n^2 P'_{n-1} \mp \dots + (\tau_2 - \tau_1)\gamma_n^2 P'_2 - \\ - (\tau_1 - 1)\epsilon_n^2 P'_1 + \alpha_n^2 P']. \quad (S_i)$$

Telle est la formule qui donnera la valeur de la réaction sur la culée gauche d'un pont symétrique de $2n + 1$ travées.

Si le pont symétrique a $2n + 2$ travées, les moments sur les trois piles centrales étant M_n , M_{n+1} et M'_n , on prendra successivement les valeurs des moments M_n et M_{n+1} , en fonction de R et de R' , et, en faisant une élimination semblable, on obtiendra la valeur suivante pour R :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_n\tau_n(\tau_{n+1} - \tau_{n-1})} [(A_{n+1}\tau_n - A_n\tau_{n-1})\alpha_n P - (B_{n+1}\tau_n - B_n\tau_{n-1})\epsilon_n P_1 + (C_{n+1}\tau_n - C_n\tau_{n-1})\gamma_n P_2 - \\ - \dots \pm (O_{n+1}\tau_n - O_n\tau_{n-1})\omega_n P_{n-1} \mp (3\tau_n - \tau_{n-1})P_n \pm (\tau_n - \tau_{n-1})P'_n \mp (\tau_{n-1} - \tau_{n-2})\omega_n^2 P'_{n-1} \pm \dots - \\ - (\tau_2 - \tau_1)\gamma_n^2 P'_2 + (\tau_1 - 1)\epsilon_n^2 P'_1 - \alpha_n^2 P']. \quad (S_p)$$

Les formules qui donnent les réactions, efforts tranchants et moments de rupture sur les piles restent les mêmes jusqu'aux indices n et $n + 1$.

VI. *Formules pour les ponts à travées égales.* — Quand les travées sont égales, il est facile de voir que la formule (C) et les formules (S_i) et (S_p) se fondent en une seule, qu'on peut écrire ainsi :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_n} (\lambda_n P - \lambda_{n-1} P_1 + \lambda_{n-2} P_2 - \dots \pm 11P_{n-2} \mp 3P_{n-1} \mp P_n). \quad (E)$$

Les coefficients θ et λ sont donnés par les deux séries :

$\theta_0 = 1;$ $\theta_1 = 4;$ $\theta_2 = 15;$ $\theta_3 = 56;$ $\theta_4 = 209;$ $\theta_n = 4\theta_{n-1} - \theta_{n-2};$	$\lambda_0 = 1;$ $\lambda_1 = 3;$ $\lambda_2 = 11;$ $\lambda_3 = 44;$ $\lambda_4 = 153;$ $\lambda_n = 4\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}.$
--	--

Les formules de la page 15 qui donnent les réactions prennent alors la forme suivante :

$$R_1 = \frac{1}{4} (13P + P_1) - 6R. \tag{1}$$

$$R_2 = \frac{1}{4} (-42P + 7P_1 + P_2) + 24R. \tag{2}$$

$$R_3 = \frac{1}{4} (156P - 18P_1 + 7P_2 + P_3) - 90R. \tag{3}$$

$$R_4 = \frac{1}{4} (-582P + 66P_1 - 18P_2 + 7P_3 + P_4) + 336R. \tag{4}$$

$$R_n = \frac{1}{4} [\pm 6(\theta_{n-1} + \lambda_{n-1})P \mp 6\lambda_{n-2}P_1 \pm 6\lambda_{n-3}P_2 \mp \dots + 7P_{n-1} + P_n] \mp 6\theta_{n-1}R. \tag{n}$$

Celles de la page 18 qui donnent les efforts tranchants deviendront :

$$H_1 = \frac{1}{4} (9P + P_1) - 5H. \tag{1}$$

$$H_2 = \frac{1}{4} (-34P + 4P_1 + P_2) + 19H. \tag{2}$$

$$H_3 = \frac{1}{4} (123P - 14P_1 + 4P_2 + P_3) - 71H. \tag{3}$$

$$H_4 = \frac{1}{4} (-459P + 52P_1 - 14P_2 + 4P_3 + P_4) + 265H. \tag{4}$$

$$H_n = \frac{1}{4} [\pm (\theta_{n-1} + \lambda_{n-1} + \theta_n + \lambda_n)P \mp (\lambda_{n-3} + \lambda_{n-1})P_1 \pm (\lambda_{n-3} + \lambda_{n-2})P_2 + \dots + 4P_{n-1} + P_n] \mp (\theta_{n-1} + \theta_n)H. \tag{n}$$

Enfin celles de la page 20 qui donnent les moments de rupture prendront la forme suivante :

$$M_1 = \frac{1}{4} (2P - 4R). \quad (1)$$

$$M_2 = \frac{1}{4} (-7P + P_1 + 4 \times 4R). \quad (2)$$

$$M_3 = \frac{1}{4} (26P - 3P_1 + P_2 - 4 \times 15R). \quad (3)$$

$$M_4 = \frac{1}{4} (-97P + 11P_1 - 3P_2 + P_3 + 4 \times 56R). \quad (4)$$

.....

$$M_n = \frac{1}{4} [\pm (\lambda_{n-1} + \theta_{n-1})P \mp \lambda_{n-2}P_1 \pm \lambda_{n-3}P_2 \mp \dots - 3P_{n-2} + P_{n-1} \mp 4\theta_{n-1}R]. \quad (n)$$

CHAPITRE II.

DISCUSSION DES FORMULES GÉNÉRALES DONNÉES AU CHAPITRE PREMIER.

VII. *Principes généraux qui dérivent des formules.* — Si l'on se reporte à la formule (G), qui donne la valeur de la réaction sur la culée gauche d'un pont métallique de $n + 1$ travées, on reconnaîtra de suite que tous les indices pairs de P sont affectés du signe $+$, et tous les indices impairs du signe $-$.

Il suit de là que *le maximum de R correspond à la surcharge de toutes les travées impaires, et son minimum à la surcharge de toutes les travées paires.*

Tel est le premier des principes généraux qui se déduisent des formules.

Recherchons maintenant quelle est l'hypothèse de surcharge qui correspond au maximum de la réaction sur la $m^{\text{ème}}$ pile.

En nous reportant aux formules de la page 15, nous pourrions écrire :

$$R_m = Q_m + \frac{P_m}{4} \pm [\alpha_{m-1}(\tau_{m-2} + \tau_{m-1}) + \alpha_m(\tau_{m-1} + \tau_m)] R,$$

en désignant par Q_m la somme de tous les termes qui précèdent $\frac{P_m}{4}$.

On doit prendre le signe $+$ si m est pair, et le signe $-$ si m est impair.

Dans le premier cas le coefficient de P_m dans la valeur de R sera affecté du signe $+$, et du signe $-$ dans le second.

Dans les deux cas le coefficient de P_m dans la valeur développée de R_m sera évidemment positif.

Il est évident également que les coefficients de P_{m+1} , P_{m+3} , etc... seront affectés du signe —, et ceux de P_{m+2} , P_{m+4} , etc... du signe + dans cette même valeur développée.

Nous tirerons de là cette première conclusion : que pour obtenir le maximum de la réaction sur la $m^{\text{ème}}$ pile, il est nécessaire de charger la travée située immédiatement à droite de cette pile, ainsi que les travées suivantes de deux en deux.

Si maintenant au lieu d'exprimer R_m en fonction de R , nous l'exprimons en fonction de R_{n+1} , réaction sur la culée droite, nous arriverons par le même raisonnement à cette conclusion : que pour obtenir le maximum de la réaction sur la $m^{\text{ème}}$ pile il faut nécessairement charger la travée située immédiatement à gauche de cette pile, ainsi que les travées suivantes de deux en deux.

L'hypothèse, qui donne le maximum de la réaction sur une pile quelconque, consiste donc à charger les deux travées adjacentes, puis toutes les autres de deux en deux à droite et à gauche de cette pile. Le minimum correspond à l'hypothèse inverse.

Tel est le deuxième principe général.

Il est facile de voir que les deux hypothèses ci-dessus donnent également le maximum et le minimum du moment de rupture sur la pile.

Considérons en effet le terme général des formules de la page 20, relatives aux moments de rupture, nous pourrions l'écrire ainsi :

$$M_m = \frac{l^{m-1}}{4} (V_m + P_{m-1} \pm 4\alpha_{m-1}\tau_{m-1}R).$$

N. B. En désignant par V_m la somme de tous les termes qui précèdent P_{m-1} . On prendra le signe + quand m sera pair et le signe — quand m sera impair.

Il est évident que dans la valeur développée de M_m , les termes en P_m , P_{m+2} , P_{m+4} , etc... seront affectés du signe + dans tous les cas, et les termes en P_{m+1} , P_{m+3} , etc... du signe —.

Le raisonnement et les conclusions sont les mêmes ici que pour R_m .

Donc : le maximum et le minimum du moment de rupture sur une pile quelconque sont donnés par les mêmes hypothèses que le maximum et le minimum de la réaction.

Tel est le troisième principe général.

Recherchons maintenant quelle est l'hypothèse qui donne le maximum du moment de rupture sur le centre de la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée.

Ce moment a pour valeur :

$$M_m = \frac{H_m l_m}{2} + \frac{P_m l_m}{8} = \frac{M_m + M_{m+1}}{2} - \frac{P_m l_m}{8}.$$

Or on a :

$$M_m = \frac{l^{m-1}}{4} (V_m + P_{m-1} \pm 4\alpha_{m-1}\tau_{m-1}R);$$

$$M_{m+1} = \frac{l_m}{4} (V_{m+1} + P_m \mp 4\alpha_m \tau_m R).$$

Le moment dont il s'agit pourra donc s'écrire ainsi :

$$Y_m \mp \frac{Rl}{4} (\tau_m - \tau_{m-1}) \quad (\text{avec le signe } - \text{ si } m \text{ est pair}),$$

en faisant :

$$Y_m = \frac{l_{m-1}}{8} (V_m + P_{m-1}) + \frac{l_m}{8} V_{m+1}.$$

Comme on a : $\tau_m > \tau_{m-1}$, et que Y_m ne contient aucun indice de P supérieur à $m-1$, il est évident que quelle que soit la valeur de m , tous les termes en $P_m, P_{m+2}, \text{ etc...}$ seront affectés du signe $-$, et tous les termes en $P_{m+1}, P_{m+3}, \text{ etc...}$ seront affectés au contraire du signe $+$ dans la valeur développée du moment dont il s'agit.

Pour obtenir le moment de rupture maximum au centre de la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée, lequel moment est négatif, il faut donc charger toutes les travées de la partie droite de deux en deux à partir de la $(m+1)^{\text{ème}}$ inclusivement.

En exprimant le moment dont il s'agit en fonction de la réaction sur la culée droite, on démontrerait de même que le maximum de ce moment correspond à la surcharge de la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée et de toutes celles de la partie gauche de deux en deux.

On peut donc conclure de là que :

Le maximum du moment de rupture au centre d'une travée quelconque correspond au maximum de R si le numéro de la travée est impair, et au minimum de R si ce numéro est pair.

Le minimum correspond aux hypothèses inverses.

Tel est le quatrième principe général.

Considérons enfin les efforts tranchants à droite et à gauche de la $m^{\text{ème}}$ pile.

La valeur générale du premier est :

$$H_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2}.$$

Son maximum correspondra à l'hypothèse qui donnera en même temps la plus grande valeur à M_m , et la plus petite à M_{m+1} . Or, cette hypothèse n'est autre que celle du maximum de M_m , attendu qu'elle donne un minimum relatif pour M_{m+1} , c'est-à-dire la plus petite valeur que puisse prendre ce moment quand la $(m+1)^{\text{ème}}$ travée est chargée (Voir le tableau des hypothèses ci-après).

L'effort tranchant à gauche a pour expression :

$$H'_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_{m-1}} + \frac{P_{m-1}}{2}.$$

Son maximum correspond au maximum absolu de M_m et au minimum relatif de M_{m-1} , c'est-à-dire à la même hypothèse que le maximum de R_m et de M_m (Voir le tableau des hypothèses).

Les maxima et les minima des efforts tranchants sur une pile correspondent donc aux mêmes hypothèses que les maxima et les minima des réactions et moments de rupture sur cette pile.

C'est le cinquième principe général déduit des formules.

Les diverses hypothèses qui donnent les maxima et les minima des réactions, efforts tranchants et moments de rupture, sont figurées sur le tableau ci-après :

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
R	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
H	$H'_1 H_1$	$H'_2 H_2$	$H'_3 H_3$	$H'_4 H_4$	$H'_5 H_5$	$H'_6 H_6$	$H'_7 H_7$	$H'_8 H_8$
								H'_9

P	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	
									N° 1. Maximum de R, de H et des moments des travées impaires.
									N° 2. Minimum de R, H et maximum des travées paires.
									N° 3. Maximum de R ₁ , H ₁ , H' ₁ et M ₁ .
									N° 3 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
									N° 4. Maximum de R ₂ , H ₂ , H' ₂ et M ₂ .
									N° 4 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
									N° 5. Maximum de R ₃ , H ₃ , H' ₃ et M ₃ .
									N° 5 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
									N° 6. Maximum de R ₄ , H' ₄ , H ₄ et M ₄ .

VIII. *Tracé de la courbe enveloppe des moments maxima.* — Il est facile de voir maintenant que ces diverses hypothèses sont les seules qui doivent concourir au tracé

complet de la courbe enveloppe des moments de rupture maxima tant positifs que négatifs des diverses travées.

Prenons pour exemple la quatrième travée :

1° L'hypothèse n° 2 donnera les moments négatifs maxima de la partie centrale de cette travée.

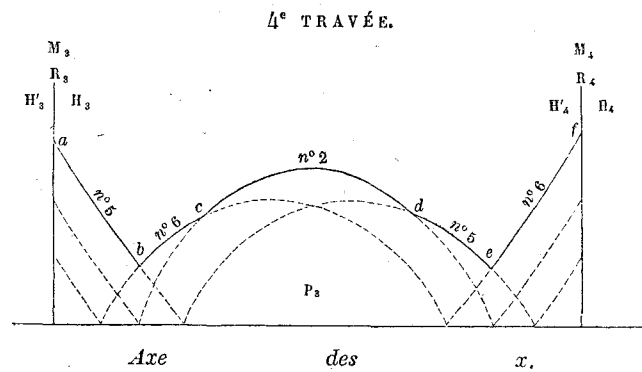
2° L'hypothèse n° 5 donnera les moments positifs maxima sur la troisième pile et sur la partie gauche voisine de cette pile.

3° L'hypothèse n° 6 donnera les moments positifs maxima sur la quatrième pile et sur la partie droite voisine de cette pile.

Ces trois premières hypothèses correspondent au cas où la quatrième travée est chargée. Les courbes qu'elles donnent doivent être tracées avec le même patron de parabole ayant pour paramètre $\frac{2}{p_3 + S}$, en désignant par p_3 le poids permanent, et par S la surcharge uniformément répartis sur la longueur de la quatrième travée.

En renversant les parties de parabole situées au-dessous de l'axe des x , on obtiendra, au moyen de ces trois premières hypothèses, un premier tracé de la courbe enveloppe de la quatrième travée représentée sur la fig. 3.

Figure 3.



Ce tracé se compose de cinq arcs paraboliques dont deux appartiennent à l'hypothèse n° 5, savoir : ab et de ; deux à l'hypothèse n° 6, savoir : ef et bc , et un seul, cd , à l'hypothèse n° 2.

Ces arcs constituent la partie la plus importante de la courbe enveloppe ; mais ils ne donnent pas de maxima aux environs des points b et c .

Pour compléter ce tracé, il est nécessaire de considérer trois autres hypothèses dans lesquelles la quatrième travée ne sera pas chargée et tendra, au contraire, à se roidir le plus possible, de façon à donner les maxima que nous cherchons aux environs des points *b* et *c*.

1° L'hypothèse n° 5 *bis* correspondant au minimum absolu du moment sur la pile n° 3 et au maximum relatif du moment sur la pile n° 4, c'est-à-dire à la plus grande valeur de ce moment quand la quatrième travée n'est pas chargée, donnera une courbe aplatie dont l'axe sera aussi rapproché que possible de la pile n° 3 et qui viendra recouper l'arc *ef* aussi haut que possible.

2° L'hypothèse n° 6 *bis* donnera, par des raisons semblables, un arc aplati qui viendra recouper l'arc *ab* le plus près possible du point *a*.

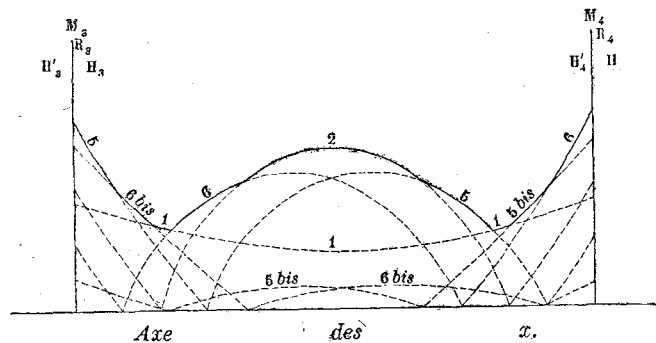
3° Enfin, l'hypothèse n° 1 correspondant au minimum absolu négatif ou, suivant les cas, au maximum absolu positif du moment vers le centre de la travée, donnera une courbe qui, dans certains cas, pourra passer au-dessus des points d'intersection de la courbe de l'hypothèse n° 2 ou des courbes des hypothèses n° 5 et 6 avec celles des hypothèses n° 5 *bis* et 6 *bis*.

Ces trois dernières courbes devront être tracées avec le même patron de parabole ayant pour paramètre $\frac{2}{p_3}$.

Au moyen de la combinaison de ces six hypothèses, on obtiendra un tracé complet de la courbe enveloppe de la quatrième travée composé de neuf arcs de parabole au maximum, et représenté dans la fig. 4.

Figure 4.

4° TRAVÉE.



Les deux arcs de la courbe n° 1, ainsi que les deux arcs accolés et donnés par les

hypothèses n^{os} 5 et 6, n'entreront pas généralement dans le tracé de la courbe enveloppe (voir l'épure du pont symétrique de onze travées, planche I).

Dans la plupart des cas la courbe enveloppe se composera des cinq arcs correspondants aux hypothèses n^{os} 2, 5, 6, 5 *bis* et 6 *bis*.

Il pourra même arriver, pour de grandes travées dont le poids permanent sera supérieur à sa surcharge, que les arcs des paraboles n^o 5 *bis* et 6 *bis* se trouveront eux-mêmes supprimés.

Ce cas se présente pour les deux travées centrales du pont Britannia.

Quant à la courbe enveloppe de la première travée, elle ne peut comprendre plus de trois arcs de paraboles correspondants aux hypothèses n^{os} 1, 2 et 3.

Le nombre des hypothèses nécessaires au tracé complet de la courbe enveloppe d'un pont de $(n + 1)$ travées symétriques ou égales sera $n + 3$ ou $n + 2$, suivant que le nombre des travées sera pair ou impair.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES FORMULES A DES EXEMPLES.

IX. *Vérification des calculs du pont construit sur l'Allier pour la traversée du chemin de fer de Moulins à Montluçon.* — Le pont métallique construit à Montluçon est décrit dans les *Nouvelles Annales de la construction* d'Oppermann, juillet 1859, et représenté dans la figure 5.

Figure 5.

