



A TREATISE ON PHOTO-ELASTICITY

by

E. G. COKER, M.A., D.Sc., F.R.S.

*Kennedy Professor of Civil and Mechanical Engineering in the University of London, University College and Director of the Engineering Laboratories.
Member of the Institution of Civil Engineers. Member of
the Institution of Mechanical Engineers*

and

L. N. G. FILON, M.A., D.Sc., F.R.S.

*Goldsmid Professor of Applied Mathematics and Mechanics in the University of London, University College, Fellow of University College, London
and Director of the University of London Observatory*

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1931

Э. КОКЕР и Л. ФАЙЛОН

ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. *Н. М. БЕЛЯЕВА* и проф. *А. П. АФАНАСЬЕВ*

С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СТАТЬЕЙ
Д. К. КНОЛЛЯ

ОПТИ. ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Книга Кокера и Файлона „Оптический метод исследования напряжений“ (A Treatise on Photo-Elasticity) представляет весьма большой научный и практический интерес. Авторы этой книги, видные специалисты в области теории упругости и оптического метода, собрали и привели в систему весьма обширный и разнообразный материал, полученный как ими, так и другими исследователями.

Этот материал охватывает и теорию оптического метода и его практические приложения.

Значение оптического метода для инженера громадно. Этот способ позволяет определять напряжения в моделях таких деталей, для которых нет пока возможности получить решения другим путем. В большинстве случаев переход от модели к действительной конструкции может быть сделан достаточно надежно. И для тех задач, которые поддаются теоретическому освещению, этот метод позволяет проверить правильность исходных предположений и пограничных условий.

Необходимо лишь иметь в виду, что для тех случаев, когда мы имеем на практике значительную концентрацию напряжений, с переходом за предел текучести, оптический метод дает повышенную величину напряжений и, стало быть, повышенный коэффициент концентрации.

В ближайшее время несомненно установки для изучения напряжений этим методом станут основным оборудованием для исследовательских и учебных лабораторий по сопротивлению материалов и теории упругости. Предлагаемая книга окажет большую помощь при работе в этой области.

К основному тексту Кокера и Файлона добавлена статья, написанная *Д. К. Кноллем*, освещающая некоторые новые вопросы этого метода.

Так как с момента выхода английского издания литература по оптическому методу увеличилась, то, помимо библиографии, приведенной в подлиннике, приложен перечень новой литературы, составленный библиотекой Центрального котлотурбинного института.

Главы I и III редактировал проф. *А. П. Афанасьев*, главы II, IV, V, VI, VII и VIII — проф. *Н. М. Беляев*.

Н. Беляев.

7/ХII-1935 г. Ленинград.

ВВЕДЕНИЕ.

Чтобы дать читателю представление о расположении материала и содержании отдельных глав настоящей книги, полезно изложить общий план этой работы.

Поскольку оптика является одной из основ оптического метода, представляется необходимым изложить главнейшие данные этой отрасли науки.

В главе I дано теоретическое изложение оптики в соответствии с электромагнитной теорией света, как наиболее подходящей для данного случая.

В последние годы установлено, что целый ряд фактов не согласуется с этой теорией, но пока нет другой, которая соответствовала бы всем наблюдающимся явлениям.

К счастью, это отсутствие законченной теории света не представляет затруднений при изучении тех явлений, с которыми приходится встречаться в применении оптического метода.

Изучение упругих деформаций материала является вторым основным предметом, который рассмотрен в начале книги, а именно в главе II; однако это изучение ограничивается лишь случаем плоской задачи, для которой и приложим оптический метод.

Почти совершенно в стороне оставлена обширная область задачи трех измерений, а также область пластических деформаций, теория которых еще слабо разработана.

Применение криволинейных координат при дальнейшем изложении повлекло необходимость включения основ этой теории.

Содержание главы III представляет значительную ценность. Эта глава дает исторический обзор последовательного развития применения оптического метода, начиная с открытия Брюстера до настоящего времени.

Эта глава представляет собой законченное целое и введена как дополнение к двум предыдущим.

Остальная часть книги рассматривает ряд проблем как теоретических, так и имеющих чисто практический интерес, в которых применение оптического метода позволило выяснить характер плоского напряженного состояния, вызванного нагрузкой или определенной деформацией.

Эти проблемы можно было бы классифицировать по разным признакам; после обсуждения было решено разбить их на группы таким образом, чтобы они соответствовали интересам отдельных категорий читателей.

Глава IV рассматривает ряд проблем из области плоской задачи при прямолинейных и криволинейных контурах, а именно: напряжения в толстостенных цилиндрах с концентрично и эксцентрично расположенными поверхностями, изгиб круговых колец, распределение напряжений, вызванное приложением сосредоточенной силы в вершине клина, — задача, которая служит исходным пунктом при рассмотрении работы резцов.

Далее здесь рассмотрены задачи по определению напряжений при растяжении и изгибе клинообразных тел, элементарные случаи контактных напряжений и распределение напряжений, вызванных сосредоточенной силой или парой в бесконечно простирающейся пластинке.

Изгиб прямых или слегка искривленных балок представляет весьма большой интерес с теоретической и практической точек зрения; поэтому в главе V собраны данные главнейших теоретических исследований в этой области вместе с некото-

рыми результатами экспериментальных работ относительно влияния резкого изменения сечений.

Широкое распространение в конструкциях отверстий круговой или иных форм представляет громадное, едва затронутое, поле для теоретических исследований и для экспериментов при помощи оптического метода.

Обзор результатов, полученных до сих пор в этой области, приведен в главе VI. Рассмотрено влияние одного или нескольких отверстий на напряжения в растянутых элементах; учтено действие болта, передающего давление на края отверстия.

Как известно, распределение напряжений в пластинке со многими отверстиями зависит в некоторой степени от величины коэффициента Пуассона ν , если только равнодействующая усилий, приложенных к контуру какого-нибудь из отверстий, не равна нулю; поэтому оказалось необходимым полностью изложить теорию смещений, которая является основой для решения подобных задач, а также показать, как результаты, полученные при рассмотрении распределения напряжений в одном материале, могут быть распространены на конструкцию из другого материала. Точно так же в этой главе нашло себе место изложение теории и соответствующих экспериментов, относящихся к влиянию на распределение напряжений эмпирического отверстия, с переходом к пределу для оценки влияния трещин.

Для инженера представляет весьма большую ценность научное обоснование методов исследования материалов. Это—область, в которой применение оптического метода может принести большую пользу путем раскрытия распределения напряжений и получения количественных данных для многих из обычных опытов.

В главе VII рассмотрено влияние различной формы головок в стандартных образцах на растяжение; здесь же выяснено, как отражается на распределении напряжений система захватов для цилиндрических образцов.

В этой же главе изучены стандартные методы испытаний цемента на растяжение и сжатие, включая теоретическое исследование распределения напряжений при сжатии кругового цилиндрического образца. Этот опыт очень часто применяется при испытании самых разнообразных материалов.

Далее изучены несколько запутанные по своему характеру опыты с испытанием дерева на раскалывание, испытания на перерезывание, ударная проба, а также влияние на испытание материалов царапин и надрезов на образцах.

Из изложенного ясно, что целый ряд рассмотренных выше задач может встретиться в еще более усложненном виде при изучении различных конструкций и машин; поэтому в последней главе приведены некоторые данные о применении оптического метода к решению подобных сложных задач.

В первую очередь привлекает внимание ряд задач из области плоских стержневых систем; здесь изложены принципы динамического подобия, которые позволяют использовать для действительной конструкции результаты, полученные для моделей; далее приведены результаты исследований при помощи оптического метода целого ряда статически-неопределимых конструкций.

Другая отрасль этих исследований относится к области весьма сложных и мало изученных задач, встречающихся в конструкциях зданий, как то: влияние оконных и дверных проемов, работа карнизов, фундаментов.

Кратко описаны возможности, которые представляет применение оптического метода для проектировщика конструкций и машин; описаны полученные при помощи этого метода картины распределения напряжений в отдельных деталях — зубчатых колесах, гайках, болтах, фланцевых соединениях и подобных элементах.

Очевидно, объем последней главы мог бы быть значительно увеличен, так как работа в этой области все развивается, но уже и сказанного достаточно, чтобы показать, какие возможности раскрывает применение оптического метода в этом направлении.

Необходимо обратить внимание на порядок нумерации параграфов, формул и рисунков. Всюду принята десятичная система нумерации. Целая часть номера обозначает главу, первые две цифры за точкой обозначают номер параграфа внутри

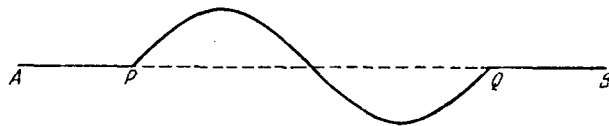
ВВЕДЕНИЕ

главы; следующие же цифры указывают последовательную нумерацию формул и чертежей внутри параграфа. Таким образом фиг. 4.344 обозначает четвертую фигуру тридцать четвертого параграфа четвертой главы; формула (4.3162) обозначает формулу тридцать первого параграфа четвертой главы, которая идет после (по смыслу, а не всегда по месту в тексте) формул (4.316) и (4.3161) и предшествует формулам (4.3163) и (4.317).

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА.

§ 1.01. Природа света.

Свет является возмущением, распространяющимся в пространстве, подобно распространению волн на поверхности воды. В природе волновые возмущения бывают различных видов: так например, волны могут распространяться вдоль натянутой струны, волна может быть *поперечной*, т. е. смещение каждой частицы струны происходит все время перпендикулярно к струне (см. фиг. 1.011), или она может быть *продольной*, т. е. смещение частицы происходит по направлению длины струны. На фиг. 1.012 изображена такая волна в струне. Короткие линии, пересекающие *AB*, предполагаются равноотстоящими при спокойном состоянии струны. На фиг. 1.011 и 1.012 волна представлена „изолированной“, т. е. колебание ограничено длиной *PQ* и движется без изменения формы вдоль струны.



Фиг. 1.011.

Звуковые волны в воздухе являются продольными волнами. Смещение происходит в направлении распространения, и волна в своем движении вызывает в слоях попеременное сжатие и растяжение, перемещающиеся вместе с волной.



Фиг. 1.012.

Световые волны, наоборот, принадлежат к поперечным волнам. В этом случае колебание является вектором, который направлен перпендикулярно к направлению распространения волны.

Мы не должны, однако, принимать световой вектор обязательно за „смещение“, хотя (как и любой вектор) он может изображаться смещением.

Современная физика¹ рассматривает свет как распространяющееся в пространстве электромагнитное возмущение. Согласно этой теории существует два вектора, оба направленные перпендикулярно как к движению волны, так и друг к другу, а именно электрическая сила и магнитная сила. Любой из них может быть принят за световой вектор.

§ 1.02. Период, частота, длина волны.

„Изолированная“ волна, представленная на фиг. 1.011 и 1.012, редко встречается в природе. Волны возникают обычно при периодическом возмущении в „источнике“ и это периодическое возмущение дает периодическую волну с длинными рядами гребней и впадин.

Такой „источник“ нормально будет порождать расходящиеся сферические

¹ Вопросы, относящиеся к квантовой теории, не связаны с исследованиями, которыми мы будем заниматься; поэтому в дальнейшем мы не будем касаться этой теории.

волны. По мере их продвижения радиус сферы увеличивается и любая ограниченная часть волны становится практически плоской, так что возмущение будет одинаковым для всех точек плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Пусть это „направление“ распространения волны будет осью x и пусть c будет скоростью распространения возмущения. При $t=0$ пусть возмущение y будет выражаться уравнением

$$y = f(x). \quad (1.021)$$

За некоторое время t возмущение распространяется вперед на расстояние ct , т. е. возмущение в точке $x = x' + ct$ будет таким же, как возмущение в точке $x = x'$ при $t = 0$.

Следовательно в момент t возмущение y на расстоянии x выражается формулой

$$y = f(x') = f(x - ct). \quad (1.022)$$

Уравнение (1.022) является основным уравнением для распространяющейся вперед плоской волны.

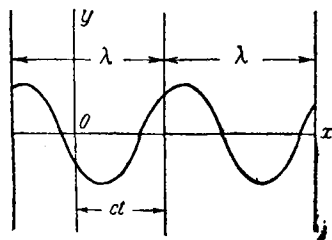
Подобно этому основное уравнение для волны, распространяющейся в противоположном направлении, будет

$$y = f(x + ct). \quad (1.023)$$

Уравнения (1.022) и (1.023) применимы для одиночных волн или для отдельных групп волн.

В случае чисто периодического возмущения функция $f(x)$ должна быть периодической по отношению к x , т. е. ее значения должны повторяться через определенный промежуток длины.

Наименьшая величина этого промежутка (длина от гребня до гребня или от впадины до впадины) называется *длиной волны*; в этой главе мы будем обозначать ее обычно через λ . График такой периодической волны показан на фиг. 1.02.



Время, требуемое на прохождение двух последовательных гребней (или двух последовательных впадин) через данную точку, называется *периодом волны* и обычно обозначается τ .

Ясно, что период является тем промежутком времени, который необходим для того, чтобы возмущение переместилось на длину волны; таким образом

Фиг. 1.02.

$$\tau = \lambda/c \quad \text{или} \quad \lambda = c\tau. \quad (1.024)$$

Частота возмущения измеряется числом колебаний в данной точке за секунду, т. е. $1/\tau$.

§ 1.03. Фронт волны и луч.

В случае плоских волн, плоскость $x = \text{const}$, в которой возмущение всегда одинаково во всех точках, называется *фронтом волны*. Если волна ограничена, начало возмущения достигает всех точек фронта волны в один и тот же момент.

При колебании, исходящем из точечного источника, волна распространяется наружу и, в случае изотропной среды, ее скорость будет одинаковой во всех направлениях. Таким образом, точки, до которых доходит та или другая часть возмущения в одно и то же время, лежат на сфере, центром которой является источник.

Если t — промежуток времени, протекший с того момента, когда некоторая часть возмущения была в источнике, то радиус сферы будет ct . Такая сфера будет в этом случае *фронтом волны*.

То, что мы называем *лучом света*, является путем, вдоль которого течет световая энергия. В случае изотропной среды, этот путь будет перпендикулярен к фронту волны и, следовательно, он будет совпадать с направлением распространения волн. Однако, в кристаллической среде, как будет показано ниже, дело обстоит иначе.

§ 1.04. Гармонические волны. Фазы и амплитуда.

Хорошо известно, что функция $f(x)$, являющаяся периодической относительно x , при периоде λ , может быть выражена рядом Фурье вида

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + \varepsilon_1) + a_2 \cos \frac{4\pi}{\lambda} (x + \varepsilon_2) + \dots + \\ + a_r \cos \frac{2r\pi}{\lambda} (x + \varepsilon_r) + \dots$$

Следовательно всякую периодическую волну, распространяющуюся со скоростью c , мы можем рассматривать как составленную из типичных членов вида:

$$a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + \varepsilon_1), \\ a_2 \cos \frac{2\pi}{(\lambda/2)} (x - ct + \varepsilon_2), \\ \dots \dots \dots \\ a_r \cos \frac{2\pi}{(\lambda/r)} (x - ct + \varepsilon_r).$$

Мы можем поэтому простую функцию вида

$$f(x - ct) = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + \varepsilon) \quad (1.04)$$

считать основной функцией.

Волна, для которой возмущение дается выражением (1.04), называется *гармонической волной*. Постоянная величина a называется *амплитудой* колебания; а величина $\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + \varepsilon)$ называется *фазой*.

В таком случае член $a_r \cos \frac{2\pi}{(\lambda/r)} (x - ct + \varepsilon_r)$ представляет гармоническую волну с длиной волны λ/r . В дальнейшем мы всегда будем брать типичную основную световую волну вида (1.04).

§ 1.05. Поляризация.

Выше возмущение $f(x)$ измерялось его численной величиной. Однако, мы уже видели, что световое возмущение является *вектором*.

Если световая волна такого типа, что световой вектор всегда параллелен данному направлению, лежащему во фронте волны, то свет называется *плоско поляризованным*. *Плоскостью поляризации* будет тогда либо плоскость, проходящая через перпендикуляр к фронту волны и световой вектор, либо плоскость, перпендикулярная к световому вектору.

При обычном определении плоскости поляризации оказывается, что эта плоскость содержит направление магнитной силы и является перпендикулярной к направлению электрической силы. Таким образом, мы будем иметь первое или

второе из вышеуказанных определений, в зависимости от того, примем ли мы за основную световой вектор магнитную или электрическую силу.

Обычно электрическая сила принимается за световой вектор. Таким образом условились *плоскостью поляризации считать плоскость, перпендикулярную к световому вектору.*

Всякий раз когда направление светового вектора *подчиняется определенному закону*, мы говорим, что рассматриваемый свет *поляризован*.

Так например, если конец светового вектора описывает винтовую линию лежащую на круговом цилиндре, то говорят, что свет *поляризован по кругу.*

Естественный свет является таким, в котором направление светового вектора в любой точке не подчиняется никакому ограничению. Он может рассматриваться как смещение плоско поляризованных лучей со всевозможными азимутами поляризации.

§ 1.06. Различные виды света.

Точно так же, как частота звукового колебания определяет *высоту* звука, частота светового колебания определяет качество света, которое глаз воспринимает как *цвет*.

Частота ярко-желтого света, излучаемого парами натрия, свечение которого легко можно получить, помещая небольшое количество столовой соли в пламя горелки Бунзена, будет иметь 509,1 триллионов колебаний в секунду.

Наименьшая частота, которую человеческий глаз может воспринимать, равна приблизительно $390 \cdot 10^{12}$, что соответствует темно-красному цвету. Наибольшая частота равна приблизительно $770 \cdot 10^{12}$ и соответствует темно-фиолетовому цвету. Весь диапазон видимого света составляет таким образом приблизительно одну октаву, и в этом ряду цвета размещаются в порядке уменьшающейся частоты: фиолетовый, индиго, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный; цвета переходят друг в друга с незаметной постепенностью.

Такая естественная последовательность цветов, расположенных вдоль полосы таким образом, что каждой линии, пересекающей перпендикулярно полосу, соответствует одна частота и один цвет, называется *спектром*; свет, соответствующий той или другой линии спектра, называется *монохроматическим* или *однородным*. *Белый* свет образуется из суммирования цветов всего спектра. Обыкновенный цветной свет обычно образуется из света, соответствующего неполному спектру; неполнота возникает или вследствие полного отсутствия частей спектра или недостаточности их интенсивности. Таким образом, обычные цвета являются *смешанными* в противоположность цветам спектра, которые рассматриваются как *чистые*.

В § 1.08 будет показано, что все виды электромагнитных колебаний (включающие и свет) распространяются в *безвоздушном пространстве* с одинаковой скоростью $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Поэтому часто бывает удобно различать различные чистые цвета по соответственной длине волны в пустоте; соотношение между длиной волны λ и частотой ρ выражается равенством (1.024), т. е.

$$\lambda = c/\rho,$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$.

Пользуясь этим соотношением, мы получаем длины волн видимого света:

крайнего красного	7700 · 10 ⁻⁸ см
желтого натрового	5890 · 10 ⁻⁸ „
зелено-голубого	5000 · 10 ⁻⁸ „
крайнего фиолетового	3900 · 10 ⁻⁸ „

Для выражения длины волн введена удобная единица, называемая единицей Angström'a или онгстрем — (Å). Он равен 10^{-8} см или 10^{-10} м; из этого послед-

него соотношения она называется иногда также „десятой метра“. Длины волн видимого света в онгстремах выражаются четырехзначными числами.

Однако, мы знаем, что электромагнитные волны не ограничиваются светом, и известные в настоящее время длины волн значительно превышают длины волн видимого спектра.

На верхнем конце ряда длин волн мы имеем радио-волны, которые достигают нескольких сотен метров.

Далеко ниже самых коротких радио-волн мы имеем так называемые „инфракрасные“ или тепловые волны, которые продолжают видимый спектр кверху от 7700 Å.

Ниже крайнего фиолетового мы имеем „ультра-фиолетовые или актиничные лучи, которые воздействуют на фотопластинку, но не воспринимаются глазом. Эти лучи обнаружены теперь длиной приблизительно до 1000 Å.

Наконец, обнаружено, что лучи Рентгена являются лучами, имеющими крайне короткую длину волны, колеблющуюся от нескольких онгстремов до небольших долей онгстрема, в случае так называемых лучей гамма.

§ 1.07. Электромагнитные уравнения.

Вначале мы рассмотрим электромагнитное возмущение *в вакууме*.

Законы электромагнетизма сводятся к двум, известным под названием *вихревых*, соотношениям.

В эти соотношения входят четыре основных вектора:

- 1) напряжение электрического поля в некоторой точке, обозначаемое через E ;
- 2) полное электрическое смещение, или полная поляризация, обозначаемая через D ;
- 3) напряжение магнитного поля, обозначаемое через H ;
- 4) магнитная индукция, обозначаемая через B .

Термин „электрическое смещение“ включает как смещение „проводимости“, происходящее вследствие движения электрических зарядов, так и то, что обычно называется электрическим смещением в диэлектрике.

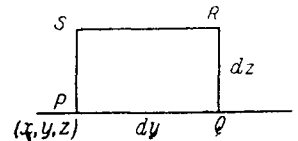
Полный электрический ток j определяется как изменение полного электрического смещения, отнесенное к единице времени. Он включает обычный электрический ток вместе с „током смещения“ Максвелла. Аналогично, магнитным током мы можем называть рассчитанное на единицу времени изменение магнитной индукции

$\frac{dB}{dt}$. Тогда два вихревые соотношения выразятся следующим образом.

I. Полный электрический ток, проходящий сквозь замкнутый контур, равен интегралу напряжения магнитного поля по контуру, причем положительное направление прохождения сквозь контур и положительное направление обхода контура связаны правилом правой руки.

II. Полный магнитный ток, проходящий сквозь замкнутый контур, равен взятому с обратным знаком интегралу по контуру напряжения электрического поля, при том же условии относительно знаков, что и выше.

Для аналитического выражения этих соотношений, рассмотрим небольшую цепь $PQRS$ (фиг. 1.07), состоящую из прямоугольника со сторонами dy , dz в плоскости, параллельной плоскости yz . Тогда, при обозначении составляющих напряжения магнитного поля через H_x , H_y , H_z , интеграл напряжения магнитного поля вдоль $PQRS$ будет равен



Фиг. 1.07.

$$H_y dy + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \right) dz - \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \right) dy - H_z dz = dy dz \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right).$$

Ток через контур будет

$$j_x dy dz.$$

Отсюда

$$j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

и еще два аналогичных уравнения, которые в векторной форме дают

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \text{curl } \mathbf{H}. \quad (1.071)$$

Подобно этому, для второго вихревого соотношения получим:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\text{curl } \mathbf{E}. \quad (1.072)$$

В дополнение к вышеприведенным соотношениям существуют еще два, которые выводятся непосредственно из уравнений (1.071) и (1.072), если каждое из них написать как совокупность трех уравнений.

Дифференцируя по x , y , z и складывая, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} (\text{div } \mathbf{D}) = 0, \quad (1.073)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} (\text{div } \mathbf{B}) = 0; \quad (1.074)$$

„div“ обозначает „расхождение вектора“.

В курсах экспериментальной физики показывается, что $\text{div } \mathbf{B}$ является плотностью магнитного вещества в данной точке. Но так как положительный и отрицательный магнетизмы в действительности физически неразделимы и все магнитное вещество может рассматриваться составленным из элементарных магнитов, то очевидно, что справедливо не только (1.074), но и

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.075)$$

Затем, из (1.073) мы получаем, что $\text{div } \mathbf{D}$ — функция от x , y , z , независимая от времени.

Эта особая функция в случае электростатической задачи, т. е. отсутствия тока, известна как плотность электричества ρ . В общем случае мы можем считать ее плотностью электричества в некоторое произвольное начальное время.

Уравнения (1.071) и (1.072) сами по себе недостаточны для решения задачи, так как они дают только два соотношения между четырьмя векторами. Вводятся дополнительные соотношения между этими векторами, зависящие от природы материальных тел в поле.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с непроводниками. Мы можем поэтому пренебречь в \mathbf{D} частью, связанной с обычным электрическим током, так что \mathbf{D} сводится к обычному „электрическому смещению“ или „поляризации“; в таком случае, как известно,

$$\rho = \text{div } \mathbf{D}, \quad (1.0761)$$

и так как в большинстве случаев мы будем иметь дело с незаряженными телами, мы обычно будем иметь

$$\text{div } \mathbf{D} = 0. \quad (1.0762)$$

В обыкновенных диэлектриках мы имеем следующие соотношения между электрическим смещением и напряжением электрического поля, а также между магнитной индукцией и напряжением магнитного поля:

$$\mathbf{D} = K\mathbf{E}, \quad (1.0771)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (1.0772)$$

K называется диэлектрической постоянной, или удельной индуктивной емкостью среды, μ ее магнитная проницаемость; эти две величины различны для различных материалов.

Вышеизложенное относится только к изотропным веществам. В случае кристаллов мы имеем ряд уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} D_x &= K_{11}E_x + K_{12}E_y + K_{13}E_z \\ D_y &= K_{21}E_x + K_{22}E_y + K_{23}E_z \\ D_z &= K_{31}E_x + K_{32}E_y + K_{33}E_z \end{aligned} \right\} \quad (1.0773)$$

и

$$B_x = \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + \mu_{13}H_z, \quad (1.0774)$$

с двумя подобными уравнениями.

Подставляя (1.0771) и (1.0772) в (1.071) и (1.072), мы получаем электромагнитные уравнения:

$$K \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \text{curl } \mathbf{H}, \quad (1.078)$$

$$\mu \frac{d\mathbf{H}}{dt} = -\text{curl } \mathbf{E}. \quad (1.079)$$

§ 1.08. *Распространение электромагнитной волны в изотропной среде, свободной от электрического заряда.*

Производя над (1.078) операцию $\mu \frac{d}{dt}$, мы получаем:

$$K\mu \frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2} = -\text{curl}^2 \mathbf{E},$$

так как

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \\ (\text{curl}^2 \mathbf{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \\ &= -\nabla^2 E_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Теперь, поскольку нет электрического заряда,

$$\text{div } \mathbf{D} = 0,$$

следовательно

$$K \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

Отсюда

$$(\text{curl}^2 \mathbf{E})_x = -\nabla^2 E_x,$$

и поэтому

$$(\text{curl}^2) \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}.$$

Таким образом вектор \mathbf{E} удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} = K\mu \frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2}. \quad (1.081)$$

Это уравнение является хорошо известным уравнением распространения волны, а $K\mu = 1/c^2$, где c — скорость распространения. Такое же уравнение получается и для напряжения магнитного поля.

Значения K , μ в вакууме зависят от специальных единиц, которые мы устанавливаем для определения напряжения электрического поля и для напряжения магнитного поля. Однако, $(K\mu)^{-\frac{1}{2}}$, будучи скоростью, не зависит от выбора таких единиц. Экспериментально было установлено, что эта скорость равна $3 \cdot 10^{10}$ см/сек, т. е. скорости света, и является скоростью распространения любых других электромагнитных возмущений в вакууме.

В настоящий момент существует две системы единиц, применяющиеся в электромагнитной теории. В первой, известной под названием *электростатической системы* единиц, K для вакуума принимается за единицу, вследствие чего μ для вакуума будет $1/c^2$.

Во второй, известной под названием *электромагнитной системы*, $\mu = 1$, $K = 1/c^2$ для вакуума.

В первой системе сила, в динах, действующая между двумя электрическими зарядами с количеством электричества e , помещенными на 1 см друг от друга, в вакууме будет e^2 . Во второй системе она будет $c^2 e^2$. Таким образом, единица заряда во второй системе будет в c раз больше, чем единица заряда в первой системе.

Примем теперь для уравнения (1.081) периодическое гармоническое решение с длиной волны λ ,

$$E = F \cos \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - ct), \quad (1.082)$$

представляющее плоскую волну распространяющуюся со скоростью c в направлении, образующем с осями координат углы, косинусы которых будут l , m , n , причем F является вектором, независимым от x , y , z , t .

Анализ упростится, если мы прибавим к E соответствующую мнимую величину

$$i F \sin \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - ct)$$

и примем за решение уравнения (1.081)

$$E = F e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - ct)} = F e^{i\varphi}, \quad (1.083)$$

при условии, что везде для нас будут иметь значение только вещественные части.

Непосредственно легко убедиться, что значение E , данное равенством (1.083), удовлетворяет (1.081), так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Мы должны, однако, помнить условие, что

$$\operatorname{div} E = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} F_x e^{i\varphi} + \frac{\partial}{\partial y} F_y e^{i\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} F_z e^{i\varphi} = 0,$$

и так как F_x , F_y , F_z являются, согласно предположению, постоянными, то, производя дифференцирование, мы имеем

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0, \quad (1.084)$$

откуда вытекает, что напряжение электрического поля (и смещение) перпендикулярно к направлению распространения и находится в плоскости фронта волны. Рассмотрим теперь напряжение магнитного поля в этом случае. Из уравнения (1.079)

$$\mu \frac{d\mathbf{H}}{dt} = -\operatorname{curl} F e^{i\varphi}.$$

Непосредственным дифференцированием получаем

$$\text{curl } \mathbf{F} e^{i\varphi} = \frac{2\pi i e^{i\varphi}}{\lambda} (mF_z - nF_y, nF_x - lF_z, lF_y - mF_x).$$

Таким образом

$$\mu \frac{dH_x}{dt} = -\frac{2\pi}{\lambda} i e^{i\varphi} (mF_z - nF_y),$$

и два подобных уравнения, откуда, интегрируя $e^{i\varphi}$ относительно t ,

$$\mu H_x = +\frac{1}{c} e^{i\varphi} (mF_z - nF_y) \quad (1.085)$$

и два подобных уравнения, пренебрегая непериодическими функциями интегрирования. Умножая полученные выражения на l , m , n и складывая, мы имеем

$$lH_x + mH_y + nH_z = 0. \quad (1.086)$$

Таким образом, напряжение магнитного поля (и индукция) также перпендикулярно к направлению перемещения и находится в плоскости фронта волны. Далее, умножая уравнения (1.085) на F_x , F_y , F_z и складывая, мы находим

$$H_x F_x + H_y F_y + H_z F_z = 0. \quad (1.087)$$

Итак, напряжение электрического поля и напряжение магнитного поля являются взаимно перпендикулярными. Любое из них может быть принято за световой вектор.

Ясно, что такое элементарное решение, как (1.082), представляет плоскую поляризованную волну. Плоскость поляризации может браться либо через направление напряжения электрического поля, либо через напряжение магнитного поля, и этот выбор является исключительно делом определения. Обычно принимается, что плоскость поляризации содержит напряжение магнитного поля, так что она является перпендикулярной к напряжению электрического поля.

§ 1.09. Световые лучи.

Из курсов электромагнетизма мы знаем, что \mathbf{D} можно понимать, как умноженное на 4π смещение заряда в единице объема. Следовательно, работа, совершающаяся в электрическом поле при увеличении смещения на dD_x , dD_y , dD_z , равна

$$\frac{1}{4\pi} (E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z),$$

и соответственно этому электрическая энергия единицы объема поля выражается через

$$\int_0^D \frac{1}{4\pi} (E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z). \quad (1.091)$$

Из принципа сохранения энергии следует, что выражение

$$E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z$$

должно быть полным дифференциалом.

Так как оно может быть также записано в виде

$$d(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) - D_x dE_x - D_y dE_y - D_z dE_z,$$

то выражение

$$D_x dE_x + D_y dE_y + D_z dE_z$$

является полным дифференциалом.

Отсюда, в уравнениях (1.0773) $K_{rs} = K_{sr}$, и из этих уравнений, заключающих в себе изотропность как частный случай, мы легко получаем

$$E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z = D_x dE_x + D_y dE_y + D_z dE_z = \frac{1}{2} d(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z).$$

Подобным же образом для магнитной энергии единицы объема поля получается выражение

$$\int_0^B \frac{1}{4\pi} (H_x dB_x + H_y dB_y + H_z dB_z) \quad (1.092)$$

и аналогично предыдущему $\mu_{rs} = \mu_{sr}$ для кристалла. Обозначая эти энергии на единицу объема через W_1 и W_2 , мы имеем, очевидно

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left(E_x \frac{dD_x}{dt} + E_y \frac{dD_y}{dt} + E_z \frac{dD_z}{dt} \right)$$

и

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left(H_x \frac{dB_x}{dt} + H_y \frac{dB_y}{dt} + H_z \frac{dB_z}{dt} \right).$$

Полная энергия в любом данном объеме V , ограниченном поверхностью S , выражается через

$$W = \iiint (W_1 + W_2) dx dy dz,$$

где тройное интегрирование распространяется на весь объем V .

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ E_x \frac{dD_x}{dt} + E_y \frac{dD_y}{dt} + E_z \frac{dD_z}{dt} + \right. \\ \left. + H_x \frac{dB_x}{dt} + H_y \frac{dB_y}{dt} + H_z \frac{dB_z}{dt} \right\} dx dy dz; \end{aligned}$$

пользуясь уравнениями (1.071) и (1.072), преобразовывая подинтегральное выражение и применяя теорему Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - H_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - H_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \{ H_y E_z - H_z E_y \} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \{ H_z E_x - H_x E_z \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ H_x E_y - H_y E_x \} \right\} dx dy dz = \\ = \frac{1}{4\pi} \int \int \{ l(H_y E_z - H_z E_y) + m(H_z E_x - H_x E_z) + n(H_x E_y - H_y E_x) \} dS; \quad (1.093) \end{aligned}$$

l , m , n являются косинусами, определяющими направление внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем. Если мы обозначим через \mathbf{P} вектор, составляющие которого будут

$$E_y H_z - H_y E_z, \quad E_z H_x - H_z E_x, \quad E_x H_y - H_x E_y,$$

то по правилам векторной алгебры вектор \mathbf{P} является векторным произведением векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} или $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$.

Если обозначить внешнюю нормаль к S через ν , мы получим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int \int P_\nu dS; \quad (1.094)$$

P_ν означает составляющую вектора \mathbf{P} по направлению ν .

Таким образом, поток энергии, выходящий из данной поверхности, определяется по величине и направлению вектором $\frac{\mathbf{P}}{4\pi}$, так как $-\frac{dW}{dt}$ представляет потерю энергии в объеме V за единицу времени. При этом предполагается, что внутри объема V нет никакого рассеивания электромагнитной энергии, т. е. что в данном объеме нет могущих нагреваться проводников. Однако, поскольку прозрачные тела, с которыми мы будем иметь дело, не являются проводниками (по крайней мере в заметной степени), это предположение в нашем случае оправдывается.

Вектор $\frac{\mathbf{P}}{4\pi}$ известен как „вектор Пойнтинга“ и его направление дает линию потока энергии, в то время как его величина дает интенсивность потока энергии.

Отметим, что он перпендикулярен как к напряжению магнитного поля, так и к напряжению электрического поля, так что в случае плоской волны он нормален к фронту волны. Как мы увидим дальше, это не является справедливым для кристалла.

Эти направления потока энергии и являются тем, что мы называем световыми лучами.

§ 1.10. Распространение электромагнитной волны в кристалле.

Мы будем полагать, что кристалл является *однородным*, так что величины K_{rs} , μ_{rs} не изменяются от точки к точке.

Выражения для электрической и магнитной энергии, рассчитанной на единицу объема, как следует из § 1.09, будут иметь такой вид:

$$\frac{1}{8\pi} (K_{11}E_x^2 + K_{22}E_y^2 + K_{33}E_z^2 + 2K_{23}E_yE_z + 2K_{31}E_zE_x + 2K_{12}E_xE_y)$$

и

$$\frac{1}{8\pi} (\mu_{11}H_x^2 + \mu_{22}H_y^2 + \mu_{33}H_z^2 + 2\mu_{23}H_yH_z + 2\mu_{31}H_zH_x + 2\mu_{12}H_xH_y).$$

Так как количества $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ подчиняются при повороте осей координат тем же законам преобразования, что и координаты x, y, z , то очевидно, что если мы в качестве осей координат возьмем главные оси поверхности второго порядка

$$\frac{1}{8\pi} (K_{11}x^2 + K_{22}y^2 + K_{33}z^2 + 2K_{23}yz + 2K_{31}zx + 2K_{12}xy) = \text{const}, \quad (1.101)$$

то электрическая энергия примет следующий вид:

$$\frac{1}{8\pi} (K_1E_x^2 + K_2E_y^2 + K_3E_z^2). \quad (1.102)$$

Подобное же следствие будет справедливо и для магнитной энергии, если мы совместим оси координат с главными осями поверхности

$$\frac{1}{8\pi} (\mu_{11}x^2 + \mu_{22}y^2 + \mu_{33}z^2 + 2\mu_{23}yz + 2\mu_{31}zx + 2\mu_{12}xy) = \text{const}.$$

Вообще говоря, для произвольных значений μ и K два преобразования не будут тождественными. Есть основание полагать, что как для магнитных, так и для электрических свойств симметрия кристалла одна и та же; кроме того, почти всякое

прозрачное вещество является *немагнитным*, т. е. отношение между магнитным напряжением и магнитной индукцией будет такое же, как в вакууме. Это дает

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu, \quad \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = 0.$$

Вторая из рассмотренных поверхностей является поэтому сферой, и указанного затруднения не возникает.

Если это так, то мы можем принять за оси координат главные оси поверхности (1.101).

Они называются главными осями симметрии кристалла. Тогда уравнения, связывающие \mathbf{E} и \mathbf{D} , будут

$$D_x = K_1 E_x, \quad D_y = K_2 E_y, \quad D_z = K_3 E_z, \quad (1.103)$$

тогда как $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, как и раньше.

Если мы напишем теперь полностью уравнения (1.071) и (1.072) и сделаем подстановки вместо \mathbf{D} и \mathbf{B} , мы получим

$$\left. \begin{aligned} K_1 \frac{dE_x}{dt} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; & \mu \frac{dH_x}{dt} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ K_2 \frac{dE_y}{dt} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}; & \mu \frac{dH_y}{dt} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ K_3 \frac{dE_z}{dt} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}; & \mu \frac{dH_z}{dt} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

при добавочном условии

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

или

$$K_1 \frac{\partial E_x}{\partial x} + K_2 \frac{\partial E_y}{\partial y} + K_3 \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (1.105)$$

Подставляя H_x, H_y, H_z из правых уравнений (1.104) в левые уравнения и записывая $(K_1 \mu)^{-\frac{1}{2}} = a, (K_2 \mu)^{-\frac{1}{2}} = b, (K_3 \mu)^{-\frac{1}{2}} = c$, мы находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 E_x}{dt^2} &= \nabla^2 E_x - \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{E}) \\ \frac{1}{b^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2} &= \nabla^2 E_y - \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \mathbf{E}) \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_z}{dt^2} &= \nabla^2 E_z - \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \mathbf{E}). \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

Представим теперь гармоническую волну, поляризованную в определенном направлении

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - vt);$$

l, m, n — косинусы направления нормали к фронту волны и v — скорость распространения волны.

После подстановки в (1.106), мы находим

$$\begin{aligned}(v^2/a^2) F_x &= F_x - l(IF_x + mF_y + nF_z), \\ (v^2/b^2) F_y &= F_y - m(IF_x + mF_y + nF_z), \\ (v^2/c^2) F_z &= F_z - n(IF_x + mF_y + nF_z),\end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\left. \begin{aligned}F_x &= \frac{a^2 l}{a^2 - v^2} (IF_x + mF_y + nF_z) \\ F_y &= \frac{b^2 m}{b^2 - v^2} (IF_x + mF_y + nF_z) \\ F_z &= \frac{c^2 n}{c^2 - v^2} (IF_x + mF_y + nF_z).\end{aligned} \right\} \quad (1.1071)$$

Умножая уравнения (1.1071) на l , m , n , складывая их и принимая во внимание, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, мы находим либо

$$IF_x + mF_y + nF_z = 0, \quad (1.1072)$$

либо

$$\frac{a^2 l^2}{a^2 - v^2} + \frac{b^2 m^2}{b^2 - v^2} + \frac{c^2 n^2}{c^2 - v^2} = 1. \quad (1.1073)$$

Теперь уравнение (1.1072), при подстановке в (1.1071), дает $F_x = F_y = F_z = 0$, и следовательно должно быть отброшено. У нас остается, следовательно, (1.1073), как уравнение, выражающее зависимость скорости волны от направления фронта волны. Уравнение (1.1073) может быть записано

$$l^2 + m^2 + n^2 + v^2 \left(\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} \right) = 1,$$

или (так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ и v не может быть нулем)

$$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0. \quad (1.108)$$

Уравнение (1.108) при освобождении от дробей дает квадратное уравнение для v^2 .

