

Д. Ю. ПАНОВ

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ДЛИННЫХ И УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ<sup>1</sup>**

Работа посвящена одному из эффективных и практически удобных методов приближенного решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Подробно рассматривается решение уравнения Лапласа и Пуассона при заданных граничных значениях. Метод применяется к конкретной задаче о кручении стержня с сечением, близким к симметричным винтовым и крыловым авиационным профилям.

I. При исследовании многих проблем прикладного характера применяются методы, с помощью которых приближенное решение двух- или трехмерной задачи сводится к точному или приближенному решению задачи одномерной.

Таков, например, метод решения задачи кручения для узкой и длинной области при помощи аналогии Прандтля (см. например [1], стр. 160 и сл.). Приближенное решение задачи кручения этим методом основано на допущении, что мембрана, натянутая на контур длинной и узкой области и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, провисает в каждом поперечном сечении, нормальном к средней линии области, приблизительно так же, как мембрана, натянутая на бесконечно-длинную полосу той же ширины, что и рассматриваемое сечение. Такого рода соображения приводят к формуле Гриффита [2] для геометрической жесткости кручения  $T$  тонкого симметричного относительно оси  $X$  профиля, простирающегося от  $x=a$  до  $x=b$  и имеющего толщину  $t(x)$  в сечении, определяемом абсциссой  $x$ ,

$$T \approx \frac{1}{3} \int_a^b [t(x)]^3 dx,$$

и к более общей формуле Прескотта (см. [3], стр. 170)

$$T \approx \frac{1}{3} \int_0^l [t(s)]^3 ds,$$

<sup>1</sup> Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

справедливой для любого тонкого профиля, причем  $s$ —дуга его средней линии, отсчитываемая от одного из концов профиля, а  $t(s)$ —толщина в функции  $s$ , измеренная по нормали к средней линии.

Математическая сторона указанного выше метода в конечном счете такова. Как известно, задача о кручении для области  $G$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , сводится к отысканию функции напряжений  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей внутри  $G$  уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

и равной нулю на контуре  $\Gamma$ . Когда функция  $\varphi(x, y)$  найдена, решаются все вопросы, которые ставятся в задаче кручения, и в частности определяется геометрическая жесткость кручения  $T$  по формуле:

$$T = 2 \iint_G \varphi(x, y) dx dy.$$

Вместо того чтобы точно решать уравнение (1) для узкой и длинной области  $G$ , которую мы будем предполагать для простоты симметричной относительно оси  $X$ , мы считаем, что получим приближенное решение, если в каждом сечении области  $x = \text{const}$  удовлетворим одномерному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\Phi = 0$$

при  $y = \pm \frac{1}{2} t(x)$ .

Решение уравнения (2) при указанных граничных условиях дает

$$\varphi(x, y) \approx \frac{t^2(x)}{4} - y^2 \quad (3)$$

и вычисляя

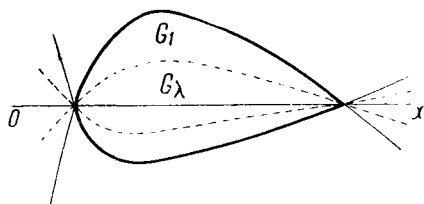
$$T = 2 \iint_G \varphi(x, y) dx dy = 2 \int_a^b \int_{-\frac{t(x)}{2}}^{+\frac{t(x)}{2}} \left[ \frac{t^2(x)}{4} - y^2 \right] dy dx,$$

мы получим формулу Гриффита.

Ясно, что приведенное выше рассуждение дает совершенно точные результаты лишь для таких двумерных задач, которые по существу являются одномерными (бесконечная полоса постоянной ширины), в остальных же случаях оно дает приближенные решения более или менее точные в зависимости от того, насколько длинна и узка рассматриваемая область. Никакого критерия, который позволял бы установить, можно ли применять такой метод к данной конкретной области, если не желают получить ошибку большую заранее указанной величины, в изложенном решении мы не имеем. Границы, в которых можно применять метод такого рода, остаются неизвестными, хотя возможность установить их была бы весьма ценной при решении многих практических задач.