R	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$l = 18.25$ ^{m.}	$l_1 = 40.00$ ^{m.}	$l_2 = 40.00$ ^{m.}	$l_3 = 40.00$ ^{m.}	$l_4 = 40.00$ ^{m.}	$l_5 = 40.00$ ^{m.}	$l_6 = 40.00$ ^{m.}	$l_7 = 40.00$ ^{m.}	$l_8 = 18.25$ ^{m.}	
$p = \begin{cases} 1,550.00 \\ 5,550.00 \end{cases}$ ^{k.}	$p_1 = p$	$p_2 = p$	$p_3 = p$	$p_4 = p$	$p_5 = p$	$p_6 = p$	$p_7 = p$	$p_8 = p$	
$P = \begin{cases} 28,287.50 \\ 101,287.50 \end{cases}$	$P_1 = P_4$	$P_2 = P_4$	$P_3 = P_4$	$P_4 = \begin{cases} 62,000.00 \\ 122,000.00 \end{cases}$ ^{k.}	$P_5 = P_4$	$P_6 = P_4$	$P_7 = P_4$	$P_8 = P$	

Ce pont a neuf travées symétriques. Nous allons y appliquer la formule (G).

Formule (G) pour neuf travées.

$$R = \frac{P}{4} + \frac{1}{4\alpha_8\tau_8} (\alpha_8 A_8 P - \epsilon_8 B_8 P_1 + \gamma_8 C_8 P_2 - \delta_8 D_8 P_3 + \epsilon_8 E_8 P_4 - \varphi_8 F_8 P_5 + \gamma_8 K_8 P_6 - \omega_8 O_8 P_7 + P_8).$$

Valeurs des rapports : α , β , γ , δ , ε , φ , χ et ω .

$$\alpha_1 = \frac{l}{l_1} = \frac{73}{160} = 0.456,250.$$

$$\beta_2 = \frac{l_1}{l_2} = 1.$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_1 = 0.456,250.$$

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_2 = 1.$$

$$\alpha_8 = \frac{l}{l_8} = 1.$$

$$\beta_8 = \frac{l_1}{l_8} = \frac{160}{73} = 2.191,781.$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 1.$$

$$\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = 1.$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = 1.$$

$$\gamma_8 = \frac{l_2}{l_8} = 2.191,781.$$

$$\delta_8 = \frac{l_3}{l_8} = 2.191,781.$$

$$\varepsilon_8 = \frac{l_4}{l_8} = 2.191,781.$$

$$\varphi_6 = \varphi_7 = 1.$$

$$\chi_7 = 1,$$

$$\omega_8 = \frac{l_7}{l_8} = 2.191,781.$$

$$\varphi_8 = \frac{l_5}{l_8} = 2.191,781.$$

$$\chi_8 = \frac{l_6}{l_8} = 2.191,781.$$

TABLEAU DES SÉRIES τ , A, B, C, D, E, F, K ET O.

$$\tau_0 = 1.$$

$$A_0 = 1.$$

$$\tau_1 = 2 + 2\alpha_1 = \frac{233}{80} = 2,9125.$$

$$A_1 = 2 + \alpha_1 = \frac{393}{160} = 2,45625.$$

$$\tau_2 = (2 + 2\beta_2)\tau_1 - \beta_2 = \frac{852}{80} = 10,65.$$

$$A_2 = (2 + 2\beta_2)A_1 - \beta_2 = \frac{1,412}{160} = 8,825.$$

$$\tau_3 = (2 + 2\gamma_3)\tau_2 - \gamma_3\tau_1 = \frac{3,175}{80} = 39,6875.$$

$$A_3 = (2 + 2\gamma_3)A_2 - \gamma_3A_1 = \frac{5,255}{160} = 32,84375.$$

$$\tau_4 = (2 + 2\delta_4)\tau_3 - \delta_4\tau_2 = \frac{11,848}{80} = 148,10.$$

$$A_4 = (2 + 2\delta_4)A_3 - \delta_4A_2 = \frac{19,608}{160} = 122,55.$$

$$\tau_5 = (2 + 2\varepsilon_5)\tau_4 - \varepsilon_5\tau_3 = \frac{44,217}{80} = 552,7125.$$

$$A_5 = (2 + 2\varepsilon_5)A_4 - \varepsilon_5A_3 = \frac{73,177}{160} = 457,35625.$$

$$\tau_6 = (2 + 2\varphi_6)\tau_5 - \varphi_6\tau_4 = \frac{165,020}{80} = 2.062,75.$$

$$A_6 = (2 + 2\varphi_6)A_5 - \varphi_6A_4 = \frac{273,100}{160} = 1.706,875.$$

$$\tau_7 = (2 + 2\chi_7)\tau_6 - \chi_7\tau_5 = \frac{615,863}{80} = 7.698,2875.$$

$$A_7 = (2 + 2\chi_7)A_6 - \chi_7A_5 = \frac{1.019,223}{160} = 6.370,14375.$$

$$\tau_8 = (2 + 2\omega_8)\tau_7 - \omega_8\tau_6 = 44.621,399,292.....$$

$$A_8 = (2 + 2\omega_8)A_7 - \omega_8A_6 = 36.923,091,383.....$$

$$B_1 = 1.$$

$$B_2 = 2 + \epsilon_2 = 3.$$

$$B_3 = (2 + 2\gamma_3)B_2 - \gamma_3 = 11.$$

$$B_4 = (2 + 2\delta_4)B_3 - \delta_4 B_2 = 41.$$

$$B_5 = (2 + 2\epsilon_5)B_4 - \epsilon_5 B_3 = 153.$$

$$B_6 = (2 + 2\varphi_6)B_5 - \varphi_6 B_4 = 571.$$

$$B_7 = (2 + 2\chi_7)B_6 - \chi_7 B_5 = 2,131.$$

$$B_8 = (2 + 2\omega_8)B_7 - \omega_8 B_6 = 12,351,863,671, \dots$$

$$C_2 = 1.$$

$$C_3 = 2 + \gamma_3 = 3.$$

$$C_4 = (2 + 2\delta_4)C_3 - \delta_4 = 11.$$

$$C_5 = (2 + 2\epsilon_5)C_4 - \epsilon_5 C_3 = 41.$$

$$C_6 = (2 + 2\varphi_6)C_5 - \varphi_6 C_4 = 153.$$

$$C_7 = (2 + 2\chi_7)C_6 - \chi_7 C_5 = 571.$$

$$C_8 = (2 + 2\omega_8)C_7 - \omega_8 C_6 = 3,309,671,509, \dots$$

$$D_3 = 1.$$

$$D_4 = 2 + \delta_4 = 3.$$

$$D_5 = (2 + 2\epsilon_5)D_4 - \epsilon_5 = 11.$$

$$D_6 = (2 + 2\varphi_6)D_5 - \varphi_6 D_4 = 41.$$

$$D_7 = (2 + 2\chi_7)D_6 - \chi_7 D_5 = 153.$$

$$D_8 = (2 + 2\omega_8)D_7 - \omega_8 D_6 = 886,821,965, \dots$$

$$E_4 = 1.$$

$$E_5 = 2 + \epsilon_5 = 3.$$

$$E_6 = (2 + 2\varphi_6)E_5 - \varphi_6 = 11.$$

$$E_7 = (2 + 2\chi_7)E_6 - \chi_7 E_5 = 41.$$

$$E_8 = (2 + 2\omega_8)E_7 - \omega_8 E_6 = 237,616,451, \dots$$

$$F_5 = 1.$$

$$F_6 = 2 + \varphi_6 = 3.$$

$$F_7 = (2 + 2\chi_7)F_6 - \chi_7 = 11.$$

$$F_8 = (2 + 2\omega_8)F_7 - \omega_8 F_6 = 63,643,839, \dots$$

$$K_6 = 1.$$

$$K_7 = 2 + \chi_7 = 3.$$

$$K_8 = (2 + 2\omega_8)K_7 - \omega_8 = 16,958,905, \dots$$

$$O_7 = 1.$$

$$O_8 = 2 + \omega_8 = 4,191,781, \dots$$

La formule (G) devient alors :

$$R = 0.456,867P - 0.151,684P_1 + 0.040,642P_2 - 0.010,890P_3 + 0.002,918P_4 - 0.000,781P_5 + 0.000,208P_6 - 0.000,051P_7 + 0.000,006P_8. \quad (G)$$

Les valeurs des moments de rupture sur les piles seront données par les formules de la page 20 :

$$M_1 = 4.5625(2P - 4R). \tag{1}$$

$$M_2 = 10(-2.449,492P + P_1 + 5.315,312 R). \tag{2}$$

$$M_3 = 10(8.885,469P - 3P_1 + P_2 - 19.436,250 R). \tag{3}$$

$$M_4 = 10(-33.092,383P + 11P_1 - 3P_2 + P_3 + 72.429,687 R). \tag{4}$$

Celles des efforts tranchants sur les piles seront données par les formules de la page 18 :

$$H_1 = 0.840,498P + 0.25P_1 - 1.442,891 R. \tag{1}$$

$$H_2 = -2.833,741P + P_1 + 0.25P_2 + 6.187,891 R. \tag{2}$$

$$H_3 = 10.494,463P - 3.50P_1 + P_2 + 0.25P_3 - 22.966,484 R. \tag{3}$$

$$H_4 = -156.576,445P + 13P_1 - 3.50P_2 + P_3 + 0.25P_4 + 85.678,047 R. \tag{4}$$

Établissons maintenant, au moyen des formules précédentes, les équations des cinq premières travées suivant les hypothèses n^{os} 1 et 2, et nous en déduirons les moments de rupture *maxima* vers le centre des cinq premières travées.

HYPOTHÈSE N^o 1. — *Surcharge des travées n^{os} 1, 3, 5, 7 et 9.*

$$P = P_8 = 101,287^k.50; P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = 62,000^k.00; P_2 = P_4 = P_6 = 222,000^k.00;$$

$$R = 45,861^k.50 \quad (\text{MAXIMUM}); M_2 = 576,647^m.00; H_2 = 114,263^k.00;$$

$$M_4 = 477,606 .00; H_4 = 111,006 .00;$$

Equation de la première travée. $\epsilon \frac{d^2y}{dx^2} = - 45,861.30x + 2,778x^2;$

MOMENT NÉGATIF MAXIMUM DE LA PREMIÈRE TRAVÉE. $= -189,400^m.00.$

$$\text{Équation de la troisième travée. } \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 576,647 - 114,263x + 2,775x^2;$$

$$\text{MOMENT NÉGATIF MAXIMUM DE LA TROISIÈME TRAVÉE. } = -598,610^{\text{km}}.00;$$

$$\text{Équation de la cinquième travée. } \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 477,606 - 111,006x + 2,775x^2;$$

$$\text{MOMENT NÉGATIF MAXIMUM DE LA CINQUIÈME TRAVÉE. } = -632,200^{\text{km}}.00;$$

—o—o—o—

HYPOTHÈSE N° 2. — *Surcharge des travées n° 2, 4, 6 et 8.*

$$P = P_8 = 28,287^{\text{k}}.50; \quad P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = 222,000^{\text{k}}.00; \quad P_2 = P_4 = P_6 = 62,000^{\text{k}}.00;$$

$$R = -20,657^{\text{k}}.40 \quad (\text{MINIMUM}) \quad M_1 = 634,755^{\text{km}}.00; \quad H_1 = 116,115^{\text{k}}.00;$$

$$M_3 = 484,612.00; \quad H_3 = 111,330.00.$$

$$\text{Équation de la deuxième travée. } \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 634,755 - 116,115x + 2,775x^2.$$

$$\text{MOMENT NÉGATIF MAXIMUM DE LA DEUXIÈME TRAVÉE. } = -577,500^{\text{km}}.00.$$

$$\text{Équation de la quatrième travée. } \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 484,612 - 111,330x + 2,775x^2;$$

$$\text{MOMENT NÉGATIF MAXIMUM DE LA QUATRIÈME TRAVÉE. } = -652,000^{\text{km}}.00;$$

—o—o—o—

Pour obtenir maintenant les moments de rupture *maxima* sur les piles, il suffit de calculer les valeurs de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 dans les hypothèses n° 3, 4, 5 et 6.

Hypothèse n° 3.	R = 42,714 ^k .00.	M ₁ = 692,200 ^{km} .00;
— n° 4.	R = -11,758 ^k .50.	M ₂ = 902,100 .00;
— n° 5.	R = 43,485 ^k .20.	M ₃ = 908,000 .00;
— n° 6.	R = -20,003 ^k .50.	M ₄ = 930,500 .00.

M. l'ingénieur Frémaux, dans le compte rendu qu'il a publié dans les *Nouvelles Annales de la construction*, évalue à $503,333^{\text{km}},00$ le moment de rupture *maximum* des travées, et à $740,000^{\text{km}},00$ le moment de rupture *maximum* sur les piles; ce qui correspond à un travail de $5^{\text{k}},80$ par millimètre carré vers le centre des travées et de $6^{\text{k}},40$ sur les piles.

Le moment sur les piles est calculé comme si les travées étaient encastées, et le moment vers le centre des travées est obtenu en supposant l'encastrement de la travée complet en ce qui concerne le poids mort, et incomplet en ce qui concerne la surcharge.

On voit que les résultats obtenus au moyen de cette méthode approximative sont sensiblement différents de ceux indiqués ci-dessus.

Le travail *maximum* est en effet de $7^{\text{k}},30$ pour la cinquième travée et de $8^{\text{k}},00$ sur la quatrième pile.

La différence est d'environ 25 p. 100.

Cette vérification est la meilleure preuve que l'on puisse donner en faveur de l'utilité de formules générales qui permettent de calculer aussi exactement que possible le travail d'un pont métallique, quel que soit le nombre de ses travées.

Elle nous conduit en outre à une remarque que nous croyons utile de signaler ici.

Le *maximum* de la réaction sur la culée donné par l'hypothèse n° 1 est $+ 45,861^{\text{k}},00$.

Le *minimum* donné par l'hypothèse n° 2 est $- 20,637^{\text{k}},40$.

Cela tient à la faible ouverture des travées de rive comparativement à celles des travées centrales dont elle n'atteint pas même la moitié.

La tension qu'éprouve la travée de rive sous l'influence de la surcharge des travées paires, et même sous l'influence seule de la surcharge de la deuxième travée, est telle que l'extrémité de la poutre tend à se soulever.

Il est rationnel de diminuer l'ouverture de la travée de rive; car, dans un pont à travées égales, c'est celle dont le travail est le plus grand. (Voir le chapitre IV.)

Mais cette diminution ne doit pas dépasser certaines limites. (Voir le chapitre V.)

X. *Calculs et tracé de la courbe enveloppe d'un pont symétrique de onze travées.* — Le pont que nous choisissons pour exemple de l'application de la formule (S_i) est représenté dans la figure 6.

Figure 6.

R	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	Arête du pont.	R' ₅
$l=25.00$	$l_1=30.00$	$l_2=30.00$	$l_3=30.00$	$l_4=35.00$	$l_5=40.00$		
$p = \begin{cases} 1,000.00; \\ 3,000.00; \end{cases}$	$p_1 = \begin{cases} 1,200.00; \\ 3,200.00; \end{cases}$	$p_2 = \begin{cases} 1,200.00 \\ 3,200.00 \end{cases}$	$p_3 = \begin{cases} 1,200.00; \\ 3,200.00; \end{cases}$	$p_4 = \begin{cases} 1,500.00; \\ 3,500.00; \end{cases}$	$p_5 = \begin{cases} 2,000.00; \\ 4,000.00; \end{cases}$		
$P = \begin{cases} 25,000.00; \\ 75,000.00; \end{cases}$	$P_1 = \begin{cases} 36,000.00; \\ 96,000.00; \end{cases}$	$P_2 = \begin{cases} 36,000.00; \\ 96,000.00; \end{cases}$	$P_3 = \begin{cases} 36,000.00. \\ 96,000.00; \end{cases}$	$P_4 = \begin{cases} 52,500.00; \\ 122,500.00; \end{cases}$	$P_5 = \begin{cases} 80,000.00; \\ 160,000.00; \end{cases}$		

Nota. Chaque rail est supposé porté par une seule poutre, et les poids indiqués ci-dessus sont ceux relatifs à une poutre, soit à la moitié d'une voie,

Pour ce cas particulier, la formule (S_i) prend la forme suivante :

$$R = \frac{P}{4} + \frac{1}{4\alpha_5(\tau_5^2 - \tau_4^2)} [(\tau_5 A_5 - \tau_4 A_4)\alpha_5 P - (\tau_5 B_5 - \tau_4 B_4)\epsilon_5 P_1 + (\tau_5 C_5 - \tau_4 C_4)\gamma_5 P_2 - (\tau_5 D_5 - \tau_4 D_4)\delta_5 P_3 + (\tau_5 E_5 - \tau_4 E_4)\epsilon_5 P_4 - (\tau_5 - \tau_4)P_5 + (\tau_4 - \tau_3)\epsilon_5^2 P'_4 - (\tau_3 - \tau_2)\delta_5^2 P'_3 + (\tau_2 - \tau_1)\gamma_1^2 P'_2 - (\tau_1 - 1)\epsilon_5^2 P'_1 + \alpha_5^2 P'] \quad (S_i)$$

Valeurs des rapports : α , ϵ , γ , δ et ϵ .

$\alpha_1 = \frac{5}{6} = 0.833,333;$	$\epsilon_2 = 1;$ $\epsilon_3 = 1;$ $\epsilon_4 = \frac{6}{7} = 0.857,143;$ $\epsilon_5 = \frac{6}{8} = 0.75.$	$\gamma_3 = 1;$ $\gamma_4 = \frac{6}{7} = 0.857,143;$ $\gamma_5 = \frac{6}{8} = 0.75.$
$\alpha_2 = \frac{5}{6} = 0.833,333;$		
$\alpha_3 = \frac{5}{6} = 0.833,333;$		
$\alpha_4 = \frac{5}{7} = 0.714,286;$		
$\alpha_5 = \frac{5}{8} = 0.625;$		

$\delta_4 = \frac{6}{7} = 0.857,143;$	$\epsilon_5 = \frac{7}{8} = 0.875.$
$\delta_5 = \frac{6}{8} = 0.75;$	

TABLEAU DES SÉRIES τ , A, B, C, D ET E.