Таким образом получаются две скорости волны и две возможных волны для любой данной ориентации фронта волны.

Кроме того уравнения (1.1071) показывают, что в данном случае для каждой такой волны отношения $F_x : F_y : F_z$ полностью определяются. Таким образом волны, которые могут распространяться в кристалле, должны быть определенно поляризованы. Здесь мы имеем существенное отличие от света, проходящего через изотропную среду, так как в последней F_x , F_y , F_z должны удовлетворять только условию

$$IF_x + mF_y + nF_z = 0,$$

т. е. до тех пор, пока вектор напряжения электрического поля находится во фронте волны, любое количество волн, поляризованных в различных азимутах, может существовать одновременно. Другими словами, изотропная среда может передавать *естественный свет*, а кристалл не может.

§ 1.11. Направления колебания и поляризации.

Из уравнений (1.1071) следует, что

$$F_x : F_y : F_z = \frac{a^2 l}{a^2 - v^2} : \frac{b^2 m}{b^2 - v^2} : \frac{c^2 n}{c^2 - v^2}. \quad (1.111)$$

Последние три величины являются следовательно пропорциональными косинусам направления вектора напряжения электрического поля. Это направление мы будем называть *направлением колебания*. Из правых сторон уравнений (1.104) замечаем, что H_x , H_y , H_z и в случае кристалла определяются уравнениями (1.085). Таким образом, вектор напряжения магнитного поля устанавливается в плоскости фронта волны и перпендикулярно к вектору напряжения электрического поля, но вектор напряжения электрического поля выходит из плоскости фронта волны.

Плоскость, проходящую через магнитный вектор и нормаль к волне, мы будем называть (как в случае изотропного тела) *плоскостью поляризации*, а направление магнитного вектора — *направлением поляризации*.

Мы имеем из (1.085) и (1.111)

$$\begin{aligned} H_x : H_y : H_z &= (mF_x - nF_y) : (nF_x - lF_z) : (lF_y - mF_z) = \\ &= \frac{mn(b^2 - c^2)v^2}{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)} : \frac{nl(c^2 - a^2)v^2}{(c^2 - v^2)(a^2 - v^2)} : \frac{lm(a^2 - b^2)v^2}{(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)} = \\ &= \frac{(b^2 - c^2)(a^2 - v^2)}{l} : \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - v^2)}{m} : \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - v^2)}{n}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Теперь каждое из двух значений v , определяемых уравнением (1.108), имеет свои собственные направления колебания и поляризации. Если мы выпишем полностью уравнение (1.108), оно примет форму

$$\begin{aligned} v^4 - v^2 \{ l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2) \} + \\ + l^2b^2c^2 + m^2c^2a^2 + n^2a^2b^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, если v_1 , v_2 будут две волновые скорости, то

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 &= l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2), \\ v_1^2 v_2^2 &= l^2b^2c^2 + m^2c^2a^2 + n^2a^2b^2, \end{aligned}$$

следовательно мы имеем

$$\begin{aligned} (a^2 - v_1^2)(a^2 - v_2^2) &= a^4(l^2 + m^2 + n^2) - a^2 \{ l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + \\ &+ n^2(a^2 + b^2) \} + l^2b^2c^2 + m^2c^2a^2 + n^2a^2b^2 = \\ &= l^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \end{aligned} \quad (1.113)$$

и два подобных же уравнения.

Условие, что два направления поляризации, определяемые уравнением (1.112), будут взаимно перпендикулярными, напишется так:

$$\begin{aligned} \frac{(b^2 - c^2)^2(a^2 - v_1^2)(a^2 - v_2^2)}{l^2} + \frac{(c^2 - a^2)^2(b^2 - v_1^2)(b^2 - v_2^2)}{m^2} + \\ + \frac{(a^2 - b^2)^2(c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2)}{n^2} = 0, \end{aligned}$$

или, пользуясь равенствами (1.113), получаем:

$$\begin{aligned} (b^2 - c^2)^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (c^2 - a^2)^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2) + \\ + (a^2 - b^2)^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = 0, \end{aligned}$$

что, как легко видеть, является тождеством.

Таким образом, две волны, отвечающие одному и тому же фронту волны, имеют *взаимно перпендикулярные* направления поляризации.

Тем не менее, можно легко показать, что направления колебания электрического вектора не взаимно перпендикулярны, если только две из главных волновых скоростей a , b , c не получаются равными. Очень изящное построение для волновых скоростей волны и направлений поляризаций дано Френелем. Рассмотрим эллипсоид

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \quad (1.114)$$

названный Френелем (в соответствии с устаревшей теперь теорией) „эллипсоидом упругости“, который однако правильнее и точнее будет называть эллипсоидом Френеля.

Найдем величины и направления главных осей сечения этого эллипсоида диаметральной плоскостью

$$lx + my + nz = 0, \quad (1.115)$$

параллельной фронту волны.

Нам надо найти максимумы и минимумы для

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.116)$$

при различных значениях x , y , z , подчиненных уравнениям (1.115) и (1.114).

Дифференцируя, мы имеем

$$r dr = x dx + y dy + z dz \quad (1.1171)$$

$$0 = l dx + m dy + n dz \quad (1.1172)$$

$$0 = a^2 x dx + b^2 y dy + c^2 z dz \quad (1.1173)$$

и $dr = 0$ для всех значений dx , dy , dz , удовлетворяющих (1.1172) и (1.1173).

Применяя способ неопределенных множителей, мы получаем уравнения

$$Ax + Bl + a^2 x = 0, \quad (1.1181)$$

$$Ay + Bm + b^2 y = 0, \quad (1.1182)$$

$$Az + Bn + c^2 z = 0, \quad (1.1183)$$

где A , B являются искомыми множителями. Умножаем на x , y , z , складываем и, пользуясь (1.114), (1.115) и (1.116), получаем

$$Ar^2 + 1 = 0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{Bl}{\left(a^2 - \frac{1}{r^2}\right)} \\ y &= -\frac{Bm}{\left(b^2 - \frac{1}{r^2}\right)} \\ z &= -\frac{Bn}{\left(c^2 - \frac{1}{r^2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (1.1191)$$

Умножая уравнения (1.1191) на l , m , n , складывая и деля на $-B$, мы находим

$$\frac{l^2}{a^2 - \frac{1}{r^2}} + \frac{m^2}{b^2 - \frac{1}{r^2}} + \frac{n^2}{c^2 - \frac{1}{r^2}} = 0, \quad (1.1192)$$

что по форме тождественно уравнению (1.108) для v^2 . Отсюда значения v являются величинами, обратными полуосям сечения эллипсоида Френеля плоскостью, параллельной фронту волны.

Далее, косинусы направления оси r_1 будут, согласно (1.1191), пропорциональными

$$\frac{l}{a^2 - \frac{1}{r_1^2}}, \quad \frac{m}{b^2 - \frac{1}{r_1^2}}, \quad \frac{n}{c^2 - \frac{1}{r_1^2}},$$

т. е. пропорциональными

$$\frac{l}{a^2 - v_1^2}, \quad \frac{m}{b^2 - v_1^2}, \quad \frac{n}{c^2 - v_1^2},$$

и в соответствии (1.113) они будут пропорциональны

$$\frac{(b^2 - c^2)(a^2 - v_2^2)}{l}, \quad \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - v_2^2)}{m}, \quad \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - v_2^2)}{n},$$

т. е. согласно (1.112) пропорциональны косинусам направления поляризации для волны скорости v_2 , т. е. $1/v_2$. Таким образом направления поляризации параллельны осям сечения эллипсоида Френеля, причем направления поляризации связаны со скоростью волны, которая является величиной, обратной той полуоси, которая составляет с ней прямой угол.

§ 1.12. Оптические оси.

Эллипсоид Френеля имеет два плоских круговых сечения, определяемых уравнением

$$(a^2 - b^2)x^2 = (b^2 - c^2)z^2, \quad (1.121)$$

причем предполагается, что скорости волн a , b , c идут в порядке их величины, чего всегда можно достичь соответственным расположением осей.

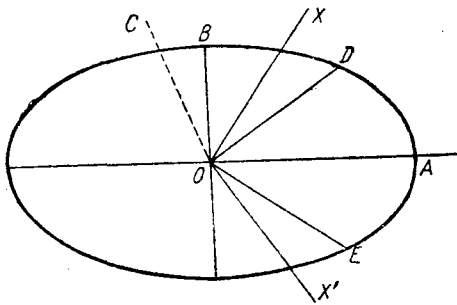
Выводы, полученные в конце § 1.11, показывают, что в том случае, когда плоскость фронта волны параллельна такому круговому сечению: 1) две скорости волны становятся равными, 2) направления поляризации становятся неопределенными. Направления нормалей к плоскостям (1.121) являются линиями, направляющие косинусы которых равны

$$l = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}; \quad (1.122)$$

эти направления называются *оптическими осями* кристалла. Подставляя эти значения в уравнение (1.108) или вспоминая, что радиус кругового сечения (1.114) равен $1/b$, получаем скорость волны вдоль оптической оси равной b .

Существует важное и простое соотношение между направлением волны, соответствующей оптическим осям, и соответствующими плоскостями поляризации.

Пусть фиг. 1.12 представляет диаметрально сечение эллипсоида Френеля плоскостью, параллельной фронту волны, с осями OA , OB , определяющими направления поляризации волн, распространяющихся в направлении OC (показано пунктиром), перпендикулярном к плоскости рисунка.



Фиг. 1.12.

Допустим, что OD , OE будут следами круговых сечений на плоскости рисунка. Тогда $OD = OE = 1/b$, и таким образом OD и OE равно наклонены к OA , OB .

Теперь пусть OX , OX' будут ортогональными проекциями оптических осей на плоскость рисунка. Так как эти оптические оси перпендикулярны круговым сечениям эллипсоида Френеля, то OX , OX' перпендикулярны к OE , OD соответственно. Отсюда OX , OX' равно наклонены к OA , OB .

Таким образом плоскости XOC , $X'OC$ равно наклонены к плоскостям AOC ,

ВОС или: две плоскости поляризации делят пополам внешне и внутренне двухгранные углы между плоскостями через нормаль к волне и две оптические оси.

Существует также соотношение, которое дает нам возможность получить полное решение для отдельных скоростей волн.

Углы θ , θ' , образуемые нормалью к волне с оптическими осями, определяются равенствами

$$\begin{aligned}\cos \theta &= l \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + n \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \\ \cos \theta' &= -l \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + n \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},\end{aligned}$$

откуда

$$l = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}} \left(\frac{\cos \theta - \cos \theta'}{2} \right), \quad n = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} \left(\frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} \right). \quad (1.123)$$

Далее мы имеем (см. стр. 22)

$$\begin{aligned}v_1^2 + v_2^2 &= l^2 (b^2 + c^2) + m^2 (c^2 + a^2) + n^2 (a^2 + b^2), \\ v_1^2 v_2^2 &= l^2 b^2 c^2 + m^2 c^2 a^2 + n^2 a^2 b^2,\end{aligned}$$

и, пользуясь равенством

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned}v_1^2 + v_2^2 &= c^2 + a^2 + n^2 (b^2 - c^2) - l^2 (a^2 - b^2), \\ v_1^2 v_2^2 &= c^2 a^2 + a^2 n^2 (b^2 - c^2) - c^2 l^2 (a^2 - b^2);\end{aligned}$$

подставляя вместо l , n их выражения из (1.123), мы получим сразу

$$\begin{aligned}v_1^2 + v_2^2 &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos \theta \cos \theta', \\ v_1^2 v_2^2 &= a^2 c^2 + \frac{1}{4} (a^2 - c^2)^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta') + \\ &\quad + \frac{1}{2} (a^4 - c^4) \cos \theta \cos \theta',\end{aligned} \quad (1.124)$$

и

$$\begin{aligned}(v_1^2 - v_2^2)^2 &= (v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 = \\ &= (a^2 - c^2)^2 (1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta \cos^2 \theta') = \\ &= (a^2 - c^2)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta'.\end{aligned}$$

Отсюда

$$v_1^2 - v_2^2 = (a^2 - c^2) \sin \theta \sin \theta', \quad (1.125)$$

или

$$\left. \begin{aligned}v_1^2 &= \frac{1}{2} \{ a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos (\theta - \theta') \} \\ v_2^2 &= \frac{1}{2} \{ a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos (\theta + \theta') \},\end{aligned} \right\} \quad (1.126)$$

где v_1 является большей, а v_2 меньшей из двух волновых скоростей.

§ 1.13. Волновая поверхность.

Волновая поверхность определяется как огибающая поверхность всех возможных волновых фронтов

$$lx + my + nz = vt$$

для любого данного значения t , которое мы можем принять, без нарушения общего характера рассуждений, за единицу.

Мы должны следовательно найти огибающую поверхность для плоскости

$$lx + my + nz - v = 0, \quad (1.131)$$

при условиях

$$l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0 \quad (1.1311)$$

и

$$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0. \quad (1.1312)$$

Действуя в обычном порядке, мы производим дифференцирования

$$x dl + y dm + z dn - dv = 0, \quad (1.1321)$$

$$l dl + m dm + n dn = 0, \quad (1.1322)$$

$$\begin{aligned} & \frac{l dl}{a^2 - v^2} + \frac{m dm}{b^2 - v^2} + \frac{n dn}{c^2 - v^2} + \\ & + v dv \left\{ \frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right\} = 0; \end{aligned} \quad (1.1323)$$

x, y, z будут в таком случае координатами точки соприкосновения плоскости (1.131) с ее огибающей поверхностью. Пользуясь способом неопределенных множителей, приводим уравнения (1.1321), (1.1322), (1.1323) к

$$Ax + Bl + \frac{l}{a^2 - v^2} = 0, \quad (1.1331)$$

$$Ay + Bm + \frac{m}{b^2 - v^2} = 0, \quad (1.1332)$$

$$Az + Bn + \frac{n}{c^2 - v^2} = 0, \quad (1.1333)$$

$$-A + v \left\{ \frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right\} = 0, \quad (1.1334)$$

где A, B — неопределенные множители.

Множим уравнения (1.1331), (1.1332), (1.1333) на l, m, n и складываем. Затем, пользуясь (1.131), (1.1311) и (1.1312), мы получаем

$$Av + B = 0. \quad (1.1335)$$

Множим те же уравнения на $l/(a^2 - v^2), m/(b^2 - v^2), n/(c^2 - v^2)$, складываем и, пользуясь (1.1312) и (1.1334), получаем

$$\frac{lx}{a^2 - v^2} + \frac{my}{b^2 - v^2} + \frac{nz}{c^2 - v^2} + \frac{1}{v} = 0. \quad (1.134)$$

Теперь умножаем те же уравнения на x, y, z , складываем и, пользуясь (1.131), (1.1335) и (1.1334), получаем

$$A(r^2 - v^2) - \frac{1}{v} = 0, \quad (1.135)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Подставляя теперь в (1.1331) — (1.1333) вместо A и B соответствующие значения, мы имеем

$$x = \frac{vl(a^2 - r^2)}{a^2 - v^2}, \quad y = \frac{vm(b^2 - r^2)}{b^2 - v^2}, \quad z = \frac{vn(c^2 - r^2)}{c^2 - v^2}. \quad (1.136)$$

Умножаем (1.136) на $x/(a^2 - r^2)$, $y/(b^2 - r^2)$, $z/(c^2 - r^2)$ и, складывая, получаем из (1.134)

$$\frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{y^2}{b^2 - r^2} + \frac{z^2}{c^2 - r^2} = v \left(\frac{Lx}{a^2 - v^2} + \frac{my}{b^2 - v^2} + \frac{nz}{c^2 - v^2} \right) = -1.$$

Это и есть уравнение огибающей поверхности, т. е. волновой поверхности.

Написав правую часть равенства в виде $-(x^2 + y^2 + z^2)/r^2$, мы легко приведем волновое уравнение к его стандартной форме

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = 0. \tag{1.137}$$

Если мы напишем в (1.137) $x = Lr$, $y = Mr$, $z = Nr$, то получим квадратное уравнение для r^2 , выраженное в направляющих косинусах L , M , N радиуса-вектора. Поверхность является таким образом двуполой поверхностью.

Для того чтобы найти ее форму, рассмотрим ее сечения координатными плоскостями.

Принимая $z = 0$, мы имеем либо

$$r = c,$$

либо

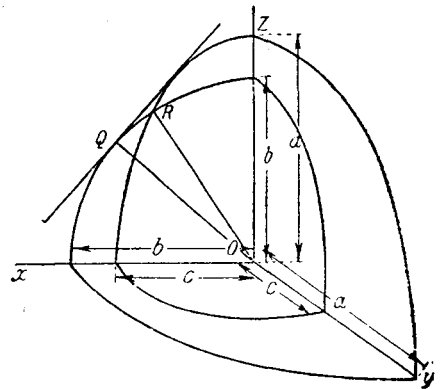
$$a^2 x^2 (b^2 - r^2) + b^2 y^2 (a^2 - r^2) = 0,$$

т. е.

$$a^2 b^2 r^2 - r^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2) = 0.$$

Опуская случай $r = 0$, получаем

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$



Фиг. 1.13.

Следовательно, сечение состоит из эллипса с полуосями (b, a) и окружности радиуса c .

Подобно этому сечение плоскости $y = 0$ дает эллипс с полуосями (a, c) и окружность радиуса b , а сечение плоскостью $x = 0$ дает эллипс с полуосями (c, b) и окружность радиуса a .

Фиг. 1.13 представляет перспективный рисунок сечений в положительном октанте координатной системы, который дает некоторое представление об общем виде поверхности.

Точка Q в плоскости xz , являющаяся точкой касания общей касательной к окружности радиуса b и эллипсу $\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$, является концом одной оптической оси. Это является очевидным, поскольку две касательные плоскости, перпендикулярные к оси, совпадают.

Полю поверхности пересекаются только в точке R и в симметричных ей точках.

Если мы обратимся к уравнению (1.137), напишем в нем $x = Lr$, $y = Mr$, $z = Nr$ и освободимся от дробей, мы получим квадратное уравнение для r :

$$r^4 (a^2 L^2 + b^2 M^2 + c^2 N^2) - r^2 [a^2 (b^2 + c^2) L^2 + b^2 (c^2 + a^2) M^2 + c^2 (b^2 + a^2) N^2] + a^2 b^2 c^2 (L^2 + M^2 + N^2) = 0.$$

Условие, при котором это уравнение будет иметь равные корни для r^2 , как легко видеть, будет

$$L^4 a^4 (b^2 - c^2)^2 + M^4 b^4 (c^2 - a^2)^2 + \\ + N^4 c^4 (a^2 - b^2)^2 - 2M^2 N^2 b^2 c^2 (c^2 - a^2) (a^2 - b^2) - 2N^2 L^2 c^2 a^2 (a^2 - b^2) (b^2 - c^2) - \\ - 2L^2 M^2 a^2 b^2 (b^2 - c^2) (c^2 - a^2) = 0,$$

что может быть записано

$$\{ L^2 a^2 (b^2 - c^2) - N^2 c^2 (a^2 - b^2) \}^2 + \\ + M^4 b^4 (c^2 - a^2)^2 - 2M^2 N^2 b^2 c^2 (a^2 - b^2) (c^2 - a^2) - \\ - 2L^2 M^2 a^2 b^2 (b^2 - c^2) (c^2 - a^2) = 0. \quad (1.138)$$

Так как $a > b > c$, то все члены в (1.138) являются положительными.

Отсюда единственными условиями, удовлетворяющими (1.138), будет

$$M = 0,$$

откуда

$$y = 0$$

и

$$L^2 a^2 (b^2 - c^2) = N^2 c^2 (a^2 - b^2),$$

т. е.

$$x^2 a^2 (b^2 - c^2) = z^2 c^2 (a^2 - b^2),$$

или

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{x^2 + z^2}{b^2},$$

что приводит к точкам пересечения окружности и эллипса в плоскости (x, z) .

Отсюда вытекает, что поверхности в действительности не имеют ребра пересечения в R , поэтому R и является точкой на поверхности специального характера.

Если мы освободим от дробей уравнение волновой поверхности, оно примет вид

$$F \equiv r^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - \{ a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (c^2 + a^2) y^2 + c^2 (b^2 + a^2) z^2 \} + \\ + a^2 b^2 c^2 = 0,$$

откуда легко убедиться, что при

$$r = b, \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Форма поверхности в непосредственном соседстве с точкой R , является, следовательно, конусом второго порядка, так что R представляет коническую точку на поверхности волны.

Кристалл, в котором a, b, c не равны, называется *двухосным кристаллом*. Калийная селитра и арагонит являются примерами таких кристаллов.

Очень важен тот частный случай, когда две из главных волновых скоростей, скажем b, c , равны. В этом случае две оптические оси совпадают с осью x -ов, называемой *оптической осью* кристалла.

В этом случае уравнение для скоростей волн сводится к следующему:

$$v^4 - v^2 \{ a^2 + b^2 - l^2 (a^2 - b^2) \} + a^2 b^2 - l^2 b^2 (a^2 - b^2) = 0,$$

т. е.

$$(v^2 - b^2) \{ v^2 - a^2 + l^2 (a^2 - b^2) \} = 0.$$

Таким образом одна скорость волны постоянна и равна b . Другая выводится из

$$v = \sqrt{a^2 - l^2 (a^2 - b^2)} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

где θ ($= \arccos l$) является углом, образованным нормалью к волне с оптической осью.

Уравнение волновой поверхности в этом случае принимает такой вид:

$$r^2 \{a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2)\} - \{2a^2 x^2 b^2 + b^2 (a^2 + b^2) (y^2 + z^2)\} + a^2 b^4 = 0,$$

т. е.

$$(r^2 - b^2) \{a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2)\} = a^2 b^2 (r^2 - b^2);$$

волновая поверхность распадается на шар $r = b$ и сфероид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1.$$

Кристаллы этой группы называются *одноосными* кристаллами. Если $b > a$, получается продолговатый или яйцевидный сфероид. Кристалл в этом случае называется *положительным*. Если $a > b$, сфероид будет приплюснутый или планетообразный, и кристалл называется *отрицательным*. Кварц и исландский шпат являются примерами этих двух типов, первый будет положительным, второй отрицательным.

В случае одноосного кристалла, весьма важно уметь выделить направления поляризации двух волн, имеющих одну и ту же нормаль к волне. Очевидно, что они должны находиться в плоскости, проходящей через оптическую ось и соответственный перпендикуляр к ней. Для того чтобы узнать, какое направление должно быть связано с той или другой скоростью, мы обращаемся к общим выражениям для направляющих косинусов поляризации, в частности к (1.112), которые, если мы примем $c = b$, станут пропорциональными

$$0, \quad \frac{(b^2 - v^2)^*}{m}, \quad \frac{(b^2 - v^2)}{n}.$$

Если v не является равным b , направление поляризации будет очевидно перпендикулярным и к нормали к волне (l, m, n) и к оптической оси (1, 0, 0). Таким образом направление поляризации в настоящем случае является перпендикулярным к плоскости, проходящей через нормаль к волне и оптическую ось.

Если $v = b$, отношение направляющих косинусов будет

$$0 : 0 : 0,$$

и из этих выражений они не могут быть определены. Однако, мы знаем, что в этом случае оно должно лежать в плоскости, проходящей через оптическую ось, так как это является единственной возможностью.

§ 1.14. Лучи в кристалле.

Рассмотрим теперь линию OP , соединяющую O — центр поверхности волны — с P — точкой соприкосновения фронта волны с волновой поверхностью.

Координаты x, y, z точки P даются уравнениями (1.136) и направляющие косинусы OP получаются пропорциональными

$$\frac{l(a^2 - r^2)}{a^2 - v^2}, \quad \frac{m(b^2 - r^2)}{b^2 - v^2}, \quad \frac{n(c^2 - r^2)}{c^2 - v^2}. \quad (1.141)$$

Условие, при котором OP перпендикулярна к направлению вектора напряженности электрического поля, из уравнения (1.111) будет

$$\frac{a^2 l^2 (a^2 - r^2)}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2 b^2 (b^2 - r^2)}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2 c^2 (c^2 - r^2)}{(c^2 - v^2)^2} = 0. \quad (1.142)$$

Теперь, возводя в квадрат (1.136) и складывая, мы получим

$$\frac{l^2 (a^2 - r^2)^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2 (b^2 - r^2)^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2 (c^2 - r^2)^2}{(c^2 - v^2)^2} = \frac{r^2}{v^2}. \quad (1.143)$$

Умножая (1.136) на

$$\frac{l}{a^2 - v^2}, \quad \frac{m}{b^2 - v^2}, \quad \frac{n}{c^2 - v^2}$$

и пользуясь (1.134), мы также имеем

$$\frac{l^2(a^2 - r^2)}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2(b^2 - r^2)}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2(c^2 - r^2)}{(c^2 - v^2)^2} = -\frac{1}{v^2}. \quad (1.144)$$

Умножаем (1.144) на r^2 , складываем с (1.143) и получаем (1.142), которое является следовательно удовлетворенным. Таким образом OP перпендикулярна к вектору напряжения электрического поля.

Условие, что она является также перпендикулярной к вектору напряжения магнитного поля, получается непосредственно из (1.112), которое дает

$$(b^2 - c^2)(a^2 - r^2) + (c^2 - a^2)(b^2 - r^2) + (a^2 - b^2)(c^2 - r^2) = 0,$$

что представляет тождество.

Таким образом OP перпендикулярна к электрической, и к магнитной силам. Она является следовательно лучом или линией потока энергии.

Мы имеем таким образом следующее простое построение для лучей, соответствующих любому данному направлению нормали волны. Находим точки соприкосновения с волновой поверхностью касательных плоскостей, параллельных фронтам волны. Линии, соединяющие центр поверхности волны с этими точками касания, являются соответствующими лучами.

Так как вектор напряжения магнитного поля перпендикулярен как к лучу, так и к нормали к волне, и этот вектор определяет направление поляризации, то следовательно направления поляризации являются линиями, перпендикулярными к плоскостям, заключающим нормаль к волне и лучи.

Запомним раз и навсегда, что *одной и той же* нормали к волне отвечают два луча и что эти лучи обычно расходятся.

Величина r , представляющая расстояние, которое световое колебание проходит вдоль луча за единицу времени, называется часто *лучевой скоростью*.

Очевидно, что если ψ является углом между лучом и нормалью к волне, то

$$\cos \psi = \frac{v}{r},$$

так как v является перпендикуляром из O на плоскость касания в P .

В оптическом методе изучения деформации мы будем иметь дело с кристаллами, для которых a , b , c отличаются одно от другого на очень малые величины.

Запишем в таком случае

$$a^2 = u^2 + \alpha,$$

$$b^2 = u^2 + \beta,$$

$$c^2 = u^2 + \gamma,$$

где

$$u^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2),$$

так что $\alpha + \beta + \gamma = 0$, и α , β , γ представляют количества, квадратами и произведениями которых можно пренебрегать.

Если мы решим, далее, уравнение относительно v^2 , то легко найдем, что его решение будет иметь форму

$$v^2 = u^2 + \varphi,$$

где φ является малым количеством первой степени относительно α , β , γ .

Теперь, из уравнения (1.142) будем иметь

$$r^2 = \left(\frac{l^2 a^4}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2 b^4}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2 c^4}{(c^2 - v^2)^2} \right) / \left(\frac{l^2 a^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2 b^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2 c^2}{(c^2 - v^2)^2} \right), \quad (1.145)$$

что дает лучевую скорость для данной волны.

Из (1.145)

$$r^2 - v^2 = \left(\frac{l^2 a^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2 b^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2 c^2}{c^2 - v^2} \right) / \left(\frac{l^2 a^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2 b^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2 c^2}{(c^2 - v^2)^2} \right)$$

и, пользуясь (1.1073), получим

$$r^2 - v^2 = 1 / \left(\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} \right) + v^2 \left\{ \frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right\};$$

пользуясь теперь (1.108) для упрощения знаменателя, имеем

$$r^2 - v^2 = \left(\frac{1}{v^2} \right) \left(\frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right)^{-1} \quad (1.146)$$

Поэтому

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{r^2 - v^2}}{r} = \frac{1}{rv} \left(\frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Однако

$$a^2 - v^2 = \alpha - \varphi, \quad b^2 - v^2 = \beta - \varphi, \quad c^2 - v^2 = \gamma - \varphi.$$

Отсюда

$$\left\{ \frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2} \right\}$$

второго порядка малости относительно α, β, γ и следовательно ψ является малым количеством первого порядка относительно α, β, γ .

Таким образом $\cos \psi$ отличается от 1 только небольшими количествами второго порядка малости и при приближенном рассмотрении оптических свойств такого кристалла мы можем рассматривать лучевые скорости и скорости волн равными, а расхождение луча от нормали к волне малыми первого порядка.

Прежде чем ставить вопрос о лучах, мы найдем лучи, отвечающие нормали к волне вдоль оптической оси OQ (фиг. 1.13).

Здесь

$$v = b, \quad m = 0, \quad l = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

В таком случае уравнения (1.136) дают

$$x = \frac{b(a^2 - r^2)}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \quad (1.147)$$

y — неопределенное,

$$z = -\frac{b(c^2 - r^2)}{\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}. \quad (1.148)$$

Равенства (1.147) и (1.148) удовлетворяются координатами конца луча. Так как уравнение для y неопределенно, этот конец удовлетворяет только двум уравнениям и следовательно лежит на кривой в пространстве.

Перепишем (1.147) и (1.148) в таком виде:

$$\begin{aligned} r^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \, x/b &= a^2, \\ r^2 - \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \, z/b &= c^2, \end{aligned}$$

что представляет уравнения двух шаров. Их пересечение является следовательно окружностью. Легко проверить, что это пересечение удовлетворяет также

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \, x + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \, z = b,$$

что соответствует в данном случае фронту волны.

Таким образом существует бесконечное множество лучей, соответствующих волнам, проходящим вдоль оптической оси, и эти лучи являются образующими конуса, проходящего через выше указанную окружность. Такие волны не соответствуют, следовательно, обыкновенному свету, а коническому пучку лучей, в котором каждый луч имеет свое собственное направление поляризации.

§ 1.15. Отражение и преломление на поверхности раздела.

Рассмотрим теперь, что происходит, когда плоская гармоническая волна падает на поверхность раздела двух сред.

Исследование для удобства делится на две части. В первой части мы рассмотрим изменения в направлении световых волн. Во второй части остановимся на изменении их интенсивности.

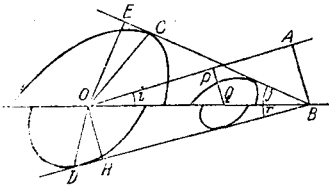
Пусть OA (фиг. 1.15) будет фронтом двигающейся вперед плоской волны, которую удобно будет рассматривать как отдельный импульс, OB — раздел между двумя средами, которые мы обозначим через I и 2 . Пусть AB будет перпендикуляром к OA ; выберем B так, чтобы $AB =$ расстоянию, проходимому падающей волной в среде I , за единицу времени.

Очевидно, что геометрическим местом точек B является прямая линия, по которой фронт падающей волны в момент $t=1$ пересекает плоскость раздела; время t считается от того момента, когда импульс достигает O .

Теперь, когда падающая волна достигает O , в этой точке начинается возмущение, и ее можно рассматривать как источник вторичных волн, распространяющихся в обеих средах. Если мы начертим теперь в каждой среде соответствующую ей часть волновой поверхности с центром O , тогда за время $t=1$ вторичные волны достигнут двух волновых поверхностей. Для простоты эти волновые поверхности показаны на фиг. 1.15 однополыми.

Допустим, что PQ будет другой нормалью к падающей волне, которая выбирается так, чтобы падающая волна проходила от P до Q за время t . Тогда само Q в момент времени t становится источником вторичных волн. Последние к моменту времени $t=1$ будут достигать двух волновых поверхностей, описанных из Q как из центра, подобных и подобнорасположенных с волновыми поверхностями, описанными из центра O , но уменьшенных по размерам в следующем отношении: $1:1-t=OB:QB$.

Благодаря этому отношению подобия видно, что касательные плоскости BC , BD , проходящие через прямую линию, на которой расположены точки B , ко всем этим волновым поверхностям, не зависят от положения Q и являются касательными



Фиг. 1.15.

плоскостями, проведенными через эту прямую линию к волновым поверхностям, описанным из O .

Эти касательные плоскости огмечают таким образом пределы, достигаемые колебаниями в обеих срединах, и являются следовательно фронтами новых равнодействующих волн. Так как луч ведет к точке соприкосновения касательной плоскости с поверхностью волны, то отсюда следует, что OC , OD являются лучами, проходящими через O в первой и второй среде; соответственно OE и OH будут нормальными к волнам. И так как мы знаем, что энергия течет вдоль лучей, нам нет необходимости рассматривать действие тех частей вторичных колебаний, которые отклоняются от направления лучей.

§ 1.16. Две изотропные среды.

Прежде всего рассмотрим случай двух сред, которые являются изотропными. В этом случае волновые поверхности являются полушарами, радиусами которых будут скорости волн v_1 и v_2 в двух средах. Таким образом одна плоскость касания, и только одна, может быть проведена через геометрическое место точек B к поверхности волны в каждой среде.

Мы имеем таким образом одну *отраженную* и одну *преломленную* волну. Все нормали к волнам перпендикулярны к геометрическому месту точек B , так как все фронты волн проходят через него, равным образом к нему будут перпендикулярны и нормали к плоскости раздела. Отсюда мы имеем:

Первый закон отражения и преломления: нормаль к падающей волне, перпендикуляр к плоскости раздела и перпендикуляры к отраженным и преломленным волнам лежат в одной плоскости, которая может быть названа *плоскостью падения*.

Этот закон остается в силе, какая бы ни была форма поверхностей волн. Следовательно, он справедлив как для кристаллической, так и для изотропной среды.

В случае изотропной среды он обычно формулируется для *лучей* таким образом: падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в плоскости, заключающей также перпендикуляр к плоскости раздела.

Выраженный в таком виде закон для кристаллов требует изменения, так как в случае кристаллов закон перестает быть справедливым для лучей.

Возвращаясь к случаю изотропной среды, мы заметим, что $AB =$ расстоянию, проходимому падающей волной за единицу времени $= v_1 = OE$. Таким образом, треугольники BEO , OAB равны во всех отношениях, и угол $AOB = EBO$.

Пусть $i = AOB =$ углу, образованному фронтом падающей волны с плоскостью раздела $=$ углу, образованному нормалью к падающей волне (или в данном случае лучом) с нормалью к разделу; i называется *углом падения*.

Подобно этому $j = EBO =$ углу отражения, который можно рассматривать либо как угол между отраженным лучом и нормалью (к плоскости раздела), либо как угол между фронтом отраженной волны и плоскостью раздела.

Мы имеем таким образом

$$j = i$$

или

второй закон отражения: угол отражения равен углу падения.

С другой стороны $OH = v_2$. Если $r =$ углу $OBH =$ углу преломления (определенному подобно углам падения и отражения, приведенным выше), то

$$\frac{OH}{OB} = \sin r, \quad \frac{AB}{OB} = \sin i,$$

откуда

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2},$$

или

$$\sin i = \frac{v_1}{v_2} \sin r = n_{12} \sin r,$$

т. е. согласно закону преломления Снеллиуса: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления является постоянным для двух изотропных сред, оно называется *показателем преломления* $n_{12} (= v_1/v_2)$ из среды 1 в среду 2.

Найдено, что коэффициент преломления всегда больше единицы, когда свет проходит из более разреженной в более плотную среду; отсюда следует, что скорость света в более плотной среде меньше.

Показатель преломления при переходе из эфира в любую данную среду называется *абсолютным показателем преломления* данной среды. Если c — скорость света в вакууме, то

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2},$$

так что

$$n_{12} = n_2/n_1.$$

Мы видели, что скорость света в любой изотропной среде равна $(K\mu)^{-\frac{1}{2}}$.

Если $K_0\mu_0$ представляют диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость вакуума, а $K\mu$ — то же для какой-либо среды, то показатель преломления (опуская индексы 1, 2) находится из

$$n = \sqrt{\frac{K\mu}{K_0\mu_0}}.$$

Для немагнитных сред

$$\mu = \mu_0$$

и

$$n = \sqrt{K/K_0} = \sqrt{K},$$

где K измеряется в электростатических единицах.

Однако опыты показывают, что это соотношение точно не удовлетворяется. Обычно даваемое объяснение заключается в том, что для очень быстрых световых вибраций *действующая* диэлектрическая постоянная отличается от диэлектрической постоянной, получаемой из электростатических опытов. То, что эта диэлектрическая постоянная должна в известной мере зависеть от частоты световых волн, очевидно из того опытного факта, что преломление разлагает белый свет на его цветные составляющие, так что световые волны различных длин имеют различные показатели преломления для двух данных материалов. Это явление, известное под названием дисперсии, уменьшает обычно показатель преломления по мере увеличения длины волны, и поэтому есть основания полагать, что для очень длинных волн диэлектрическая постоянная должна быть равна ее электростатической величине.

Даже когда показатель преломления исправлен таким способом, все же остаются серьезные расхождения. Следует, однако, обратить внимание на то, что такого рода исправление получается путем экстраполяции электрической формулы, выводимой для ряда длин волн видимого спектра, и что электромагнитная теория имеет так много других подтверждений, что скорее следует допустить существование погрешности эмпирической формулы, нежели отбросить всю электромагнитную теорию.

Если свет переходит из более плотной среды в более разреженную $v_1 < v_2$, то показатель преломления будет меньше единицы. Далее следует, что если $\sin i > n$, то $\sin r$ должен быть больше 1, что очевидно невозможно.

В этом случае преломленный луч может совершенно отсутствовать и весь свет перейдет в отраженный луч. Это явление называется *полным внутренним отра-*

жением и применяется во многих оптических инструментах. В частности, показатель преломления при переходе из воздуха в стекло бывает обычно не меньше 1,5; и при переходе из стекла в воздух $< \frac{2}{3}$; полное внутреннее отражение происходит следовательно при угле падения меньше чем 45° , и прямоугольная равнобедренная призма может применяться, как на фиг. 1.161, вместо зеркала большой отражающей способности.

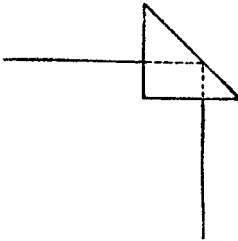
Другим очевидным следствием закона преломления, важным в практике, будет то, что помещение пластинки с параллельными сторонами на пути световой волны не изменяет направления фронта волны после прохождения сквозь пластинку.

Пусть $APQB$ (фиг. 1.162) представляет путь луча, проходящего через пластинку. Пусть (i_1, r_1) будут углами падения и преломления на первой плоскости раздела, (i_2, r_2) — соответственные углы на второй плоскости раздела; тогда по теореме о параллельных линиях

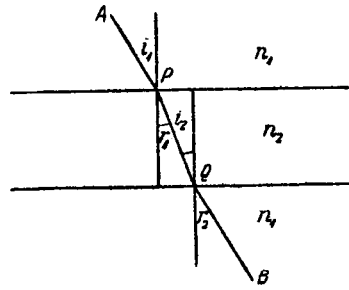
$$i_2 = r_1,$$

по закону преломления

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_1,$$



Фиг. 1.161.



Фиг. 1.162.

и при втором преломлении

$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin r_2,$$

откуда

$$n_1 \sin i_1 = n_1 \sin r_2, \text{ или } r_2 = i_1,$$

т. е. выходящий луч и луч падающий параллельны между собой.

§ 1.17. Преломление в призме.

Если световой луч OP (фиг. 1.17) падает под углом i на стеклянную призму, то он будет наклоняться к нормали как PQ и, выходя из призмы, будет отклоняться от нормали, согласно закону Снеллиуса, как QR . Общее отклонение увеличивается следовательно при втором преломлении.

Найдено, что для получения наилучшего определения показателя преломления призма должна устанавливаться так, чтобы средний луч проходил через нее симметрично; при этом угол падения в P и угол выхода луча в Q будут равны.