II. Для того чтобы подойти к решению этого вопроса, естественно наметить следующий путь.

Рассмотрим область  $G_1$ , ограниченную двумя кривыми, которые мы будем предполагать для простоты пересекающимися на оси  $X$  (фиг. 1); рассмотрим, далее, область  $G_\lambda$ , отличающуюся от  $G_1$  только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении  $1:\lambda$ , где  $0 < \lambda < 1$ . Будем искать решение для области  $G_\lambda$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ , построенного таким образом, что первый член ряда, не содержащий  $\lambda$ , дает решение задачи, получающееся при указанной выше замене двумерной проблемы одномерной, а последующие члены, содержащие  $\lambda$  во все более высоких степенях, представляют собой поправки, которые следует учитывать, если мы рассматриваем такие значения  $\lambda$ , при которых точность, даваемая первым членом, уже недостаточна.



Фиг. 1

Такой метод решения представляет, разумеется, наибольший интерес для задач, связанных с длинными и тонкими областями, т. е. для тех случаев, когда мы будем иметь дело с малыми значениями  $\lambda$  и сможем ограничиться малым числом членов разложения.

Повидимому, Дэнкан был первым исследователем, систематически использовавшим в своих работах по кручению и изгибу [4] намеченный выше метод разложений по степени «параметра толщины» (у Дэнкана «thickness parameter»); к сожалению, исследования Дэнкана в этом направлении весьма далеки от требований математической строгости, и потому нам кажется необходимым каким-либо образом обосновать этот метод, чрезвычайно удобный при решении многих задач. Исходя из нескольких других, чем у Дэнкана, соображений, мы строим разложения по степеням  $\lambda$ , которые могут быть использованы в значительно более широком классе случаев, и даем простые оценки точности, достигаемой при пользовании этими разложениями. Краткое изложение этого исследования дано в нашей статье [5].

III. Для того чтобы сделать изложение более определенным, мы разовьем указанный выше метод лишь для случая уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4)$$

хотя применение этого метода возможно и во многих других случаях. Мы будем решать уравнение (4) для конечной односвязной области  $G_\lambda$ , ограниченной двумя дугами кривых

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda \phi_1(x), \\ y &= \lambda \phi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и принадлежащей к типу, изображенному на фиг. 1.

Функции  $\phi_1(x)$  и  $\phi_2(x)$  мы будем считать имеющими необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений  $x$ . В качестве граничных условий мы зададим значения функции  $\varphi(x, y)$  на дугах  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi[x, \lambda\phi_1(x)] &= \varphi_1(x), \\ \varphi[x, \lambda\phi_2(x)] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  регулярны на  $\phi_1$  и  $\phi_2$ ; будем, кроме того, предполагать, что функция

$$\Omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\phi_1(x) - \phi_2(x)} \quad (7)$$

регулярна для значений  $x$ , соответствующих точкам области  $G_2$  и ее границы. Наконец, мы предположим, что правая часть уравнения (4) представляет собой функцию, разлагающуюся в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по степеням  $y$

$$f(x, y) = f_0(x) + yf_1(x) + y^2f_2(x) + \dots \quad (8)$$

внутри и на границе области  $G_1$ . Положим

$$y = \lambda\eta, \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, \eta; \lambda). \quad (9)$$

Преобразуя уравнение (4), получим:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \lambda^2 f_0(x) + \lambda^3 \eta f_1(x) + \lambda^4 \eta^2 f_2(x) + \dots; \quad (10)$$

граничные же условия (6) можно будет записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi[x, \phi_1(x); \lambda] &= \varphi_1(x), \\ \Phi[x, \phi_2(x); \lambda] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

так как кривые (5), очевидно, перейдут после преобразования (9) в

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \phi_1(x), \\ \eta &= \phi_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Итак, будем решать уравнение (10) с граничными условиями (11) на кривых (12). Будем искать это решение в виде ряда по степеням  $\lambda$ :

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = P_0(x, \eta) + \lambda P_1(x, \eta) + \lambda^2 P_2(x, \eta) + \dots \quad (13)$$

Функцию  $P_0(x, \eta)$  мы подберем так, чтобы для нее удовлетворялись граничные условия, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_0[x, \phi_1(x)] &= \varphi_1(x), \\ P_0[x, \phi_2(x)] &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

для остальных же коэффициентов  $P_n(x, \eta)$  потребуем:

$$\left. \begin{aligned} P_n[x, \phi_1(x)] &= 0, \\ P_n[x, \phi_2(x)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

При выполнении условий (14) и (15) функция  $\Phi(x, \eta; \lambda)$  будет, очевидно, удовлетворять условиям (11). Подставим ряд (13) в уравнение