$\tau_0 = 1;$	$A_0 = 1;$	
$\tau_1 = \frac{11}{3} = 3.666,667;$	$A_1 = \frac{17}{6} = 2.833,333;$	$B_1 = 1;$
$\tau_2 = \frac{41}{3} = 13.666,667;$	$A_2 = \frac{31}{3} = 10.333,333;$	$B_2 = 3;$
$\tau_3 = \frac{153}{3} = 51.00;$	$A_3 = \frac{77}{2} = 38.50;$	$B_3 = 11;$
$\tau_4 = \frac{1,244}{7} = 177,714,286;$	$A_4 = \frac{939}{7} = 134.142,857;$	$B_4 = \frac{268}{7} = 38.285,714;$
$\tau_5 = \frac{34,821}{56} = 621.803,571;$	$A_5 = \frac{52,567}{112} = 469.348,214;$	$B_5 = \frac{7,501}{56} = 133.946,429.$

$C_2 = 1;$	$D_3 = 1;$	
$C_3 = 3;$	$D_4 = \frac{20}{7} = 2.857,143;$	$E_4 = 1;$
$C_4 = \frac{72}{7} = 10.285,714;$	$D_5 = \frac{551}{56} = 9.839,286;$	$E_5 = \frac{23}{8} = 2.875.$
$C_5 = \frac{2,013}{56} = 35.946,429;$		

La formule (S_i) devient alors :

$$R = 0.438,704P - 0.064,624P_1 + 0.017,341P_2 - 0.004,740P_3 + 0.001,587P_4 - 0.0005P_5 + \\ + 0.000,109P'_4 - 0.000,024P'_3 + 0.000,006P'_2 - 0.000,002P'_1 + 0.000,001P'.$$

Les valeurs des moments sur les piles seront données par les formules de la page 20 :

$$M_1 = 12.50P - 25R;$$

$$M_2 = -27.083,333P + 7.50P_1 + 91.666,667R;$$

$$M_3 = 150P - 22.50P_1 + 7.50P_2 - 341.666,667R;$$

$$M_4 = -559.375P + 82.50P_1 - 22.50P_2 + 7.50P_3 + 1,275R;$$

$$M_5 = 2,338.928,646P - 287.142,813P_1 + 77.142,853P_2 - 21.428,575P_3 + 8.75P_4 - 5,331.528,576R;$$

$$M_6 = -6,819.698,656P + 1.004.598,218P_1 - 269.598,218P_2 + 73.794,645P_3 - 25.156,250P_4 + \\ + 10P_5 + 15,545.089,275R.$$

Celles des efforts tranchants sur les piles seront données par les formules de la page 18 :

$$H_1 = 1.319,444P + 0.25P_1 - 3.888,889R;$$

$$H_2 = -5.902,778P + P_1 + 0.25P_2 + 14.444,444R;$$

$$H_3 = 23.645,833P - 3.50P_1 + P_2 + 0.25P_3 - 53.888,889R;$$

$$H_4 = -82.808,876P + 10.561,223P_1 - 2.846,937P_2 + 0.836,531P_3 + 0.25P_4 + 154.530,612R;$$

$$H_5 = 228.965,683P - 32.293,526P_1 + 8.668,527P_2 - 2.380,581P_3 + 0.847,656P_4 + 0.25P_5 - 521.912,946R.$$

Les diverses hypothèses de surcharges que nous aurons à considérer seront au nombre de douze, et sont représentées dans le tableau ci-après :

R R₁ R₂ R₃ R₄ R₅ R'₅ R'₄ R'₃ R'₂ R'₁ R'

R	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R' ₅	R' ₄	R' ₃	R' ₂	R' ₁	R'	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 1. Maximum de R et des travées impaires.
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 2. Minimum de R. Maximum des travées paires.
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 3. Maximum de R ₁ , H ₁ et M ₁ .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 3 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 4. Maximum de R ₂ , H ₂ et M ₂ .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 4 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 5. Maximum de R ₃ , H ₃ et M ₃ .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 5 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 6. Maximum de R ₄ , H ₄ et M ₄ .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 6 bis. Minimum d' <i>idem</i> .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 7. Maximum de R ₅ , H ₅ et M ₅ .
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	N° 7 bis. Minimum d' <i>idem</i> .

HYPOTHÈSE N° 1. — *Surcharge des travées n°s 1, 3, 5, 7, 9 et 11.*

$P = 75,000^k.00;$	$P' = 75,000^k.00;$	$R \text{ (MAXIMUM)} = 52,238^k.00 \text{ (1)};$ $H_2 = 49,097^k.00; M_2 = 178,290^{km}.00;$ $H_4 = 59,597^k.00; M_4 = 230,370^k.00;$
$P_1 = 36,000^k.00;$	$P'_1 = 36,000^k.00;$	
$P_2 = 96,000^k.00;$	$P'_2 = 96,000^k.00;$	
$P_3 = 36,000^k.00;$	$P'_3 = 36,000^k.00;$	
$P_4 = 122,500^k.00;$	$P'_4 = 122,500^k.00;$	
$P_5 = 80,000^k.00;$		

Équation de la première travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -32,238x + 1,500x^2;$

Abscisses des points d'inflexion. $i = 0; i' = 21^m.492;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 10^m.746;$

MOMENT NÉGATIF MAXIMUM $= -175,215^{km}.00;$

Moment de rupture sur la première pile. $= 131,550^{km}.00.$

Équation de la troisième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 178,290 - 49,097x + 1,600x^2;$

Abscisses des points d'inflexion. $i_2 = 4^m.205; i'_2 = 26^m.480;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 15^m.340;$

MOMENT NÉGATIF MAXIMUM $= -198,555^{km}.00;$

Moment de rupture sur la troisième pile. $= 145,380^{km}.00.$

Équation de la cinquième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 230,370 - 59,597x + 1,750x^2;$

Abscisses des points d'inflexion. $i_4 = 4^m.550; i'_4 = 28^m.935;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 16^m.740;$

MOMENT NÉGATIF MAXIMUM $= -260,570^{km}.00;$

Moment de rupture sur la cinquième pile. $= 323,225^{km}.00.$

(1) Dans les calculs qui vont suivre, les réactions, efforts tranchants et moments de rupture *maxima* et *minima* seront en caractères plus apparents.

HYPOTHÈSE N° 2. — *Surcharge des travées n°s 2, 4, 6, 8 et 10.*

$P = 25,000^k.00;$	$P' = 25,000^k.00;$		$R \text{ (MINIMUM)} = 4,959^k.50.$
$P_1 = 96,000 .00;$	$P'_1 = 96,000 .00;$		$H_1 = 49,062^k.00; M_1 = 189,012^{km}.00;$
$P_2 = 36,000 .00;$	$P'_2 = 36,000 .00;$		$H_3 = 48,960 .00; M_3 = 172,363 .00;$
$P_3 = 96,000 .00;$	$P'_3 = 96,000 .00;$		$H_5 = 80,000 .00; M_5 = 399,450 .00.$
$P_4 = 52,500 .00;$	$P'_4 = 52,500 .00;$		
$P_5 = 160,000 .00;$			

Équation de la deuxième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 189,012 - 49,062x + 1,600x^2;$
 Abscisses des points d'inflexion. $i_1 = 4^m.375; i'_1 = 26^m.285;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $15^m.332;$
MOMENT NÉGATIF MAXIMUM = **$-187,084^{km}.00;$**
 Moment de rupture sur la deuxième pile. = $157,152^{km}.00;$

Équation de la quatrième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 172,363 - 48,960x + 1,600x^2;$
 Abscisses des points d'inflexion. $i_3 = 4^m.060; i'_3 = 26^m.540;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments = $15^m.300;$
MOMENT NÉGATIF MAXIMUM = **$-202,181^{km}.00;$**
 Moment de rupture sur la quatrième pile. = $143,563^{km}.00.$

Équation de la sixième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 399,450 - 80,000x + 2,000x^2;$
 Abscisses des points d'inflexion. $i_5 = 5^m.85; i'_5 = 34^m.15;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $20^m.00;$
MOMENT NÉGATIF MAXIMUM = **$-400,550^{km}.00;$**
 Moment de rupture sur la sixième pile. = $399,450^{km}.00.$

HYPOTHÈSE N° 3. — *Surcharge des travées n°s 1, 2, 4, 6, 8 et 10.*

$P = 75,000^k.00;$	$P' = 25,000^k.00;$	$R(3) = R(\text{MINIMUM}) + 0.438,704 \times 50,000 =$ $= 4,939.50 + 21,935.20 = \mathbf{26,874^k.70.}$
$P_1 = 96,000 .00;$	$P'_1 = 96,000 .00;$	
$P_2 = 36,000 .00;$	$P'_2 = 36,000 .00;$	
$P_3 = 96,000 .00;$	$P'_3 = 96,000 .00;$	
$P_4 = 52,500 .00;$	$P'_4 = 52,500 .00;$	
$P_5 = 160,000 .00;$		$H_1 = \mathbf{52,298^k.00}; \quad M_1 = \mathbf{265,625^{km}.00.}$

Équation de la première travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -26,874.70x + 1,500x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $8^m.958;$

MOMENT DE RUPTURE MAXIMUM SUR LA PREMIÈRE PILE . . = $\mathbf{265,625^{km}.00.}$

Équation de la deuxième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 265,625 - 52,298x + 1,600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $16^m.343;$

Moment de rupture sur la deuxième pile. = $136,685^{km}.00.$

HYPOTHÈSE N° 3 bis. — *Surcharge des travées n°s 3, 5, 7, 9 et 11.*

$P = 25,000^k.00;$	$P' = 75,000^k.00;$	$R(3 \text{ bis}) = R(\text{MAXIMUM}) - 0.438,704 \times$ $\times 50,000 = 32,238 - 21,935.20 =$ $= \mathbf{10,502^k.80};$
$P_1 = 36,000 .00;$	$P'_1 = 36,000 .00;$	
$P_2 = 96,000 .00;$	$P'_2 = 96,000 .00;$	
$P_3 = 36,000 .00;$	$P'_3 = 36,000 .00;$	
$P_4 = 122,500 .00;$	$P'_4 = 122,500 .00;$	
$P_5 = 80,000 .00;$		$H_1 = \mathbf{15,204^k.90}; \quad M_1 = \mathbf{54,952^{km}.50.}$

Équation de la deuxième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 54,932.50 - 13,204.90x + 600x^2.$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $11^m.000;$

MOMENT DE RUPTURE MINIMUM SUR LA PREMIÈRE PILE . . = $\mathbf{54,952^{km}.50};$

Moment de rupture sur la deuxième pile. = $198,785^{km}.50;$

HYPOTHÈSE N° 4. — *Surcharge des travées nos 2, 3, 5, 7, 9 et 11.*

P = 25,000 ^k .00;	P' = 75,000 ^k .00;	$R(4) = R(3bis) - 0.064,624 \times 60,000 =$ $= 10,302.80 - 3,877.40 = 6,425k.40;$ <hr style="width: 10%; margin: 10px auto;"/> $H_1 = 43,283k.00; \quad M_1 = 151,868km.00;$ $H_2 = 55,955k.00; \quad M_2 = 295,578km.00.$
P ₁ = 96,000 .00;	P' ₁ = 36,000 .00;	
P ₂ = 96,000 .00;	P' ₂ = 96,000 .00;	
P ₃ = 36,000 .00;	P' ₃ = 36,000 .00;	
P ₄ = 122,500 .00;	P' ₄ = 122,500 .00;	
P ₅ = 80,000 .00.		

Équation de la deuxième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 151,868 - 43,283x + 1,600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = 13^m.526;

MOMENT DE RUPTURE MAXIMUM SUR LA DEUXIÈME PILE . . = 295,578^{km}.00.

Équation de la troisième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 293,378 - 53,955x + 1,600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = 16^m.861;

Moment de rupture sur la troisième pile. = 114,728^{km}.00.

HYPOTHÈSE N° 4 bis. — *Surcharge des travées nos 1, 4, 6, 8 et 10.*

P = 75,000 ^k .00;	P' = 25,000 ^k .00;	$R(4 bis) = R(3) + 0.064,624 \times 60,000 =$ $= 26,874.70 + 3,877.40 = 30,752k.10.$ <hr style="width: 10%; margin: 10px auto;"/> $H_1 = 22,220k.00; \quad M_1 = 168,692km.00;$ $H_2 = 12,637 .00; \quad M_2 = 42,101 .00.$
P ₁ = 36,000 .00;	P' ₁ = 96,000 .00;	
P ₂ = 36,000 .00;	P' ₂ = 36,000 .00;	
P ₃ = 96,000 .00;	P' ₃ = 96,000 .00;	
P ₄ = 52,500 .00;	P' ₄ = 52,500 .00;	
P ₅ = 160,000 .00;		

Équation de la deuxième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 168,692 - 22,220x + 600x^2.$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = 18^m.520;

MOMENT DE RUPTURE MINIMUM SUR LA DEUXIÈME PILE . . = 42,101^{km}.00.

Équation de la troisième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 42,101 - 12,637x + 600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $10^m,530;$

Moment de rupture sur la troisième pile. = $202,994^m.00;$



HYPOTHÈSE N° 5. — Surcharge des travées n°s 1, 3, 4, 6, 8 et 10.

$P = 75,000^k.00; \quad P' = 25,000^k.00;$
 $P_1 = 36,000 .00; \quad P'_1 = 96,000 .00;$
 $P_2 = 96,000 .00; \quad P'_2 = 36,000 .00;$
 $P_3 = 96,000 .00; \quad P'_3 = 96,000 .00;$
 $P_4 = 52,500 .00; \quad P'_4 = 52,500 .00;$
 $P_5 = 160,000 .00;$

$R (5) = R (4 \text{ bis}) + 0.017,341 \times 60,000 =$
 $= 30,752.10 + 1,040.50 = 31,792^k.60.$

$H_2 = 42,667^k.00; \quad M_2 = 137,466^m.00;$
 $H_3 = 54,159^k.00; \quad M_3 = 297,456^m.00;$

Équation de la troisième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 137,466 - 42,667x + 1,600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $13^m.333;$

MOMENT DE RUPTURE MAXIMUM SUR LA TROISIÈME PILE . . = $297,456^m.00.$



Équation de la quatrième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 297,456 - 54,159x + 1,600x^2;$

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $16^m,925;$

Moment de rupture sur la quatrième pile. = $112,686^m.00.$



HYPOTHÈSE N° 5 bis. — Surcharge des travées n°s 2, 5, 7, 9 et 11.

$P = 25,000^k.00; \quad P' = 75,000^k.00;$
 $P_1 = 96,000 .00; \quad P'_1 = 36,000 .00;$
 $P_2 = 36,000 .00; \quad P'_2 = 96,000 .00;$
 $P_3 = 36,000 .00; \quad P'_3 = 36,000 .00;$
 $P_4 = 122,500 .00; \quad P'_4 = 122,500 .00;$
 $P_5 = 80,000 .00;$

$R (5 \text{ bis}) = R (4) - 0.017,341 \times 60,000 =$
 $= 6,425.40 - 1,040.10 = 5,384^k.90;$

$H_2 = 23,926^k.00; \quad M_2 = 197,977^m.00;$
 $H_3 = 9,965^k.00; \quad M_3 = 20,185^m.00;$

Équation de la troisième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 197,977 - 23,926x + 600x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $19^m.940$;

MOMENT DE RUPTURE MINIMUM SUR LA TROISIÈME PILE. . = 20,185^{km}.00.

Équation de la quatrième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 20,185 - 9,965x + 600x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments = $8^m.300$;

Moment de rupture sur la quatrième pile. = $261,232^{\text{km}}.00.$

HYPOTHÈSE N° 6. — *Surcharge des travées nos 2, 4, 5, 7, 9 et 11.*

$P = 25,000^{\text{k}}.00$; $P' = 75,000^{\text{k}}.00$;

$P_1 = 96,000 .00$; $P'_1 = 36,000 .00$;

$P_2 = 36,000 .00$; $P'_2 = 96,000 .00$;

$P_3 = 96,000 .00$; $P'_3 = 36,000 .00$;

$P_4 = 122,000 .00$; $P'_4 = 122,500 .00$;

$P_5 = 80,000 .00$;

$R(6) = R(5 \text{ bis}) - 0.004,740 \times 60,000 =$
 $= 5,384.90 - 284.40 = 5,100^{\text{k}}.50.$

$H_3 = 40,297^{\text{k}}.00$; $M_3 = 117,346^{\text{km}}.00$;

$H_4 = 62,726^{\text{k}}.00$; $M_4 = 548,456^{\text{km}}.00.$

Équation de la quatrième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 117,346 - 40,297x + 1,600x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $12^m.593$;

MOMENT DE RUPTURE MAXIMUM SUR LA QUATRIÈME PILE . . = 548,456^{km}.00.

Équation de la cinquième travée $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 348,436 - 62,726x + 1,750x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $17^m.922$;

Moment de rupture sur la cinquième pile. = $296,776^{\text{km}}.00.$

HYPOTHÈSE N° 6 bis. — *Surcharge des travées n°s 1, 3, 6, 8 et 10.*

$P = 75,000^k.00;$	$P' = 25,000^k.00;$	$R(6\ bis) = R(5) + 0.004,740 \times 60,000 =$ $= 31,792.60 + 284.40 = 32,077^k.00.$
$P_1 = 36,000 .00;$	$P'_1 = 96,000 .00;$	
$P_2 = 96,000 .00;$	$P'_2 = 36,000 .00;$	
$P_3 = 36,000 .00;$	$P'_3 = 96,000 .00;$	
$P_4 = 52,500 .00;$	$P'_4 = 52,500 .00;$	
$P_5 = 160,000 .00;$		<hr style="width: 10%; margin: 0 auto;"/>
		$H_3 = 23,827^k.00; \quad M_3 = 200,059^{km}.00;$ $H_4 = 14,842^k.00; \quad M_4 = 25,240^{km}.00.$

Équation de la quatrième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 200,059 - 23,827x + 600x^2;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 19^m.856;$
MOMENT DE RUPTURE MINIMUM SUR LA QUATRIÈME PILE . . . = 25,240^{km}.00.

Équation de la cinquième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 25,240 - 14,842x + 750x^2;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 9^m.895.$
 Moment de rupture sur la cinquième pile. $= 424,510^{km}.00.$

HYPOTHÈSE N° 7. — *Surcharge des travées n°s 1, 3, 5, 6, 8 et 10.*

$P = 75,000^k.00;$	$P' = 25,000^k.00;$	$R(7) = R(6\ bis) + 0.001,587 \times 70,000 =$ $= 32,077 + 111.10 = 32,188^k.10.$
$P_1 = 36,000 .00;$	$P'_1 = 96,000 .00;$	
$P_2 = 96,000 .00;$	$P'_2 = 36,000 .00;$	
$P_3 = 36,000 .00;$	$P'_3 = 96,000 .00;$	
$P_4 = 122,500 .00;$	$P'_4 = 52,500 .00;$	
$P_5 = 160,000 .00;$		<hr style="width: 10%; margin: 0 auto;"/>
		$H_4 = 50,492^k.00; \quad M_4 = 167,164^{km}.00;$ $H_5 = 84,759^k.00; \quad M_5 = 545,694^{km}.00.$

Équation de la cinquième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 167,164 - 50,492x + 1,750x^2;$
 Abscisse de l'axe de la parabole des moments. $= 14^m.425;$
MOMENT DE RUPTURE MAXIMUM SUR LA CINQUIÈME PILE . . . = 545,694^{km}.00.

Équation de la sixième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 543,694 - 84,759x + 2,000x^2$;

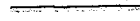
Abscisse de l'axe de la parabole des moments = $21^m.490$;

Moment de rupture sur la sixième pile. = $353,334^{km}.00$.



HYPOTHÈSE N° 7 bis. — Surcharge des travées n°s 2, 4, 7, 9 et 11.

$P = 25,000^{k}.00$;	$P' = 75,000^{k}.00$;	$R (7 bis) = R (6) - 0.001,587 \times 70,000 =$ $= 5,100.50 - 111.10 = 4,989^{k}.40.$
$P_1 = 96,000 .00$;	$P'_1 = 36,000 .00$;	
$P_2 = 36,000 .00$;	$P'_2 = 96,000 .00$;	
$P_3 = 96,000 .00$;	$P'_3 = 36,000 .00$;	
$P_4 = 52,500 .00$;	$P'_4 = 122,500 .00$;	
$P_5 = 80,000 .00$;		
		$H_4 = 27,076^{k}.00$; $M_4 = 206,911^{km}.00$; $H_5 = 55,115^{k}.00$; $M_5 = 177,990^{km}.00$.



Équation de la cinquième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 206,911 - 27,076x + 750x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $18^m.051$;

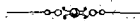
MOMENT DE RUPTURE MINIMUM SUR LA CINQUIÈME PILE . . = $177,990^{km}.00$.



Équation de la sixième travée. $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = 177,990 - 35,113x + 1,000x^2$;

Abscisse de l'axe de la parabole des moments. = $17^m.557$.

Moment de rupture sur la sixième pile. = $373,458^{km}.00$.



Les calculs qui précèdent ont servi à établir l'épure complète du pont de onze travées symétriques que nous avons choisi comme exemple. (Voir la planche n° 1.)

Les efforts tranchants à droite et à gauche des piles sont représentés par des lignes droites.

Pour la quatrième travée, par exemple, les hypothèses qui concourent au tracé du polygone enveloppe des efforts tranchants portent les n°s 5, 5 bis, 6 et 6 bis.

