Л. Е. ДИКСОН

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

LINEAR ALGEBRAS

BY

L. E. DICKSON, Ph. D.

PROFESSOR OF MATHEMATICS
IN THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Л. Э. ДИКСОН

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ

Перевод с английского В. В. НИКИШЕВА

ОНТИ **НКТП**

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

ХАРЬКОВ **1935**

Библиографическое описание этого издания помещено в «Літописі Українського Друку» «Картковому Репертуарі» и других указателях Украинской Книжной Палаты

23-5-4

Типо-лито-цинкография ДНТВУ
Харьков, Сузд. ряди, 18/20.
Уполномочен. Главлита № 878.
Зак. № 01260

Ответственный редактор К. Р. Иршенко
Техоформление — Н. И. Соколовский

Тираж 3.000. 5 печатн. листов. В печатн. листе 51.000 зн. Бумага 62 X 94.
Вес 1 метр. стопы 38 кг.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория линейных ассоциативных алгебр (или замкнутых систем гиперкомплексных чисел) является по существу теорией пар взаимных линейных групп (§ 52) или теорией некоторых рядов матриц или билинейных форм (§ 53). Начиная с открытия Гамильтоном (Hamilton) кватернионов семьдесят лет тому назад, быстро возрастало число сочинений относительно этих разнообразных теорий. Французская математическая энциклопедия посвящает более ста страниц соотношениям и изложениям результатов по этому предмету (с добавлением статей об обыкновенных комплексных числах). Однако, предмет богат не только в отношении объема, но также отличается большой глубиной, простираясь в самую основу новой алгебры.

Цель этого труда — дать элементарное введение в общую теорию линейных алгебр, включая также неассоциативные алгебры. Он сохраняет характер ряда лекций, прочитанных в Чикагском университете в весеннем квартале 1913 года. Предмет изложения представлен с точки зрения линейных алгебр. Здесь не употребляется терминология, или теоремы, специально относящиеся к теорий билинейных форм, матриц или групп (особняком от курса стоят §§ 52–54, которые подробно трактуют об отношениях линейных алгебр к указанным предметам).

I часть устанавливает определения, конкретные иллюстрации, и важные теоремы, допускающие краткое и элементарное доказательство. Здесь дается очень элементарное доказательство теоремы Фробениуса (Frobenius), которая показывает специфическое место кватернионов в алгебрах. Замечательные свойства алгебры Кэли (Cayley) были получены сначала в простой форме, без вычислений. Будут представлены также другие новые результаты и новые точки зрения в этой вступительной части.

Представляя в частях II и IV главные теоремы общей теории, необходимо было сделать выбор между изложениями Молина (Molien), Картана (Cartan) и Веддерборна (Wedderburn) (изложение Фробениуса основано на билинейных формах и потому лежит вне нашего плана изложения). Мы не представили теорию Молина отчасти потому, что его более поздние доказательства зависят от теории групп, и отчасти потому, что некоторые из его более ранних доказательств не совсем точно проведены относительно их методов. Более общая статья Веддерборна основана скорее на абстрактном исчислении комплексных величин, сравнимом с теориею абстрактных групп (§ 61). Зато она (статья) получает сравнительно быстро важные теоремы не только для обычных случаев комплексных или реальных алгебр, но также для алгебр, числовые координаты которых находятся над некоторым полем (установленным в § 56).

Так как наша трактовка общей теории должна быть элементарной, конкретной и пользоваться лишь немногими легко воспринимаемыми понятиями, то мы ограничили наше изложение, (в части II) классическим случаем алгебр, числа которых имеют обыкновенные комплексные координаты, и дали осторожный пересмотр теории, представленной в фундаментальном труде Картана. Параллельно с общей теорией рассматривается иллюстративный пример, хотя и независимо, но в духе всей теории. В то время как благодаря этому мы теряем обобщение на общее поле, мы получаем важные нормализованные ряды единиц, данные первоначально Шефферсом (Scheffers) с некоторыми ограничениями, и этим достигаем аналогий относительно важных теорий о канонических формах групп линейных преобразований или рядов матриц, или билинейных форм.

Чикаго, 1914 г., май. Л. Э. Диксон

ЧАСТЬ I

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ИЛЛЮСТРАЦИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Арифметическое определение обыкновенных комплексных чисел. Последующая чисто арифметическая теория пар (a, b) реальных чисел отличается лишь в несущественных чертах от первоначальной теории В. Р. Гамильтона (W. R. Hamilton)[1]. Две пары (a, b) и (c, d) называются равными тогда и только тогда, когда $a = c,\ b = d$. Сложение, вычитание и умножение двух пар определяются формулами[2]

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d),\\(a,b)-(c,d)&=(a-c,b-d),\\(a,b)\ (c,d)&=(ac-bd,ad+bc).\end{aligned}\tag{1}$$

Сложение очевидно коммутативно и ассоциативно:

$$x+x'=x'+x,\qquad (x+x')+x''=x+(x'+x''0,\tag{2}$$

где x, x', x'' — некоторые пары. Умножение — коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно:

$$xx'=x'x,\qquad (xx')x''=x(x'x''),\tag{3}$$

$$x(x'+x'')=xx'+xx'',\qquad (x'+x'')x=x'x+x''x.\tag{4}$$

Деление определяется, как действие, обратное умножению. Деление, исключая случай, где делитель есть $(0, 0)$ всегда возможно и однозначно

$$\frac{(c,d)}{(a,b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right).\tag{5}$$

[1]Trans. Irish. Acad., том 17 (1837), стр. 293; Lectures on Quaternions (лекции о кватернионах), 1853, предисловие.

[2]Каждая пара (a, b) однозначно определяет вектор от начала O до точки A с прямоугольными координатами a, b. Сумма двух векторов из O до A и до точки $C = (c, d)$ должна быть определена, как вектор из O до четвертой вершины S параллелограмма, имеющего своими сторонами прямые OA и OC. Координаты S есть $a + c, b + d$. Вычитание векторов — действие, обратное сложению, таким образом $OS - OA = OC$. Определяя произведение векторов из O к A и C, мы пользуемся первоначально полярными координатами r, Θ и r', Θ' точек A и C. Точка $OA \cdot OC$ должна быть определена, как вектор из O до точки P с полярными координатами rr', $\Theta + \Theta'$. Так как A имеет прямоугольные координаты $a = r\cos\Theta$, $b = r'\cos\Theta'$, и то же имеет место для C и P, то выражения $\cos(\Theta + \Theta')$ и $\sin(\Theta + \Theta')$ приводят к третьему соотношению (1) между прямоугольными координатами A, C, P.

В частности, мы имеем

$$(a,0) \pm (c,0) = (a \pm c, 0), \qquad (a,0)\ (c,0) = (ac,0)$$

$$\frac{(c,0)}{(a,0)} = \left(\frac{c}{a}, 0\right), \quad \text{если} \quad a \neq 0.$$

Значит пары $(a,0)$ комбинируются, как этого требуют выше определенное сложение, умножение и проч., точно так, как реальные числа a комбинируются при помощи обыкновенного сложения, умножения и т. д. Не впадая в противоречие, мы можем и должны нашу систему пар (a,b), предмет выше введенных определений сложения и т. д., подчинить следующему предположению[3], а именно: пара $(a,0)$ должна быть реальным числом a. Ради краткости пишем i для $(0,1)$. Тогда

$$\begin{gathered} i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1, \\ (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + (b,0)(0,1) = a + bi. \end{gathered}$$

Получающийся в результате символ $a + bi$ называется комплексным числом. Соотношения (1) и (5) принимают теперь хорошо знакомые формы

$$\begin{gathered} (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i, \\ (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \\ \frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\, i, \end{gathered} \tag{6}$$

где, для последнего, $a + bi \neq 0$, т. е. a и b оба одновременно не являются нулями.

2. Числовые поля. Ряд комплексных чисел называется числовым полем (областью рациональности или телом), если в ряде можно однозначно производить рациональные операции. Другими словами, сумма, разность, произведение и частное (делитель не должен быть нулем) любых двух равных или различных чисел ряда должны быть числами, принадлежащими к ряду.

Принимая во внимание (6), мы видим, что все комплексные числи $a+bi$ образуют поле. С другой стороны, все реальные числа образуют поле. Ряд всех рациональных чисел есть поле, но ряд всех целых чисел не поле.

3. Матрицы. Понятие матрицы[4] дает прекрасное введение в предмет этого труда и сверх того очень важно в общей теории. Мы будем рассматривать только квадратные матрицы из n строк по n элементов в каждой. Например, если $n = 2$, то

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{7}$$

[3]Совершенно также натуральные числа заключаются среди целых, целые — среди рациональных, а последние — среди реальных чисел, определенных посредством действий с ними. Следуя тому же ходу идей, 1 часто употребляется для обозначения главной единицы (§ 7, § 11), и число e для скаларной матрицы S_e (§ 4, второе подстрочное примечание).

[4]Cayley (Кэли), Phil. Trans. London, том 148 (1858), стр. 17–37 (= Coll. Math. Papers. II, стр. 475, 604).

матрицы, причем элементы первой матрицы m: a, b, c, d. Каждый элемент может быть некоторым числом из данного числового поля F. Мы будем говорить, что m и μ равны тогда и только тогда, когда их соответствующие элементы равны, $a=\alpha$ и т. д. Сложение и умножение определяется так:

$$m+\mu=\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}, \qquad m\mu=\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Элементы i-той строки и j-той колонки произведения есть сумма произведений каждого элемента i-той строки первой матрицы на соответствующий элемент j-той колонки второй матрицы, т. е. первого на первый, второго на второй и т. д. Это правило удерживается также для матриц из n^2 элементов. Из четырех возможных правил, выражающих произведение двух детерминантов n-го порядка, как детерминант n-го порядка, вышеприведенное правило — единственное, сохраняющееся также для матриц.

За исключением (3_1), законы (2)–(4) для сложения и умножения сохраняются и для матриц. Так как произведение (8_2) вообще изменится, если переставить латинские и греческие буквы, то умножение матриц обыкновенно не коммутативно. Таким образом мы видим, что следует различать два различных случая деления матриц. В заключение отметим, что

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} m = m \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В частности, единичная матрица

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

имеет то свойство, что $Im=mI=m$ для всякой матрицы m. Под матрицей, обратной данной m с детерминантом $\Delta=|m|$ неравным нулю, понимают

$$m^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{\Delta} & \dfrac{-b}{\Delta} \\ \dfrac{-c}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

если $n=2$; когда же $n\geq 2$, мы употребляем, как элемент i-той строки и j-той колонки, частное от деления минора элемента j-той строки и i-той колонки m на Δ.

Тогда

$$mm^{-1}=m^{-1}m=I. \tag{12}$$

Если дано две матрицы m и p такие, что $|m|\neq 0$, то мы можем найти одну и только одну матрицу $\mu=m^{-1}p$ такую, что $m\mu=p$, также одну и только одну матрицу $\nu=pm^{-1}$ такую, что $\nu m=p$. Эти два способа деления p на m должны быть названы *правым* и *левым делением.*

Напротив, если $|m|=0$, то не существует матрицы μ, для которой было бы $m\mu=I$, ибо это заставило бы предположить $0\,|\mu|=|I|=1$. Аналогично нет и такой матрицы ν, для которой было бы $\nu m=I$.

Значит, правое и левое деления, каждое в отдельности, всегда возможны и однозначны, тогда и только тогда, когда детерминант m не нуль.

Сложение, вычитание, умножение и деление матриц с элементами из поля F приводит к матрицам с элементами из F. Следовательно, мы можем говорить о матричной алгебре над полем F. Когда F — поле всех комплексных чисел, поле всех реальных чисел или поле всех рациональных чисел, то мы имеем комплексную, реальную или рациональную матричную алгебру квадратных матриц из n^2 элементов.

4. Матричная алгебра, рассматриваемая как линейная алгебра[5]**.** Положивши $n = 2$, рассмотрим следующие частные матрицы:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Шестнадцать произведений из них по два есть

$$e_{ij}e_{jk} = e_{ik}, \qquad e_{ij}e_{tk} = 0 \quad (t \neq j). \tag{14}$$

Если m матрица и e число, то мы определим произведение[6] em или me, как матрицу, у которой каждый из элементов представляет произведение e на соответствующий элемент из m

$$e\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В силу (13), матрицы (7) и (8) могут быть выражены в виде

$$\left.\begin{aligned} m &= ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} \\ \mu &= \alpha e_{11} + \beta e_{12} + \gamma e_{21} + \delta e_{22} \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} m + \mu = (a+\alpha)e_{11} + (b+\beta)e_{12} + (c+\gamma)e_{21} + (d+\delta)e_{22}, \\ m\mu = (a\alpha + b\gamma)e_{11} + (a\beta + b\delta)e_{12} + (c\alpha + d\gamma)e_{21} + (c\beta + d\delta)e_{22}. \end{gathered} \tag{17}$$

Последнее может быть также найдено из (16) при помощи соотношений (14).

Ряд гиперкомплексных чисел $ae_{11} + \ldots + de_{22}$, в которых $a, \ldots, d$ располагаются независимо над полем F, и для которых сложение и умножение определены (17), называется линейной ассоциативной алгеброй над F с четырьмя единицами $e_{11}, \ldots, e_{22}$, подчиненными таблице умножения (14).

Пусть для всякого n e_{ij} является квадратной матрицей из n^2 элементов, из которых равны нулю все, кроме элемента i-той строки и j-той колонки, каковой есть единица. Тогда выполняются соотношения (14). Мы получаем линейную ассоциативную алгебру с n^2 единицами e_{ij}.

5. Общее определение гиперкомплексных чисел и линейных алгебр[7]**.** Обобщим понятие пар § 1 и, с изменением обозначений, понятие четверок (7). Рас-

[5] Для справок смотри § 13.

[6] Поэтому в произведении (9) мы можем заменить «скалярную матрицу» $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = S_e$ числом e. Это получается интуитивно, если мы заметим, что $S_e = eI$. Так как $S_e + S_f = S_{e+f}$; $S_eS_f = S_{ef}$ и т. д., то алгебра всех скалярных матриц над полем F с абстрактной точки зрения тождественна с F. Эта замена S_e через e подобна замене $(a, 0)$ на a в § 1.

[7] Гамильтон. Лекции о кватернионах (Hamilton's. Lectures on Quaternions) 1853. Введение. Для определений посредством независимых постулатов, смотри Диксона (Dickson), Trans. Amer. Math. Soc., том 4 (1903), стр. 21; том 6 (1905), стр. 344.

смотрим ряд всех *n-аггрегатов* $(x_1, \ldots, x_n)$, *координаты* которых $x_1, \ldots, x_n$ независимо располагаются над данным числовым полем F.

Два n-аггрегата называются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Сложение и вычитание n-аггрегатов определяется посредством

$$(x_1, \ldots, x_n) \pm (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n). \tag{18}$$

Произведение некоторого числа ρ из поля F и некоторого n-аггрегата

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

определяется посредством

$$\rho x = (\rho x_1, \ldots, \rho x_n). \tag{19}$$

n единиц определяется так:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \; \ldots, \; e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Отсюда каждый n-аггрегат x может быть определен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Мы будем называть x *гиперкомплексным* числом, или коротко числом. В силу определения равенства n-аггрегатов, x и

$$x' = x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n$$

равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ... , $x_n = x'_n$. В частности $x = 0$ предполагает, что каждое $x_i = 0$. Отсюда единицы $e_1, \ldots, e_n$ — линейно-независимы относительно поля F.

Постулируется, что каждые два таких числа x и x' могут быть соединены посредством действия, называемого умножением, подчиняющимся дистрибутивным законам (4):

$$xx' = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x'_j e_i e_j,$$

и при этом произведение xx' есть число $\sum z_i e_i$ с координатами в F. Необходимые условия для последнего свойства таковы

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k \qquad (i, j = 1, \ldots, n; \quad \gamma \in F). \tag{20}$$

Но эти условия и достаточны, так как они предполагают

$$xx' = y \equiv \sum y_k e_k, \qquad y_k = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x'_j \gamma_{ijk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Свойства (18) и (19) n-аггрегатов дают

$$x \pm x' = \sum_{i=1}^{n} (x_i \pm x'_i) e_i, \qquad \rho x = x\rho = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i) e_i, \tag{22}$$

если ρ в F. О ряде всех чисел $\sum x_i e_i$ с координатами в F, чисел, составленных при умножении вида (21), при сложении и вычитании вида (22_1), и при умножении на число ρ из F вида (22_2), говорят, что он образует линейную алгебру (или систему гиперкомплексных чисел) над полем F, с единицами $e_1, \ldots, e_n$ (линейно-независимыми относительно F) и таблицей умножения (20). n^3 чисел γ_{ijk} называются постоянными умножения. Ни коммутативный, ни ассоциативный закон умножения не предполагаются.

Например, ряд всех обыкновенных комплексных чисел $a+bi$ образует бинарную линейную алгебру над полем F всех реальных чисел, с единицами 1 и i, подчиняющимися таблице умножения:

$$1^2 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad i^2 = -1.$$

В этой алгебре (§ 1) умножение коммутативно и ассоциативно. Алгебра является полем $F(i)$ и может быть рассматриваема, как единичная алгебра над этим комплексным полем с единственной единицей 1.

В § 4 мы рассматривали линейную ассоциативную алгебру с четырьмя единицами.

6. Деление. Пусть дано два числа x и y линейной алгебры мы можем однозначно определить число x' алгебры так, чтобы $xx' = y$ давало n линейных уравнений таких, как в конце (21), разрешимых однозначно относительно $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, в поле F. Это будет тогда и только тогда, когда детерминант

$$\Delta(x) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ijk} \right| \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

отличен от нуля. В этом случае правое деление на x всегда возможно и однозначно.

Аналогично существует в алгебре единственное решение x' уравнения $x'x = y$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta'(x) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ijk} \right| \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

не равно нулю. В этом случае, левое деление на x всегда возможно и однозначно.

Мы будем называть $\Delta(x)$ правым детерминантом x, и $\Delta'(x)$ левым детерминантом x.

7. Главная единица (модуль). Алгебра может содержать число

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n,$$

называемое главной единицей или модулем, при том такое, что

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x \qquad \text{(для всякого числа } x \text{ алгебры)}. \tag{25}$$

Например, $\varepsilon = 1$ в бинарной алгебре всех комплексных чисел $a+bi$. Также $\varepsilon = e_{11}+e_{22}$ в матричной алгебре § 4.

Не может существовать другой главной единицы ε'. Говоря более обще, не существует новых чисел ε', для которых $x\varepsilon' = x$ для всякого x. Ибо, если бы имело место иное, то существовало бы равенство $\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon$, и в то же время по (252) для $x = \varepsilon'$ было бы $\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$, но отсюда $\varepsilon' = \varepsilon$.

Условия (25) выполняются тогда и только тогда, когда

$$e_j\varepsilon = \varepsilon e_j = e_j \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{25'}$$

Следуя Кронекеру (Kronecker) положим $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$. По (20) и принимая во внимание линейную независимость $e_1, \ldots, e_n$, мы видим, что (25′) эквивалентны с

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \gamma_{ijk} = \delta_{jk}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \gamma_{ijk} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, n). \tag{26}$$

Отсюда

$$\Delta'(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) = |\delta_{jk}| = 1. \tag{27}$$

Отсюда, если существует главная единица, то ни $\Delta(x)$, ни $\Delta'(x)$ не равны тождественно нулю для $x_1, \ldots, x_n$.

Для случая линейной ассоциативной алгебры легко доказывается, что, наоборот[8], если ни $\Delta(x)$, ни $\Delta'(x)$ не равны тождественно нулю, то алгебра имеет главную единицу. В самом деле, тогда существует число u, для которого ни $\Delta(u)$, ни $\Delta'(u)$ не нули. По § 6 тогда существует единственное число ε алгебры такое, что $u\varepsilon = u$, и однозначно определенное z, для которого $zu = x$, где x — произвольное число алгебры. Тогда, по ассоциативному закону,

$$\begin{aligned} x\varepsilon &= (zu)\varepsilon = z(u\varepsilon) = zu = x, \\ u(\varepsilon x) &= (u\varepsilon)x = ux, \quad \varepsilon x = x. \end{aligned}$$

Отсюда ε — главная единица. В такой алгебре всякое число x, для которого $\Delta(x) \neq 0$, имеет единственное обратное число. Ибо, если x^{-1} — единственное число, определенное посредством $xx^{-1} = \varepsilon$, то тогда $x^{-1}x = \varepsilon$, так как

$$x(x^{-1}x - \varepsilon) = \varepsilon x - x\varepsilon = 0.$$

Отсюда $x'x = \varepsilon$ предполагает $x' = x^{-1}$, как обнаруживается при умножении на x^{-1} справа, так что $\Delta'(x) \neq 0$ (§ 6).

Таким образом $\Delta(x) \neq 0$ предполагает $\Delta'(x) \neq 0$ и наоборот.

8. Преобразование единиц. Рассмотрим n чисел:

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} e_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{28}$$

в которых c — числа поля F такие, что

$$|c_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

[8] Г. Шефферс (G. Scheffers) Leipzig Berichte, том 41 (1889), стр. 293. Для коммутативных алгебр тоже установлено Вейерштрассом (Weierstrass), Göttingen Nachrichten, 1884, стр. 412.

Мы можем решить n уравнений и получить

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} E_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{29}$$

где t — числа F. Согласно (28) и (20), мы можем $E_i E_j$ выразить линейной функцией от e, и значит по (29) линейной функцией от E

$$E_i E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk} E_k \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Для всякого числа x алгебры

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} X_j E_j, \qquad X_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i. \tag{31}$$

Значит x может быть выражено одним способом, и, в силу линейной независимости $E_1, \ldots, E_n$ относительно F, только одним способом, как $\sum X_j E_j$, где X числа F. Взявши $E_1, \ldots, E_n$ за новые единицы, мы получим линейную алгебру над F с постоянными умножения Γ_{ijk}, которая называется преобразованной из первоначальной алгебры при преобразовании единиц (28) или (29). Эти две алгебры называются *эквивалентными* относительно линейного преобразования единиц в F.

9. Всякое число линейной алгебры является корнем уравнения. Всякие $n+1$ чисел линейной алгебры с n единицами над полем F — линейно-зависимы относительно F. Ибо, если первые n из $n+1$ чисел линейно-независимы относительно F, то $n+1$-ое число может быть выражено, как линейная функция от них с коэфициентами в F (§ 8).

Предполагая здесь, что умножение — ассоциативно, мы можем произведение i множителей A обозначить через A^i, где A — какое-нибудь число алгебры. Так как $A, A^2, \ldots, A^{n+1}$ линейно-зависимы, то A есть корень уравнения степени $\leq n+1$ с коэфициентами в F.

Если также алгебра имеет модуль ε, то тогда $\varepsilon, A, \ldots, A^n$ линейно-зависимы, и A есть корень уравнения степени $\leq n$ с коэфициентами в F.

Например, в случае линейной ассоциативной алгебры четырех единиц в § 4, $\varepsilon = e_{11} + e_{22}$ есть главная единица, и общее число m, данное в (161), является корнем для

$$m^2 - (a+d)m + (ad - bc)\varepsilon = 0.$$

10. Полиномы с единственной переменной. Алгебраическое тождество

$$f(x)g(x) \equiv p(x),$$

где функции $f(x)$ и т. д. являются полиномами от обыкновенной комплексной переменной с обыкновенными комплексными коэфициентами без членов, свободных от x, предполагает, что имеет место то же самое соотношение, когда x — число линейной ассоциативной алгебры. Действительно, член, заключающий в себе x^k в $f(x)g(x)$

получился при умножении члена с x^i в $f(x)$ на член с x^{k-i} в $g(x)$ и суммировании произведений для $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Но ассоциативный закон дает $x^i x^{k-i} = x^k$.

Наш вывод удерживается также для функций с членами, свободными от переменной x, если только алгебра имеет главную единицу ε, и она умножена на те члены соответствующего соотношения с гиперкомплексным числом x.

Так как ассоциативный закон предполагает $x^r x^s = x^s x^r$, то два полинома с гиперкомплексным числом x коммутативны.

11. Алгебры реальных кватернионов; их единственное место среди алгебр. Определим все линейные ассоциативные алгебры над полем реальных чисел так, что произведение равно нулю только тогда, когда один из сомножителей есть нуль. Это определение имеет очень существенный интерес и приносит важный результат для реальных простых алгебр (конец § 56).

Если x данное число $\neq 0$, то $xx' = 0$ предполагает, что $x' = 0$; аналогично, $x'x = 0$ предполагает, что $x' = 0$. Значит (§ 6), ни $\Delta(x)$, ни $\Delta'(x)$ не равны нулю, когда $x = 0$. Таким образом (конец § 7) алгебра содержит главную единицу, которую мы обозначим через 1. Если каждое число — реальное кратное 1, то алгебра является полем всех реальных чисел. Исключая этот случай, мы можем положить, что единицами являются $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$, где $n > 1$. Тогда (§ 9) всякое число A алгебры является корнем уравнения $p(x) = 0$ степени $\leq n$ с реальными коэфициентами. По основной теореме алгебры $p(x)$ равняется произведению $f_1(x)f_2(x)\cdots$ линейных или квадратных множителей с реальными коэфициентами. Тогда (§ 10), $f_1(A)f_2(A)\cdots = 0$. Таким образом, один множитель является нулем. Значит, всякое число алгебры есть корень квадратного уравнения с реальными коэфициентами.

Если $e^2 + 2re + s = 0$, то $(e+r)^2 = r^2 - s$. Значит, прибавив реальную константу к каждому e_i, мы можем положить, что квадрат каждой новой единицы e_i есть реальное число. Если e_1^2 — реальное число ≥ 0, то

$$0 = e_1^2 - r^2 = (e_1 - r)(e_1 + r), \qquad e_1 = \pm r,$$

принимая во внимание, что e_1 и 1 линейно-независимы. Таким образом $e_1^2 = -t^2$, где t — реальное число $\neq 0$. Положим $E_1 = \dfrac{e_1}{t}$. Тогда $E_1^2 = -1$. Если $n = 2$, то новые единицы есть 1, $E_1 = i$, и алгебра является системой обыкновенных комплексных чисел. Далее, пусть $n > 2$. Тогда мы можем положить, что единицами являются $1, I, J, \ldots$, где[9]

$$I^2 = -1, \quad J^2 = -1, \ \ldots \tag{32}$$

Так как $I \pm J$ — корень квадратного уравнения

$$(I+J)^2 \equiv -2 + IJ + JI = r(I+J) + r_1,$$
$$(I-J)^2 \equiv -2 - IJ - JI = s(I-J) + s_1,$$

где r, r_1, s, s_1 — реальны. Складывая, мы получаем

$$(r+s)I + (r-s)J + r_1 + s_1 + 4 = 0.$$

[9] Хотя $I^2 = J^2$, но не следует, что $(I-J)(I+J)$, $I = \pm J$.