При этих условиях отклонение луча от первоначального направления бывает минимальным. Отклонение выразится тогда через

$$2(i - r).$$

Если α будет углом призмы, то $r = \frac{\alpha}{2}$ и

$$\sin i = n \sin r = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

так что отклонение

$$D = 2 \left\{ \arcsin \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{2} \right\},$$

или

$$\sin \left(\frac{D + \alpha}{2} \right) = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

— уравнение, которое дает возможность подсчитать n , когда D и α известны из наблюдения. Из приведенной выше величины D следует, что отклонение увеличивается с показателем преломления.

Таким образом, если луч света состоит из белого света, каждая из его элементарных монохроматических составляющих отклоняется различно, и свет выходит из призмы в виде расходящегося пучка цветных лучей, причем фиолетовые лучи наклоняются обычно больше, чем красные. Такая призма будет следовательно разлагать белый свет на составляющие его монохроматические элементы, однако благодаря перекрыванию цветных изображений образуемый спектр будет далек от совершенного, если первоначальный источник не будет очень узкой линией света, перпендикулярной к плоскости преломления.

Отклонение при малом угле призмы принимает особенно простую форму.

Действительно, если i_1, r_1 являются углами падения и преломления при первом преломлении, r_2, i_2 — соответственные углы при втором, то согласно элементарной геометрии

$$\alpha = r_1 + r_2.$$

Кроме того, если α мало и падение почти перпендикулярно к обоим поверхностям i_1, i_2, r_1, r_2 , то все углы малы и вместо синусов можно взять углы

$$i_1 = nr_1, \quad i_2 = nr_2.$$

Отклонение

$$D = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = (n - 1)(r_1 + r_2) = (n - 1)\alpha.$$

Отклонение, производимое такой тонкой призмой, является следовательно почти постоянным для всех (малых) углов падения.

§ 1.18. Спектрометр.

Спектрометр является прибором, предназначенным для получения посредством призмы чистого спектра от любого данного источника света.

Он состоит в основном из неподвижной зрительной трубы S (фиг. 1.18), называемой *коллиматором*, в которой окуляр заменен диафрагмой и щелью S , помещенными в главной фокальной плоскости объектива. Коллиматор прикреплен к устойчивой подставке, имеющей разделенный на градусы круг G и концентрический поворотный столик U , на котором помещается призма P .

Зрительная труба T вращается концентрично с поворотным столиком и разделенным на градусы кругом и благодаря этому ее ось направлена к общему центру O .

Анализируемый источник света L помещается так, чтобы осветить щель S . Лучи от S , пройдя через объектив, идут дальше параллельным пучком. Они остаются параллельными после преломления в призме и образуют изображение щели в фокальной плоскости зрительной трубы T , и это изображение наблюдается через окуляр E .

Благодаря различным показателям преломления лучей различных цветов, пучки лучей двух различных цветов 1 и 2 собираются в фокусе в различных точках Q_1, Q_2 зрительной трубы T .

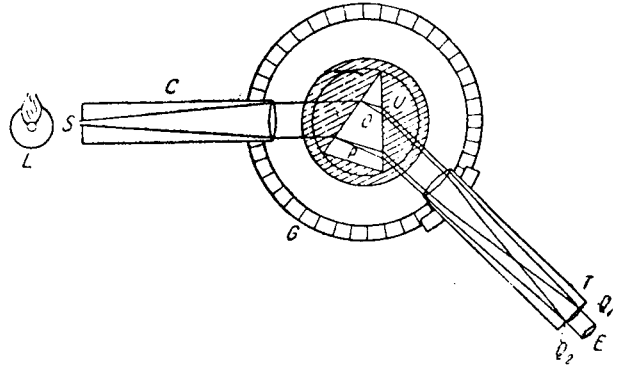
Таким образом в фокальной плоскости образуется не одно изображение щели, а последовательные ряды изображений, соответствующие различным монохроматическим элементам света, исходящего из L .

Эти изображения образуют спектр света, исходящего из L , который может быть таким образом детально исследован.

Как правило, для того, чтобы обозреть весь спектр, необходимо вращать зрительную трубу, перемещение которой можно отсчитывать по шкале круга G . В фокальной плоскости телескопа помещен крест из тонких нитей, который можно устанавливать на любую данную линию спектра.

Вместо градусных делений на круге G можно нанести деления в длинах волн, пользуясь тем обстоятельством, что раскаленные вещества в газовом состоянии образуют спектр, состоящий полностью из тонких светлых линий, которые являются характерными для вещества.

Щель освещается светом, исходящим из такого известного источника, спектр которого может быть найден в соответствующих таблицах, как например перечень спектров Ватта; устанавливают зрительную трубу по очереди на отдельные линии данного спектра и наносят на круг соответственные длины волн; промежуточные деления получают соответствующей интерполяцией. После этого прибором можно пользоваться для изучения спектра неизвестного вещества.



Фиг. 1.18.

§ 1.19. Преломление при переходе из изотропной в кристаллическую среду.

Мы рассмотрим теперь переход света из изотропной в кристаллическую среду. Поверхность волны в изотропной среде является попрежнему сферической, так что отраженная волна подчиняется точно тем же законам, что и раньше.

Однако поверхность волны в кристалле является волновой поверхностью Френеля (фиг. 1.191), которая, как мы видели, двуполая. Таким образом в кристалле получается два фронта волны и две преломленных волны, соответствующие двум касательным плоскостям к поверхности волны, проведенным через прямую линию, являющуюся геометрическим местом точек B .

Каждый из этих волновых фронтов имеет, конечно, соответствующий ему луч, однако в общем случае плоскости поляризации этих волн не перпендикулярны, так как фронты волн не параллельны.

Таким образом один луч света дает в кристалле начало двум лучам OD_1, OD_2 , соответствующим двум нормальям волн OH_1, OH_2 . Происходит хорошо известное явление двойного лучепреломления.

Далее, закон

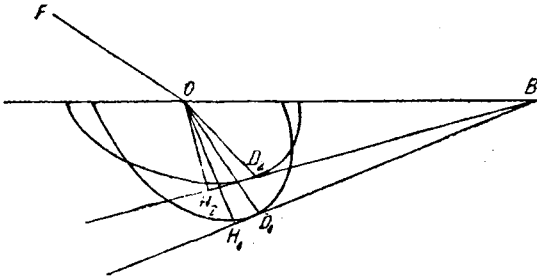
$$\frac{\sin i}{v_0} = \frac{\sin r_1}{v_1} = \frac{\sin r_2}{v_2},$$

где v_0, v_1, v_2 — скорости волн падающей и двух преломленных волн, попрежнему соединяет угол падения и углы r_1, r_2 , образованные двумя преломленными фронтами волны с плоскостью раздела; однако 1) v_1, v_2 не являются больше постоян-

ными, а представляют сложные функции угла падения и ориентации плоскости раздела по отношению к осям кристалла; 2) закон преломления для лучей принимает гораздо более сложную форму, причем первый закон преломления перестает быть справедливым для лучей.

Подробный разбор всех вопросов двойного лучепреломления не входит в задачи этой книги и для оптического метода изучения деформаций он не является необходимым. Два случая требуют, тем не менее, специального рассмотрения.

Первый случай имеет место, когда падающая волна *перпендикулярна* к плоскости раздела. В этом случае точки *B* находятся в бесконечности и две нормали преломленных волн совпадают, причем обе перпендикулярны к плоскости раздела. Направления поляризации относятся в таком случае к той же самой нормали к поверхности волны и, согласно предыдущему, являются взаимно перпендикулярными.



Фиг. 1.191.

Преломленные лучи будут, в общем, косыми; однако, когда положение плоскости раздела относительно осей кристалла известно, образуемые ими углы легко вычисляются из приведенных ранее формул.

Второй случай имеет место, когда кристалл *одноосный*. В этом случае две полы волны, которые образуются в кристалле, могут рассматриваться отдельно.

Один из преломленных фронтов волны получается посредством построения касательной плоскости к шару радиуса *b*, и соответствующий луч будет перпендикулярен к фронту волны.

Он подчиняется следовательно закону преломления Снеллиуса и известен как *обыкновенный луч*, а соответствующий показатель преломления $\frac{v_0}{b}$ — как *обыкновенный показатель преломления*.

Второй преломленный фронт волны получается построением касательной плоскости к сфероидальной поверхности. Величина скорости волны зависит в этом случае от условий падения и от того, как срезан кристалл. Как правило, преломленный луч не лежит в плоскости падения, а направления поляризации не перпендикулярны. Этот луч называется *необыкновенным лучом*; $\frac{v_0}{a}$, где *a* — скорость волны (иная чем *b*) в направлении, перпендикулярном к оптической оси, называется *необыкновенным показателем преломления*.

Отметим, что для положительного кристалла необыкновенный показатель преломления n_e больше, чем обыкновенный показатель n_o . Для отрицательного кристалла имеет место обратное.

Возьмем три простых примера:

I. Плоскость падения является экваториальной плоскостью (*yz*) волновой поверхности (фиг. 1.192). В этом случае симметрия показывает, что преломленные фронты волны определяются касательными из *B* к окружностям, имеющим радиусы *a* и *b*.

Мы имеем таким образом

$$\sin i = n_o \sin r_1 = n_e \sin r_2,$$

и к тому же лучи являются перпендикулярными к фронтам волны, так что здесь необыкновенный луч подчиняется закону Снеллиуса.

II. Оптическая ось лежит в плоскости раздела, и плоскость падения проходит через оптическую ось (фиг. 1.193).

Согласно хорошо известному свойству эллипса

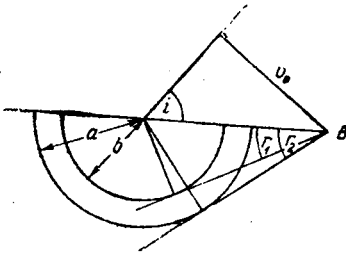
$$OH^2 = v^2 = a^2 \cos^2 r_2 + b^2 \sin^2 r_2,$$

$$v \sin i = v_0 \sin r_2.$$

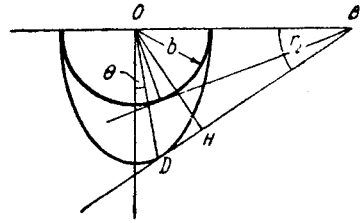
Следовательно

$$(a^2 \cos^2 r_2 + b^2 \sin^2 r_2) \sin^2 i = v_0^2 \sin^2 r_2,$$

$$\left(\frac{\cos^2 r_2}{n_e^2} + \frac{\sin^2 r_2}{n_o^2} \right) \sin^2 i = \sin^2 r_2,$$



Фиг. 1. 192. Первый случай.



Фиг. 1. 193. Второй случай.

$$\operatorname{tg}^2 r_2 \left(1 - \frac{\sin^2 i}{n_o^2} \right) = \frac{\sin^2 i}{n_e^2}$$

и

$$\operatorname{tg} r_2 = \frac{n_o}{n_e} \sin i / \sqrt{n_o^2 - \sin^2 i},$$

дает закон преломления для нормали к волне в этом случае.

Однако, закон преломления для луча будет другой. Например, если OD образует угол θ с осью эллипса a , то, как известно,

$$\operatorname{tg} r_2 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \operatorname{tg} \theta.$$

Таким образом закон преломления для луча будет

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n_e}{n_o} \sin i / \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i}.$$

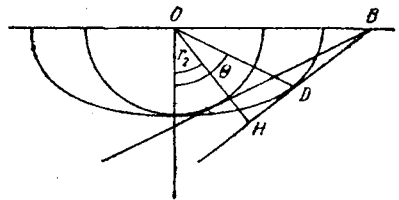
III. Плоскость раздела перпендикулярна к оптической оси (фиг. 1.194). В этом случае, согласно симметрии, азимут плоскости падения безразличен. Анализ точно такой, как в последнем случае, с той разницей, что a и b надо поменять местами.

Мы имеем следовательно для преломления нормали необыкновенной волны

$$\operatorname{tg} r_2 = \frac{n_e}{n_o} \sin i / \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i},$$

и для преломления луча

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n_o}{n_e} \sin i / \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i}.$$



Фиг. 1. 194. Третий случай.

Во всех трех примерах направления поляризации взаимно перпендикулярны. В примере I обыкновенный луч поляризован перпендикулярно к плоскости падения, необыкновенный луч — в плоскости падения.

В примерах II и III обыкновенный луч поляризован в плоскости падения, необыкновенный луч — перпендикулярно плоскости падения.

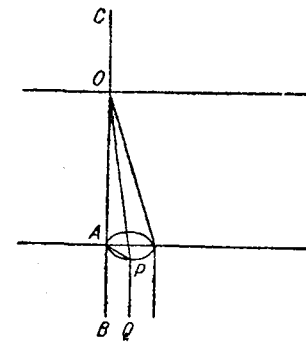
§ 1.20. Коническая рефракция.

Если двусный кристалл разрезать перпендикулярно к одной из оптических осей и луч света будет падать на поверхность нормально, то лучи в кристалле будут располагаться вдоль конуса, описанного в конце § 1.14, являющегося косым конусом с круглым основанием, одна из образующих которого лежит на продолжении падающего луча.

Если вторым параллельным разрезом преобразовать кристалл в пластинку, то конус лучей встретит вторую поверхность в точках, расположенных по кругу, и преломленные лучи будут параллельны первоначальному падающему лучу, так что мы получим выходящий цилиндр лучей вместо одного луча, причем направление поляризации каждого луча PQ (фиг. 1.20) будет перпендикулярно к плоскости $APQB$, где AB является первоначальным падающим лучом.

Это явление известно как внутреннее коническое преломление (*внутренняя коническая рефракция*).

Возвратимся теперь к § 1.13 и рассмотрим луч, проходящий в кристалле вдоль линии OR , соединяющей центр поверхности волны с одной из конических точек R (фиг. 1.13). Этот луч соответствует бесконечному множеству фронтов волны, каждый из которых является касательной плоскостью к касательному конусу в R . Соответствующие нормали волн также лежат на конусе.



Фиг. 1.20.

Когда эта группа волн, идущих вдоль одного и того же луча, преломляется, скажем, в воздух, преломленные нормали волн будут также образовывать конус, расходящийся из точки выхода лучей. Однако в воздухе лучи, соответствующие этим нормальям волн, не совпадают, но следуют в направлениях нормалей волн. Мы имеем таким образом расходящийся конический пучок лучей: так же, как в случае внутреннего конического преломления, каждый луч имеет свою плоскость поляризации.

Это явление известно как внешнее коническое преломление (*внешняя коническая рефракция*). Оно может быть получено путем ограничения прохода света сквозь пластинку кристалла при помощи отверстий в тонких металлических пластинках, накладываемых на его поверхности, причем отверстия размещаются так, чтобы линия, соединяющая их, шла вдоль направления OR , которое называется *осевым лучом* кристалла. Одно из отверстий освещается затем сходящимся пучком обыкновенного света, а свет, выходящий из другого отверстия, образует уже описанный расходящийся конус. Коническое преломление было предсказано В. Гамильтоном из математических свойств волновой поверхности Френеля и по его предложению было проверено на опыте Ллойдом.¹

§ 1.21. Интенсивность света.

Интенсивность световой волны определяется как средняя энергия волны в единице объема². Если мы возьмем выражения для электрической и магнитной энергий в § 1.10, то вся энергия W может быть выражена посредством уравнений (1.0773) (1.0774) в следующей форме:

$$W = \frac{1}{8\pi} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) + \frac{1}{8\pi} (H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z).$$

¹ Trans. Roy. Irish. Acad. 17, 145.

² См. *Бассэт*, Физическая оптика. Рэйлей дал другое определение, а именно: „количество энергии, распространяющееся параллельно волнам, в единицу времени через единицу площади“ (статья о „Волновой теории“, Британская энциклопедия).

Рассматривая случай немагнитного кристалла, когда оси координат являются осями кристалла, мы имеем

$$W = \frac{1}{8\pi} (K_1 E_x^2 + K_2 E_y^2 + K_3 E_z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2).$$

Далее, полагая

$$E_x = F_x \cos \varphi, \quad E_y = F_y \cos \varphi, \quad E_z = F_z \cos \varphi,$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - vt),$$

и пользуясь уравнениями (1.079), находим:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{1}{v\mu} (mF_z - nF_y) \cos \varphi \\ H_y &= \frac{1}{v\mu} (nF_x - lF_z) \cos \varphi \\ H_z &= \frac{1}{v\mu} (lF_y - mF_x) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.210)$$

Средняя электрическая энергия в единице объема за единицу времени, поскольку средняя величина $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$, равна

$$\frac{1}{16\pi\mu} (F_x^2/a^2 + F_y^2/b^2 + F_z^2/c^2), \quad (1.211)$$

где a, b, c имеют те же значения, что и в (1.106), и средняя магнитная энергия в единице объема равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi\mu v^2} [(mF_z - nF_y)^2 + (nF_x - lF_z)^2 + (lF_y - mF_x)^2] = \\ & = \frac{1}{16\pi\mu v^2} [F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 - (lF_x + mF_y + nF_z)^2], \end{aligned} \quad (1.212)$$

если воспользоваться отношением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Обращаемся теперь к выражениям (1.1071), дающим величины F_x, F_y, F_z . Умножая их на

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - v^2}, \quad \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - v^2}, \quad \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - v^2},$$

возводя в квадрат, складывая и пользуясь (1.073), мы имеем

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) F_x^2 + \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right) F_y^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) F_z^2 = (lF_x + mF_y + nF_z)^2,$$

откуда (1.212) принимает вид:

$$\frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{F_x^2}{a^2} + \frac{F_y^2}{b^2} + \frac{F_z^2}{c^2} \right),$$

т. е. средние электрическая и магнитная энергии равны.

Таким образом, интенсивность волны будет

$$\frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{F_x^2}{a^2} + \frac{F_y^2}{b^2} + \frac{F_z^2}{c^2} \right) \quad (1.213)$$

в том случае, если мы имеем дело с изотропной средой, в которой скорость света равна c , интенсивность будет

$$\frac{1}{8\pi\mu c^2} (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2) = \quad (1.214)$$

$= \frac{1}{8\pi\mu c^2}$ (квадрат амплитуды вектора напряжения электрического поля).

Мы можем также выразить интенсивность через амплитуду магнитной силы. Так, если

$$H_x = G_x \cos \varphi, \quad H_y = G_y \cos \varphi, \quad H_z = G_z \cos \varphi,$$

то средняя величина всей энергии равна дважды взятой средней величине магнитной энергии

$$\frac{\mu}{8\pi} (G_x^2 + G_y^2 + G_z^2). \quad (1.215)$$

Таким образом интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды магнитного вектора, и это справедливо как для кристалла, так и для изотропной среды.

§ 1.22. Условия, которым должны удовлетворять электромагнитные векторы на границе двух сред.

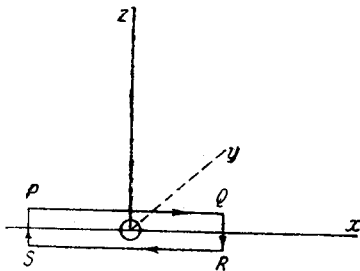
Возвратимся теперь к вихревым соотношениям. Рассмотрим для простоты плоскую поверхность раздела, которую мы можем взять за плоскость xy (фиг. 1.22).

Пусть $PQRS$ будет очень узким прямоугольником длиной $2a$ и высотой $2b$, в котором b очень мало по сравнению с a . Обозначим количества, относящиеся к верхней среде, буквами без значков, а количества, относящиеся к нижней среде, — буквами со значками.

Рассмотрим интеграл вектора магнитного напряжения вокруг замкнутого контура $PQRS$. Тогда в пределе он будет равен

$$(H_x - H_x') 2a.$$

Но электрический ток $\frac{dE_y}{dt}$ через замкнутый кон-



Фиг. 1.22.

тур равен $\frac{dE_y}{dt} 4ab$ и в пределе, при b , стремящемся к нулю, равен нулю.

Таким образом

$$H_x - H_x' = 0,$$

и подобно этому

$$H_y - H_y' = 0.$$

Следовательно, тангенциальные составляющие вектора магнитного напряжения должны быть непрерывными; подобно этому тангенциальные составляющие вектора электрического напряжения должны быть также непрерывными.

Рассмотрим теперь два совершенно одинаковых малых замкнутых контура, лежащих друг против друга на противоположных сторонах раздела и очень близко к нему; из постоянства тангенциальных составляющих электрического и магнитного векторов следует, что интегралы этих векторов по обоим контурам будут одинаковы, и отсюда, согласно вихревым соотношениям:

$$\frac{dB_x}{dt} = \frac{dB_x'}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dD_z}{dt} = \frac{dD_z'}{dt},$$

т. е. скорости изменения нормальных составляющих магнитной индукции и электрического смещения непрерывны.

Однако, нельзя забывать того, что это дополнительное условие зависит от предыдущего, так что достаточно только условий постоянства тангенциальных составляющих электрического и магнитного векторов.

На самом деле найденные условия для нормальных составляющих представлены далеко не в полном виде, и хотя они достаточны для того, чтобы мы имели возможность рассмотреть вопросы отражения и преломления, нам понадобятся более полные условия, когда мы перейдем к теории Винера-Амбронна, относящейся к двойному лучепреломлению, возникающему при деформациях; поэтому постараемся получить их теперь.

Мы видели уже, что в незаряженных диэлектриках

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Отсюда

$$\iiint \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 0,$$

где интеграл берется по пространству, ограниченному любой замкнутой поверхностью S .

Однако, согласно теореме Грина, интеграл в левой части вышеприведенного уравнения равен

$$\iint B_n dS,$$

где B_n является составляющей B в направлении внешней нормали к S . Отсюда

$$\iint B_n dS = 0,$$

и подобно этому

$$\iint D_n dS = 0.$$

Теперь рассмотрим вновь поверхность раздела и возьмем на поверхности S очень плоский цилиндрический барабан, у которого образующие линии перпендикулярны к поверхности раздела и исчезающе коротки, плоские поверхности параллельны поверхности раздела, находятся по одной с каждой стороны раздела и имеют (небольшую) площадь A .

Тогда $\iint B_n dS$ по поверхности этого барабана будет приближенно равен

$$(B_s - B'_s) A,$$

и так как эта величина равна нулю, то

$$B_s = B'_s,$$

и подобным же образом

$$D_s = D'_s.$$

Таким образом не только скорости изменения нормальных составляющих B и D , но и сами нормальные составляющие остаются непрерывными, когда мы пересекаем раздел, при условии, что на последнем нет никакого поверхностного заряда.

§ 1.23. Интенсивность отраженных и преломленных лучей.

Теперь нам предстоит разобрать вторую часть задачи отражения и преломления, а именно: вычислить относительные интенсивности падающих, отраженных и преломленных волн. Для этой цели нам будет достаточно ограничиться случаем поверхности раздела между двумя изотропными веществами.

Возьмем за поверхность раздела плоскость $xу$, а за плоскость падения плоскость xz . Тогда количества $e^{i\varphi}$, $e^{i\varphi_1}$, $e^{i\varphi_2}$, вещественные части которых дают гармонические выражения для трех волн, выразятся так:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\pi \left\{ \frac{n}{v_1} (x \sin j - z \cos j) - nt \right\} \\ \varphi_1 &= 2\pi \left\{ \frac{n_1}{v_1} (x \sin j + z \cos j) - n_1 t \right\} \\ \varphi_2 &= 2\pi \left\{ \frac{n_2}{v_2} (x \sin r - z \cos r) - n_2 t \right\},\end{aligned}$$

где n , n_1 , n_2 представляют частоты колебаний трех волн, v_1 и v_2 — скорости волн в двух средах, и j , r — углы падения и преломления.

Так как вектор напряжения магнитного поля здесь перпендикулярен к лучу, он имеет две составляющие: одну перпендикулярную к плоскости падения и одну в плоскости падения. Мы можем рассмотреть отдельно волны, соответствующие этим двум составляющим.

I. Магнитный вектор (или поляризация) в плоскости падения.

Для падающей волны мы примем

$$H_x = A \cos j e^{i\varphi}, \quad H_y = 0, \quad H_z = A \sin j e^{i\varphi}.$$

Тогда из уравнений (1.078), действуя таким же образом, как для уравнений (1.210), мы находим

$$vKE = (nH_y - mH_x, lH_z - nH_x, mH_z - lH_y),$$

где

$$l = \sin j, \quad m = 0, \quad n = -\cos j;$$

таким образом мы имеем для падающей волны

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{A}{v_1 K_1} e^{i\varphi}, \quad E_z = 0.$$

Подобно этому для отраженной волны $l = \sin j$, $m = 0$, $n = \cos j$, и

$$H_x' = A' \cos j e^{i\varphi_1}, \quad H_y' = 0, \quad H_z' = -A' \sin j e^{i\varphi_1},$$

$$E_x' = 0, \quad E_y' = -\frac{A'}{v_1 K_1} e^{i\varphi_1}, \quad E_z' = 0,$$

и для преломленной волны

$$H_x'' = A'' \cos r e^{i\varphi_2}, \quad H_y'' = 0, \quad H_z'' = A'' \sin r e^{i\varphi_2},$$

$$E_x'' = 0, \quad E_y'' = \frac{A''}{v_2 K_2} e^{i\varphi_2}, \quad E_z'' = 0.$$

Выпишем теперь четыре условия непрерывности составляющих электрического и магнитного векторов, параллельных поверхности раздела, т. е.

$$H_x + H_x' = H_x'', \quad H_y + H_y' = H_y'',$$

$$E_x + E_x' = E_x'', \quad E_y + E_y' = E_y''.$$

Второе и третье из этих уравнений удовлетворяются тождественно; первое и четвертое приводятся к

$$A \cos j e^{i\varphi} + A' \cos j e^{i\varphi_1} = A'' \cos r e^{i\varphi_2}, \quad (1.231)$$

$$\frac{A}{v_1 K_1} e^{i\varphi} - \frac{A'}{v_1 K_1} e^{i\varphi_1} = \frac{A''}{v_2 K_2} e^{i\varphi_2}. \quad (1.232)$$

Так как (1.231) и (1.232) остаются в силе для всех значений x и t , при $z=0$, то следует, что эти равенства возможны только при условии

$$\varphi(z=0) \equiv \varphi_1(z=0) \equiv \varphi_2(z=0),$$

или $n = n_1 = n_2$, т. е. частота волны не изменяется при отражении или при преломлении, что является весьма важным следствием.

Далее

$$\frac{\sin j}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2},$$

что является не чем иным, как законом преломления Снеллиуса, который может быть получен таким способом.

Уравнения (1.231) и (1.232) после деления на $e^{i\varphi}$ принимают вид:

$$A \cos j + A' \cos j = A'' \cos r, \quad (12)$$

$$\frac{A}{v_1 K_1} - \frac{A'}{v_1 K_1} = \frac{A''}{v_2 K_2}; \quad (1.234)$$

вспомогая, что

$$\frac{1}{K_1} : \frac{1}{K_2} = v_1^2 : v_2^2,$$

для (1.234) получаем

$$A v_1 - A' v_1 = A'' v_2,$$

или, по закону Снеллиуса,

$$A \sin j - A' \sin j = A'' \sin r. \quad (1.235)$$

Решая теперь (1.233) и (1.235) совместно, мы легко получаем

$$A'' = \frac{A \sin 2j}{\sin(j+r)}, \quad (1.236)$$

$$A' = \frac{A \sin(j-r)}{\sin(j+r)}, \quad (1.237)$$

дающие для этого случая амплитуды преломленной и отраженной волн, а следовательно на основании (1.215) и квадратные корни из относительных интенсивностей трех волн.

II. Магнитный вектор или поляризация перпендикулярны к плоскости падения.

В этом случае мы имеем

$$H_x = 0, \quad H_y = A e^{i\varphi}, \quad H_z = 0,$$

$$E_x = -\frac{A \cos j}{v_1 K_1} e^{i\varphi}, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{A \sin j}{v_1 K_1} e^{i\varphi},$$

$$H'_x = 0, \quad H'_y = A' e^{i\varphi_1}, \quad H'_z = 0,$$

$$E'_x = \frac{A' \cos j}{v_1 K_1} e^{i\varphi_1}, \quad E'_y = 0, \quad E'_z = -\frac{A' \sin j}{v_1 K_1} e^{i\varphi_1},$$

а также и

$$H''_x = 0, \quad H''_y = A'' e^{i\varphi_2}, \quad H''_z = 0,$$

$$E''_x = -\frac{A'' \cos r e^{i\varphi_2}}{v_2 K_2}, \quad E''_y = 0, \quad E''_z = -\frac{A'' \sin r e^{i\varphi_2}}{v_2 K_2},$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и раньше, и условия непрерывности электрического и магнитного векторов приводят очевидно к

$$A + A' = A'',$$

$$A \sin j \cos j - A' \sin j \cos j = A'' \sin r \cos r,$$

что ведет к

$$A'' = \frac{A \sin 2j}{\sin(j+r) \cos(j-r)}, \quad (1.238)$$

$$A' = A \frac{\operatorname{tg}(j-r)}{\operatorname{tg}(j+r)}. \quad (1.239)$$

Формулы (1.236) — (1.239) представляют хорошо известные формулы Френеля, дающие отношения квадратных корней интенсивностей для света, поляризованного параллельно и перпендикулярно к плоскости падения.

§ 1.24. Изменение фазы при отражении и преломлении.

Так как j и r всегда меньше 90° , $\sin 2j$, $\sin(j+r)$, $\cos(j-r)$ положительны. Из (1.236) и (1.238) следует, что A'' имеет тот же знак, что и A , и следовательно *проходящая волна никогда не испытывает изменения в фазе при преломлении*. Этот момент имеет важное значение в вычислении отставания по фазе волн, которые прошли оптическую систему, и показывает, что эти отставания зависят исключительно от длины пройденного пути.

Однако в случае отраженного луча неизбежно приходится вводить изменения фазы. Если мы будем считать положительными направления, указанные стрелками на фиг. 1.23, условимся считать положительным направлением оси z направление, противоположное движению падающего луча, и примем правую систему осей координат, тогда в случае j равнодействующие магнитные векторы $Ae^{i\varphi}$ и $A'e^{i\varphi_1}$ будут положительными на противоположных сторонах ломаной линии, образованной падающим и

преломленным лучами (согласно стрелкам, отмечающим H, H', H'' на рис. 1.23). Если мы переменим теперь знак вектора H' так, чтобы H и H' имели одинаковое отношение к направлению распространения, то магнитные векторы примут следующую форму:

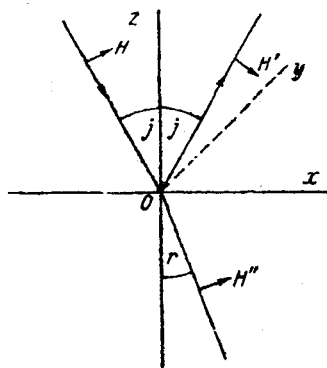
$$Ae^{i\varphi}, A'e^{i(\varphi_1 + \pi)}.$$

Что же касается φ и φ_1 , то они являются непрерывными, будучи равными $-2\pi nt$ на разделе; если следовательно A и A' имеют одинаковый знак, то при отражении будет изменение фазы π ; но если A и A' имеют различные знаки, то магнитные векторы принимают форму

$$Ae^{i\varphi}, (-A')e^{i\varphi_1},$$

и в фазе изменения не будет.

В случае отражения от поверхности *более плотной* среды (например, на лицевой поверхности стеклянной пластинки в воздухе), $j > r$, тогда (1.237) показывает, что A и A' имеют одинаковый знак. Таким образом свет, поляризованный в плоскости падения (случай I), всегда испытывает изменение фазы π при таком отражении. Однако, если отражение происходит на поверхности *менее плотной* среды (задняя поверхность стеклянной пластинки в воздухе), свет, поляризованный в плоскости падения, не испытывает никакого изменения фазы.



Фиг. 1.23.

В случае II, отвечающем свету, поляризованному перпендикулярно к плоскости падения (согласно условию, установленному выше, что направление поляризации тождественно с направлением магнитной силы), все три равнодействующие магнитные векторы измеряются положительно в одном и том же направлении, которое параллельно Oy . Таким образом, если A' и A имеют одинаковый знак, изменения фазы не происходит, если же A' и A имеют противоположные знаки, происходит изменение фазы π .

Согласно уравнению (1.239) мы видим, что в том случае, если отражение происходит на поверхности более плотной среды ($j > r$), A' и A имеют одинаковые знаки, если $j + r < \frac{\pi}{2}$, и противоположные знаки, если $j + r > \frac{\pi}{2}$. Предельная величина j , разделяющая эти два случая, является „углом поляризации“, который определяется в следующем параграфе. Таким образом, если угол падения меньше угла поляризации, то для света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения, не будет изменения фазы при отражении; но если угол падения превышает угол поляризации, то происходит изменение фазы на половину длины волны.

Вышеприведенные следствия изменяются на обратные, если отражение происходит на поверхности менее плотной среды.

Отметим, что хотя такие изменения фазы, вводимые отражением, будут влиять на абсолютное запаздывание волны, — они не будут влиять на относительные запаздывания двух волн при условии, что поляризация и общие обстоятельства отражения одинаковы для обеих.

§ 1.25. Угол поляризации.

Из уравнения (1.239) следует, что интенсивность отраженного света делается равной нулю в случае II, когда $j + r = 90^\circ$, условие, при котором уравнение Снеллиуса

$$\sin j = n \sin r$$

дает

$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{n}, \operatorname{tg} j = n.$$

Угол $\operatorname{arctg} n$ называется *углом поляризации* для двух данных материалов. Это положение известно под названием закона Брюстера. При отражении света в воздухе от обычного стекла угол поляризации будет обычно колебаться приблизительно от 56° до 60° .

Заметим, что для обратного хода луча, т. е. при отражении в стекле от воздуха, угол поляризации определяется через $\operatorname{tg} j = \frac{1}{n}$, $\operatorname{tg} r = n$, что сразу подтверждается при изменении движения света, так как в этом случае показатель преломляемости изменяется на свою обратную величину.

Отсюда вытекает, что если обычный свет отражается от поверхности прозрачного тела под углом поляризации, составляющая, поляризованная перпендикулярно к плоскости падения, уничтожается, а отраженный луч поляризуется целиком в плоскости падения.

Это наблюдение привело к первоначальному экспериментальному определению плоскости поляризации света, и это определение тождественно определению, принятому нами ранее, согласно которому направление поляризации отождествляется с направлением магнитного вектора.

Более тщательные опыты показали,¹ что отражение на плоской границе прозрачного вещества никогда не поляризует полностью света; другими словами, составляющая, поляризованная перпендикулярно к плоскости падения, никогда не исчезает полностью.

¹ См. *Jamin*, *Annales de Chimie et de Physique*, Sér. III, 29, pp. 31 и 263, и 30, p. 257.

Заметим, что если падение почти перпендикулярно, так что j и r будут малы и приблизительно $j = nr$, мы имеем довольно точно:

$$A'' = \frac{2n}{n+1} A, \quad A' = \frac{n-1}{n+1} A \quad (1.25)$$

для обоих направлений поляризации. Отсюда при почти перпендикулярном падении отражение и преломление не вводят чувствительных следов поляризации.

С другой стороны

$(A''/A)^2 =$ интенсивность проходящего света: интенсивность падающего света.

Припоминая определение интенсивности, данное в § 1.21, мы находим, что:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{величина потока энергии проходящего света}}{\text{величина потока энергии падающего света}} = \\ & = \frac{\text{интенсивность проходящего света} \times \text{скорость в среде 2}}{\text{интенсивность падающего света} \times \text{скорость в среде 1}} = \\ & = (A'')^2/nA^2 = 4n/(n+1)^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда потеря световой энергии для нормального падения равна $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$, что подтверждается на опыте, поскольку это отношение является отношением энергии отраженной к энергии падающей волны.

Для кронгласа мы можем принять $n = 1,5$ и потеря энергии при одном преломлении достигает 4% от всей энергии.

Для практических целей это очень важно: за счет введения стеклянной пластинки или линзы, до 8% света (для флинтгласа больше, в виду большего показателя преломления) обязательно теряется только при отражениях на двух поверхностях, совершенно независимо от поглощения света при его прохождении через толщину пластинки. Таким образом при расчете оптических приборов, где яркость окончательного изображения существенна, особо важно уменьшать насколько возможно количество поверхностей, у которых могут иметь место отражение и преломление.

§ 1.26. Поляризация стеклянной стопой.

Теперь мы рассмотрим способы получения плоско-поляризованного света, что имеет особое значение для оптического метода исследования напряжений.

Как мы видели в предыдущем параграфе, одним из таких способов, очевидно, является отражение параллельного пучка лучей от стеклянной пластинки под углом поляризации. В этом случае свет должен отражаться поляризованным в плоскости падения.

Этот способ не дает совершенных результатов по трем причинам:

1) На практике источник света должен иметь определенную площадь. Если мы получаем параллельный свет, помещая источник света в фокусную плоскость линзы, то мы имеем дело не с одним, а с множеством параллельных пучков лучей, идущих под различными наклонами, и только один из них будет полностью уничтожаться. Это весьма ограничивает углы пучков лучей поляризованного света, который мы можем получить этим способом. Если мы рассматриваем глазом изображение источника, оно содержит пятно, которое приблизительно поляризовано, и всегда нужно смотреть на это пятно. Его можно фиксировать, если смотреть через призму Николя (см. § 1.30 дальше), повернутую до соответствующего азимута.

2) Если применяется *белый* свет, то благодаря явлению дисперсии, ранее отмеченному, показатели преломления, а следовательно и углы поляризации раз-

личных цветов разные. Рефлектор не будет следовательно поляризовать все цвета одновременно. Однако это явление не очень заметно.

3) Наконец, мы сталкиваемся с фактом, упомянутым в конце предыдущего параграфа, а именно, что даже при правильном угле поляризации некоторая доля света, поляризованная перпендикулярно к плоскости падения, отражается.

Существует предположение (отмеченное во многих учебниках), что последнее явление (3) можно свести к минимуму, если свет будет отражаться не от одной поверхности, а от ряда параллельных поверхностей, как например от ряда пластинок. Это мнение, кажется, настолько широко распространено среди физиков, что здесь будет уместно остановиться на разборе интенсивностей после последовательного отражения от ряда пластинок.

§ 1.27. Действие одной пластинки.

Прежде всего мы рассмотрим интенсивности отраженного и проходящего света при падении первоначального луча на одну пластинку под углом поляризации.

Из формул (1.237) и 1.239) является очевидным, что числовые множители, влияющие на интенсивности отраженных лучей, не изменяются при перестановке j и r . Уменьшение интенсивности при каждом последующем отражении от поверхностей пластинок будет поэтому одинаковым; назовем его β .

Уменьшение интенсивности в преломленном луче будет, однако, различным при входе и выходе. Обозначим через α уменьшение интенсивности при входе и через α' уменьшение при выходе.

Тогда после одного падения интенсивность отраженного луча в первоначальной среде будет βI , а интенсивность преломленного в пластинке луча будет αI .

Преломленный луч на более отдаленной поверхности пластинки порождает выходящий луч интенсивностью $\alpha\alpha'I$ и отраженный в пластинке луч интенсивностью $\alpha\beta I$.

Последний порождает в первоначальной среде луч интенсивностью $\alpha\alpha'\beta I$ и отраженный луч $\alpha\beta^2 I$ в пластинке. При следующем отражении мы имеем проходящий луч $\alpha\alpha'\beta^2 I$ и луч в пластинке $\alpha\beta^3 I$, который порождает луч $\alpha\alpha'\beta^3 I$ в первой среде. Закон последовательных интенсивностей различных световых потоков теперь ясен.

Если мы предположим теперь, что эти чередующиеся световые потоки не интерферируют, а как известно в *толстых* пластинках интерференции не наблюдается, то эти интенсивности могут просто складываться.

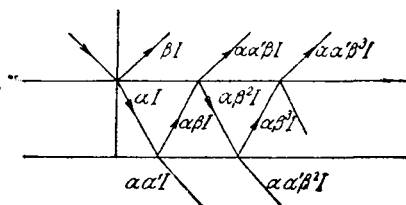
Мы имеем, таким образом, для полной интенсивности отраженного света

$$\beta I + \alpha\alpha' I \beta (1 + \beta^2 + \beta^4 + \beta^6 + \dots) = I \beta \left[1 + \frac{\alpha\alpha'}{1 - \beta^2} \right],$$

и для полной интенсивности прошедшего света

$$\alpha\alpha' I (1 + \beta^2 + \dots) = \frac{I \alpha\alpha'}{1 - \beta^2}.$$

Теперь, если мы отбросим поглощение и вспомним, что в случае пластинки и скорость волны и поперечное сечение цилиндрического пучка лучей неизменны, а также, что поток энергии за единицу времени = интенсивности \times скорость волны \times поперечное сечение пучка лучей, то на основании закона сохранения



Фиг. 1.27.