On n'a considéré ici que les efforts tranchants rectilignes qui se produisent quand la surcharge règne sur toute l'ouverture de la travée.

CHAPITRE IV.

PONTES A TRAVÉES ÉGALES.

XI. *Établissement d'un tableau pour le calcul des ponts à travées égales.* — A l'aide des formules données (chapitre I, pages 23 et 24) pour les ponts à travées égales, tous les éléments nécessaires au tracé de la courbe enveloppe d'un pont de cette catégorie peuvent se calculer d'avance en fonction des quantités suivantes :

- l , ouverture d'une travée ;
- P , poids permanent d'*idem* ;
- S , surcharge d'*idem* ;
- p , poids permanent sur l'unité de longueur ;
- s , surcharge sur l'unité de longueur.

Nous avons réuni dans un même tableau (voir la planche 3) les calculs de ces éléments pour des ponts de deux à douze travées inclusivement.

Les colonnes 2, 4 et 5 donnent les valeurs générales de la réaction sur la culée, des réactions sur les piles et des moments de rupture sur les piles.

Ces valeurs ne figurent dans le tableau qu'à titre de renseignements; elles ne sont point nécessaires pour le tracé de la courbe enveloppe.

La colonne 6 donne le maximum absolu du moment sur la pile.

La colonne 7 donne le premier maximum relatif de ce moment, c'est-à-dire la plus grande valeur qu'il puisse atteindre quand la travée située à gauche de la pile n'est pas chargée.

La colonne 8 donne le deuxième maximum relatif, c'est-à-dire la plus grande valeur du moment quand la travée située à droite de la pile n'est pas chargée.

La colonne 9 donne le minimum absolu du moment sur la pile.

La colonne 10 donne le premier minimum relatif, c'est-à-dire la plus petite valeur du moment pour le cas où la travée située à gauche de la pile est chargée.

La colonne 11 donne le deuxième minimum relatif, soit la plus petite valeur du moment pour le cas où la travée située à droite de la pile est chargée.

La colonne 13 donne le maximum absolu négatif de la travée.

Enfin la colonne 14 donne l'abscisse de l'axe de la parabole des moments négatifs maxima.

Les huit éléments donnés par les colonnes 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 et 14 suffisent pour le tracé complet de la courbe enveloppe des moments.

Prenons pour exemple la troisième travée d'un pont comprenant au moins sept travées égales.

Les six paraboles que l'on devra tracer pour obtenir la courbe enveloppe de cette travée correspondent aux hypothèses n^{os} 1, 4, 5, 2, 4 bis et 5 bis.

La première se tracera au moyen des éléments donnés par les colonnes n^{os} 13 et 14.

La deuxième passera par les points donnés sur les piles par les colonnes n^{os} 6 et 10.

La troisième passera par les deux points donnés sur les piles par les colonnes n^{os} 6 et 11.

Ces trois premières paraboles devront être tracées avec le paramètre $\frac{2}{p+s}$.

La quatrième parabole rencontrera la pile n^o 2 au même point que la parabole des moments négatifs maxima de la deuxième travée, et la pile n^o 3 au même point que la parabole des moments négatifs de la quatrième travée.

La cinquième passera par les points donnés par les colonnes n^{os} 9 et 7.

Enfin la sixième passera par les points donnés sur les piles par les colonnes n^{os} 9 et 8.

Ces trois dernières paraboles devront être tracées avec le paramètre $\frac{2}{p}$.

C'est ainsi que nous avons tracé l'épure de la courbe enveloppe d'un pont de douze

travées égales, en supposant la surcharge S égale à deux fois le poids permanent P . (Voir la planche n° 2.)

XII. *Remarques sur le travail des ponts à travées égales.* — Plusieurs faits importants ressortent du tableau et sont mis en évidence par l'épure.

1° Les moments de rupture maxima des travées impaires vont en diminuant à partir de la première travée vers le centre du pont.

2° Les moments de rupture maxima des travées paires vont en augmentant à partir de la deuxième travée vers le centre du pont.

3° Le moment de la première travée est plus grand, et celui de la deuxième travée plus petit que tous les autres.

4° Les moments de rupture maxima sur les piles suivent une loi semblable.

5° Les efforts tranchants à droite des points d'appui, pour les travées impaires, vont en augmentant à partir de la première travée vers le centre du pont.

6° Ces mêmes efforts, pour les travées paires, vont en diminuant à partir de la deuxième travée vers le centre du pont.

7° Le plus grand de ces efforts tranchants à droite est celui de la deuxième travée, et le plus petit celui de la première.

8° Les efforts tranchants à gauche des points d'appui suivent une loi contraire. Le maximum est celui de la première travée, et le minimum celui de la deuxième.

9° Le plus grand effort tranchant est celui qui se produit à gauche de la première pile, et le plus petit celui qui se produit sur la culée.

XIII. *Travail d'un pont à travées égales et également chargées.* — Il n'est pas sans intérêt de rechercher comment un pont à travées égales travaille sous l'influence de son propre poids ou d'une surcharge également répartie.

Pour cela, nous avons calculé dans un second tableau (planche 4) les réactions et moments de rupture, d'après les éléments du premier tableau, en faisant $S=0$ et $s=0$.

Les faits principaux qui sont mis en évidence dans ce deuxième tableau peuvent se résumer ainsi :

1° Pour les ponts d'un nombre impair de travées, la réaction sur la culée va en diminuant, au fur et à mesure que le nombre des travées augmente, depuis $0,50P$ jusqu'à un certain nombre limite dont la valeur est :

$$R_{\infty} = 0.394,337..... P.$$

2° Pour les ponts d'un nombre pair de travées, cette réaction va au contraire en augmentant depuis $0.375P$ jusqu'à la même limite R_{∞} :

3° La réaction sur la culée est plus grande pour un pont de $2n + 1$ travées que pour des ponts de $2n$ et de $2n + 2$ travées.

4° Les réactions sur les piles de numéro impair sont toutes plus grandes, et celles sur les piles de numéro pair toutes plus petites que P . Les premières vont en diminuant, et les secondes en augmentant au fur et à mesure qu'on se rapproche du milieu du pont. Leurs valeurs convergent vers le poids P .

5° Les moments de rupture, soit vers le centre des travées, soit sur les piles, suivent ici les lois que nous avons déjà signalées pour les moments de rupture maxima.

6° Les moments négatifs des travées impaires sont tous plus grands, et ceux des travées paires tous plus petits que la quantité :

$$\frac{Pl}{24} = 0.041,666,666..... Pl$$

qui est leur limite commune.

7° Les moments sur les piles de numéro impair sont tous plus grands, et ceux sur les piles de numéro pair tous plus petits que la quantité :

$$\frac{Pl}{12} = 0.083,333,333..... Pl$$

qui est leur limite commune.

8° Il suit de là que les travées centrales d'un pont à travées égales et également chargées, pourront être considérées comme encastées quand le nombre des travées sera très-grand.

9° Dans le cas d'un nombre infini de travées, la proportion limite des moments négatifs des deux premières travées serait :

$$\frac{0.077,751.....}{0.033,894.....} = 2.294.....$$

et celle des moments sur les deux premières piles :

$$\frac{0.105,662....}{0.077,350....} = 1.366.....$$

Ces deux proportions augmentent au fur et à mesure que le nombre des travées diminue.

La première atteint la valeur 3.20 pour un pont de trois travées, et la deuxième la valeur 1.50 pour un pont de quatre travées.

CHAPITRE V.

PONTS ENCASTRÉS ET PONTS ÉQUILIBRÉS.

XIV. *Formules pour les ponts encastrés sur les culées.* — Considérons un pont de $n + 1$ travées encastré sur les deux culées, c'est-à-dire dans des conditions telles que la tangente de la travée extrême soit nulle sur la culée.

Nous allons nous proposer de rechercher les valeurs générales des moments de rupture sur les piles dans ces conditions.

En désignant par M_0 et par M'_0 les moments de rupture sur les deux culées, l'équation fondamentale (M') (page 12) nous donnera d'abord le groupe ci-après de n équations entre les $n + 2$ inconnues à déterminer :

$$\alpha_1 M_0 + (2 + 2\alpha_1) M_1 + M_2 = \frac{\alpha_1 P l_1 + P_1 l_1}{4}. \quad (1)$$

$$\epsilon_2 M_1 + (2 + 2\epsilon_2) M_2 + M_3 = \frac{\epsilon_2 P_1 l_1 + P_2 l_2}{4}. \quad (2)$$

$$\gamma_3 M_2 + (2 + 2\gamma_3) M_3 + M_4 = \frac{\gamma_3 P_2 l_2 + P_3 l_3}{4}. \quad (3)$$

.....

$$\omega_n M_{n-1} + (2 + 2\omega_n) M_n + M'_0 = \frac{\omega_n P_{n-1} l_{n-1} + P_n l_n}{4}. \quad (n)$$

Écrivons maintenant l'équation de la première travée suivant la méthode de M. Clapeyron :

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 - \left(\frac{M_0 - M_1}{l} + \frac{P}{2} \right) x + \frac{Px^2}{2}.$$

Nous exprimerons que la tangente sur la culée est nulle en écrivant :

$$\frac{M_0 l}{2} - \left(\frac{M_0 - M_1}{l} + \frac{P}{2} \right) \frac{l^2}{6} + \frac{Pl^2}{24} = 0.$$

D'où nous tirerons :

$$M_1 = \frac{Pl}{4} - 2M_0. \tag{0}$$

Nous aurons également :

$$M_n = \frac{P_n l_n}{4} - 2M_0. \tag{n+1}$$

Ces deux nouvelles équations, ajoutées au groupe précédent, forment un total de $n + 2$ équations, et vont nous permettre de déterminer les valeurs des $n + 2$ moments de rupture.

Nous procéderons à cette élimination, comme nous l'avons fait dans le chapitre I, avec l'aide des séries de la page 15.

Nous obtiendrons ainsi successivement :

$$M_1 = \frac{l}{4} P - 2M_0. \tag{0}$$

$$M_2 = \frac{l_1}{4} (-\alpha_1 A_1 P + P_1) + (\tau_1 + A_1) M_0. \tag{1}$$

$$M_3 = \frac{l_2}{4} (\alpha_2 A_2 P - \epsilon_2 B_2 P_1 + P_2) - (\tau_2 + A_2) M_0. \tag{2}$$

$$M_4 = \frac{l_3}{4} (-\alpha_3 A_3 P + \epsilon_3 B_3 P_1 - \gamma_3 C_3 P_2 + P_3) + (\tau_3 + A_3) M_0. \tag{3}$$

.....

$$M_n = \frac{l_{n-1}}{4} (\pm \alpha_{n-1} A_{n-1} P \mp \epsilon_{n-1} B_{n-1} P_1 \pm \gamma_{n-1} C_{n-1} P_2 \mp \dots + P_{n-1}) \mp (\tau_{n-1} + A_{n-1}) M_0. \quad (n-1)$$

$$M_0 = \frac{l_n}{4} (\mp \alpha_n A_n P \pm \epsilon_n B_n P_1 \mp \gamma_n C_n P_2 \pm \dots - \omega_n O_n P_{n-1} + P_n) \pm (\tau_n + A_n) M_0. \quad (n)$$

L'équation $(n+1)$ donnera ensuite :

$$M_0 = \frac{l_n}{4(2\tau_n + 2A_n - \tau_{n-1} - A_{n-1})} [(2A_n - A_{n-1})\alpha_n P - (2B_n - B_{n-1})\epsilon_n P_1 + (2C_n - C_{n-1})\gamma_n P_2 - \dots \mp (2O_n - 1)P_{n-1} \pm P_n]. \quad (G')$$

Nota. On prendra le signe $+$ pour P_n quand le nombre des travées sera impair.

Les moments sur les points d'appui étant connus, on en déduira les efforts tranchants au moyen de la formule :

$$H_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2},$$

et un moment quelconque par la formule :

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = M_m - H_m x + \frac{P_m x^2}{2}.$$

XV. *Influence de l'encastrement sur les culées quand les travées sont égales.* — Quand toutes les travées seront égales, la formule (G') prendra la forme suivante :

$$M_0 = \frac{l}{4(2\tau_n + 2\lambda_n - \tau_{n-1} - \lambda_{n-1})} [(2\lambda_n - \lambda_{n-1})P - (2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})P_1 + (2\lambda_{n-2} - \lambda_{n-3})P_2 - \dots \mp (2 \times 3 - 1)P_{n-1} \pm P_n]. \quad (E')$$

Si toutes les travées sont également chargées, cette formule se réduit à :

$$M_0 = \frac{Pl}{4(2\tau_n + 2\lambda_n - \tau_{n-1} - \lambda_{n-1})} [2\lambda_n - 3\lambda_{n-1} + 3\lambda_{n-2} - 3\lambda_{n-3} + \dots \mp 3\lambda_1 \pm 2].$$

Si dans cette dernière formule nous faisons successivement :

$$n = 1 = 2 = 3 = \text{etc.},$$

nous aurons toujours :

$$M_0 = \frac{Pl}{12}.$$

Si nous reportons cette valeur de $M_0 = \frac{Pl}{12}$ dans les équations (0), (1), (2), (n), nous obtiendrons également :

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_n = \frac{Pl}{12}.$$

La formule

$$H_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{l_m} + \frac{P_m}{2}$$

se réduit dans ce cas à :

$$H_m = \frac{P}{2}.$$

Les moments au centre des travées seront donnés par la formule :

$$\epsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pl}{12} - \frac{Pl}{4} + \frac{Pl}{8} = - \frac{Pl}{24}.$$

Il suit de là *qu'il suffit d'encasturer les deux extrémités d'un pont à travées égales sur les culées pour obtenir l'encastrement général de toutes les travées quand elles seront également chargées.*

Les avantages de l'encastrement sur les culées sont donc incontestables ; mais jusqu'à présent les constructeurs paraissent avoir reculé devant ce système qui présente de grandes difficultés en exécution, eu égard surtout aux exigences de la dilatation.

Ils préfèrent généralement faire varier les ouvertures des travées, de manière à égaliser autant que possible leur travail.

XVI. *Problème des ponts équilibrés.* — Nous allons maintenant traiter la question à ce dernier point de vue en recherchant la solution de ce problème :

Déterminer les ouvertures des travées d'un pont métallique de manière que tous les moments de rupture vers le centre des travées soient égaux entre eux, dans l'hypothèse d'une surcharge nulle ou uniformément répartie sur tout le pont.

Il est évident à *priori* que les ouvertures devront être symétriques par rapport à l'axe du pont.

Le nombre des travées sera de $2n + 1$ ou de $2n + 2$.

Nommons $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ les moments de rupture des 1^{re}, 2^e, 3^e, \dots et n^e travées, qu'il s'agit de rendre égaux.

Nous poserons les équations :

$$T_0 = T_1. \quad (1)$$

$$T_1 = T_2. \quad (2)$$

$$T_2 = T_3. \quad (3)$$

\dots

$$T_{n-1} = T_n. \quad (n)$$

Les inconnues du problème sont ici les quantités $\alpha_1, \epsilon_2, \gamma_3, \dots, \omega_n$ au nombre de n . Le groupe précédent comprenant n équations permet d'en déterminer la valeur.

Considérons l'équation (m) du groupe, laquelle devra s'écrire ainsi :

$$M_{m-1} - \frac{H_{m-1}^2}{2p} = M_m - \frac{H_m^2}{2p},$$

ou :

$$M_{m-1} - M_m = \frac{H_{m-1}^2 - H_m^2}{2p}.$$

On a d'ailleurs :

$$M_{m-1} - M_m = H_{m-1} l_{m-1} - \frac{P_{m-1} l_{m-1}}{2}.$$

L'équation précédente deviendra après cette substitution :

$$2H_{m-1} P_{m-1} - P_{m-1}^2 = H_{m-1}^2 - H_m^2,$$

ou bien :

$$P_{m-1} - H_{m-1} = H_m.$$

Si nous désignons par H'_m l'effort tranchant à gauche de la $m^{\text{ème}}$ pile, nous aurons :

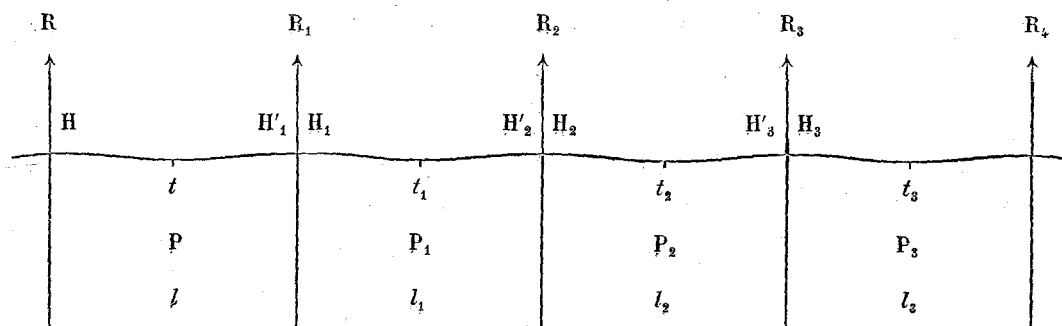
$$H'_m = P_{m-1} - H_{m-1}.$$

Donc, en résumé, l'équation (m) du groupe que nous considérons se réduit à :

$$H_m = H'_m.$$

En d'autres termes, le problème dont nous recherchons la solution consiste à déterminer les ouvertures des travées, de manière que les efforts tranchants à droite et à gauche de chaque pile soient égaux entre eux, ainsi que le représente la figure 7.

Figure 7.



Si l'on suppose un tel pont scié aux points t, t_1, t_2, \dots où le moment de rupture de la travée atteint son maximum, il restera évidemment en équilibre sur les piles.

Nous donnerons pour cette raison à ce système de pont la dénomination de *pont équilibré*.

Revenons maintenant au groupe d'équation (F).

Considérons d'abord un pont de trois travées.

Nous n'aurons qu'une seule inconnue α_1 à déterminer au moyen de l'équation :

$$H'_1 = H_1;$$

laquelle se réduit à :

$$R = P - \frac{P_1}{2}.$$

Remplaçons d'abord P par $\alpha_1 P_1$, nous aurons :

$$R = \frac{2\alpha_1 - 1}{2} P_1.$$

Remplaçons ensuite R par la valeur générale donnée (page 22) formule (S_i) :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_1(\tau_1^2 - 1)} [(\tau_1 A_1 - 1)\alpha_1 P - (\tau_1 - 1)P_1 + \alpha_1^2 P'],$$

laquelle devient, en remplaçant P et P' par $\alpha_1 P_1$ et en développant :

$$R = \frac{P_1}{4} \left(\alpha_1 + \frac{2\alpha_1^4 + 7\alpha_1^3 + 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1 - 1}{4\alpha_1^3 + 8\alpha_1^2 + 3\alpha_1} \right),$$

et nous obtiendrons l'équation :

$$10\alpha_1^4 + 9\alpha_1^3 - 10\alpha_1^2 - 4\alpha_1 + 1 = 0;$$

ou en divisant par $2\alpha_1 + 1$:

$$5\alpha_1^3 + 2\alpha_1^2 - 6\alpha_1 + 1 = 0.$$

Cette équation résolue par tâtonnements donne :

$$\alpha_1 = 0,794\dots$$

Considérons maintenant un pont de quatre travées.