(10) и произведем сравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $\lambda$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_1}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{k+2}}{\partial \eta^2} &= f_k(x) \eta^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Используя условия (14) и (15), мы можем определить из этих уравнений одну за другой все функции  $P_k(x, \eta)$ . В частности, будем иметь:

$$P_0(x, \eta) = \Omega_1(x) \eta + \Omega_2(x), \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(x) &= \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\psi_1(x) - \psi_2(x)}, \\ \Omega_2(x) &= \frac{\varphi_1(x) \varphi_2(x) - \psi_2(x) \varphi_1(x)}{\psi_1(x) - \psi_2(x)}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

причем обе функции  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  регулярны для рассматриваемых значений  $x$ . Для  $\Omega_1(x)$  это является одним из основных требований (см. [7]), а  $\Omega_2(x)$  может не быть регулярной лишь при тех  $x$ , при которых

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) = \psi,$$

но при этих значениях  $x$

$$\Omega_2(x) = \psi \Omega_1(x)$$

и, следовательно, также регулярна. Заметим, что функция  $P_0(x, \eta)$  получается просто путем линейной интерполяции по  $\eta$  граничных значений внутри области для каждого значения  $x$ .

Дальнейшие функции  $P_k(x, \eta)$  будут иметь такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_1(x, \eta) &\equiv 0; \\ P_2(x, \eta) &= \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \Omega_2) [\eta^2 - \eta(\psi_1 + \psi_2) + \psi_1 \psi_2] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} (D_x^2 \Omega_1) [\eta^3 - \eta(\psi_1^2 + \psi_1 \psi_2 + \psi_2^2) + (\psi_1^2 \psi_2 + \psi_1 \psi_2^2)], \\ P_3(x, \eta) &= \frac{1}{3!} f_1 [\eta^3 - \eta(\psi_1^3 - \psi_1 \psi_2 + \psi_2^3) + (\psi_1^2 \psi_2 + \psi_1 \psi_2^2)]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Нахождение этих выражений не составляет никакого труда, однако требует при решении в общем виде обширных вычислений; удобнее проделывать эти вычисления в необходимых случаях над конкретно заданными функциями.

В некоторых частных случаях, имеющих, впрочем, большой интерес, общие выражения (17) сильно упрощаются. Мы отметим здесь некоторые из этих случаев.

1. Уравнение Лапласа. В этом случае

$$f(x, y) = 0,$$

и значит

$$f_0(x) = f_1(x) = \dots = 0.$$

Уравнения (16) дают

$$P_1(x_1, \eta) = P_3(x, \eta) = \dots = 0.$$

Таким образом в разложении (13) выпадают все члены с нечетными степенями  $\lambda$ . Аналогичное обстоятельство имеет место при рассмотрении уравнения Пуассона с правой частью, не зависящей от  $y$ , когда

$$f_0(x) \neq 0, \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0.$$

К уравнениям именно такого типа сводятся задачи о кручении призматических стержней.

2. Случай симметричной области. Если область  $G_\lambda$  симметрична относительно оси  $x$ , то

$$\phi_1(x) = -\phi_2(x) = \phi_3(x)$$

и формулы (17) значительно упрощаются. Для  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  мы в этом случае получаем выражения:

$$\Omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\phi(x)},$$

$$\Omega_2(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2},$$

коэффициенты же  $P_k(x, \eta)$  будут таковы:

$$P_0(x, \eta) = \Omega_1\eta + \Omega_2,$$

$$P_1(x, \eta) = 0,$$

$$P_2(x, \eta) = \frac{1}{2}(f_0 - D_x^2\Omega_2)[\eta^2 - \phi^2] + \frac{1}{3!}(D_x^2\Omega_1)[\eta^3 - \eta\phi^2],$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{1}{3!}f_1[\eta^3 - \eta\phi^2],$$

.....

Отметим, между прочим, что выражения, полученные для коэффициентов, позволяют заменить в этом случае требование о регулярности функции  $\phi(x)$  более слабым требованием о регулярности функции  $\phi^2(x)$ .

3. Случай однородных граничных условий. Полагая

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0,$$

получаем

$$\Omega(x) = \Omega_2(x) = 0,$$

и формулы для  $P_k(x, \eta)$  принимают вид:

$$P_0(x, \eta) = 0,$$

$$P_1(x, \eta) = 0,$$

$$P_2(x, \eta) = \frac{1}{2}f_0[\eta^2 - \eta(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2],$$

$$P_3(x, \eta) = \frac{1}{2}f_1[\eta^3 - \eta(\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) + (\phi_1^2\phi_2 + \phi_1\phi_2^2)],$$

.....