энергии можно утверждать, что сумма интенсивностей прошедшего и отраженного света должна быть равна интенсивности падающего света, или

$$1 = \beta + \frac{\alpha\alpha'\beta}{1-\beta^2} + \frac{\alpha\alpha'}{1-\beta^2},$$

откуда

$$\alpha\alpha' = (1-\beta)^2,$$

результат, который, как легко проверить, правилен для значений α , α' , β , выведенных из (1.236) — (1.239). Пользуясь этим, мы получаем для полной интенсивности света, отраженного от пластинки,

$$\frac{2\beta}{1+\beta} I.$$

Теперь в случае поляризации света в плоскости падения из (1.237), если $r=90^\circ-j$, имеем:

$$\beta = \cos^2 2j = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^2,$$

где n — показатель преломления.

Количество отраженного пластинкой света будет поэтому $\frac{(n^2-1)^2}{n^2+1}$, тогда как для случая отражения от одной поверхности оно будет $\frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}$.

При $n=1,5$ пластинка отражает 25/97 света, поляризованного в плоскости падения, тогда как одна поверхность отражает 25/169. Согласно этому пластинка отражает в 169/97 раз больше такого света, чем одна поверхность.

Рассмотрим еще свет, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения. Если бы закон Брюстера был вполне точен, то β должно быть нулем, и свет этого вида не должен отражаться вовсе.

Если мы предположим, что β не нуль, а очень малая величина, то количество такого отраженного света будет для пластинки 2β , а для одной поверхности β . Отсюда, пластинка отражает почти вдвое больше света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, чем одна поверхность.

И так как 169/97 меньше 2, то следовательно пластинка будет в действительности еще худшим поляризатором отражения, чем одна поверхность.

§ 1.28. Действие нескольких пластинок.

Рассмотрим теперь стопу подобных пластинок и не будем на этот раз пренебрегать поглощением.

Пусть количество света, проходящего сквозь n пластинок, будет p_n , а количество отраженного света q_n . Рассмотрим теперь действие от прибавления $(n+1)$ -ой пластинки. Выходящий поток $p_n I$, падающий на новую пластинку, вызывает входящий в нее поток $p_n p_1 I$ и возвращающийся $p_n q_1 I$. Последний вызовет поток

$$(\dot{p}_n q_1 I) \times p_n,$$

возвращающийся назад и слагающийся с отраженным лучом, и

$$(p_n q_1 I) \times q_n,$$

который опять упадет на $(n+1)$ -ую пластинку.

Следовательно, мы должны прибавить $p_n p_1 I$ к проходящему свету, $p_n^2 q_1 I$ к отраженному свету, и тогда будем иметь остаточный поток, выходящий из n пластинок, составляющий $q_1 q_n$ -ую часть того, который мы имели раньше.

Отсюда непосредственно вытекает, что в общем к отраженному свету прибавится поток

$$p_n^2 q_1 I \{1 + q_1 q_n + (q_1 q_n)^2 + \dots\} = \frac{p_n^2 q_1}{1 - q_1 q_n} I,$$

так что полный поток отраженного света будет

$$q_{n+1} I = \left(q_n + \frac{p_n^2 q_1}{1 - q_1 q_n} \right) I,$$

а полный поток проходящего света:

$$p_{n+1} I = p_n p_1 I \{1 + q_1 q_n + (q_1 q_n)^2 + \dots\} = \frac{p_n p_1}{1 - q_1 q_n} \cdot I.$$

Отсюда получаются разностные уравнения

$$q_{n+1} = q_n + \frac{p_n^2 q_1}{1 - q_1 q_n}, \tag{1.2811}$$

$$p_{n+1} = \frac{p_n p_1}{1 - q_1 q_n}. \tag{1.2812}$$

Заметим, что эти уравнения одинаково справедливы даже при $n = 0$, при условии, что мы принимаем q_0 за нуль, а p_0 за единицу, что физически вполне естественно. Стокс („On the intensity of the light reflected from or transmitted through a pile of plates“, Collected Papers, v. IV, p. 145) дал решение этих уравнений несколько косвенным способом. Это решение может быть получено, однако, непосредственно посредством следующего простого способа.

Переписываем уравнение (1.2811), заменяя n на $n + 1$,

$$q_{n+2} - q_{n+1} = \frac{p_{n+1}^2 q_1}{1 - q_1 q_{n+1}} \tag{1.282}$$

Исключая p_n, p_{n+1} из равенств (1.2811), (1.2812) и (1.282), мы получаем разностное уравнение второго порядка для q_n

$$q_{n+2} - q_{n+1} - \frac{p_1^2 (q_{n+1} - q_n)}{(1 - q_1 q_n)(1 - q_1 q_{n+1})} = 0,$$

которое может быть приведено к разностной форме

$$q_{n+2} - \frac{p_1^2/q_1}{1 - q_1 q_{n+1}} = q_{n+1} - \frac{p_1^2/q_1}{1 - q_1 q_n} = \text{const.}$$

Величина этой константы легко получается равной $q_1 - p_1^2/q_1$, если принять $n = 0$.

Мы имеем таким образом разностное уравнение первого порядка для q_n , а именно,

$$q_{n+1} - \frac{p_1^2/q_1}{1 - q_1 q_n} = q_1 - \frac{p_1^2}{q_1},$$

или

$$1 - q_1 q_{n+1} + \frac{p_1^2}{1 - q_1 q_n} = 1 + p_1^2 - q_1^2.$$

Обозначим теперь $1 - q_1 q_n = p_1 u_{n+1}/u_n$, и мы имеем для величин u линейное разностное уравнение

$$u_{n+2} + u_n = \frac{1 + p_1^2 - q_1^2}{p_1} u_{n+1} \dots \tag{1.283}$$

Решение такого разностного уравнения имеет следующий хорошо известный вид (см. *Boole*, „Finite Differences“)

$$u_n = A\rho_1^n + B\rho_2^n,$$

где ρ_1 и ρ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\rho^2 + 1 = \frac{1 + p_1^2 - q_1^2}{p_1} \cdot \rho. \quad (1.2831)$$

Теперь вследствие поглощения мы имеем

$$p_1 + q_1 < 1, \quad (1.2832)$$

откуда

$$q_1^2 < (1 - p_1)^2 \quad \text{или} \quad \frac{1 + p_1^2 - q_1^2}{p_1} > 2.$$

Это указывает на то, что корни уравнения (1.2831) всегда вещественны. Форма уравнения (1.2831) показывает, что их произведение равно единице, так что мы можем написать $\rho_1 = e^\lambda$, $\rho_2 = e^{-\lambda}$, где λ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{ch} \lambda = (1 + p_1^2 - q_1^2)/2p_1. \quad (1.2833)$$

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{Ae^{(n+1)\lambda} + Be^{-(n+1)\lambda}}{Ae^{n\lambda} + Be^{-n\lambda}}.$$

Полагая в нем $n = 0$, мы получаем, так как

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{1 - q_1 q_0}{p_1} = \frac{1}{p_1}, \\ \frac{1}{p_1} &= \frac{Ae^\lambda + Be^{-\lambda}}{A + B}. \end{aligned} \quad (1.2834)$$

Если мы исключим теперь λ из (1.2833) и (1.2834), мы найдем

$$q_1^2 (A - B)^2 + AB \{1 - p_1^2 + q_1^2\}^2 = 0, \quad (1.2835)$$

которое может быть удовлетворено только в том случае, если A и B имеют противоположные знаки, так как в противном случае каждый член левой стороны (1.2835) будет положительным.

Полагая затем $B = -Ae^{-2\mu}$ (1.2834), получаем

$$p_1 = \frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{sh} (\lambda + \mu)}. \quad (1.2836)$$

и μ должно быть очевидно положительным, так как p_1 численно меньше единицы и положительно.

Также (1.2835) дает

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{1 + q_1^2 - p_1^2}{2q_1}, \quad (1.2841)$$

так что

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \mu &= \frac{\sqrt{(1 + p_1 + q_1)(1 - p_1 + q_1)(1 + p_1 - q_1)(1 - p_1 - q_1)}}{2q_1} = \\ &= \frac{p_1}{q_1} \operatorname{sh} \lambda, \end{aligned}$$

откуда

$$q_1 = \frac{\text{sh } \lambda}{\text{sh}(\lambda + \mu)}. \quad (1.2842)$$

Таким образом,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\text{sh}(n+1\lambda + \mu)}{\text{sh}(n\lambda + \mu)}. \quad (1.2843)$$

Если мы найдем теперь q_n из уравнения

$$1 - q_1 q_n = p_1 \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right),$$

пользуясь (1.2836) и (1.2842) для выражения p_1 и q_1 через λ и μ , мы получим

$$q_n = \frac{\text{sh } n\lambda}{\text{sh}(n\lambda + \mu)}. \quad (1.285)$$

Возвращаясь к уравнению (1.2812), мы получаем

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

откуда

$$p_n = \frac{\text{const}}{u_n} = \frac{C}{\text{sh}(n\lambda + \mu)},$$

где C является независимой от n постоянной.

Полагаем $n = 0$, $p_0 = 1$, следовательно

$$C = \text{sh } \mu$$

и

$$p_n = \frac{\text{sh } \mu}{\text{sh}(n\lambda + \mu)}, \quad (1.286)$$

что завершает решение задачи.

Случай, где не будет никакого поглощения, выводится просто. В этом случае мы имеем $p_1 + q_1 = 1$, а (1.2833) и (1.2841) ведут к $\text{sh } \lambda = \text{sh } \mu = 1$, так что λ, μ , оба приближаются к нулю и гиперболические синусы могут быть заменены своими аргументами. Мы будем иметь тогда

$$q_n = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu}, \quad p_n = \frac{\mu}{n\lambda + \mu}, \quad (1.287)$$

где λ, μ получаются из

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = q_1, \quad \frac{\mu}{\lambda + \mu} = p_1.$$

Для того чтобы представить более ясно действие увеличения числа пластинок в стопе на отраженный свет, были вычислены интенсивности q_n' , q_n'' отраженного луча для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, и в плоскости падения соответственно для двух случаев. В первом случае поглощение на каждую пластинку предполагалось в $1/9$, т. е. все количество поглощенного света составляет $1/9$ от всего света, поглощенного и прошедшего. Во втором случае предполагалось полное отсутствие поглощения, и пластинки считались совершенно прозрачными.

В обоих случаях интенсивность каждой составляющей падающего света берется за единицу.

Для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, мы принимаем

$$q_1 = q_1' = 0,01 \text{ в обоих случаях.}$$

Это представляет отклонение от полного погасания, которое может происходить либо вследствие небольшого отклонения от закона Брюстера, либо благодаря тому, что угол падения не равен точно углу поляризации.

Для света, поляризованного в плоскости падения, мы принимаем

$$q_1 = q_1'' = 0,25 \text{ в обоих случаях.}$$

Несомненно, в обоих случаях это требует соответствующего подбора оптических постоянных стекла, однако для целей сравнения удобно считать действие всех пластинок одинаковым.

Отношение $r_n = \frac{q_n'}{q_n''}$ представляет то, что определяется Стоксом как „степень поляризации“ света. При полной поляризации $r_n = 0$. Для неполяризованного света $r_n = 1$.

Интенсивности и степени поляризации света, отраженного от стеклянной стопы.

n	Поглощение = 1/9			Поглощение = 0		
	q_n'	q_n''	r_n	q_n'	q_n''	r_n
1	0,0100	0,2500	0,0400	0,0100	0,2500	0,0400
2	0,0178	0,3697	0,0480	0,0198	0,4000	0,0495
3	0,0238	0,4329	0,0549	0,0294	0,5000	0,0588
4	0,0284	0,4679	0,0608	0,0388	0,5714	0,0680
5	0,0320	0,4879	0,0657	0,0481	0,6250	0,0769
6	0,0348	0,4995	0,0697	0,0571	0,6667	0,0857
7	0,0370	0,5062	0,0731	0,0660	0,7000	0,0943
8	0,0387	0,5102	0,0758	0,0748	0,7273	0,1028
9	0,0400	0,5125	0,0780	0,0833	0,7500	0,1111
10	0,0410	0,5139	0,0798	0,0917	0,7692	0,1193
∞	0,0444	0,5159	0,0862	1,0000	1,0000	1,0000

Из вышеприведенной таблицы видно, что отклонение от полной поляризации увеличивается последовательно с увеличением числа пластинок. В случае совершенно прозрачных пластинок наблюдается полная деполяризация. В случае поглощающих пластинок существует предел, который однако в два раза больше, чем степень поляризации в одной пластинке.

Таким образом никакого преимущества, не считая выигрыша в общем освещении, при применении стеклянной стопы за поляризатор отражения, не будет. Кажется поэтому, что лучше будет в каждом случае применять одну пластинку и получать добавочное освещение, если необходимо, пользуясь источником большой интенсивности.

§ 1.29. Стеклянная стопка как поляризатор в проходящем свете.

Мы получим иные результаты, если рассмотрим проходящий свет. В этом случае уравнения (1.287) дают (предполагая полную прозрачность)

$$\lambda : \mu = q_1 : p_1,$$

$$p_n = \frac{p_1}{p_1 + nq_1}.$$

Беря свет, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения, и предполагая, что закон Брюстера применяется полностью, имеем $p_1' = 1$, $q_1' = 0$ и $p_n' = 1$.

С другой стороны, беря свет, поляризованный в плоскости падения, и принимая, как и раньше, $p_1'' = 0,75$, $q_1'' = 0,25$, мы получаем

$$p_n'' = \frac{3}{3+n},$$

так что с увеличением n , $\frac{p_n''}{p_n'}$ приближается к нулю, и выходящий свет поляризуется перпендикулярно к плоскости падения.

Однако, если поляризация не полная, т. е. q_1' не является точно нулем,

$$p_n' = \frac{1 - q_1'}{1 + n - 1q_1'}, \quad p_n'' = \frac{1 - q_1''}{1 + n - 1q_1''},$$

и

$$\frac{p_n''}{p_n'} = \frac{1 - q_1''}{1 - q_1'} \cdot \frac{1 + n - 1q_1'}{1 + n - 1q_1''}.$$

Когда n слишком большое, выражение это стремится к пределу

$$\frac{1 - q_1''}{1 - q_1'} \cdot \frac{q_1'}{q_1''}.$$

Так как q_1'' всегда значительно превышает q_1' , то отсюда вытекает, что

$$\frac{1 - q_1''}{1 - q_1'}$$

является дробью, меньшей, чем единица (приблизительно $\frac{3}{4}$), и следовательно

$\frac{p_\infty''}{p_\infty'} < \frac{q_1'}{q_1''}$, т. е. бесконечный ряд пластинок является лучшим поляризатором для проходящего света, чем одна пластинка — поляризатором для отраженного света. Стокс в труде, разбирающем этот вопрос,¹ привел таблицу, дающую интенсивности проходящего света для пластинок с показателем преломления 1,52 для четырех случаев:

I. Полная прозрачность. Падение под углом поляризации.

II. Полная прозрачность. Падение под углом поляризации $\perp 2^\circ$.

III. Поглощение одной пластинки при нормальном падении = 20% . Падение под углом поляризации. Это соответствует $q_1' = 0$, $p_1' = 0,976$, $\mu = \infty$, $\lambda = \lg_e \left(\frac{1}{p_1} \right)$, $p_n' = p_1'^n$.

IV. Поглощение одной пластинки при нормальном падении = 10% . Падение под углом поляризации. Это соответствует $q_1' = 0$, $p_1' = 0,881$; λ , μ и p_n' выражаются теми же формулами, что и в случае III.

Из этой таблицы (стр. 56) вытекают два очень важных заключения. Первое, как легко видно из сравнения колонок, соответствующих случаям I и II, заключается в том, что и наилучшая поляризация при прохождении света (исключая бесконечный ряд пластинок) не соответствует падению под правильным углом поляризации, причем степень поляризации всякий раз лучшая для случая II, чем для случая I. Это происходит благодаря тому обстоятельству, что хотя при этом теряется некоторая

¹ On the Intensity of the Light reflected from or transmitted through a Pile of Plates. Roy. Soc. Proc. 1862. См. также Stokes, Mathematical and Physical Papers, 4, 145—156.

Интенсивности и степень поляризации света, проходящего через стеклянную стопу.

n	Случай I			Случай II			Случай III			Случай IV		
	p_n'	p_n''	$\frac{p_n''}{p_n'}$	p_n'	p_n''	$\frac{p_n''}{p_n'}$	p_n'	p_n''	$\frac{p_n''}{p_n'}$	p_n'	p_n''	$\frac{p_n''}{p_n'}$
1	1,000	0,729	0,729	0,999	0,700	0,701	0,976	0,711	0,728	0,881	0,639	0,725
2	1,000	0,574	0,574	0,998	0,541	0,542	0,953	0,544	0,571	0,777	0,435	0,559
4	1,000	0,402	0,402	0,996	0,372	0,373	0,908	0,355	0,391	0,604	0,215	0,357
8	1,000	0,251	0,251	0,992	0,229	0,231	0,824	0,182	0,221	0,365	0,057	0,156
16	1,000	0,144	0,144	0,984	0,130	0,132	0,679	0,058	0,086	0,133	0,004	0,030
32	1,000	0,078	0,078	0,968	0,069	0,071	0,461	0,007	0,014	0,018	0,000	0,001
∞	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

доля света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, однако проходит меньшая часть света, поляризованного в плоскости падения.

Сток подробно исследовал это явление и вывел формулу, дающую наилучший угол падения для данного числа пластинок. Однако на практике проще получить этот наилучший угол в каждом случае пробами.

Второе обстоятельство заключается в том, что при употреблении ограниченного количества пластинок, полная прозрачность не всегда благоприятна. Так, для 32 пластинок в случае III, несмотря на то, что интенсивность света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, уменьшается почти на половину, этот свет все же поляризуется значительно лучше, чем при полной прозрачности. В случае IV поляризация еще лучше, однако это достигается за счет чрезмерного уменьшения интенсивности.

На практике возникает другая трудность, которой мы не касались в вышеизложенном разборе и сущность которой заключается в том, что с увеличением количества пластинок количество света, *рассеиваемого* вследствие несовершенной полировки, пыли и т. д., значительно увеличивается, благодаря чему вышеприведенные формулы делаются неприменимыми.

Тщательностью работы можно свести эти влияния до минимума, однако дополнительная полировка и особые предосторожности в удалении частичек пыли могут значительно увеличивать стоимость прибора; но даже и при таких условиях невозможно никогда устранить полностью рассеивание света.

Из сказанного очевидно, что проектирование поляризаторов проходящего света описанного типа требует большого внимания. Тем не менее, все это окупается весьма значительным полем зрения у таких поляризаторов: для исследования моделей технических конструкций в целом они неоценимы, и в действительности никакой другой вид поляризатора не может сравниться с ними в этом отношении. К тому же, они могут быть построены при сравнительно малых затратах.¹

§ 1. 30. Призма Николя.

Один из наилучших приборов для получения поляризованного света известен под названием призмы Николя, названной именем изобретателя. Своим действием она обязана заключенному в нее веществу — канадскому бальзаму, показатель преломления которого лежит между обыкновенным и необыкновенным показателями преломления исландского шпата.

¹ Для получения более подробных сведений, читатель может воспользоваться статьей E. G. Coker and S. P. Thompson „The Design and Construction of Large Polariscopes“ (Proceedings of the Optical Convention, т. II, 1912).

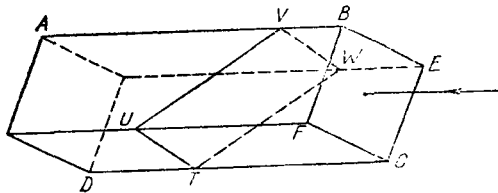
Для устройства николевой призмы берется ромбоэдр или призма $ABCD$ из исландского шпата (фиг. 1.301). В призме плоскость, проходящая через ребро AB и нормаль к поверхности $BECF$, содержит оптическую ось кристалла.

Таким образом, если мы возьмем падающий луч, параллельный AB , то плоскость падения будет заключать оптическую ось.

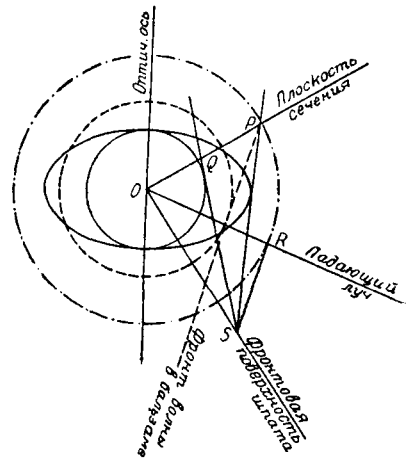
Призма разрезается затем по плоскости $TUVW$ и поверхности среза склеиваются канадским бальзамом: в результате между двумя частями ромба образуется тонкий плоский слой этого вещества.

Пусть фиг. 1.302 представляет сечения плоскостью падения волновых поверхностей в шпате (показаны сплошными кривыми), в воздухе (показано прерывистой линией с точками) и в бальзаме (показано прерывистой линией). Благодаря указанному свойству бальзама сфера, соответствующая его волновой поверхности, является наружной по отношению к сферической поле волновой поверхности шпата и перерезает сфероидальную полу.

Если RO является направлением падающего луча, встречающего волновую поверхность в воздухе в R , то RS будет падающим фронтом волны. Касательные SQ , SP к кругу и эллипсу, принадлежащим к волновой поверхности исландского шпата, дают на



Фиг. 1.301.



Фиг. 1.302.

плоскости чертежа следы обыкновенного и необыкновенного фронтов волны, причем OS является следом фронтальной поверхности шпата.

Пусть затем плоскость сечения николевой призмы окажется расположенной таким образом (скажем, как плоскость OQP на рисунке, перпендикулярная к плоскости чертежа), что ее пересечение с фронтом обыкновенной волны пересекает волновую поверхность для бальзама; это будет иметь место, когда точка Q , как на рисунке, лежит внутри окружности, показанной прерывистой линией; но пусть пересечение с фронтом необыкновенной волны не пересекает волновой поверхности волны бальзама (т. е. P лежит за пределами окружности, показанной прерывистой линией); тогда будет невозможно провести касательную плоскость к волновой поверхности бальзама такую, чтобы она содержала линию, проходящую через Q , но в то же время возможно провести касательную плоскость к волновой поверхности бальзама, заключающую линию, проходящую через P .

В соответствии с этим, обыкновенный луч отражается полностью и направляется в сторону, и только один необыкновенный луч проходит сквозь призму.

Из сказанного в конце § 1.13 ясно, что необыкновенный луч поляризуется перпендикулярно к плоскости падения, т. е. по линии, которая лежит во фронтальной поверхности (в поверхности, на которую падает свет) шпата и является перпендикулярной к длинному ребру AB .

Эта линия дает направление поляризации и называется *осью* поляризации николя.

Из фигуры можно заметить, что при таком построении обыкновенный луч будет претерпевать полное отражение также и в том случае, если падающий луч несколько наклонить; это будет происходить до тех пор, пока наклон не прев-

зойдет определенного предела, который может быть легко найден следующим образом.

Плоскость сечения николя встречает очевидно волновую поверхность балъзама по окружности. Следовательно, фронт обыкновенной волны должен пересекать эту окружность. Предельное положение для фронта обыкновенной волны является таким образом касательной плоскостью к конусу, проходящему через вышеуказанную окружность и касающемуся сферической полы волновой поверхности шпата. Этот конус, являющийся прямым круговым конусом, встречает плоскость, параллельную фронтальной поверхности шпата по эллипсу. Общие касательные плоскости к этому эллипсу и к волновой поверхности в воздухе дают предельные фронты волны для падающего луча, и лучи от O к точкам их соприкосновения с волновой поверхностью в воздухе лежат на конусе, внутри которого находятся возможные направления падающего луча и который определяет поле зрения николя.

В большинстве никелевых призм, если их держать наклонно к свету, можно перейти край поля зрения, и когда это случается, свет не поляризуется. Такого наклона необходимо следовательно избегать.

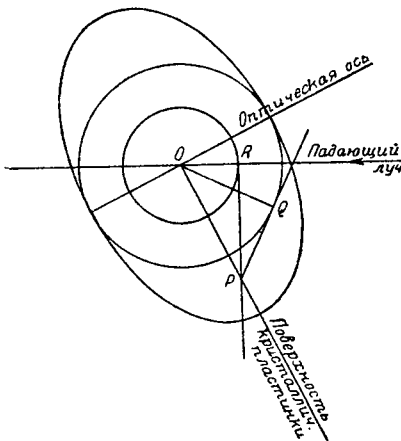
Далее, наклон падающего луча будет вызывать обязательно легкий наклон направления поляризации. Таким образом „плоскость поляризации“ никелевой призмы является, строго говоря, только средней величиной, однако отклонения от нее весьма незначительны и никелева призма является почти совершенным поляризатором. Самым большим ее недостатком является ее ограниченное поле зрения.

§ 1.31. Стекла́нная призма с прокладкой из исландского шпата.

За последние годы запасы исландского шпата весьма истощились и вследствие этого новых никелевых призм, или, как их обычно называют, — „никелей“, особенно желательных размеров, получить почти невозможно. Однако оказалось возможным, так сказать, обратить принцип никелевой призмы и ввести в стеклянную призму тонкий слой исландского шпата, срезанного так, чтобы проходящий только один луч, а другая составляющая падающего света отражалась полностью.

Наилучшим стеклом для этой цели будет тяжелое стекло с большим показателем преломления так, чтобы радиус волновой поверхности был, если возможно, меньше радиуса сферической полы волновой поверхности исландского шпата.

Фиг. 1.31 показывает построение для преломления в этом случае. RP является фронтом падающей волны; часто бывает удобно вырезать кристаллическую пластинку, как показано, почти перпендикулярно к оптической оси. Угол, под которым пластинка должна вводиться в стекло,



Фиг. 1.31.

получается затем согласно условию, по которому фронт падающей волны RP должен встречать поверхность кристалла по линии, пересекающей сферическую полу, но не пересекать сферической полы волновой поверхности исландского шпата, т. е. P на фиг. 1.31 должно находиться вне окружности, но внутри эллипса.

Задача может быть решена даже тогда, когда показатель преломления стекла меньше обыкновенного показателя преломления шпата; но если он меньше необыкновенного показателя преломления, то такое стекло непригодно для этой цели.

Нижеследующая таблица дает обыкновенные и необыкновенные показатели преломления исландского шпата для различных цветов:

Длина волны в онгстремах	n (обыкновенный)	n (необыкновенный)
6884	1,653	1,439
5893	1,658	1,486
5270	1,664	1,489
4862	1,668	1,491
3950	1,683	1,498

Отсюда вытекает, что для обеспечения поляризации света всех цветов при помощи таких приборов, необходимо брать стекло с показателем преломления, превышающим 1,5, и желательно пользоваться самыми тяжелыми прозрачными флинтгласами, показатели преломления которых заключаются между 1,6 и 1,7.

„Ось“ поляризации такой шпато-стеклянной призмы будет очевидно находиться в плоскости, проходящей через оптическую ось и падающий луч. Однако, при наклоне падающего света произойдет и наклон направления поляризации.

§ 1.32. Плоский полярископ.

Если мы расположим два поляризующих приспособления, как, например, две николевых призмы, конец к концу, то, если их оси поляризации параллельны, свет, прошедший через одну, пройдет через другую, за исключением доли, потерянной вследствие отражения и поглощения.

Однако, если оси двух николевых призм наклонены под некоторым углом θ , то если интенсивность света, выходящего из первой призмы, будет I , а соответствующая амплитуда любого основного вектора (скажем, магнитного) будет A , то этот свет, поляризованный в азимуте первой николевой призмы, может быть представлен колебанием магнитного вектора

$$A_z^* \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - vt),$$

где z является направлением распространения света, колебания которого происходят в направлении оси поляризации первой николевой призмы.

Это колебание может быть разложено (магнитный вектор преобразовывается как всякий вектор) на колебания:

$$A \cos \theta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - vt),$$

параллельное оси второй николевой призмы, и

$$- A \sin \theta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - vt),$$

перпендикулярное к этой оси.

Соответствующие интенсивности будут очевидно

$$I \cos^2 \theta, \quad I \sin^2 \theta.$$

Однако вторая волна, согласно свойству николевой призмы, задерживается ею.

Отсюда интенсивность волны, проходящей через вторую николеву призму, будет

$$I \cos^2 \theta,$$

или, более точно, $pI \cos^2 \theta$, где p является уменьшающим множителем благодаря потере света вследствие отражения и поглощения.

В дальнейшем, при рассмотрении относительных интенсивностей света, прошедшего одинаковые пути, подобный множитель p , являющийся общим для раз-

личных рассматриваемых интенсивностей, не будет влиять на результаты, и в виду этого мы будем его отбрасывать.

Когда $\theta = 90^\circ$, интенсивность прошедшего света равна нулю, так как свет, прошедший через одну призму, задерживается другой.

В этом случае николевы призмы называют *скрещенными*.

Прибор вышеуказанного рода, через который луч света, поляризованный в одном азимуте, может проходить, но задерживается вторым поляризующим приспособлением, которое поляризует в азимуте, перпендикулярном к первому, называется *полярископом*. Для того чтобы отличать его от других полярископов, которые будут описаны ниже, мы назовем его *плоским* полярископом.

Первое поляризующее приспособление называется *поляризатором*, второе *анализатором*.

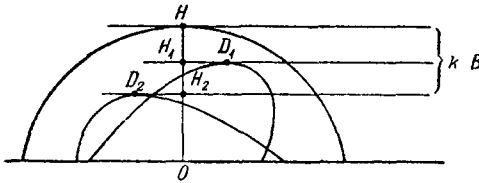
В общем как поляризатор, так и анализатор могут вращаться вокруг направления распространения света и снабжены градуированными кругами, которые показывают их азимуты.

При нормальной установке эти азимуты должны всегда отличаться на 90° .

§ 1.33. Прохождение через кристаллическую пластинку. Нормальное падение.

Рассмотрим плоско-поляризованную волну света, падающего нормально на поверхность кристалла (фиг. 1.33).

В построении § 1.19 точка B находится в бесконечности, и два преломленных фронта волны параллельны плоскости раздела; OH_1 и OH_2 , представляющие скорости волн v_1 и v_2 , соответствуют нормали к волне, перпендикулярной к плоскости раздела. Эти две волны поляризованы следовательно во взаимно перпендикулярных плоскостях. Их плоскости поляризации будут перерезать каждую из поверхностей пластинки по двум перпендикулярным линиям, которые называются *осями поляризации*, и часто более коротко — *осями* кристалла.



Фиг. 1.33.

Пусть теперь C будет амплитудой падающей волны и пусть ее плоскость поляризации образует угол φ с одной из осей поляризации. Мы получим тогда, разлагая световой вектор на два составляющих вектора по двум осям поляризации, две падающих волны с амплитудами $C \cos \varphi$, $C \sin \varphi$ и с одной и той же фазой вдоль этих осей поляризации.

Очевидно (в § 1.34 будет выведено полнее), что каждая из них производит в кристалле волну, поляризованную в том же азимуте, и волны начинаются в той же фазе.

Однако благодаря существованию отраженной волны интенсивность прошедшей волны не равняется интенсивности отраженной волны. Пусть множители уменьшения амплитуды будут λ_1 , λ_2 . Обычно, они не равны по той причине, что в кристалле, даже при нормальном падении, интенсивности проходящих волн, поляризованных в двух азимутах, — различны.

Мы имеем, таким образом, две волны типа

$$\lambda_1 C \cos \varphi \cdot \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_1} + \varepsilon \right),$$

$$\lambda_2 C \sin \varphi \cdot \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_2} + \varepsilon \right),$$

где z измеряется в пластинке по направлению нормали.

Если пластинка имеет толщину d , эти две волны приходят ко второй поверхности с разностью фаз

$$2\pi\rho d \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right).$$

Они испытывают дальнейшее уменьшение в интенсивности, выражаемое соответствующими множителями λ_1' , λ_2' , и выходят в виде

$$\lambda_1 \lambda_1' C \cos \varphi \cdot \sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_1} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right), \quad (1.331)$$

$$\lambda_2 \lambda_2' C \sin \varphi \cdot \sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_2} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right), \quad (1.332)$$

где v_0 является скоростью волны в окружающей среде.

Они имеют теперь постоянную разность фазы

$$2\pi\rho d \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = 2\pi\rho,$$

где через ρ обозначаем $\rho d \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)$, так что в общем они будут объединяться в форму, известную под названием эллиптически поляризованного луча.

Количество $d \left(\frac{v_0}{v_1} - \frac{v_0}{v_2} \right)$ или $d(n_1 - n_2)$, где n_1 и n_2 являются показателями преломления для двух волн, называется *относительным отставанием* (или относительной оптической разностью хода). Количества $d(n_1 - 1)$, $d(n_2 - 1)$ называются *абсолютным отставанием* (или абсолютной оптической разностью хода) двух волн после прохождения через пластинку.

Существуют два важных случая, когда выходящий луч *плоско-поляризован*.

Первый случай имеет место, когда разность фаз является кратной 2π , т. е. относительное отставание в (1.331) и (1.332) является кратным длине волны. В этом случае

$$\sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_1} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right) = \sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_2} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right),$$

и равнодействующий световой вектор образует с осью поляризации $\varphi = 0$ угол φ' , определяемый из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\lambda_2 \lambda_2'}{\lambda_1 \lambda_1'} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.3321)$$

Выходящая волна будет таким образом плоско-поляризованной, однако, если множители уменьшения интенсивности не будут удовлетворять условию

$$\lambda_2 \lambda_2' = \lambda_1 \lambda_1',$$

плоскость поляризации при выходе будет слегка отклонена от своего положения при падении.

Второй случай имеет место тогда, когда относительное отставание двух составляющих является нечетным кратным половины длины волны или разность фаз является нечетным кратным π . В этом случае мы имеем:

$$\sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_1} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right) = -\sin 2\pi\rho \left(t - \frac{d}{v_2} + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} \right),$$

и равнодействующий световой вектор образует с осью поляризации $\varphi = 0$ угол φ' , определяемый из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{\lambda_2 \lambda_2'}{\lambda_1 \lambda_1'} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.3322)$$

Если $\lambda_2\lambda_2' = \lambda_1\lambda_1'$, что, как мы увидим, достаточно хорошо удовлетворяется на практике, тогда $\varphi' = -\varphi$, и плоскость поляризации при выходе будет отклонена по часовой стрелке на угол 2φ . Пластинка, имеющая такую толщину, которая дает относительное отставание в половину длины волны, называется пластинкой в *пол-волны*. Следовательно пластинка в пол-волны отклоняет направление поляризации на угол 2φ , т. е. на 90° , если падающий луч поляризован под углом 45° к оси поляризации; этим часто пользуются при опытах.

Возвращаемся теперь к общему случаю, когда выходящий свет поляризован эллиптически; если при этом свет будет проходить через николеву призму или другой анализатор, ось которого образует угол ψ с осью поляризации $\varphi = 0$ пластинки, то через него пройдет только та часть светового вектора, которая складается из составляющих (1.331) и (1.332) по оси анализатора.

Она будет равна

$$\begin{aligned} & \lambda_1\lambda_1' C \cos \varphi \cos \psi \sin 2\pi p \left(t + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} - \frac{d}{v_1} \right) + \\ & + \lambda_2\lambda_2' C \sin \varphi \sin \psi \sin 2\pi p \left(t + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} - \frac{d}{v_2} \right), \end{aligned}$$

что может быть записано в следующем виде:

$$Q \sin 2\pi p \left(t + \varepsilon - \frac{z-d}{v_0} - \chi \right),$$

где

$$Q \cos 2\pi p \chi = \lambda_1\lambda_1' C \cos \varphi \cos \psi \cos \frac{2\pi p d}{v_1} + \lambda_2\lambda_2' C \sin \varphi \sin \psi \cos \frac{2\pi p d}{v_2},$$

$$Q \sin 2\pi p \chi = \lambda_1\lambda_1' C \cos \varphi \cos \psi \sin \frac{2\pi p d}{v_1} + \lambda_2\lambda_2' C \sin \varphi \sin \psi \sin \frac{2\pi p d}{v_2},$$

откуда, возводя в квадрат и складывая, получаем

$$\begin{aligned} Q^2 = & (\lambda_1\lambda_1' C \cos \varphi \cos \psi)^2 + (\lambda_2\lambda_2' C \sin \varphi \sin \psi)^2 + \\ & + 2(\lambda_1\lambda_1' C \cos \varphi \cos \psi)(\lambda_2\lambda_2' C \sin \varphi \sin \psi) \cos 2\pi p. \end{aligned} \quad (1.333)$$

Если I — интенсивность вышедшего из анализатора света и I_0 — интенсивность падающего света, то, если поляризатор и анализатор скрещены, $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} = \frac{Q^2}{C^2} = & \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi [(\lambda_1\lambda_1')^2 + (\lambda_2\lambda_2')^2 - \\ & - 2(\lambda_1\lambda_1')(\lambda_2\lambda_2') \cos 2\pi p]. \end{aligned} \quad (1.334)$$

Таким образом, в общем, введение такой пластинки кристалла между поляризатором и анализатором будет, во всяком случае частично, восстанавливать свет.

Однако, если $\varphi = 0$ или $\frac{1}{2}\pi$, т. е. если направление поляризации падающего луча будет *параллельно* одной из осей поляризации кристаллической пластинки, то $I = 0$ и свет будет погашен.

Если φ не равно нулю или кратному прямого угла, квадратная скобка на правой стороне в (1.334) будет минимальной, когда $p =$ положительному целому числу.

Величина I выразится тогда через

$$\frac{1}{4} I_0 \sin^2 2\varphi [\lambda_1\lambda_1' - \lambda_2\lambda_2']^2.$$

Если $\lambda_1\lambda_1' = \lambda_2\lambda_2'$, мы имеем в этом случае полное погашение света.

§ 1.34. Вычисление множителей уменьшения интенсивности.

Теперь мы постараемся получить точно величины множителей $\lambda_1\lambda_1'$ и $\lambda_2\lambda_2'$ для нормального падения.

Прежде всего необходимо преобразовать электромагнитные уравнения (1.104), относя их не к главным осям кристалла, а к произвольным прямоугольным осям.

Обозначая через X, Y, Z координаты, соответствующие главным осям кристалла, и принимая $\mu = 1$, так чтобы единицы были электромагнитные, мы получаем уравнения

$$\frac{1}{a^2} \frac{dE_X}{dt} = \frac{\partial H_Z}{\partial Y} - \frac{\partial H_Y}{\partial Z} \tag{1.341}$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{dE_Y}{dt} = \frac{\partial H_X}{\partial Z} - \frac{\partial H_Z}{\partial X} \tag{1.342}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{dE_Z}{dt} = \frac{\partial H_Y}{\partial X} - \frac{\partial H_X}{\partial Y} \tag{1.343}$$

и также

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H} = - \text{curl } \mathbf{E}.$$

Легко показать, что последнее соотношение не зависит от выбранных осей. Оно должно вести следовательно к трем уравнениям:

$$\frac{dH_x}{dt} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \text{ и т. д.}, \tag{1.344}$$

Где x, y, z представляют координаты, относящиеся к любым трем прямоугольным осям.

Пусть $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ будут направляющими косинусами осей x, y, z по отношению к осям X, Y, Z .