Но $1, I, J$ — линейно-независимы относительно поля реальных чисел. Значит $r = s = 0$. Таким образом

$$IJ + JI = 2c \qquad (c \text{ — реальное}). \tag{33}$$

Произведение IJ — линейно-независимо от $1, I, J$ относительно поля реальных чисел. Так как, если

$$IJ = r + sI + tJ,$$

где r, s, t — реальны, то тогда

$$(I - t)\left(J + \frac{r + st}{t^2 + 1}I + \frac{rt - s}{t^2 + 1}\right) = 0,$$

тогда как ни один из множителей не равен нулю. Значит мы можем взять

$$IJ = K \tag{34}$$

четвертой единицей. В виду этого выбора K, мы не знаем, что $K^2 = -1$, как в (32). Но, по (32)–(34),

$$\begin{gathered} K^2 = I(JI)J = I(2c - IJ)J = 2cK - 1, \\ (K - c)^2 = c^2 - 1 < 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Ибо, если $c^2 \geq 1$, то $K - c$, а значит K было бы реальным.

Сделаем реальное преобразование единиц

$$i = I, \quad j = \frac{J + cI}{\sqrt{1 - c^2}}, \quad k = \frac{K - c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Тогда

$$ij = k, \qquad ji = -k.$$

По (35), $k^2 = -1$. По (32) и (33), $i^2 = -1$, $j^2 = -1$. Тогда ассоциативный закон дает

$$\begin{gathered} ik = i(ij) = -j, \qquad ki = (ij)i = -ik = j, \\ kj = (ij)j == -i, \qquad jk = j(ij) = -kj = i. \end{gathered}$$

Получающаяся таким образом алгебра, над полем реальных чисел, с четырьмя единицами $1, i, j, k$ и таблицей умножения

$$\left.\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \end{gathered}\right\} \tag{36}$$

называется алгеброй Q *реальных кватернионов*[10].

Наконец, мы предполагаем, что наша алгебра содержит число λ, не находящееся в этой под-алгебре Q. Так как λ удовлетворяет квадратному уравнению с реальными коэфициентами, то мы можем произвести, как в начале, число l, не из Q, такое, что $l^2 = -1$. По доказательству, ведущему к (33),

$$il + li = c_1, \quad jl + lj = c_2, \quad kl + lk = c_3,$$

[10] В. Р. Гамильтон (W. R. Hamilton), Trans. Irish. Acad., том 21 (1848) стр. 199 (1843); Лекции о кватернионах, 1853; Элементы кватернионов, 1866, и пр. В помощь памяти, можно заметить, что если читать x в циклическом порядке (так что за k следует ?), то произведение каждого на следующее есть следующее за вторым число.

где c — реальные константы. Тогда

$$lk = (li)j = (c_1 - il)j = c_1 j - i(c_2 - jl) = c_1 j - c_2 i + kl,$$
$$2kl = c_3 + c_2 i - c_1 j.$$

Помножим каждый член последнего на k слева. Таким образом

$$-2l = c_3 k + c_2 j + c_1 i.$$

Но l не в Q. Следовательно мы получили

Теорему[11]. *Единственными линейными ассоциативными алгебрами над полем реальных чисел, в которых, произведение равно нулю только при равенстве нулю хотя бы одного множителя, являются поле реальных чисел, поле обыкновенных комплексных чисел и алгебра реальных кватернионов.*

12. Простейшие алгебраические свойства реальных кватернионов. Чтобы показать, что умножение — ассоциативно, достаточно проверить (32), когда вместо каждого x взято i, j, k. Вместо того, чтобы разбирать все 27 случаев, достаточно, в виду симметрии (36), разобрать ряды iii, iij, iji, jii, ijk. Тогда $(ij)k = -1 = i(jk)$ и т. д.

Сопряженное q' кватерниона q определяется так:

$$q = x + yi + zj + wk, \qquad q' = x - yi - zj - wk.$$

Их произведение называется нормой q

$$N(q) = qq' = q'q = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Если $q \neq 0$, то $N(q) \neq 0$ и обратным для q является

$$q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\, q'.$$

Таким образом, если $q \neq 0$, то $qQ = q_1$ имеет, единственное решение $Q = q^{-1}q_1$, и $Qq = q_1$ имеет единственное решение $Q = q_1 q^{-1}$. В частности, произведение двух кватернионов равно нулю только тогда, когда один из множителей есть нуль.

Так как каждый тип деления на q всегда возможен и однозначен тогда и только тогда, когда $N(q) \neq 0$, то неудивительно, что выкладка дает:

$$\Delta(q) = \Delta'(q) = \{N(q)\}^2.$$

Сопряженным q' является q. Сопряженное для qq_1 есть $q_1'q'$. В их произведении мы можем реальное число $q_1 q_1'$ поставить впереди q. Значит норма произведения каких-либо двух кватернионов равняется произведению их норм. Это доказывает

[11] Фробениус (Frobenius) Crelle, том 84 (1878), стр. 59; Пирс (C. S. Peirce) Amer. Jour. Math., том 4 (1881), стр. 225; Картан (E. Cartan), Ann. Fac. sc. Toulouse, том 12 (1898), B, стр. 82 (смотри последнее подстрочное примечание в § 56); Гриссеман (F. X. Grissemann) Monatshefte Math. Phys., том 11 (1900), стр. 132–147 (последнее — легкое изменение доказательства Фробениуса).

Замечательно простое доказательство в тексте принадлежит автору и было им дано в общих чертах в Trans. Amer. Math. Soc., том 15 (1914), стр. 39.

теорему Эйлера (Euler), что произведение двух сумм четырех квадратов может быть представлено, как сумма четырех квадратов.

Для приложений смотри конец § 52.

Общий кватернион q есть корень уравнения

$$q^2 - 2xq + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0.$$

Целый кватернион[12] — кватернион

$$\frac{x(1+i+j+k)}{2+yi+zj+wk},$$

в котором $x, \dots, w$ — обыкновенные целые. Для них существует процесс отыскивания общего наибольшего делителя, однозначное разложение на простые множители (не считая множителей $\pm 1, \pm i, \dots$, которые делят единицу) и т. д., как в арифметике обыкновенных целых чисел.

13. Эквивалентность комплексной кватернионной и матричной алгебр. Рассмотрим кватернионы, координаты которых — обыкновенные комплексные числа $a+b\sqrt{-1}$, и комплексную матричную алгебру с четырьмя единицами (§ 4). Из единиц e_{11} матричной алгебры произведем кватернионные единицы в виде

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad i = \sqrt{-1}(e_{22} - e_{11}), \quad j = e_{12} - e_{21},$$
$$k = -\sqrt{-1}(e_{12} + e_{21}).$$

Они удовлетворяют кватернионным соотношениям (36). Обратно,

$$e_{11} = \frac{1+\sqrt{-1}i}{2}, \quad e_{22} = \frac{1-\sqrt{-1}i}{2}, \quad e_{12} = \frac{j+\sqrt{-1}k}{2},$$
$$e_{21} = \frac{-j+\sqrt{-1}k}{2}.$$

Поэтому[13] две комплексные алгебры эквивалентны при линейном преобразовании единиц, но реальная кватернионная и реальная матричная под-алгебры не эквивалентны.

[12] А. Гурвиц (A. Hurwitz), Göttingen Nachrlchten, 1896, стр. 313.

[13] В § 45 сочинения Кэли (Cayley) (цитированного выше в § 3) он отметил, что соотношения (36) между кватернионными единицами могут быть удовлетворены при помощи четырех матриц порядка 2. Б. Пирс (B. Peirce) Amer. Journ. Math., том 4 (1881), стр. 132 (читано сначала в Нац. акад. наук, 1870) знал, что комплексная кватернионная алгебра эквивалентна с линейной алгеброй $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$, удовлетворяющих соотношениям (14); он и С. Пирс (C. S. Peirce) знали соответствующую линейную алгебру (14) с n^2 единицами (стр. 217–218).

Сильвестер (Sylvester) Johns Hopkins Univ. Circulars, том 1 (1882), стр. 241; том III (1884), стр. 7 (= Math. Papers, том III, стр. 647; том IV, стр. 122) отметил, что матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ \Theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}, \quad [\Theta = \sqrt{-1}],$$

«построенные, как комплексные числа, есть линейное преобразование обыкновенной кватернионной системы» [они удовлетворяют (36), если взяты, как $1, i, k, j$ соответственно, оправдывая таким об-

14. Обобщение реальных кватернионов посредством восьми единиц Кэли. Кэли[14] дал реальную алгебру с единицами $1, e_1, \ldots, e_7$:

$$\left.\begin{array}{c} e_i^2 = -1, \quad e_ie_j = -e_je_i \qquad (i,j = 1,\ldots,7;\ i \neq j) \\ e_1e_2 = e_3, \quad e_1e_4 = e_5, \quad e_1e_6 = e_7, \quad e_2e_5 = e_7, \\ e_2e_4 = -e_6, \quad e_3e_4 = e_7, \quad e_3e_5 = e_6; \end{array}\right\} \tag{37}$$

вместе с 14 уравнениями, получаемыми из последних 7 при циклической перестановке каждого ряда трех единиц, как, например, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$.

Норма $N(x)$ общего x определяется посредством

$$x = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_7e_7, \qquad N(x) = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_7^2.$$

В то время как ассоциативный закон имеет место для трех единиц, выбранных из каждой тройки (отдельно) в (37), мы имеем $e_ae_b \cdot e_c = -e_a \cdot e_be_c$, когда три e не находятся в одной из тех троек. Так как ассоциативный закон отсутствует, то мы не можем доказать методом, примененным нами для кватернионов (конец § 12), что норма произведения равна произведению норм сомножителей. Чтобы обеспечить это свойство, Кэли проделал длинный анализ, который привел его в конце концов к выбору символов, данному в соотношениях (37). Я дал простое доказательство этого свойства и в то же самое время доказал замечательную теорему, что правое и левое деления, исключая деление на нуль, всегда возможны и однозначны в этой алгебре. Факт, незамеченный Кэли и впервые установленный мною в недавно опубликованной статье[15]

Здесь я дам более изящные доказательства, основанные на представлении 8-единичной алгебры в виде quasi-бинарной алгебры с четырьмя реальными кватернионными координатами. Положим $e = e_4$. Тогда общим числом является $q + Qe$, где q,

разом замечание Кэли, сделанное выше], § 13. Если ρ — кубический корень из единицы, то матрицы

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношениям $u^3 = v^3 = I$; $vu = \rho uv$. Он назвал линейную алгебру с девятью единицами u^iv^j $(i, j = 0, 1, 2)$ *нонионами.* Сильвестер дал другой ряд матриц u, v в Compt. Rend. Paris, том 97 (1883), стр. 1336; том 98 (1884), стр. 273, 471 (= Math. Papers, том IV, стр. 118, 154). В Amer. Journ. Math., том 6 (1884), стр. 286 (= Math. Papers, том IV, стр. 224) он назвал матричную алгебру порядка p, p^2-ионами. Клиффорд (Clifford) раньше дал имя «квадратной алгебры».

[14]Phil. Mag. London, серия 3, том 26 (1845), стр. 210 (= Coll. Math. Papers, том I, стр. 127). В его A_4, 87 читалось бы 47. Я изменил знак его последней единицы, получивши одну (данную посредством $\varepsilon_7 = -1$) из двух алгебр, позднее рассмотренную более подробно Кэли, Amer. Journ. Math., том IV (1881), стр. 293–296 (= Coll. Math Papers, том XI, стр. 368–371). Его алгебра с ε_7 может быть получена из алгебры с $\varepsilon_7 = -1$ при изменении знаков $e_2, \ldots, e_7$. Значит разные алгебры Кэли эквивалентны (37). Эквивалентная алгебра была независимо открыта Грейвзом (J. J. Graves) ранее 1844, Trans. Irish. Acad., том 21 (1848), стр. 338.

[15]Trans. Amer. Math. Soc., том 13 (1912), стр.72. Каждое число может быть выражено линейной функцией от e_2, e_4, e_6 с коэффициентами, линейными относительно e_1. Если $B = r + se_1$, где r и s реальны, то положим $\overline{B}$. Также пусть C линейно относительно e_1. Тогда

$$e_jB = \overline{B}e_j, \quad (Be_j)(Ce_j) = (B\overline{C})e_j^2, \quad (Be_j)(Ce_k) = (\overline{BC})(e_je_k)$$

для $j, k = 2, 4, 6$; $j \neq k$. Значит, восьмиединичная алгебра может быть подана, как quasi-кватернионная алгебра с единицами $1, e_2, e_4, e_6$ и координатами, линейными относительно e_1.

Q и r, R ниже есть реальные кватернионы относительно единиц: $1, e_1, e_2, e_3$. Можно проверить[16], что соотношения (37) предполагают

$$(q + Qe)(r + Re) = qr - R'Q + (Rq + Qr')e, \tag{38}$$

где r' — кватернион сопряженный с r.

Взявши $r = q'$, $R = -Q$, мы имеем

$$(q + e)(q' - Qe) = qq' + QQ' = N(q + Qe).$$

Норма произведения (38) есть $tt' + TT'$, где

$$t = qr - R'Q, \qquad T = Rq + Qr', \tag{39}$$

и значит равняется

$$(qq' + QQ')(rr' + RR') = N(q + Qe) \cdot N(r + Re),$$

увеличенному на $\alpha - \beta$, где

$$\alpha = RqrQ' + Qr'q'R', \qquad \beta = qrQ'R + R'Qr'q'.$$

Но сопряженное первого члена в α есть второй член. Значит α — реальное число. Таким образом $\alpha = R'\alpha R - RR'$, и одновременно оказывается равным β. Следовательно, норма произведения — произведение норм.

Левое деление, исключая деление на нуль, всегда возможно и однозначно. Ибо, если r, R, t, T даны, то мы можем разрешить (39) относительно q, Q. С этой целью умножим второе уравнение (39) на r справа и заменим qr его значением из первого уравнения; мы получаем

$$(rr' + QQ')Q = Tr - Rt.$$

Помножим первое на r' справа и исключим Qr'. Таким образом

$$(rr' + RR')q = tr' + R'T.$$

Аналогично, правое деление, исключая деления на нуль, всегда возможно и однозначно. Согласно соотношений в первой строке (37), общее число x является корнем

$$x^2 - 2x_0x + N(x) = 0.$$

Приведенная выше теорема о норме произведения и соответствующая теорема для норм кватернионов (конец § 12) и для норм обыкновенных комплексных чисел приводят к тождествам:

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

относительно x и y, где $z_1, \ldots, z_n$ — билинейные функции от x и y для случаев $n = 2, 4, 8$. Что такое тождество существует только в этих трех случаях, было доказано Гурвицем[17] (Hurwitz) при использовании теории матриц. Многие более ранние

[16] Читатель может взять (38), как определение алгебры.

[17] Göttingen Nachrichten, 1898, стр. 309.

писатели опубликовали неудовлетворительные доказательства[18]. Все писатели не заметили первоначальной статьи Дегена[19] (C. F. Degen), который дал тождество для $n = 8$, и метод, который по его предположению достиг бы цели для $n = 16$.

15. Характеристические детерминанты и уравнения. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — единицы линейной ассоциативной алгебры над полем F, имеющей главную единицу e. Пусть $x = \sum x_i e_i$ — общее число алгебры. По (20),

$$xe_j = \sum_{k=1}^{n} y_{jk} e_k, \quad y_{jk} = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ijk} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Для $j = 1, \ldots, n$ по очереди, первое уравнение дает

$$\begin{gathered} (y_{11} - x)e_1 + y_{12}e_2 + \ldots + y_{1n}e_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{11}e_1 + y_{n2}e_2 + \ldots + (y_{nn} - x)e_n = 0. \end{gathered}$$

Пусть ω произвольное число F. Когда x заменяется на ω, детерминант из коэфициентов e становится $\delta(\omega)$ в (40). Пусть $C_1(\omega), \ldots, C_n(\omega)$ миноры элементов j-ой колонки. Помножим линейное уравнение на $C_1(\omega)\varepsilon, \ldots, C_n(\omega)\varepsilon$ слева. Тогда (§ 10)

$$\delta(x)e_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Умножим на ε_j и просуммируем, причем $\sum \varepsilon_j e_j = \varepsilon$. Таким образом $\delta(x)\varepsilon = 0$. Отправясь с $e_j x$, мы получаем вторую часть

Теоремы 1. *В линейной ассоциативной алгебре с главной единицей общее число x является корнем правого и левого характеристических уравнений $\delta(\omega) = 0$, $\delta'(\omega) = 0$ соответственно, где*

$$\delta(\omega) = \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijk} x_i - \delta_{jk}\omega \right|, \qquad \delta'(\omega) = \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijk} x_i - \delta_{jk}\omega \right| \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{40}$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера (§ 7). Эти детерминанты называются *правым и левым характеристическими детерминантами*, соответственно. Эти самые определения пригодны для всякой линейной алгебры. Таким образом характеристические детерминанты получаются из детерминантов $\Delta(x)$ и $\Delta'(x)$ § 6 путем вычитания ω из каждого элемента главной диагонали.

Для любой линейной алгебры с главной единицей $\varepsilon = \sum \varepsilon_i e_i$ имеет место более глубокое соотношение между этими парами детерминантов. Тогда

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \omega\varepsilon_i)\gamma_{ijk} = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ijk} - \omega\delta_{jk}, \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \omega\varepsilon_i)\gamma_{ijk} = \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ijk} - \omega\delta_{jk}, \end{gathered}$$

[18] Частичный список — в Encyclopedia Sc. Math., том I, 1, стр. 368, 467.

[19] Mem Acad. Sc. St. Petersbourg, том 8, годы 1817–18 (1822), стр. 207. Здесь опечатка в символе Rt.

по (26). Значит

$$\Delta(x-\omega\varepsilon)\equiv\delta(\omega),\qquad \Delta'(x-\omega\varepsilon)\equiv\delta'(\omega). \tag{41}$$

Так как умножение может не быть ассоциативным, то мы будем писать

$$x^1=x,\quad x^{i+1}=x^ix,\quad {}^1x=x,\quad {}^{i+1}x=x({}^ix)\qquad (i=1,\ldots,),$$

и, если существует модуль ε, то $x^0={}^0x=\varepsilon$. Если $\sum t_ix^i=0$, то x называется *правым корнем* $\sum t_i\omega^i$. Если же $\sum t_i({}^ix)=0$, то x называется *левым корнем* $\sum t_i\omega^i=0$. Мы докажем

Теорему 2. *Во всякой линейной алгебре с главной единицей общее число является левым корнем правого характеристического уравнения и правым корнем левого характеристического уравнения.*

Не нарушая общности (§ 16), мы можем положить, что главная единица есть $e_1=1$. По (41), $\delta(\omega)$ и $\delta'(\omega)$ производятся из $\Delta(x)$ и $\Delta'(x)$ заменою x_1 на $x_1-\omega$. Положим

$$\delta(\omega)=\Delta(x-\omega)=\sum_{i=1}^n r_i\omega^i.$$

8 Обозначим посредством $x'_1,\ldots,x'_n$ миноры элементов первого ряда в

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}\sum x_i\gamma_{i11} & \ldots & \sum x_i\gamma_{in1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum x_i\gamma_{i1n} & \ldots & \sum x_i\gamma_{inn}\end{vmatrix}. \tag{42}$$

Помножим x'_j на j-тый элемент $\sum x_i\gamma_{ijk}$ k-го ряда и просуммируем для $j=1,\ldots,n$. Мы получаем коэфициент y_k для e_k относительно $y=xx'$, где $x'=\sum x'_je_j$. Но $y_1=\Delta(x)$, $y_k=0$ $(k>1)$. Значит $xx'=\Delta(x)$. Когда x_1 заменяется на $x_1-\omega$, то пусть x' становится

$$f=\sum_{i=0}^{n-1} f_i\omega^i,$$

где f_i — число алгебры. Таким образом

$$(x-\omega)f=\Delta(x-\omega)=\sum_{i=0}^{n-1} r_i\omega^i.$$

Раскрывая первое произведение и сравнивая коэффициенты одинаковых степеней ω, получаем

$$xf_0=r_0,\quad xf_1-f_0=r_1,\ \ldots,\ xf_{n-1}-f_{n-2}=r_{n-1},\quad -f_{n-1}=r_n.$$

Умножим второе уравнение на x слева, третье на x дважды слева, четвертое на x трижды и т. д. Складывая, мы получаем

$$\sum r_i({}^ix)=0.$$

Вторая часть теоремы[20] доказывается аналогично.

Окончательным обобщением, до сих пор не опубликованным, является

Теорема 3. *В произвольной линейной алгебре общее число есть левый корень $\omega\delta(\omega) = 0$ и правый корень $\omega\delta'(\omega) = 0$.*

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — единицы данной алгебры A, о которой не предполагается, что она имеет главную единицу, или что она ассоциативна. Рассмотрим алгебру A^* с единицами $e_0, e_1, \ldots, e_n$, где

$$e_0^2 = e_0, \quad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом e_0 — главная единица A^*. Положим

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad x^* = x_0 e_0 + x, \qquad x' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i.$$

Тогда x и x^* — общие числа A и A^*. Так как

$$(x_0' e_0 + x') x^* = x_0' x_0 e_0 + \sum_{i=1}^{n} (x_0' x_i + x_i' x_0) e_i + x' x,$$

то левый детерминант x^* есть

$$\Delta_{n+1}' = \begin{vmatrix} x_0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 & x_0 + \sum x_j \gamma_{1j1} & \ldots & \sum x_j \gamma_{nf1} \\ \ldots & & & \\ x_n & \sum x_j \gamma_{1jn} & \ldots & x_0 + \sum x_j \gamma_{njn} \end{vmatrix},$$

с x_0 встречающимся только по главной диагонали. Следовательно по (41), левый характеристический детерминант $D(\omega)$ для x^*

$$\Delta_{n+1}'(x^* - \omega e_0) = (x_0 - \omega) \sum_{i=0}^{n} l_i (\omega - x_0)^i,$$

где $\sum l_i \omega^i$ — результат раскрытия левого характеристического детерминанта $\delta'(\omega)$ для x. По второй теореме, приведенной выше, x^* — правый корень $D(\omega) = 0$. Положим $x_0 = 0$, значит x — правый корень $\sum l_i \omega^{i+1} = 0$. Первая часть теоремы доказывается аналогично.

[20] Эта теорема была формулирована и доказана Диксоном, Trans. Amer. Math Soc. том 13 (1912), стр. 60. Для случая, в котором умножение ассоциативное, доказательство переходит по существу в более простое из двух доказательств Фробениуса, Sitzungsber. Akad. Berlin, 1896, стр. 601, когда это доказательство подходящим образом преобразовано из терминологии билинейных форм в терминологию гиперкомплексных чисел. В этом ассоциативном случае теорема может быть выражена, как теорема о матрицах, и была впервые формулирована в этой форме Кэли и проверена для $n = 2$ и $n = 3$, Phil. Trans. London, том 148 (1858), стр. 24 (= Coll. Math. Papers, том II, стр. 475). Для матрицы m в (7), теорема такова: $m^2 - (a+d)m + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv 0$. Для справок о многих иных доказательствах смотри Encyc. Sc. Math., том I, 1, стр. 418. Самый ранний случай теоремы был приведен для $n = 3$ в «Лекциях о кватернионах» Гамильтона, 1853, стр. 566–567.

16. Детерминанты x, неизменяющиеся при линейном преобразовании единиц. Введем новые единицы $E_1, \ldots, E_n$, как в § 8; пусть x переходит в $X = \sum X_j E_j$. Мы должны доказать что $\Delta(x)$, данное в (23), равняется

$$D(x) = \left| \sum_{i=1}^{n} X_i \Gamma_{ijk} \right| \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Если x и y — данные числа первоначальной алгебры, то $xx' = y$ имеет единственное решение x', тогда и только тогда, когда $\Delta(x) \neq 0$ (§ 6). Аналогично, $XX' = Y$ имеет единственное решение X', тогда и только тогда, когда $D(X) \neq 0$. Но $x = X$, и т. д. Значит $\Delta(x) = 0$ предполагает $D(x) = 0$. Если $\Delta(x) = 0$ тождественный нуль, то тогда $D(X) = 0$ также тождественный нуль, и теорема $\Delta(x) = D(X)$ верна. Пусть теперь впредь $\Delta(x)$ не тождественный нуль, так что существует модуль ε (§ 7). Так как всякий ряд значений x_i, γ_{ijk}, для которых $\Delta(x) = 0$, является рядом решений $D(X) = 0$, то из хорошо известной теоремы о полиномах будет вытекать, что $\Delta(x)$ — множитель $D(X)$, как только $\Delta(x)$ будет доказано, что оно — неприводимая функция от своих аргументов x_i, γ_{ijk}. Так как каждый элемент детерминанта $D(X)$ равняется линейной и однородной функции от $x_1, \ldots, x_n$ и линейной, и однородной относительно γ, то частное от деления $D(X)$ на $\Delta(x)$ зависит только от коэффициентов t_{ij} преобразования единиц. Частное — единица, так как последнее есть его значение для $x = \varepsilon$ по (27).

Остается лишь доказать, что $\Delta(x)$ — неприводимо. Если функция $\Delta(x)$, однородная относительно γ и однородная относительно $x_1, \ldots, x_n$, является произведением двух множителей, то каждый множитель — однороден относительно γ и относительно x.

Но коэффициент x_1^n есть $|\gamma_{1jk}|$ детерминант, у которого n^2 элементов произвольны, и который, значит, является неприводимой функцией от этих n^2 элементов γ_{1jk}. Следовательно, один множитель Δ свободен от γ. Взявши $\gamma_{ijk} = 0$ $(i \neq j)$, мы имеем

$$\Delta(x) = |x_j \gamma_{ijk}| = x_1 \cdots x_n \, |\gamma_{jjk}| \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Значит, для общих значений γ, множитель, свободный от γ, есть $x_1 \cdots x_n$. Но коэффициент x_1^n в Δ, как мы видели, не является тождественным нулем. Подобный же довод имеет место и для $\Delta'(x)$. Значит $\Delta(x)$ и $\Delta'(x)$ остаются неизменными при линейном преобразовании единиц. Так как модуль ε неизменен, то мы имеем[21], по (41)

Теорему. *Детерминанты и характеристические детерминанты общего числа любой линейной алгебры остаются неизменяющимися при всяком, линейном преобразовании единиц.*

17. Инварианты и коварианты линейных алгебр. Рассмотрим линейную алгебру с n единицами, у которых постоянные умножения[22] γ_{ijk} — неопределенные

[21] Инвариантность $\delta(\omega)$, если $\Delta(x) \equiv 0$, следует из непрерывности.

[22] Если существует модуль, то мы берем его, как единицу e_1. Тогда

$$\gamma_{1jj} = \gamma_{j1j} = 1; \qquad \gamma_{1jk} = \gamma_{j1k} = 0 \quad (j \neq k).$$

Остающиеся γ должны быть левыми произвольными. Смотри пример.

числа поля F. Пусть C — полиномы с этими γ и с координатами x_i общего числа x алгебры над F. Если при всяком линейном преобразовании единиц (§ 8)

$$C(X_i; \Gamma_{ijk}) = f \cdot C(x_i; \gamma_{ijk},$$

где f — функция лишь от коэффициентов t_{ij} преобразования, то C называется ковариантом алгебры. В частности, C — абсолютный ковариант, если $f = 1$, и инвариант, если C заключает в себе лишь γ.