Nous n'aurons encore qu'une seule inconnue à déterminer au moyen de l'équation :

$$H'_1 = H_1 \quad \text{ou} \quad R = \alpha_1 P_1 - H_1.$$

Remplaçons d'abord H₁ par la valeur générale donnée (page 18), nous aurons :

$$R = \alpha_1 P_1 - \alpha_1(2 + \tau_1 + A_1)\alpha_1 \frac{P_1}{4} - \frac{P_1}{4} + \alpha_1(1 + \tau_1)R;$$

et en développant :

$$R = P_1 \frac{3\alpha_1^3 + 6\alpha_1^2 - 4\alpha_1 + 1}{4(2\alpha_1^2 + 3\alpha_1 - 1)}.$$

La valeur générale de R donnée page 23, formule (S_p), est :

$$R = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4\alpha_1\tau_1(\tau_2-1)} [(A_2\tau_1 - A_1)\alpha_1 P - (B_2\tau_1 - 1)P_1 + (\tau_1 - 1)P'_1 - \alpha_1^2 P].$$

On a d'ailleurs, dans le cas que nous considérons :

$$P = P' = \alpha_1 P_1; \quad \tau_2 = 7 + 8\alpha_1; \quad A_2 = 7 + 4\alpha_1; \quad B_2 = 3.$$

Cette valeur de R se réduit donc à :

$$R = P_1 \frac{6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^3 + 6\alpha_1^2 - \alpha_1 - 1}{4(4\alpha_1^3 + 7\alpha_1^2 + 3\alpha_1)}.$$

En égalant ensemble les deux valeurs de R, on obtient :

$$12\alpha_1^5 - 28\alpha_1^4 - 40\alpha_1^3 + 24\alpha_1^2 + 20\alpha_1 - 4 = 0;$$

et en divisant par $4\alpha_1 + 4$:

$$3\alpha_1^4 - 10\alpha_1^3 + 6\alpha_1 - 1 = 0.$$

Cette dernière équation résolue par tâtonnements donne :

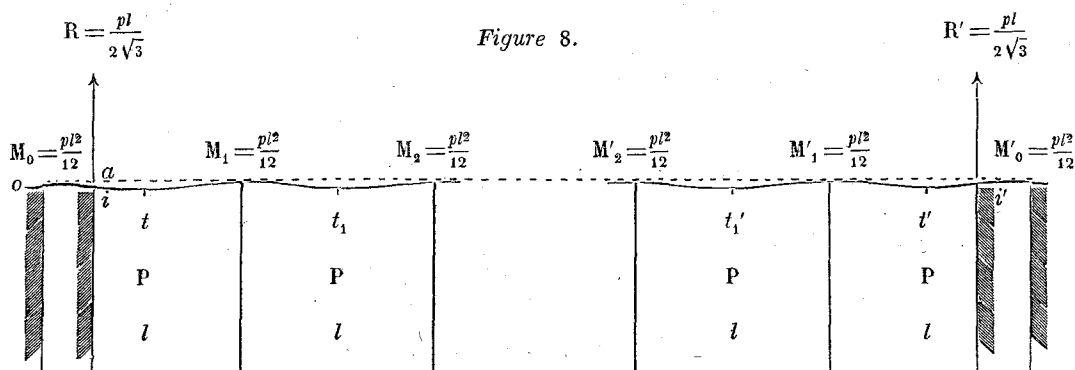
$$\alpha_1 = 0,787\dots$$

La solution du problème pour des ponts de cinq et de six travées exigerait le concours de deux équations renfermant les deux inconnues α_1 et α_2 . Les calculs seraient extrêmement compliqués; nous ne les aborderons pas.

Nous nous bornerons à constater ici que pour équilibrer des ponts de trois à quatre travées, les formules établies dans l'hypothèse où tous les appuis sont au même niveau indiquent pour α_1 les deux valeurs 0.794... et 0.787... assez peu différentes l'une de l'autre.

XVII. *Solution générale du problème des ponts équilibrés en abaissant les points d'appui sur les culées.* — Autant la solution générale du problème présente de difficultés de calcul quand tous les appuis sont de niveau, autant elle devient simple quand on abaisse le niveau des culées d'une certaine quantité.

Considérons en effet le pont encastré de $n + 1$ travées égales et également chargées représenté dans la figure 8.



L'équation d'équilibre de la première travée sera :

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{pl^2}{12} - \frac{pl}{2} x + \frac{px^2}{2}. \quad (m)$$

Celle de la tangente sera :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{pl^2 x}{12} - \frac{plx^2}{4} + \frac{px^3}{6}. \quad (t)$$

Celle de la courbe sera :

$$\varepsilon y = \frac{pl^2 x^2}{24} - \frac{plx^3}{12} + \frac{px^4}{24}. \quad (f)$$

Soit i le premier point d'inflexion de la première travée. Le moment étant nul en ce point, son abscisse Oa sera donnée par l'équation :

$$\frac{pl^2}{12} - \frac{pl}{2} x + \frac{px^2}{2} = 0;$$

d'où l'on tire :

$$Oa = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} l.$$

Pour déterminer la valeur de la flèche ai , il suffira de faire dans l'équation (f) :

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} l.$$

On obtiendra ainsi, toutes réductions faites :

$$ai = \frac{pl^3}{864\epsilon}.$$

Ceci posé, si nous scions la poutre au point i , où l'action des forces intérieures est nulle, il nous suffira, pour rétablir l'équilibre, d'appliquer au point i une force verticale R dirigée de bas en haut et égale à :

$$\frac{pl}{2} - pl \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{pl}{2\sqrt{3}}.$$

Si nous faisons la même opération sur la $(n+1)^{\text{ème}}$ travée, et si nous remplaçons les tensions R et R' par des réactions sur deux culées établies en contre-bas des piles d'une quantité égale à $ai = \frac{pl^3}{864\epsilon}$, nous obtiendrons un pont de $n+1$ travées reposant librement sur les appuis, et qui sera dans les mêmes conditions qu'un pont encastré au point de vue du travail de la poutre.

Tous les moments sur les piles et tous les moments négatifs des travées seront égaux entre eux. Le pont sera donc équilibré.

On voit en résumé que deux solutions se présentent pour équilibrer un pont métallique.

La première consiste à placer tous les appuis de niveau et à déterminer les valeurs des rapports $\alpha_1, \epsilon_2, \gamma_3$, etc., etc., par la résolution de l'équation générale :

$$H_m = H_m.$$

La deuxième consiste à établir les appuis sur les culées en contre-bas des appuis sur les piles d'une quantité égale à : $\frac{pl^4}{864\varepsilon}$, à donner aux travées centrales la même ouverture l et aux deux travées de rive l'ouverture : $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}l = 0.7887\dots l$.

Dans le premier système, les valeurs de $\alpha_1, \varepsilon_2, \gamma_3, \text{etc.}, \text{etc.}$, seront variables avec le nombre des travées, la première restant évidemment aux environs de 0,79.... et les autres aux environs de l'unité.

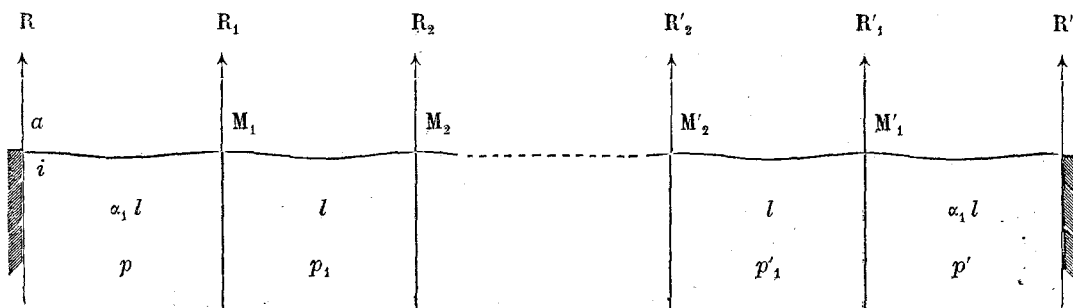
Dans le second, α_1 prend une valeur constante $= 0.7887\dots$, et les autres rapports sont égaux à l'unité.

Celui-ci nous paraît devoir être considéré comme la véritable solution du problème des ponts équilibrés.

Il nous reste à établir des formules pour les ponts équilibrés suivant ce dernier système.

XVIII. *Formules pour les ponts équilibrés.* — Considérons le pont équilibré représenté dans la figure 9.

Figure



Les travées centrales auront la même ouverture l .

Les deux travées de rive auront pour ouverture : $\alpha_1 l = l \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Les points d'appui sur les culées seront situés en contre-bas des points d'appui sur les piles d'une quantité $ai = \frac{\pi l^4}{864\varepsilon}$.

Nous allons rechercher quelles seront, dans ces conditions, les valeurs générales de

R, M₁, M₂, en fonction de l'ouverture *l* et des poids *p*, *p*₁, ... *p*'₁ et *p*' uniformément répartis.

Nota. Le poids π sera égal soit au poids permanent *p*, soit au poids total *p* + *s*, suivant qu'on aura équilibré le pont sous l'influence de son propre poids, ou sous l'influence d'une surcharge générale.

Le pont dont il s'agit étant symétrique, nous devons considérer successivement le cas de $2n + 1$ et de $2n + 2$ travées.

Nous aurons besoin dans les deux cas du concours des séries suivantes :

$\theta_0 = 1;$	$\lambda_0 = 1;$
$\theta_1 = 4;$	$\lambda_1 = 3;$
$\theta_2 = 15;$	$\lambda_2 = 11;$
$\theta_3 = 56;$	$\lambda_3 = 41;$
.....
$\theta_n = 4\theta_{n-1} - \theta_{n-2};$	$\lambda_n = 4\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}.$

$\tau_0 = 1;$	$A_0 = 1;$
$\tau_1 = 2 + 2\alpha_1;$	$A_1 = 2 + \alpha_1;$
$\tau_2 = 4\tau_1 - 1 = 7 + 8\alpha_1;$	$A_2 = 4A_1 - 1 = 7 + 4\alpha_1;$
$\tau_3 = 4\tau_2 - \tau_1 = 26 + 30\alpha_1;$	$A_3 = 4A_2 - A_1 = 26 + 15\alpha_1;$
$\tau_4 = 4\tau_3 - \tau_2 = 97 + 112\alpha_1;$	$A_4 = 4A_3 - A_2 = 97 + 56\alpha_1;$
.....
$\tau_n = 4\tau_{n-1} - \tau_{n-2} = \theta_{n-1} + \lambda_{n-1} + 2\theta_{n-1}\alpha_1;$	$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2} = \theta_{n-1} + \lambda_{n-1} + \theta_{n-1}\alpha_1.$

Exprimons d'abord que les deux premières travées ont même tangente sur la première pile.

L'équation d'équilibre de la première travée est :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -Rx + \frac{px^2}{2}.$$

Intégrons une première fois, nous aurons :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} + \frac{px^3}{6} + C.$$

Intégrons une deuxième fois, nous aurons :

$$\varepsilon y = -\frac{Rx^3}{6} + \frac{px^4}{24} + Cx + D.$$

La constante D est égale à $\frac{\pi l^4}{864}$.

Pour déterminer la constante C, faisons $x = \alpha_1 l$; nous aurons y étant nul :

$$0 = -\frac{R\alpha_1^3 l^3}{6} + \frac{p\alpha_1^4 l^4}{24} + C\alpha_1 l + \frac{\pi l^4}{864},$$

d'où :

$$C = \frac{R\alpha_1^2 l^2}{6} - \frac{p\alpha_1^3 l^3}{24} - \frac{\pi l^3}{864\alpha_1}.$$

L'équation de la tangente sera donc :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -\frac{Rx^2}{2} + \frac{px^3}{6} + \frac{R\alpha_1^2 l^2}{6} - \frac{p\alpha_1^3 l^3}{24} - \frac{\pi l^3}{864\alpha_1}.$$

En faisant dans cette équation $x = \alpha_1 l$, nous aurons, pour la valeur de la tangente de la première travée sur la première pile :

$$t_1 = -\frac{R\alpha_1^2 l^2}{3} + \frac{p\alpha_1^3 l^3}{8} - \frac{\pi l^3}{864\alpha_1}.$$

La valeur de la tangente de la deuxième travée sur la première pile sera comme précédemment :

$$t'_1 = -\left(\frac{M_1 l}{2} - \frac{H_1 l^2}{6} + \frac{p_1 l^2}{24}\right).$$

En égalant ensemble les deux valeurs t_1 et t'_1 , nous aurons :

$$-\frac{R\alpha_1^2 l^2}{3} + \frac{p\alpha_1^3 l^3}{8} - \frac{\pi l^3}{864\alpha_1} + \frac{M_1 l}{2} - \frac{H_1 l^2}{6} + \frac{p_1 l^2}{24} = 0.$$

Remplaçons dans cette équation :

$$R \quad \text{par} \quad -\frac{M_1}{\alpha_1 l} + \frac{\alpha_1 p l}{2},$$

et

$$H_1 \quad \text{par} \quad \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{p_1 l}{2},$$

et nous obtiendrons, toutes réductions faites :

$$(2 + 2\alpha_1)M_1 + M_2 = \frac{\alpha_1^3 p l^2 + p_1 l^2}{4} + \frac{\pi l^2}{144\alpha_1},$$

équation qui ne diffère de l'équation générale (1) de la page 20 que par l'addition du terme $\frac{\pi l^2}{144\alpha_1}$.

Quant aux relations exprimant que les travées centrales se raccordent sur les piles qui les séparent, elles conservent évidemment la forme générale des équations de la page 20, attendu que les appuis sur les piles sont tous de niveau.

Nous aurons donc, pour déterminer la valeur des moments $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ en fonction de R, le groupe suivant :

$$M_1 = \frac{l}{4} (2\alpha_1^2 p l - 4\alpha_1 R), \tag{1}$$

$$(2 + 2\alpha_1)M_1 + M_2 = \frac{\alpha_1^3 p l^2 + p_1 l^2}{4} + \frac{\pi l^2}{144\alpha_1}. \tag{2}$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = \frac{p_1 l^2 + p_2 l^2}{4}. \tag{3}$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{p_2 l^2 + p_3 l^2}{4}. \tag{4}$$

.....

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = \frac{p_{n-2} l^2 + p_{n-1} l^2}{4}. \tag{n}$$

Éliminons avec le concours des séries, et nous obtiendrons :

$$M_1 = \frac{l}{4} (2\alpha_1^2 pl - 4\alpha_1 R). \quad (1)$$

$$M_2 = \frac{l}{4} \left[-(\tau_1 + A_1)\alpha_1^2 pl + p_1 l + 4\alpha_1 \tau_1 R + \frac{\pi l}{36\alpha_1} \right]. \quad (2)$$

$$M_3 = \frac{l}{4} \left[(\tau_2 + A_2)\alpha_1^2 pl - 3p_1 l + p_2 l - 4\alpha_1 \tau_2 R - \frac{4\pi l}{36\alpha_1} \right]. \quad (3)$$

$$M_4 = \frac{l}{4} \left[-(\tau_3 + A_3)\alpha_1^2 pl + 11p_1 l - 3p_2 l + p_3 l + 4\alpha_1 \tau_3 R + \frac{4\delta\pi l}{36\alpha_1} \right]. \quad (4)$$

$$\dots$$

$$M_n = \frac{l}{4} \left[\pm(\tau_{n-1} + A_{n-1})\alpha_1^2 pl \mp \lambda_{n-2} p_1 l \pm \lambda_{n-3} p_2 l \mp \lambda_{n-4} p_3 l \pm \dots + 11p_{n-3} l - 3p_{n-2} l + p_{n-1} l \mp \right. \\ \left. \mp 4\alpha_1 \tau_{n-1} R \mp \frac{\theta_{n-2}\pi l}{36\alpha_1} \right]. \quad (n)$$

Pour déterminer actuellement la valeur de R , nous procéderons ici, comme nous l'avons fait au chapitre I^{er} pour l'établissement des formules symétriques (S_i) et (S_p), et nous aurons :

1° Pour $2n + 1$ travées :

$$R = \frac{l}{4} \left\{ \alpha_1 p - \frac{(\theta_{n-1} + \theta_{n-2})\pi}{36\alpha_1^2(\tau_n + \tau_{n-1})} + \frac{l}{\alpha_1(\tau_n^2 - \tau_{n-1}^2)} \left[(\tau_n A_n - \tau_{n-1} A_{n-1}) \alpha_1^2 p - (\tau_n \lambda_{n-1} - \tau_{n-1} \lambda_{n-2}) p_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\tau_n \lambda_{n-2} - \tau_{n-1} \lambda_{n-3}) p_2 - \dots \pm (3\tau_n - \tau_{n-1}) p_{n-1} \mp (\tau_n - \tau_{n-1}) p_n \pm (\tau_{n-1} - \tau_{n-2}) p'_{n-1} \mp \right. \right. \\ \left. \left. \mp \dots + (\tau_2 - \tau_1) p'_2 - (\tau_1 - 1) p'_1 + \alpha_1^3 p' \right] \right\}. \quad (Q_i)$$

2° Pour $2n + 2$ travées :

$$R = \frac{l}{4} \left\{ \alpha_1 p - \frac{(\theta_n - \theta_{n-2})\pi}{36\alpha_1^2(\tau_{n+1} - \tau_{n-1})} + \frac{l}{\alpha_1 \tau_n(\tau_{n+1} - \tau_{n-1})} \left[(\tau_n A_{n+1} - \tau_{n-1} A_n) \alpha_1^2 p - (\tau_n \lambda_n - \tau_{n-1} \lambda_{n-1}) p_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\tau_n \lambda_{n-1} - \tau_{n-1} \lambda_{n-2}) p_2 - \dots \pm (11\tau_n - 3\tau_{n-1}) p_{n-1} \mp (3\tau_n - \tau_{n-1}) p_n \pm (\tau_n - \tau_{n-1}) p'_n \mp \right. \right. \\ \left. \left. \mp (\tau_{n-1} - \tau_{n-2}) p'_{n-1} \pm \dots - (\tau_2 - \tau_1) p'_2 + (\tau_1 - 1) p'_1 - \alpha_1^3 p' \right] \right\}. \quad (Q_p)$$

Ces deux formulés s'appliquent à partir de trois et quatre travées. Leurs résultats sont rigoureusement exacts, pour l'hypothèse d'une surcharge nulle ou générale, en ce sens qu'elles donnent toujours :

$$R = \frac{pl}{2\sqrt{3}}; M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_n = \frac{pl^2}{12}.$$

La formule (Q_p) ne peut pas s'appliquer au pont équilibré de deux travées. La réaction sur la culée gauche de ce système de pont s'obtiendra directement en posant les trois équations suivantes :

$$M_1 = \frac{l}{4}(2pl - 4R). \quad (1) \quad M_1 = \frac{l}{4}(2p_1l - 4R'). \quad (2)$$

$$\frac{Rl^2}{3} - \frac{pl^3}{8} + \frac{\pi l^3}{864\alpha_1^4} + \frac{R'l^2}{3} - \frac{p_1l^3}{8} + \frac{\pi l^3}{864\alpha_1^4} = 0. \quad (3)$$

L'équation (3) exprime que les deux travées ont même tangente sur la première pile.

Il est essentiel de remarquer que l désigne ici, non plus l'ouverture des travées centrales, mais bien l'ouverture réelle des deux travées du pont considéré.

L'élimination de M_1 et de R' entre les trois équations donne pour R la valeur suivante :

$$R = \frac{l}{16} \left(7p - p_1 - \frac{\pi}{18\alpha_1^4} \right). \quad (Q_1)$$

ou en remplaçant α_1 par $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

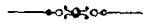
$$R = \frac{l}{16} \left(7p - p_1 - \frac{2\pi}{7+4\sqrt{3}} \right). \quad (Q_2)$$

Dans le cas où les travées sont également chargées, cette formule donne :

$$R = \frac{pl}{1+\sqrt{3}}.$$

Telles sont les formules applicables aux calculs des ponts équilibrés, lesquelles sont

les mêmes que celles relatives aux ponts symétriques, sauf l'addition d'un terme constant fonction de π .