Тогда составляющая электрического вектора, параллельная Ox , выразится

$$E_x = l_1 E_X + m_1 E_Y + n_1 E_Z; \tag{1.345}$$

так как curl преобразовывается как вектор, мы, обозначая для краткости $\text{curl } \mathbf{H}$ через ω , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_Z}{\partial Y} - \frac{\partial H_Y}{\partial Z} &= l_1 \omega_x + l_2 \omega_y + l_3 \omega_z, \\ \frac{\partial H_X}{\partial Z} - \frac{\partial H_Z}{\partial X} &= m_1 \omega_x + m_2 \omega_y + m_3 \omega_z, \\ \frac{\partial H_Y}{\partial X} - \frac{\partial H_X}{\partial Y} &= n_1 \omega_x + n_2 \omega_y + n_3 \omega_z. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1.341), (1.342) и (1.343), умножая на $a^2 l_1, b^2 m_1, c^2 n_1$, складывая и пользуясь уравнением (1.345), мы получаем

$$\frac{dE_x}{dt} = \alpha_{11} \omega_x + \alpha_{12} \omega_y + \alpha_{13} \omega_z \tag{1.346}$$

и подобным же образом

$$\frac{dE_y}{dt} = \alpha_{21} \omega_x + \alpha_{22} \omega_y + \alpha_{23} \omega_z, \tag{1.347}$$

$$\frac{dE_z}{dt} = \alpha_{31} \omega_x + \alpha_{32} \omega_y + \alpha_{33} \omega_z, \tag{1.348}$$

где

$$\alpha_{pq} = a^2 l_p l_q + b^2 m_p m_q + c^2 n_p n_q, \quad (p, q = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим теперь плоскую волну в кристалле; нормаль волны идет по оси z , направление поляризации идет по оси x ; поверхности пластинки берутся параллельно $z = 0$, как и раньше.

Магнитный вектор такой волны выражается вещественной частью следующих выражений:

$$H_x = Ae^{2\pi i p \left(t - \frac{z}{v}\right)} = Ae^{i\varphi}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0.$$

Отсюда

$$\omega_x = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0; \quad \omega_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{2\pi i p}{v} Ae^{i\varphi};$$

$$\omega_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$E_x = -\frac{A\alpha_{12}}{v} e^{i\varphi}; \quad E_y = -\frac{A\alpha_{22}}{v} e^{i\varphi}; \quad E_z = -\frac{A\alpha_{32}}{v} e^{i\varphi}.$$

Эти величины должны однако удовлетворять уравнениям (1.344), а для этого необходимо:

$$2\pi i p A = \frac{2\pi i p A}{v^2} \cdot \alpha_{22} \quad \text{или} \quad \alpha_{22} = v^2,$$

$$0 = -\frac{2\pi i p A}{v^2} \cdot \alpha_{12} \quad \text{или} \quad \alpha_{12} = 0,$$

$$0 = 0.$$

Согласно этому мы имеем

$$E_x = 0; \quad E_y = -Av e^{i\varphi}.$$

Примем теперь для случая нормального падения на пограничную плоскость $z = 0$, следующее:

I) для падающей волны

$$H_x = Ae^{2\pi i p \left(t - \frac{z}{v_0}\right)}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0;$$

отсюда для электрического вектора из электромагнитных уравнений обычным образом получается

$$E_x = 0; \quad E_y = -Av_0 e^{i\varphi}, \quad E_z = 0;$$

II) для отраженной волны

$$H_x = A'e^{2\pi i p \left(t + \frac{z}{v_0}\right)}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0,$$

$$E_x = 0, \quad E_y = A'v_0 e^{i\varphi'}, \quad E_z = 0,$$

$$\left[\varphi' = 2\pi i p \left(t + \frac{z}{v_0} \right) \right];$$

III) для проходящей волны

$$H_x = A_1 e^{i\varphi_1}, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0,$$

$$\left[\varphi_1 = 2\pi i p \left(t - \frac{z}{v_1} \right) \right],$$

$$E_x = 0, \quad E_y = -A_1 v_1 e^{i\varphi_1}, \quad E_z = -\frac{A\alpha_{32}}{v_1} e^{i\varphi_1}.$$

Выражая условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного векторов на поверхности раздела, мы находим

$$A + A' = A_1,$$

$$-Av_0 + A'v_0 = -A_1v_1,$$

откуда

$$\frac{A_1}{A} = \lambda_1 = \frac{2v_0}{v_0 + v_1} = \frac{2n_1}{n_1 + 1},$$

где n_1 является показателем преломления для света, поляризованного в этом азимуте.

Рассмотрим теперь, что происходит с волной при выходе.

Мы имеем в кристалле падающую волну и одну отраженную волну, а именно волну, поляризованную в плоскости xz ; во внешней среде имеется одна прошедшая волна.

Несложное рассмотрение показывает, что уравнения, дающие E_y и H_x , имеют ту же форму, что и раньше, с той только разницей, что v_0 и v_1 переставлены. Мы имеем таким образом

$$\lambda_1' = \frac{2v_1}{v_1 + v_0} = \frac{2}{n_1 + 1}.$$

Соответственно

$$\lambda_1 \lambda_1' = \frac{4n_1}{(n_1 + 1)^2}$$

дает множитель уменьшения для этой волны.

Точно так же для волны, поляризованной в другом азимуте (параллельном Oy)

$$\lambda_2 \lambda_2' = \frac{4n_2}{(n_2 + 1)^2},$$

при этом n_2 не равно n_1 , так как имеются две различных преломленных волны.

Следовательно, для обычного кристалла

$$\lambda_1 \lambda_1' \neq \lambda_2 \lambda_2'$$

и для случая кристаллической пластинки невозможно получить полное затухание даже при разности фаз, кратной 2π , и скрещенных анализаторе и поляризаторе.

§ 1.35. Цвета кристаллических пластинок.

На практике однако n_1 никогда не отличается значительно от n_2 , и разность $n_2 - n_1$ всегда бывает малой по сравнению как с n_2 , так и n_1 даже для натуральных кристаллов.

Таким образом

$$\lambda_1 \lambda_1' - \lambda_2 \lambda_2' = \frac{4(n_1 n_2 - 1)(n_2 - n_1)}{(n_2 + 1)^2 (n_1 + 1)^2}$$

чрезвычайно малая величина. В случае исландского шпата процентная разность между множителями уменьшения равна приблизительно $10/0$.

В исследованиях по оптическому методу, как будет показано, мы всегда имеем дело с величиной двойного преломления, которая *крайне мала* по сравнению с полными показателями преломления. При этих условиях мы получаем практически полное затухание и можем написать без чувствительной ошибки

$$\lambda_1 \lambda_1' = \lambda_2 \lambda_2' = \frac{4n}{(n+1)^2},$$

так что

$$I = I_0 \sin^2 [2\varphi \cdot \frac{16n^2}{(n+1)^4} \cdot \sin^2 \pi\rho] \quad (1.351)$$

приблизительно в случае натурального кристалла и почти точно в случае двойного преломления, рассматриваемого в оптическом методе.

В то же время необходимо помнить, что эта формула не точна.

Мы можем отметить также, что когда ρ является кратным $\frac{1}{2}$, свет, входящий в анализатор, будет в каждом случае плоско поляризованным, как объяснено в § 1.33. Он может быть, следовательно, уничтожен таким поворотом анализатора, что

$$\psi = \varphi' + \pi/2,$$

где φ' имеет одно из значений, определяемых уравнениями (1.3321) или (1.3322).

Измерение угла ψ могло бы позволить нам, поэтому, определить экспериментально отношение $\frac{\lambda_1 \lambda_1'}{\lambda_2 \lambda_2'}$, однако, эта величина при этом способе слишком близка к единице для того, чтобы ее можно было измерить на практике.

Предполагая справедливость уравнения (1.351), мы, согласно § 1.33, имеем

$$\rho \left(\frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} \right) = \rho;$$

но

$$\frac{\rho}{v_0} = \frac{1}{\lambda},$$

где λ является длиной волны применяемого света в воздухе.

Следовательно,

$$d(n_1 - n_2) = \rho\lambda, \quad (1.352)$$

так что $\rho\lambda$ является относительным отставанием двух противоположно поляризованных лучей после прохождения их через пластинку.

До сих пор мы имели дело с однородным светом. Если теперь наша падающая волна будет волной *белого* света, свет *одного цвета* и *только одного* будет действительно уничтожаться при скрещенных поляризаторе и анализаторе, и именно тот, для которого

$$\frac{d(n_1 - n_2)}{\lambda}$$

будет целым числом.

Представим себе, что разность показателей преломления ($n_1 - n_2$) в кристаллической пластинке постепенно увеличивается, причем все остальное остается без изменения, так что ρ является единственной переменной величиной в уравнении (1.351).

Когда разность $n_1 - n_2$ (а следовательно и ρ) очень мала, каждый цвет заметно затухает и мы получаем *темное* поле. Пластинка является тогда просто преломляющей и не производит никакого действия.

С увеличением $n_1 - n_2$ каждый цвет постепенно восстанавливается, однако очевидно, что цвета с меньшим λ имеют большее ρ , так что голубой и фиолетовый свет восстанавливаются скорее, чем красный. Восстанавливаемый свет имеет поэтому вначале голубоватый оттенок, но затем быстро белеет.

При дальнейшем увеличении $n_1 - n_2$ мы получаем $\rho = 1$ для крайнего фиолетового, затем для голубого и зеленого. Эти цвета исчезают последовательно, а остаток цветов приобретает дополнительный оттенок, который вначале будет оранжевым, а затем темнокрасным. Этот цвет называется *красным* цветом *первого порядка*.

Затем мы достигаем $\rho = 1$ для светложелтого ($\lambda = 5890\text{\AA}$). При этом уничтожается самая светлая часть спектра. Как красный, с одной стороны, так и голубой, с другой, частично восстанавливаются. Мы получаем тусклый малиновый оттенок, который называется *чувствительной* окраской по той причине, что очень слабое изменение дает значительную перемену цвета; таким образом „чувствительная окраска“ является средством для очень точной установки.

Увеличивая $n_1 - n_2$, мы гасим оранжевый, затем красный и появляется темно-голубой цвет, за которым следует зеленоватый оттенок. Он известен как *голубой* цвет *первого порядка*.

Дальнейшее увеличение восстанавливает частично все цвета. Мы приходим к той стадии, когда фиолетовый цвет ($\lambda = 4000\text{\AA}$) опять исчезает. Это соответствует

$$(n_1 - n_2)d = 8000\text{\AA}.$$

Это не очень далеко за точкой затухания крайнего красного первого порядка ($(n_1 - n_2)d = 7000\text{\AA}$). Таким образом, красный еще не вполне восстановился, а поэтому новый порядок оранжевого и красного не является столь же глубоко красным, как раньше: он выглядит скорее яркорозовым или гвоздичным. Этот цвет называется *красным* *второго порядка*.

Переходя ко второму погасанию светложелтого, мы получаем вторую „чувствительную окраску“, несколько более бледную, чем первая.

Наконец второе погасание *оранжево-красного* (6500\AA), совпадает с третьим погасанием *сине-лилового* (4333\AA), так как $2(6500) = 3(4333)$, при этом проходит только свет голубовато-зеленого цвета, образующий блестяще-синий второго порядка. Третье погасание *зеленого* (5500\AA) оставляет красный со значительной примесью фиолетового и голубого, что дает бледнорозовый третьего порядка.

Два цвета, яркорозовый и зеленый, следуют друг за другом попеременно, становясь постепенно более бледными приблизительно до седьмого или восьмого порядка, когда перекрытие цветов настолько значительно, что практически восстанавливается белый свет.

Вышеперечисленный порядок цветов был описан довольно подробно, потому что он с незначительными изменениями повторяется во всех подобного рода явлениях и в частности в цветах, наблюдаемых в пластинках, имеющих натяжение при рассмотрении их в полярископе. В этом случае $n_1 - n_2$ является пропорциональной натяжению, так что при равномерном увеличении последнего мы получаем описанный порядок цветов.

Тот же порядок может быть кроме того получен непосредственно другим путем при рассмотрении в полярископе тонкого клина, приготовленного из кристалла. Изменение ρ в этом случае получается вследствие непрерывного увеличения d от одного конца такого клина к другому. Клинь будет пересечен рядом цветных полос, следующих одна за другой в изложенной последовательности.

В вышеприведенном разборе предполагалось, что $n_1 - n_2$ было одинаково для всех цветов, другими словами, что нет никакой дисперсии при двойном лучепреломлении. Обычно это не так ни в натуральном, ни в искусственном кристалле, однако, происходящие от этого изменения в последовательности цветов в общем неуловимы глазом.

§ 1.36. Компенсатор Бабинэ.

Компенсатор Бабинэ состоит из тонкого кварцевого клина, оси поляризации которого параллельны и перпендикулярны к ребру клина.

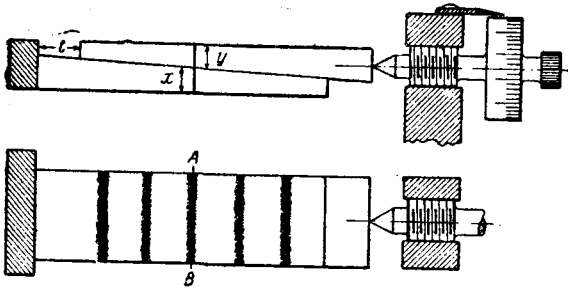
Клин помещается перед кристаллической пластинкой, для которой желательнее измерить относительное отставание $d(n_1 - n_2)$.

Предположим прежде всего, что ни в кварце, ни в кристаллической пластинке нет никакой дисперсии двойного лучепреломления.

Допустим далее, что оси поляризации кристаллической пластинки были найдены вращением ее в полярископе (при отсутствии кварцевого клина) до тех пор, пока свет не погасал.

Пусть теперь клин будет помещен так, чтобы его оси поляризации были параллельны осям поляризации кристаллической пластинки.

Тогда отбрасывая множители уменьшения интенсивности, происходящего вследствие отражения на поверхностях и вследствие поглощения, и исходя из предположения, что эти множители достаточно равны для двух противоположно поляризованных лучей и, следовательно, не будут влиять на результат, мы можем считать, что относительное отставание в клине складывается с относительным отставанием в кристаллической пластинке.



Фиг. 1.36.

Предположим теперь, что клин был повернут так, что $v_1 - v_2$ (v_1, v_2 — показатели преломления клина, соответствующие n_1, n_2) имеет противоположный знак по отношению к $n_1 - n_2$. Тогда полное относительное отставание при выходе из клина и пластинки для части волны, пересекающей клин в точке P , будет

$$d(n_1 - n_2) + x(v_1 - v_2),$$

где x — толщина клина в точке P .

Таким образом там, где $x = \frac{d(n_1 - n_2)}{v_2 - v_1}$, нет никакого относительного отставания, $\rho = 0$, и свет всех цветов исчезает.

Это представляется черной полосой, пересекающей клин. По обеим сторонам от нее мы имеем ряды цветных полос, в последовательности цветов кристаллических пластинок. Замечая положение этой черной полосы, можно получить x из геометрических размеров клина, а затем найти и $d(n_1 - n_2)$.

На практике, для того чтобы избежать предварительного опыта по ориентировке компенсатора Бабинэ, необходимой для того, чтобы $v_1 - v_2$ имела противоположный по отношению к $n_1 - n_2$ знак, применяется двойной клин (фиг. 1.36), причем оси поляризации обоих клиньев взаимно перемещены.

Микрометрический винт дает возможность перемещать один клин по отношению к другому на расстояние t , которое измеряется с большой точностью микрометром. Пусть клин будет вначале один введен в полярископ. Он будет пересекаться черной полосой в той части, где толщина обоих клиньев одинакова. Поворотом винта черная полоса может быть приведена к совпадению с определенной меткой AB на поверхности клина.

Пусть отсчет по микрометру, соответствующий этому, будет t_0 . Предположим теперь, что вводится кристаллическая пластинка. Мы получаем тогда черную полосу в том месте, где

$$d(n_1 - n_2) + (x - y)(v_1 - v_2) = 0.$$

Теперь $y-x$ может быть и положительной и отрицательной; если подлежащее измерению отставание находится в пределах действия клина, то черная полоса будет видима, но она не будет на том же месте, что раньше.

Передвигаем теперь один клин относительно другого до тех пор, пока черная полоса снова не совпадет с отметкой AB , и пусть t будет соответствующее показание микрометра.

Очевидно, что на отметке AB , $y-x$ изменяется линейно с t . Отсюда, так как $y-x$ равно нулю для t_0 , следует, что $y-x$ пропорционально $(t-t_0)$.

Таким образом

$$d(n_1 - n_2) = k(t - t_0),$$

где k — постоянная величина для клина.

Однако при пользовании белым светом нельзя получить большой точности, так как $n_1 - n_2$ и $v_1 - v_2$, (а следовательно и k) зависят от цвета.

Следовательно при точных измерениях следует пользоваться монохроматическим светом (например, пламя натрия или ртутная лампа); белый же свет употребляется только как индикатор, дающий возможность легко опознать полосу нулевого порядка.

Величина постоянной k для любого данного монохроматического света определяется очень легко. Снимая кристаллическую пластинку и устанавливая компенсатор на t_0 , увеличиваем показание до t_1 до тех пор, пока темная полоса следующего порядка не станет под AB .

Тогда $k(t_1 - t_0)$ должно равняться точно длине волны употребляемого света, которая известна. Знак k зависит от того, как были вырезаны клинья. Обычно он указывается изготовителем или может быть определен измерением на кристалле с известным отставанием: обыкновенный кусок кронгласа под нагрузкой вполне пригоден для этой цели.

Чувствительность прибора несомненно изменяется с углом клиньев. Теоретически, если бы полосы были бесконечно узкими, мы могли бы увеличивать чувствительность, употребляя клин с очень маленьким углом. Это ведет однако к очень рассеянным полосам и увеличению ошибки при установке, которая может свести на-нет преимущество, получаемое от уменьшения угла клина. С хорошо рассчитанным прибором хороший наблюдатель может определить отставания до 1% длины волны.

§ 1.37. Пластинка в четверть-волны и круговой полярископ.

Если пластинка из кварца, или слюды, или любого подходящего кристалла сделана такой толщины, что относительное отставание равно одной четверти длины волны, и если свет, падающий перпендикулярно на пластинку, плоско поляризован в азимуте, образующем угол 45° с осями поляризации пластинки, то мы находим согласно уравнениям (1.331) и (1.332), полагая в них $\varphi = 45^\circ$, $\lambda_1 \lambda_1' = \lambda_2 \lambda_2'$ и $\frac{pd}{v_2} = \frac{pd}{v_1} + \frac{1}{4}$, что составляющие выходящего колебания, поляризованные вдоль осей пластинки, будут

$$A \cos 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon' \right),$$

$$A \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon' \right),$$

где A и ε' постоянные величины.

Эти составляющие относятся к магнитному вектору. Составляющие электрического вектора определяются подобными же уравнениями, однако расположены в перпендикулярных азимутах.

Отсюда следует, что конец светового вектора определяется радиусом-вектором A и углом поворота вектора $2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon' \right)$. Таким образом в любой данной точке, при постоянном z , конец светового вектора равномерно описывает окружность радиусом A с частотой p ; в любой данный момент времени при постоянном t концы светового вектора лежат на круговой спирали с радиусом A и с расстоянием между витками, равном длине волны света.

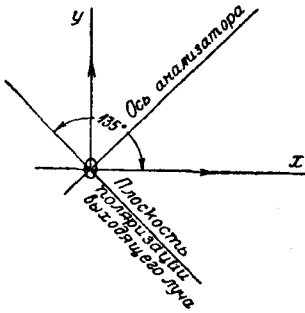
Свет, колебания которого ограничены подобным образом, называется *поляризованным по кругу*. В случае, приведенном выше, вращение светового вектора совершается вправо, если смотреть по направлению распространения света, и потому круговая поляризация называется *правой*.

Однако, если изменить знак относительного отставания так, что

$$\frac{pd}{v_1} = \frac{pd}{v_2} + \frac{1}{4},$$

то составляющие светового вектора примут вид

$$A \cos 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon'' \right), \\ - A \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon'' \right).$$



Фиг. 1.37.

Круговое движение конца светового вектора происходит в направлении левого вращения вокруг направления распространения.

Таким образом мы имеем то, что называется *левой* круговой поляризацией.

Такая комбинация пластинки в одну четверть волны и обыкновенного плоского поляризатора при угле между их осями в 45° будет преобразовывать обычный свет в свет, поляризованный по кругу, и может следовательно называться *круговым поляризатором*. Из симметрии света, поляризованного по кругу, очевидно, что действие такой комбинации является *независимым от ее азимута*.

Предположим, что пучок лучей, поляризованный по кругу вправо, падает на вторую пластинку в четверть-волны, подобную во всех отношениях пластинке, производящей круговую поляризацию вправо. Пусть Ox , Oy (фиг. 1.37) будут осями поляризации этой второй пластинки. Раскладывая волну, поляризованную по кругу, на составляющие, поляризованные вдоль Ox , Oy , мы имеем

$$\text{вдоль } Ox : A \sin \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{вдоль } Oy : A \sin \psi,$$

где ψ имеет вид

$$2\pi p \left(t - \frac{z}{v} + \varepsilon \right).$$

При выходе прибавляется дополнительная разность фазы $\frac{1}{2}\pi$, так что мы имеем теперь

$$\text{вдоль } Ox : A \sin (\psi' + \pi) = -A \sin \psi',$$

$$\text{вдоль } Oy : A \sin \psi',$$

дающие плоско-поляризованный луч в азимуте в 135° с Ox .

Если мы поместим теперь позади последней пластинки в четверть-волны николеву призму или другой анализатор, ось которого находится в азимуте 45° по отношению к Ox , то свет совершенно исчезает.

Такую комбинацию мы будем называть *правым круговым анализатором*; отсюда не трудно увидеть, что если мы изменим направление движения света на прямо противоположное, то такой правый круговой анализатор становится *левым круговым поляризатором*.

Действие правого кругового анализатора будет, очевидно, независимым от его азимута. Он гасит всякий поляризованный вправо по кругу луч, падающий на него.

Если же падающий луч поляризован по кругу влево, мы получаем при падении

$$\text{вдоль } O_x : A \sin \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{вдоль } O_y : A \sin \psi,$$

и при выходе

$$\text{вдоль } O_x : A \sin \psi',$$

$$\text{вдоль } O_y : A \sin \psi'.$$

Мы имеем теперь луч *плоско-поляризованный* вдоль оси расположенного в конце плоского анализатора, который поэтому снова пропускает весь свет, независимо от азимута, причем интенсивность ($2A^2$) будет одинакова с первоначальной интенсивностью, если мы не будем принимать в расчет отражение и поглощение.

Таким образом правый круговой анализатор *задерживает* весь поляризованный вправо по кругу свет и *пропускает без изменения* свет, поляризованный влево по кругу.

Подобно этому мы можем построить левый круговой анализатор. Последний задерживает свет, поляризованный влево по кругу, и передает свет, поляризованный вправо по кругу.

Такая комбинация правого (или левого) кругового поляризатора и правого (или левого) кругового анализатора называется *круговым полярископом*.

В круговом полярископе, устроенном так, что круговые поляризатор и анализатор вращаются *как одно целое*, в котором пластинки в четверть-волны твердо прикреплены к николевым призмам (или другим плоским полярископам), положение азимутов кругового поляризатора и анализатора не имеет значения. Необходимости в том, чтобы николевы призмы были скрещены, нет.

§ 1.38. Введение кристаллической пластинки в круговой полярископ.

Мы начинаем с разбора следующего важного положения, а именно:

Любая плоско или эллиптически поляризованная волна может быть выражена в виде сумм двух волн: одной, поляризованной по кругу вправо, и другой, поляризованной по кругу влево.

Пусть O_x , O_y , как и раньше, будут двумя взаимно перпендикулярными направлениями, лежащими во фронте волны.

Прежде всего следует объяснить, что понимается под эллиптически поляризованным светом.

Световая волна, состоящая из двух составляющих

$$x = a \cos \psi, \quad (1.381)$$

$$y = b \cos (\psi + \chi), \quad (1.382)$$

где ψ — выражение того же вида, что и раньше, а χ — постоянная разность фаз, называется *эллиптически-поляризованной*.

Если χ является кратным π , то $\frac{y}{x} = \text{const}$ и волна является плоско-поляризованной. Плоско-поляризованный свет является таким образом частным случаем эллиптически-поляризованного света.

Если мы исключим ψ из (1.381) и (1.382), то получим уравнение кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \cos \chi \left(\frac{xy}{ab} \right) = \sin^2 \chi, \quad (1.383)$$

показывающее, что конечная точка (x, y) светового вектора описывает эллипс.

Теперь, если колебание, заданное уравнениями (1.381) и (1.382), может быть выражено в виде суммы волн, поляризованных по кругу влево и вправо, то мы можем выразить его в следующем виде:

$$x = A \cos(\psi + \alpha) + B \cos(\psi + \beta), \quad (1.384)$$

$$y = A \sin(\psi + \alpha) - B \sin(\psi + \beta). \quad (1.385)$$

Развертывая тригонометрические функции и уравнивая коэффициенты при $\cos \psi$, $\sin \psi$ в (1.381), (1.382) и в (1.384), (1.385), получаем четыре уравнения

$$A \cos \alpha + B \cos \beta = a,$$

$$A \sin \alpha + B \sin \beta = 0,$$

$$A \cos \alpha - B \cos \beta = -b \sin \chi,$$

$$A \sin \alpha - B \sin \beta = b \cos \chi,$$

откуда

$$A \cos \alpha = \frac{1}{2} (a - b \sin \chi), \quad B \cos \beta = \frac{1}{2} (a + b \sin \chi),$$

$$A \sin \alpha = \frac{1}{2} b \cos \chi, \quad B \sin \beta = -\frac{1}{2} b \cos \chi,$$

что дает возможность определить A , B , α и β .

Таким образом, получаем выражения

$$A^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - 2ab \sin \chi), \quad (1.386)$$

$$B^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + 2ab \sin \chi), \quad (1.387)$$

дающие амплитуды двух поляризованных по кругу волн.

Предположим теперь, что поляризованная вправо по кругу волна амплитуды a падает на пластинку кристалла, в которой Ox и Oy являются осями поляризации. Разлагая ее вдоль осей поляризации, получаем две плоско-поляризованных волны

$$x = a \cos \psi$$

$$y = a \cos \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right).$$

После прохождения через толщину d материала вводится дополнительное отставание $\frac{d(n_1 - n_2)}{\lambda} \cdot 2\pi = \chi$, так что (пренебрегая множителями интенсивности) получаем для волны при выходе из пластинки выражения:

$$x = a \cos \psi',$$

$$y = a \cos \left(\psi' - \frac{\pi}{2} + \chi \right).$$

Волна, определяемая этими уравнениями, является эквивалентной (как мы уже показали) поляризованной вправо по кругу волне с амплитудой A , где

$$A^2 = \frac{a^2}{2} (1 + \cos \chi) = a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \chi,$$

и поляризованной влево по кругу волне с амплитудой

$$B^2 = a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi,$$

как в этом легко убедиться, если в (1.386) и (1.387) подставить $\chi = \frac{1}{2} \pi$ вместо χ и положить $b = a$. Следовательно, если такую пластинку поместить в правый круговой полярископ, интенсивность прошедшего света будет равна

$$2B^2 = 2a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi = I \sin^2 \frac{1}{2} \chi,$$

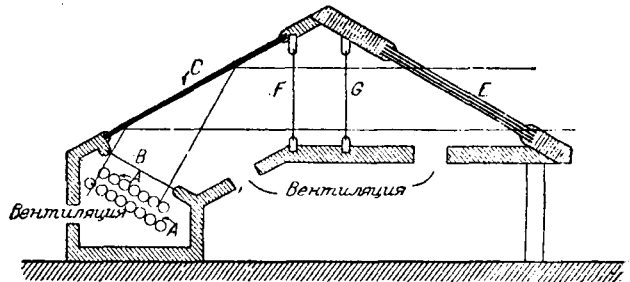
где I является интенсивностью падающего света.

Поле будет затемнено всякий раз, когда $\chi =$ кратному от 2π , т. е. всякий раз как $d(n_1 - n_2)$ является кратным от λ .

Такой круговой полярископ особо полезен в тех случаях, когда желают исследовать цвета кристаллических пластинок, не вводя усложняющего множителя, зависящего от угла между осями поляризации пластинки к осям и поляризатора и анализатора, т. е. от угла φ , введенного в § 1.33.

§ 1.39. Расчет стеклянных плоских полярископов.

При расчете и конструировании стеклянных плоских полярископов, основанных на отражении или преломлении, или на комбинации того и другого, важно помнить, что первоначальная интенсивность источника света может быть доведена до значительных размеров и что вполне возможно, если бы потребовалось, ввести в конструкцию мощный прожектор в виде параболического отражателя, при условии достаточной вентиляции. Однако, поскольку такое сильное освещение не является необходимым для опытов по оптическому методу, весь свет, необходимый



Фиг. 1.39. Разрез полярископа для небольших моделей.

для больших моделей технических сооружений и машин, весьма удобно можно обеспечить рядами обычных ламп накаливания, установленных в рамах, по возможности, на равных расстояниях одна от другой. Такие лампы требуют промежуточных стоек для их поддержки и для соединительных проводов, и эти препятствия могут образовывать в поле видимости тени; более однородное поле получается при установке линолитовых ламп непосредственно на этих стойках.

Однако и в этом случае освещение не получается достаточно однородным и обычно применяется просвечивающий экран, который может состоять из одного листа белой тонкой бумаги, или из двух листов с промежутком между ними, или еще лучше из одного листа матового стекла, так как последнее дает очень хорошие результаты и может легко очищаться от пыли, оседающей очень быстро, благодаря конвекционным потокам. Хотя эти способы получения достаточно однородного поля видимости значительно уменьшают интенсивность света, потеря все же не так велика, как при поляризации его, в виду того, что, как показали предыдущие исследования, при прохождении света через ряды стеклянных пластинок, установленных под углом поляризации, или при отражении света от такой системы получается очень слабое использование света. Наилучшее действие полу-

чается при отражении от хорошо отполированной черной стеклянной пластинки, и хотя отраженный луч может составлять только около одной седьмой интенсивности падающего света, — интенсивность первоначального источника может быть взята достаточно большой для того, чтобы дать требуемое освещение для количественной работы, или для того, чтобы получить общий качественный вид распределения напряжений во всем сооружении.

Полярископы с полем видимости от 1 дм^2 до 15 дм^2 удобнее всего строить следующим образом: свет от достаточного числа калильных ламп A (фиг. 1.39) пропускается через просвечивающий экран B и затем отражается под углом поляризации от тщательно отполированного черного стеклянного листа C . Кроме того, удобно ввести две вынимающиеся пластинки в четверть-волны F и G , так чтобы плоско-поляризованный луч, отраженный от C , поляризовался по кругу при прохождении через первую пластинку F ; при таком устройстве возможно рассматривать напряженный предмет без поворота николевых призм, как описано в § 1.38. Вторая пластинка в четверть-волны G применяется затем для нового преобразования поляризованного по кругу луча в плоско-поляризованный луч прежде, чем он пройдет через анализатор E , который составляется из ряда тонких стеклянных пластинок хорошего качества, установленных под углом поляризации (стеклянная стопа).

В § 1.29 мы видели, что стеклянная стопа является слабым анализатором, и увеличение числа пластин не намного увеличивает ее эффективность, в виду того, что хотя при этом заметно возрастает поляризующее действие, но одновременно значительно падает интенсивность света, благодаря поглощающему действию даже самого прозрачного стекла и благодаря связанному с рассеянием отражению от различных поверхностей. На практике найдено, что 8 и 10 пластинок производят достаточное для экспериментальной работы поляризующее действие при употреблении ряда мощных ламп накаливания. Однако гораздо лучше применять, как анализатор, николеву призму, устанавливая ее на значительном расстоянии от предмета, если последний больших размеров, так чтобы его можно было видеть в приблизительно параллельных лучах. Такая призма имеет обычно небольшой размер. Необходимо держать стеклянные пластинки свободными от пыли, которая ухудшает их поляризующие свойства, поэтому поддерживающие их рамы должны либо закрывать их очень плотно, либо устраниваться так, чтобы они могли легко выниматься для очистки. Однако, даже при самых благоприятных условиях, поляризация света через стеклянные пластинки значительно ниже, чем поляризация, получаемая через николеву призму, и получающийся луч является смесью, в которой содержится значительное количество неполяризованного света. Очень большие полярископы для исследований целых сооружений до настоящего времени строятся по принципам, изложенным выше, и описаны далее в главе VIII.

§ 1.40. Абсолютное отставание.

Возвратимся теперь к нашей кристаллической пластинке и рассмотрим волну, световой вектор которой выражается через

$$A \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_0} + \epsilon_0 \right),$$

и которая поляризована в плоскости, заключающей одну из осей поляризации кристаллической пластинки, которой отвечает скорость v_1 .

Волна проходит через кристалл в виде

$$A_1 \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v_1} + \epsilon_0 \right),$$

$z = 0$ соответствует лицевой поверхности кристалла, где нет изменения фазы при

преломлении. Вблизи второй поверхности кристалла $z = d$ световой вектор в кристалле может быть написан так

$$A_1 \sin 2\pi p \left(t - \frac{d}{v_1} + \varepsilon_0 - \frac{z-d}{v_1} \right) = A_1 \sin 2\pi p \left(t + \varepsilon_1 - \frac{z-d}{v_1} \right),$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \frac{d}{v_1},$$

и он выходит из пластинки в виде

$$A_2 \sin 2\pi p \left(t + \varepsilon_1 - \frac{z-d}{v_0} \right),$$

т. е.

$$A_2 \sin 2\pi p \left\{ t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon_0 + d \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) \right\}.$$

Теперь, если бы не было кристалла, световой вектор в этой точке представлялся бы следующим выражением:

$$A \sin 2\pi p \left\{ t - \frac{z}{v_0} + \varepsilon_0 \right\}.$$

Фаза колебания увеличилась, следовательно, на

$$2\pi p d \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right),$$

и незадержанная волна в z' будет иметь ту же фазу, что и действительная в z , если

$$- \frac{z}{v_0} + d \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) = - \frac{z'}{v_0},$$

т. е.

$$z' - z = d \left(\frac{v_0}{v_1} - 1 \right) = d(n_1 - 1).$$

Действительная волна ведет себя тогда так, как если бы отставала от незадерживаемой волны на это расстояние.

Поэтому $d(n_1 - 1)$ называется абсолютным отставанием волны (или абсолютной оптической разностью хода) при прохождении через пластинку.

Подобно этому, волна, поляризованная параллельно другой оси поляризации, имеет абсолютное отставание

$$d(n_2 - 1).$$

Относительное отставание $d(n_1 - n_2)$ представляет тогда разность абсолютных отставаний.

В случае пластинки из изотропного материала все волны имеют одинаковое абсолютное отставание, а именно $d(n - 1)$, где n является показателем преломления материала.

Свет, прошедший толщину d в пластинке, в отношении фазы подобен свету, прошедшему толщину nd в воздухе. Поэтому nd называется „эквивалентным или оптическим путем“, соответствующим действительно пройденной длине d .

Если луч света проходит последовательно через ряд средин, имеющих показатели преломления n_1, n_2, \dots , при длинах соответствующих путей d_1, d_2, \dots , то

$$n_1 d_1 + n_2 d_2 + \dots$$

представляет то, что называется *полным эквивалентным путем или полным оптическим путем*. В этом выражении все длины путей приведены к длине пути в воздухе (или, более правильно, в пустоте), причем соответствующий показатель преломления воздуха считается равным единице.

Разность фазы между первоначальными и окончательными фронтами волны будет тогда $\frac{2\pi}{\lambda}$ (полный эквивалентный путь), где λ длина волны в пустоте.

§ 1.41. Интерферометры.

Абсолютное отставание в пластинке может быть измерено посредством прибора, называемого интерферометром.

Интерферометры бывают различного типа, однако все они действуют по одному и тому же принципу, а именно, свет из первоначального источника разделяется на два потока, которые, после прохождения различных путей, снова соединяются и идут вместе.

Два потока при вторичном соединении имеют в общем разные фазы, так как эквивалентные пути обоих потоков различны.

Если мы соединим два световых вектора, имеющих одинаковый период и поляризованных в одном и том же азимуте, то получим их сумму

$$A \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v} + \epsilon - \frac{x_1}{v} \right) + B \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v} + \epsilon - \frac{x_2}{v} \right),$$

где v — скорость света, z измеряется в направлении движения, а x_1, x_2 являются эквивалентными путями двух потоков между первоначальным и окончательным фронтом волны, между которыми находятся отдельные пути обоих потоков.

Вышеприведенное выражение может быть записано так:

$$C \sin 2\pi p \left(t - \frac{z}{v} + \epsilon - \zeta \right),$$

где

$$C \cos \zeta = A \cos \frac{2\pi p x_1}{v} + B \cos \frac{2\pi p x_2}{v},$$

$$C \sin \zeta = A \sin \frac{2\pi p x_1}{v} + B \sin \frac{2\pi p x_2}{v},$$

откуда, возводя в квадрат и складывая, получаем

$$\begin{aligned} C^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{2\pi p (x_1 - x_2)}{v} = \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{2\pi (x_1 - x_2)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда, если $x_1 - x_2 =$ целому числу длин волн,

$$C^2 = (A + B)^2,$$

т. е. интенсивность значительно увеличивается, потоки усиливают друг друга.

Если, однако, $x_1 - x_2 =$ нечетному числу половины длины волны,

$$C^2 = (A - B)^2,$$

и интенсивность значительно уменьшается и может доходить даже до нуля, если интенсивности потоков равны. Явление, когда потоки частично или полностью нейтрализуют друг друга, благодаря совпадению гребней волны одного потока с впа-

динами волн в другом, носит название *интерференции*, говорят, что потоки интерферируют один с другим.

Для того чтобы интерференция могла иметь место, должны быть удовлетворены два условия.

а) Два интерферирующих потока должны исходить из *одного* источника; здесь под источником подразумевается первичный атомный вибратор, который порождает световые волны. Лучи от двух различных частей одного и того же пламени не интерферируют. Следовательно, интерференция может происходить только при разделении и воссоединении *одной и той же световой волны*.

Согласно объяснению, даваемому обычно этому условию, каждый отдельный вибратор порождает ряд волн, имеющих свою собственную фазу. Любая световая волна, исходящая из *пространственного* источника (сколь бы он ни был мал), составляется неизбежно из огромного числа таких потоков волн, и так как между фазами отдельных потоков волн, исходящих из двух отличных групп вибраторов, не существует никакого определенного соотношения, некоторые из рядов волн будут усиливать один другой, в то время как другие будут взаимно уничтожаться. В среднем никакого видимого действия не происходит.

б) Разность пути, вводимая между двумя потоками, не должна быть слишком большой. Одно время полагали, что это ограничение происходило вследствие неправильных изменений, происходящих через определенные интервалы времени в фазах вибраторов, так что после испускания некоторого критического числа волн вибратор преобразовывался, так сказать, в новый вибратор и, следовательно, не мог интерферировать сам с собою. Однако опыты показали, что при условии достаточной *однородности* применяемого света интерференция может иметь место при невероятно большой разности пути, достигающей полумиллиона длин волн, или приблизительно 30 см.

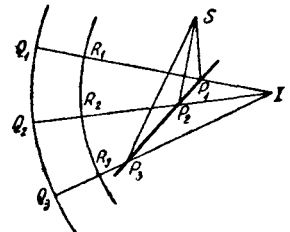
Поэтому можно полагать, что рассматриваемое ограничение происходит исключительно вследствие недостатка полной однородности в свете, что влечет за собою наложение волн, имеющих небольшую разницу в длине.

Внимание должно быть заострено также на двух важных ограничениях, упомянутых в начале этого параграфа, а именно: потоки должны иметь совершенно одинаковый период; свет различных цветов не может интерферировать, и явление биений, часто встречающееся в случае звука, не может очевидно иметь места в случае света; кроме того, потоки должны быть подобно поляризованы. Это следует из анализа, так как световые векторы в различных азимутах не могут складываться алгебраически.

§ 1.42. Интерференция двух изображений одного и того же точечного источника.

Когда благодаря отражениям или преломлениям световая волна, первоначально расходящаяся сферически из точечного источника, снова представляет сферический фронт волны, то центр этого нового фронта волны называется изображением первоначального точечного источника. Так как фаза колебания является одинаковой во всех точках фронта волны, то получается действие точно такое же, как если бы колебания исходили из действительного источника, помещенного в том месте, где находится изображение.

Если на фиг. 1.421 $Q_1 Q_2 Q_3$ представляют измененный фронт волны колебаний, исходящих первоначально из действительного источника S , и лучи, проходящие через Q_1, Q_2, Q_3, \dots , проведены назад к изображению I , то эквивалентные пути от S до Q_1, Q_2, Q_3, \dots одинаковы. То же самое остается в силе для эквивалентных путей от I до Q_1, Q_2, Q_3, \dots



Фиг. 1.421.