Характеристические детерминанты $\delta(\omega)$ и $\delta'(\omega)$ — абсолютные коварианты общей линейной алгебры с n единицами (§ 16).

Для примера, рассмотрим алгебру с единицами ε, e, где ε — главная единица, и $e^2 = \gamma e + c\varepsilon$. Для $x = x_2\varepsilon + x_2 e$

$$\Delta(x) = \Delta'(x) = \begin{vmatrix} x_1 & cx_2 \\ x_2 & x_1 + \gamma x_2 \end{vmatrix},$$

$$\delta(\omega) = \delta'(= \omega^2 - l\omega + \Delta(x), \qquad l \equiv 2x_1 + \gamma x_2.$$

Тогда l и $\Delta(x)$ — абсолютные коварианты. Чтобы дать прямое доказательство, введем новые единицы ε, $Ere + s\varepsilon$, где $r \neq 0$. Тогда

$$x = X_1\varepsilon + x_2 E, \qquad X_1 = x_1 - \frac{sx_2}{r}, \qquad X_2 = \frac{x_1}{r},$$

$$E^2 = \Gamma E + C\varepsilon, \qquad \Gamma = 2s + r\gamma, \qquad C = r^2 c - rs\gamma - s^2,$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & CX_2 \\ X_2 & X_1 + \Gamma X_2 \end{vmatrix} = \Delta(\varepsilon), \qquad 2X_1 + \Gamma X_2 = l.$$

Дискриминант $\Delta(x)$ дает инвариант алгебры:

$$\Gamma^2 + 4C = r^2(\gamma^2 + 4c).$$

18. Бинарные линейные алгебры с главной единицей. В последнем примере возьмем $r = 1$, $s = -\dfrac{\gamma}{2}$. Тогда $\Gamma = 0$. Пусть значит $\gamma = 0$ в первоначальной алгебре. Чтобы преобразованная алгебра имела $\Gamma = 0$, преобразование должно быть: $E = re$ (т. е. иметь $s = 0$). Тогда $C = r^2 c$. Следовательно, бинарная алгебра

$$\varepsilon^2 = \varepsilon, \qquad \varepsilon e = e\varepsilon = e, \qquad e^2 = c\varepsilon, \tag{43}$$

и аналогичная алгебра с параметром C, эквивалентны тогда и тогда, когда c и C оба нули, или оба не нули и их отношение — квадрат числа поля F.

Если F — поле всех комплексных чисел, то двумя типами неэквивалентных бинарных алгебр являются (43) с $c = 0$, $c = 1$.

Если F — поле реальных чисел, то тремя типами являются (43) с $c = 0$, $c = 1$, $c = -1$, причем последний — поле $F(i)$ комплексных чисел.

Кэли[23] дал семь типов неэквивалентных бинарных ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, причем не предполагалось наличие главной единицы. Госпожа Газлет[24] недавно получила этих семь типов из тройных алгебр, имеющих модуль (§ 20) и характеризовала их при помощи ковариантов.

[23]Proc. London Math. Soc., том 15(1883–4), стр. 185 (= Coll. Math. Papers, , XII, стр. 60, 105).

[24]Annals of Methematics, том 16 (1914), стр. 1.

19. Ранг и ранговое уравнение линейной алгебры. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — единицы алгебры над полем F и пусть координаты $x_1, \dots, x_n$ для $x = \sum x_i e_i$ — неопределенные числа F.

Во-первых, пусть алгебра — ассоциативна. По § 15, x — корень $\delta(\omega) = 0$ или $\omega\delta(\omega) = 0$, смотря по тому, имеет или не имеет алгебра главную единицу. Таким образом x^n или x^{n+1} является линейной комбинацией низших степеней x (также по § 9). *Ранг* r алгебры — наименьшее положительное целое число такое, что x^r является линейной комбинацией низших степеней x, коэффициенты которой — рациональные функции от $x_1, \dots,$ с коэффициентами в F. Само уравнение $R(x) = 0$ называется *ранговыми уравнением* алгебры[25]. Если б было два таких уравнения, то разность дала бы уравнение низшей степени.

Далее $R(\omega)$ — делитель $\delta(\omega)$ или $\omega\delta(\omega)$. Ибо, если б было не так, то деление на $R(\omega)$ привело бы к остатку $\rho(\omega)$, степени $< r$, который исчезал бы для $\omega = x$, вопреки определению r (ср. § 10).

Аналогично $R(\omega)$ делит $\delta'(\omega)$ или $\omega\delta'(\omega)$.

Отсюда следует, что коэффициенты $R(\omega)$ — целые рациональные функции от $x_1, \dots, x_n$. Ибо, если б этого не было, то некоторые ряды конечных значений x давали бы бесконечный корень характеристического уравнения.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_r$ — обыкновенные комплексные корни $R(\omega) = 0$. Тогда, если алгебра имеет модуль ε, то

$$R(x) \equiv (x - \omega_1\varepsilon) \cdots (x - \omega_r\varepsilon) = 0.$$

Множители — коммутативны (§ 10). Таким образом $f = x - \omega_i\varepsilon$ число $\neq 0$, так, что $fg = 0$ для некоторых $g \neq 0$. Такое число f называется *нулевым множителем*[26]. Тогда $\Delta(f) = 0$, и так как $gf = 0$, то $\Delta'(f) = 0$ (§ 6). Значит, по (41), $\omega_1, \dots, \omega_r$ — корни двух характеристических уравнений. Обратно, всякий корень ω одного из последних двух уравнений, скажем $\delta(\omega) = 0$, есть одно из чисел ряда $\omega_1, \dots, \omega_r$. Ибо, если $w = x - \omega\varepsilon$, то $\Delta(w) = 0$ по (41), и мы можем найти число $y \neq 0$ такое, что $wy = 0$. Тогда

$$v_i \equiv x - \omega_i\varepsilon = w + \mu_i\varepsilon, \qquad \mu_i \equiv \omega - \omega_i,$$
$$0 = v_1 v_2 \cdots v_r = (\ )w + \mu_1\mu_2 \cdots \mu_r\varepsilon.$$

Умножим последнее на y справа. Таким образом $0 = \mu_1 \cdots \mu_r y$. Значит одно из μ — нуль. Итак, мы здесь имеем (Шефферс, lib. cit.]

Теорему 1. *Для линейной ассоциативной алгебры, имеющей главную единицу, различные корни рангового уравнений* $R(\omega) = 0$ *одинаковы с различными корнями каждого характеристического уравнения.*

Например, результаты § 12 показывают, что каждый характеристический детерминант кватерниона $x + yi + zj + wk$ есть

$$\{(x - \omega)^2 + y^2 + z^2 + w^2\}^2 = \{R(\omega)\}^2.$$

[25]Молин. Math. Annalen, том 41 (1893), стр. 113, Шефферс, там же, том 39 (1891), стр. 293, назвал его характеристическим уравнением системы, и r «степенью» (Grad). Часто оно называется тождественным уравнением алгебры.

[26]Пирс, Amer. Jour. Math, том IV (1881), стр. 104. Вейерштрасс. Göttinger Nachrichten, 1884, стр. 395.

Допустим, что при преобразовании единиц, ранговое уравнение

$$R(\omega; x_i, \gamma_{ijk}) = 0,$$

удовлетворяющееся при $\omega = x$, преобразуется в $\rho(\omega, X_i, \Gamma_{ijk}) = 0$, так что $\rho = 0$ для $\omega = X$. Но $R(\omega, X_i, \Gamma_{ijk}) = 0$ для $\omega = X$. Если последнее уравнение не тождественно с $\rho = 0$, то мы получаем при вычитании уравнение степени $< r$, удовлетворяющееся при $\omega = X$. Это уравнение — «преобразованное» из уравнения степей $< r$, удовлетворяющегося при $\omega = x$, что противоречит определению r. Значит (Газлет, 1. с.) имеет место

Теорема 2. *Ранговое уравнение линейной ассоциативной алгебры остается неизменным при всяком линейном преобразовании единиц.*

В смысле § 17, ранг r — инвариант общей ассоциативной алгебры с n единицами, тогда как ранговая функция $R(\omega)$ не ковариант.

Для неассоциативных алгебр существует уравнение $\rho(\omega) = 0$ низшей степени, имеющее x правым корнем (§ 15); называется оно правым ранговым уравнением. Тогда[27] $\rho(\omega)$ делит $\delta'(\omega)$ или $\omega\delta'(\omega)$ смотря по тому, существует ли или не существует модуль. Подобное определение и свойство имеют место для левого рангового уравнения. Эти уравнения не изменяются при всяком линейном преобразовании единиц.

Например, в коммутативной, но не ассоциативной, линейной алгебре, с единицами $\varepsilon, e_1, \ldots, e_n$, в которой ε — главная единица, и

$$e_1^2 = e_2, \quad e_1e_2 = e_3, \quad e_1e_3 == -e_2, \quad e_1e_4 = e_5, \quad e_1e_5 = e_3^2 = -e_4,$$
$$e_2^2 = e_4, \quad e_2e_3 = -e_5, \quad e_2e_4 - e_2e_5 = e_3e_4 = e_3e_5 = e_4^2 = e_4e_5 = e_5^2 = 0,$$
$$w = x_1e_1 + \ldots + x_5e_5 \ \text{— корень}$$
$$w \cdot w^3 + x_1^2w^2 = 0,$$

но не является корнем кубического или квадратного уравнения. Общее число $x = x_0\varepsilon + w$, поэтому — корень для

$$x \cdot x^3 - 4x_0x^3 + (x_1^2 + 6x_0^2)x^2 - 2(x_0x_1^2 + 2x_0^3)x + (x_0^2x_1^2 + x_0^4)\varepsilon = 0.$$

20. Комплексные тернарные линейные ассоциативные алгебры с модулем[28]. Рассмотрим линейную ассоциативную алгебру над полем всех комплексных чисел, с тремя единицами и модулем ε. Ее ранг есть 3 или 2.

(I) Во-первых, пусть $r = 3$. Тогда существует число α такое,

$$R(\alpha) \equiv (\alpha - \lambda_1\varepsilon)(\alpha - \lambda_2\varepsilon)(\alpha - \lambda_3\varepsilon),$$

и такое, что α не является корнем квадратного уравнения,

[27] Trans Amer. Math. Soc., том 13 (1912), стр. 62, следствие II.

[28] Стэди (E. Study), Göttingen. Nach., 1889, стр. 243–7. Многие выкладки, сделанные там или предоставленные читателю, не затронуты в изложении этого труда. Стэди не дал никакого доказательства, приводящего к (A), (B) в случае II.

(I). Если корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны, то положим

$$e_1 = \frac{(\alpha - \lambda_2\varepsilon)(\alpha - \lambda_3\varepsilon)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \qquad e_2 = \frac{(\alpha - \lambda_1\varepsilon)(\alpha - \lambda_3\varepsilon)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)},$$
$$e_3 = \frac{(\alpha - \lambda_1\varepsilon)(\alpha - \lambda_2\varepsilon)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

Для произвольного числа α будет доказано, что сумма этих e равна ε. Если мы заменим α на $\lambda_i\varepsilon$ $(i = 1, 2, 3)$, то увидим, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon \tag{44}$$

удовлетворяется. Но алгебраическое квадратное уравнение будет тождеством, если оно удовлетворяется тремя значениями. Таким образом (44) имеют место. По ассоциативному закону, степени α, а значит и $\alpha - \lambda_i\varepsilon$ коммутативны. Таким образом, если $i \neq j$, то e_ie_j имеет множитель R и есть нуль. Помноживши (44) справа на e_i, получим $e_i^2 = e_i$. Значит,

$$e_ie_j = 0, \quad e_i^2 = e_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{45}$$

Окончательно, e линейно-независимы. Ибо, помноживши $\sum a_ie_i = 0$ на e_i справа, мы получаем $a_je_j = 0$, $a_j = 0$, так как $e_j \neq 0$. Получившаяся алгебра (45), очевидно, ассоциативна и имеет

$$R = \delta = \delta' = (x_1 - \omega)(x_2 - \omega)(x_3 - \omega).$$

(I_2) Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то положим $l = \lambda_1 - \lambda_3$ и

$$e_1 = \frac{-(\alpha - \lambda_3\varepsilon)(\alpha - 2\lambda_1\varepsilon + \lambda_3\varepsilon)}{l^2}, \qquad e_2 = c(\alpha - \lambda_1\varepsilon)(\alpha - \lambda_3\varepsilon),$$
$$e_3 = \frac{(\alpha - \lambda_1\varepsilon)^2}{l^2},$$

где c константа $\neq 0$. Каждое произведение в первой строке

$$\left.\begin{array}{l} e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = e_2^2 = 0, \\ e_1^2 = e_1, \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_2, \quad e_3^2 = e_3 \end{array}\right\}$$

имеет множителя R и есть нуль. При сложении, $e_1 + e_3 = \varepsilon$. Помноживши последнее слева на e_1, e_2, e_3, по очереди и справа на e_2 мы получим соотношения второй строки (46). Единицы — линейно-независимы, так как произведений $\sum a_ie_i = 0$ слева e_2 и на e_3 по очереди дают $a_1 = a_3 = 0$. Соотношения (46) для этой ассоциативной алгебры остаются неизменными, если e_2 заменить на te_2. Здесь

$$R = \delta = \delta' = (x_1 - \omega)(x_3 - \omega).$$

(I_3) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то положим $e_1 = \varepsilon$, $e_2 = \alpha - \lambda_1$, $e_3 = (\alpha - \lambda_1\varepsilon)^2$. Тогда

$$\begin{gathered} e_1e_i = e_ie_1 = e_i, \quad e_2e_3 = e_3e_2 = e_3^2 = 0, \quad e_2^2 = e_3, \\ R = \delta = \delta' = (x_1 - \omega)^3. \end{gathered} \tag{47}$$

(II) Во вторых, пусть $r = 2$. Возьмем $e_1 = \varepsilon$, e_2, e_3 единицами. Так как $r = 2$, то $\xi = ye_2 + ze_3$ является корнем квадратного уравнения $\xi^2 + 2L\xi + Q_1\varepsilon = 0$, где L — линейная, а Q_1 — квадратная функция от y и z с фиксированными коэфициентами, зависящими от γ_{ijk}. Таким образом, $(\xi - L\varepsilon)^2 = Q\varepsilon$, где Q — квадратная функция от y, z. Если Q нетождественно равно нулю, то его можно линейно преобразовать в yz или z^2, из которых ни одно не нуль для $(y, z) = (1, 1)$ или $(1, 2)$. Значит, мы можем найти два линейно независимых ряда (y, z), для которых $Q \neq 0$ и, значит, три линейно независимых единицы ε, $\xi_2 - L_2\varepsilon$, $\xi_3 - L\varepsilon$ таких, что квадраты последних двух есть $Q_2\varepsilon$, $Q_3\varepsilon$ соответственно, где $Q_2Q_3 \neq 0$. Возьмем $E_i = \dfrac{(\xi_i - L_i\varepsilon)}{Q_1^{\frac{1}{2}}}$. Тогда

$$E_2^2 = \varepsilon, \qquad E_3^2 = \varepsilon. \tag{A}$$

Но если Q, а значит и квадрат $ye_2 + ze_3 - L\varepsilon$, тождественный нуль, где L — некоторая линейная функция от y, z, то нам надо лишь отнять постоянные кратные ε от e_2, e_3, чтобы получить новые единицы, для которых

$$e_2^2 = 0, \qquad e_3^2 = 0. \tag{B}$$

(II_1) Рассмотрим случай (A). Положим

$$E_2E_3 = \alpha\varepsilon + \beta E_2 + \gamma E_3.$$

Тогда

$$E_2(E_2E_3) = (\beta + \alpha\gamma)\varepsilon(\alpha + \beta\gamma)E_2 + \gamma^2 E_3 = E_2^2E_3 = E_3,$$
$$(E_2E_3)E_3 = (\gamma + \alpha\beta)\varepsilon + \beta^2 E_2 + (\alpha + \beta\gamma)E_3 = E_2E_3^2 = E_2,$$
$$\beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad \alpha + \beta\gamma = \beta + \alpha\gamma = \gamma + \alpha\beta = 0.$$

Если изменить знак E_2, то изменится знак и у γ. Значит мы можем положить $\gamma = +1$. Изменяя, если это необходимо, знак у E_3, мы можем также положить $\beta = +1$. Следовательно

$$E_2E_3 = -\varepsilon + E_2 + E_3.$$

Положим $e_2 = E_2$, $e_3 = E_2 + E_3$. Тогда

$$e_2^2 = \varepsilon, \quad e_2e_3 = e_3, \quad e_3^2 - e_3e_2 = e_3,$$
$$e_3e_2 = r\varepsilon + se_2 + te_3.$$

Приравнивая два значения $e_2e_3e_2$ и два значения $e_3e_2e_2$, мы получаем $r = s$, $t^2 = 1$, $s(1+t) = 0$, соответственно. Для $t = 1$, $e_3e_2 = e_3$, $e_3^2 = 2e_3$ и ε, $f \equiv e_2 + e_3$, $f^2 = \varepsilon + 4e_3$ — линейно-независимы, принимая во внимание, что ранг есть 2. Значит $t = -1$,

$$e_3e_2 = s\varepsilon + se_2 - e_3, \quad e_3^2 = s\varepsilon + se_2,$$
$$(e_3e_2)e_3 = 2se_3 - e_3^2 = e_3(e_2e_3) = e_3^2, \quad e_3^2 = se_3,$$

так что $s = 0$. Следовательно, мы имеем алгебру

$$\begin{gathered} e_1e_i = e_ie_1 = e_i, \quad e_2^2 = e_1, \quad e_2e_3 = e_3, \quad e_3e_2 = -e_3, \quad e_3^2 = 0, \\ \delta = lR, \quad \delta' = l'R, \quad R = ll', \quad l \equiv x_1 + x_2 - \omega, \quad l' = x_1 - x_2 - \omega. \end{gathered} \tag{48}$$

Здесь и в (49) R может быть произведено из δ и δ', как в § 19.

(II_2) Наконец рассмотрим случай (B). Пусть e, f обозначают e_2, e_3 или e_3 e_2. Положим $ef = a\varepsilon + be + cf$. Тогда

$$\begin{gathered}
0 = e^2 f + e(ef) = ac\varepsilon + (a + bc)e + c^2 f, \quad c = a = 0,\\
0 = ef^2 = (ef)f = (be)f = b^2 e, \quad b = 0,\\
e_1 e_i = e_i e_1 = e_i, \quad e_2^2 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_3^2 = 0,\\
\delta = \delta' = (x_1 - \omega)^3, \quad R = (x_1 - \omega)^2.
\end{gathered} \tag{49}$$

Никакие две из полученных пяти линейных ассоциативных алгебр (45)–(49) с главной единицей не эквивалентны. Они характеризуются инвариантом r и ковариантом $\delta(\omega)$.

Соответствующая проблема для 4, 5, 6 единиц уже разобрана[29].

21. Приводимые линейные ассоциативные алгебры с модулем. Линейная ассоциативная алгебра A с n единицами над полем F и с модулем ε называется приводимой[30] относительно F, если содержит $p + q = n$ чисел $e_1, \ldots, e_p; E_1, \ldots, E_q$, линейно-независимых относительно F, так что

$$e_i E_j = 0, \quad E_j e_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q). \tag{50}$$

Всякое число из A — линейная комбинация из e и E. Пусть модулем является $\varepsilon = e + E$, где e — линейная функция от $e_1, \ldots, e_p$, и E — от $E_1, \ldots, E_q$. Если x — какая-нибудь линейная функция от $e_1, \ldots, e_p$ с коэффициентами в F, то $x = x\varepsilon = xe$, так как $xE = 0$ и $x = \varepsilon x = ex$. Аналогично, если X — некоторая линейная функция от $E_1, \ldots, E_q$, то $EX = XE = X$. Затем $x_1 x_2 = x + X$, где x_1 и x_2 — некоторые линейные функции от $e_1, \ldots, e_p$. Умножим на E справа. Получим $0 = X$. Следовательно[31] произведение всяких двух x — снова x. Также произведение всяких двух X есть X. Значит числа x образуют под-алгебру $s = (e_1, \ldots, e_p)$ с модулем e, и числа X образуют под-алгебру $S = (E_1, \ldots, E_q)$ с модулем E. Об алгебре A говорят, что она разложима на s и S, она называется их прямой[32] суммой:

$$A = s + S = S + s.$$

Обратно, — из всяких двух линейных (ассоциативных) алгебр $(e_1, \ldots, e_p)$ и $(E_1, \ldots, E_q)$ над F с модулями e и E, мы получаем линейную (ассоциативную) алгебру $(e_1, \ldots, E_q)$ над F с модулем $e + E$, постулируя соотношения (50) и принимая во внимание, что $e_1, \ldots, E_q$ линейно-независимы относительно F.

[29] Encyc. Sc. Math. том I, 1, стр. 401–403. Для неприводимых алгебр с шестью единицами смотри Вогера (G. Voghera), Denkschr. Ak. Wiss. Wien, том 84 (1908).

[30] Шефферс, Math. Annalen, том 39 (1891), стр. 317; том 41 (1893) стр. 601. В Amer. Math. Journ., том 4 (1881), стр. 100. Пирс определил смешанную (нечистую) алгебру A, как такую, в которой каждое из чисел является суммой числа под-алгебры s и числа под-алгебры S так, что произведения eE и Ee чисел e из s и из S — числа, общие s и S. Если нуль — единственное общее число, то смешанная алгебра является приводимой в смысле нашего текста.

[31] Доказано менее просто Эпстином (S. Epsteen), Trans. Amer., Math. Soc., том 5 (1904), стр. 105.

[32] Смешанная алгебра не всегда прямая сумма s и S.

Шефферс дал следующий критерий для приводимости: *Линейная ассоциативная, алгебра A с модулем e приводима тогда и только тогда, когда содержит число $e \neq \varepsilon$ такое, что $e^2 = e$, $ex = xe$ для всякого числа x из A.*

Что эти условия необходимы, было доказано выше. Что они достаточны, доказывается, положив $E = \varepsilon - e$ и показав, что $A = s + S$, где s составлено из всех произведений xe, и S из всех произведений xE, причем x располагаются над всеми числами A. Мы имеем

$$eE = e(\varepsilon - e) = e - e = 0, \quad Ee = (\varepsilon - e)e = 0,$$
$$xe \cdot yE = xy \cdot eE = 0, \quad yE \cdot xe = y(Ee)x = 0,$$

так как $ey = ye$ для всякого y в A. Также $A = s + S$, ибо

$$x = x\varepsilon = x(e + E) = xe + xE.$$

Наконец, если xe выражаются линейно в членах из линейно-независимых чисел $e_1, \ldots, e_p$ вида xe, и xE в членах с $E_1, \ldots, E_q$, то $e_1, \ldots, E_q$ — линейно-независимы. Ибо, если $xe + yE = 0$, то произведение на e справа дает $xe = 0$.

Компонент s приводимой алгебры A может быть приводимым или неприводимым. Отсюда приводимая алгебра может быть разложена на неприводимые алгебры. Например, алгебра (45) есть сумма трех неприводимых алгебр (e_1), (e_2), (e_3), и, по (44), ее модуль — сумма модулей e_1, e_2, e_3 под-алгебр.

Относительно однозначности разложения смотри конец § 61.

22. Прямое произведение двух алгебр. Пусть $s = (e_1, \ldots, e_p)$, $S = (E_1, \ldots, E_q)$ — две линейных алгебры над полем F, так что

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{ijk} e_k, \qquad E_i E_j = \sum_{k=1}^{q} \Gamma_{ijk} E_k.$$

Поступая[33] формальным образом, примем во внимание, что $\varepsilon_{ik} = e_i E_k = E_k e_i$, для $i = 1, \ldots, p$; $k = 1, \ldots, q$, как pq линейно-независимых единиц алгебры P с координатами, расположенными над F, и положим

$$\varepsilon_{ik} = e_i e_j \cdot E_k E_l \equiv \sum_{g=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \gamma_{ijg} \Gamma_{klh} \varepsilon_{gh}.$$

Назовем P прямым[34] произведением s и S и будем писать $P = sS = Ss$.

Мы можем также получить P, истолковывая координаты $x_1, \ldots, x_p$ в $x = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p$, как общие числа

$$x_i = X_{i1} E_1 + \ldots + X_{iq} E_q \qquad (X'\text{ы в } F)$$

[33] Клифорд (W. K. Clifford) Amer. Journ. Math., том 1 (1878), стр. 350 (= Coll. Math. Papers, 1882, стр. 266). Если $\omega^2 = 1$ и ω коммутативна со всяким реальным кватернионом q и Q, то он назвал $q + \omega Q$ бикватернионом (не гамильтоновым бикватернионом, кватернионом с обыкновенными комплексными коэфициентами).

[34] Надо отличать его от некомутативного, «произведения» $\sum z_{ij} e_i E_j$ каких-либо двух рядов $\sum x_i e_i$ и $\sum y_j E_j$ чисел алгебры.

из S. Таким образом $x = \sum X_{ik} e_i E_k$ ($i = 1, \ldots, p$; $k = 1, \ldots, q$). Здесь мы можем смотреть на P, как на алгебру из q единиц над алгеброй s.

Например, из реальной кватернионной алгебры $(1, i, j, k)$ и реальной алгебры $(1, \sqrt{-1})$ мы получаем комплексную кватернионную алгебру.

Если s и S — ассоциативные алгебры, то $P = sS$ — ассоциативно. Если s и S имеют модули e и E, то P имеет модуль eE.

Для этого определения умножения алгебр и определения сложения в § 21, коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы имеют силу.

Теорема 1[35]**.** *Если A — линейная ассоциативная алгебра, имеющая кватернионную алгебру Q, как под-алгебру, и имеющая тот-же модуль 1, что Q, то тогда $A = QC$, где C подалгебра с модулем 1, если A таково, что каждое число из C коммутативно с каждым числом из Q.*

Точно также легко доказать обобщение Веддерборна:

Теорема 2. *Если A — линейная ассоциативная алгебра с модулем ε и подалгеброй Q с n^2 единиц $e^a f^b$ $(a, b = 1, \ldots, n)$:*

$$e^n = f^n = \varepsilon, \qquad fe = \rho e f, \tag{51}$$

где ρ — примитивный корень из единицы n-ой степени, то $A = QC$, где C — подалгебра, с тем же модулем ε, если A таково, что каждое число из C коммутативно с каждым числом из Q.