Построением функций  $P_k(x, \eta)$  задача решения уравнения (10) с гранич-

ными условиями (11) формально разрешена. Имея выражение функции  $\Phi(x, \eta; \lambda)$ , мы можем получить и функцию  $\varphi(x, y)$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^2 P_2\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) + \dots + \\ &= \frac{1}{\lambda} \Omega y + \Omega_2 + \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \Omega_2) [y^2 - y\lambda(\phi_1 + \phi_2) + \lambda^2 \phi_1 \phi_2] + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{3!} (D_x^2 \Omega_1) [y^3 - y\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_1 \phi_2 + \phi_2^2) + \lambda^3(\phi_1^2 \phi_2 + \phi_1 \phi_2^2)] + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Это выражение показывает, между прочим, что мы можем получать регулярные при  $\lambda \rightarrow 0$  решения задачи только при условии

$$\Omega_2 = 0,$$

или, что то же,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x). \quad (19)$$

Если иметь в виду, что  $\Omega_1$  дает наклон сечений поверхности, полученной линейным интерполированием по  $\eta$  (или  $y$ ) граничных значений, то условие это представляется вполне естественным. Если условие (19) выполнено, то

$$\Omega_2 = \varphi(x)$$

и выражение для  $\varphi(x, y)$  принимает вид:

$$\varphi(x, y) = \varphi + \frac{1}{2} (f_0 - D_x^2 \varphi) [y^2 - y\lambda(\phi_1 + \phi_2) + \lambda^2 \phi_1 \phi_2] + \dots \quad (20)$$

IV. Займемся теперь вопросом о сходимости полученного разложения. Мы будем изучать решения нашей задачи как функции  $\lambda$  и в частности рассмотрим вопрос о приближенных решениях, пригодных при малых значениях  $\lambda$ . Такое направление исследования заставляет нас ограничиться случаем выполнения условия (19).

Желая получить приближенные решения задачи, пригодные при малых значениях  $\lambda$ , мы обследуем асимптотическую сходимость при  $\lambda \rightarrow 0$  частных сумм ряда (20) к решению задачи. С точки зрения приближенного решения это представляет бóльший интерес, чем изучение обычной сходимости ряда.

Мы будем предполагать существование решения  $\varphi(x, y)$  уравнения (4), удовлетворяющего условиям (6). Положим

$$\rho_n(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) - P_0\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda P_1\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \dots - \lambda^n P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \quad (21)$$

и вычислим оператор Лапласа от этого выражения. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2} = r_{n-2}(x, y) - \lambda^{n-1} D_x^2 P_{n-1}\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda^n D_x^2 P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right), \quad (22)$$

где

$$r_{n-2}(x, y) = f(x, y) - \sum_{k=0}^{n-2} f_k(x) y^k.$$

Кроме того, функция  $\rho_n(x, y; \lambda)$  обращается в нуль на контуре области  $G_\lambda$ . Обозначим правую часть уравнения (22) через  $q_n(x, y; \lambda)$ . Перед

нами стоит задача оценить функцию  $\rho_n(x, y; \lambda)$  по значениям  $q_n(x, y; \lambda)$ . Это делается легко на основании следующей леммы.

**ЛЕММА.** Если функция  $F^*(x, y)$  обращается в нуль на границе области  $G^*$  и удовлетворяет внутри нее уравнению

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} = -M,$$

то для всякой функции  $F(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x, y),$$

в области  $G$ , являющейся частью области  $G^*$  и обращающейся в нуль на границе этой области  $G$ , имеем

$$|F(x, y)| < |F^*(x, y)|$$

внутри и на границе  $G$ , если только

$$|f(x, y)| < M$$

в этой области и на ее границе<sup>1</sup>.