Разность фаз между источником и изображением является таким образом постоянной для всех лучей. Далее, беря любой другой фронт волны $R_1 R_2 R_3$, соответствующий тому же изображению I , мы видим, что одна и та же длина QR должна вычитаться (или складываться) из эквивалентных путей от S до I .

Разность фаз между S и I является таким образом постоянной для любого данного оптического прибора и зависит только от расположения зеркал, линз, или пластинок, которые изменяют первоначальную волну.

Теперь соответствующими приборами возможно разделить поток света на два потока, которые затем могут быть вновь соединены. Эти два потока могут в результате распространяться от двух различных изображений I_1 и I_2 одного и того же источника. Такие потоки будут обычно удовлетворять условиям интерференции.

Если потоки претерпели отражения только от плоских зеркал, — разности фаз между S и I_1 или I_2 не будет, так как из симметрии отражения от одного

плоского зеркала очевидно, что эквивалентные лучи от источника и изображения до любой точки одинаковы.

Однако в общем, если условия отражения и преломления не будут строго тождественны для обоих потоков, то между двумя изображениями возникает разность фаз.

Рассмотрим, что будет в плоскости XU (фиг. 1.422), на которую наведен микроскоп M . Эта плоскость будет называться *плоскостью поля*. Два interfering потока будут уничтожаться в точке P , если $I_2 P +$ эквивалентный путь

от S до $I_2 = I_1 P +$ эквивалентный путь от S до $I_1 +$ нечетное число половин длины волны. Обозначая через ϵ разность эквивалентных путей от S до I_2 и I_1 , получаем:

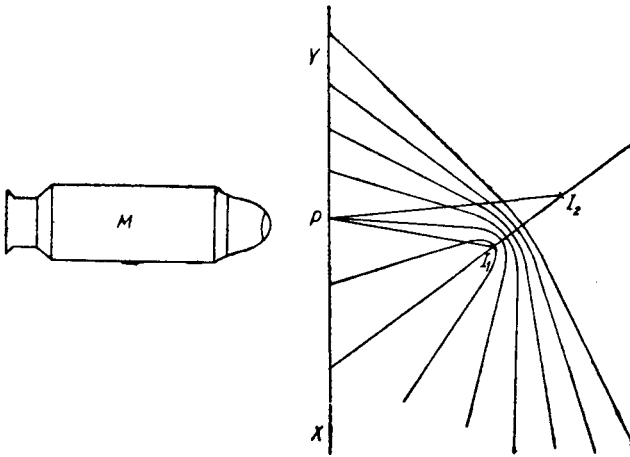
$$I_2 P - I_1 P = (2r + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} - \epsilon,$$

где r является целым числом.

Таким образом, для данного значения r , точка P лежит на поверхности, описанной при вращении вокруг $I_1 I_2$ одной из ветвей гиперболы, $I_1 I_2$ являются фокусами этой гиперболы. Эта поверхность называется *однополым гиперболоидом вращения*.

Пересечение этой полы гиперболоида с плоскостью XU является либо эллипсом, либо гиперболой, смотря по наклону $I_1 I_2$ к плоскости XU , который может быть больше или быть меньше половины угла асимптотного конуса гиперболоида. Если это пересечение является геометрическим местом всех тех точек в плоскости поля, в которых потоки имеют относительное отставание $\left(r + \frac{1}{2}\right) \lambda$, то оно образует темную интерференционную полосу r -го порядка.

Изменяя r , мы видим, что поле пересекается рядами темных изогнутых полос, разделенных светлыми полосами, причем последние соответствуют разности пути $r\lambda$. Различные полосы будут семействами эллипсов или гипербол, разделенных предельной параболой.



Фиг. 1.422.

Если линия I_1I_2 перпендикулярна к XU , интерференционные полосы являются концентрическими окружностями, общим центром которых является точка, в которой I_1I_2 встречается с плоскостью XU . Следует отметить, что полосы видимы только в том случае, если они отстоят на достаточно большом расстоянии одна от другой, а для этого плоскость XU должна находиться на значительном расстоянии от точек I_1, I_2 так, чтобы зрительная труба, служащая для наблюдения полос (или глаз), не была сфокусирована на точки, расположенные вблизи I_1 и I_2 .

§ 1.43. Явление при применении неоднородного света.

Выше предполагалось, что свет был строго монохроматический. Если же применяется белый свет или даже свет, только приблизительно монохроматический, семейства интерференционных полос различных длин волн будут налегать одни на другие по следующим двум причинам:

а) Вообще, если потоки претерпевали *преломления*, то благодаря дисперсии I_1 и I_2 будут различны для различных длин волн, и разность путей e в изображениях также будет зависеть от длин волны.

Интерференционные полосы различных цветов будут, следовательно, в общем принадлежать к различным семействам кривых, и не могут поэтому точно накладываться.

б) Даже если бы I_1, I_2 и e оставались теми же, $\left(r + \frac{1}{2}\right)\lambda$ будут различаться, и по мере увеличения r последовательные светлые и темные полосы будут перемешиваться.

Таким образом светлые и темные полосы различных цветов смешиваются и в результате получается однородное поле.

Поэтому необходимо предпринимать особые предосторожности, если желательно наблюдать интерференционные полосы при белом свете.

Существенным требованием будет следующее: разность путей в некоторой части наблюдаемого поля должна равняться нулю для всех цветов. В этом случае соответствующей полосой является белая; темные полосы с той и другой стороны соответствуют чередующимся затуханиям голубого света и красного, т. е. они имеют красный внутренний и голубой наружный края; не трудно показать, что цвета идут приблизительно в порядке цветов кристаллических пластинок.

Для того чтобы обеспечить выполнение вышеуказанного требования, желательно начинать с идеальной установки, при которой после воссоединения оба потока имеют везде тождественные отставания, для чего, очевидно, пути их должны быть симметричными. В этом случае изображения I_1 и I_2 совпадают и $e = 0$. При таком положении самые незначительные изменения в установке могут сделать полосы видимыми, и так как мы начинаем всегда со светлой полосы нулевого порядка во всех цветах, то эта светлая полоса вообще может появиться в поле.

§ 1.44. Интерферометр Жамена.

Действие интерферометра можно лучше всего понять из описания одного из типов, называемого интерферометром Жамена.

Этот интерферометр состоит из четырех равных параллельных стеклянных пластинок A, B, C, D , размещенных как показано на рис. 1.44, а именно, их центры находятся в вершинах углов прямоугольника, стороны которого составляют углы в 45° с поверхностями пластинок.

Пластинки A и D посеребрены наполовину, так что половина света проходит и половина отражается. Пластинки B и C посеребрены полностью.

Фронт падающей волны встречает пластинку A под углом в 45° . Половина волны отражается в точке P посеребренной поверхностью A , затем отражается

от B и проходит через D . Другая половина проходит через A и отражается от C и D . Потoki соединяются вновь за точкой S , и так как каждый претерпел одно и то же число отражений и преломлений, то интенсивности их по выходе одинаковы.

Кроме того является очевидным, что эквивалентные пути

$$nPQ_2 + Q_2R_2 + R_2S \quad \text{и} \quad PR_1 + R_1Q_1 + nQ_1S$$

одинаковы, так что при точной установке разности в фазе нет.

Если падение первоначального луча будет немного отклониться от угла в 45° , то мы попрежнему получим равные эквивалентные пути с той только разницей, что Q_1R_1 и Q_2R_2 не будут больше перпендикулярными к PR_1 и R_2S .

Условия для интерференции при белом свете таким образом удовлетворены, и самое небольшое изменение в установке даст возможность видеть интерференционные полосы.

Предположим теперь, что два одинаковых бруска E и F из прозрачного материала помещаются на путях обоих потоков, как показано на фиг. 1.44. Это очевидно не изменит условия равенства потоков, и полосы будут наблюдаться так же, как и раньше. Если в бруске E будет происходить слабое прогрессивное изменение, либо через медленное наклонение его, либо через повышение его температуры относительно F , либо (что наиболее важно для нашей цели) через приложение к нему постепенно увеличивающегося напряжения, — тогда между двумя потоками будет образовываться постепенно увеличивающаяся разность хода.

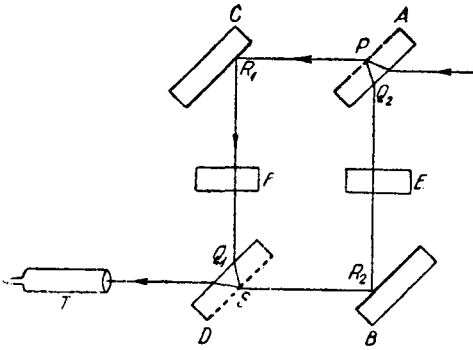
Предположим, что эта разность хода дойдет до $r\lambda$ (зрительная труба T снабжена поперечными нитями и микрометром), тогда, если пересечение нитей первоначально было на полосе порядка s , оно теперь окажется на полосе порядка $s + r$ (или $s - r$, в зависимости от случая). Отсюда, наблюдая

непрерывно во время изменения за полосами, мы можем определить r , а следовательно и разность хода, вводимую изменением состояния бруска E , подсчитывая число полос, прошедших через пересечение нитей вплоть до данного момента. Если r не целое число, так что при конечном наблюдении ни одна полоса не попадет точно на пересечение нитей, дополнительную часть длины волны можно измерить, делая отсчеты по микрометру при установке пересечения нитей на две ближайшие полосы. Таким путем можно определить r с большой точностью.

§ 1.45. Интерферометр Майкельсона.

Второй тип интерферометра показан на фиг. 1.45. Луч из источника света S падает под углом 45° на стеклянную пластинку A , которая посеребрена наполовину на противоположной падению луча стороне. Часть света отражается в точке P и падает нормально на зеркало N , откуда она отражается вновь по тому же самому пути и преломляется через пластинку, выходя по направлению PX после прохождения через серебряную пленку перпендикулярно к своему первоначальному направлению.

Остальная часть света проходит по направлению PU , преломляется по пути UVW через тождественно подобную и параллельную пластинку B , отражается нормально в точке V от второго зеркала M и окончательно отражается по пути PX той же самой серебряной пленкой.



Фиг. 1.44.

Оба потока испытывают таким образом за время от разделения и до воссоединения: 1) два преломления при входе и два при выходе через стеклянные пластинки; 2) одно отражение и одно прохождение через серебряную пленку; 3) одно отражение от зеркала. Их интенсивности при выходе поэтому одинаковы. Далее эквивалентные пути в течение периода разделения равны $2nPQ + 2QR$ и $2nUW + 2(PU + WV)$ соответственно.

Так как при падении под углом 45° $PQ = UW$, то потоки не имеют относительного отставания для всех длин волн, если расстояния между зеркалами M , N так отрегулированы, что $QR = PU + WV$.

Для того чтобы получить этот результат, вводится вторая пластинка B , называемая компенсационной пластинкой. Кроме того не трудно показать, что в этом случае при условии идеальной расстановки и при компенсационной пластинке, тождественной с пластинкой A , также остается равным нулю относительное отставание для всех углов падения; однако если имеется слабая неправильность в регулировке, то при наблюдении выходящего луча через телескоп I мы видим поле, пересеченное рядами интерференционных полос.

Если теперь переместить при помощи винта зеркало N в положение N' , на расстояние RR' , разность пути $2RR'$ вводится между двумя потоками. Если в процессе перемещения мы увидим прохождения r полос через пересечение нитей, тогда $2RR' = r\lambda$. Если затем RR' мы измерим по числу поворотовдвигающегося винта, то получим способ для основного измерения длины световой волны. Этот способ, однако, требует весьма монохроматического источника света.

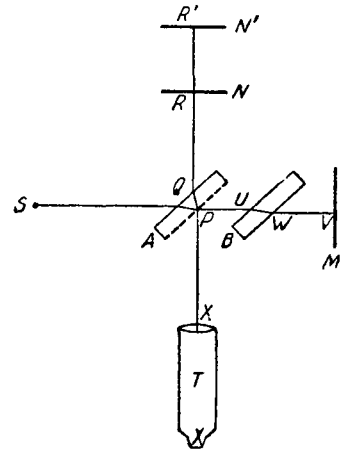
Для регулирования прибора сообщаем зеркалу M небольшие перемещения специальными винтами до тех пор, пока изображения источника S (который может быть взят в виде освещенного булавочного прокола в экране), образуемые двумя потоками, не сольются. Видно также третье изображение, даваемое потоком, отражающимся от передней поверхности A и от N ; оно видно слева от изображения, получающегося вследствие отражения на серебряной поверхности на A и N . Если это третье изображение будет совпадать с изображением, образованным потоком, отраженным от M , то интерференционные полосы будут получаться только для монохроматического света, так как благодаря дисперсии компенсационной пластинки эта регулировка может быть осуществлена точно только для одной длины волны.

Как правило, прежде чем полосы становятся действительно видимыми, эту регулировку глазом приходится дополнять более тонкой регулировкой, достигающейся пробой.

Этот тип интерферометра, как и интерферометр Жамена, можно использовать также для измерения абсолютного отставания в толстой пластинке. В этом случае, если употребляется однородный свет, ни сравнительной пластинки, ни компенсационной пластинки B не нужно. Действительно, если разность путей при введении пластинки между A и M (B устраняется) настолько велика, что интерференционные полосы перестают быть видимыми, мы будем уменьшать разность путей, удаляя зеркало N до тех пор, пока они не появятся вновь.

§ 1.46. Интерферометр Фабри и Перо.

Этот интерферометр является простейшим из всех интерферометров по принципу, однако требует большого искусства при изготовлении и очень тщательной регулировки для того, чтобы дать хорошие результаты.

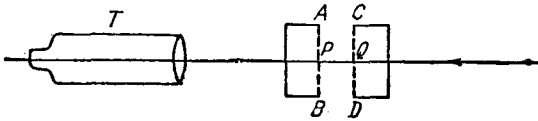


Фиг. 1.45.

Он состоит из двух параллельных стеклянных пластинок (фиг. 1.46), расстояние между которыми регулируется при помощи винта и внутренние поверхности которых AB , CD наполовину посеребрены. Если луч света пересекает пластинки перпендикулярно в направлении, показанном стрелкой, тогда при падении на P часть проходит и часть отражается от C и второй раз от Q . Эта волна является той, которая после двух отражений проходит через пластинку AB и интерферирует с первоначально прошедшей волной.

Следовательно, между двумя волнами вводится отставание на величину $2PQ$.

Если луч проходит систему по косому направлению, вводимое отставание будет больше. Таким образом при наблюдении поля через телескоп T оно представляется покрытым рядами концентрических круговых полос, соответствующих относительным запаздываниям на нечетное число длин в половину волны. По мере удаления друг от друга этих пластинок, эти окружности расширяются, в то же время постепенно появляются новые окружности, сначала в виде темных пятен в центре, разворачивающихся затем в кольца. Считая число новых колец, появляющихся таким образом при удлинении рассогнания между пластинками на x , можно получить очень хороший подсчет числа длин волн в $2x$. Этим путем Фабри и Перо получили основные и весьма точные определения различных стандартных длин волн. Для получения



Фиг. 1.46.

результатов с интерферометром Фабри и Перо существенно, благодаря вводимым огромным отставаниям, употреблять весьма однородный свет, происходящий из одной линии спектра, и притом резкой линии. Даже свет, получаемый от

пламени натрия, показывающий пару линий, отличающихся по длине волны только на 6 \AA , недостаточно однороден для этой цели. Полосы идут отдельно и затем смешиваются через каждые 500 длин волн, и в продолжение периода их перемешивания счет теряется, так как они становятся практически невидимыми.

Полосы Фабри и Перо могут получаться с одной пластинкой при интерференции прошедшего света и света, который испытал два внутренних отражения. В этом случае разность запаздывания между двумя волнами равна $2nc$, где c представляет толщину пластинки, а n — ее показатель преломления. Постепенной нагрузкой или нагреванием можно изменять как n , так и c ; изменение n и c можно измерить с большой точностью подсчетом числа появляющихся (или исчезающих) полос. Применение этого способа к оптическому методу изучения напряжений будет дано в главе III, § 3.25.

Интерферометр Фабри и Перо может употребляться при отражении света так же, как и при прохождении. Так на рис. 1.46 между T и AB может быть введена под углом 45° полупосеребренная стеклянная пластинка и использована для отражения бокового освещения так, чтобы последнее падало нормально на AB , CD . Волны, отраженные поверхностями AB , CD , соответственно будут интерферировать при тех же условиях, что и раньше.

§ 1.47. Интерференция, производимая диффракционными решетками.

Если плоская волна света падает на экран, в котором проделан ряд отверстий, то, если эти отверстия малы, свет перестает идти прямолинейно согласно законам геометрической оптики; каждый элемент волны у отверстия действует как источник вторичной волны, которая у отверстия совпадает в фазе¹ с первоначаль-

¹ Теория дает изменение фазы в $\frac{\pi}{2}$; однако, поскольку оно одинаково для всех случаев, оно не вводит относительного отставания между вторичными волнами, и поэтому мы будем им пренебрегать.

ной волной и затем распространяется сферически. Это явление известно под названием *диффракции света*.

Диффракцией можно пользоваться как способом получения интерференции, так как различные вторичные лучи могут быть собраны в фокусной плоскости телескопа, при условиях, необходимых для интерференции.

Предположим, что в плоском экране uv (фиг. 1.47) прорезан ряд тонких равностоящих параллельных щелей и что плоская световая волна падает на экран под углом i .

Пусть система отклоненных лучей будет видима через телескоп, наклоненный под углом θ к нормали к экрану.

Тогда только те отклоненные лучи, которые являются параллельными оптической оси телескопа, будут образовывать изображение в главном фокусе F . Все они имеют общий фронт волны KL . Если AB будет фронтом падающей волны, то единственными частями путей, лучей, которые могут вводить разность хода, будут части такие как CPM , так что в фокусе телескопа мы будем иметь колебание следующего вида:

$A \sin \psi + A \sin (\psi + \alpha) + A \sin (\psi + 2\alpha) + \dots + A \sin (\psi + \overline{n-1} \alpha)$,
где ψ является фазой колебаний в Q и

$$\alpha = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin i + \sin \theta),$$

где d — расстояние между последовательными щелями, а A — постоянная величина.

Вышеприведенный ряд хорошо известен, и его сумма равна

$$\frac{A \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(\psi + \frac{\overline{n-1} \alpha}{2} \right);$$

вследствие этого полная интенсивность пропорциональна

$$I = \sin^2 \frac{n\alpha}{2} / \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Это выражение имеет ряд небольших максимумов, промежуточных между нулевыми значениями, соответствующими $n\alpha = r\pi$, где r является целым числом. Однако, если $\frac{\alpha^2}{2}$ само является кратным от π , мы получаем максимум, равный n^2 .

Экран такого рода, прорезанный большим количеством n очень тесно расположенных параллельных щелей, называется *решеткой*. Из вышеизложенного следует, что свет, диффрагированный решеткой, имеет очень высокие максимумы, отвечающие равенству $\alpha = 2s\pi$, т. е.

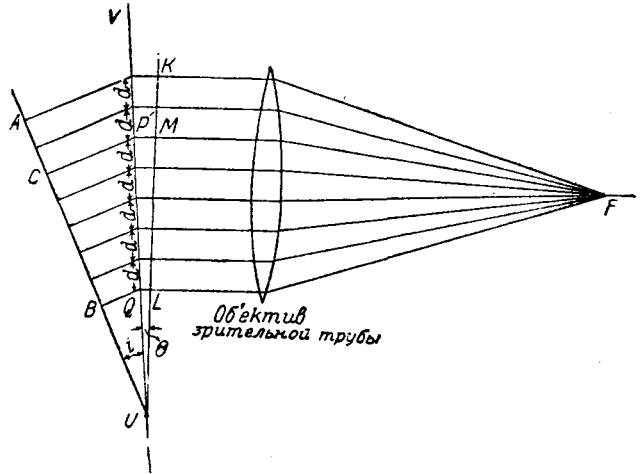
$$\sin i + \sin \theta = \frac{s\lambda}{d},$$

интенсивностью света во всех других местах практически можно пренебрегать.

Если $nd = 1$, где n — количеству линий решетки на единицу длины, вышеприведенное уравнение дает

$$\sin \theta = s\lambda n - \sin i,$$

или $\theta = \sin \lambda$ для нормального падения.



Фиг. 1.47.

Таким образом, если мы имеем падающие лучи однородного света, то он образует ряд диффракционных изображений, отвечающих различным значениям s .

Центральное изображение ($s = 0$) находится в направлении падающего света. Прочие изображения называются изображениями *первого, второго, третьего* и т. д. *порядков*.

Положение центрального изображения является независимым от длины волны. Если употребляется белый свет, изображение это будет следовательно *белым*. Однако, для изображения порядка $s \sin \theta$ пропорционален λ при нормальном падении. Следовательно образуется не одно изображение, а спектр, причем отклонение связано с длиной волны вышеприведенным уравнением. Красные части этого спектра лежат дальше от белой полосы, а фиолетовые ближе к ней. Кроме того, в отличие от спектра, образуемого призмой, дисперсия в красном будет больше, чем в фиолетовом, так как $\frac{d\theta}{d\lambda}$ будет увеличиваться с возрастанием θ .

Дисперсия значительно возрастает также вместе с порядком применяемого спектра. Кроме того, при наблюдении в порядках выше первого, начинается перекрытие спектров, фиолетовый спектр третьего порядка накладывается на красный спектр второго порядка.

При изучении спектров такой решеткой можно пользоваться обычным спектрометром (§ 1.18), точно так же как и в случае призмы.

В изложенной здесь элементарной теории мы пренебрегли весьма важным влиянием наклона лучей на амплитуду A , а также и шириною щелей. При должном учете этих факторов оказывается, что интенсивность в последующих спектрах быстро уменьшается с увеличением порядка, и даже спектр первого порядка значительно бледнее соответствующего спектра, образованного призмой. Поэтому не рекомендуется применять решетку, если желают работать с ярким спектром.

Описанная здесь решетка называется *прозрачной* решеткой. Существуют также отражательные решетки, получаемые посредством нанесения ряда линий на зеркальном металле.

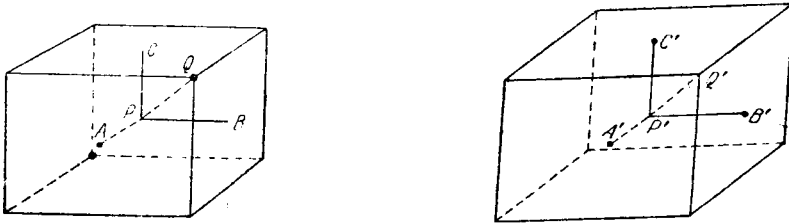
ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

§ 2.01. Деформации.

Когда на какую-нибудь часть материальной среды действует сила, то она передается в измененном виде от точки к точке тела, в результате чего каждая часть тела деформируется. Это явление и называется *деформацией*. Характер и степень деформации изменяются от точки к точке тела.

Для того чтобы определить деформацию в точке P , мы рассматриваем в ненапряженном теле небольшой прямоугольный параллелепипед с центром P . Такой прямоугольный параллелепипед мы будем в дальнейшем называть *прямоугольным шестигранником*. Полуоси PA, PB, PC этого шестигранника (фиг. 2.011) берем параллельными осям координат; длины их выбираем весьма малыми, в пределе приближающимися к нулю. Когда тело деформируется, такой прямоугольный шестигранник переходит (с учетом лишь малых первого порядка) в косой параллелепипед, с полуосями $P'A', P'B', P'C'$, где A', B', C', P' являются новыми



Фиг. 2.011.

положениями точек A, B, C, P . Зная размеры и форму этого косого параллелепипеда можно определить деформацию в точке P . Она полностью определяется, когда известны длины новых полуосей $P'A', P'B', P'C'$ и углы между ними.

Если мы напишем

$$\left. \begin{aligned} P'A' &= PA(1 + s_x), & \cos B'P'C' &= \sigma_{yz}, \\ P'B' &= PB(1 + s_y), & \cos C'P'A' &= \sigma_{zx}, \\ P'C' &= PC(1 + s_z), & \cos A'P'B' &= \sigma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2.01)$$

тогда величины $s_x, s_y, s_z, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$, представляющие собой отвлеченные числа, полностью определяют триэдр $P'A', P'B', P'C'$ и следовательно деформацию. Они называются шестью составляющими деформации в точке P .

Величины s_x, s_y, s_z называются *относительными удлинениями*, параллельными осям координат. Они представляют собой относительные удлинения малого элемента тела в направлении оси, соответствующей индексу при s .

Величины $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ часто называются инженерами термином „срез“. Однако, с тем, чтобы избежать в дальнейшем выражения „срезающие напряжения“, а также для того, чтобы установить отчетливое различие в терминологии между понятиями

„деформация“ и „напряжение“, мы примем выражение, введенное проф. Карлом Пирсоном, и будем пользоваться словом „сдвиг“ для обозначения этих составляющих деформаций.

Геометрическое значение сдвига может быть лучше всего понято при рассмотрении изменения формы шестигранника, происходящей при наличии составляющей σ_{yz} , причем все другие составляющие деформации предполагаются равными нулю. В этом случае деформация шестигранника параллельна плоскости yz . На фиг. 2.012 показана деформация первоначально прямоугольной грани $PBCD$ шестигранника.

Если мы на $P'C'$ построим прямоугольник $P'B''D''C'$, конгруэнтный¹ с $PBCD$, тогда деформация (так как $P'B' = PB = P'B''$ и $P'C' = PC$, при s_y и s_z равных нулю) геометрически выражается искажением прямоугольника $P'B''D''C'$, который принимает форму $P'B'D'C'$.

Если через θ обозначим угол $B'P'B''$, на который повернулись стороны прямоугольника, тогда $\sigma_{yz} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \theta$, приблизительно, если деформация мала.

Далее, кратчайшее расстояние между $P'C'$ и $B'D'$ равно

$$P'B' \cos\theta = P'B'' - P'B'' 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = P'B''$$

с точностью до бесконечно малых первого порядка включительно.

Обычно во всех применяемых в технике материалах величины деформации очень малы и вполне возможно пренебрегать их квадратами и произведениями.

Таким образом в соответствии с этим мы можем пренебрегать изменением расстояния между элементами, подобными $P'C'$ и $B'D'$. Деформация является следовательно эквивалентной простому сдвигу слоев материала параллельно $P'C'$, причем величина относительного смещения двух слоев будет пропорциональна расстоянию между ними. Мы видим таким образом, почему название „сдвиг“ присвоено этому виду деформации.

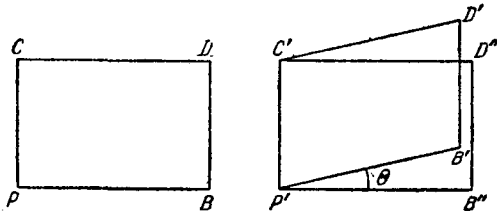
Ясно, что если мы совместим сторону PB первоначального прямоугольника со стороной $P'B'$, мы получим подобную же картину деформации лишь с перестановкой y и z . Таким образом, сдвиг, действующий по площадке, перпендикулярной оси Oy , и направленный параллельно оси Oz , равен сдвигу, действующему по площадке, перпендикулярной оси Oz , и направленному параллельно оси Oy ; или символически, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

§ 2.02. Деформации, отнесенные к каким-либо осям.

Пусть PR и PT (фиг. 2.02) два перпендикулярных элемента в ненапряженном теле. Далее, пусть в деформированном теле они переходят соответственно в $P'R'$ и $P'T'$.

Направляющие косинусы для PR , PT и TR , отнесенные к выбранной системе прямоугольных осей, обозначим через l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 ; длины элементов PR , PT и TR через r, t, q , причем r, t, q — величины достаточно малые.

¹ В плоской геометрии конгруэнтными фигурами называются такие, которые могут быть совмещены с переворачиванием или без него; иногда они обозначаются как „равные во всех отношениях“.



Фиг. 2.012.

Пусть s_r, s_t, s_q относительные удлинения в направлениях PR, PT, TR , а σ_{rt} — сдвиг, действующий по площадке, перпендикулярной к PT и направленный параллельно PR .

Тогда, согласно определениям, данным в § 2.01, имеем:

$$P'R' = PR(1 + s_r), \tag{2.0211}$$

$$P'T' = PT(1 + s_t), \tag{2.0212}$$

$$T'R' = TR(1 + s_q), \tag{2.0213}$$

$$\cos T'P'R' = \sigma_{rt}. \tag{2.0214}$$

С другой стороны, проектируя PR, RT и PT на три выбранные оси, получаем

$$l_3 q = l_1 r - l_2 t, \tag{2.0221}$$

$$m_3 q = m_1 r - m_2 t, \tag{2.0222}$$

$$n_3 q = n_1 r - n_2 t. \tag{2.0223}$$

Из треугольника $P'R'T'$ (фиг. 2.02) $l_2 m_2 n_2$ получаем:

$$(T'R')^2 = (P'T')^2 + (P'R')^2 - 2P'T' \cdot P'R' \cos T'P'R',$$

или

$$q^2(1 + s_q)^2 = t^2(1 + s_t)^2 + r^2(1 + s_r)^2 - 2tr(1 + s_t)(1 + s_r)\sigma_{rt},$$

Фиг. 2.02.

отсюда, пренебрегая квадратами и произведениями составляющих деформации, которые предполагаются достаточно малыми, и помня, что $q^2 = r^2 + t^2$, находим

$$q^2 s_q = t^2 s_t + r^2 s_r - rt \sigma_{rt}. \tag{2.023}$$

Рассмотрим теперь удлинение какого-нибудь элемента PQ (фиг. 2.011), где Q — противоположная P вершина шестигранника, для которого PA, PB, PC являются ребрами, параллельными осям координат (этот шестигранник представляет собой одну восьмую часть шестигранника, рассмотренного в § 2.01).

Обозначая попрежнему точки деформированной фигуры буквами со штрихом наверху, мы имеем из элементарной геометрии, что:

$$P'Q'^2 = (P'A')^2 + (P'B')^2 + (P'C')^2 + 2P'B' \cdot P'C' \cos B'P'C' + 2P'C' \cdot P'A' \cos C'P'A' + 2P'A' \cdot P'B' \cos A'P'B',$$

где

$$P'A' = PA(1 + s_x) \text{ и т. д.}$$

$$\cos B'P'C' = \sigma_{yz} \text{ и т. д.}$$

и

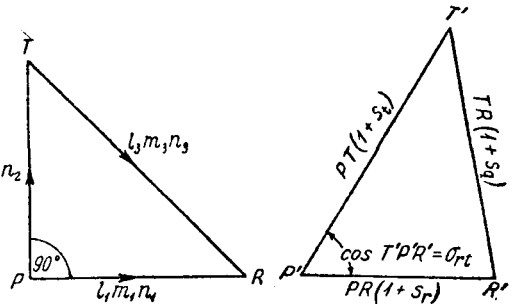
$$P'Q' = PQ(1 + s_q), \quad PA = lPQ, \quad PB = mPQ, \quad PC = nPQ,$$

где s_q — удлинение в направлении PQ , направляющими косинусами которого являются l, m, n .

Подставляя вместо $P'Q', P'A'$ и т. д. их значения, пользуясь при этом соотношением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ и пренебрегая квадратами и произведениями из составляющих деформации, получим:

$$s_q = l^2 s_x + m^2 s_y + n^2 s_z + mn \sigma_{yz} + nl \sigma_{zx} + lm \sigma_{xy}, \tag{2.024}$$

что дает относительное удлинение в направлении, определяемом косинусами l, m, n , в функции от $s_x, s_y, s_z, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$.



Подставляя теперь в (2.024) l_3 вместо l , m_3 вместо m , n_3 вместо n и умножая обе части на q^2 , где q — длина элемента (фиг. 2.02), получаем:

$$q^2 s_q = (ql_3)^2 s_x + (qm_3)^2 s_y + (qn_3)^2 s_z + (qm_3)(qn_3) \sigma_{yz} + \\ + (qn_3)(ql_3) \sigma_{zx} + (ql_3)(qm_3) \sigma_{xy},$$

или, пользуясь уравнениями (2.0221), (2.0222), 2.0223), имеем:

$$q^2 s_q = r^2 (l_1^2 s_x + m_1^2 s_y + n_1^2 s_z + m_1 n_1 \sigma_{yz} + n_1 l_1 \sigma_{zx} + l_1 m_1 \sigma_{xy}) + \\ + t^2 (l_2^2 s_x + m_2^2 s_y + n_2^2 s_z + m_2 n_2 \sigma_{yz} + n_2 l_2 \sigma_{zx} + l_2 m_2 \sigma_{xy}) - \\ - rt \{ 2l_1 l_2 s_x + 2m_1 m_2 s_y + 2n_1 n_2 s_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sigma_{yz} + \\ + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \sigma_{zx} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \sigma_{xy} \}. \quad (2.025)$$

Приравнявая друг-другу два значения $q^2 s_q$, выраженных уравнениями (2.023) и (2.025), и имея в виду, что полученное равенство справедливо для всех (малых) значений r и t , можем приравнять коэффициенты при r^2 , t^2 и rt в обеих частях полученного уравнения; тогда:

$$s_r = l_1^2 s_x + m_1^2 s_y + n_1^2 s_z + m_1 n_1 \sigma_{yz} + n_1 l_1 \sigma_{zx} + l_1 m_1 \sigma_{xy}, \quad (2.0261)$$

$$s_t = l_2^2 s_x + m_2^2 s_y + n_2^2 s_z + m_2 n_2 \sigma_{yz} + n_2 l_2 \sigma_{zx} + l_2 m_2 \sigma_{xy}, \quad (2.0262)$$

$$\sigma_{rt} = 2l_1 l_2 s_x + 2m_1 m_2 s_y + 2n_1 n_2 s_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sigma_{yz} + \\ + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \sigma_{zx} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \sigma_{xy}. \quad (2.027)$$

Уравнения (2.0261) и (2.0262) имеют такую же форму, как (2.024), и не дают нового результата; зато уравнение (2.027) выражает сдвиг в направлениях r , t через шесть составляющих деформации, отнесенных к прямоугольной системе координат x , y , z .

Таким образом, мы выразили удлинение в любом направлении и сдвиг в двух любых перпендикулярных направлениях через s_x , s_y , s_z , σ_{yz} , σ_{zx} , σ_{xy} . Отсюда следует, что эти шесть величин полностью определяют деформацию в любой точке тела.

§ 2.03. Поверхность деформации; линии главных деформаций.

Проведем из любой произвольно выбранной точки O , в каком-нибудь направлении, радиус-вектор OU , так, чтобы длина OU была обратно пропорциональна корню квадратному из относительного удлинения в направлении OU .

Таким образом, если q означает направление OU , (l, m, n) — его направляющие косинусы, то $\frac{k}{OU^2} = s_q$, где k является некоторой постоянной величиной.

Пусть (x, y, z) представляют координаты U относительно O ; оси координат выбраны параллельно основным осям; тогда, подставляя вместо s_q его значение, полученное из (2.024), и пользуясь равенствами

$$lOU = x, \quad mOU = y, \quad nOU = z,$$

находим уравнение геометрического места точек U ;

$$k = x^2 s_x + y^2 s_y + z^2 s_z + yz \sigma_{yz} + zx \sigma_{zx} + xy \sigma_{xy}. \quad (2.031)$$

Это уравнение поверхности второго порядка, которая называется *поверхностью деформации* в точке P . Ясно, что такое определение поверхности деформации совершенно не зависит от выбора координатных осей.

Следовательно, если (X, Y, Z) другая система прямоугольных осей, то уравнение

$$k = X^2 s_X + Y^2 s_Y + Z^2 s_Z + YZ \sigma_{YZ} + ZX \sigma_{ZX} + XY \sigma_{XY} \quad (2.032)$$

должно представлять ту же самую поверхность, что и (2.031).

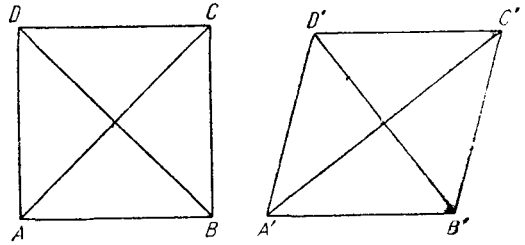
Таким образом при преобразовании уравнения поверхности деформации к новым осям, имеющим прежнее начало O , преобразованные коэффициенты уравнения дают шесть составляющих деформации, отнесенных к новым осям.

Обычно центральная поверхность второго порядка, каковой является поверхность деформации, имеет одну и только одну систему главных осей. Если мы отнесем поверхность деформации к этим осям и обозначим их через X, Y, Z , то

$$\sigma_{YZ} = \sigma_{ZX} = \sigma_{XY} = 0,$$

т. е. отнесенная к таким осям деформация сводится к трем взаимно перпендикулярным удлинениям; величины всех трех сдвигов обращаются в нуль, а прямоугольный шестигранник, ребра которого параллельны этим осям, преобразуется при этом в несколько другой прямоугольный шестигранник.

Три главные оси поверхности деформации называются *главными осями деформации* в точке P . Три соответствующих удлинения называются тремя *главными удлинениями*. Исключительные случаи имеют место, когда поверхность деформации является: 1) поверхностью вращения; в этом случае каждая ось в экваториальной плоскости является главной осью деформации, и деформация в этой плоскости сводится к однородному всестороннему удлинению; 2) шаром; в этом случае всякая ось, проходящая через P , является главной осью деформации, и вся деформация заключается в однородном расширении или сжатии.



Фиг. 2.04.

В общем в каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярных направления главных деформаций; эти направления могут меняться от точки к точке.

Кривая, направление которой в каждой точке совпадает с направлением одной из главных осей деформации, называется *траекторией* главной деформации.

Очевидно, что существуют три системы траекторий главных деформаций, пересекающихся под прямыми углами. В исключительных точках, где два или три главных удлинения равны, что отвечает поверхности вращения или шару, существует бесконечное множество траекторий главных деформаций, и мы обычно пропускаем эти точки при переходе от одной системы таких линий к другой.

§ 2.04. Эквивалентность сдвига двум продольным деформациям.

Если деформация сводится к простому сдвигу σ_{yz} , то квадрат $ABCD$ (фиг. 2.04) превращается в ромб $A'B'C'D'$. Диагонали $A'C', B'D'$ ромба после деформации остаются попрежнему взаимно перпендикулярными; поэтому, поворачивая оси Oy, Oz на 45° и обозначая новые оси через $O\eta, O\zeta$, получаем: $\sigma_{\eta\zeta} = 0$, т. е. деформация сводится к двум удлинениям s_η, s_ζ в направлениях AC и BD соответственно.

Из фиг. 2.04 имеем

$$\begin{aligned} A'C'^2 &= A'B'^2 + A'D'^2 + 2A'B' \cdot A'D' \cos B'A'D' = \\ &= 2AB^2(1 + \sigma_{yz}) = AC^2(1 + \sigma_{yz}), \end{aligned}$$

так как $A'B' = A'D' = AB$, причем нет удлинения в направлениях AB и AD .

Так как мы пренебрегаем квадратами составляющих деформации, то

$$A'C' = AC \left(1 + \frac{1}{2} \sigma_{yz} \right),$$

или

$$s_x = \frac{1}{2} \sigma_{yx}$$

Точно так же

$$B'D'^2 = A'B'^2 + A'D'^2 - 2A'B' \cdot A'D' \cos B'A'D'$$

и

$$B'D' = BD \left(1 - \frac{1}{2} \sigma_{yx} \right),$$

откуда

$$s_x = -\frac{1}{2} \sigma_{yx}$$

Мы видим, таким образом, что сдвиг эквивалентен двум продольным деформациям, удлинению и сжатию, в направлениях биссектрис углов между осями сдвига; каждая из них равна половине величины сдвига.

§ 2.05. Кубическое расширение.