Обратный элемент для $E_{a,b} \equiv e^a f^b$, есть $\rho^{ab} E_{-a,-b}$, ибо (по индукции)

$$f^b e^a = \rho^{ab} e^a f^b. \tag{51$'$}$$

Если X какое нибудь число из A, то n^2 чисел

$$N_{c,d} = \sum_{a,b=1}^{n} E_{a,b}^{-1} E_{c,d} X E_{a,b} \qquad (c, d = 1, \ldots, n)$$

коммутативны с каждым числом из Q. В самом деле

$$\begin{aligned} E_{r,s} N_{c,d} = \sum_{a,b=1}^{n} \rho^{ab} f^s e^{-a} f^{-b} E_{c,d} X E_{a,b} = \sum_{a,b} \rho^{ab-as} e^{r-a} f^{s-b} E_{c,d} X E_{a,b} = \\ = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \rho^{r\beta+\alpha\beta} e^{-\alpha} f^{-\beta} E_{c,d} X E_{r+\alpha,s+\beta} = N_{c,d} E_{r,s}, \end{aligned}$$

в которых мы заменили индексы суммирования a, b на $r+\alpha$, $s+\beta$, соответственно. Сразу же находим, что

$$E_{c,d}^{-1} E_{a,b}^{-1} E_{c,d} = \rho^{ad-bc} E_{a,b}^{-1}.$$

Суммируя для $c, d = 1, \ldots, n$, мы получаем нули, если a и b не являются кратными n, т.-е. если $E_{a,b} = \varepsilon$ не имеет места, и тогда мы получаем $n^2 \varepsilon$. Следовательно

$$\sum_{c,d} E_{c,d}^{-1} N_{c,d} = n^2 X.$$

[35]Шефферс Math. Annalen, том 39 (1891), стр. 364–374. Вместо этого доказательства, занимающего десять страниц, мы дадим короткое доказательство, данное Веддерборном, Proc. Roy. Soc. Edinb., том 26, 1 (1905–6), стр. 48, более общей теоремы.

Ряд C из всех чисел $\lambda, \mu, \ldots$ из A, которые коммутативны с каждым X из A содержит $\varepsilon, \lambda+\mu, \lambda\mu$ и поэтому является под-алгеброй с модулем ε. Мы видели, что C содержит каждое $N_{c,d}$ и что X выражается, как сумма произведений чисел $E_{c,d}^{-1}$ из Q на числа $N_{c,d}$ из C. Следовательно, каждое X из A — прямое произведение QC. Произведение — прямое, так как

$$\sum_{a,b=1}^{n} E_{a,b}^{-1}\gamma_{a,b}=0 \qquad (\gamma \text{ в } C)$$

предполагает, что каждое $\gamma=0$. Так как γ коммутативно с E, то

$$0=\sum_{a,b}\sum_{c,d} E_{c,d}^{-1}E_{a,b}^{-1}E_{c,d}\gamma_{a,b}=n^2\gamma_{nn}.$$

Чтобы доказать, что $\gamma_{\alpha\beta}=0$, умножим данное соотношение на $E_{\alpha,\beta}$ и используем получившееся соотношение, в котором $\gamma_{\alpha\beta}$ — коэффициент $\varepsilon=E_{n,n}^{-1}$.

Комплексная алгебра, определенная посредством (51), эквивалентна с комплексной матричной алгеброй § 4. Действительно (51) удовлетворяются, если

$$e=e_{12}+e_{23}+\ldots+e_{n1}, \quad f=e_{11}+\rho^{-1}e_{22}+\ldots+\rho^{-(n-1)}e_{nn}.$$

Алгебра (51) — алгебра Сильвестра (Sylvester) или алгебра ионов, если $n=3$ (§ 13).

23. Единицы, нормализованные относительно фиксированного числа. Пусть дано число $a=\sum a_ie_i$ — некоторой алгебры, координаты которого скалары, т. е. обыкновенные комплексные числа, тогда мы можем найти число

$$y=\sum y_ie_i\neq 0$$

и скалар ω такой, что

$$ay=\omega y. \tag{52}$$

Согласно (20) и линейной независимости e, необходимыми и достаточнысм условиями для существования (52) являются

$$\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ijk}a_iy_i-\omega y_k=0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Детерминант из коэфициентов $y_1,\ldots,y_n$ есть $\delta(\omega)$, данное в (40) с $x=a$. Итак $\delta(\omega)=0$ необходимое и достаточное условие для существования числа $y\neq 0$, удовлетворяющего (52).

Для общего числа x пусть $\delta(\omega)=0$ определяет ω, как h-значную функцию от $x_1,\ldots,x_n$, как в теории алгебраических функций. Пусть a — частное число x, для которого существуют h разных корней $\omega_1,\ldots,\omega_h$ с кратностями $m_1,\ldots,m_h$.

Если y_1 — второе решение (52), то тогда $cy+c_1y_1$ — решение, где c и c_1 — некоторые скалары. Следовательно все решения y — линейные функции от некоторых t

линейно-независимых решений, в качестве которых мы берем первые t наших новых единиц $e_1, \ldots$. Тогда $ae_j = \omega_1 e_j$ $(j \leq t)$ дают

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_{ijk} = \omega_1 \delta_{jk} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, t), \tag{53}$$

где, как обычно $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$ $(k \neq j)$. Тогда (§ 16)

$$\delta(\omega) = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_{ijk} - \omega \delta_{jk} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} \omega_1 - \omega & 0 & \ldots & 0 & \vdots \\ 0 & \omega_1 - \omega & \ldots & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_1 - \omega & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots\ M \end{array} \right|,$$

в первых t колонках которого все элементы — нули, кроме диагональных элементов $\omega_1 - \omega$, в то время, как M обозначает матрицу из элементов в остальных $n-t$ строчках и последних $n-t$ колонках. Следовательно

$$\delta(\omega) = (\omega_1 - \omega)^t |M| = 0$$

имеет ω_1 корнем кратности m_1, где $m_1 \leq t$.

Если $m_1 = t$, то мы не действуем далее с ω_1 (смотри пример в § 24). Далее, пусть $m_1 > t$. Тогда там существуют числа $z = \sum z_j e_j \neq 0$ такие, что

$$\begin{gathered} az = \omega_1 z + \sum_{k=1}^{t} c_k e_k : \\ \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i z_j \gamma_{ijk} e_k = \omega_1 \sum_{k=1}^{n} z_k e_k + \sum_{k=1}^{t} c_k e_k. \end{gathered} \tag{54}$$

Коэффициенты e_k $(k = 1, \ldots, t)$ дают уравнения, которые служат для определения c_k. Рассмотрим коэффициент e_k $(k > t)$: в нем коэфициент z_j $(j \leq t)$ есть нуль по (53), так как $k > j$. Такими образом мы имеем условия

$$\sum_{j=t+1}^{n} \sum_{ij=1}^{n} a_i \gamma_{ijk} z_j - \omega_1 z_k = 0 \qquad (k = t+1, \ldots, n).$$

Матрица из коэффициентов z есть вышеприведенное M, если $\omega = \omega_1$. Но $|M| = 0$. Итак существует $t + t'$ $(t' \geq 1)$ линейно-независимых решений z для (54), включая решения $e_1, \ldots, e_t$ из (52). Взявши их, как первые $t + t'$ новых e, мы находим, как прежде, что $\delta(\omega)$ имеет множитель $(\omega_1 - \omega)^{t+t'}$. Если $m_1 = t + t'$, то мы не действуем далее с ω_1. Но если $m_1 < t + t'$, то существуют решения $w \neq 0$ для

$$aw = \omega_1 w + \sum_{k=1}^{t+t'} d_k e_k.$$

Окончательно мы получаем m_1 линейно-независимых чисел

$$\alpha_1, \quad \alpha_1', \ \ldots, \ \alpha_1^{(m_1-1)}$$

таких, что

$$a\alpha^{(i)} = \omega_1\alpha_1^{(i)} + \text{ лин. функция от } \alpha_1, \ldots, \alpha_1^{(i-1)}. \tag{55}$$

Аналогично, если ω_j — корень кратности m_j, то существует m_j линейно-независимых чисел $\alpha_j, \alpha_j', \ldots$ таких, что[36]

$$a\alpha_j^{(i)} = \omega_j\alpha_j^{(i)} + \text{ лин. функция от } \alpha_j, \ldots, \alpha_j^{(i-1)}. \tag{55$'$}$$

Эти $n = m_1 + \ldots + m_h$ чисел $\alpha_j^{(i)}$ линейно-независимы. Прежде всего, если $\alpha_2 = l$, где $l = c_0\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_1^{(k)}$, $c_k \neq 0$, то

$$\omega_2\alpha_2 = a\alpha_2 = \omega_1 l + l', \qquad 0 = (\omega_1 - \omega_2)l + l',$$

где l' — линейная функция от $\alpha_1, \ldots, \alpha_1^{(k-1)}$. Но $\alpha_1^{(k)}$ не является линейной функцией от тех α. Далее, если $\alpha_2' = c\alpha_2 + l$, то умножение на a слева дает

$$\omega_2\alpha_2' + g\alpha_2 = c\omega_2\alpha_2 + \omega_1 l + l'.$$

Исключая α_2', мы получаем

$$g\alpha_2 = (\omega_1 - \omega_2)l + l',$$

что, как уже доказано, невозможно, если $g \neq 0$ или $g = 0$. Общий ход доказательства следует аналогично по индукции. Поэтому $\alpha_j^{(i)}$ могут быть введены, как n единиц, нормализованных относительно a.

По доказательству, ведущему к (55), если ax отличается от $\omega_1 x$ на линейную функцию от $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$, то x само — такая линейная функция.

Иногда мы будем употреблять результат, подобный нашему первому: существует число $y \neq 0$ и скалар ω такой, что

$$yx = \omega y, \tag{56}$$

тогда и только тогда, когда $\delta'(\omega) = 0$.

24. Пример. Алгебра с единицами $e_1, \ldots, e_5$ такими, что

$$e_1e_5 = e_1, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_2e_5 = e_2, \quad e_3e_5 = e_3,$$
$$e_4e_1 = e_1, \quad e_4e_2 = e_2, \quad e_4^2 = e_4, \quad e_5e_3 = e_3, \quad e_5^2 = e_5,$$

тогда как оставшиеся e_ie_j — нули, ассоциативна и имеет модуль $\varepsilon = e_4 + e_5$. Условия для $xy = \omega y$ таковы:

$$(x_4 - \omega)y_1 + x_2y_3 + x_1y_5 = 0, \quad (x_4 - \omega)y_2 + x_2y_5 = 0,$$
$$(x_5 - \omega)y_3 + x_3y_5 = 0, \quad (x_4 - \omega)y_4 = 0, \quad (x_5 - \omega)y_5 = 0.$$

[36] Для случая ассоциативных алгебр, имеющих модуль, это было установлено без доказательства Картаном (E. Cartan), Ann. Fac. Sc. Toulouse, том 12 (1898), мемуар B. стр. 17.

Детерминант из коэфициентов $y_1, \ldots, y_5$, очевидно,

$$\delta(\omega) \equiv (x_4 - \omega)^3 (x_5 - \omega)^2.$$

Для $x = a = e_5$, $x_5 = 1$, $x_i = 0$ $(i < 5)$ и $\delta(\omega) = 0$ имеет корни $0; 1$. Если $\omega = 0$, то пять условий сводятся к $y_3 = y_5 = 0$. Так как y_1, y_2, y_4 произвольны, то мы можем взять e_1, e_2, e_4 в качестве линейно-независимых решений y для $ay = 0$. Затем, если $\omega = 1$, то условия сводятся к $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, и мы можем взять e_3, e_5, как линейно независимые решения y для $ay = 0$. Следовательно e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 — единицы, нормализованные относительно $a = e$.

ЧАСТЬ II

ПЕРЕСМОТР ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КАРТАНА КОМПЛЕКСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С МОДУЛЕМ

25. Единицы, имеющие характер. Если x некоторое число, то § 23 дает

$$a(\alpha, x) = (a\alpha_1)x = (\omega_1\alpha_1)x = \omega_1(\alpha_1 x).$$

Следовательно (конец § 23), $\alpha_1 x$ — линейная функция $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$. Потом

$$a(\alpha_1' x) = (\omega_1\alpha_1' + \lambda\alpha_1)x = \omega_1(\alpha_1' x) + \text{ линейная функция от } \alpha_1, \alpha_1', \ldots$$

Итак, $\alpha_1' x$ — линейная функция от $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$ По индукции, мы видим, что аналогично, всякое $\alpha_j^{(i)}$ — линейная функция от $\alpha_j, \alpha_j', \ldots$.

Если ε — модуль, то $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h$, где ε_j — линейная функция от единиц $\alpha_j, \alpha_j', \ldots$. Согласно предыдущему результату, $\varepsilon_j \alpha_1^{(i)}$ — линейная функция от $\alpha_j, \alpha_j', \ldots$. Поэтому

$$\alpha_1^{(i)} = \varepsilon\alpha_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_j \alpha_1^{(i)}$$

дает

$$\varepsilon_1\alpha_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)}, \qquad \varepsilon_j\alpha_1^{(i)} = 0 \quad (j \neq 1). \tag{57}$$

Аналогично, мы имеем

$$\varepsilon_2\alpha_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)}, \qquad \varepsilon_j\alpha_2^{(i)} = 0 \quad (j \neq 2). \tag{58}$$

Сразу следует, что

$$\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j, \qquad \varepsilon_j\varepsilon_k = 0 \quad (j \neq k) \tag{59}$$

Будем называть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ *частичными модулями* алгебры.

Так как $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_1$, то не всякое $\alpha_1^{(i)}\varepsilon_1$ — нуль. После соответствующего размещения $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$, мы можем принять, что

$$\alpha_1\varepsilon_1, \;\; \alpha_1'\varepsilon_1, \;\ldots,\; \alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1 \qquad (p \geq 1) \tag{60}$$

линейно-независимы, когда каждое $\alpha_1^{(k)}\varepsilon_1$ $(k \geq p)$ линейно-зависимо от чисел (60):

$$\alpha_1^{(k)}\varepsilon_1 = c_0^{(k)}\alpha_1\varepsilon_1 + \ldots + c_{p-1}^{(k)}\alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1 \qquad (k = p, \ldots, m_1 - 1).$$

Вместо этих единиц $\alpha_1^{(k)}$ мы вводим

$$\overline{\alpha}_i^{(k)} = \alpha_1^{(k)} - c_0^{(k)}\alpha_1 - \ldots - c_{p-1}^{(k)}\alpha_1^{(p-1)} \qquad (k = p, \ldots, m_1 - 1).$$

Тогда $\overline{\alpha}_1^{(k)}\varepsilon_1 = 0$. Снимая черточки с этих α, мы имеем m_1 линейно-независимых единиц $\alpha_1^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m_1 - 1)$ таких, что

$$\alpha_1^{(k)}\varepsilon_1 = 0 \qquad (k = p, \ldots, m_1 - 1), \tag{61}$$

если числа (60) — линейно-независимы.

Свойство, что всякое $\alpha_1^{(i)}$ — линейная функция от $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$, очевидно остается верным также для данного $\alpha_1^{(i)}$. Положим

$$\alpha_1\varepsilon_1 = k_0\alpha_1 + \ldots + k_{m-1}\alpha_1^{(m-1)}.$$

Так как $(\alpha_1\varepsilon_1)\varepsilon_1 = \alpha_1\varepsilon_1$, то мы имеем, по (61),

$$\alpha_1\varepsilon_1 = k_0\alpha_1\varepsilon_1 + \ldots + k_{p-1}\alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_1.$$

Вследствие линейной независимости чисел (60)

$$k_0 = 1, \;\; k_1 = 0, \;\; \ldots, \;\; l_{p-1} = 0,$$
$$\alpha_1\varepsilon_1 = \alpha_1 + k_p\alpha_1^{(p)} + \ldots + k_{m_1-}\alpha_1^{m_1-1)}.$$

Аналогично

$$\alpha_1'\varepsilon_1 = \alpha_1' + k_p'\alpha_1^{(p)} + \ldots, \qquad \alpha_1^{(p-1)} = \alpha_1^{(p-1)} + k_p^{(p-1)}\alpha_1^{(p)} + \ldots$$

Правые члены $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_1', \ldots, \overline{\alpha}_1^{(p-1)}$ этих уравнений, вместе с $\alpha_1^{(p)}, \ldots, \alpha_1^{(m-1)}$ очевидно, дают m_1 линейно-независимых функций от $\alpha_1^{(i)}$, и поэтому могут быть взяты, как новые единицы. Но, по (61),

$$\overline{\alpha}_1\varepsilon_1 = \alpha_1\varepsilon_1 = \overline{\alpha}_1, \;\; \overline{\alpha}_1'\varepsilon_1 = \overline{\alpha}_1', \;\; \ldots, \;\; \overline{\alpha}_1^{(p-1)}\varepsilon_1 = \overline{\alpha}_1^{(p-1)}.$$

Снимая черточки с этих α, мы имеем (61) и

$$\alpha_1\varepsilon_1 = \alpha_1, \;\; \alpha_1'\varepsilon_1 = \alpha_1', \;\; \ldots, \;\; \alpha_i^{(p-1)}\varepsilon_1 = \alpha_1^{(p-1)}.$$

Так как $\varepsilon_1\varepsilon_i = 0$ по (59), если $i \neq 1$, то

$$\alpha_1\varepsilon_i = (\alpha_1\varepsilon_1)\varepsilon_i = \alpha_1(\varepsilon_1\varepsilon_i) = 0, \;\; \alpha_1'\varepsilon_i = 0, \;\; \ldots, \;\; \alpha_1^{(p-1)}\varepsilon_i = 0 \qquad (i \neq 1).$$

Поэтому, если η — одно из чисел $\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1^{(p-1)}$, то

$$\eta\varepsilon_1 = \eta, \;\; \eta\varepsilon_i = 0, \;\; \varepsilon_1\eta = \eta, \;\; \varepsilon_i\eta = 0 \qquad (i \neq 1) \tag{62}$$

последняя пара из (57). Эти соотношения имеют место для $\eta = \varepsilon_1$ по (59).

Если $p = m_1$, то η включают все $\alpha_1^{(j)}$. Но если $p < m_1$, то $\alpha_1^{(k)}\varepsilon_2, \ldots, \alpha_1^{(k)}\varepsilon_h$ не являются все нулями, причем k — некоторое определенное целое число $\geq p$. Ибо, если б было так, то имело бы место $\alpha_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)}\varepsilon = \alpha_1^{(k)}\varepsilon_1$ вопреки (61). Предположим сначала, что не все $\alpha_1^{(k)}\varepsilon_2$ — нули. Тогда доказательство, начиная с (60), повторяется для $\alpha_1^{(p)}, \ldots, \alpha_1^{(m_1-1)}$ относительно ε_2. Таким образом если η какое-либо из определенных $q > 0$ чисел $\alpha_1^{(p)}, \ldots, \alpha_1^{(p+q-1)}$, то

$$\eta\varepsilon_2 = \eta, \quad \eta\varepsilon_i = 0 \ (i \neq 2), \quad \varepsilon_1\eta = \eta, \quad \varepsilon_i\eta = 0 \ (i \neq 1), \qquad (i \neq 1) \tag{63}$$

последняя пара из (57). Мы поступаем аналогично до тех пор, пока ряд

$$\alpha_1, \ \ \alpha_1', \ \ \ldots, \ \ \alpha_1^{(m_1-1)}$$

не исчерпается.

Аналогичное распределение и $\alpha_2^{(i)}$ в ряды η может быть проведено, и то же имеет место для $\alpha_h^{(i)}$. Мы можем предположить, что ε_2 — одно из η, происходящих от $\alpha_2^{(i)}$ и т. д.

О всяком η в (62) говорят, что оно имеет характер $(1,1)$; о всяком η в (63), что его характер $(1,2)$. Вообще, η *характера*[37] (α,β), если

$$\varepsilon_i\eta = 0 \ (i \neq \alpha), \quad \varepsilon_\alpha\eta = \eta, \quad \eta\varepsilon_j = 0 \ (j \neq \beta), \quad \eta\varepsilon_\beta = \eta. \tag{64}$$

В частности, ε_i характера (i,i).

Теорема. *Мы можем найти n линейно-независимых единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, \eta_1, \ldots, \eta_{n-h}$, причем каждая будет иметь определенный характер.*

Например, в матричной алгебре из n^2 единиц e_{ij} в § 4, $\varepsilon_i = e_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — частичные модули, и e_{ij} характера (i,j) в силу (14).

О всяком числе η говорят, что оно — характера (α,β) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет соотношениям (64). *Сумма двух чисел равного характера имеет тот же характер; сумма двух чисел неравного характера не имеет характера.* Ибо, если η имеет характер (α,β), а η' характер (γ,δ), то $(\eta+\eta')\varepsilon_\beta = \eta+\eta'$ или η, смотря по тому, имеет ли место $\beta = \delta$ или $\beta \neq \delta$, тогда как

$$\eta_\alpha(\eta+\eta') = \eta+\eta' \quad \text{или} \quad \eta,$$

смотря по тому, имеет ли место $\gamma = \alpha$ или $\gamma \neq \alpha$.

26. Пример. Мы найдем характер каждой из нормализованных единиц в примере § 24. Здесь $h = 2$, $\varepsilon_1 = e_4$, $\varepsilon_2 = e_5$. Тогда

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0, \\
\varepsilon_1 e_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 e_1 = 0, \quad e_1\varepsilon_1 = 0, \quad e_1\varepsilon_2 = e_1, \\
\varepsilon_1 e_2 = e_2, \quad \varepsilon_2 e_2 = 0, \quad e_2\varepsilon_1 = 0, \quad e_2\varepsilon_2 = e_2, \\
\varepsilon_1 e_3 = 0, \quad \varepsilon_2 e_3 = e_3, \quad e_3\varepsilon_4 = 0, \quad e_3\varepsilon_2 = e_3.
\end{gathered}$$

Следовательно, ε_1 — характера $(1,1)$, ε_2 и e_3 характера $(2,2)$ и e_1 и e_2 — характера $(1,2)$.

[37]Введено Шефферсом, Math. Annal., том 39 (1891), стр. 313, в связи с алгебрами без кватернионной под-алгебры. Настоящее доказательство общей теоремы является расширением доказательства Картана, loc. cit., стр. 19.

27. Теорема. *Произведение числа η характера (α, β) на число η' характера (γ, δ) есть нуль, если $\beta \neq \gamma$, и или, нуль, или число характера (α, δ), если $\beta = \gamma$.*

Мы имеем $\varepsilon_\alpha \eta = \eta \varepsilon_\beta = \eta$, $\varepsilon_\gamma \eta' = \eta' \varepsilon_\delta = \eta'$,

$$\varepsilon_\alpha \eta \eta' = \eta \eta' = \eta \eta' \varepsilon_\delta, \quad \eta \eta' = (\eta \varepsilon_\beta)(\varepsilon_\gamma \eta') = \eta(\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma)\eta'.$$

Следовательно, если $\beta \neq \gamma$, то $\eta\eta' = 0$, так как $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = 0$. Если $\beta = \gamma$ и $\eta\eta' \neq 0$, то $\eta\eta'$ — характера (α, δ).

28. Под-алгебры Σ_i. Произведение двух чисел характера (i, i) является числом характера (i, i). Также в силу замечания в конце § 25, все числа характера (i, i) из начальной алгебры Σ образуют линейную ассоциативную под-алгебру Σ_i с модулем ε_i.

Характеристическое уравнение[38] *для Σ_1 имеет единственный корень и его кратность — число m единиц у Σ_1.*

Ибо, если бы было два или более различных корней, то Σ_1 имело бы по крайней мере два частичных модуля ε_1', ε_1'' (§ 25). Положим

$$a = x_1'\varepsilon_1' + x_1''\varepsilon_1'' + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_h\varepsilon_h,$$

где x-ы произвольные скалары. Тогда

$$a\varepsilon_1' = x_1'\varepsilon_1', \quad a\varepsilon_1'' = x_1''\varepsilon_1'', \quad a\varepsilon_2 == x_2\varepsilon_2, \ \ldots, \ a\varepsilon_h = x_h\varepsilon_h.$$

Поэтому (§ 23) характеристическое уравнение относительно a для Σ имеет различные корни: $x_1', x_1'', x_2, \ldots, x_h$, тогда как число их $\leq h$.

29. Выберем единицы e_i из Σ_1 так, чтобы e_1 было модулем ε_1. Как только что доказано, характеристическое уравнение для $x = \sum x_i e_i$ есть $(\omega - l)^m = 0$, где $l = \sum c_i x_i$. Взявши $x = \varepsilon_1$, мы имеем $\omega = 1$, $l = c_1$, откуда $c_1 = 1$. Возьмем в качестве новых единиц ε_1, $\eta_i = e_i - c_i\varepsilon_1$ $(i = 2, \ldots, m)$. Тогда

$$x = x_1'\varepsilon_1 + \sum x_i\eta_i,$$

где $x_1' = l$. Для алгебры в новых единицах характеристическое уравнение относительно x есть $(\omega - x_1')^m = 0$. Поэтому характеристическое уравнение для всякой линейной комбинации из $\eta_2, \ldots, \eta_m$, не имеет корня, отличного от нуля.

30. Нильпотентные числа. Число называется *нильпотентным*[39], если некоторая степень его есть нуль. Пусть $\eta^k = 0$, $\eta \neq 0$ и назовем ω некоторый корень характеристического уравнения относительно η. Существует (§ 23) число $y \neq 0$ такое, что $\eta y = \omega y$. Умножим на η^{k-1} слева. Таким образом

$$0 = \omega\eta^{k-1}y = \omega\eta^{k-2}(\omega y) = \omega^2\eta^{k-3}(\omega y) = \ldots = \omega^k y.$$

[38]Добавление «правый» часто будет опускаться.

[39]Пирс, Amer. Journ. Math., том 4 (1881), стр. 97. Название «корень из нуля» (Wurzel der Null) употреблялось Фробениусом Sitzungsber. Ak. Berlin. 1903, стр. 635; псевдо-нуль (pseudo-nul) Картаном, loc. cit., стр. 21.

Поэтому $\omega = 0$. Обратно, если характеристическое уравнение относительно η имеет всеми корнями нули, то степень η исчезает по теореме 1, § 15. *Итак число является нильпотентным тогда и только тогда, когда всякий корень его характеристического уравнения есть нуль.* Аналогично, или по теореме 1, § 19 *каждый корень левого характеристического уравнения относительно нильпотентного числа есть нуль.*

31. Теорема. *В качестве единиц Σ_1 мы можем взять их модуль ε_1 и $m - 1$ нильпотентных чисел η таких, что всякая линейная функция от η является нильпотентною.*

Это следует из результата § 29.

32. Нормализованные единицы. На основании последней теоремы и § 25, мы можем взять, как n единиц всякой алгебры частичные модули $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ и $n - h$ нильпотентных чисел, каждое из которых определенного характера. Заметим, что всякое число характера (α, β), $\alpha \neq \beta$ нильпотентное, так как его квадрат — нуль.

33. Примеры. В алгебре, рассмотренной в § § 24, 26, подалгебра Σ_2 чисел с характером $(2, 2)$ имеет две единицы ε_2 и e_3, из которых ε_2 частичный модуль. Для $x = e_3$ формула § 24 дает $\delta(\omega) = \omega^5$. Таким образом e_3 — нильпотент в главной алгебре Σ. Мы имеем $e_3^2 = 0$. Аналогично, e_1 и e_2 — нильпотентны. Следовательно, нормализованными единицами Σ являются ε_1, ε_2 и нильпотентные числа e_1, e_2, e_3.

В виде поучительного примера, читатель может при помощи общей теории показать, что алгебра комплексных кватернионов ? эквивалентна матричной алгебре четырех единиц (взять в § 23 $a = i$).