Le temps nous manque pour établir, pour les calculs des ponts *équilibrés*, un tableau semblable à celui que nous avons établi pour les ponts à travées égales.



CONCLUSION.

Les formules générales que nous donnons ici rendront, nous l'espérons, quelques services aux ingénieurs qui auront à projeter des ponts métalliques à poutres droites et continues.

L'exemple que nous avons choisi d'un pont symétrique de onze travées prouve que ces formules permettent d'aborder des calculs que probablement on ne serait même pas tenté d'essayer avec les méthodes actuellement en usage.

Les principes généraux que nous en avons déduits affranchiront les calculs de tout tâtonnement. On connaîtra maintenant, *à priori*, les hypothèses de surcharge qui doivent concourir au tracé de la courbe enveloppe des moments de rupture.

Ces hypothèses sont en nombre limité. Elles correspondent toujours à des surcharges discontinues.

La solution des travées égales avec encastrement sur la culée serait sans doute la meilleure, pour l'établissement d'un pont métallique, sans les difficultés pratiques de l'encastrement.

A défaut de cette solution, celle qui nous semble devoir être le plus recherchée des

constructeurs consiste dans l'établissement d'un *pont équilibré*, c'est-à-dire d'un pont dont toutes les travées centrales auront la même ouverture l , dont les deux travées de rive auront une ouverture égale à $\frac{l}{2} \left(1 + \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = 0,7887... l$, et dont les appuis sur les culées seront établis en contre-bas des appuis sur les piles d'une quantité égale à $\frac{\pi l^3}{864\varepsilon}$.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.



CHAPITRE I^{er}. — ÉTABLISSEMENT DE FORMULES GÉNÉRALES POUR LE CALCUL D'UN PONT MÉTALLIQUE A POUTRES DROITES ET CONTINUES.	1
I. Résumé de la théorie de la flexion des poutres métalliques.	1
II. Équations générales d'équilibre d'une travée quelconque d'un pont métallique.	7
III. Équation fondamentale exprimant que les courbes décrites par deux travées voisines ont même tangente sur la pile qui les sépare.	10
IV. Valeurs générales des réactions, efforts tranchants et moments de rupture sur les piles et culées en fonction des poids et ouvertures des travées.	12
V. Formules pour les ponts à travées symétriques.	21
VI. Formules pour les ponts à travées égales.	22
CHAPITRE II. — DISCUSSION DES FORMULES GÉNÉRALES DONNÉES AU CHAPITRE I.	25
VII. Principes généraux qui dérivent des formules.	25
VIII. Tracé de la courbe enveloppe des moments maxima.	28
CHAPITRE III. — APPLICATION DES FORMULES A DES EXEMPLES.	32
IX. Vérification des calculs du pont construit sur l'Allier pour la traversée du chemin de fer de Moulins à Montluçon.	32
X. Calcul et tracé de la courbe enveloppe d'un pont symétrique de onze travées.	37

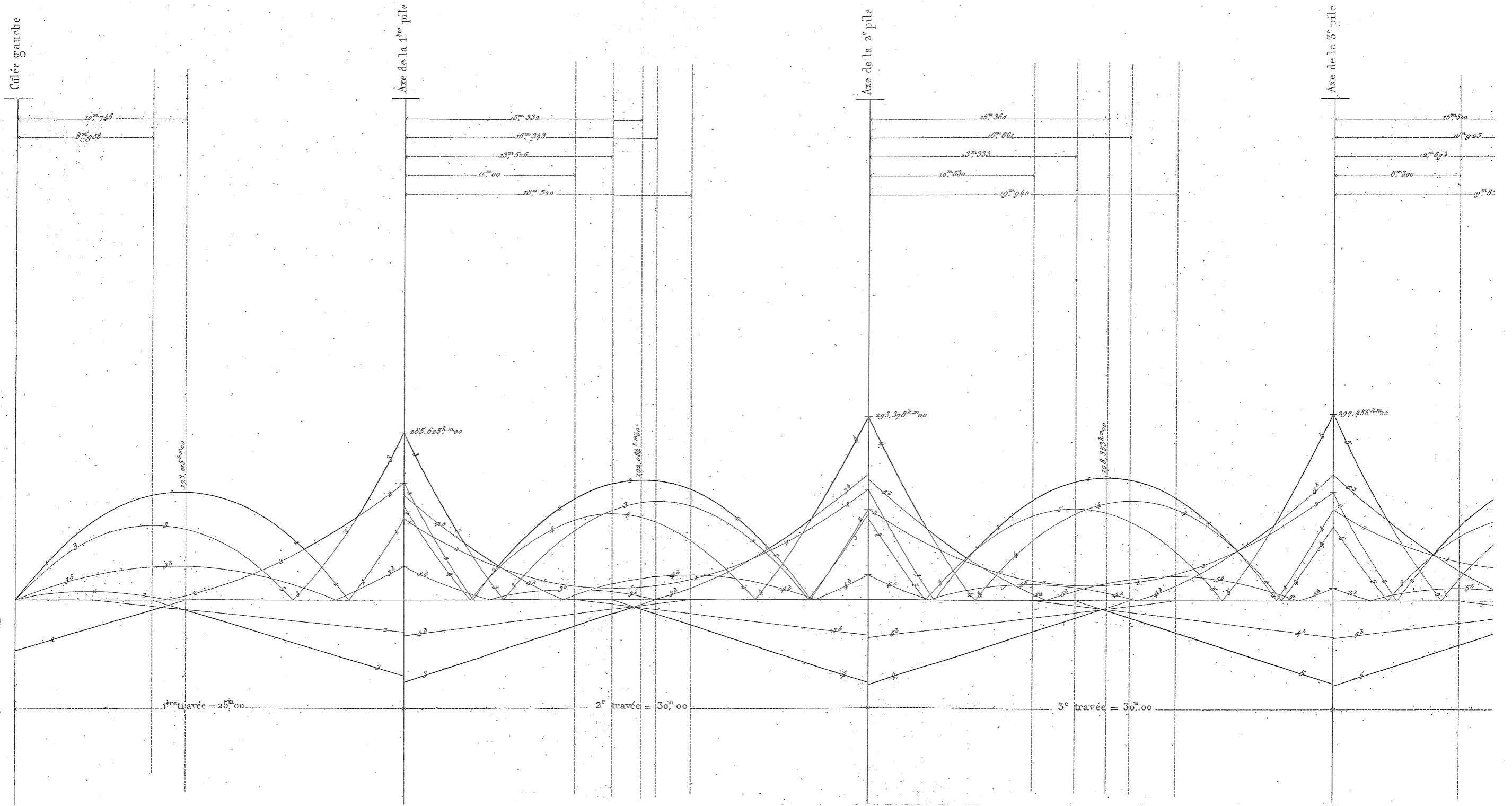
CHAPITRE IV. — PONTS A TRAVÉES ÉGALES.	49
XI. Établissement d'un tableau pour les calculs des ponts à travées égales.	49
XII. Remarques sur le travail des ponts à travées égales.	51
XIII. Travail d'un pont à travées égales et également chargées.	51
CHAPITRE V. — PONTS ENCASTRÉS ET PONTS ÉQUILIBRÉS.	54
XIV. Formules pour les ponts encastrés sur les culées.	54
XV. Influence de l'encastrement sur les culées quand les travées sont égales.	56
XVI. Problème des <i>ponts équilibrés</i>	58
XVII. Solution générale du problème des <i>ponts équilibrés</i> en abaissant les points d'appui sur les culées.	62
XVIII. Formules pour les <i>ponts équilibrés</i>	64
CONCLUSION.	71

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

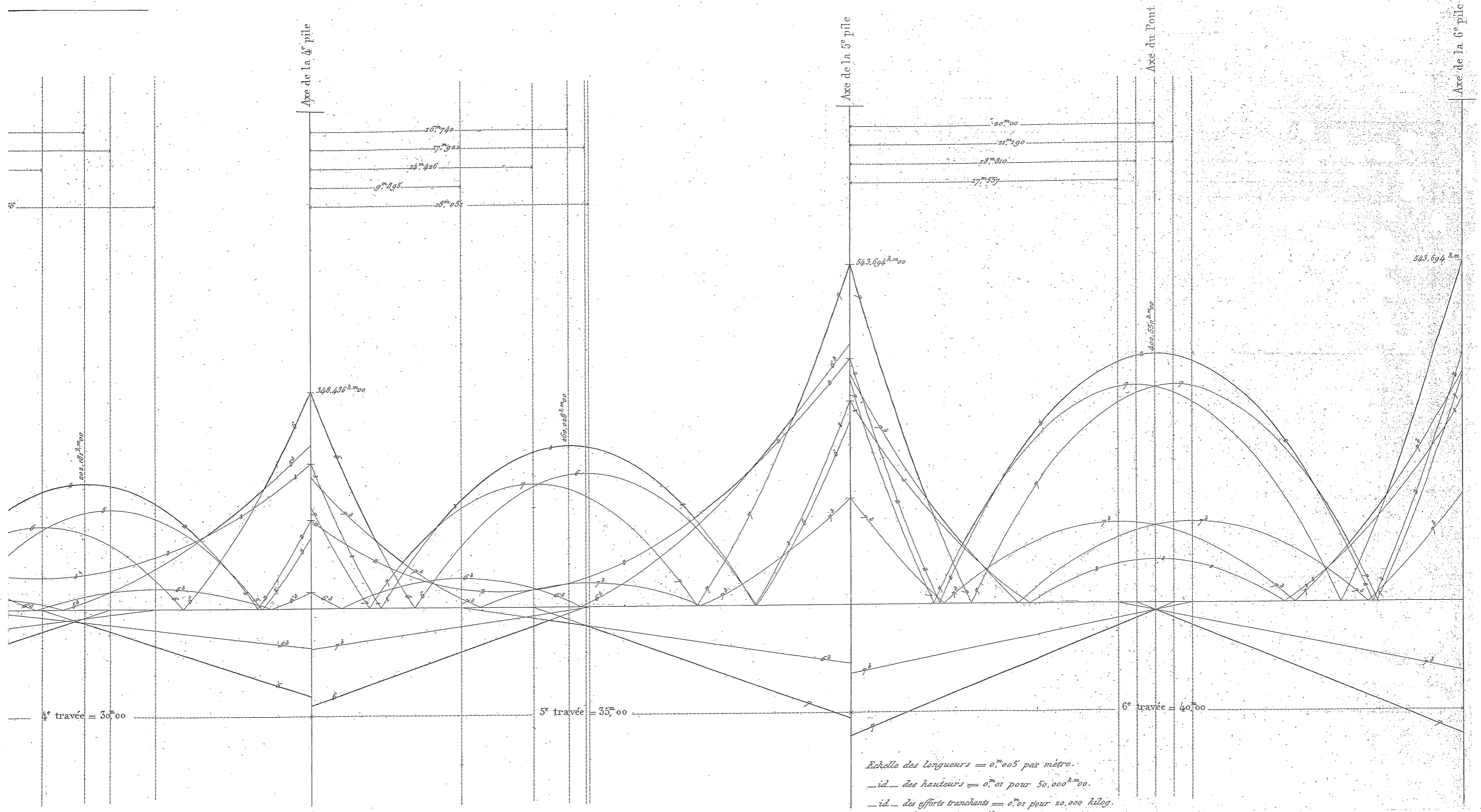
ERRATA.

Pages	Lignes ou endroits des pages	Au lieu de :	Lisez :
16	6	$\delta_n D_n P_2,$	$\delta_n D_n P_3.$
<i>Id.</i>	<i>id.</i>	formule (C),	formule (G).
17	12	$\frac{3}{4} \omega^2,$	$\frac{3}{4} \omega_n^2.$
18	14	formule (C),	formule (G).
20	13	<i>id.</i>	<i>id.</i>
24	4	$\frac{1}{4} (\dots),$	$\frac{l}{4} (\dots).$
25	5	<i>id.</i>	<i>id.</i>
26	6	<i>id.</i>	<i>id.</i>
27	7	<i>id.</i>	<i>id.</i>
28	8	<i>id.</i>	<i>id.</i>
33	11	$\tau_1 = 2 + 2\alpha_1,$	$\tau_1 = 2 + 2\alpha_1.$
<i>Id.</i>	avant-dernière,	4019223,	4019233.
36	17	$R = -11758^*, 50,$	$R = -11758^*, 05.$
38	formule (S _i),	$(\tau_2 - \tau_1) \gamma_1^2,$	$(\tau_2 - \tau_1) \gamma_5^2.$
44	hypothèse n° 4 bis,	les valeurs de H ₂ et M ₂ sont des maximums.	
45	hypothèse n° 5 bis, (valeur de R)	4040, 10,	4040, 50.
46	hypothèse n° 6,	$P_4 = 122000,$	$P_4 = 122500.$
60	2	<i>ajoutez</i> : $H_1 = P - R$ et $H_1 = \frac{P_1}{2}.$	
66	16	$\frac{p_1 l^2}{24},$	$\frac{p_1 l^3}{24}.$
<i>Id.</i>	18	$\frac{p_1 l^2}{24},$	$\frac{p_1 l^3}{24}.$
68	formule pour (2n + 1) travées,	$\frac{l}{\alpha_1 (\tau_n^2 - \tau_{n-1}^2)},$	$\frac{1}{\alpha_1 (\tau_n^2 - \tau_{n-1}^2)}.$
<i>Id.</i>	formule pour (2n + 2) travées,	$\frac{(\theta_n - \theta_{n-2}) \pi}{36 \alpha_1^2 (\tau_{n+1} - \tau_{n-1})},$	$\frac{(\theta_n - \theta_{n-2}) \pi}{36 \alpha_1^2 (\tau_{n+1} + \tau_{n-1})}.$
<i>Id.</i>	<i>id.</i>	$(3\tau_n - \tau_{n-1}) p_n,$	$(3\tau_n - \tau_{n-1}) p_n.$

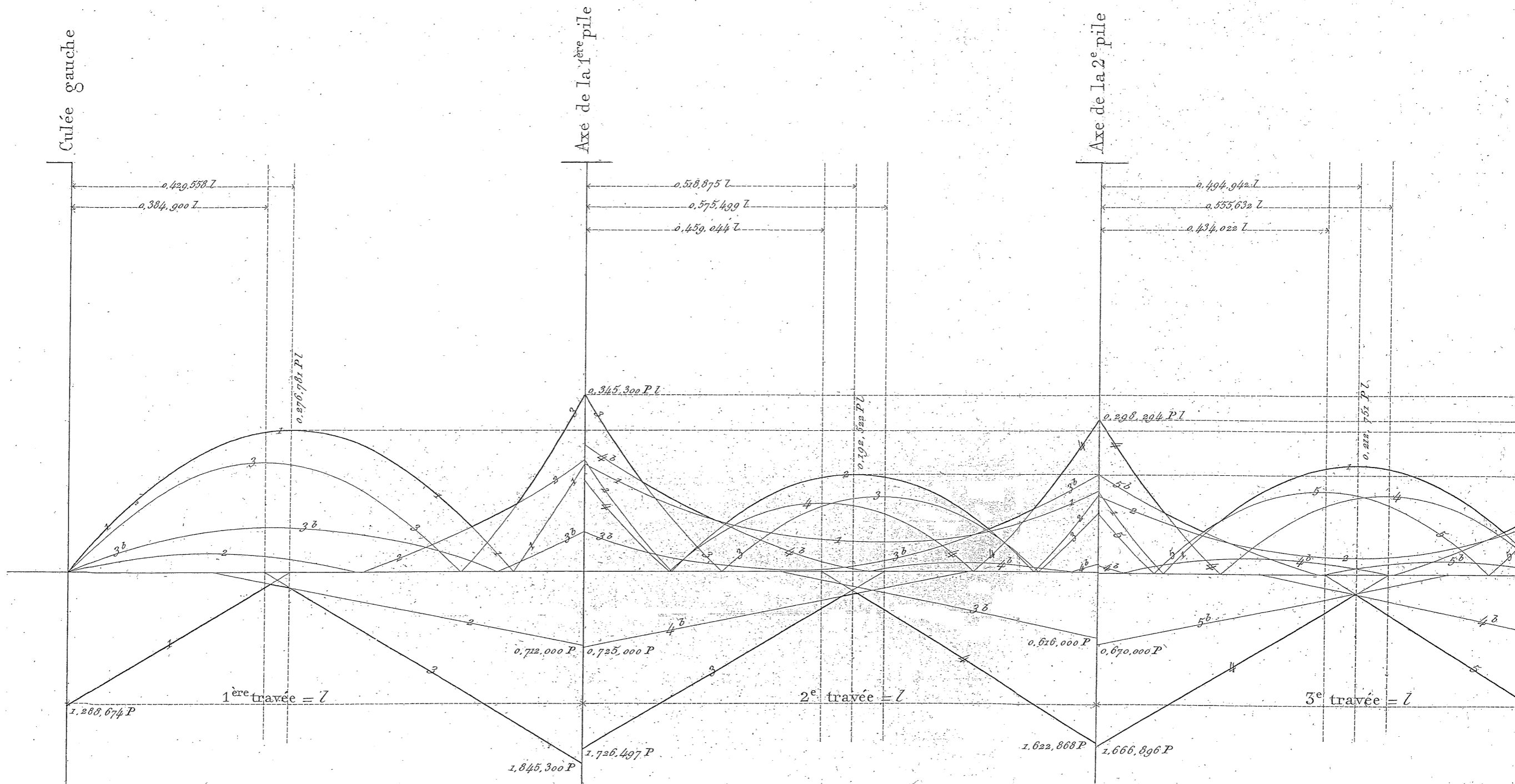
Tracé de la courbe enveloppe des moments de



la rupture d'un pont symétrique de 11 travées.



Tracé de la courbe enveloppe des mon



rents de rupture d'un pont de 12 travées égales.