Пусть s_1, s_2, s_3 будут главными удлинениями в точке P . Построим в точке P бесконечно малый параллелепипед с ребрами a, b, c , параллельными главным осям деформации. После деформации мы получаем новый параллелепипед с ребрами:

$$a(1 + s_1), \quad b(1 + s_2), \quad c(1 + s_3).$$

Если мы обозначим объем деформированного шестигранника через

$$abc(1 + \Delta),$$

где Δ называется *кубическим расширением* в точке P , то

$$1 + \Delta = (1 + s_1)(1 + s_2)(1 + s_3),$$

или, пренебрегая произведениями составляющих деформации, получаем:

$$\Delta = s_1 + s_2 + s_3.$$

Пусть s_x, s_y, s_z являются удлинениями в направлении каких-либо осей координат. Если направляющие косинусы главных осей деформации будут $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$, то направляющие косинусы осей x, y, z , по отношению к главным осям деформации будут $(l_1, l_2, l_3), (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3)$; следовательно, применяя формулу (2.024) для вычисления удлинения в любом направлении в функции главных удлинений и помня, что сдвиги, отнесенные к главным осям, равны нулю, получаем

$$s_x = l_1^2 s_1 + l_2^2 s_2 + l_3^2 s_3,$$

$$s_y = m_1^2 s_1 + m_2^2 s_2 + m_3^2 s_3,$$

$$s_z = n_1^2 s_1 + n_2^2 s_2 + n_3^2 s_3.$$

Складывая, находим:

$$\begin{aligned} s_x + s_y + s_z &= s_1(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + \\ &+ s_2(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) + \\ &+ s_3(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) = \\ &= s_1 + s_2 + s_3, \end{aligned}$$

учитывая основную зависимость между направляющими косинусами
Таким образом

$$\Delta = s_x + s_y + s_z$$

есть величина, не зависящая от выбора координатных осей.

§ 2.06. *Перемещения. Выражение составляющих деформации через перемещения.*

Шесть составляющих деформации не являются независимыми величинами, а связаны некоторыми отношениями. Это можно яснее всего показать, выражая составляющие деформации в функции трех независимых величин.

Рассмотрим в недеформированном теле точку P . При деформации она займет новое положение P' . Пусть x, y, z будут координатами P , $x + u, y + v, z + w$ — координатами P' . Тогда u, v, w называются перемещениями или смещениями точки P .

Если Q будет соседней с P точкой, с координатами, в ненапряженном теле, $x + lr, y + mr, z + nr$, где r длина PQ , а l, m, n направляющие косинусы отрезка PQ , то перемещения точки Q будут равны (пренебрегая квадратами r):

$$\begin{aligned} u + lr \frac{\partial u}{\partial x} + mr \frac{\partial u}{\partial y} + nr \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v + lr \frac{\partial v}{\partial x} + mr \frac{\partial v}{\partial y} + nr \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w + lr \frac{\partial w}{\partial x} + mr \frac{\partial w}{\partial y} + nr \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Проекции $P'Q'$ на координатные оси выражаются тогда в следующем виде:

$$\begin{aligned} r \left\{ l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right\}, \\ r \left\{ l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right\}, \\ r \left\{ l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}, \end{aligned}$$

откуда, возводя в квадрат и складывая:

$$\begin{aligned} \frac{P'Q'^2}{r^2} = r^2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + 2 \text{ аналогичных члена} + \\ + 2mn \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + 2 \text{ аналогичных члена.} \end{aligned}$$

Но мы имели $P'Q'/r^2 = 1 + 2s_x$, так что, пользуясь формулой $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 2s_x = r^2 \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + 2 \text{ аналогичных члена} + \\ + 2mn \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + 2 \text{ аналогичных члена.} \quad (2.061) \end{aligned}$$

Сравнивая (2.061) с ранее найденным выражением для s_x (см. 2.024), мы получаем:

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2.062)$$

и два аналогичных выражения для s_y, s_z

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \quad (2.063)$$

и два аналогичных выражения для σ_{zx} и σ_{xy} .

Обозначим теперь

$$2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ представляют собой составляющие вращения твердого тела в точке P . Из только что написанных равенств получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \omega_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \omega_2,$$

и формулы (2.062) и (2.063) после подстановки этих значений принимают вид

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \omega_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \omega_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \omega_3^2 + \omega_2^2 \right\}, \quad (2.064)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \omega_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \omega_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \omega_1 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \omega_2 \omega_3 \right\}. \quad (2.065)$$

Вообще говоря, составляющие вращения твердого тела, входящие в написанные формулы, могут принимать какие угодно значения, так как телу в целом можно дать любое вращение без деформации.

Однако, если влияние такого вращения включено в (2.064) и (2.065), то ясно, что мы не можем пренебрегать квадратами и произведениями в правых частях этих уравнений. Мы должны поэтому ввести на этой стадии дальнейшее ограничение, что составляющие вращения твердого тела, входящие в эти уравнения, должны быть *того же порядка, что и деформации*. Когда это имеет место, сразу становится очевидным, что величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д., $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ и т. д. должны быть первого порядка в выражениях для составляющих деформации.

Мы можем поэтому пренебрегать квадратами и произведениями этих величин, так же как произведениями их и составляющих вращения. Таким образом мы имеем окончательно формулы

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad s_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad s_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.066)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \sigma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.067)$$

которые являются обычными выражениями для шести составляющих деформации в функции трех перемещений.

§ 2.07. Напряжения.

Когда материальная среда деформирована, каждая часть ее передает определенное силовое действие на окружающие части, которые в свою очередь ока-

зывают равное и противоположное действие на нее. Таким образом через малую площадку внутри тела передаются две равных и противоположных силы, представляющих взаимное действие и противодействие частей материала, лежащих по обе стороны проведенной площадки. Предельная величина таких сил на единицу площади, когда размеры площадки делаются бесконечно малыми, называется *напряжением*, действующим на проведенную площадку.

Напряжение является поэтому физической величиной, размерность которой $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$ или в основных единицах: масса \cdot (длина) $^{-1}$ \cdot (время) $^{-2}$. Употребляются

разные единицы для напряжения: единицей, применяемой в теоретических науках, является дина на квадратный сантиметр; это очень малая единица, и для практических целей употребляется единица, в миллион раз большая, называемая *баром*. Эта единица является стандартной единицей для напряжений, употребляемой Британской метеорологической палатой. Она равна приблизительно килограмму на квадратный сантиметр, или нормальному атмосферному давлению на уровне моря. Подобно всем метрическим единицам, ее доли обозначаются латинскими, а кратные величины греческими приставками, именно миллибар, килобар—величина порядка напряжений, встречающихся в технике. Мегабар представляет единицу в миллион бар и является величиной порядка так называемых „упругих постоянных“ для многих материалов.

В инженерной практике эти „абсолютные“ единицы применяются редко, так как там принято измерять силы в так называемых „гравитационных“ единицах.

Таким образом напряжение обычно измеряется в килограммах на квадратный сантиметр или миллиметр.

В чисто теоретических исследованиях главы III для измерения напряжений будет применяться бар; при изложении же технических приложений будем выражать результаты в килограммах на квадратный сантиметр. Один бар равен 1,0197 килограмма на квадратный сантиметр.

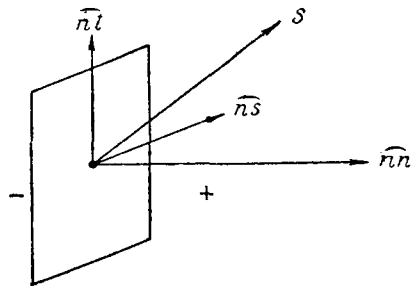
В общем, напряжение по любой небольшой площадке имеет две составляющих: одну перпендикулярную и другую касательную к площадке. Последняя в свою очередь может быть разложена на две составляющих вдоль выбранных перпендикулярных направлений в плоскости площадки.

Если n означает положительное направление нормали к площадке (фиг. 2.07), s и t —два перпендикулярных направления в плоскости площадки, тогда напряжение S , являющееся результатом воздействия материала, расположенного с положительной стороны площадки, на материал с ее отрицательной стороны, имеет

три составляющих, которые мы будем обозначать через \widehat{np} , \widehat{ns} , \widehat{nt} , \widehat{pq} , и вообще обозначает напряжение, параллельное q и действующее на площадку, перпендикулярную p .

Напряжение \widehat{np} согласно этому определению является положительным, когда материал с положительной стороны площадки стремится притянуть материал, расположенный на отрицательной стороне. Такое напряжение называется *растяжением*. Отрицательное напряжение \widehat{np} называется *сжатием*. Обычно два вида нормального напряжения объединяются под названием *продольного напряжения*.

Касательное напряжение, например \widehat{ns} , называется иногда *срезающим напряжением*, или короче, *срезом*; оно обычно появляется в материале, подвергнутом действию пары срезающих усилий.



Фиг 2.07.

§ 2.08. Равенство касательных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам.

Рассмотрим вновь прямоугольный шестигранник (фиг. 2.08), в котором точка P является центром и ребра которого параллельны осям координат. Пусть ребра шестигранника будут $2a$, $2b$, $2c$ и пусть a , b , c будут настолько малы, что напряжения по граням шестигранника будут распределены равномерно. Тогда эти напряжения будут иметь равнодействующие $X_1, Y_1, Z_1; X'_1, Y'_1, Z'_1; X_2, Y_2, Z_2; X'_2, Y'_2, Z'_2; X_3, Y_3, Z_3; X'_3, Y'_3, Z'_3$, приложенные в центрах $A, A'; B, B'; C, C'$ граней шестигранника.

Если мы возьмем теперь моменты относительно AA' , то силы X_1, Y_1, Z_1 и X'_1, Y'_1, Z'_1 , пересекают AA' , так как они проходят через A и A' ; поэтому они не дают момента вокруг AA' .

Силы X_2, X'_2, X_3, X'_3 , будучи параллельными AA' , тоже не дают момента вокруг AA' .

Силы Y_2, Y'_2 действуют вдоль BB' и таким образом пересекают AA' в точке P . Их момент вокруг AA' также равен нулю.

Мы имеем оставшиеся силы Z_2, Z'_2, Y_3, Y'_3 , которые дают вокруг $A'A$ момент $c(Y'_3 - Y_3) + b(Z_2 - Z'_2)$.

Далее $Z_2 =$ площади грани с центром в B , умноженной на касательное напряжение \widehat{yz} по этой грани $= ac \cdot \widehat{yz}$; $Z'_2 =$ площади грани с центром в B' , умноженной на касательное напряжение \widehat{yz} по этой грани с обратным знаком, так как здесь усилие передается частью материала, для которой y имеет меньшее значение, на материал, для которого y имеет большее значение.

Отсюда

$$Z_2 = ac \widehat{yz}, Z'_2 = -ac \widehat{yz},$$

изменением величины напряжений при переходе от одной грани к параллельной ей грани мы здесь пренебрегаем.

Подобно этому

$$Y_3 = ab \widehat{zy}, Y'_3 = -ab \widehat{zy}.$$

Момент напряжений вокруг $A'A$, с учетом указанного допущения равен

$$2abc(\widehat{yz} - \widehat{zy}).$$

Кроме того на материал шестигранника могут действовать объемные силы (например вес); однако, если a, b, c достаточно малы, то интенсивность объемных сил будет приблизительно одинакова по всему объему и равнодействующая этих сил пройдет через центр тяжести P шестигранника и таким образом момент ее вокруг $A'A$ равен нулю.

Так как шестигранник находится в равновесии, то момент действующих вокруг любой оси сил должен быть равен нулю. Отсюда окончательно получаем

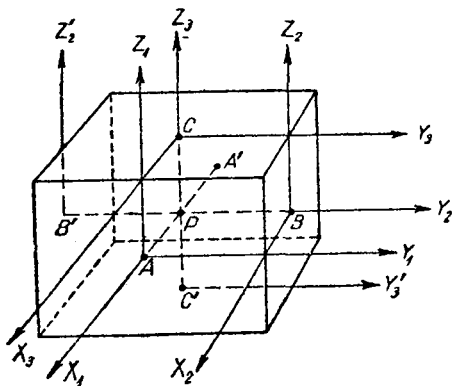
$$\widehat{yz} - \widehat{zy} = 0,$$

или

и два подобных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \widehat{yz} &= \widehat{zy}, \\ \widehat{zx} &= \widehat{xz}, \\ \widehat{xy} &= \widehat{yx} \end{aligned} \right\}$$

(2.08)

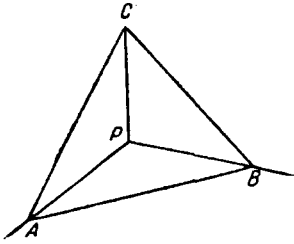


Фиг. 2.08.

§ 2.09. Шесть составляющих напряжения в точке.

Напряжения в точке P по площадкам, параллельным плоскостям координат, вполне определены тремя нормальными \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{zz} и тремя касательными напряжениями \widehat{yz} , \widehat{zx} , \widehat{xy} . Докажем, что напряжение по любой площадке, проведенной через P , может быть выражено через эти величины.

Пусть $PABC$ (фиг. 2.09) будет тетраэдром с вершиною в точке P и с бесконечно малыми ребрами PA , PB и PC которые параллельны координатным осям, причем грань ABC наклонена к ним.



Фиг. 2.09.

Обозначим через q направление, через p длину перпендикуляра, опущенного из точки O на грань ABC , и пусть направляющие косинусы этого перпендикуляра будут l , m , n . Тогда $l = \cos$ углу между гранями ABC и PBC , так как двугранный угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к плоскостям.

Таким образом, если $\Delta =$ площади грани ABC и $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обозначают соответственно площади PBC, PCA, PAB , то

$$\Delta_1 = l\Delta, \quad \Delta_2 = m\Delta, \quad \Delta_3 = n\Delta.$$

Пусть \widehat{qx} , \widehat{qy} , \widehat{qz} будут составляющими напряжения по площадке ABC , направленными параллельно осям.

Приравниваем нулю (в силу равновесия тетраэдра) проекцию на ось Ox главного вектора всех сил, действующих на материал тетраэдра $PABC$. Напряжения по всем граням дают равнодействующее усилие, параллельное оси Ox :

$$\Delta \widehat{qx} - \Delta_1 \widehat{xx} - \Delta_2 \widehat{yx} - \Delta_3 \widehat{zx}.$$

Объемные силы дают проекцию:

$$\frac{1}{3} p\Delta \cdot \rho X,$$

где ρ является плотностью, X, Y, Z — составляющими объемной силы на единицу массы в точке P .

Таким образом, вся сила, параллельная оси Ox , равна

$$\Delta \widehat{qx} - \Delta_1 \widehat{xx} - \Delta_2 \widehat{yx} - \Delta_3 \widehat{zx} + \frac{1}{3} p\Delta \rho X = 0,$$

так как тетраэдр находится в равновесии.

Деля на Δ , мы получаем

$$\widehat{qx} - l\widehat{xx} - m\widehat{yx} - n\widehat{zx} + \frac{1}{3} p\rho X = 0.$$

Уменьшая беспрдельно размеры тетраэдра так, чтобы длина p стремилась к нулю, имеем

$$\left. \begin{aligned} \widehat{qx} &= l\widehat{xx} + m\widehat{yx} + n\widehat{zx}, \\ \widehat{qy} &= l\widehat{xy} + m\widehat{yy} + n\widehat{zy} \\ \widehat{qz} &= l\widehat{xz} + m\widehat{yz} + n\widehat{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.09)$$

Величины \widehat{qx} , \widehat{qy} , \widehat{qz} полностью определяют напряжение по грани ABC .

Отсюда, если \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{zz} , \widehat{yz} , \widehat{zx} , \widehat{xy} даны, напряжения по всем площадкам в точке P будут известны.

§ 2.10. Поверхность напряжения; траектории главных нормальных напряжений.

Пусть мы имеем некоторое направление r , перпендикулярное q . Обозначим направляющие косинусы r через l' , m' , n' . Проектируя на направление r уравнения (2.09) и складывая их, получаем:

$$\widehat{qr} = l'\widehat{qx} + m'\widehat{qy} + n'\widehat{qz} = l'l\widehat{xx} + mn'\widehat{yy} + nn'\widehat{zz} + \\ + (mn' + m'n)\widehat{yz} + (nl' + n'l)\widehat{zx} + (lm' + l'm)\widehat{xy}. \quad (2.101)$$

Эта формула дает касательное напряжение в любом направлении в плоскости грани, перпендикулярной к q .

Аналогично этому нормальное напряжение \widehat{qq} по такой площадке выражается так:

$$\widehat{qq} = l'^2\widehat{xx} + m'^2\widehat{yy} + n'^2\widehat{zz} + 2mn'\widehat{yz} + 2nl'\widehat{zx} + 2lm'\widehat{xy}. \quad (2.102)$$

Рассмотрим поверхность, уравнением которой является

$$x^2 \cdot \widehat{xx} + y^2 \cdot \widehat{yy} + z^2 \cdot \widehat{zz} + 2yz \cdot \widehat{yz} + 2zx \cdot \widehat{zx} + 2xy \cdot \widehat{xy} = k. \quad (2.103)$$

Для того чтобы найти длину R радиуса-вектора этой поверхности в направлении (l, m, n) , напишем $x = lR$, $y = mR$, $z = nR$; таким образом получаем:

$$\frac{k}{R^2} = l'^2\widehat{xx} + m'^2\widehat{yy} + n'^2\widehat{zz} + 2mn'\widehat{yz} + 2nl'\widehat{zx} + 2lm'\widehat{xy} = \widehat{qq}. \quad (2.104)$$

Нормальное напряжение по площадке, перпендикулярной любому направлению, обратно пропорционально квадрату радиуса-вектора вышеуказанной поверхности. Это свойство определяет эту поверхность и является очевидно независимым от выбора осей координат.

Поверхность (2.104) называется *поверхностью напряжения* в точке P .

Если оси координат взяты параллельно главным осям поверхности напряжения, то коэффициенты при произведениях координат в (2.103) должны равняться нулю. Касательные напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям, равны таким образом нулю, и грани шестигранника, ребра которого параллельны координатным осям, испытывают только нормальные напряжения. Линии, проведенные через P параллельно главным осям поверхности напряжения, называются *главными осями напряжения* в точке P ; кривая, направление которой во всякой точке напряженного тела совпадает с одной из главных осей напряжения в этой точке, называется *траекторией главного нормального напряжения*. Траектории главных нормальных напряжений образуют тройную систему взаимно ортогональных линий.

Нормальные напряжения, действующие по площадкам, перпендикулярным направлениям главных осей напряжений, называются *главными нормальными напряжениями*. Когда два или три главных нормальных напряжения равны между собой, поверхность напряжения переходит в поверхность вращения или шар; направления главных нормальных напряжений становятся таким образом частично или полностью неопределенными.

Следует указать на одно следствие, связанное с понятием о поверхности напряжения, на которое мы будем ссылаться впоследствии в связи с теорией оптического метода изучения напряжений. Если одно из касательных напряжений, скажем \widehat{xy} , равно нулю, то уравнение линии пересечения поверхности напряжения плоскостью $z = 0$ принимает форму

$$x^2 \cdot \widehat{xx} + y^2 \cdot \widehat{yy} = k;$$

оно отнесено, как это видно, к своим главным осям. Оси Ox и Oy называются тогда главными осями напряжения в их собственной плоскости, и, вообще говоря, касательные напряжения по площадкам, перпендикулярным двум главным осям любого диаметрального сечения поверхности напряжения, равны нулю; нормальные напряжения по этим площадкам являются главными напряжениями в их собственной плоскости (хотя не главными напряжениями в полном смысле слова).

Подобный же результат имеет место для поверхности деформации, где сдвиг по площадкам, перпендикулярным двум главным осям любого плоского сечения, равен нулю.

§ 2.11. Уравнения равновесия и условия на поверхности.

Рассмотрим, как и раньше, равновесие прямоугольного шестигранника (a, b, c) . Пусть X, Y, Z будут составляющими объемной силы на единицу массы и ρ — плотность материала.

Для того чтобы определить величину полного усилия, параллельного оси Ox , вызванного напряжением \widehat{xx} , вычислим сперва усилие, действующее по очень малым площадкам $dydz$, выделенным на двух гранях, перпендикулярных оси Ox ; эти величины равны

$$dy dz \left[\widehat{xx} + a \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} + \dots - \widehat{xx} \right] = a dy dz \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x},$$

пренебрегая высшими степенями a .

Интегрируя по всей площади грани bc , мы получаем составляющую усилия, вызванную напряжениями \widehat{xx} :

$$abc \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x}.$$

Подобно этому, составляющие, вызванные напряжениями \widehat{yx} по грани ca и напряжениями \widehat{zx} по грани ab , выражаются через $abc \frac{\partial \widehat{yx}}{\partial y}$ и $abc \frac{\partial \widehat{zx}}{\partial z}$ соответственно.

Наконец, объемная сила дает составляющую $\rho X \cdot abc$.

Таким образом равнодействующее усилие, параллельное оси Ox , выражается в первом приближении так:

$$abc \left[\frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{zx}}{\partial z} + \rho X \right],$$

при условии, что оно должно быть равно нулю, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{zx}}{\partial z} + \rho X = 0. \quad (2.111)$$

Вычисляя равнодействующие усилий, параллельных осям Oy и Oz , мы получаем два аналогичных уравнения

$$\frac{\partial \widehat{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial \widehat{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \rho Z = 0. \quad (2.113)$$

Эти уравнения известны под названием *уравнений равновесия*.

Пусть p_x, p_y, p_z будут составляющими усилия на единицу площади, приложенного в точке P на поверхности тела, где направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности будут l, m, n ; тогда они должны уравниваться с соответствующими составляющими напряжений в этой точке, и мы получаем из (2.09) для точек на поверхности тела

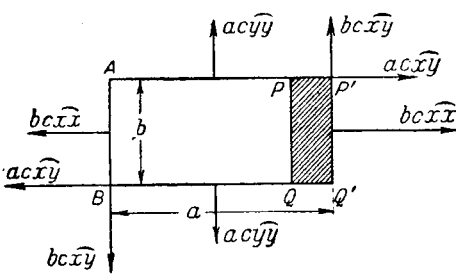
$$\left. \begin{aligned} \widehat{lxx} + m\widehat{txx} + n\widehat{zxx} &= p_x \\ \widehat{lxy} + m\widehat{txy} + n\widehat{zxy} &= p_y \\ \widehat{lxz} + m\widehat{txz} + n\widehat{zsz} &= p_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

Эти равенства представляют собой „условия на поверхности“ (граничные условия).

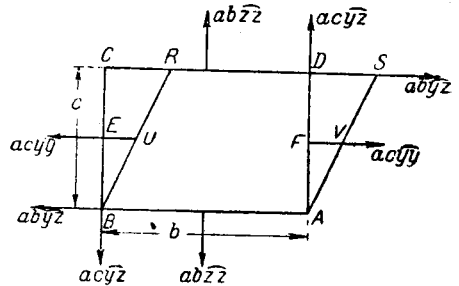
§ 2.12. Работа при деформации тела. Потенциальная энергия деформации.

Пусть составляющие деформации в точке P изменяются на бесконечно малые величины $ds_x, ds_y, ds_z, ds_{yz}, ds_{zx}, ds_{xy}$.

Вычислим работу, сделанную усилиями, действующими на параллелепипед с ребрами a, b, c при этих дополнительных деформациях. При вычислении работы



Фиг. 2.121.



Фиг. 2.122.

мы учтем, что так как напряжения, действующие на параллелепипед, образуют систему уравнивающих сил, то они не дают работы при перемещении параллелепипеда как целого. Строго говоря, напряжения сами по себе не уравниваются, так как они должны уравнивать объемную силу, действующую на материал параллелепипеда, однако последняя является пропорциональной объему параллелепипеда и следовательно ею можно пренебречь по сравнению с усилиями, действующими на грани, которые пропорциональны площади этих граней; такое пренебрежение возможно при условии, что линейные размеры параллелепипеда достаточно малы.

Мы можем таким образом произвольно наметить положение деформированного параллелепипеда с тем, чтобы упростить вычисление работы, вызываемой деформацией.

Рассмотрим сначала влияние дополнительной деформации ds_x .

Пусть $APQB$ будет проекцией рассматриваемого параллелепипеда. Закрепим грань AB , тогда за счет дополнительной деформации проекция $APQB$ займет положение $AP'Q'B$, где $PP' = QQ' = ads_x$.

Усилия, параллельные Oy или Oz , действующие на грани AB, PQ, AP, BQ , не дают работы при этом перемещении. Усилия, параллельные Ox , действующие по граням AP, BQ , равны и противоположны, и величины работы, прделываемой ими во время удлинения AP и BQ , также равны и противоположны, так что сумма работ равна нулю.

То же самое имеет место для усилий, параллельных Ox , действующих на грани параллелепипеда, параллельные плоскости чертежа, т. е. перпендикулярные к Oz .

Остаются нормальные усилия — $bc \widehat{xx}$ и $bc \widehat{xx}$, действующие на грани AB и PQ .

Усилие, приложенное к грани AB , не дает работы благодаря нашему условию закрепления этой грани.

Усилие по грани PQ дает работу, равную

$$bc \widehat{xx} \times PP' = abc \widehat{xx} ds_x.$$

Аналогично этому, дополнительные удлинения ds_y , ds_z дают работу, равную

$$\begin{aligned} abc \widehat{yy} ds_y, \\ abc \widehat{zz} ds_z. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь влияние дополнительного сдвига $d\sigma_{yz}$. Мы можем считать закрепленной одну из граней, перпендикулярных Oz , представленную на фиг. 2.122 линией BA .

Прямоугольный параллелепипед $ABCD$ переходит при деформации в косоугольный параллелепипед $ABRS$ и перемещения CR или DS верхней грани равны $c d\sigma_{yz}$.

При таком перемещении усилия, параллельные Oz или Ox , производят работу, равную нулю.

Усилия $bc \widehat{xy}$ и $-bc \widehat{xy}$ по граням, параллельным плоскости чертежа, дают равные величины положительной и отрицательной работы, которые при сложении уничтожаются.

Нормальные усилия $ac \widehat{yy}$ по граням BC и AD равны и противоположны; перемещения EU , FV их точек приложения равны; поэтому сумма работ также равна нулю.

Усилие $ab \widehat{yz}$, действующее на AB , не производит работы благодаря условиям закрепления.

Наконец усилие $ab \widehat{yz}$, действующее на CD , производит работу

$$ab \widehat{yz} \times CR = abc \widehat{yz} d\sigma_{yz}.$$

Подобно этому, дополнительные сдвиги $d\sigma_{zx}$, $d\sigma_{xy}$ дают величины работы, равные

$$\begin{aligned} abc \widehat{zx} d\sigma_{zx}, \\ abc \widehat{xy} d\sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Таким образом, работа dW на единицу объема, производимая напряжениями, действующими в точке P вследствие дополнительной деформации, определяемой величинами ds_x , ds_y , ds_z , $d\sigma_{yz}$, $d\sigma_{zx}$, $d\sigma_{xy}$, выражается формулой

$$dW = \widehat{xx} ds_x + \widehat{yy} ds_y + \widehat{zz} ds_z + \widehat{yz} d\sigma_{yz} + \widehat{zx} d\sigma_{zx} + \widehat{xy} d\sigma_{xy}. \quad (2.121)$$

Если мы предположим, что материал является таким, что при деформации механическая энергия не преобразовывается в тепловую, или электромагнитную, или другие формы энергии, тогда согласно принципа сохранения энергии работа деформации зависит только от окончательной величины деформации и не зависит от способа, которым тело деформируется. Отсюда следует, что dW должно быть полным дифференциалом функции W по составляющим деформации, откуда

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \frac{\partial W}{\partial s_x}, & \widehat{yy} &= \frac{\partial W}{\partial s_y}, & \widehat{zz} &= \frac{\partial W}{\partial s_z} \\ \widehat{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \sigma_{yz}}, & \widehat{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \sigma_{zx}}, & \widehat{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \sigma_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

Эти уравнения, когда вид функции W известен, связывают напряжения и деформации. Следует отметить, что они дают напряжения как определенные функции от составляющих деформации, так что состояние материала будет одинаковым при нагрузке и разгрузке. Материал, который подчиняется этим условиям, является следовательно совершенно упругим.

Функция W , получаемая интегрированием из (2.121) при начальном условии, что $W=0$, когда все деформации равны нулю, представляет величину работы, отнесенной к единице объема, проделанной при переходе тела из недеформированного в деформированное состояние; энергия, измеряемая этой работой, накапливается в теле и может быть реализована при исчезновении деформации; эта энергия называется, обычно, *потенциальной энергией* деформации (работой деформации).

§ 2.13. Выражение потенциальной энергии для материала, следующего закону Гука.

Роберт Гук в 1676 г. дал закон, связывающий напряжение и удлинение в упругом стержне или струне. Этот закон он опубликовал в знаменитой анаграмме *ceiinossttuu*, которая заключает в себе буквы латинской фразы „ut tensio sic uis“, т. е. сила пропорциональна удлинению, или, в современной терминологии, напряжение пропорционально деформации.

Хотя этот закон первоначально применялся только к случаю простого растяжения и выражал пропорциональность \widehat{xx} и s_x , в дальнейшем он был распространен на случай любого вида деформации и теперь принял следующую форму: напряжения являются линейными однородными функциями деформации. Это положение известно под именем *обобщенного закона Гука*.

Материал, для которого обобщенный закон Гука является справедливым, называется *линейно упругим*. Очень часто выражение „совершенно“ упругий употребляется для обозначения этого условия. Хотя этот термин кажется неудачным, так как совершенная упругость должна скорее подразумевать полное восстановление прежней формы материала (что не требует, чтобы $\frac{\partial W}{\partial s_x}$ и т. д. в уравнениях (2.122) были бы линейными функциями деформаций), тем не менее это выражение получило настолько широкое распространение в практике, что мы будем употреблять термин „совершенная“ упругость, как синоним „линейной упругости“.

Рассмотрим, какой вид имеет W для твердого тела, обладающего такой упругостью.

Очевидно, что если $\frac{\partial W}{\partial s_x}$ и т. д. являются линейными однородными функциями от s_x, s_y , и т. д., то сама W должна быть однородной функцией второй степени от деформаций, т. е.:

$$W = \lambda_{11}s_x^2 + \dots + \lambda_{44}\sigma_{yz}^2 + \dots + \lambda_{66}\sigma_{xy}^2 + 2\lambda_{23}s_y s_z + \dots + 2\lambda_{14}s_x \cdot \sigma_{yz} + \dots + 2\lambda_{66}\sigma_{zx}\sigma_{xy} + \dots \quad (2.131)$$

Это требует наличия $6 + \frac{1}{2}(6 \cdot 5) = 21$ упругих постоянных λ . Число этих постоянных однако сильно уменьшается, когда рассматриваемый материал является *изотропным*, т. е. когда соотношения между напряжениями и деформациями независимы от выбора осей координат, и когда мы учитываем эквивалентность сдвига двум продольным деформациям, уже отмеченную выше.

Если материал является изотропным, то выражение для W должно быть сим-

метричным относительно x, y, z . Таким образом, единственными слагаемыми второй степени, которые оно может содержать, будут:

$$\begin{aligned} s_x^2 + s_y^2 + s_z^2, \quad (s_x + s_y + s_z)^2, \quad \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2, \\ (s_x + s_y + s_z)(\sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{xy}), \quad (\sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{xy})^2, \\ s_x \sigma_{yz} + s_y \sigma_{zx} + s_z \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Это уменьшает число постоянных до шести.

Далее, если свойства материала симметричны не только относительно точки, но относительно плоскости, например, плоскости yz , то мы можем изменить знак x на обратный, не изменяя при этом ни значения W , ни зависимостей между напряжениями и деформациями.

Замена знаков у x и x на обратные, не меняя их при этом у v, w, u или z , влечет за собой (см. 2.066, 2.067) изменение знаков у σ_{zx}, σ_{xy} и не меняет их у s_x, s_y, s_z и σ_{yz} .

Следовательно, в результате такой замены происходит изменение в слагаемых

$$\begin{aligned} (s_x + s_y + s_z)(\sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{xy}), \\ (\sigma_{yz} + \sigma_{zx} + \sigma_{xy})^2 \\ \text{и} \\ s_x \sigma_{yz} + s_y \sigma_{zx} + s_z \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Поэтому эти слагаемые должны исчезнуть из формулы для W , которая принимает после этого следующий вид:

$$W = \frac{1}{2} \lambda (s_x + s_y + s_z)^2 + \frac{1}{2} \nu (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2).$$

Теперь учтем тот факт, что сдвиг $\sigma_{yz} = \sigma$ является эквивалентным двум взаимно перпендикулярным продольным деформациям $s_{x'} = \sigma/2, s_{y'} = -\sigma/2$, где x', y' наклонены под 45° к x, y .

Отсюда оба вида деформации должны дать одну и ту же величину потенциальной энергии. Потенциальная энергия деформации за счет $\sigma_{yz} = \sigma$ выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \mu \sigma^2. \quad (2.132)$$

Потенциальная энергия деформации за счет $s_{x'} = \frac{\sigma}{2}, s_{y'} = -\frac{\sigma}{2}$ будет та же (так как материал является изотропным), что и за счет $s_x = \frac{\sigma}{2}, s_y = -\frac{\sigma}{2}$. Она выражается так:

$$W = \frac{1}{4} \nu \sigma^2. \quad (2.133)$$

Сравнивая (2.132) и (2.133), мы находим

$$\nu = 2\mu,$$

и для потенциальной энергии деформации изотропного материала получаем окончательно

$$W = \frac{1}{2} \lambda (s_x + s_y + s_z)^2 + \mu (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2). \quad (2.134)$$

§ 2.14. Зависимости между напряжениями и деформациями в изотропном совершенно упругом материале.

Пользуясь (2.122) и (2.134), мы получаем следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu s_x \\ \widehat{yy} &= \lambda \Delta + 2\mu s_y \\ \widehat{zz} &= \lambda \Delta + 2\mu s_z \\ \widehat{yz} &= \mu \sigma_{yz} \\ \widehat{zx} &= \mu \sigma_{zx} \\ \widehat{xy} &= \mu \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

дающие зависимость между напряжениями и деформациями в пределах упругости при изотропном материале.

λ , μ известны под именем упругих постоянных Ламэ. Если они не равны по величине, то говорят, что материал имеет *биконстантную изотропность*.

Согласно прежней молекулярной теории Пуассона, λ и μ должны быть обязательно равными. Материал тогда называется имеющим *одноконстантную изотропность*.

Опыты показали, что очень немногие материалы имеют в действительности одноконстантную изотропность или некоторое приближение к ней.

Постоянные λ , μ обычно употребляются в математических работах по теории упругости.

Одна из них μ имеет важное физическое значение, так как она характеризует сопротивление твердого тела изменению формы. Она известна под названием модуля сдвига. Величина λ , напротив, не имеет непосредственного физического значения, и на практике инженеры пользуются другими постоянными, о которых будет указано ниже.

§ 2.15. Равномерное растяжение или сжатие стержня. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Если напряженное состояние является однородным растяжением \widehat{xx} , то мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} &= 0, \\ \widehat{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu s_x, \end{aligned} \quad (2.151)$$

$$0 = \lambda \Delta + 2\mu s_y, \quad (2.152)$$

$$0 = \lambda \Delta + 2\mu s_z. \quad (2.153)$$

Складывая, получаем

$$\widehat{xx} = (3\lambda + 2\mu) \Delta,$$

откуда определяем Δ и, подставляя его значение в (2.151), находим:

$$\widehat{xx} = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} s_x = E s_x. \quad (2.154)$$

Постоянная величина E называется *модулем Юнга* для данного материала. Таким образом

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Из (2.152) и (2.153) находим

$$s_y = s_x = -\frac{\lambda}{2\mu} \Delta = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{\widehat{xx}}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} s_x, \quad (2.155)$$

так что стержень, испытывающий удлинение при однородном растяжении, в то же время испытывает поперечное сжатие; отношение поперечного сжатия к продольному удлинению будет $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$.

Это отношение известно в теории упругости под названием *коэффициента Пуассона*. Обычно он обозначается буквой η или σ ; мы будем обозначать через η .

В инженерной практике коэффициентом Пуассона называют величину, обратную η , и обозначают ее через m . Для постоянной μ пользуются также обозначением C или G . В случае одноконстантной изотропности

$$E = \frac{5\mu}{2} = \frac{5}{2} (\text{модуль сдвига}), \quad \eta = \frac{1}{4}; \quad m = 4.$$

§ 2.16. Гидростатическое сжатие; объемный модуль.

Если напряжения сводятся к системе $\widehat{xx} = \widehat{yy} = \widehat{zz} = -P$ и $\widehat{xy} = \widehat{yz} = \widehat{zx} = 0$, то поверхность напряжения обращается в шар, и напряжение по любой площадке является постоянным и равным P . Так как в этом случае любые два взаимно перпендикулярных направления являются сопряженными диаметрами для поверхности напряжения, то по любой площадке не будут действовать касательные напряжения. Напряжение в материале имеет таким образом характер гидростатического сжатия. Следовательно, мы имеем из (2.14)

$$-P = \lambda\Delta + 2\mu s_x,$$

$$-P = \lambda\Delta + 2\mu s_y,$$

$$-P = \lambda\Delta + 2\mu s_z.$$

Складывая, получаем

$$-3P = 3\lambda\Delta + 2\mu\Delta;$$

или

$$P = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3} \Delta. \quad (2.16)$$

Величина $\frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu)$ называется *модулем расширения или объемным модулем*. Обычно он обозначается математиками буквой k , а в технических трудах K или D .¹

§ 2.17. Растяжение пластинки. Упругие постоянные при плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим четырехугольную пластинку, лежащую в плоскости xu и находящуюся под действием растягивающих усилий P и Q , параллельно направленным к осям Ox и Oy . Плоскости пластинки, параллельные плоскости xu , свободны от усилий. В этом случае мы приходим к следующим уравнениям:

$$P = \lambda\Delta + 2\mu s_x, \quad (2.171)$$

$$Q = \lambda\Delta + 2\mu s_y, \quad (2.172)$$

$$0 = \lambda\Delta + 2\mu s_z. \quad (2.173)$$

¹ Glasebrook and Shaw, Practical Physics, гл. VI; Love, Mathematical Theory of Elasticity, § 69.

Пластинка испытывает однородную деформацию, состоящую из трех однородных удлинений, в направлениях, параллельных осям координат.

Из (2.173) мы имеем

$$(\lambda + 2\mu)s_x = -\lambda(s_x + s_y).$$

Определяя отсюда значение s_x и подставляя в уравнения (2.171) и (2.172), получаем

$$P = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(s_x + s_y) + 2\mu s_x, \quad (2.174)$$

$$Q = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(s_x + s_y) + 2\mu s_y. \quad (2.175)$$

Если мы обозначим $s_x + s_y = \Delta'$, тогда Δ' — расширению пластинки. Обозначим через λ' величину $2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$. Тогда уравнения (2.174), (2.175) могут быть написаны так:

$$P = \lambda'\Delta' + 2\mu s_x, \quad (2.176)$$

$$Q = \lambda'\Delta' + 2\mu s_y. \quad (2.177)$$

Мы будем называть λ' *постоянной плоского напряженного состояния*. Она играет в теории пластинок, деформированных в их собственной плоскости, роль, подобную той, которую играет постоянная λ Ламэ в общей задаче трех измерений.

Если мы положим $P = Q$, то получим случай деформации пластинки, подвергнутой однородному растяжению во всех направлениях, лежащих в плоскости пластинки.

Тогда

$$s_x = s_y = \frac{1}{2}\Delta',$$

$$P/s_x = 2(\lambda' + \mu) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.178)$$

Величина, стоящая в правой части (2.178), называется иногда *модулем пластинки*.

§ 2.18. Соотношения между модулями и постоянными упругости.

Вследствие разницы обозначений, употребляемых математиками и инженерами, а также многочисленности постоянных и модулей, удобнее будет представить в табличной форме выражения для различных коэффициентов упругости, выраженных через ту или другую пару основных величин (таблица 2.18).

Модуль сдвига, модуль Юнга и объемный модуль связаны соотношением

$$\frac{1}{3K} + \frac{1}{C} = \frac{3}{E}. \quad (2.181)$$

Величины E , K и C являются обязательно положительными, так как не существует материала, который бы сжимался при растяжении и удлинялся при сжатии, или в котором сдвиг был бы направлен в противоположную сторону по отношению к приложенным касательным усилиям.

Таким образом, обращаясь к формуле $K = \frac{1}{3}Em/(m-2)$, мы видим, что m должно быть больше 2, или η меньше $\frac{1}{2}$. Величина $\eta = \frac{1}{2}$ соответствует $\mu = 0$, т. е. материалу, который не оказывает сопротивления сдвигу и отличается от идеальной жидкости только тем, что он способен выдерживать растяжение и сжатие.

ТАБЛИЦА 2.18.