Он может также разобрать алгебру $(e_1, \ldots, e_4)$, где

$$e_1e_4 = e_1, \quad e_2e_3 = e_2, \quad e_3e_1 = e_1, \quad e_3^2 = e_3, \quad e_4^2 = e_4, \quad e_4e_2 = e_2,$$

тогда как все дальнейшие произведения двух единиц — нули; здесь модуль: $e_3 + e_4$.

34. Теорема. *Произведение всякого нильпотентного числа η характера (i, i) на всякое число и того же характера — само нильпотентное.*

Для конкретности возьмем $i = 1$. Тогда произведение ηu имеет характер $(1, 1)$ и поэтому находится в алгебре Σ_1. По § 31,

$$\eta u = a\varepsilon_1 + \eta' \quad (a \text{ — скалар}, \quad \eta' \text{ — нильпотентно}).$$

Так как $\eta\varepsilon_1 = \eta'$, то мы имеем

$$\eta^2 u = a\eta + \eta\eta'.$$

Пусть m наименьшее положительное целое число, для которого $\eta^m u = 0$. Если $m = 1$, то теорема верна. Если $m \geq 2$, то помножим слева предыдущее уравнение на η^{m-2}. Таким образом

$$\eta^{m-1}\eta' = (-a)\eta^{m-1}, \qquad \eta^{m-1} \neq 0.$$

Значит, $a = 0$, так как η' — нильпотентно (конец § 30). Итак $\eta u = \eta'$.

В примере § 26, § 33 e_3 — нильпотентно, e_3 и e_2 — характера $(2, 2)$, и $e_3\varepsilon_2 = e_3$ нильпотентно.

35. Разделение алгебр на две категории. Алгебра относится к первой категории, если детерминант $\Delta(x)$ ее общего числа $\sum x_i e_i$ является произведением n линейных однородных функций[40] от $x_1, \ldots, x_n$.

Алгебра принадлежит ко второй категории, если $\Delta(x)$ имеет нелинейный неприводимый множитель $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Бинарная алгебра — первой категории, ибо однородная функция от x_1 и x_2 является произведением линейных функций. Пять типов тернарных алгебр (45)–(49) — первой категории, так как для каждой $\Delta(x) \equiv \delta(0)$ является произведением линейных множителей.

Алгебра комплексных кватернионов — второй категории, так как (§ 12) $\Delta(q)$ является квадратом неприводимой функции $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. Также мы можем пользоваться эквивалентной матричной алгеброй § 4.

По (16), (17),

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}, \tag{65}$$

тогда как общий детерминант второго порядка — неприводим.

Позже (§ 46) мы докажем, что алгебра принадлежит ко второй категории тогда и только тогда, когда имеет кватернионную под-алгебру. Тогда из этого будет следовать, что приведенная выше классификация алгебр на алгебры первой и второй категории (Картан, lib. cit, стр. 24) совпадает с классификацией[41] алгебр на алгебры без или с кватернионными под-алгебрами.

Алгебры A_1 первой категории

36. Теорема. *Сумма двух нильпотентных чисел из A_1 — нильпотентное число.*

Различные корни характеристического уравнения для $x = \sum x_i e_i$ по предположению — вида

$$\omega_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, h),$$

где a зависят лишь от констант умножения γ_{ijk}. Значит корни характеристического уравнения для $x + x'$ есть

$$a_{i1}(x_1 + x_1') + \ldots = \omega_i + \omega_i'.$$

Если x и x' — нильпотентны, то каждое $\omega_i = \omega_i' = 0$, и $x + x'$ — нильпотентно.

---

[40] С коэфициентами в F, если мы разбираем алгебры над,полем F. Так как ω теперь в F и так как действия в §§ 36–39 чисто рациональные, то мы получим нормализованные единицы (§ 39) с координатами в F; сравни с примером § 26, 33.

[41] Шефферс, Math. Annal., том 39 (1891), стр. 305; Quaternionsysteme, Nichtquaternionsysteme. Молин, ibid., том 41 (1893), стр. 83.

По § 32 всякое число из A_1 — вида

$$x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_h\varepsilon_h + y_1\eta_1 + \ldots + y_k\eta_k, \tag{66}$$

где ε — частичные модули и η нильпотентные числа, каждое с определенным характером. Так как

$$(x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_h\varepsilon_h)\varepsilon_i = x_i\varepsilon_i,$$

то характеристическое уравнение для (66) имеет корнями $x_1, \ldots, x_h$, и поэтому (66) — *нильпотентно тогда и только тогда, когда $x_1, \ldots, x_h$ все нули.*

37. Теорема. *Произведение всякого нильпотентного числа из A_1 на всякое число и из A_1 — нильпотентно.*

Достаточно доказать, что $\eta_1 u, \ldots, \eta_k u$ — нильпотентны.

Рассмотрим некоторое η характера $(1,1)$, выразим u в виде суммы компонентов, где каждый — определенного характера. Произведение η на компонент будет нулем или характера $(1,j)$, $j > 1$, и потому является нильпотентным числом (§ 32), если компонент — не характера $(1,1)$. В последнем случае также произведение — нильпотентно (§ 34).

Рассмотрим η характера $\neq (i,i)$, хотя бы $(1,2)$. Как и выше, достаточно взять u характера $(2,1)$. Тогда ηu — характера $(1,1)$ и

$$\eta u = a\varepsilon_1 + \zeta,$$

где a — скалар и ζ — нильпотентное число характера $(1,1)$. Если $a = 0$, то теорема доказана. Впредь, пусть $a \neq 0$. Тогда (§ 34)

$$(\eta u)^2 = a^2\varepsilon_1 + \zeta_1, \qquad \zeta_1 = 2a\zeta + \zeta^2,$$

где ζ_1 — нильпотентное число из Σ_1 в § 28. По индукции,

$$(\eta u)^m = a^m\varepsilon_1 + \zeta_m,$$

где ζ_m — нильпотентно. Если $u\eta$ — нильпотентно, то его m-тая степень — нуль, где m — некоторое целое число. Тогда

$$0 = \eta(u\eta)^m = (\eta u)^m\eta = a^m\eta + \zeta_m\eta,$$

так как $\varepsilon_1\eta = \eta$, и η — характера $(1,2)$. Таким образом — a^m является корнем характеристического уравнения для ζ_m. Это — невозможно, ибо $a \neq 0$ и ζ_m — нильпотентно. Поэтому $u\eta$ не является нильпотентным:

$$u\eta = a'\varepsilon_2 + \zeta',$$

где $a' \neq 0$, и ζ' — нильпотентное число характера $(2,2)$.

Если $v \neq 0$ характера $(2,1)$, то тогда $\eta v \neq 0$. Ибо, если $\eta v = 0$, то

$$0 = u(\eta v) = (u\eta)v = a'v + \zeta' v,$$

тогда как $-a'$ не корень характеристического уравнения для нильпотентного числа ζ', так как a' не нуль. Если $v_1, \dots, v_t$ образуют полный[42] ряд линейно-независимых чисел характера $(2,1)$, то $\eta v_1, \dots, \eta v_t$ — линейно-независимы и характера $(1,1)$. Действительно, $\sum c_i \eta v_i = 0$ предполагает $\eta v = 0$, где $v = \sum c_i v_i$.

Если $w \neq 0$ характера $(1,1)$, то $uw \neq 0$. Ибо, если $uw = 0$, то

$$0 = (\eta u)w = aw + \zeta w,$$

тогда как $-a$ не является корнем характеристического уравнения для нильпотентного числа ζ. Если $w_1, \dots, w_\tau$ образуют полный ряд линейно-независимых чисел характера $(1,1)$, то $uw_1, \dots, uw_\tau$ линейно-независимы и характера $(2,1)$. В самом деле $\sum c_i uw - i = 0$ предполагает $uw = 0$, $w = \sum c_i w_i$.

По первому выводу, $t \leq \tau$, по второму $\tau \leq t$. Следовательно $\tau = t$, и $\eta v_1, \dots, \eta v_t$ образуют полный ряд линейно-независимых чисел характера $(1,1)$. Поэтому существуют скалары d_i такие„ что $\sum d_i \eta v_i = \varepsilon_1$. Таким образом $\eta v = \varepsilon_1$ для $v = \sum d_i v_i$. Здесь η — характера $(1,2)$ и v характера $(2,1)$. Следовательно

$$(\eta + v)(\varepsilon_1 + v) = \varepsilon_1 + v.$$

Характеристическое уравнение для $\eta + v$ имеет поэтому корнем» единицу, тогда как оно является суммой двух нильпотентных чисел из A_1 и значит — нильпотентно. Предположение, что $a \neq 0$ привело нас к противоречию.

Сохраняя порядок множителей в наших произведениях, мы видим, что *произведение всякого числа из A_1 на всякое нильпотентное число является нильпотентным.*

Следствие. *Нильпотентные числа из A_1 образуют линейную ассоциативную алгебру N без модуля.*

Если бы она имела модуль η, то было бы $\eta u = u$, тогда как единица не является корнем характеристического уравнения относительно нильпотентного числа η.

Алгебра называется *нильпотентной*, если все ее числа нильпотентны.

38. Нормализованные единицы нильпотентной алгебры.

Теорема. *В нильпотентной алгебре N линейно-независимые единицы $\eta_1, \dots, \eta_k$, каждая определенного характера*[43]*, могут быть выбраны так, что произведение всяких двух единиц η_i и η_j является линейной функцией от единиц η, у которых индексы превышают как i, так и j.*

Если $k = 1$, то $\eta_1^2 = a\eta_1$, где a — скалар. Так как a — корень-характеристического уравнения для нильпотентного числа η_1, то $a = 0$.

Таким образом теорема верна для $k = 1$, ибо она утверждает, что η_1^2 линейная функция от (несуществующих) η, у которых индексы превышают 1, и поэтому должно быть $\eta_1^2 = 0$.

Принимая, что теорема имеет место для нильпотентных алгебр с меньшим, чем k числом единиц, мы докажем ее для алгебры N с k единицами: $e_1, \dots, e_k$.

[42] Каждое число характера $(2,1)$ должно быть линейной функцией от $v_1, \dots, v_t$ со скалярными коэфициентами. Основанием определения является результат конца § 25.

[43] Это дополнение относительно характера прилагается к алгебрам, содержащимся в алгебре с частичными модулями.

Лемма. *Существует число u из N, для которого*

$$e_1 u = 0, \quad e_2 u = 0, \ \ldots, \ e_k u = 0. \tag{67}$$

Между всеми числами u (включая конечно степень e_1), для которых $e_1 u = 0$, может быть несколько таких, для которых $e_2 u = 0$, также несколько и таких, для которых $e_3 u = 0$ и т. д. Пусть лемма не верна. Тогда ни одно из этих u не удовлетворяет (67). Поэтому существует целое число $m < k$, для которого имеют

$$e_1 u = 0, \quad e_2 u = 0, \ \ldots, \ e_m u = 0 \tag{68}$$

общее решение $u \neq 0$, при том такое, что ни одно общее решение u не образует $eu = 0$, где e некоторое число из N, линейно-независимое от $e_1, \ldots, e_m$. Всякая линейная комбинация из решений для (68) является решением. Поэтому мы можем положить, что $u_1, \ldots, u_n$ образуют полный ряд линейно-независимых решений для (68). Для $j \leq m$, $(e_i e_j)u$ является нулем для каждого решения u. Поэтому $e_i e_j$ — линейная функция от $e_1, \ldots, e_m$. Таким образом $e_1, \ldots, e_m$ — единицы нильпотентной под-алгебры N_1. Так как $m < k$, то предположение для нашей индукции показывает, что наша теорема имеет место для N_1. Поэтому, если $i \leq m$, $j \leq m$, то $e_i e_j$ — линейная функция от e, у которых индексы превышают i и j, но не m.

Пусть ν некоторое число $\neq 0$ из N. Тогда или ν — линейная комбинация из $u_1, \ldots, u_n$, или существует число η из N_1 такое, что $\eta\nu$ — линейная комбинация $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u)n$. Ибо, если $i \leq m$, то $e_i e_m = 0$, как только что доказано, и $e_i(e_m \nu) = 0$ и $e_m \nu$ — линейная комбинация из независимых решений $u_1, \ldots, u_n$ для (68). Если $e_m \nu$, то наше выделенное курсивом утверждение доказано. Если $e_m \nu = 0$, то каждое $e_i e_{m-1} \nu = 0$ $(i \leq m)$, так как $e_i e_{m-1}$ — кратное e_m, как только что доказано. Таким образом $e_{m-1}\nu$ — лилейная комбинация из $u_1, \ldots, u_n$. Поэтому наше выделенное курсивом утверждение верно, если невозможно, что каждое $e_i \nu = 0$; но тогда ν само является линейной комбинацией из $u_1, \ldots, u_n$.

Если взять $e_{m+1} u_1$ в качестве ν, то наш выделенный курсивом вывод показывает, что или $e_{m+1} u_1$ или оно же, взятое η раз, является линейной функцией $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n$. В соответствующих случаях возьмем $\zeta_1 = e_{m+1}$ или η_{m+1}. Таким образом, $\zeta_1 u_1 \neq 0$. Так как ζ_1 — нильпотентно, то $\zeta_1 u_1 \neq s u_1$, где s — скаляр. Поэтому, меняя обозначения u, мы можем взять $\zeta_1 u_1 = u_2$.

Для этого нового u_2 возьмем $e_{m+1} u_2$ в качестве ν в нашем выделенном курсивом выводе. Таким образом $\zeta_2 = e_{m+1}$ или $\eta' e_{m+1}$ имеет то свойство, что $\zeta_2 u_2$ является линейной комбинацией $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n$. Если $\zeta_2 u_2$ линейная комбинация от u_1, u_2, то мы имеем

$$\zeta_1 u_1 = u_2, \quad \zeta_2 u_2 = u_3, \ \ldots, \ \zeta_{p-1} u_{p-1} = u_p, \quad \zeta_p u_p = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \tag{69}$$

для $p = 2$, где скалары $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ не все нули. В противном случае мы можем взять $\zeta_2 u_2 = u_3$. Начавши с u_3, мы получаем число ζ_3 такое, что $\zeta_3 u_3$ будет линейной функцией $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n$. Если дело ограничивается лишь u_1, u_2, u_3, то мы имеем (69) для $p = 3$. Если этого нет, то берем $\zeta_3 u_3 = u_4$ и т. д.

Мы можем положить $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{s-1} = 0$, $\lambda_s \neq 0$, где s — некоторое целое число ≥ 1. Положим

$$l = \zeta_p \zeta_{p-1} \cdots \zeta_{s+1} \zeta_s - \lambda_p \zeta_{p-1} \cdots \zeta_s - \ldots - \lambda_{s+2} \zeta_{s+1} \zeta_s - \lambda_{s+1} \zeta_s.$$

Помножим на u_s справа. По (69) произведение будет таково,

$$\zeta_p u_p - \lambda_p u_p - \ldots - \lambda_{s+2}\lambda_{s+2} - \lambda_{s+1}u_{s+1} = \lambda_s u_s.$$

Таким образом $lu_s = \lambda_s u_s$. Но l нильпотентно и $\lambda_s \neq 0$. Поэтому предположение, что лемма неверна, приводит к противоречию.

Пусть поэтому $u_1, \ldots, u_n$ $(n \geq 1)$ образуют полный ряд линейно-независимых решений u системы уравнений (67). Пусть η — некоторое число из N. Тогда $(e_j u_i)\eta = 0$ такое, что $u_i\eta$ — линейная функция от $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_i\eta = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n.$$

Если $u = \sum c_i u_i$, то условия для выполнения $u\eta = \rho u$ таковы

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_{i1} - c_1\rho = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i a_{in} - c_n\rho = 0.$$

Пусть ρ — корень

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда детерминант из коэфициентов у $c_1, \ldots, c_n$ в наших n уравнениях — нуль, поэтому последние имеют ряд решений $c_1, \ldots, c_n$, причем не все они равны нулю. По $u\eta = \varrho u$, ϱ — корень второго характеристического уравнения для нильпотентного числа η. Поэтому $\rho = 0$. Значит, при некотором данном η в N мы можем найти линейную комбинацию $u \neq 0$ из $u_1, \ldots, u_n$ такую, что $u\eta = 0$.

Приложим этот результат к $\eta = e_1$. Поэтому существует линейная функция $u \neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n$, для которой $ue_1 = 0$. Некоторые из решений u для последнего могут давать ue_2, иные также $ue_3 = 0$ и т. д. Следовательно, существует целое число $m \leq k$ такое, что

$$ue_1 = 0, \quad ue_2 = 0, \ \ldots, \ ue_m = 0 \tag{70}$$

имеют общее решение u, являющееся линейной функцией $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n$, но нет такого же решения, которое давало бы также $ue = 0$, где e — число из N, линейное независимое от $e_1, \ldots, e_m$. При изменении обозначений $u_1, \ldots, u_n$ мы можем положить, что $u_1, \ldots, u_n'$ образуют полный ряд линейно-независимых решений для (70).

Мы предположим, что $m < k$, и докажем это от противного. Для $i \leq m$, $u(e_i e_j)m = 0$ для всякого решения u в (70). Поэтому $e_i e_j$ — линейная функция от $e_1, \ldots, e_m$, которые, значит, являются единицами под-алгебры N_1, к которой наша теорема прилагается. Если ν — некоторое число $\neq 0$ из N, то *или ν — линейная комбинация из $u_1, \ldots, u_n'$ или существует число η из N_1 такое, что $\nu\eta$ является линейной функцией $\neq 0$ от $u_1, \ldots, u_n'$*. Ибо если $i \leq m$, то $e_m e_i = 0$, $(\nu e_m)e_i = 0$ и νe_m — линейная комбинация из $u_1, \ldots, u_n'$. Если $\nu e_m \neq 0$, то выделенное курсивом положение имеет место. Если это — нуль, то $\nu e_{m-1}e_i = 0$ $(i \leq m)$, так как $e_{m-1}e_i$ — кратное для e_m. Таким образом νe_{m-1} — линейная функция от $u_1, \ldots, u_n'$. Взявши $u_1 e_{m+1}$ в качестве ν, мы получаем, как при доказательстве леммы, ζ_1, для которого $u_1\zeta_1 \neq su_1$, откуда $u_1\zeta_1 = u_2$ и т. д. Мы получаем (69) с $u_i\zeta_i$ вместо $\zeta_i u_i$, и вместе с тем противоречие $u_s l = \lambda_s u_s$. Следовательно $m = k$, так что существует решение $u \neq 0$ для (67) и (70), откуда $ut = tu = 0$ для всякого числа t в алгебре N.

Это u — сумма чисел u' определенных характеров. Если η — характера (α, β), то $u\eta$ — сумма произведений $u'\eta$, причем каждое или нуль, или определенного характера. Так как $u\eta = 0$, то каждое $u'\eta = 0$?. Аналогично, каждое $\eta u' = 0$.

Введем, как новые линейно-независимые единицы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, где η_k — одно из u' такое, что каждое η имеет определенный характер. Тогда

$$\begin{gathered} \eta_i\eta_k = \eta_k\eta_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \eta_i\eta_j = \sum_{s=1}^{k} \gamma_{ijs}\eta_s \quad (i, j = 1, \ldots, k). \end{gathered} \tag{71}$$

Рассмотрим алгебру с единицами $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ такими, что

$$\zeta_i\zeta_j = \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ijs}\zeta_s \qquad (i, j = 1, \ldots, k-1).$$

Для λ, μ, ν всех меньших k, $(\zeta_\lambda\zeta_\mu)\zeta_\nu = \zeta_\lambda(\zeta_\mu\zeta_\nu)$. В самом деле, $\eta_\lambda\eta_\mu = \eta' + c\eta_k$, где η' — такая же линейная функции от $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, как $\zeta_\lambda\zeta_\mu$ от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$. Но $(\eta_\lambda\eta_\mu)\eta_\nu = \eta'\eta_\nu$, так что его часть сводбодная от η_k — та самая функция от $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, что $(\zeta_\lambda\zeta_\mu)\zeta_\nu$ от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$. Аналогично часть $\eta_\lambda(\eta_\mu\eta_\nu)$ свободная от η_k — та самая функция от $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, что $\zeta_\lambda(\zeta_\mu\zeta_\nu)$ от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$. Так как произведения из η равны, то то же верно и для произведений из ζ. Следовательно, ζ — единицы линейной ассоциативной алгебры.

Так как $\gamma_{iks} = 0$ $(i, s = 1, \ldots, k)$ по (71_1), то элементы k-той строки характеристического детерминанта (10) η-алгебры: $0, \ldots, 0 - \omega$. Так как $\gamma_{kjs} = 0$ $(j, s = 1, \ldots, k)$ по (71_2), то минор $-\omega$ является характеристическим детерминантом ζ-алгебры. Следовательно, каждое число последней — нильпотентно. Так как теорема приложима к этой ζ-алгебре, то мы можем предположить, что новые ζ были введены так, что если i, j, s меньше k, то $\gamma_{ijs} = 0$, если не имеет места $s > i$, $s > j$. Как уже отмечено, этот результат имеет силу также, если $i = k$ или $j = k$. Следовательно, $\eta_1, \ldots, \eta_k$ удовлетворяют требованиям нашей теоремы.

39. Нормализованные единицы алгебры A_1 первой категории. В силу последней теоремы, результата в конце § 25 и замечания в § 36 о единицах мы имеем

Теорему[44]. *Если в характеристическом уравнении $\delta(\omega) = 0$ для A_1 $(\omega - h)$-значная функция от $x_1, \ldots, x_n$, мы можем выбрать в качестве нормализованных единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$, $\eta_1, \ldots, \eta_k$, где каждое η имеет определенный характер, $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ $(i \neq j)$, тогда как $\eta_a\eta_b$ — линейная функция от тех η, у которых индексы превышают a и b и имеют тот же характер, что и $\eta_a\eta_b$.*

Обратно всякая такая алгебра принадлежит к первой категории.

Чтобы доказать обратное, расположим n единиц в таком порядке; сперва ε_1, потом единицы η_i характера: $(1,1), (2,1), \ldots, (h,1)$ в восходяшем порядке их индексов i; далее ε_2 и единицы η_i характера $(1,2), (2,2), \ldots, (h,2)$ в порядке их индексов i и т.

[44]Шефферс Math. Ann., том 39 (1891), стр. 293. Он взял определение алгебр A_1, отличное от определения, употребляемого нами по Картану.

д. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ единицы, расположенные таким образом. Пусть $n_{\alpha\beta}$ — число из единиц η характера (α, β), и положим

$$n_\beta = 1 + n_{1\beta} + n_{2\beta} + \ldots + n_{h\beta}.$$

Характеристический детерминант для $z = z_1\zeta_1 + \ldots + z_n\zeta_n$ будет (40):

$$\delta(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \sum z_i\gamma_{i11} - \omega & \sum z_i\gamma_{i21} & \ldots & \sum z_i\gamma_{in1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum z_i\gamma_{i1n} & \sum z_i\gamma_{i2n} & \ldots & \sum z_i\gamma_{inn} - \omega \end{vmatrix}. \tag{72}$$

Элементы, находящиеся одновременно в одной из первых n_1 строк и последних $n - n_1$ колонок, — нули, так как

$$\gamma_{i\lambda\mu} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \lambda > n_1,\ \mu \leq n_1).$$

Действительно для такого рода индексов, ζ_μ — характера $(\cdot, 1)$, ζ_λ — характера $(\cdot, \delta)$, $\delta > 1$, $\zeta_i\zeta_\lambda$ — нуль или характера $(\cdot, \delta)$. Поэтому в

$$\zeta_i\zeta_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} \gamma\gamma_{i\lambda\mu}\zeta_\mu \tag{73}$$

ζ_μ $(\mu \leq n_1 < \lambda)$ не встречается. Значит, его коэффициент — нуль.

Таким образом $\delta(\omega)$ имеет множителем минор, элементы которого лежат в первых n_1 строках и первых n_1 колонках.

Аналогично, оно имеет n_2-строчный, ..., n_h-строчный миноры множителями.

В n_1-строчном миноре все из его элементов выше главной диагонали — нули, тогда как элемент в λ-той строке и главной диагонали есть $x_t - \omega$, где $(t, 1)$ — характер ζ_λ. Пусть, сперва, $1 < \lambda \leq n_1$, $1 < \mu \leq n_1$, так что ζ_λ, ζ_μ являются η. Тогда если ζ_i является η, $\gamma_{i\lambda\mu} = 0$, если $\mu \leq \lambda$ по выше приведенной теореме[45] Но если $\zeta_i = \varepsilon_t$ и ζ_λ — характера $(\alpha, 1)$, то или $\zeta_i\zeta_\lambda = 0$, или ζ_λ, смотря по тому, имеет ли место $\alpha \neq t$ или $\alpha = t$, так что $\gamma_{i\lambda\mu} = 0$, если $\mu \neq \lambda$, и $\gamma_{i\lambda\lambda} = 0$ или 1, в зависимости от $\alpha \neq t$ или $\alpha = t$. Во вторых, пусть $\mu = 1$ так, что $\zeta_\mu = \varepsilon_1$.

Тогда нет ε_1 в сумме (73), если ζ_i или ζ_λ оба η. Далее пусть $\zeta_i = \varepsilon_t$, так что $\zeta_i\zeta_\lambda = 0$ или ζ_λ, смотря по тому, является или не является ζ_λ числом характера $(t, \cdot)$; таким образом ε_1 встречается в сумме (73) только тогда, когда $\lambda = t = 1$. Так как $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_1$, то $\gamma_{i11} = 0$ $(i > 1)$, $\gamma_{111} = 1$. Наконец, если ζ_λ $(\lambda \leq n_1)$ есть ε, то оно является ε_1 и сумма (73) содержит ε_1 только тогда, когда дело сводится к предыдущему случаю $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_1$. В третьих, если $\lambda = 1$, то $\gamma_{i\lambda\mu}$ — ниже главной диагонали, если только не имеет места $\mu = 1$. Следовательно в нашем миноре все элементы выше главной диагонали — нули и все в главной диагонали — нули, исключая $\gamma_{i\lambda\lambda}$, для которых $\zeta_i = \varepsilon_t$, и ζ характера $(t, 1)$, и эти γ — единицы. Поэтому, если z придано прежнее обозначение (66), то мы имеем результат начала этого параграфа. Таким образом n_1-строчный минор равняется

$$(x_1 - \omega) \prod_{t=1}^{h} (x_t - \omega)^n t_1,$$

[45] ζ_λ и потому все из единиц суммы (73) являются η характера $(\cdot, 1)$, относительный порядок которых не изменился при нашем вторичном перемещении единиц.