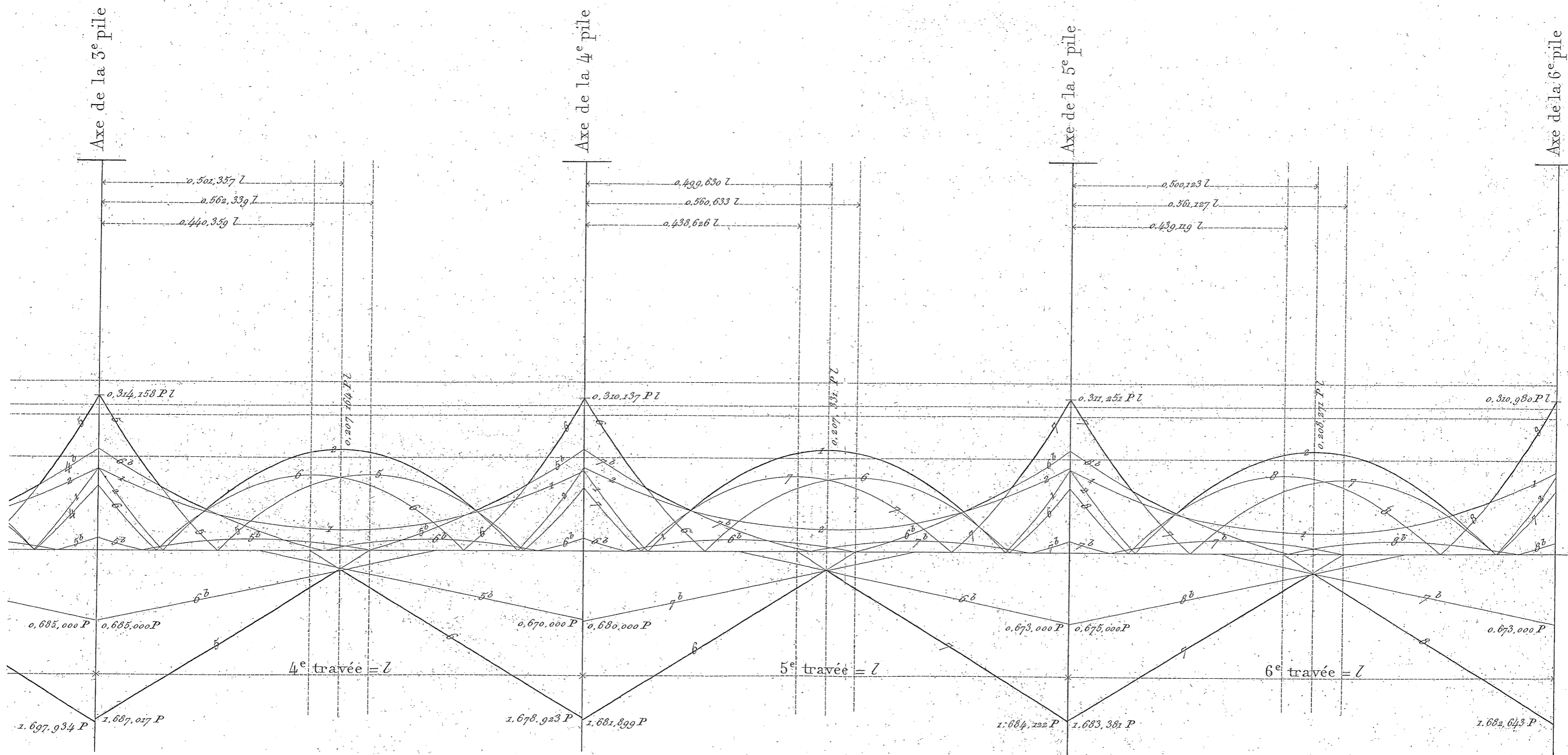


TABLEAU DES CALCULS DES ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES AU TRACÉ DES COURBES

JUSQU'A DOUZE

NOMBRE DE TRAVÉES.	VALEUR GÉNÉRALE DE LA RÉACTION SUR LA CULÉE.	N ^{os} DES PILES.	VALEUR GÉNÉRALE DE LA RÉACTION SUR LA PILE.	VALEUR GÉNÉRALE DU MOMENT DE RUPTURE SUR LA PILE.	MAXIMUM ABSOLU DE CE MOMENT.
1	2	3	4	5	6
2	$\frac{-P_1 + 7P}{4 \times 4}$	1	$\frac{10P + 10P_1}{16}$	$\frac{l(P + P_1)}{16}$	$\frac{l(2P + 2S)}{16}$
3	$\frac{P_2 - 3P_1 + 26P}{4 \times 15}$	1	$\frac{39P + 33P_1 - 6P_2}{60}$	$\frac{l(4P + 3P_1 - P_2)}{60}$	$\frac{l(6P + 7S)}{60}$
		2	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>
4	$\frac{-P_3 + 3P_2 - 11P_1 + 97P}{4 \times 56}$	1	$\frac{146P + 122P_1 - 18P_2 + 6P_3}{224}$	$\frac{l(15P + 11P_1 - 3P_2 + P_3)}{224}$	$\frac{l(24P + 27S)}{224}$
		2	$\frac{-24P + 128P_1 + 128P_2 - 24P_3}{224}$	$\frac{l(-4P + 12P_1 + 12P_2 - 4P_3)}{224}$	$\frac{l(16P + 24S)}{224}$
5	$\frac{P_4 - 3P_3 + 11P_2 - 41P_1 + 362P}{4 \times 209}$	1	$\frac{545P + 455P_1 - 66P_2 + 18P_3 - 6P_4}{836}$	$\frac{l(56P + 41P_1 - 11P_2 + 3P_3 - P_4)}{836}$	$\frac{l(88P + 100S)}{836}$
		2	$\frac{-90P + 479P_1 + 473P_2 - 72P_3 + 24P_4}{836}$	$\frac{l(-15P + 45P_1 + 44P_2 - 12P_3 + 4P_4)}{836}$	$\frac{l(66P + 93S)}{836}$
		3	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>
6	$\frac{-P_5 + 3P_4 - 11P_3 + 41P_2 - 153P_1 + 1,351P}{4 \times 780}$	1	$\frac{2,034P + 1,698P_1 - 246P_2 + 66P_3 - 18P_4 + 6P_5}{3,120}$	$\frac{l(209P + 153P_1 - 41P_2 + 11P_3 - 3P_4 + P_5)}{3,120}$	$\frac{l(330P + 374S)}{3,120}$
		2	$\frac{-336P + 1,788P_1 + 1,764P_2 - 264P_3 + 72P_4 - 24P_5}{3,120}$	$\frac{l(-56P + 168P_1 + 164P_2 - 44P_3 + 12P_4 - 4P_5)}{3,120}$	$\frac{l(240P + 341S)}{3,120}$
		3	$\frac{90P - 270P_1 + 1,770P_2 + 1,770P_3 - 270P_4 + 90P_5}{3,120}$	$\frac{l(15P - 45P_1 + 165P_2 + 165P_3 - 45P_4 + 15P_5)}{3,120}$	$\frac{l(270P + 360S)}{3,120}$
7	$\frac{P_6 - 3P_5 + 11P_4 - 41P_3 + 153P_2 - 571P_1 + 5,042P}{4 \times 2,911}$	1	$\frac{7,591P + 6,337P_1 - 918P_2 + 246P_3 - 66P_4 + 18P_5 - 6P_6}{11,644}$	$\frac{l(780P + 571P_1 - 153P_2 + 41P_3 - 11P_4 + 3P_5 - P_6)}{11,644}$	$\frac{l(1,230P + 1,395S)}{11,644}$
		2	$\frac{-1,254P + 6,673P_1 + 6,583P_2 - 984P_3 + 264P_4 - 72P_5 + 24P_6}{11,644}$	$\frac{l(-209P + 627P_1 + 612P_2 - 164P_3 + 44P_4 - 12P_5 + 4P_6)}{11,644}$	$\frac{l(902P + 1,287S)}{11,644}$
		3	$\frac{336P - 1,008P_1 + 6,607P_2 + 6,601P_3 - 990P_4 + 270P_5 - 90P_6}{11,644}$	$\frac{l(56P - 168P_1 + 616P_2 + 615P_3 - 165P_4 + 45P_5 - 15P_6)}{11,644}$	$\frac{l(984P + 1,332S)}{11,644}$
		4	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>
8	$\frac{l}{4 \times 10,864} (-P_7 + 3P_6 - 11P_5 + 41P_4 - 153P_3 + 571P_2 - 2,131P_1 + 18,817P)$	1	$\frac{28,830P + 23,650P_1 - 3,426P_2 + 918P_3 - 246P_4 + 66P_5 - 18P_6 + 6P_7}{43,456}$	$\frac{l(2,911P + 2,131P_1 - 571P_2 + 153P_3 - 41P_4 + 11P_5 - 3P_6 + P_7)}{43,456}$	$\frac{l(4,592P + 5,207S)}{43,456}$
		2	$\frac{-4,680P + 24,904P_1 + 24,568P_2 - 3,672P_3 + 984P_4 - 264P_5 + 72P_6 - 24P_7}{43,456}$	$\frac{l(-780P + 2,340P_1 + 2,284P_2 - 612P_3 + 164P_4 - 44P_5 + 12P_6 - 4P_7)}{43,456}$	$\frac{l(3,360P + 4,800S)}{43,456}$
		3	$\frac{1,254P - 3,762P_1 + 24,658P_2 + 24,634P_3 - 3,690P_4 + 990P_5 - 270P_6 + 90P_7}{43,456}$	$\frac{l(209P - 627P_1 + 2,299P_2 + 2,295P_3 - 615P_4 + 165P_5 - 45P_6 + 15P_7)}{43,456}$	$\frac{l(3,696P + 4,983S)}{43,456}$
		4	$\frac{-336P + 1,008P_1 - 3,696P_2 + 24,640P_3 + 24,640P_4 - 3,696P_5 + 1,008P_6 - 336P_7}{43,456}$	$\frac{l(-56P + 168P_1 - 616P_2 + 2,296P_3 + 2,296P_4 - 616P_5 + 168P_6 - 56P_7)}{43,456}$	$\frac{l(3,584P + 4,928S)}{43,456}$

ENVELOPPES DES MOMENTS DE RUPTURE POUR LES PONTS A TRAVÉES ÉGALES

TRAVÉES INCLUSIVEMENT.

1 ^{er} MAXIMUM RELATIF.	2 ^e MAXIMUM RELATIF.	MINIMUM ABSOLU.	1 ^{er} MINIMUM RELATIF.	2 ^e MINIMUM RELATIF.	N ^{os} DES TRAVÉES.	MAXIMUM ABSOLU DU MOMENT DE RUPTURE NÉGATIF DE LA TRAVÉE.	ABSCISSE DE L'AXE DE LA PARABOLE DES MOMENTS NÉGATIFS MAXIMA.	OBSERVATIONS.
7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{l(2P+S)}{16}$	$\frac{l(2P+S)}{16}$	$\frac{l \times 2P}{16}$	$\frac{l(2P+S)}{16}$	$\frac{l(2P+S)}{16}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{6P+7S}{16} \right]^2$	$\frac{6P+7S}{16(p+s)}$	
$\frac{l(6P+3S)}{60}$	$\frac{l(6P+4S)}{60}$	$\frac{l(6P-S)}{60}$	$\frac{l(6P+3S)}{60}$	$\frac{l(6P+2S)}{60}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{24P+27S}{60} \right]^2$	$\frac{24P+27S}{60(p+s)}$	
<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	2	$-\frac{l(3P+9S)}{2 \times 60}$	$\frac{l}{2}$	
$\frac{l(24P+12S)}{224}$	$\frac{l(24P+16S)}{224}$	$\frac{l(24P-3S)}{224}$	$\frac{l(24P+12S)}{224}$	$\frac{l(24P+8S)}{224}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{88P+100S}{224} \right]^2$	$\frac{88P+100S}{224(p+s)}$	
$\frac{l(16P+12S)}{224}$	$\frac{l(16P+12S)}{224}$	$\frac{l(16P-8S)}{224}$	$\frac{l(16P+4S)}{224}$	$\frac{l(16P+4S)}{224}$	2	$\frac{l(24P+12S)}{224} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{120P+116S}{224} \right]^2$	$\frac{120P+116S}{224(p+s)}$	
$\frac{l(88P+44S)}{836}$	$\frac{l(88P+59S)}{836}$	$\frac{l(88P-12S)}{836}$	$\frac{l(88P+44S)}{836}$	$\frac{l(88P+29S)}{836}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{330P+374S}{836} \right]^2$	$\frac{330P+374S}{836(p+s)}$	
$\frac{l(66P+48S)}{836}$	$\frac{l(66P+49S)}{836}$	$\frac{l(66P-27S)}{836}$	$\frac{l(66P+18S)}{836}$	$\frac{l(66P+17S)}{836}$	2	$\frac{l(88P+44S)}{836} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{440P+429S}{836} \right]^2$	$\frac{440P+429S}{836(p+s)}$	
<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	3	$-\frac{l(77P+143S)}{2 \times 836}$	$\frac{l}{2}$	
$\frac{l(330P+165S)}{3,120}$	$\frac{l(330P+221S)}{3,120}$	$\frac{l(330P-44S)}{3,120}$	$\frac{l(330P+165S)}{3,120}$	$\frac{l(330P+109S)}{3,120}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,230P+1,395S}{3,120} \right]^2$	$\frac{1,230P+1,395S}{3,120(p+s)}$	
$\frac{l(240P+176S)}{3,120}$	$\frac{l(240P+180S)}{3,120}$	$\frac{l(240P-100S)}{3,120}$	$\frac{l(240P+68S)}{3,120}$	$\frac{l(240P+64S)}{3,120}$	2	$\frac{l(330P+165S)}{3,120} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,650P+1,605S}{3,120} \right]^2$	$\frac{1,650P+1,605S}{3,120(p+s)}$	
$\frac{l(270P+195S)}{3,120}$	$\frac{l(270P+195S)}{3,120}$	$\frac{l(270P-90S)}{3,120}$	$\frac{l(270P+75S)}{3,120}$	$\frac{l(270P+75S)}{3,120}$	3	$\frac{l(240P+176S)}{3,120} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,530P+1,545S}{3,120} \right]^2$	$\frac{1,530P+1,545S}{3,120(p+s)}$	
$\frac{l(1,230P+615S)}{11,644}$	$\frac{l(1,230P+824S)}{11,644}$	$\frac{l(1,230P-165S)}{11,644}$	$\frac{l(1,230P+615S)}{11,644}$	$\frac{l(1,230P+406S)}{11,644}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,592P+5,207S}{11,644} \right]^2$	$\frac{4,592P+5,207S}{11,644(p+s)}$	
$\frac{l(902P+658S)}{11,644}$	$\frac{l(902P+673S)}{11,644}$	$\frac{l(902P-385S)}{11,644}$	$\frac{l(902P+242S)}{11,644}$	$\frac{l(902P+227S)}{11,644}$	2	$\frac{l(1,230P+615S)}{11,644} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{6,150P+5,986S}{11,644} \right]^2$	$\frac{6,150P+5,986S}{11,644(p+s)}$	
$\frac{l(984P+716S)}{11,644}$	$\frac{l(984P+717S)}{11,644}$	$\frac{l(984P-348S)}{11,644}$	$\frac{l(984P+268S)}{11,644}$	$\frac{l(984P+267S)}{11,644}$	3	$\frac{l(902P+658S)}{11,644} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{5,740P+5,781S}{11,644} \right]^2$	$\frac{5,740P+5,781S}{11,644(p+s)}$	
<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	4	$-\frac{l(943P+1,927S)}{2 \times 11,644}$	$\frac{l}{2}$	
$\frac{l(4,592P+2,296S)}{43,456}$	$\frac{l(4,592P+3,076S)}{43,456}$	$\frac{l(4,592P-615S)}{43,456}$	$\frac{l(4,592P+2,296S)}{43,456}$	$\frac{l(4,592P+1,516S)}{43,456}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{17,136P+19,432S}{43,456} \right]^2$	$\frac{17,136P+19,432S}{43,456(p+s)}$	
$\frac{l(3,360P+2,460S)}{43,456}$	$\frac{l(3,360P+2,516S)}{43,456}$	$\frac{l(3,360P-1,440S)}{43,456}$	$\frac{l(3,360P+900S)}{43,456}$	$\frac{l(3,360P+844S)}{43,456}$	2	$\frac{l(4,592P+2,296S)}{43,456} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{22,960P+22,344S}{43,456} \right]^2$	$\frac{22,960P+22,344S}{43,456(p+s)}$	
$\frac{l(3,696P+2,684S)}{43,456}$	$\frac{l(3,696P+2,688S)}{43,456}$	$\frac{l(3,696P-1,287S)}{43,456}$	$\frac{l(3,696P+1,012S)}{43,456}$	$\frac{l(3,696P+1,008S)}{43,456}$	3	$\frac{l(3,360P+2,460S)}{43,456} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{21,392P+21,560S}{43,456} \right]^2$	$\frac{21,392P+21,560S}{43,456(p+s)}$	
$\frac{l(3,584P+2,632S)}{43,456}$	$\frac{l(3,584P+2,632S)}{43,456}$	$\frac{l(3,584P-1,344S)}{43,456}$	$\frac{l(3,584P+952S)}{43,456}$	$\frac{l(3,584P+952S)}{43,456}$	4	$\frac{l(3,696P+2,684S)}{43,456} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{21,840P+21,784S}{43,456} \right]^2$	$\frac{21,840P+21,784S}{43,456(p+s)}$	