Указанная лемма может быть дана еще и в такой форме: при указанных в лемме условиях

$$|F(x, y)| < \frac{M}{2} |\phi(x, y)|,$$

где  $\phi(x, y)$ —функция напряжений при кручении для любой области, содержащей область  $G$ . Тожественность этой формулировки с преж-

<sup>1</sup> Доказательство этой леммы совершенно элементарно. На основании теоремы акад. С. А. Чаплыгина [8] имеем

$$F^*(x, y) > 0$$

внутри  $G^*$ , а значит и на границе  $G$ . Построим вспомогательную функцию  $\Phi(x, y)$ , определяемую требованиями:

$$1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -M,$$

$$2) \Phi(x, y) = 0 \text{ на границе } G.$$

Очевидно, что

$$\Phi(x, y) < F^*(x, y)$$

внутри и на границе  $G$ . образуем разность

$$\Phi_1(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y).$$

Функция  $\Phi_1(x, y)$  обращается в нуль на границе  $G$  и для нее

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = f(x, y) + M > 0.$$

Но тогда по той же теореме С. А. Чаплыгина

$$\Phi_1(x, y) < 0$$

внутри  $G$ . Значит

$$F(x, y) < \Phi(x, y) < F^*(x, y).$$

Чтобы получить оценку снизу, достаточно рассмотреть вместо  $F^*(x, y)$  функцию  $-F^*(x, y)$ . Аналогично будем иметь:

$$F(x, y) > -F^*(x, y).$$



ней становится очевидной, если мы вспомним, что функция  $\psi(x, y)$  определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2$$

и обращается в нуль на границе области. Последняя формулировка представляет большое удобство в приложениях в виду того, что задача кручения решена для многих областей и тем самым, следовательно, разрешен вопрос о создании эффективных мажорант для частей этих областей. В частности, например, весьма удобным во многих случаях является мажорирование при помощи эллипса, охватывающего данную область  $G$ .

Так как для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мы имеем

$$\psi(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

то для функции  $F(x, y)$  получается оценка

$$|F(x, y)| < \frac{Ma^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (23)$$

или

$$|F(x, y)| < \frac{Ma^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}. \quad (23')$$

Здесь  $a$  и  $b$  мы можем считать полуосями наименьшего эллипса, описанного около области  $G$ .

Применим эти соображения к нашему случаю. Мы имеем

$$q_n(x, y; \lambda) \leq |r_{n-2}| + \lambda^{n-1} \left| D_x^2 P_{n-1} \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| + \lambda^n \left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (24)$$

Оценивая первое слагаемое правой части, получаем

$$|r_{n-2}(x, y)| \leq \lambda^{n-1} \{ |\eta^{n-1} f_{n-1}(x)| + \lambda |\eta^n f_n(x)| + \dots \} < \lambda^{n-1} g_{n-2}, \quad (25)$$

так как по предположению ряд (8) сходится абсолютно в области  $G_1$ . Что касается второго и третьего слагаемого правой части неравенства (24), то мы выделим из них множители

$$\begin{aligned} \left| D_x^2 P_{n-1} \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| &= \left| D_x^2 P_{n-1}(x, \eta) \right|, \\ \left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| &= \left| D_x^2 P_n(x, \eta) \right|. \end{aligned}$$

Эти множители, рассматриваемые как функции  $x$ , суть функции регулярные внутри и на границе области  $G_1$ , а как функции  $\eta$  — просто многочлены. Во всяком случае мы будем иметь в области  $G_1$

$$|D_x^2 P_n(x, \eta)| < p_n,$$

а значит и

$$\left| D_x^2 P_n \left( x, \frac{y}{\lambda} \right) \right| < p_n \quad (26)$$

в области  $G_\lambda$  и притом равномерно относительно  $\lambda$ . Используя оценки (25) и (26), получим из неравенства (24)

$$|q_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n-1} [q_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n].$$

Применим теперь приведенную выше лемму. Пусть эллипс с полуосями  $\alpha$  и  $\beta$  содержит внутри себя область  $G_1$ . Тогда, очевидно, можно подобрать эллипс с полуосями  $\alpha$  и  $\beta\lambda$ , который будет содержать область  $G_\lambda$ , и мы будем иметь согласно (23')

$$|\rho_n(x, y; \lambda)| < \lambda^{n+1} \frac{[g_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n] \alpha^2 \beta^2}{2(\alpha^2 + \lambda^2 \beta^2)} \quad (n \geq 2). \quad (27)$$

Для  $n=0$  оценка не получается из этой формулы, но легко может быть получена непосредственно. В самом деле

$$\rho_0(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) - P_0 \left( x, \frac{y}{\lambda} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y^2} = f(x, y) - \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}, \quad (22')$$

так как согласно первому уравнению (16)

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = 0.$$

Из уравнения (22'), проводя оценку, подобную (27), получим:

$$|\rho_0(x, y; \lambda)| < \lambda^2 \frac{[g + p_0] \alpha^2 \beta^2}{2(\alpha^2 + \lambda^2 \beta^2)}, \quad (27')$$

где

$$g = \max |f(x, y)|$$

в области  $G_1$ .