где первый множитель получается из ε_1. Аналогично,

$$(x_2-\omega)\prod_{t=1}^{h}(x_i-\omega)^n t_2$$

значение n_2-строчного минора и т. д. Положим

$$n'_t = 1 + n_{t_1} + n_{t_2} + \ldots + n_{t_h}.$$

Поэтому[46]

$$\delta(\omega) = (x_1-\omega)^{n'_1}(x_2-\omega)^{n'_2}\cdots(x_h-\omega)^{n'_h}. \tag{74}$$

Например, если единицами являются ε_1, η_1, ε_2, η_2, где η_1 — характера $(1,1)$, η_2 — характера $(1,2)$, то мы имеем ассоциативную алгебру, для которой характеристический детерминант у $x_1\varepsilon_1 + y_1\eta_1 + x_2\varepsilon_2 + y_2\eta_2$ есть

$$\delta(\omega) = \begin{vmatrix} x_1-\omega & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2-\omega & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & x_1-\omega \end{vmatrix} = (x_1-\omega)^2(x_2-\omega).$$

Для контроля отметим, что $n'_1 = 3$, $n'_2 = 1$ при рассмотрении единиц.

Так как корни — линейные функции от x, то алгебра — первой категории. Так как $x_1,\ldots,x_h$ — независимые переменные и так как $\delta(\omega)$ — ковариант (§ 16, 17), то мы заключаем, что $n'_1,\ldots,n'_h$ не изменяются при линейном преобразовании единиц, которое заменяет алгебру A_1 алгеброй с нормализованными единицами[47]. Употребляя порядок $(1,1), (1,2), \ldots, (1,h)$; $(2,1), \ldots, (2,h)$, ..., мы видим, что показатели $n_1,\ldots,n_h$ в $\delta'(\omega)$ не изменяются при преобразовании.

Сверх того, каждое $n_{\alpha\beta}$ имеет последнее свойство (см. Картан, lib. cit., стр. 36).

Существует обширный список работ, относящихся к определению и классификации алгебр первой категории (Encyc. Sc.Math., том I, 1, стр. 425).

Алгебры A_2 второй категории

40. Свойства характеристического детерминанта для A_2.

Мы используем нормализованные единицы ε_i, η_g, § 32. Линейная комбинация из нильпотентных единиц $\eta_1,\ldots,\eta_k$ не должна быть нильпотентной.

Расположим единицы в порядке $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ как в § 39. Первое свойство детерминанта (72) имеет место и здесь: $\delta = \delta_1\delta_2\cdots\delta_h$, где δ_1 — минор, составленный из элементов в первых n_1 строках и колонках δ и т. д.

В (73) положим $i = 1$, $\lambda \le n_1$. Тогда ζ_λ будет характера $(\cdot,1)$. Так как ζ_1 — частичный модуль ε_1, то мы имеем $\zeta_1\zeta_\lambda = 0$ или ζ_λ, смотря по тому, является ли

[46] Выводы Картана (lib. cit, § 39, 40) — ошибочны.

[47] Но при преобразовании, каждое ε_i может быть увеличено на подходящим образом выбранное нильпотентное число. Например, если $h=2$, $k=1$ и $\eta_1=\eta$ характера $(1,2)$, то таблица умножения такова

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2^2=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_2\eta=\eta\varepsilon_1=0,\quad \eta\varepsilon_2=\eta,\quad \varepsilon_1\eta=\eta,\quad \eta_2=0.$$

Оно не изменится, если мы заменим ε_1 на $\varepsilon'_1=\varepsilon_1+\eta$, ε_2 на $\varepsilon'_2=\varepsilon_2+\eta$. Различные авторы не заметили этой возможности (см. конец § 61).

характером ζ $(\alpha, 1)$, $\alpha > 1$ или $(1,1)$. Значит $\gamma_{1\lambda\mu} = 0$, если только не имеет места $\mu = \lambda$ и ζ_λ характера $(1,1)$. Таким образом z_1 встречается только в главной диагонали δ_1 и только в первых $n_{11}+1$ членах (с коэффициентом единица). Аналогично, у x_{n_1+1} коэффициент ε_2 встречается только в главной диагонали и лишь в n_{21} членах (с коэффициентом единица) и т. д.

Используя второе обозначение (66) для z, мы видим, что $x_1, x_2, \ldots, x_h$ встречаются только в главной диагонали δ_1, и что каждый элемент диагонали содержит один и только один из этих x-ов (с коэффициентом единица). Таким образом, каждый элемент δ_1 является линейным и однородным относительно

$$x_1' = x_1 - \omega,\ \ldots,\ x_h' = x_h - \omega,\quad y_1,\ \ldots,\ y_k. \tag{75}$$

Поэтому δ_1 однородно относительно $x_1', \ldots, y_k$.

Для краткости мы будем говорить, что y_i — того же характера, что η_i и x_i' характера (i,i). Если, в (73), ζ_i — характера $(\alpha, \cdot)$, то $\gamma = 0$, если только ζ_μ не характера $(\alpha, \cdot)$. Обратно, если ζ_μ — характера $(\alpha, \cdot)$, то $\gamma = 0$, если только ζ_i не характера $(\alpha, \cdot)$. Поэтому переменные z_i характера $(\alpha, \cdot)$ входят в те самые строки детерминанта δ_1. Значит δ_1 однородно и степени n_{α_1} или $n_{\alpha_1}+1$ относительно z_i характера $(\alpha, \cdot)$, смотря по тому, имеет ли место $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$. Аналогично δ_1 однородно и степени n_{α_1} или $n_{\alpha_1}+1$ относительно переменных характера $(\cdot, \alpha)$, смотря потому имеет ли место $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$.

Пусть $\delta(\omega) = P_1^{\alpha_1} \cdots P_l^{\alpha_l}$, где $P_1, \ldots, P_l$ — различные неприводимые функции их аргументов (75) и степень P_i относительно ω есть d_i. Тогда $d_1 + \ldots + d_l = h$, если $\delta(\omega) = 0$ определяет ω, как h-значную функцию от x-ов и y-ков. Для $y_1 = 0, \ldots, y_k = 0$ мы видели, что $\delta(\omega)$ сводится к произведению (74) из диагональных элементов. Таким образом P_i сводится к произведению d_i множителей $x_j - \omega$. Получающиеся $\sum d_i$ линейных множителей есть $x_1 - \omega, \ldots, x_h - \omega$ в некотором порядке. Следовательно ни один не появляется дважды в одном и том же P_i или в разных P. Мы можем таким образом положить

$$(P_1)_{y=0} = (x_1 - \omega) \cdots (x_p - \omega) \equiv x_1' \cdots x_p'. \tag{76}$$

Множитель δ_1 в δ — однороден относительно переменных характера $(\alpha, \cdot)$. Поэтому каждый неприводимый множитель P_1 в δ_1 однороден относительно этих переменных. Чтобы найти его степень относительно них, достаточно рассмотреть член (76), который является линейным и однородным относительно переменных характера $(\alpha, \cdot)$. Мы имеем поэтому

Теорему. *Неприводимый множитель P_1 детерминанта δ_1 является линейным и однородным относительно тех из своих аргументов* (75)*, у которых характеры* $(1,0)$*, линейным и однородным относительно аргументов характеров* $(2,0)$*, ..., и относительно аргументов характеров* $(p,0)$*, то же имеет место для переменных характеров* $(\cdot,1)$*, ..., и для* $(\cdot,p)$*. Никакие следующие переменные не встречаются в* P_1.

41. Пример. В матричной алгебре четырех единиц e_{ij} § 4, e_{ij} — характера (i,j). Характеристический детерминант для

$$x_{11}e_{22} + x_{12}e_{12} + x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22}$$

по § 35 — квадрат

$$\delta = \begin{vmatrix} x'_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x'_{22} \end{vmatrix}, \quad x'_{11} = x_{11} - \omega, \quad x'_{22} = x_{22} - \omega.$$

Поэтому $P_1 = \delta_1$ линейно и однородно относительно x'_{11} и x_{12} характеров $(1, \cdot)$, также, относительно x_{21} и x'_{22} характеров $(1, \cdot)$, также относительно x'_{11} и x_{21} характеров $(\cdot, 1)$ и относительно x_{12}, x'_{22} характеров $(\cdot, 2)$.

42. Под-алгебры S у A_2. Чтобы получить P_1 мы должны рассмотреть лишь числа, заключающие в себе единицы характеров (α, β), $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$. Это — единицы под-алгебры S_1.

При помощи аргументации, ведущей к (76), мы можем положить

$$(P_2)_{y=0} = x'_{p+1} x'_{p+2} \cdots x'_q.$$

Чтобы получить P_2, нам нужно рассмотреть только числа, включающие в себе единицы характеров (α, β), $\alpha, \beta = p+1, \ldots, q$, это — единицы под-алгебры S_2 и т. д. Произведение числа из S_1 на число из S_2 — нуль, и *наоборот.* В характеристическом детерминанте приводимой (§ 21) алгебры $S_1 + S_2$ элементы в первом и третьем «квадрантах» — все нули, так что он равняется произведению характеристических детерминантов S_1 и S_2. Аналогично, то же имеет место для $S_1 + S_2 + \ldots + S_l$. Таким образом $\delta(\omega)$ не изменяется, когда мы заменим нулем каждую переменную, не соответствующую единице в $S_1, S_2, \ldots$ или S_l. Поэтому характеристический детерминант S есть P_1^{α}.

Пусть на время $[\alpha, \beta]$ обозначает переменную (75) характера (α, β). Пусть P_1 — неприводимый множитель степени $p > 1$ у $\delta(\omega)$, со свойствами, данными в теореме § 40. Он включает в себе переменную характера (α, β), $\alpha \neq \beta$. Иначе степень P_1 была бы характеристическим детерминантом числа из алгебры S_1 имеющей каждое $[\alpha, \beta] = 0$, $\alpha \neq \beta$, и стало быть детерминантом прямой суммы алгебр $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ чисел характеров $(1, 1)$, ..., (p, p), соответственно. Но P_1 (§ 42) было бы тогда произведением функции от переменных $[1, 1]$ на функцию от $[2, 2]$ и т. д., а потому произведением линейных функций, тогда как оно — неприводимо и степени > 1.

Изменяя обозначения, мы можем предположить, что P_1 имеет член с множителем $[1, 2]$, а потому и с множителем $[2, j]$, $j \neq 2$, каковой мы можем взять в виде $[2, 1]$ или $[2, 3]$; в последнем случае, в виде множителя $[3, 1]$ или $[3, 4]$ и т. д. Таким образом P_1 имеет член

$$[1,2]\ [2,3] \cdots [\alpha-1, \alpha]\ [\alpha, 1]\ [\alpha+1, \alpha+2] \cdots [\beta, \alpha+1] \cdots \prod_{i=\gamma+1}^{p} [i, i], \tag{77}$$

где $[i, i]$ для $i = \lambda + 1, \ldots, p$ — переменные $x'_i = x_i - \omega$, в то время, как остающиеся $[i, i]$ являются переменными y_i. Положим $x_1 = 0, \ldots, x_p = 0$. Тогда (77) становится кратным $\omega^{p-\lambda}$, тогда как член (76) из P_1 сводится к $\pm\omega^p$. Следовательно алгебра S_1 содержит число, характеристическое уравнение которого имеет корень $\neq 0$, число, являющееся суммой чисел характеров

$$\begin{gathered} (1,2),\ \ (2,3),\ \ldots,\ (\alpha,1),\ \ (\alpha+1,\alpha+2),\ \ldots,\ (\beta,\alpha+1),\ \ (i,i) \\ (i = \gamma+1, \ldots, \lambda), \end{gathered} \tag{78}$$

при этом числа характеров (i, i) — нильпотентны.

43. Предварительный критерий для алгебры A_2 второй категории. Необходимым и достаточным условием того, что алгебра — второй категории, есть то, что она содержит число

$$u = (e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{\alpha-1\,\alpha} + e_{\alpha 1} + (e_{\alpha+1\,\alpha+2} + \ldots + e_{\beta\,\alpha+1}) + \ldots + \sum_{i=\gamma+1}^{\lambda} \eta_{ii},$$

характеристическое уравнение которого имеет корнем не нуль, где e_{ij} и η_{ii} — линейные функции от нильпотентных единиц $\eta_1, \ldots, \eta_k$ характеров (i, j) и (i, i), соответственно, и где одно из целых чисел $\alpha, \beta - \alpha, \ldots, \lambda - \gamma$ — положительно.

Условие необходимо по § 42, и достаточно по § 36 (см. § 47).

44. Так как u не нильпотентно, то существует $v \neq 0$ такое, что $uv = \omega v$, ω — скалар $\neq 0$. Возьмем $\dfrac{u}{\omega}$, как новое u. Тогда $uv = v$. Поэтому, если v выражается в виде суммы чисел, где каждое определенного характера (r, s), то $r \leq \lambda$. Пусть $v_{\gamma+1}$ является суммой части из v характера $(\gamma + 1, \cdot)$. Тогда

$$uv_{\gamma+1} = \eta_{\gamma+1\,\gamma+1} v_{\gamma+1} = v_{\gamma+1} = 0,$$

так как η — кмльпотентно. Поэтому каждый член $\neq 0$ из v — характера (r, s), $r \leq \gamma$ Переменив обозначения циклов u, мы можем предположить, что v имеет член $\neq 0$ характера $(1, \cdot)$. Назовем v' число $\neq 0$, являющееся суммой членов из v характеров $(1, \cdot), \ldots, (\alpha, \cdot)$. Положим $u' = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{\alpha 1}$. Тогда $u'v' = v'$. Устраним штрихи. Поэтому мы можем предположить, что с самого начала

$$u = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{\alpha 1}, \quad uv = 0,$$

$$v = \sum_{i=1}^{h} (v_{1i} + v_{2i} + \ldots + v_{\alpha i}) \neq 0,$$

где v_{ai} — нуль или число характера (a, i). По $uv = v$,

$$e_{12} v_{2i} = v_{1i}, \quad e_{23} v_{3i} = v_{2i}, \ \ldots, \ e_{\alpha 1} v_{1i} = v_{\alpha i}.$$

Пусть i имеет фиксированное значение, для которого одно из $v_{1i}, \ldots, v_{\alpha i} \neq 0$, а значит и все $\neq 0$. Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned}
&e_{12} e_{23} \cdots e_{\alpha-1\,\alpha} e_{\alpha 1} v_{1i} &&= v_{1i}, \\
&e_{23} e_{34} \cdots e_{\alpha 1} e_{12} v_{2i} &&= v_{2i}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&e_{\alpha 1} e_{12} \cdots e_{\alpha-2\,\alpha-1} e_{\alpha-1\,\alpha} v_{\alpha i} &&= v_{\alpha i}.
\end{aligned}$$

Произведение e в первом из этих уравнений имеет единицу корнем своего характеристического уравнения и оно — характера $(1, 1)$; поэтому (§ 31) оно равняется $a\varepsilon_1 + \zeta_1$, где a — скаляр и ζ_1 — нильпотентно, кроме того характеристический детерминант $a\varepsilon_1 + \zeta_1$ является степенью $a - \omega$. Таким образом $a = 1$,

$$\begin{aligned} &e_{12}e_{23}\cdots e_{\alpha-1\,\alpha}e_{\alpha 1} &&= \varepsilon_1 + \zeta_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &e_{\alpha 1}e_{12}\cdots e_{\alpha-2\,\alpha-1}e_{\alpha-1\,\alpha} &&= \varepsilon_\alpha + \zeta_\alpha, \end{aligned}$$

причем ζ_i — нильпотентно и характера (i, i).

45. Обозначение. Положим $e_{13} = e_{12}e_{23}$, $e_{\alpha 2} = e_{\alpha 1}e_{12}$, и вообще

$$e_{ij} = e_{i\,i+1}e_{i+1\,i+2}\cdots e_{j-2\,j-1}e_{j-1\,j} \qquad (i \neq j), \tag{79}$$

где $e_{\alpha\,\alpha+1}$ должно быть заменено $e_{\alpha 1}$. Последние уравнения в § 44 становятся

$$e_{ji}e_{ij} = \varepsilon_i + \zeta_j \qquad (i, j = 1, \ldots, \alpha;\ i \neq j). \tag{80}$$

Если η — число $\neq 0$ характера (j, λ), то $e_{ij}\eta \neq 0$. Ибо, если оно — нуль, то

$$0 = e_{ji}e_{ij}\eta = \eta + \zeta_j\eta,$$

тогда как -1 не является корнем характеристического уравнения для нильпотентного числа ζ_j. Пусть $n_1, \ldots, n_t$ — полный ряд линейно-независимых чисел характера (j, λ). Тогда $e_{ij}n_1, \ldots, e_{ij}n_t$ линейно-независимые числа характера (i, λ). Ибо, если $\sum c_s e_{ij} n_s = 0$, то $e_{ij}\eta = 0$, когда $\eta = \sum c_s n_s$. Если бы получающиеся $e_{ij}n_s$ не образовали полного ряда, то не было n_s. *Поэтому полный ряд линейно-независимых чисел характера (i, λ) получается из полного ряда характера (j, λ) при умножении e_{ij} на последнее.*

Можно таким же способом доказать, что *существует столько же линейно-независимых чисел характера (λ, i) сколько чисел характера (λ, j), и последние даются как произведения первых на e_{ij}*. В этих теоремах, $i, j = 1, \ldots, \alpha$; $\lambda = 1, \ldots, h$.

46. В частности, если $n_1, \ldots, n_t$ образуют полный ряд линейно-независимых чисел характера $(\alpha, 1)$, где $\alpha > 1$, то $e_{1\alpha}n_1, \ldots, e_{1\alpha}n_t$ образуют полный ряд характера $(1, 1)$. Поэтому для подходяще выбранных скаляров c_s $\sum c_s n_s$ является числом $e'_{\alpha 1}$ характера $(\alpha, 1)$, так что $e_{1\alpha}e'_{\alpha 1} = \varepsilon_1$, число характера $(1, 1)$. Выраженное иначе, при помощи (79)

$$e_{1i}\beta = \varepsilon_1, \quad e_{1i} = e_{12}e_{23}\cdots e_{i-1\,i}, \quad \beta = e_{i\,i+1}\cdots e_{\alpha-1\,\alpha}e'_{\alpha 1}.$$

Так как e_{1i} и β характеров $(1, i)$ и $(i, 1)$, соответственно, то

$$\beta e_{1i} = a\varepsilon_i + \zeta'_i,$$

где a — скаляр, и ζ'_i нильпотентно характера (i, i). Умножая это слева на e_{1i} и прилагая (79), мы получаем

$$e_{1\alpha}e'_{\alpha 1}e_{1i} \equiv e_{1i} = ae_{1i} + e_1\zeta'_i.$$

Таким образом, по (56), $1-a$ корень левого характеристического уравнения для нильпотентного числа ζ_i'. Поэтому $a=1$, $e_{1i}\zeta_i'=0$. Это противоречит утверждению согласно (80), если не имеет места $\zeta_i'=0$. В $\beta e_{1i}=\varepsilon-i$ мы снимаем штрих с $e_{\alpha 1}'$ и пишем e_{ii} для ε_i. Таким образом

$$e_{i\,i+1}e_{i+1\,i+2}\cdots e_{\alpha-1\,\alpha}e_{\alpha 1}e_{12}\cdots e_{i-1\,i}=e_{ii} \qquad (i=1,\ldots,\alpha).$$

Определим e_{ij} по (79). Тогда мы получим

$$e_{ji}e_{ij}=e_{jj}, \qquad e_{ji}e_{il}=e_{jl}. \tag{80$'$}$$

Следовательно, мы имеем α^2 линейно-независимых чисел e_{ij} $(i,j=1,\ldots,\alpha)$ характера (i,j), которые имеют ту же таблицу умножения (14), что матричная алгебра из α^2 единиц.

Теорема. *Всякая алгебра второй категории содержит алгебру, эквивалентную матричной алгебре из α^2 единиц, $\alpha>1$.*

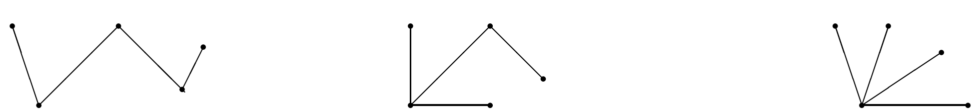
Матричная алгебра из α^2 единиц e_{ij} имеет под-алгеброй матричную алгебру из β^2 единиц e_{ij} $(i,j=,\ldots,\beta)$, если $\beta<\alpha$. По § 13, мы имеем

Следствие. *Всякая алгебра второй категории содержит алгебру, эквивалентную алгебре комплексных кватернионов.*

47. Нормализованные единицы алгебры A_2 второй категории. Для краткости будем говорить, что существует путь, соединяющий α и β, где α и β — различные положительные, целые числа $\leq h$, если есть число $\eta_{\alpha\beta}$ характера (α,β) и число $\eta_{\beta\alpha}$ характера (β,α), так что $\eta_{\alpha\beta}+\eta_{\beta\alpha}$ не является нильпотентным. Существование пути является необходимым и достаточным условием того, что алгебра — второй категории. Оно достаточно по § 36 и необходимо, так как существует путь, соединяющий 1 и 2 в силу:

$$(e_{12}+e_{21})(e_{12}+e_{21})=e_{11}+e_{22}.$$

После перестановки индексов $1,\ldots,h$, мы можем предположить, что они распадаются на ряды $(1,2,\ldots,p)$, $(p+1,\ldots,q)$, ... , так что нет пути, соединяющего число одного ряда с числом другого ряда, но что всякие два данные числа, как 1 и 2, одного и того же ряда могут быть соединены путем; или иначе другие числа, как 3 и 4, того ряда могут быть найдены, так что существуют пути, как 13, 34, 42, обеспечивающие переход от первого до второго из данных чисел 1, 2. Чтобы обеспечить такой переход между всякими двумя точками $1,2,\ldots,p$, очевидно, необходимы и достаточны $p-1$ путей. Они не должны непременно образовывать единую ломаную линию, как предполагал Картан (lib. cit, стр. 48), который не употреблял многообещающей терминологии путей. Для $p=5$ возможные фигуры (деревья Кэли) таковы:



Во всяком случае мы можем предположить, что существуют пути, соединяющие 1 с 2 и 2 с 3, и стало быть числа $\eta_{12}+\eta_{21}$ и $\eta_{23}+\eta_{32}$ оба не нильпотентные. Назвавши первое u, мы можем найти число $v \neq 0$ такое, что $uv = v \neq 0$, где v необходимо является суммой чисел характеров $(1, \cdot)$, $(2,0)$. Действуя, как в § 44–46 с $\alpha = 2$ и производя преобразование единиц (§ 46), которое изменяет самое большее единицы характеров $(1,2)$ и $(2,1)$, мы получим единицы e_{12} и e_{21} тех характеров, так что

$$e_{12}e_{21} = e_{11}, \quad e_{21}e_{12} = e_{22} \qquad (e_{ii} \text{ — частичные модули}). \tag{81}$$

Значит эта нормализация не нарушится, если рассматривать аналогично $\eta_{23} + \eta_{32}$. Поэтому мы можем также положить

$$e_{23}e_{32} = e_{22}, \quad e_{32}e_{23} = e_{33}. \tag{82}$$

Если пути образуют единую замкнутую линию, то мы получаем аналогично

$$e_{34}e_{43} = e_{33}, \;\; e_{43}e_{34} = e_{44}, \; \ldots, \; e_{p\,p-1}e_{p-1\,p} = e_{pp}. \tag{83}$$

Чтобы обеспечить переход от 1 к 3, мы должны употребить пути 1, 2 и 2, 3, и соответственно мы полагаем $e_{13} = e_{12}e_{23}$; $e_{31} = e_{32}e_{21}$. Вообще, полагаем

$$e_{i\,i+j} = e_{i\,i+1}e_{i+1\,i+2}\cdots e_{i+j-1\,i+j}, \quad e_{i+j\,i} = e_{i+j\,i+j-1}\cdots e_{i+1\,i}.$$

Легко видеть, что p^2 чисел e_{ij} являются единицами матричной алгебры (14).

Тот же результат получится, если пути будут распределены каким-либо иным способом; нам нужно только определить e_{ij} как произведение таких e, у которых пары индексов дают однозначно определенные ряды дорог, обеспечивающих переход от i до j. Например, если $p = 4$ и пути выходят из 2 к 1, 3, 4 соответственно, то имеем (81), (82) и

$$e_{24}e_{42} = e_{22}, \quad e_{42}e_{24} = e_{44}, \tag{84}$$

определяем остающиеся е так:

$$e_{13} = e_{12}e_{23}, \;\; e_{31} = e_{32}e_{21}, \;\; e_{14} = e_{12}e_{24},$$
$$e_{41} = e_{42}e_{21}, \;\; e_{34} = e_{32}e_{24}, \;\; e_{43} = e_{42}e_{23},$$

так что — e_{ij} характера (i,j), и вытекают отсюда соотношения (14).

Теоремы § 45 все еще имеют место с $i, j = 1, \ldots, p$.

Пусть $\eta_{11}^{(\rho)}$ $(\rho = 0, 1, 2, \ldots)$ обозначают единицы характера $(1,1)$, где $\eta_{11}^{(0)} = e_{11}$. Тогда все единицы характера (i,j), $i \leq p$, $j \leq p$ даются посредством

$$\eta_{ij}^{(\rho)} \equiv e_{i1}\eta_{11}^{(\rho)}e_{1j}.$$

Аналогично, если λ — определенное целое число $> p$ и $\eta_{1\lambda}^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots)$ — единицы характера $(1, \lambda)$, то единицами характера (i, λ) являются

$$\eta_{i\lambda}^{(\sigma)} \equiv e_{i1}\eta_{1\lambda}^{(\sigma)}e_{1\lambda} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots).$$

Мы можем положить

$$\eta_{11}^{(\rho)}\eta_{11}^{(\sigma)} = \sum_{\tau} \alpha_{\rho\sigma\tau}\eta_{11}^{(\tau)}, \qquad \eta_{11}^{(\rho)}\eta_{1\lambda}^{(\sigma)} = \sum_{\tau} \beta_{\rho\sigma\tau}\eta_{11\lambda}^{(\tau)}. \tag{85}$$

Тогда

$$\eta_{ij}^{(\rho)}\eta_{jl}^{(\sigma)} = \sum_\tau \alpha_{\rho\sigma\gamma}\eta_{il}^{(\tau)}, \qquad \eta_{ij}^{(\rho)}\eta_{j\lambda}^{(\sigma)} = \sum_\tau \beta_{\rho\sigma\tau}\eta_{i\lambda}^{(\tau)}.$$

Например, второе произведение равняется

$$e_{i1}\eta_{11}^{(\rho)}e_{1j}\cdot e_{j1}\eta_{1\lambda}^{(\sigma)} = e_{i1}\eta_{11}^{(\rho)}\eta_{1\lambda}^{(\sigma)} = \sum_\tau \beta_{\rho\sigma\tau}\eta_{1\lambda}^{(\tau)}.$$

Аналогично, $\eta_{\lambda i}^{(\rho)}\eta_{ij}^{(\sigma)}$ — линейная функция от $\eta_{\lambda j}^{(\tau)}$, коэффициенты которой не зависят от i, j. Следовательно, если нам дана таблица умножения (85) и т. д. под-алгебры A_1 составленной из единиц характеров

$$(1,1),\ \ (1,p+1),\ \ (1,q+1),\ \ldots,\ (p+1,1),\ \ (p+1,p+1),\ \ldots,$$

то мы можем вывести таблицу умножения главной алгебры A_2. В силу определения рядов $(1,2,\ldots,p),\ldots,$

$$\eta_{1\,p+1}+\eta_{p+1\,1}+\ldots$$

являются нильпотентными, так что под алгебра A_1 будет первой категории.