NOMBRE DE TRAVÉES.	VALEUR GÉNÉRALE DE LA RÉACTION SUR LA CULÉE.	N° DES PILES.	VALEUR GÉNÉRALE DE LA RÉACTION SUR LA PILE.	VALEUR GÉNÉRALE DU MOMENT DE RUPTURE SUR LA PILE.	MAXIMUM ABSOLU DE CE MOMENT.
1	2	3	4	5	6
9	$\frac{1}{4 \times 40,545} (P_8 - 3P_7 + 11P_6 - 41P_5 + 153P_4 - 571P_3 + 2,131P_2 - 7,953P_1 + 70,226P)$	1	$\frac{1}{162,180} (105,729 P + 88,263 P_1 - 12,786 P_2 + 3,426 P_3 - 918 P_4 + 246 P_5 - 66 P_6 + 18 P_7 - 6 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (10,864 P + 7,953 P_1 - 2,131 P_2 + 571 P_3 - 153 P_4 + 41 P_5 - 11 P_6 + 3 P_7 - P_8)$	$\frac{l}{162,180} (17,136 P + 19,432 S)$
		2	$\frac{1}{162,180} (-17,466 P + 92,943 P_1 + 91,689 P_2 - 13,704 P_3 + 3,672 P_4 - 984 P_5 + 264 P_6 - 72 P_7 + 24 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (-2,911 P + 8,733 P_1 + 8,524 P_2 - 2,284 P_3 + 612 P_4 - 164 P_5 + 44 P_6 - 12 P_7 + 4 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (12,546 P + 17,917 S)$
		3	$\frac{1}{162,180} (4,680 P - 14,040 P_1 + 92,025 P_2 + 91,935 P_3 - 13,770 P_4 + 3,690 P_5 - 990 P_6 + 270 P_7 - 90 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (780 P - 2,340 P_1 + 8,580 P_2 + 8,565 P_3 - 2,295 P_4 + 615 P_5 - 165 P_6 + 45 P_7 - 15 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (13,770 P + 18,585 S)$
		4	$\frac{1}{162,180} (-1,254 P + 3,762 P_1 - 13,794 P_2 + 91,959 P_3 + 91,953 P_4 - 13,776 P_5 + 3,696 P_6 - 1,008 P_7 + 336 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (-209 P + 627 P_1 - 2,299 P_2 + 8,569 P_3 + 8,568 P_4 - 2,296 P_5 + 616 P_6 - 168 P_7 + 56 P_8)$	$\frac{l}{162,180} (13,464 P + 18,436 S)$
		5	Idem.	Idem.	Idem.
10	$\frac{1}{4 \times 151,316} (-P_9 + 3P_8 - 11P_7 + 41P_6 - 153P_5 + 571P_4 - 2,131P_3 + 7,953P_2 - 29,681P_1 + 262,087P)$	1	$\frac{1}{605,264} (394,586 P + 329,402 P_1 - 47,718 P_2 + 12,786 P_3 - 3,426 P_4 + 918 P_5 - 246 P_6 + 66 P_7 - 18 P_8 + 6 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (40,545 P + 29,681 P_1 - 7,953 P_2 + 2,131 P_3 - 571 P_4 + 153 P_5 - 41 P_6 + 11 P_7 - 3 P_8 + P_9)$	$\frac{l}{605,264} (63,954 P + 72,522 S)$
		2	$\frac{1}{605,264} (-65,184 P + 346,868 P_1 + 342,188 P_2 - 51,144 P_3 + 13,704 P_4 - 3,672 P_5 + 984 P_6 - 264 P_7 + 72 P_8 - 24 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (-10,864 P + 32,592 P_1 + 31,812 P_2 - 8,524 P_3 + 2,284 P_4 - 612 P_5 + 164 P_6 - 44 P_7 + 12 P_8 - 4 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (46,816 P + 66,864 S)$
		3	$\frac{1}{605,264} (17,466 P - 52,398 P_1 + 343,442 P_2 + 343,106 P_3 - 51,390 P_4 + 13,770 P_5 - 3,690 P_6 + 990 P_7 - 270 P_8 + 90 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (2,911 P - 8,733 P_1 + 32,021 P_2 + 31,965 P_3 - 8,565 P_4 + 2,295 P_5 - 615 P_6 + 165 P_7 - 45 P_8 + 15 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (51,414 P + 69,372 S)$
		4	$\frac{1}{605,264} (-4,680 P + 14,040 P_1 - 51,480 P_2 + 343,196 P_3 + 343,172 P_4 - 51,408 P_5 + 13,776 P_6 - 3,696 P_7 + 1,008 P_8 - 336 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (-780 P + 2,340 P_1 - 8,580 P_2 + 31,980 P_3 + 31,976 P_4 - 8,568 P_5 + 2,296 P_6 - 616 P_7 + 168 P_8 - 56 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (50,160 P + 68,760 S)$
		5	$\frac{1}{605,264} (1,254 P - 3,762 P_1 + 13,794 P_2 - 51,414 P_3 + 343,178 P_4 + 343,178 P_5 - 51,414 P_6 + 13,794 P_7 - 3,762 P_8 + 1,254 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (209 P - 627 P_1 + 2,299 P_2 - 8,569 P_3 + 31,977 P_4 + 31,977 P_5 - 8,569 P_6 + 2,299 P_7 - 627 P_8 + 209 P_9)$	$\frac{l}{605,264} (50,578 P + 68,970 S)$
11	$\frac{1}{4 \times 564,719} (P_{10} - 3P_9 + 11P_8 - 41P_7 + 153P_6 - 571P_5 + 2,131P_4 - 7,953P_3 + 29,681P_2 - 110,771P_1 + 978,122P)$	1	$\frac{1}{2,258,876} (1,472,615 P + 1,229,345 P_1 - 178,086 P_2 + 47,718 P_3 - 12,786 P_4 + 3,426 P_5 - 918 P_6 + 246 P_7 - 66 P_8 + 18 P_9 - 6 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (151,316 P + 110,771 P_1 - 29,681 P_2 + 7,953 P_3 - 2,131 P_4 + 571 P_5 - 153 P_6 + 41 P_7 + 3 P_8 - P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (238,678 P + 270,655 S)$
		2	$\frac{1}{2,258,876} (-243,270 P + 1,294,529 P_1 + 1,277,063 P_2 - 190,872 P_3 + 51,144 P_4 - 13,704 P_5 + 3,672 P_6 - 984 P_7 + 264 P_8 - 72 P_9 + 24 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (-40,545 P + 121,635 P_1 + 118,724 P_2 - 31,812 P_3 + 8,524 P_4 - 2,284 P_5 + 612 P_6 - 164 P_7 + 44 P_8 - 12 P_9 + 4 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (174,726 P + 249,548 S)$
		3	$\frac{1}{2,258,876} (65,184 P - 195,552 P_1 + 1,281,743 P_2 + 1,280,489 P_3 - 191,790 P_4 + 51,390 P_5 - 13,770 P_6 + 3,690 P_7 - 990 P_8 + 270 P_9 - 90 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (10,864 P - 32,592 P_1 + 119,504 P_2 + 119,295 P_3 - 31,965 P_4 + 8,565 P_5 - 2,295 P_6 + 615 P_7 - 165 P_8 + 45 P_9 - 15 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (191,856 P + 258,888 S)$
		4	$\frac{1}{2,258,876} (-17,466 P + 52,398 P_1 - 192,126 P_2 + 1,280,825 P_3 + 1,280,735 P_4 - 191,856 P_5 + 51,408 P_6 - 13,776 P_7 + 3,696 P_8 - 1,008 P_9 + 336 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (-2,911 P + 8,733 P_1 - 32,021 P_2 + 119,351 P_3 + 119,336 P_4 - 31,976 P_5 + 8,568 P_6 + 2,296 P_7 + 616 P_8 - 168 P_9 + 56 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (187,288 P + 256,660 S)$
		5	$\frac{1}{2,258,876} (+4,680 P - 14,040 P_1 + 51,480 P_2 - 191,880 P_3 + 1,280,759 P_4 + 1,280,753 P_5 - 191,862 P_6 + 51,414 P_7 - 13,794 P_8 + 3,762 P_9 - 1,254 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (780 P - 2,340 P_1 + 8,580 P_2 - 31,980 P_3 + 119,340 P_4 + 119,339 P_5 - 31,977 P_6 + 8,569 P_7 - 2,299 P_8 + 627 P_9 - 209 P_{10})$	$\frac{l}{2,258,876} (188,430 P + 257,285 S)$
		6	Idem.	Idem.	Idem.
12	$\frac{1}{4 \times 2,107,560} (-P_{11} + 3P_{10} - 11P_9 + 41P_8 - 153P_7 + 571P_6 - 2,131P_5 + 7,953P_4 - 29,681P_3 + 110,771P_2 - 413,403P_1 + 3,650,401P)$	1	$\frac{1}{8,430,244} (5,495,874 P + 4,587,978 P_1 - 664,625 P_2 + 178,086 P_3 - 47,718 P_4 + 12,786 P_5 - 3,426 P_6 + 918 P_7 - 246 P_8 + 66 P_9 - 18 P_{10} + 6 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (564,719 P + 413,403 P_1 - 110,771 P_2 + 29,681 P_3 - 7,953 P_4 + 2,131 P_5 - 571 P_6 + 153 P_7 - 41 P_8 + 11 P_9 - 3 P_{10} + P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (890,760 P + 1,010,099 S)$
		2	$\frac{1}{8,430,244} (-907,896 P + 4,831,248 P_1 + 4,766,064 P_2 - 712,344 P_3 + 190,872 P_4 - 51,144 P_5 + 13,704 P_6 - 3,672 P_7 + 984 P_8 - 264 P_9 + 72 P_{10} - 24 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (-151,316 P + 453,948 P_1 + 443,084 P_2 - 118,724 P_3 + 31,812 P_4 - 8,524 P_5 + 2,284 P_6 - 612 P_7 + 164 P_8 - 44 P_9 + 12 P_{10} - 4 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (652,080 P + 931,304 S)$
		3	$\frac{1}{8,430,244} (+243,270 P - 729,810 P_1 + 4,783,530 P_2 + 4,778,850 P_3 - 715,770 P_4 + 191,790 P_5 - 51,390 P_6 + 13,770 P_7 - 3,690 P_8 + 990 P_9 - 270 P_{10} + 90 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (40,545 P - 121,635 P_1 + 445,995 P_2 + 445,215 P_3 - 119,295 P_4 + 31,965 P_5 - 8,565 P_6 + 2,295 P_7 - 615 P_8 + 165 P_9 - 45 P_{10} + 15 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (716,040 P + 966,195 S)$
		4	$\frac{1}{8,430,244} (-65,184 P + 195,552 P_1 - 717,024 P_2 + 4,780,104 P_3 + 4,779,768 P_4 - 716,016 P_5 + 191,856 P_6 - 51,408 P_7 + 13,776 P_8 - 3,696 P_9 + 1,008 P_{10} - 336 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (-10,864 P + 32,592 P_1 - 119,504 P_2 + 445,424 P_3 + 445,368 P_4 - 119,336 P_5 + 31,976 P_6 - 8,568 P_7 + 2,296 P_8 - 616 P_9 + 168 P_{10} - 56 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (698,880 P + 957,784 S)$
		5	$\frac{1}{8,430,244} (17,466 P - 52,398 P_1 + 192,126 P_2 - 716,106 P_3 + 4,779,858 P_4 + 4,779,834 P_5 - 716,034 P_6 + 191,862 P_7 - 51,414 P_8 + 13,794 P_9 - 3,762 P_{10} + 1,254 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (2,911 P - 8,733 P_1 + 32,021 P_2 - 119,351 P_3 + 445,363 P_4 + 445,379 P_5 - 119,339 P_6 + 31,977 P_7 - 8,569 P_8 + 2,299 P_9 - 627 P_{10} + 209 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (703,560 P + 960,179 S)$
		6	$\frac{1}{8,430,244} (-4,680 P + 14,040 P_1 - 51,480 P_2 + 191,880 P_3 - 716,040 P_4 + 4,779,840 P_5 + 4,779,840 P_6 - 716,040 P_7 + 191,880 P_8 - 51,480 P_9 + 14,040 P_{10} - 4,680 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (-780 P + 2,340 P_1 - 8,580 P_2 + 31,980 P_3 - 119,340 P_4 + 475,380 P_5 + 445,380 P_6 - 199,340 P_7 + 31,980 P_8 - 8,580 P_9 + 2,340 P_{10} + 780 P_{11})$	$\frac{l}{8,430,240} (702,000 P + 959,400 S)$

DU TABLEAU.

1 ^{er} MAXIMUM RELATIF.	2 ^e MAXIMUM RELATIF.	MINIMUM ABSOLU.	1 ^{er} MINIMUM RELATIF.	2 ^e MINIMUM RELATIF.	N ^{os} DES TRAVÉES.	MAXIMUM ABSOLU DU MOMENT DE RUPTURE NÉGATIF DE LA TRAVÉE.	ABSCISSE DE L'AXE DE LA PARABOLE DES MOMENTS NÉGATIFS MAXIMA.	OBSERVATIONS.
7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{l(17,136P + 8,568S)}{162,180}$	$\frac{l(17,136P + 11,479S)}{162,180}$	$\frac{l(17,136P - 2,296S)}{162,180}$	$\frac{l(17,136P + 8,568S)}{162,180}$	$\frac{l(17,136P + 5,657S)}{162,180}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{63,954P + 72,522S}{162,180} \right]^2$	$\frac{63,954P + 72,522S}{162,180(p+s)}$	
$\frac{l(12,546P + 9,184S)}{162,180}$	$\frac{l(12,546P + 9,393S)}{162,180}$	$\frac{l(12,546P - 5,371S)}{162,180}$	$\frac{l(12,546P + 3,362S)}{162,180}$	$\frac{l(12,546P + 3,153S)}{162,180}$	2	$\frac{l(17,136P + 8,568S)}{162,180} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{85,680P + 83,385S}{162,180} \right]^2$	$\frac{85,680P + 83,385S}{162,180(p+s)}$	
$\frac{l(13,770P + 10,005S)}{162,180}$	$\frac{l(13,770P + 10,026S)}{162,180}$	$\frac{l(13,770P - 4,815S)}{162,180}$	$\frac{l(13,770P + 3,765S)}{162,180}$	$\frac{l(13,770P + 3,750S)}{162,180}$	3	$\frac{l(12,546P + 6,273S)}{162,180} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{79,866P + 80,478S}{162,180} \right]^2$	$\frac{79,866P + 80,478S}{162,180(p+s)}$	
$\frac{l(13,464P + 9,867S)}{162,180}$	$\frac{l(13,464P + 9,868S)}{162,180}$	$\frac{l(13,464P - 4,972S)}{162,180}$	$\frac{l(13,464P + 3,597S)}{162,180}$	$\frac{l(13,464P + 3,596S)}{162,180}$	4	$\frac{l(13,770P + 6,885S)}{162,180} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{81,396P + 81,243S}{162,180} \right]^2$	$\frac{81,396P + 81,243S}{162,180(p+s)}$	
<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	5	$-\frac{l(13,617P + 27,081S)}{2 \times 162,180}$	$\frac{l}{2}$	
$\frac{l(63,964P + 31,977S)}{605,264}$	$\frac{l(63,964P + 42,841S)}{605,264}$	$\frac{l(63,964P - 8,568S)}{605,264}$	$\frac{l(63,964P + 31,977S)}{605,264}$	$\frac{l(63,964P + 21,113S)}{605,264}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{238,678P + 270,655S}{605,264} \right]^2$	$\frac{238,678P + 270,655S}{605,264(p+s)}$	
$\frac{l(46,816P + 34,272S)}{605,264}$	$\frac{l(46,816P + 35,052S)}{605,264}$	$\frac{l(46,816P - 20,048S)}{605,264}$	$\frac{l(46,816P + 12,544S)}{605,264}$	$\frac{l(46,816P + 11,764S)}{605,264}$	2	$\frac{l(63,954P + 31,977S)}{605,264} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{319,770P + 311,201S}{605,264} \right]^2$	$\frac{319,770P + 311,201S}{605,264(p+s)}$	
$\frac{l(51,414P + 37,351S)}{605,264}$	$\frac{l(51,414P + 37,407S)}{605,264}$	$\frac{l(51,414P - 17,958S)}{605,264}$	$\frac{l(51,414P + 14,053S)}{605,264}$	$\frac{l(51,414P + 14,007S)}{605,264}$	3	$\frac{l(46,816P + 23,408S)}{605,264} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{298,034P + 300,333S}{605,264} \right]^2$	$\frac{298,034P + 300,333S}{605,264(p+s)}$	
$\frac{l(50,160P + 36,780S)}{605,264}$	$\frac{l(50,160P + 36,784S)}{605,264}$	$\frac{l(50,160P - 18,600S)}{605,264}$	$\frac{l(50,160P + 13,380S)}{605,264}$	$\frac{l(50,160P + 13,376S)}{605,264}$	4	$\frac{l(51,414P + 25,707S)}{605,264} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{303,886P + 303,259S}{605,264} \right]^2$	$\frac{303,886P + 303,259S}{605,264(p+s)}$	
$\frac{l(50,578P + 36,993S)}{605,264}$	$\frac{l(50,578P + 36,993S)}{605,264}$	$\frac{l(50,578P - 18,392S)}{605,264}$	$\frac{l(50,578P + 13,585S)}{605,264}$	$\frac{l(50,578P + 13,585S)}{605,264}$	5	$\frac{l(50,160P + 25,080S)}{605,264} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{302,214P + 302,423S}{605,264} \right]^2$	$\frac{302,214P + 302,423S}{605,264(p+s)}$	
$\frac{l(238,678P + 119,339S)}{2,258,876}$	$\frac{l(238,678P + 159,884S)}{2,258,876}$	$\frac{l(238,678P - 31,977S)}{2,258,876}$	$\frac{l(238,678P + 119,339S)}{2,258,876}$	$\frac{l(238,678P + 78,794S)}{2,258,876}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{890,760P + 1,010,099S}{2,258,876} \right]^2$	$\frac{890,760P + 1,010,099S}{2,258,876(p+s)}$	
$\frac{l(174,726P + 127,908S)}{2,258,876}$	$\frac{l(174,726P + 130,819S)}{2,258,876}$	$\frac{l(174,726P - 74,817S)}{2,258,876}$	$\frac{l(174,726P + 46,818S)}{2,258,876}$	$\frac{l(174,726P + 43,907S)}{2,258,876}$	2	$\frac{l(238,678P + 119,339S)}{2,258,876} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,193,390P + 1,161,414S}{2,258,876} \right]^2$	$\frac{1,193,390P + 1,161,414S}{2,258,876(p+s)}$	
$\frac{l(191,856P + 139,384S)}{2,258,876}$	$\frac{l(191,856P + 139,593S)}{2,258,876}$	$\frac{l(191,856P - 67,032S)}{2,258,876}$	$\frac{l(191,856P + 52,472S)}{2,258,876}$	$\frac{l(191,856P + 52,163S)}{2,258,876}$	3	$\frac{l(174,726P + 87,363S)}{2,258,876} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,112,308P + 1,120,873S}{2,258,876} \right]^2$	$\frac{1,112,308P + 1,120,873S}{2,258,876(p+s)}$	
$\frac{l(187,288P + 137,309S)}{2,258,876}$	$\frac{l(187,288P + 137,324S)}{2,258,876}$	$\frac{l(187,288P - 69,372S)}{2,258,876}$	$\frac{l(187,288P + 49,979S)}{2,258,876}$	$\frac{l(187,288P + 49,964S)}{2,258,876}$	4	$\frac{l(191,856P + 95,928S)}{2,258,876} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,134,006P + 1,131,722S}{2,258,876} \right]^2$	$\frac{1,134,006P + 1,131,722S}{2,258,876(p+s)}$	
$\frac{l(188,430P + 137,895S)}{2,258,876}$	$\frac{l(188,430P + 137,896S)}{2,258,876}$	$\frac{l(188,430P - 68,805S)}{2,258,876}$	$\frac{l(188,430P + 50,535S)}{2,258,876}$	$\frac{l(188,430P + 50,534S)}{2,258,876}$	5	$\frac{l(187,288P + 93,644S)}{2,258,876} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{1,128,296P + 1,128,867S}{2,258,876} \right]^2$	$\frac{1,128,296P + 1,128,867S}{2,258,876(p+s)}$	
<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	6	$-\frac{l(187,859P + 376,289S)}{2 \times 2,258,876}$	$\frac{l}{2}$	
$\frac{l(890,760P + 445,380S)}{8,430,240}$	$\frac{l(890,760P + 596,696S)}{8,430,240}$	$\frac{l(890,760P - 119,339S)}{8,430,240}$	$\frac{l(890,760P + 445,380S)}{8,430,240}$	$\frac{l(890,760P + 294,064S)}{8,430,240}$	1	$-\frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{3,324,360P + 3,769,740S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{3,324,360P + 3,769,740S}{8,430,240(p+s)}$	
$\frac{l(652,080P + 477,356S)}{8,430,240}$	$\frac{l(652,080P + 488,220S)}{8,430,240}$	$\frac{l(652,080P - 279,224S)}{8,430,240}$	$\frac{l(652,080P + 174,724S)}{8,430,240}$	$\frac{l(652,080P + 163,860S)}{8,430,240}$	2	$\frac{l(890,760P + 445,380S)}{8,430,240} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,453,800P + 4,384,460S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{4,453,800P + 4,384,460S}{8,430,240(p+s)}$	
$\frac{l(716,040P + 520,200S)}{8,430,240}$	$\frac{l(716,040P + 520,980S)}{8,430,240}$	$\frac{l(716,040P - 250,155S)}{8,430,240}$	$\frac{l(716,040P + 195,840S)}{8,430,240}$	$\frac{l(716,040P + 195,080S)}{8,430,240}$	3	$\frac{l(652,080P + 326,040S)}{8,430,240} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,151,160P + 4,183,140S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{4,151,160P + 4,183,140S}{8,430,240(p+s)}$	
$\frac{l(698,880P + 512,350S)}{8,430,240}$	$\frac{l(698,880P + 512,416S)}{8,430,240}$	$\frac{l(698,880P - 255,904S)}{8,430,240}$	$\frac{l(698,880P + 186,530S)}{8,430,240}$	$\frac{l(698,880P + 186,464S)}{8,430,240}$	4	$\frac{l(716,040P + 358,020S)}{8,430,240} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,232,280P + 4,223,700S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{4,232,280P + 4,223,700S}{8,430,240(p+s)}$	
$\frac{l(703,560P + 514,796S)}{8,430,240}$	$\frac{l(703,560P + 514,800S)}{8,430,240}$	$\frac{l(703,560P - 256,619S)}{8,430,240}$	$\frac{l(703,560P + 188,764S)}{8,430,240}$	$\frac{l(703,560P + 188,760S)}{8,430,240}$	5	$\frac{l(698,880P + 349,420S)}{8,430,240} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,210,440P + 4,212,780S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{4,210,440P + 4,212,780S}{8,430,240(p+s)}$	
$\frac{l(702,000P + 514,020S)}{8,430,240}$	$\frac{l(702,000P + 514,020S)}{8,430,240}$	$\frac{l(702,000P - 257,400S)}{8,430,240}$	$\frac{l(702,000P + 187,980S)}{8,430,240}$	$\frac{l(702,000P + 187,980S)}{8,430,240}$	6	$\frac{l(703,560P + 351,780S)}{8,430,240} - \frac{1}{2(p+s)} \left[\frac{4,216,680P + 4,215,900S}{8,430,240} \right]^2$	$\frac{4,216,680P + 4,215,900S}{8,430,240(p+s)}$	