Формулы (27) и (27') решают вопрос об асимптотической сходимости разложения (20), так как из них следует, что при  $\lambda \rightarrow 0$  будем иметь для любого  $n$  стремление к нулю  $\rho_n(x, y; \lambda)$ . Случай  $n=1$  специального рассмотрения не требует, так как  $P_1(x, \eta) = 0$ .

V. Рассмотрим, в качестве примера приложения описанного выше метода, задачу о кручении призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено кривой

$$y^2 = \lambda^2 x(1-x)^2. \quad (28)$$

Решение задачи кручения для такого стержня представляет значительный практический интерес в виду большого сходства контура (28) с винтовыми и крыловыми симметричными профилями (фиг. 2), и потому эта задача служила предметом исследования многих ученых, в том числе и Дэнкана [4], который развил весь метод «параметра толщины», главным образом в связи с ней. Задача кручения, как уже было указано, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2$$

с граничным условием  $\varphi = 0$  на контуре области, заданном в данном случае уравнением (28). Применяя метод, развитый выше, мы должны положить в полученных ранее формулах:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_2(x) = 0, \\ \psi_1(x) &= -\psi_2(x) = \psi(x) = \sqrt{x(1-x)}, \\ \psi^2(x) &= x(1-x)^2. \end{aligned}$$

Мы будем в данном случае иметь симметричную область, однородные граничные условия и в качестве правой части уравнения, подлежащего решению,

$$f(x, y) = -2,$$

т. е.

$$f_0(x) = -2, f_k(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Все это приводит к весьма простым выражениям для  $P_n(x, \eta)$ :

$$\left. \begin{aligned} P_0(x, \eta) &= 0, \\ P_1(x, \eta) &= 0, \\ P_2(x, \eta) &= \psi^2(x) - \eta^2, \\ P_3(x, \eta) &= 0, \\ P_4(x, \eta) &= \frac{1}{2} [D^2 \psi^2(x)] [\psi^2(x) - \eta^2], \\ P_5(x, \eta) &= 0, \\ P_6(x, \eta) &= \frac{1}{4} \left\{ \psi^2(x) \cdot D^4 \psi^2(x) + 2D^3 \psi^2(x) \cdot D \psi^2(x) + \right. \\ &\quad \left. + [D^2 \psi^2(x)]^2 \right\} [\psi^2(x) - \eta^2] - \frac{1}{24} [D^4 \psi^2(x)] [\psi^4(x) - \eta^4]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Выражения эти были даны в нашей заметке<sup>[5]</sup>. Подставляя сюда

$$\psi^2(x) = x(1-x)^2,$$

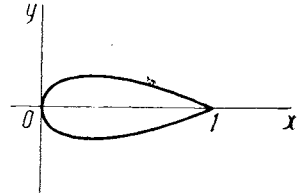
получаем

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 0, \\ P_1 &= 0, \\ P_2 &= x - 2x^2 + x^3 - \eta^2, \\ P_3 &= 0, \\ P_4 &= (3x - 2)(x - 2x^2 + x^3 - \eta^2), \\ P_5 &= 0, \\ P_6 &= (18x^2 - 24x + 7)(x - 2x^2 + x^3 - \eta^2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и в качестве решения будем иметь согласно формуле (18) выражение

$$\varphi(x, y) = [\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \lambda^2(3x - 2)[\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \lambda^4(18x^2 - 24x + 7)[\lambda^2(x - 2x^2 + x^3) - y^2] + \dots, \quad (31)$$

полученное Дэнканом ([4], стр. 16).