Поэтому мы имеем простой процесс, чтобы произвести все алгебры второй категории из алгебр первой категории.

Пусть $E_1,\ldots,E_H$, $H_1,\ldots,H_K$ — нормализованные единицы (§ 39) ?

$$E_i^2 = E_i,\ \ E_iH_\rho = H_\rho E_j = H_\rho,\ \ H_\rho H_\sigma = \sum \gamma_{\rho\sigma\tau}H_\tau, \tag{86}$$

где H_ρ — характера (i,j), H_σ — характера (j,l), и каждое H_τ характера (i,l) и $\tau>\rho$, $\tau>\sigma$. *В качестве нормализованных единиц*[48] *алгебры A_2 второй категории мы берем ряды из p_i^2 единиц $e_{\alpha\beta}^{(i)}$ $(\alpha,\beta=1,\ldots,p)$, соответствующих частичным модулям E_i, и ряды из p_ip_j единиц $\eta_{\alpha\beta}^{(\rho)}$ $(\alpha=1,\ldots,p_i,\ \beta=1,\ldots,p_j)$, соответствующих H характера (i,j). Если N_{ij} — число H_ρ характера (i,j), то эти*

$$n = \sum_{i=1}^{H} p_i^2 + \sum_{i,j} N_{ij}p_ip_j$$

нормализованных единиц A_2 имеют таблицу умножения:

$$e_{\alpha\beta}^{(i)}e_{\beta\gamma}^{(i)} = e_{\alpha\gamma}^{(i)} \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,p_i), \tag{87}$$

$$e_{\alpha\beta}^{(i)}\eta_{\beta\gamma}^{(\rho)} = \eta_{\alpha\gamma}^{(\rho)},\ \ \eta_{\beta\gamma}^{(\rho)}e_{\gamma\delta}^{(j)} = \eta_{\beta\delta}^{(\rho)} \qquad (\alpha,\beta\le p_i;\ \gamma,\delta\le p_j), \tag{88}$$

$$\eta_{\alpha\beta}^{(\rho)}\eta_{\beta\gamma}^{(\sigma)} = \sum \gamma_{\rho\sigma\tau}\eta_{\alpha\gamma}^{(\tau)} \qquad (\alpha\le p_i,\ \beta\le p_j,\ \gamma\le p_l,\ \ \tau>\rho,\ \tau>\sigma), \tag{89}$$

соответствующую трем типам (86). *Все не написанные произведения — нули*[49].

[48] Как в § 22, мы можем выразить теорему следующим образом. Всякое A_2 может быть выведено из A_1, данного (86), если рассматривать коэффициент E_i как квадратную матрицу из p_i^2 элементов и коэффициент H_ρ характера (i,j), как прямоугольную матрицу из p_i строк и p_j колонок, причем эти матрицы рассматриваются как коммутативные с каждым E и H.

[49] Молин, Math. Ann., том 41(1893), стр. 83, при использовании теории групп, Картан, lib. cit., как в тексте.

Относительно упрощенного формулирования части содержания этой теоремы смотри § 50.

48. Характеристический детерминант δ алгебры A_2. Пусть единицы E, H под-алгебры (86) расположены, как в § 39, так что в ее характеристическом детерминанте δ_1 каждый элемент выше главной диагонали — нуль. Соответствующие ряды единиц A_2 располагаются в этом порядке, тогда как единицы в ряде, соответствующем H_ρ характера (i, j), располагаются в порядке

$$\eta_{11}^\rho,\ \ \eta_{21}^\rho,\ \ldots,\ \eta_{p_i1}^\rho,\ \ \eta_{12}^\rho,\ \ldots,\ \eta_{p_i2}^\rho,\ \ \eta_{13}^\rho,\ \ldots,\ \eta_{p_ip_j}^\rho,$$

и индексы $e_{\alpha\beta}^{(i)}$ соответствующие E_i располагаются аналогично. Рассмотрим элемент в r-той строке и c-той колонке δ_1. Пусть (i, j) — характер r-той единицы под-алгебры и (l, t) — характер c-той единицы. Тогда матрица δ получится из матрицы δ_1 путем замены элемента в r-той строке и c-той колонке прямоугольником из p_ip_j линий и p_lp_t колонок. Так как δ_1 является произведением своих диагональных элементов, то δ равняется произведению детерминантов в диагональном порядке, полученных если положить $c = r$, причем r-тый детерминант является p_ip_j строчным. Последнее представляется схематически

$$\begin{vmatrix} M_i & O & \ldots & O \\ O & M_i & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & M_i \end{vmatrix}, \qquad M_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} - \omega & x_{12}^{(i)} & \ldots & x_{1p_i}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} - \omega & \ldots & x_{2p_i}^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p_i1}^{(i)} & x_{p_i2}^{(i)} & \ldots & x_{p_ip_i}^{(i)} - \omega \end{pmatrix}, \tag{90}$$

где O — p_i-строчная квадратная матрица, все элементы которой нули. Схематический детерминант p_j-строчный, и поэтому равняется $|M_i|^{p_j}$. Таким образом, так как существует единственная единица E_i характера (i, i), то

$$\delta = \prod_{i=1}^{H} |M|^{p_i + N_{i1}p_1 + N_{i2}p_2 + \ldots + N_{iH}p_H}. \tag{91}$$

В частности, характеристический детерминант матричной алгебры из p_i^2 единиц, удовлетворяющий (87), равняется $|M_i|^{p_i}$. Его ранговое уравнение есть $|M_i| = 0$, как следует из теоремы Кэли о матрицах (§ 15).

Детерминант, подобный $|M_i|$, элементы которого — независимые переменные, является неприводимой функцией своих элементов.

Характеристический детерминант для алгебры A_2 второй категории является произведением степеней H неприводимых функций P_i степеней p_i, выражаемых как p_i-строчные детерминанты; и $\sum p_i^2$ элементов из этих H детерминантов — линейно-независимые линейные функции от координат. Здесь H — число частичных модулей под-алгебры A_1.

Если мы приравняем нулю каждый элемент этих детерминантов, то получим систему линейных уравнений, которая не зависит от выбора единиц (§ 16). Поэтому ряд нильпотентных чисел, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, независим от выбора единиц. Когда употребляются нормализованные единицы § 47, то эти нильпотентные числа являются линейными комбинациями из η.

49. Инвариантная под-алгебра; простая и полу-простая алгебры. *Инвариантной* под-алгеброй I для некоторой алгебры A является такая, что произведение всякого числа из I на всякое число из A находится в I и произведение всякого числа из A на всякое число из I лежит в I. Например, алгебра (e_1, e_2, e_3) в (46) имеет инвариантные под-алгебры (e_1, e_2), (e_2) и (e_3).

Алгебра (45) имеет инвариантные под-алгебры (e_i) и (e_i, e_j), $i, j = 1, 2, 3$.

Простая алгебра это такая, у которой нет инвариантной под-алгебры. *Полупростая*[50] алгебра — та, что не имеет нильпотентной инвариантной под-алгебры. Алгебра (45) — полу-простая, потому что не имеет никакого нильпотентного числа, как это явствует из ее характеристического уравнения, данного после (45).

50. Главная теорема. По § 37, нильпотентные числа алгебры A_1 первой категории образуют инвариантную нильпотентную под-алгебру. Поэтому A_1 — полупростая тогда и только тогда, когда его единицами являются частичные модули $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$, и тогда оно — прямая сумма единичных алгебр $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h)$.

В частности, только простым A_1 является алгебра с единственной единицей ε_1.

В алгебре A_2 второй категории η являются, по (89), единицами алгебры, которая нильпотентна (конец § 48) и является инвариантной под-алгеброй для A_2 (по 88). Поэтому в полупростой A_2 единицы η отсутствуют, так что его единицы это те, что содержались в матричных под-алгебрах из p_i^2 единиц. Так как каждая из последних — инвариантная под-алгебра, то простое A_2 должно быть матричным.

Обратно всякая матричная алгебра M из p^2 единиц e_{ij} — простая. Ибо, если $x = \sum x_{ij} e_{ij}$ встречается в инвариантной подалгебре I, то

$$e_{\alpha i} x e_{j\beta} = x_{ij} e_{\alpha\beta}$$

встречается в I. Значит всякое $e_{\alpha\beta}$ находится в I и $M \equiv I$.

Аналогично, прямая сумма $m + M$ двух матричных алгебр не имеет иной инвариантной под-алгебры I, кроме m и M. Ибо, если $x + X$ — одно из ее чисел и $x \neq 0$, и если единицами m являются e_{ij}, то

$$e_{\sigma i}(x + X) e_{j\beta} = x_{ij} e_{\alpha\beta}$$

находится в I, так что m — под-алгебра для I. Таким образом $I = m$ или $I = M$. Если взять три или более слагаемых, то аргументация будет та же. Так как матричная алгебра или сумма матричных алгебр не является нильпотентной, то прямая сумма матричных алгебр — полу-проста.

Алгебра $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, для которой $A = (a_1, \ldots, a_r)$ и $B = (b_1, \ldots, b_s)$ являются под-алгебрами, называется суммой алгебр A и B. Но не необходимо, чтобы она была их прямой суммой (§ 21).

Теорема[51]**.** *Всякая линейная ассоциативная алгебра с модулем и с комплексными координатами является суммой полупростой алгебры и нильпотентной ин-*

[50] Вместо определения Картана (lib. cit., стр. 57) полу-простой алгебры как приводимой алгебры, каждый из неприводимых компонентов которой — простой, я воспользовался определением Веддерборна, Proc. London. Math. Soc., серия 2, том 6 (1907), стр. 94, и выведенным ранее свойством.

[51] Картан (lib. cit. стр. 58). Для простых алгебр теорема была впервые доказана (но не вполне удовлетворительно), Молином Math. Ann., том 41 (1893), стр. 125, потом Фробениусом, Berlin Sitzungsber. 1903, стр. 527; сравни Шоу (J. B. Shaw), Trans. Amer. Math. Soc. том 4 (1903), стр.275–

вариантной под-алгебры. Полупростая алгебра или проста, или прямая сумма простых алгебр, и обратно. Простая алгебра — матричного типа и обратно.

51. Коммутативные алгебры. Коммутативная комплексная алгебра с модулем может быть первой категории (§ 46, следствие). Употребляя нормализованные единицы § 39, мы видим, что там не может встретиться единица η характера (α, β), $\beta \neq \alpha$. Ибо, если бы было так, то имело б место $\varepsilon_\alpha \eta = \eta$, $\eta \varepsilon_\alpha = 0$, и умножение не было бы коммутативным. Тогда алгебра является прямой суммой $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_h$, где Σ_j — образована из чисел характера (j, j) и имеет r единиц $e = \varepsilon_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{r-1}$ таких, что

$$e^2 = e, \quad e\eta_i = \eta_i e = \eta_i, \quad \eta_i \eta_j = \sum \gamma_{ijk} \eta_k, \tag{92}$$

где $k > i$, $k > j$, и $\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}$. γ, конечно, подчинены предшествующим условиям, предполагаемым в силу ассоциативного закона умножения.

В частности, если алгебра не имеет нильпотентного числа то не встречается никаких единиц η (для $\eta_{r-1}^2 = 0$) и алгебра есть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h)$:

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, h;\ i \neq j). \tag{93}$$

283. Она предполагается в теории (см. (§ 54) характеров групп и детерминантов групп Фробениуса, Berlin Sitzungsber., 189S, стр. 985, 1343; 1897, стр. 994; 1898, стр. 501; 1899, стр. 330, 482; 1904, стр. 558, элементарное изложение которых было дано Диксоном, Annals of Math., серия 2, том 4 (1902), стр. 25–49. Ради доступного метода изложения последней теории см. Шура (J. Schur), Berlin Sitz., 1905, стр. 406 (ср. Диксон, Trans. Araer. Math., Soc., том 8, 1907, стр. 389). Ср. Бэрнсайд (W. Burnside) Proc. London Math. Soc., том 35 (1903), стр. 206. О работе Веддерборна см. § 56. Другое доказательство главной теоремы и теорем в § 47, 48, было дано Фробениусом. Berlin Sitz., 1903, стр. 641.

ЧАСТЬ III

ОТНОШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР К ДРУГИМ ПРЕДМЕТАМ

52. Соответствие между линейными ассоциативными алгебрами и линейными группами.

Рассмотрим линейную ассоциативную алгебру с таблицей умножения

$$e_ie_j = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijs}e_s \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{94}$$

Для y определенного числа и x переменного числа алгебры, уравнение $x' = xy$ эквивалентно n уравнениям

$$(y) \qquad x'_s = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ijs}x_iy_j \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

определяющим линейное однородное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $x'_1, \ldots, x'_n$, которое соответствует данному числу y. Аналогично, y', соответствует преобразование $x'' = x'y'$

$$(y') \qquad x'' = \sum_{s,k=1}^{n} \gamma_{skt}x'_sy'_k \qquad (t = 1, \ldots, n)$$

переменных $x'_1, \ldots, x'_n$ в $x''_1, \ldots, x''_n$. Но

$$x'' = (xy)y' = xy'', \qquad y'' \equiv yy'.$$

y'' соответствует преобразование

$$(y'') \qquad x''_t = \sum_{i,s=1}^{n} \gamma_{ist}x_iy''_s, \qquad y''_s \equiv \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jks}y_jy'_k \qquad (t, s = 1, \ldots, n),$$

причем значения y''_s отыскиваются из $y'' = yy'$ при помощи (94). Поэтому преобразование (y'') тождественно с так называемым произведением

$$(y)(y') \qquad x''_t = \sum_{s,k,ij=1}^{n} \gamma_{ijs}\gamma_{skt}x_iy_jy'_k \qquad (t = 1, \ldots, n),$$

получаемым при исключении переменных x'_s из рядов уравнений (y), (y'). Чтобы дать формальную проверку, заметим, что коэффициенты $x_i y_j y'_k$ в последних двух выражениях для x''_t будут равны, если

$$\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ist}\gamma_{jks} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijs}\gamma_{skt} \qquad (i,j,k,t = 1,\ldots,n).$$

Последние равенства удовлетворяются, так как, по (94),

$$e_i(e_j e_k) = e_i\left(\sum_{s=1}^{n} \gamma_{jks} e_s\right) = \sum_{t,s=1}^{n} \gamma_{ist}\gamma_{jks} e_t,$$
$$(e_i e_j) e_k = \left(\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijs} e_s\right) e_k = \sum_{s,t=1}^{n} \gamma_{ijs}\gamma_{skt} e_t.$$

Итак, соответствие между числами y и преобразованиями (y) таково, что произведению yy' двух чисел соответствует произведение $(y)(y')$ соответствующих преобразований. Получающийся ряд преобразований является замкнутым относительно умножения, ибо это имеет место для алгебры.

Например, если алгебра является алгеброю единиц § 4, то числу μ в (16), с координатами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответствует преобразование $m' = m\mu$:

$$a' = a\alpha + b\gamma, \quad b' = a\beta b\delta, \quad c' = c\alpha + d\gamma, \quad d' = c\beta + d\delta. \tag{95}$$

Произведение[52] этого преобразования на преобразования с коэфициентами $\alpha', \ldots, \delta'$ есть преобразование с коэффициентами

$$\alpha'' = \alpha'\alpha + \gamma'\beta, \quad \gamma'' = \alpha'\gamma + \gamma'\delta, \quad \beta'' = \beta'\alpha + \delta'\beta, \quad \delta'' = \beta'\gamma + \delta'\delta. \tag{96}$$

Пусть алгебра имеет модуль ε. Соответствующее преобразование $x' = x\varepsilon = x$ является тождественным преобразованием $x'_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $\Delta(y)$ — не тождественный нуль. Для числа y такого, что $\Delta(y) \neq 0$, существует единственное число y^{-1} такое, что $yy^{-1} = y^{-1}y = \varepsilon$ (конец § 7). Тогда $x = xy$ предполагает $x = x'y^{-1}$ так, что преобразование (y^{-1}) является обратным к (y) и обратно. Если $\Delta(y) \neq 0$ и $\Delta'(y) \neq 0$, то $\Delta(yy') \neq 0$, ибо yy' имеет обратным $(y')^{-1}y^{-1}$.

Ряд линейных преобразований образует *группу*, если произведение всяких двух из ряда является преобразованием ряда, если ряд содержит тождественное преобразование, и если каждое преобразование имеет обратное в ряду. Таким образом мы имеем

---

[52] Так как c, d преобразовываются когредиентно с a, b, то дело не нуждается в дублировании. Если матрицу из коэфициентов у a и b в (95) назвать μ, то мы имеем $\mu'' = \mu'\mu$. Матрица из коэфициентов произведения TT' двух линейных преобразоааний с n переменными равняется произведению матриц у T' и T (т. е. взятыми в обратном порядке). Но если мы обозначим через T_1 преобразование

$$a = a'\alpha + b'\gamma, \quad b = a'\beta + b'\delta$$

матрицы μ, и через T'_1 преобразование матрицы μ', выражающей a', b' в членах из a'', b'', то, исключивши a', b', получим, как преобразование, выражающее a, b в членах из a'', b'', преобразование с матрицей $\mu\mu'$. Таким образом преобразования, выражающие старые переменные в членах нового, составляются, как их матрицы, взятые в том же порядке. Смотри также второе подстрочное примечание к § 53.

Теорему 1[53]**.** *Ряд всех чисел, не являющихся нулевыми множителями из линейной ассоциативной алгебры с n единицами и имеющей модуль, соответствует группе G линейных преобразований с n переменными, коэффициенты которых — линейные функции от n произвольных параметров.*

Детерминант $\Delta'(y)$ каждого преобразования (y) из G не является нулем. Группа называется *просто транзитивной*, так как она содержит единственное преобразование (y), которое заменяет данный общий ряд значений $x_1, \ldots, x_n$, а именно преобразование для которого $\Delta(x) \neq 0$, данным рядом $x'_1, \ldots, x'_n$, для которого $\Delta(x') \neq 0$. В самом деле, $xy = x'$ имеет тогда единственное решение y, для которого $\Delta(y) \neq 0$ и потому $\Delta'(y) \neq 0$.

Всякому числу y соответствует также преобразование $x' = yx$:

$$[y] \qquad x'_s = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{jis} x_i y_j \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Аналогично y' соответствует $[y']$: $x'' = y'x'$. Тогда

$$x'' = y'(yx) = y''x, \qquad y'' = y'y, \qquad [y''] = [y']\,[y].$$

Поэтому мы получаем вторую просто транзитивную группу G'. Если мы применим преобразование (y): $x' = xy$, а потом преобразование $[z]$: $x'' = zx'$, то получим $(y)[z]$: $x'' = zxy$. Тот же результат получится при применении сперва $[z]$: $x' = zx$, а потом (y): $x'' = x'y$. *Итак, всякое преобразование из G коммутативно со всяким преобразованием из G'.* Две таких просто транзитивных взаимно перестановочных групп называются *взаимными*.

Коэффициенты преобразования, написанного в конце формулы (y''), при замене переменных $y_1, \ldots, y_n$ на переменные $y''_1, \ldots, y''_n$, являются такими же функциями от параметров $y'_1, \ldots, y'_n$, как коэффициенты x_i в (y) от параметров $y_1, \ldots, y_n$, что также ясно из формул $y'' = yy'$, $x' = xy$. На этом основании, о группе G говорят, что она своя собственная *параметрическая группа*. Аналогично $y'' = y'y$, $x' = yx$ показывает, что G' своя собственная параметрическая группа.

Теорема 2[54]**.** *Каждая линейная ассоциативная алгебра с модулем определяет определенную пару пару взаимных групп,причем каждая является своей собственной параметрической группой. Обратно, если дана некоторая пара просто транзитивных групп, взаимных между собой, линейных однородных преобразований относительно n переменных, то мы можем найти новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ так, что группы сведутся одновременно к группам преобразований (y) и $[y]$, в которых n параметров $y_1, \ldots, y_n$ входят линейно и однородно, и так, что каждая новая группа является своей собственной параметрической группой; значит (y) определяет правило умножения $x' = xy$ двух чисел из линейной ассоциативной алгебры с единицами $e_1, \ldots, e_n$ и таблицей умножения* (94).

[53] Формулирована Пуанкаре (Poincaré, Paris, Comptes Rendus, том 99 (1884) стр. 740.

[54] Стэди, Leipzig Berichte, том 41 (1889), мат., стр. 202; перепечатано, в Monatshefte Math. u Phys. том 1 (1890), стр. 283–355. В то время как Стэди использовал теорию билинейных форм, Шефферс дал чисто группо-теоретическое доказательство, использовав бесконечно малые преобразования (Lie – Scheffers, Continuierliche Gruppen, 1893, стр. 627). Ср. Шефферс, Leipz. Ber., том 41 (1889) стр. 290–307.

Рассмотрим линейное преобразование $Q = q_1 q q_2$, где

$$q = x + yi + zj + wk, \qquad Q = X + Yi + Zj + Wk$$

кватернионы с переменными координатами и q_1, q_2 — данные кватернионы. Тогда по § 12,

$$N(Q) = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = c(x^2 + y^2 + z^2 + w^2), \qquad c = N(q_1 q_2).$$

Для $c \neq 0$ мы имеем преобразование, включающее семь произвольных постоянных, выражающих X, Y, Z, W, как линейные функции с детерминантом $\neq 0$ от x, y, z, w, преобразование, которое умножает $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ на c. Если мы отправляемся с общим кватернарным линейным преобразованием, имеющим 16 коэффициентов, и наложим на последние условие, а именно, что коэффициенты шести членов $XY, \ldots$ должны исчезать, а коэффициенты $X^2, \ldots$ должны быть равны, то мы имеем девять соотношений и поэтому семь свободных постоянных. Дополняя этот «счет постоянных» окончательной формулой[55] для получающихся преобразований, мы увидим, что все они даются при кватернионном преобразовании $Q = q_1 q q_2$. Поэтому мы имеем очень удобное выражение для группы[56], порождаемой вращениями вокруг начала и вытягиваниями от него. Чтобы получить соответствующую группу[57], мы должны только взять

$$x = X = 0, \quad q_2 = q_1', \quad \text{кватернион, сопряженный с } \; q_1.$$

Относительно дальнейших соотношений между линейными алгебрами и группами преобразований не непременно линейных и относительно различных геометрических приложений нашей темы, читатель может справиться в Encyc. Sc. Math., том 1, 1, стр. 448–465. Также надо обратиться к стр. 468 относительно связи между непрерывными группами Софуса Ли и неассоциативными линейными алгебрами, в которых $ab = -ba$, $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ для всяких трех чисел a, b, c алгебры.

53. Соответствие между линейными ассоциативными алгебрами и системами билинейных форм.

Если x_i, u_i $(i = 1, \ldots, n)$ $2n$ независимых переменных, то

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i u_j$$

называется *билинейной формой*. Пусть B обозначает подобную форму с коэффициентами b_{ij}. Тогда $A + B$ обозначает форму с коэффициентами $a_{ij} + b_{ij}$. Произведение[58]

[55] Кэли, 1854, Coll. Math. Papers. II, стр. 133, 214; Клейн (Klein), Math. Ann., том 37 (1890), стр. 544, и Elementarmath. vom höheren Standpunkte aus, 1, стр. 161.

[56] Так как, если $Q_1 = q_3 Q q_4$, то $Q_1 = (q_3 q_1) q (q_2 q_4)$.

[57] Удерживая лишь преобразования с положительными детермичантами, мы исключаем

$$y' = -y, \quad z' = -z, \quad w' = -w$$

и их произведения на предыдущие.

[58] Поэтому $AB = \sum_k \dfrac{\partial A}{\partial u_k} \dfrac{\partial B}{\partial x_k}$. Это — определение, данное Фробениусом. Journ. der Math., том 84 (1877), стр. 1–63, наиважнейшая статья по нашей теме.

AB — форма C с коэффициентами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Таким образом матрица из коэффициентов суммы или произведения двух билинейных форм является суммой или произведением их матриц, взятых в том же порядке. Поэтому предмет билинейных форм по существу тождествен с предметом матриц, если мы условимся употреблять также особенные преобразования (с детерминантом нуль) с предметом линейных однородных преобразований.

Если в начале § 52 мы положим $y = e_j$, то уравнение $x' = xe_j$ дает

$$x'_s = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ijs} x_i \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

матрица которого имеет элемент γ_{ijs} в s-той строке и i-той колонке. Взявши его[59], как a_{is} в A, получим билинейную форму:

$$A_j = \sum_{i,s=1}^{n} \gamma_{ijs} x_i u_s.$$

Тогда число $\sum c_j e_j$ соответствует билинейной форме $\sum c_j A_j$ тогда как сумме или произведению двух чисел соответствует сумма или произведение соответствующих билинейных форм[60].

Например, единицы 1, i бинарной алгебры комплексных чисел соответствуют $x_1 u_1 + x_2 u_2$ и $x_1 u_2 - x_2 u_1$.

Превосходный пример доставляет матричная алгебра четырех единиц. Так как соответствующая группа (95) воздействует когредиентно на две пары переменных, то билинейные формы являются каждая суммой двух подобных частей с различными переменными $x_i u_j$, $i, j = 1, 2$ в одной части, $j = 3, 4$ в другой части. Оставляя только первые части, мы получаем

$$\alpha x_1 u_1 + \beta x_1 u_2 + \gamma x_2 u_1 + \delta x_2 u_2,$$

как часть, соответствующую транспонированной матрице из a и b в (95). Таким образом каждая единица e_{ij} алгебры [смотри (16_2)] соответствует билинейной форме $B_{ij} \equiv x_i u_j$ с теми же индексами. B_{ij}[61] удовлетворяют соотношениям (14).

Обратно, если даны n билинейных форм $A_1, \ldots, A_n$ относительно x_i, u_i ($i = 1, \ldots, n$) таких, что каждое $A_r A_s$ — линейная функция от $A_1, \ldots, A_n$ с постоянными коэфициентами, то мы можем взять их за единицы линейной ассоциативной алгебры.

[59]Если $TT' = T''$ для линейных преобразований, то $\overline{\mu}\overline{\mu'} = \overline{\mu}''$, где $\overline{\mu}$ обозначает матрицу μ для T с переставленными между собою строками и колонками. Таким образом в (95), (96)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} .$$

[60]Пирс доказал эту теорему, выраженную в ином обозначении; смотри список его работ в Encyc. Sc. Math., том I, 1, стр. 416. Ср. Стэди Leipzig Ber. том 41 (1889), стр. 192.

[61]Более легкая проверка получается при диференцировании (смотри первое подстрочное примечание этого параграфа).

Поэтому предмет билинейных форм[62] по сути тождествен с предметом линейных ассоциативных алгебр.

54. Отношения линейных алгебр к конечным группам. Рассмотрим, например, вращения I, A, B на плоскости вокруг точки, на углы $0°$, $120°$, $240°$ соответственно. Они образуют группу с таблицей умножения

$$\begin{array}{c|ccc} & I & A & B \\ \hline I & I & A & B \\ B & B & I & A \\ A & A & B & I \end{array}.$$

Это читается $AB = I$ и т. д. Принимая I, A, B за единицы, произведения которых даются таблицей, мы имеем линейную ассоциативную алгебру[63]. То же получится, если мы отправляемся со всякой конечной группой, являющейся по определению ассоциативной.