Фиг. 2

Рассмотрим вопрос о точности тех приближенных решений, которые получаются из этого разложения при сохранении в нем одного, двух или трех членов. Для того чтобы это сделать, нам придется оценить функции  $\rho_n(x, y; \lambda)$  при  $n = 2, 4, 6$ . Для оценки мы можем воспользоваться формулой (27), подсчитав предварительно константы

$$p_n = \max_{G_1} |D_x^2 P_n(x, \eta)| \quad (n = 2, 4, 6).$$

Простые вычисления дают

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= 4, \\ p_4 &= 14, \\ p_6 &= 52. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Что касается  $g_n$ , то очевидно, что  $g_n = 0$  для  $n \geq 1$ . Кроме того, легко видеть, что круг

$$y^2 - x(1-x) = 0 \quad (33)$$

охватывает область  $G_1$ , ограниченную кривой

$$y^2 - x(1-x)^2 = 0, \quad (34)$$

и потому мы можем положить в оценке (27)

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} |\rho_2| &< \frac{1}{2} \lambda^4, \\ |\rho_4| &< \frac{7}{4} \lambda^6. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Формулы (36) дают возможность весьма легко оценить точность, достигаемую при сохранении в формуле (31) одного или двух членов. Мы воспользуемся полученными результатами для оценки точности приближенных формул для жесткости на кручение  $T$ , которая, как уже указывалось выше, определяется равенством:

$$T = 2 \int \int_{G_\lambda} \varphi(x, y) dx dy. \quad (37)$$

Подставляя вместо  $\varphi(x, y)$  выражение (31) и интегрируя по области  $G_\lambda$ , будем иметь:

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \left[ 1 - \frac{11}{13} \lambda^2 + \lambda^4 + \dots \right], \quad (38)$$

что совпадает с вычислениями Дэнкана.

Оценим погрешность, допускаемую нами при сохранении первых членов этой формулы. Сохраняя один член, будем иметь:

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 + R_2. \quad (39)$$

Здесь введено обозначение

$$R_n = 2 \int \int_{G_\lambda} \rho_n(x, y; \lambda) dx dy.$$

Для оценки  $R_n$  мы воспользуемся формулой (23). Очевидно, будем иметь подобно (27)

$$|\rho_n(x, y; \lambda)| < \frac{\lambda^{n-1} [g_{n-2} + p_{n-1} + \lambda p_n]}{2} \phi(x, y),$$

где  $\phi(x, y)$  — функция кручения для эллипса  $\bar{G}_\lambda$ ,  
 $y^2 - \lambda^2 x(1-x) = 0$ .

Но тогда

$$|R_n| < \lambda^{n-1} \frac{g_{n-2} + \lambda p_{n-1} + p_n}{2} T_0, \quad (40)$$

где  $T_0$  — жесткость кручения для эллипса  $\bar{G}_\lambda$ :

$$T_0 = 2 \iint_{\bar{G}_\lambda} \phi(x, y) dx dy = \frac{\pi \lambda^3}{16(1+\lambda^2)}.$$

Подставляя это значение в неравенство (40) и учитывая, что при  $n = 2, 4, 6$  будет

$$g_{n-2} = p_{n-1} = 0,$$

получим:

$$|R_n| < \lambda^{n+3} \frac{\pi p_n}{32(1+\lambda^2)},$$

или, несколько увеличивая правую часть,

$$|R_n| < 0.1 p_n \lambda^{n+3}.$$

Эта формула дает:

$$\begin{aligned} |R_2| &< 0.4 \lambda^5, \\ |R_4| &< 1.4 \lambda^7, \\ |R_6| &< 5.2 \lambda^9. \end{aligned}$$

Чтобы оценить точность формулы (39), найдем относительную погрешность

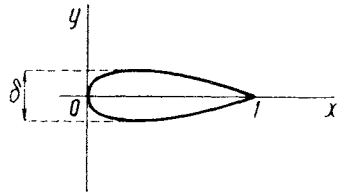
$$\Delta_2 = \frac{3465}{256} \lambda^{-3} \cdot 0.4 \lambda^5 = 5.4 \lambda^2. \quad (41)$$

Если мы желаем получить при помощи формулы (39) величину  $T$  с точностью в 1%, то по формуле (41) значения  $\lambda$  должны удовлетворять неравенству

$$\lambda < 0.043. \quad (42)$$

Для того чтобы сделать этот результат более наглядным, мы можем заметить, что толщина  $\delta$  нашего профиля (фиг. 3) дается формулой:

$$\delta = \frac{4\sqrt{3}}{9} \lambda = 0.770 \lambda.$$



Фиг. 3

Подставляя сюда  $\lambda$  из неравенства (42), получаем

$$\delta < 0.033.$$

Это последнее неравенство показывает, что формула

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \quad (43)$$

дает относительную погрешность, заведомо не превосходящую 1% лишь для очень тонких профилей, толщина которых не превосходит при-

мерно 0.03 их длины. Этот результат разрешает и вопрос о точности формулы Гриффита, так как в применении к данному профилю формула Гриффита как раз и дает (43).