Если мы возьмем I, A, B, как обыкновенные переменные и рассмотрим трехстрочную матрицу, образующую основу таблицы умножения у приведенной выше группы (причем множители расположены так, что каждый элемент главной диагонали есть I), то мы имеем пример того, что Фробениус[64] назвал *групповой матрицей* данной конечной группы. Произведение двух таких групповых матриц — другая матрица того же типа:

$$\begin{pmatrix} I & A & B \\ B & I & A \\ A & B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & a & b \\ b & i & a \\ a & b & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota & \alpha & \beta \\ \beta & \iota & \alpha \\ \alpha & \beta & \iota \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \iota &= Ii + Ab + Ba, \\ \alpha &= Ia + Ai + Bb, \\ \beta &= Ib + Aa + Bi. \end{aligned}$$

Назовем e_1 матрицу, получаемую из первой, если положить $I = 1$, $A = B = 0$; e_2, если положить $A = 1$, $I = B = 0$; e_3 при $B = 1$, $I = A = 0$. Тогда

$$(Ie_1 + Ae_2 + Be_3)(ie_1 + ae_2 + be_3) = \iota e_1 + \alpha e_2 + \beta e_2$$

является эквивалентным с приведенным выше соотношением между матрицами и служит формулой умножения для алгебры с модулем e_1 и

$$e_2^2 = e_3, \quad e_2e_3 = e_3e_2 = e_1, \quad e_3^2 = e_2.$$

В действительности мы возвратились к нашей группе с тремя операторами. Изящное изложение этого непосредственного соотношения между теорией групповых матриц и линейных алгебр и приложение к абелевым интегралам дано в мемуаре Пуанкаре[65].

[62]Указания даны в Encyc. Sc. Math, том I, 1, стр. 415–421, 444–446. Относительно значения теории билинейных форм и их приложений смотри Мут (Muth), Elementartheiler Leipzig. 1899.

[63]Кэли, Phil. Mag. том 7 (1854), стр. 46 (= Coll. Math. Papers, том II, 1889, стр. 129).

[64]См. ссылки в конце § 50.

[65]Journ. de Math, серия 5, том 9 (1903), стр. 180.

55. Точка зрения Дедекинда (Dedekind) на линейные ассоциативные коммутативные алгебры[66]**.** Рассмотрим пример тройной коммутативной алгебры:

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2 e_3 = e_2, \quad e_2^2 = e_3^2 = e_3, \quad e_1 e_2 = e_1 e_3 = e_2 + e_3.$$

Рассматривая эти соотношения, как обыкновенные алгебраические уравнения с неизвестными e_i, мы находим сразу, что они имеют только четыре ряда решений:

$$(e_1, e_2, e_3) = (0,0,0), \quad (1,0,0), \quad (2,1,1), \quad (0,-1,1).$$

Исключая, конечно, первый ряд, Дедекинд рассматривал e как многозначные (но соотносительные) числа, так что всякая линейная функция от них была трехзначна. Соотношение здесь таково, что, если $e_2 = r$, то $e_1 = r + 1$, $e_3 = r^2$, где r трехзначная функция, для которой $r^3 = r$. Вообще уравнения умножения

$$e_i e_j - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{94}$$

коммутативной ассоциативной алгебры имеют n рядов реальных или комплексных решений с детерминантом[67], не равным нулю, тогда и только тогда, когда

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{rsi} \gamma_{ijj} \right| \neq 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, n)$$

Не далеко отстоит от этой точки зрения точка зрения Кронекера[68], который получал все коммутативные линейные ассоциатиины алгебры, употребляя модулярные системы, где модулям были левые члены в (94).

[66]Göttingen Nachr., 1885, стр. 141; 1887, стр. 1; воспроизведено Берлоти (B. Berloty), Thése, Paris, 1886.

[67]Ср. Петерсен (J. Petersen), Gött. Nachrichten, 1887, стр. 489; Фробениус, Berlin Sitzungsber., 1896, стр. 601; Гильберт (D. Hilbert), Gött. Nachr., 1896; стр. 179 (при помощи теории инвариантов).

[68]Berlin Sitzungsber., 1888, стр. 429, 447, 557, 595, 983. Смотри чистое извлечение в Encycl. Sc. Math., том I, 1, стр. 409–411.

ЧАСТЬ IV

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ НАД ПОЛЕМ F

56. Под *делительной алгеброй* должно понимать алгебру, в которой оба деления, правое и левое, исключая деление на нуль, возможны и однозначны. Основная теорема § 50 на комплексные алгебры была обобщена Веддерборном[69] следующим образом:

Теорема 1. *Всякая линейная ассоциативная алгебра над полем F является суммой полу-простой алгебры и нильпотентной инвариантной под-алгебры, каждой над полем F. Полу-простая алгебра над F — или простая, или прямая сумма простых алгебр над F. Всякая простая алгебра над F является прямым произведением делительной алгебры и простой матричной алгебры, причем обе над F, включая возможность, что модулем служит только единица множителя.*

Так как часть, относящаяся к простым алгебрам, совершенно отлична от нашего предыдущего результата для случая комплексного поля, то будет разъяснена тема, имеющая доказательство от противоположного:

Теорема 2. *Прямое произведение P делительной алгебры D и матричной алгебры M, каждой над F, является простым; всякое число из P, коммутативное со всяким числом из P, находится в D.*

Обозначим единицы M через e_{pq} $(p, q = 1, \ldots, n)$ так, что e_{pp} — частичные модули и $\varepsilon = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ служит модулем у M и потому у P. Пусть I какая-нибудь инвариантная под-алгебра у P и $i = \sum \delta_{rs} e_{rs}$ является числом из I, где δ_{rs} находится в D. Так как I инвариантно, то $e_{pp} i e_{qq}$ находится в I. Допуская p и q изменяться мы получим произведение $\neq 0$, если $i \neq 0$, так как

$$\sum_{p,q=1}^{n} e_{pp} i e_{qq} = \sum_{p=1}^{n} e_{pp} i \varepsilon = \varepsilon i \varepsilon = i.$$

Таким образом, для некоторой пары целых чисел p и q

$$\delta_{pq} e_{pq} = e_{pp} i e_{qq} \neq 0.$$

Таким образом I содержит число $\delta_1 e_{pq}$, где δ_1 число $\neq 0$ из D.

Если δ — некоторый элемент из D, то мы можем найти число δ_2 из D такое, что $\delta_2 \delta_1 = \delta$. Поэтому I содержит δe_p и значит также

$$\delta e_{pq} e_{qr} = \delta e_{pr}, \quad e_{sp} \delta e_{pr} = \delta e_{sp} e_{pr} = \delta e_{sr},$$

[69] Proc. London Math. Soc., серия 2, том 6 (1907), стр. 109.

где r, s — положительные целые числа $\leq n$. Следовательно, $I \equiv P$. Далее, если x — некоторое число из P, коммутативное с каждым числом из P, то положим $x = \sum \delta_{rs} e_{rs}$, где δ_{rs} в D. Тогда

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_{rp} e_{rq} = x e_{pq} = e_{pq} x = \sum_{s=1}^{n} e_{ps},$$

где p и q произвольны. Поэтому

$$\delta_{rp} = 0 \ \ (r \neq p), \quad \delta_{pp} = \delta_{qq}, \quad x = \delta_{11} \sum e_{qq} = \delta_{11} \varepsilon = \delta_{11},$$

так что x находится в D. Случай, когда D имеет единственную единицу, дает

Следствие. *В матричной алгебре M с модулем ε, числа $a\varepsilon$ (a — скалар) коммутатианы со всяким числом из M.*

Следовательно (§ 52) только те линейные преобразования коммутативны со всяким числом, которые умножают каждое переменное на одну и ту же константу.

Когда F — поле всех комплексных чисел, то всякое число делительной алгебры удовлетворяет линейному уравнению (§ 11), так что алгебра является сама полем. Поэтому (в согласии с § 50), всякая простая алгебра является матричной.

Если F — поле всех реальных чисел, то делительными алгебрами являются лишь те три алгебры, которые были найдены в § 11.

Поэтому мы имеем

Теорему 3[70]**.** *Всякая реальная простая алгебра есть или реальная матричная алгебра M с p^2 единицами e_{jk}, или прямое произведение из M и алгебры $(1, i)$ обыкновенных комплексных чисел, или прямое произведение из M и алгебры реальных кватернионов.*

Для второго типа единицами являются e_{jk}, $e'_{jk} = ie_{jk} = e_{jk}i$, где

$$e_{jk} e'_{lm} = e'_{jk} e_{lm} = \begin{cases} 0 \\ e'_{jm}, \end{cases} \qquad e'_{jk} e'_{lm} = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ -e_{jm} & (k = l). \end{cases}$$

По приведенному выше следствию, коммутативная матричная алгебра имеет единственную единицу ε. Используя первые части теоремы 1 и теоремы 3, мы получаем

Теорему 4. *Всякая реальная коммутативная алгебра без нильпотентных чисел является прямой суммой некоторых алгебр (ε_i), из которых каждая эквивалентна алгебре реальных чисел и некоторых алгебр (e_i, e'_i),*

$$e_i^2 = e_i, \quad {e'_i}^2 = -e_i, \quad e_i e'_i = e'_i e_i = e'_i,$$

из которых каждая эквивалентна алгебре обыкновенных комплексных чисел. М Мы получаем под-алгебру комплексных чисел (93), положивши

$$E_i E'_i = \frac{1}{2}\left(e_i \pm \sqrt{-1} e'_i\right), \quad E^2 = E, \quad {E'}^2 = E', \quad EE' = E'E = 0.$$

[70]Формулировано и доказано иначе Картаном (lib. cit., стр. 61–72). Он также доказал первую часть теоремы 1 для реальных алгебр. Методом было изучение соответствующей комплексной алгебры с теми же единицами. Мы заключаем, что реальная делительная алгебра проста и, значит, по теореме 3 — одна из трех типов § 11.

57. Алгебры Вейерштрасса. Если k — нулевой множитель т. е. число, для которого $ky = 0$ имеет решение $y \neq 0$?, и σ не является таковым, то существует бесконечное множество чисел x, удовлетворяющих уравнению $k\rho + k\sigma x = 0$. Ибо, если y — один из бесконечности y-ов, удовлетворяющих $ky = 0$, то он имеет решение x, где x определяется из $\rho + \sigma x = y$. Аналогично, существуют уравнения степени m, имеющие коэффициентами c_i, кратные для k с бесконечным множеством корней, а именно $x = x_0 + yz$, где $\sum c_i x_0^i = 0$. Вейерштрасс[71] исследовал реальные линейные алгебры, в которых умножение — коммутативно и ассоциативно, с $\Delta(x)$, не равным тождественно нулю (§ 6), и эти алгебры таковы, что алгебраическими уравнениями с бесконечным множеством корней являются лишь те, у которых все коэффициенты — кратные одного и того же нулевого множителя. При помощи несколько длинного, но изящного анализа он доказал, что такая алгебра эквивалентна при реальном линейном преобразовании единиц прямой сумме реальной единичной и бинарной алгебр (как дано в приведенной выше теореме 4) и, обратно, что получающаяся алгебра имеет определенные ранее свойства.

Этот результат следует сразу из теоремы 4; ибо, если бы алгебра имела нильпотентное число η такое, что $\eta^k = 0$, то уравнение $x^k = 0$ имело бы бесконечность корней $r\eta$ (r — реальное) и его коэффициенты не были бы еще все нулевыми множителями. Но теорема 4 основана на фактах, не доказанных в настоящей книге. Поэтому мы дадим прямое, доказательство (второе из двух доказательств Стэди[72] теоремы Вейерштрасса, в эквивалентной форме (известной последнему), что соответствующая комплексная алгебра является алгеброй типа (93). Достаточно доказать, что лишь комплексные неприводимые алгебры Вейерштрасса те, что имеют единственную единицу ε. По критерию Шефферса (§ 21) неприводимая коммутативная алгебра с модулем ε не имеет дальнейших чисел e таких, что $e^2 = e$. Таким образом (§ 20) ранговое уравнение есть $(\alpha - \lambda\varepsilon)^r = 0$. Если $r > 1$, то $(\alpha - \lambda\varepsilon)^{r-1}$ — корень $\neq 0$ для $x^2 = 0$. Значит $r = 1$ и единственная единица есть ε.

58. Коммутативные неассоциативные делительные алгебры. Пусть F — поле (исключая поле с модулем 2, в котором поэтому $2x$ считается, как нуль), для которого существует неприводимая функция

$$x^3 - Bx^2 - \beta x - b \qquad (B, \beta, b \ \text{в} \ F).$$

Тогда деление, исключая деление на нуль, всегда возможно и однозначно в алгебре[73] с единицами 1, i, j над F, для которых

$$i^2 = j, \quad ij = b + \beta i + Bj, \quad j^2 = 4bB - \beta^2 - 8bi - 2\beta j. \tag{97}$$

Если последнее уравнение заменить на

$$j^2 = i(ij) = bB + (b + \beta B)i + (\beta + B^2)j,$$

[71] Göttingen Nachr. 1884, стр. 395–419.

[72] Göttingen Nachr., 1898, стр. 1 (1889, стр. 262–5). Все статьи, исключая последние приведенные в § 55, имеют дело с этой темой.

[73] Диксон. «О конечных алгебрах», Göttingen Nachrlcht., 1905, стр. 358–393; Bull. Amer. Math. Soc., том 14 (1907–8), стр. 169, где об этих алгебрах доказано, что они являются единственными с тремя единицами и однозначным делением, если F — конечное поле, при использовании замечательной теоремы о неисчезающих тернарных кубических формах; Trans. Amer. Math. Soc., том 7 (1906), стр. 370–390, где (97) находится при помощи инвариантных свойств.

то мы получим поле $F(i)$, для которого детерминант $\Delta(x)$ общего числа $x = r+si+tj$ исчезает тогда и только тогда, когда r, s, t все — нули. Поэтому последнее свойство имеет силу также для функции δ, произведенной из $\Delta(x)$ при замене r, s, t на $r+\beta t$, $s+2Bt$, $-2t$ соответственно. Но δ детерминант x для алгебры (97).

Совершенно иного характера — коммутативная делительная алгебра[74] с $2n$ единицами J^r, IJ^r $(r = 0, 1, , \dots, n-1)$ над F, где J — корень односерийного абелевого уравнения

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots \pm c_n = 0,$$

т. е. уравнения, неприводимого в F и имеющего корни

$$J, \quad J' = \Theta(J), \quad J'' = \Theta(J'), \ \dots, \ J^{(n-1)} = \Theta^{n-1}(J) \qquad [\Theta^n(J) \equiv J],$$

где Θ — полином с коэффициентами в F, с последующим условием, что c_n не является квадратом числа из F. Общее число алгебры есть $A+BI$, где A, B — полиномы относительно J с коэффициентами в F. Напишем $B' = B(J')$, $B'' = B(J'')$ и пр. для сопряженных с $B(J)$. Таблица умножения алгебры определяется

$$(A+BI)(X+YI) = R+SI, \quad R \equiv AX + B'Y'J, \quad S \equiv BX + AY. \tag{98}$$

Последние два уравнения могут быть разрешены относительно X и Y в поле $F(J)$, если только A и B оба не нули. Исключая X, мы получаем

$$BB'Y'J - A^2 Y = C, \qquad C \equiv BR - AS.$$

В $C, C', \dots, C^{(n-1)}$ детерминант из коэфициентов $Y, Y', \dots$ равняется

$$c_n B^2 B'^2 \cdots [B^{(n-1)}]^2 - A^2 A'^2 \cdots [A^{(n-1)}]^2 \neq 0,$$

и получившийся Y удовлетворяет предшествующему уравнению. Следовательно деление, исключая деление на нуль, всегда возможно и однозначно.

59. Линейные ассоциативные делительные алгебры. Пусть $\Phi(x) = 0$ — некоторое односерийное абелево уравнение степени r в поле F. Назовем его корни так:

$$i, \quad \Theta(i), \quad \Theta^2(i) = \Theta[\Theta(i)], \ \dots, \ \Theta^{r-1}(i) \qquad [\Theta^r(i) = i].$$

Тогда $i^s j^t$ $(s, t = 0, 1, \dots, r-1)$ являются r^2 единицами линейной ассоциативной алгебры[75] над F, имеющей

$$\Phi(i) = 0; \quad ji = \Theta(i) j, \quad j^r = g, \tag{99}$$

где g и коэфициенты полиномов Θ и Φ находятся в F. Если $r \neq 2$, то мы можем, не нарушая общности, взять $i^2 = c$, где c в F, но не является квадратом числа из F. Линейные функции от i образуют поле $F(i)$. Общим числом алгебры является $N = \alpha + \beta j$, α и β в $F(i)$. Если $\beta = 0$, то N имеет обратное α^{-1} в $F(i)$. Если $\beta \neq 0$, то $N = \beta\nu$, где ν вида $\gamma + j$, и $\gamma = e + fi$. Мы пишем $\gamma' = e - fi$. Так как $\Theta(i) = -i$, то

$$ji = -ij, \quad j\gamma = \gamma' j, \quad (j-\gamma')(j+\gamma) = g - \gamma\gamma'.$$

[74]Диксон, Trans. Amer. Math. Soc. том 7 (1906), стр. 514.
[75]Диксон, Trans. Amer. Math. Soc. том 15 (1914), стр. 31.

Поэтому[76] всякое число $N \neq 0$ имеет обратное, если g не является нормой $\gamma\gamma' \equiv e^2 - cf^2$ числа γ из $F(i)$. Условия относительно c и g удовлетворяются, когда F — поле реальных чисел, если положить $c = g = -1$, и тогда алгебра станет алгеброй реальных кватернионов.

Подобный результат имеет место[77] для всякого r. По (99_2),

$$jf(i) = f(\Theta)j, \quad j^2 f(i) = f[\Theta^2(i)]j^2, \tag{100}$$

где f — полином с коэфициентами в F. Рассмотрим типичный случай $r = 3$. Тогда имеем сразу

$$[j^2 + k(\Theta^2)j + k(\Theta)k(\Theta^2)]\,[j - k(i)] = g - k(i)k(\Theta)k(\Theta^2),$$

где $k(\Theta^2)$ обозначает $k[\Theta^2(i)]$. Предположим, что g — не норма числа из $F(i)$. Тогда каждое $j - k(i)$ имеет обратное. Остается только показать, что

$$z = j^2 + \alpha j + \beta$$

имеет обратный элемент, при α и β в $F(i)$. Но

$$z[j - \alpha(\Theta)] = [\beta - \alpha(i)\alpha(\Theta^2)]j + g - \beta(i)\alpha(\Theta)$$

не нуль, так как g не норма $\alpha(i)$; и всякое число $F(i)$, и всякая линейная функция от j имеет себе обратные.

Существование этих линейных ассоциативных алгебр относительно r^2 единиц, в которых оба, правое и левое деление, исключая деления на нуль, всегда возможны и однозначны, имеет решающий интерес и важность в силу роли делительных алгебр в общей теории § 56.

Наоборот, если поле F имеет только конечное число элементов, то умножение должно быть коммутативным в линейной ассоциативной алгебре, которая поэтому является полем[78].

60. Конечные ассоциативные делительные алгебры[79]. Рассмотрим p^2 пар $x, y)$, где x, y целые числа, взятые по модулю p, а p — простое число > 2, так что

$$(a, c) + (x, y) = (a + x, c + y), \tag{101}$$

$$(a, c) \cdot (x, y) = (ax + \varepsilon\nu cy, cx + \varepsilon ay), \tag{102}$$

Здесь ν — фиксированный квадратичный невычет p, тогда как

$$\varepsilon \equiv (a^2 - \nu c^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Правое и левое деление, исключая деление на $(0, 0)$ всегда возможно и однозначно. Умножение ассоциативно. Имеет место первый дистрибутивный закон (4_1), но это не имеет места для (4_2).

[76]Диксон, loc. cit. и Trans. Amer. Math. Soc., том 13 (1912), стр. 65, 66.

[77]Веддерборн, Trans. Amer. Math. Soc. том 15 (1914), стр. 162.

[78]Веддерборн, Trans. Amer. Math. Soc., том 6(1905), стр. 349 ; Диксон, Göttingen Nachricht, 1905, стр. 381.

[79]Диксон, Göttingen Nachricht, 1905, стр. 358.

Для p простого и вида $3l+1$ определим сумму (a,b,c) и (x,y,z), как в (101), и их произведение в виде

$$(ax+\varepsilon\nu cy+\varepsilon^2\nu bz, bx+\varepsilon ay+\varepsilon^2\nu cz, cx+\varepsilon by+\varepsilon^2 az),$$

где ν — определенный кубичный невычет p, и

$$\varepsilon \equiv D^{\frac{p-1}{3}} \pmod p, \qquad D = a^3+\nu b^3+\nu^2c^3-3\nu abc.$$

Тогда D делится на p только тогда, когда это имеет место для a,b,c. В самом деле, D — детерминант $\Delta(x)$ для алгебры — поля из чисел

$$x = a+b\rho+c\rho^2, \qquad \rho^3 \equiv \nu \pmod p.$$

Поэтому каждый способ деления, исключая деления на $(0,0,0)$ всегда возможен и однозначен. Умножение ассоциативно, и имеет силу первый дистрибутивный закон (4_1). Обобщение на n-аггрегаты получается непосредственно.

Каждая из алгебр (97) и (101) и (102) была использована при построении не-Дезарговой и не-Паскалевой геометрий[80].

61. Формулирование дальнейших результатов относительно общих линейных алгебр. Пусть A? — линейная алгебра не непременно ассоциативная, над полем F. Пусть I — некоторая инвариантная под-алгебра A. Пусть $i_1,\dots,i_p$ — полный ряд линейно-независимых чисел из I относительно поля F. Выберем числа $a_1,\dots,a_q$ из A так, чтобы $i_1,\dots,i_p,a_1,\dots,a_q$ образовывали полный ряд линейно-независимых чисел A относительно F. Пусть $i,i',\dots$ обозначают линейные функции от $i_1,\dots,i_p$ с коэфициентами в F и $a,a',\dots$ — линейные функции от $a_1,\dots,a_q$. Тогда ai' и ia' являются числами i'' и i''' инвариантной под-алгебры I. Поэтому

$$(a+i)(a'+i') = aa'+i'''', \quad i'''' = ii'+i''+i'''.$$

Следовательно, если мы устраним компоненты $x, i_1,\dots,x_pi_p$ во всех числах и произведениях чисел из A, то мы получим линейную алгебру, про которую говорят, что она *сопровождающая*[81] для A и *дополнительная* к J. Ее удобно обозначать $A-I$ и называть разностной алгеброй. Число ее единиц составляет излишек числа единиц A над числом единиц I. Рассматривая как тождественные те числа из A, которые различаются только числами из I, мы получаем $A-I$. Это — ассоциативная алгебра, если таковою является A.

Если каждое A_j — максимальная инвариантная под-алгебра для A_{r-1}, то $A_1, A_2, A_3,\dots$ называется *композиционным рядом* для A_1. О разностных алгебрах $A_1 - A_2, A_2 - A_3,\dots$ говорят, что они составляют *разностный ряд* для A_1. *Всякие два разностных ряда для A_1 отличаются только размещением членов ряда*[82]. Каждая алгебра разностного ряда — простая. Подобная теорема имеет место, когда каждое

[80]Веблен и Веддерборн, Trans. Amer. Math. Soc., том 8 (1907), стр. 379.

[81]Молио, Math. Annal., том 41 (1893), стр. 93 — сопровождающая система (Begleitendes System), Фробениус, Berlin Sitzungsb, 1903, стр. 523. гомоморфная группа (homomorphe Gruppe).

[82]Веддерборн, Proc. London Math. Soc., серия 2, том 6 (1907) стр. 84, 110; Эпстин и Веддерборн, Trans. Amer. Math. Soc. том 6 (1905) стр. 176.

A_r является самой большей под-алгеброй для A_{r-1}, инвариантной относительно A_1 причем полученные ряды называются главными разностными рядами. Эти теоремы аналогичны соответствующим теоремам о композиционных рядах и конечных групп.

Пусть A_1 — приводимая алгебра и A_2 наибольшая алгебра, так что A_1 представляет прямую сумму (§ 21) из A_2 и другой под-алгебры A'_2. Если A_2 приводима, то пусть A_3 ее наибольшая под-алгебра такая, что A_2 — прямая сумма A_3 и другой под-алгебры у A_2 и т. д. Тогда ряд $A_1 - A_2, A_2 - A_3, \ldots$ называется[83] *редуктивным рядом* для A_1. *Всякие два редуктивных ряда для* A_1 *различаются только размещением своих членов.* На основании последней теоремы, Веддерборн доказал, что *линейная ассоциативная алгебра над полем может быть выражена одним и только одним способом, как прямая сумма неприводимых алгебр, причем каждая имеет модуль и алгебру без модуля.* В частности[84], алгебра с модулем может быть выражена, как прямая сумма неприводимых алгебр, причем каждая имеет модуль. Ранговое уравнение у $s + S$ является произведением[85] ранговых уравнений s и S

62. Аналитические функции от гиперкомплексных чисел. Берлоти (Париж, 1886) в своей диссертации распространил элементы теории функций комплексного переменного на числа алгебры Вейерштрасса. Условия для такого расширения на общую алгебру с модулем были рассмотрены Шефферсом[86]; пусть $f_1, \ldots, f_n$ — непрерывные функции от $x_1, \ldots, x_n$, чтобы $f = \sum f_i e_i$ имела единственную производную, независимую от $dx_1, \ldots, dx_n$, умножение должно быть коммутативным; чтобы так определенные производные и интегралы аналитических функций были аналитическими, умножение должно быть также ассоциативным. Гаусдорф[87] производил различные расширения, основываясь на числе линейно-независимых выражений $\sum a_i x b_i$, где a и b — определенные числа алгебры.

[83] Веддерборн, lib. cit, стр. 86, 112; Эпстин, Trans, Amer. Math. Soc., том 4 (1903), стр. 444.

[84] Шефферс. Math/ Ann. том 41 (1893), стр. 601, для случая поля комплексных чисел. Его доказательство основывается на неправильном заключении (верхняя часть стр. 603), упомянутом во втором подстрочном примечании к § 39 нашего труда

[85] Стэди, Monatshefte Math. u. Phys, том 2 (1891), стр. 44;. Шефферс, Math. Annalen, njv 39 (1891), стр. 319.

[86] Paris Comp. Rend., 116 (1893), стр. 1114, 1242; Leipzig Berichte, том 45 (1893), матем. стр. 828; том 46 (1894), стр. 120.

[87] Leipzig Ber., том 52(1900), матем., стр. 45. Сравни Отонн (L. Autonne), Paris Compted Rendus, 142 (1906), стр. 1183; Journ. de Math., серия 6, том 3 (1907). стр. 53.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 1 руб. 65 коп.

65 - 2 - 3

ДНТВУ