Таким образом приходится признать, что формулы типа Гриффита могут быть применимы лишь для исключительно тонких профилей.

Полагая

$$T = \frac{256}{3465} \lambda^3 \left[ 1 - \frac{11}{13} \lambda^2 \right] + R_4, \quad (44)$$

мы получаем аналогично (40)

$$|R_4| < 1.4 \lambda^7.$$

Относительная погрешность для  $\lambda < 1$  будет

$$\Delta_4 < 18.94 \lambda^4$$

и из требования

$$\Delta_4 < 0.01$$

мы получаем

$$\lambda < 0.152.$$

Это соответствует профилям относительной толщины

$$\delta < 0.117,$$

что уже достаточно для большинства практически интересных случаев.

Л. С. Лейбензон, исследуя задачу о кручении рассматриваемого профиля методом Ритца [7], получил для жесткости  $T$  формулу:

$$T = 0.07387 \frac{\lambda^3}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2}.$$

Нами указывалось [8], что эта формула дает первые два члена разложения (38), если заменить коэффициент 0.07387 через

$$\frac{256}{3465} = 0.07388.$$

Таким образом все сказанное относительно точности формулы (44) применимо и к этой формуле. Если писать выражение для  $T$  в виде

$$T \approx \frac{256}{3465} \frac{\lambda^3}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2}, \quad (45)$$

то можно предполагать, что оно будет даже несколько точнее, чем (44), так как при разложении этого выражения в ряд по степеням  $\lambda$  мы получим еще члены и кроме второго, и они могут уменьшить расхождение. При малых  $\lambda$  это будет именно так, в виду одинакового знака у члена с  $\lambda^4$  в формуле (38) и в разложении по степеням  $\lambda$  дроби (45).

## ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Тимошенко С. П., Курс теории упругости, ч. I, СПб, 1914.
- <sup>2</sup> Griffith, Preliminary Report on the twisting of Propeller Blades. R & M., № 454 (1918).
- <sup>3</sup> Prescott J., Applied Elasticity, 1924.
- <sup>4</sup> Duncan, W.J., Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes, R. & M., № 1444 (1932).
- <sup>5</sup> Панов Д. Ю., Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных, ДАН, Новая серия, т. III (VIII), 1935, № 2 (62), стр. 63—66.
- <sup>6</sup> Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, т. III, стр. 77, 1935.
- <sup>7</sup> Лейбензон Л. С., О расчете на кручение лопастей пропеллера, Труды ЦАГИ, вып. 8., 1924.
- <sup>8</sup> Панов Д. Ю., О кручении стержней, поперечное сечение которых ограничено кривой (печатается).

**D. PANOV. SOLUTION DES PROBLÈMES LIMITES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR LES DOMAINES LONGS ET ÉTROITS**

## RÉSUMÉ

Le présent article a pour but l'étude d'une méthode pour résoudre les problèmes limites des équations aux dérivées partielles dans les cas des domaines longs et étroits. Cette méthode utilisée par W. Duncan a pour base le développement de la solution suivant les puissances d'un paramètre  $\lambda$  introduit dans l'équation du contour du domaine et tel que l'épaisseur du domaine tend vers zéro avec  $\lambda$ . On considère en détail le cas de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

en supposant que les valeurs limites de  $\varphi$  sur le contour du domaine sont données. On démontre la convergence asymptotique pour les petites valeurs de  $\lambda$  de la série formellement construite

$$\varphi(x, y) = P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \dots + \lambda^n P_n + \dots$$

On voit que dans certaines conditions on a

$$\left| \varphi(x, y) - \sum_{k=1}^n P_k \lambda^k \right| < \lambda^{n+1} C_n$$

à l'intérieur et sur le contour du domaine considéré,  $C_n$  étant une constante que l'on peut effectivement déterminer et qui dépend du domaine, du second membre de l'équation (1) et de l'indice  $n$ . En cas d'exemple on considère en détail la solution du problème de la torsion d'une tige, limitée par une courbe

$$y = k \sqrt{x(1-x)}$$

et l'on évalue la précision des solutions approchées obtenues en conservant un, deux ou trois termes de la série.