Коэффициенты упру- гости, выраженные через:	λ, μ	μ, η	E, m	C, m	E, C	C, K
Модуль Юнга	$\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \cdot \mu$	$2(1 + \eta)\mu$	E	$\frac{2(m+1)}{m} C$	E	$\frac{9KC}{3K+C}$
Модуль жесткости (модуль сдвига)	μ	μ	$\frac{mE}{2(m+1)}$	C	C	C
Объемный модуль	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	$\frac{2\mu}{3} \frac{1 + \eta}{1 - 2\eta}$	$\frac{E}{3} \frac{m}{m-2}$	$\frac{2C}{3} \frac{(m+1)}{m-2}$	$\frac{CE}{3(3C-E)}$	K
Коэффициент Пуассона	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	η	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{E}{2C} - 1$	$\frac{3K-2C}{6K+2C}$
Постоянная λ Ламэ	λ	$\frac{2\eta\mu}{1-2\eta}$	$\frac{mE}{(m+1)(m-2)}$	$\frac{2C}{(m-2)}$	$\frac{C(E-2C)}{(3C-E)}$	$K - \frac{2}{3} C$
Модуль пластинки	$\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$	$2\mu \frac{(1 + \eta)}{1 - \eta}$	$\frac{Em}{m-1}$	$2C \left(\frac{m+1}{m-1} \right)$	$\frac{2CE}{4C-E}$	$\frac{18KC}{3K+4C}$
Постоянная λ' плоского напряженного состоя- ния	$\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$	$\frac{2\eta\mu}{1 - \eta}$	$\frac{mE}{m^2 - 1}$	$\frac{2C}{m-1}$	$\frac{2C(E-2C)}{4C-E}$	$\frac{2C(3K-2C)}{3K+4C}$

Далее, из $K = \frac{2\mu}{3} \frac{1+\eta}{1-2\eta}$ очевидно, что η имеет нижним пределом — 1.

Тем не менее, нет такого изотропного материала, для которого η было бы отрицательным, так что практически нижним пределом для η является нуль, что дает для нижнего предела λ или λ' тоже нуль.

Впоследствии мы будем часто употреблять в связи с „плоской задачей“ отношение

$$\lambda'/2 (\lambda' + \mu).$$

Его мы будем обозначать через σ , так что

$$\sigma = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} = \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{1}{m + 1} \quad (2.182)$$

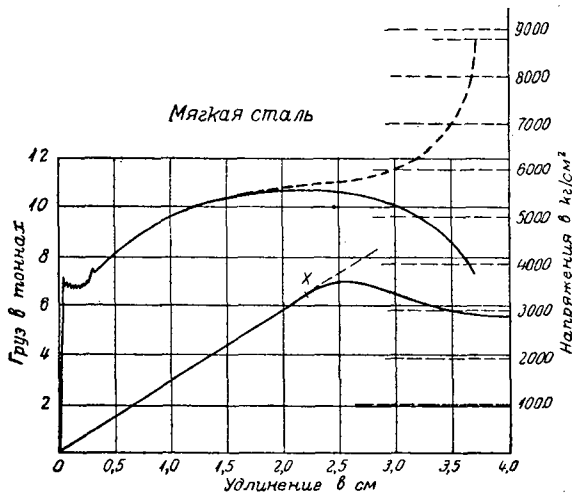
или

$$(1 - \sigma) = \frac{1}{1 + \eta} \quad (2.183)$$

Так как составляющие деформации являются отвлеченными числами, то модулы упругости E , K , C и др. и постоянные Ламэ представляют собой физические величины такой же размерности, как и напряжения, и выражаются следовательно в тех же единицах, как и последние.

§ 2.19. Диаграммы растяжения.

Предыдущие выводы имеют место только в случае идеально изотропного материала, обладающего полной упругостью. Рассмотрим, насколько эти выводы



Фиг. 2.191.

могут применять к случаю действительного материала, т. е. насколько такой материал обладает полной (линейной) упругостью.

Поведение строительных материалов при напряжении и деформации широко изучалось экспериментально; главным образом, это относится к испытаниям на растяжение, сжатие, изгиб и срезывание, произведенным на различных испытательных машинах, при помощи которых можно изучать физические свойства материала. Некоторые из характерных особенностей этих испытаний будут рассмотрены в последующих главах; однако будет полезно описать здесь кратко не-

которые простейшие виды зависимостей между напряжениями и деформациями для того, чтобы указать, насколько формулы этой главы применимы на практике. Первым примером взято простое испытание на растяжение мягкой стали. Цилиндрический стержень имеет утолщенные и снабженные нарезкой концы, один из которых закрепляется в одном захвате испытательной машины, а другой в контрольном бруске, имеющем значительно большее поперечное сечение. Этот брусок также имеет утолщенный конец с нарезкой, который закрепляется в другом захвате. Таким образом, нагрузка приложена по оси обоих образцов, но напряжение в контрольном бруске никогда не доводится до величины, которая нарушила бы упругий характер деформации. Измеряя посредством зеркального прибора удлинение конт-

рольного образца, можно вычислять нагрузку; удлинение же испытываемого образца измеряется на средней части, обычно длиной в 12,7 см; величины нагрузки и удлинения автоматически записываются на фотографической пластинке в прямоугольных координатах. Фиг. 2.191 представляет днуграмму такого испытания,¹ проведенного над образцом из мягкой стали диаметром 1,59 см. Начальная часть кривой растяжения изображена также с увеличенным для деформации в десять раз масштабом; из этого графика видно, что отношение между напряжением и удлинением является линейным приблизительно до нагрузки 6,25 тонн или 32 кг/мм² предела упругости материала. В этих пределах модуль Юнга E равен $21\,250 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Вплоть до этой точки (показанной буквой X на фиг. 2.191) можно повторять процесс нагрузки и разгрузки неограниченное число раз без нарушения линейности диаграммы; мы имеем, таким образом, и полную обратимость, и линейную упругость, поскольку вопрос идет о рассматриваемом виде деформации.

Напряжение, соответствующее точке X , известно под названием предела упругости материала (при простом растяжении).

Если напряжения превзошли этот предел, то после постепенной разгрузки оказывается, что восходящая и нисходящая ветви диаграммы растяжения перестают совпадать и ограничивают определенную площадь. Из формулы (2.121), в которой надо все напряжения, кроме \widehat{xx} , положить равными нулю, имеем:

$$dW = \widehat{xx} \cdot ds_x,$$

т. е. работа, проделываемая в течение цикла нагрузки и разгрузки, выражается через

$$\int \widehat{xx} \cdot ds_x$$

и измеряется площадью, заключенной между двумя кривыми и осью координат, по которой откладывается величина деформации. Таким образом вся работа, затрачиваемая при деформировании материала, не восстанавливается, а некоторая часть энергии рассеивается.

В этом случае затраченная работа не является определенной функцией деформации, как при вполне упругой стадии деформации, а зависит от времени и предшествовавшего состояния материала.

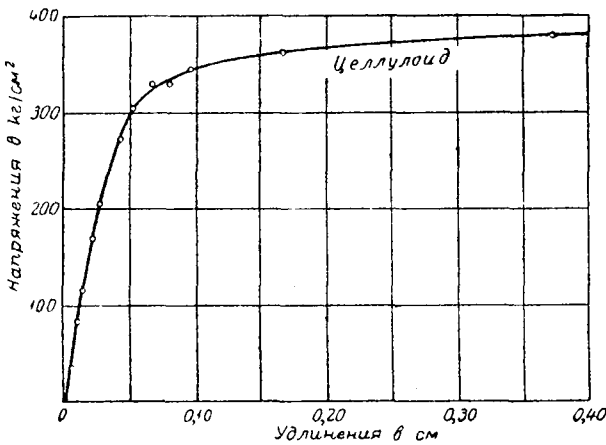
Появление необратимой остаточной деформации указывает на изменение состояния материала из упругого в более или менее пластическое. Этот переход отмечается изгибом вправо кривой до тех пор, пока нагрузка не достигает максимальной величины в 7,3 тонны, отвечающей напряжению в 37,5 кг/мм², величина напряжения в этот момент известна обычно под названием *предела текучести*. В изучаемом материале обнаруживается в этот момент характерное явление, которое редко наблюдается при испытании других материалов, а именно диаграмма растяжения начинает теперь падать, и напряжение доходит до наименьшего значения 32,6 кг/мм²; эта величина напряжения сохраняется почти постоянной до тех пор, пока удлинение не достигает величины приблизительно 0,25 см; после этого и нагрузка и удлинение увеличиваются совместно до тех пор, пока не будет достигнуто максимальное напряжение в 51,8 кг/мм² при общем удлинении в 2,03 см. С этого момента вся нагрузка измеряемая контрольным образцом, падает с увеличением деформации, в то время как напряжение возрастает, как показано пунктирной кривой на фиг. 2.191; это быстрое увеличение напряжения происходит по сечению в шейке, которая начинает образовываться в одном месте образца; в этом же месте происходит разрыв по минимальному поперечному сечению, равному в данном случае 0,806 см², что соответствует относительному сужению 59%₀ от первоначальной

¹ W. E. Dalby, The Mechanical Properties of Steel, Proc. Inst. C. E. 1925.

площади при наибольшем напряжении $88,2 \text{ кг/см}^2$; таким образом напряжение (но не вся нагрузка) постепенно увеличивается до самого конца опыта.

Многие важные технические материалы имеют однако малые пластические свойства: большинство инструментальных сталей, например, дают прямолинейную диаграмму вплоть до разрыва. С другой стороны, медь является примером материала, который имеет слабые упругие свойства и значительные пластичные, так как ее диаграмма растяжения является кривой, вогнутой к оси деформаций от начала до конца.

Диаграммы растяжения для большинства прозрачных тел пока еще не изучены столь подробно, как для металлов; однако надо предполагать, что они значительно отличаются по своим характеристикам. Диаграмма растяжения для стекла имеет сходство с диаграммой для инструментальной стали, но имеет значительно меньший модуль Юнга, равный обычно приблизительно половине модуля Юнга для стали.



Фиг. 2.192.

Нитроцеллюлоза, как прозрачный материал, весьма применима при исследовании напряжений оптическим методом, так как она может быть получена в виде пластинок и стержней, практически свободных от первоначальных напряжений, и легко поддается обработке и отделке, подобно мягкому железу при помощи обычных инструментов.

Ее поведение при растяжении может быть здесь иллюстрировано результатами испытания образца, имеющего длину $15,25 \text{ см}$, ширину $1,264 \text{ см}$ и толщину $0,644 \text{ см}$. Начальная часть диаграммы растяжения

показана на фиг. 2.192; из нее можно видеть, что при напряжении в 140 кг/см^2 начинает наблюдаться отклонение от линейного закона, которое становится постепенно все более и более заметным, и между 350 и 420 кг/см^2 направление кривой приближается, но не достигает горизонтали, и продолжается по этой линии до тех пор, пока не происходит разрыв при напряжении в 455 кг/см^2 , удлинении $4,37 \text{ см}$ или $28,7\%$ от первоначальной длины. Этот материал, в отличие от большинства пластичных материалов, удлиняется очень равномерно от начала до конца и не образует шейки или сужения в месте разрыва.

После разрушения этот материал имеет свойство укорачиваться; в вышеприведенном примере это укорочение достигает $1,06 \text{ см}$ или 7% , и сопровождается соответствующим увеличением поперечного сечения. Здесь модуль Юнга равен $21\,650 \text{ кг/см}^2$ или, приблизительно, одной сотой модуля Юнга для большинства сортов стали, применяемых в конструкциях. Материал, находящийся под напряжением, показывает также некоторое изменение величины деформации с течением времени. Это явление называется *ползучестью* и рассматривается в главе III.

§ 2.20. Теории прочности.

Для объяснения нарушения упругого поведения материала было выдвинуто много гипотез, особенно для сложного напряженного состояния. Самой старой является гипотеза, согласно которой это нарушение наступает, когда наибольшее главное напряжение достигает для данного материала определенной величины.

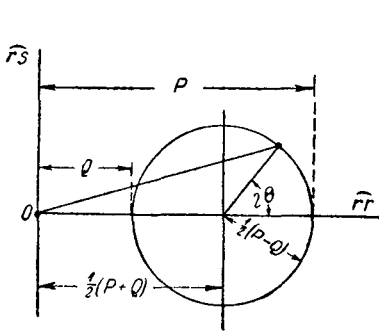
Этого взгляда придерживались такие ученые, как Навье, Ламэ, Клебш, и особенно эта гипотеза связана с именем Рэнкина.

Вторая гипотеза, выдвинутая первоначально Мариоттом и особенно связанная с именем Сен-Венана, объясняет наступление текучести материала как следствие достижения деформацией некоторой предельной величины.

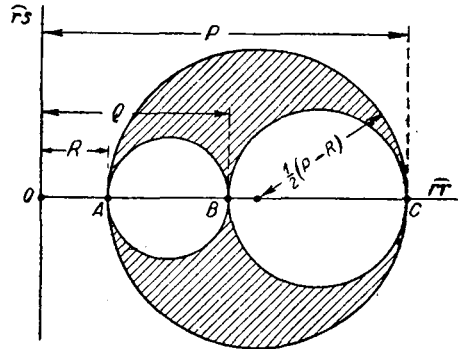
Третья гипотеза, объясняющая появление пластических деформаций как следствие достижения касательными напряжениями предельной величины, была по-видимому выдвинута первоначально в 1776 году Кулоном, однако основные соображения в ее пользу были представлены значительно позднее экспериментами Треска, Дарвина и особенно Гэстом.

Эта последняя теория подтверждается, кроме того, кристаллографическими исследованиями Юинга и Розенгейна, которые впервые показали, что наступление текучести в пластичных материалах связано с образованием линий сдвигов в кристаллах.

Применимость этих теорий к различным материалам исчерпывающе рассматривалась в других работах, и нет необходимости здесь останавливаться на этом подробно; следует лишь отметить, что, если мы можем рассматривать предельное значение наибольшего касательного напряжения S как единый критерий (хотя оно



Фиг. 2.201.



Фиг. 2.202.

может быть представлено в виде разности между наибольшим и наименьшим главными нормальными напряжениями), то эти три теории образуют группу гипотез, основанных на каком-либо одном критерии: 1) максимум главного напряжения $P = \text{const}$, 2) величина максимальной главной деформации $s = \text{const}$, 3) максимальное касательное напряжение $S = \text{const}$, в противоположность другой группе многочисленных гипотез, выдвинутых за последние годы. Из этих гипотез гипотеза Мора является интересной в том отношении, что она представляет комбинацию первой и третьей теорий и за счет своего более широкого охвата явления нашла многих последователей среди ученых на континенте.

Ее основные черты могут быть описаны кратко применительно к плоскому напряженному состоянию, где главное напряжение P направлено вдоль оси Ox , а другое Q вдоль оси Oy . Мы имеем, таким образом, для двух взаимно перпендикулярных направлений r и s , наклоненных под углами θ , $\theta + \frac{\pi}{2}$ к Ox :

$$\widehat{rr} = P \cos^2 \theta + Q \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (P + Q) + \frac{1}{2} (P - Q) \cos 2\theta,$$

$$\widehat{rs} = -\frac{1}{2} (P - Q) \sin 2\theta.$$

Если мы отложим величины \widehat{rr} как абсциссы и \widehat{rs} как ординаты (фиг. 2.201) при всех возможных значениях θ , то конечные точки соответствующих векторов,

проведенных из начала координат, будут лежать на окружности радиуса $\frac{1}{2}(P-Q)$ с центром, отстоящим на $\frac{1}{2}(P+Q)$ от начала по оси \widehat{rr} , и все возможные варианты отношений между \widehat{rr} и \widehat{rs} будут представлены прямоугольными координатами точек этой окружности.

Мы видим сразу на примере, что максимальное касательное напряжение равно $\frac{1}{2}(P-Q)$. При трехмерном напряженном состоянии, где $P > Q > R$, мы имеем для каждой пары главных напряжений соответствующую окружность; огибающая окружность имеет радиус $\frac{1}{2}(P-R)$ (фиг. 2.202), что иллюстрирует тот факт, что величина максимального касательного напряжения равна $\frac{1}{2}(P-R)$ и что промежуточное главное напряжение имеет сравнительно малое значение. Можно показать также, что векторы, проведенные к точкам, лежащим в заштрихованных площадях фиг. 2.202, соответствуют площадкам, наклоненным под разными углами к главным осям напряжения.

Теория Мора устанавливает непрерывный ряд соотношений между величиной нормальных и касательных напряжений, при которых в материале наступают пластические деформации; это соотношение может быть выражено в виде

$$\widehat{rs} = f(\widehat{rr}),$$

где f является определенной функцией. Наступление остаточных деформаций в данной точке будет таким образом иметь место, если кривая $\widehat{rs} = f(\widehat{rr})$, нанесенная на диаграмму фиг. 2.202, будет касаться наружной из трех окружностей. Функция f может быть, таким образом, определена экспериментально, если мы подвергнем материал различным комбинациям главных напряжений P, Q, R , вызывающим наступление пластических деформаций. Эти комбинации образуют непрерывный ряд, и каждой из них соответствует внешняя окружность определенных размеров. Все эти окружности касаются кривой $\widehat{rs} = f(\widehat{rr})$, или симметричной ей кривой $\widehat{rs} = -f(\widehat{rr})$; обе эти кривые являются огибающими для серии окружностей. Если материал подвергается простому растяжению величиной $+P_1$ или простому сжатию напряжением $-P_2$, то соответствующие окружности будут конечными окружностями ряда, и огибающая будет касаться их в точках пересечения с осью \widehat{rr} . Таким образом эта теория включает в себя и теорию наибольшего главного напряжения и теорию максимального касательного напряжения, так как первая представлена двумя конечными точками на оси \widehat{rr} , а вторая дает пару параллельных линий, отстоящих на $\frac{1}{2}(P-R)$ от оси \widehat{rr} и удовлетворяющих условию постоянства максимального касательного напряжения в материале таком, как мягкое железо, для которого, по всей вероятности, предел текучести при растяжении и сжатии одинаков.

Другая теория типа Мора основывается на одновременном учете предельного касательного напряжения и предельной деформации.

Отдельная группа теорий исходит из представления, что существует некоторый предел величины работы деформации W (см. § 2.12), которая может накопиться в единице объема без наступления остаточных деформаций; в подобной теории, предложенной первоначально Хэйгом, и немного позднее Бельтрами, имеет место влияние всех составляющих напряжения или деформации.

Если главные напряжения P , Q и R направлены по координатным осям, то мы находим для потенциальной энергии деформации W выражение

$$2EW = P^2 + Q^2 + R^2 - 2\eta(QR + RP + PQ). \quad (2.20)$$

Это вытекает из того обстоятельства, что W является однородной функцией второй степени от составляющих деформации, так что по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\begin{aligned} 2W &= \frac{\partial W}{\partial s_x} s_x + \frac{\partial W}{\partial s_y} s_y + \frac{\partial W}{\partial s_z} s_z + \frac{\partial W}{\partial \sigma_{yz}} \sigma_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \sigma_{zx}} \sigma_{zx} + \frac{\partial W}{\partial \sigma_{xy}} \sigma_{xy} = \\ &= \widehat{xx} s_x + \widehat{yy} s_y + \widehat{zz} s_z, \end{aligned}$$

так как в этом случае оси координат являются главными осями.

Принимая

$$\begin{aligned} \widehat{xx} &= P, \quad \widehat{yy} = Q, \quad \widehat{zz} = R, \\ s_x &= \frac{P - \eta Q - \eta R}{E}, \quad s_y = \frac{Q - \eta R - \eta P}{E}, \quad s_z = \frac{R - \eta P - \eta Q}{E}, \end{aligned}$$

мы получаем уравнение (2.20).

Если $W = \text{const}$, то (2.20) является уравнением (в P , Q , R) поверхности второй степени, имеющей центр в начале координат, с полуосями, наклоненными к координатным осям под одинаковыми углами, причем их длина зависит от величины коэффициента Пуассона η . Таким образом нарушение упругого поведения материала может зависеть от обширного ряда комбинаций величин напряжений, подчиняющихся условию, что W является постоянной величиной для данного материала. Если из величины энергии W мы вычтем часть W_1 , которая зависит от среднего гидростатического напряжения $\frac{1}{3}(P + Q + R)$, то получим другую

теорию, выдвинутую Мизесом. Она предполагает, что условием нарушения упругого состояния материала является достижение величиной $W - W_1$ некоторого предельного значения для данного материала. Условия, определяющие момент нарушения упругого состояния, по обеим последним теориям могут быть выражены через составляющие деформации. Ни одна из перечисленных теорий не является, кажется, общеприменимой для всех материалов.

Следует заметить, что все вышеприведенные теории имели в виду нарушение упругого состояния, а не окончательное разрушение материала.

В этом отношении часто возникает большая путаница и некоторые из выше перечисленных теорий употребляются так же, как теории полного разрушения материала. Мы не предполагаем входить в рассмотрение этого трудного вопроса, который является предметом многих исследований и который лежит за пределами нашего рассмотрения, однако можно отметить, что теории, рассматривающие вопрос об окончательном разрушении, отличаются значительно друг от друга, в зависимости от рода рассматриваемого материала.

Если взять два крайних случая, то для весьма хрупких материалов (скажем, стекла) причиной разрушения является вероятно наибольшая (алгебраическая) разность напряжений, причем растяжение берется со знаком плюс; материал разрушается по поверхности, перпендикулярной к направлению наибольшего растяжения. С другой стороны, в некоторых пластичных материалах разрушение происходит повидимому вследствие ослабления сопротивления сдвигу, причем плоскость разрушения будет идти вдоль, или близко к направлению большего касательного напряжения, т. е. под 45° к плоскости разрушения в предыдущем случае. Критерием является очевидно величина наибольшего касательного напряжения. Хотя критическая величина (наибольшее касательное напряжение, или разность главных) как будто одинакова в обоих случаях, механизм разрушения будет совершенно

различным. Для материалов промежуточного вида возможно, что причина окончательного разрушения будет еще более сложной.

§ 2.21. Плоская задача теории упругости.

Наиболее важный тип задач, для исследования которых применим оптический метод изучения напряжений, относится к пластинке, которая деформируется в ее собственной плоскости. Исключая случаи нарушения упругой устойчивости, как то выпучивание, можно принять, что средняя плоскость пластинки является плоскостью симметрии, и перемещения точек этой плоскости зависят только от координат этой плоскости. Эту плоскость мы будем брать за плоскость $x, y, (z=0)$ и будем называть *плоскостью деформации*. Напряжения, деформации и перемещения симметричны по отношению к ней. Следовательно, u и v являются четными функциями от z , а w является нечетной функцией от z . Отсюда следует, что $\widehat{xx}, \widehat{xy}, \widehat{yy}, \widehat{zz}$ являются все четными по отношению к z , а \widehat{xz} и \widehat{yz} являются нечетными.

Примерами такой плоской или квазиплоской задачи будут: стенка балки при изгибе; изгиб балки с прямоугольным поперечным сечением, изогнутой в одной из главных плоскостей; сжатый цилиндр или диск; зубцы колес; действие заклепок на склепанные листы и т. д.

Существуют два важных вида плоской задачи, причем в обоих случаях, как это видно будет, мы приходим к одним и тем же уравнениям. Первый вид — *плоская деформация*; второй — *обобщенное плоское напряженное состояние*.

§ 2.22. Плоская деформация.

При *плоской деформации* перемещения во всех точках параллельны плоскости деформации и одинаковы во всех плоскостях, параллельных этой плоскости, т. е. независимы от z . Деформация таким образом является строго двухмерной.

Так как $w=0$ для плоскости $z=0$, оно должно быть следовательно нулем всюду, а u и v являются функциями только x, y . Мы имеем

$$s_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

и следовательно

$$\widehat{xz} = \widehat{yz} = 0.$$

Далее

$$\Delta = s_x + s_y = \Delta',$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \lambda \Delta' + 2\mu s_x; & \widehat{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \widehat{yy} &= \lambda \Delta' + 2\mu s_y; & s_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \widehat{zz} &= \lambda \Delta'; & s_y &= \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.221)$$

Таким образом, напряжения и составляющие деформации являются функциями только x, y .

Уравнения равновесия принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{xy}}{\partial y} &= -\rho X \\ \frac{\partial \widehat{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yy}}{\partial y} &= -\rho Y. \end{aligned} \right\} \quad (2.222)$$

Объемная сила не зависит от z и имеет составляющие X, Y , расположенные в плоскости деформации; составляющая этой силы, перпендикулярная к плоскости деформации, равна нулю. Так как рассматриваемая нами объемная сила является тяжестью, то мы подразумеваем, что плоскость пластинки вертикальна.

Уравнения (2.221) и (2.222) дают полное математическое решение задачи.

Чрезвычайно важно отметить, что до тех пор, пока Δ' не будет равно нулю во всех точках пластинки, для осуществления плоской деформации необходимо наличие бокового нормального напряжения \widehat{zz} . Если таким образом не предусмотрено некоторое соответствующее боковое закрепление, этот тип деформации не может быть осуществлен в действительности. Приближение к нему имеет место в средней части каменной плотины благодаря жесткому характеру примыкающего материала. В лабораторных условиях плоская деформация может быть получена следующим путем.

Возьмем сравнительно тонкий лист материала и согнем его в форму цилиндра. Опыт показывает, что полученная при этом деформация изгиба весьма близка к плоской деформации. „Пластика“, рассмотренная выше, настолько увеличивая свою „толщину“ по сравнению с другими размерами, что в действительности „толщина“ стала шириной, а „высота“ — толщиной.

Очевидно, что тем или иным образом напряжение \widehat{zz} должно появиться перпендикулярно к плоскости деформации. Однако боковые края листа несомненно свободны от напряжения. Таким образом это напряжение \widehat{zz} исчезает по мере того, как мы приближаемся к боковым краям.

Деформация таким образом не может быть целиком плоской, и местные отклонения имеют место у краев. Обычно предполагается, что такие местные отклонения затухают весьма быстро, по мере того как мы удаляемся от краев, и что тип напряженного состояния, данный уравнениями (2.221), действительно имеет место для большей части материала.

§ 2.23. Обобщенное плоское напряженное состояние.

В этой задаче мы предполагаем, что пластинка имеет небольшую, хотя не обязательно очень малую, толщину. Мы будем считать, что плоскости $z = \pm c$ совершенно свободны от напряжения, т. е. напряжение \widehat{zz} является тождественно равным нулю. В § 2.26 мы увидим, что это предположение может быть оправдано.

Перемещения и напряжения будут меняться с изменением z ; однако их изменения сравнительно малы (хотя математически не равны нулю) по сравнению с их средними значениями, взятыми по толщине пластинки. Со средними значениями мы, главным образом, и будем иметь дело. Обозначим средние значения (взяты по толщине) от $u, v, \widehat{xx}, \widehat{xy}, \widehat{yy}$ через

$$U, V, \widehat{xx}, \widehat{xy}, \widehat{yy},$$

так что

$$U = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} u \, dz, \quad V = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} v \, dz, \tag{2.231}$$

$$\widehat{xx} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \widehat{xx} \, dz, \quad \widehat{xy} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \widehat{xy} \, dz, \quad \widehat{yy} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \widehat{yy} \, dz. \tag{2.232}$$

Установим прежде всего уравнения, связывающие средние напряжения со средними перемещениями. Мы имеем

$$\widehat{xx} = \lambda \left(\Delta' + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.2331)$$

$$\widehat{yy} = \lambda \left(\Delta' + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2332)$$

$$0 = \lambda \Delta' + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.2333)$$

Подставляя значения $\partial w/\partial z$ из (2.2333) в (2.2331) и (2.2332), мы получаем

$$\widehat{xx} = \lambda' \Delta' + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.2341)$$

$$\widehat{yy} = \lambda' \Delta' + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2342)$$

где $\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ как в § 2.17; к этим уравнениям мы присоединяем

$$\widehat{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.2343)$$

Теперь вычислим средние значения напряжений из уравнений (2.2341), (2.2342), (2.2343), учитывая, что

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} u dz \right) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.2351)$$

и аналогично

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (2.2352)$$

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.2353)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \lambda' \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \\ \widehat{yy} &= \lambda' \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} \\ \widehat{xy} &= \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.236)$$

Рассмотрим теперь уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{xz}}{\partial z} &= -\rho X \\ \frac{\partial \widehat{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{yz}}{\partial z} &= -\rho Y \\ \frac{\partial \widehat{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.237)$$

причем поле объемной силы мы будем считать строго двухмерным, как в § 2.22.

Вычислим средние значения для напряжений по толщине в первых двух уравнениях (2.237). Мы имеем

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial \widehat{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial \overline{xx}}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

и

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial \widehat{xz}}{\partial z} dz = \frac{1}{2c} (\overline{xz}_{+c} - \overline{xz}_{-c}) = 0,$$

так как \widehat{xz} обращается в нуль на свободных сторонах пластинки $z = \pm c$.

Подобно этому

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial \widehat{yz}}{\partial z} dz = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{xy}}{\partial y} &= -\rho X \\ \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{yy}}{\partial y} &= -\rho Y. \end{aligned} \right\} \quad (2.238)$$

Третьего уравнения из (2.237) не требуется, так как оно не включает в себе xx или yy .

Отметим, что уравнения (2.236) имеют одинаковую форму с (2.221), а (2.238) имеют ту же форму, что и (2.222); разница лишь в том, что средние перемещения и напряжения стали на место действительных перемещений и напряжений, и что постоянная Ламэ λ заменена постоянной плоского напряженного состояния λ' .

Таким образом, нет необходимости формулировать и решать каждую задачу отдельно, что повело бы к повторениям. Будем всюду, говоря о двухмерной задаче, подразумевать обобщенное плоское напряженное состояние, за исключением случаев, где оговорено обратное.

Читателя не затруднит применить результаты к случаю плоской деформации, если это потребуется. На практике однако чаще всего встречается задача обобщенного плоского напряженного состояния.

§ 2.24. Функция напряжений и ее дифференциальное уравнение.

Вернемся к уравнениям (2.238) и напомним

$$\overline{xy} = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial y}, \quad (2.241)$$

где χ_1 является некоторой функцией, получаемой из \overline{xy} путем двойного интегрирования.

Пусть X , Y — составляющие силы, имеющие потенциал Ω , так что

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (2.242)$$

и предположим, что плотность ρ материала постоянна.

Тогда уравнения (2.238) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{xx} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2} - \rho \Omega \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\overline{yy} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} - \rho \Omega \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.243)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{xx} &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2} + \rho \Omega + f_2''(y), \\ \overline{yy} &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \rho \Omega + f_1''(x), \end{aligned}$$

где $f_2''(y)$, $f_1''(x)$ являются произвольными функциями, представленными в виде вторых производных.

Положим теперь

$$\chi = \chi_1 + f_1(x) + f_2(y).$$

Тогда мы имеем

$$\overline{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \rho \Omega, \quad (2.2441)$$

$$\overline{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \rho \Omega, \quad (2.2442)$$

$$\overline{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad (2.2443)$$

и напряжения выражаются через одну функцию χ . Следует отметить, что этот результат является независимым от вида соотношений между напряжениями и деформациями, и следовательно, остается в силе для любой среды, пластичной, вязкой или упругой.

Функция χ была первоначально введена для случая $\Omega = 0$ Джорджем Эри и известна под названием функции напряжений Эри. Вышеприведенные вычисления показывают, что такая функция существует, даже если объемные силы не равны нулю.

Чтобы найти дифференциальное уравнение, решением которого является χ ; мы должны использовать зависимость между напряжениями и деформациями.

Из первых двух уравнений (2.236) путем сложения находим

$$\overline{xx} + \overline{yy} = 2(\lambda' + \mu) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right),$$

откуда, определяя $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$ и подставляя в два первоначальных уравнения, получаем

$$2\mu \frac{\partial U}{\partial x} = \overline{xx} - \sigma(\overline{xx} + \overline{yy}), \quad (2.2451)$$

$$2\mu \frac{\partial V}{\partial y} = \overline{yy} - \sigma(\overline{xx} + \overline{yy}), \quad (2.2452)$$

где σ имеет значение, установленное в § 2.18.

Дифференцируя (2.2451) дважды по y , (2.2452) дважды по x и складывая, получаем, принимая во внимание третье уравнение (2.236):

$$2 \frac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \overline{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{yy}}{\partial x^2} - \sigma \nabla^2 (\overline{xx} + \overline{yy}), \quad (2.246)$$

где ∇^2 обозначает оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Подставляя в (2.246) вместо средних напряжений их значения из (2.2441), (2.2442) и (2.2443), мы находим, после простой перестановки слагаемых:

$$(1 - \sigma)\nabla^4\chi + \rho(1 - 2\sigma)\nabla^2\Omega = 0, \tag{2.247}$$

что представляет собой дифференциальное уравнение для функции напряжений.

В случаях, с которыми нам приходится иметь дело, взаимопротяжение частей материала может быть оставлено без учета. Таким образом Ω будет потенциалом масс и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Omega = 0;$$

тогда, сокращая (2.247) на $(1 - \sigma)$, получаем

$$\nabla^4\chi = 0 \tag{2.248}$$

— дифференциальное уравнение для χ , которое не включает в себе постоянных упругости.

Так как формулы для напряжений, выраженные через χ , не содержат упругих постоянных, то очевидно, что во всякой двухмерной задаче, в которой пограничные условия выражены через напряжения, решение должно быть совершенно независимым от упругих постоянных. Прежде считали, что это случайность: однако, как будет показано в главе IV, условие, что перемещения должны быть однозначными, вводит в решение отношение упругих постоянных всякий раз, когда пластинка является многосвязной, т. е. имеющей отверстия. Полученный результат таким образом относится (не считая особых случаев) к пластинкам с односвязным контуром.

§ 2.25. Выражения для перемещений через функцию напряжений в прямоугольных координатах.

Возвращаясь к уравнениям (2.2451) и (2.2452), мы можем переписать их в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} &= -\overline{y\dot{y}} + (1 - \sigma)(\overline{x\dot{x}} + \overline{y\dot{y}}) \\ 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} &= -\overline{x\dot{x}} + (1 - \sigma)(\overline{x\dot{x}} + \overline{y\dot{y}}). \end{aligned} \right\} \tag{2.251}$$

Напишем

$$\overline{x\dot{x}} + \overline{y\dot{y}} = \nabla^2\chi + 2\rho\Omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + \frac{\rho}{1 - \sigma}\Omega, \tag{2.252}$$

получаем уравнение, определяющее ψ с точностью до произвольной функции от x и произвольной функции от y ; выражение (2.251) обращается в следующее:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}, \\ 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем:

$$2\mu U = -\frac{\partial\chi}{\partial x} + (1 - \sigma) \frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{2.2531}$$

$$2\mu V = -\frac{\partial\chi}{\partial y} + (1 - \sigma) \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.2532}$$

причем произвольные функции, получающиеся при интегрировании, включаются в ψ , как и раньше.

Эти значения U и V должны быть такими, чтобы было удовлетворено условие

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \bar{x}y = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.$$

Дифференцируя (2.2531) и (2.2532) по y и x и складывая, мы получаем

$$2\bar{x}y = -2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + (1 - \sigma) \nabla^2 \psi,$$

откуда

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (2.254)$$

Функция ψ , определяемая из (2.252), должна так подбираться (при помощи произвольных функций интегрирования), чтобы удовлетворять уравнению (2.254).

Что она действительно может быть так выбрана, делается очевидным при применении к (2.252) оператора ∇^2 . В самом деле, тогда имеем

$$\nabla^4 \chi + 2\rho \nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla^2 \psi),$$

и так как

$$\nabla^2 \Omega = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^4 \chi = 0,$$

то

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla^2 \psi) = 0,$$

откуда видно, что при прибавлении к ψ соответствующих слагаемых вида $f_1(x) + f_2(y)$ мы можем сделать $\nabla^2 \psi = 0$.

Если ψ найдено таким образом, то перемещения U и V выражаются формулами (2.2531) и (2.2532).

Принято называть ψ *функцией перемещений*.

§ 2.26. Точное решение, удовлетворяющее условию $\widehat{zz} = 0$.

Предположение, сделанное в § 2.23, что $\widehat{zz} = 0$ или во всяком случае \widehat{zz} является настолько малой величиной, что можно свободно пренебречь ею, не противоречит основным уравнениям. Самым прямым путем для доказательства этого утверждения будет получение точного решения, которое дает во всех точках для \widehat{zz} значение нуль.

Предположим, что решение дано в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= U + (z^2 - c^2/3) U_1 \\ v &= V + (z^2 - c^2/3) V_1 \\ w &= z W_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.261)$$

где U_1 , V_1 , W_1 являются функциями только от x , y . Множитель $(z^2 - c^2/3)$ в уравнениях (2.261) введен потому, что при вычислениях средние значения по толщине дают значение, равное нулю.

Подставляя значения u , v и w из (2.261) в обычные зависимости между напряжениями и деформациями, получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W_1 \right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} + \\ &+ (z^2 - c^2/3) \left[\lambda \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial U_1}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (2.2621)$$

$$\widehat{yу} = \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W_1 \right) + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} + \\ + (z^2 - c^2/3) \left[\lambda \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial y} \right], \quad (2.2622)$$

$$\widehat{zz} = 0 = \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) W_1 + (z^2 - c^2/3) \lambda \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right), \quad (2.2623)$$

$$\widehat{xу} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \mu (z^2 - c^2/3) \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right), \quad (2.2624)$$

$$\widehat{xz} = \mu z \left(2U_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x} \right), \quad (2.2625)$$

$$\widehat{yz} = \mu z \left(2V_1 + \frac{\partial W_1}{\partial y} \right). \quad (2.2626)$$

Из уравнения (2.2623) следует, что коэффициент при $(z^2 - c^2/3)$ и слагаемое, независимое от этого множителя, должны порознь быть равными нулю в силу того, что U, V, U_1, V_1 и W_1 независимые функции от z , откуда получаем:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (2.2631)$$

и

$$W_1 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right). \quad (2.2632)$$

Но из § 2.24

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2(\lambda' + \mu)} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}) = \\ = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}) = \frac{1 - \eta}{E} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}), \quad (2.2633)$$

так что

$$W_1 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}) = -\frac{\eta}{E} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}). \quad (2.2634)$$

Подставляя выражения (2.2631) и (2.2632) в уравнения (2.2621), (2.2622), получаем следующие формулы для напряжений [исходя из уравнений (2.236)]

$$\widehat{xx} = \widetilde{xx} + 2\mu (z^2 - c^2/3) \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad (2.2641)$$

$$\widehat{yу} = \widetilde{yу} + 2\mu (z^2 - c^2/3) \frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad (2.2642)$$

$$\widehat{xу} = \widetilde{xу} + \mu (z^2 - c^2/3) \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right), \quad (2.2643)$$

$$\widehat{xz} = \mu z \left(2U_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x} \right), \quad (2.2644)$$

$$\widehat{yz} = \mu z \left(2V_1 + \frac{\partial W_1}{\partial y} \right). \quad (2.2645)$$

Подставим теперь выбранное решение в уравнения равновесия (2.237); применяя (2.238), мы получаем

$$(z^2 - c^2/3) \left\{ 2\mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} \right\} + \mu \left(2U_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.2651)$$

$$(z^2 - c^2/3) \left\{ 2\mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} \right\} + \mu \left(2V_1 + \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.2652)$$

$$\mu z \left(2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial V_1}{\partial y} + \nabla^2 W_1 \right) = 0. \quad (2.2653)$$

Уравнение (2.2653) тождественно удовлетворено в силу (2.2631) и (2.2634), так как $\widehat{xx} + \widehat{yy} = \nabla^2 \chi$ и $\nabla^4 \chi = 0$.

Приравнявая нулю коэффициенты при $(z^2 - c^2/3)$ и слагаемые, независимые от этого множителя в (2.2651) и (2.2652), получаем:

$$2U_1 + \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad 2V_1 + \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0, \quad (2.266)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) &= 0 \\ \nabla^2 V_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.267)$$

Уравнения (2.267) тождественно удовлетворены в силу (2.2631), (2.266) и $\nabla^2 W_1 = 0$.

Уравнения (2.266) полностью определяют U_1 и V_1 , так как W_1 известно из (2.2634). Следовательно, все неизвестные определены и все уравнения удовлетворены.

Окончательное решение принимает вид:

$$u = U + \frac{\eta}{2E} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial}{\partial x} (\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad (2.2681)$$

$$v = V + \frac{\eta}{2E} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial}{\partial y} (\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad (2.2682)$$

$$w = -\frac{z\eta}{E} (\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad (2.2683)$$

$$\begin{aligned} \widehat{xx} &= \widehat{xx} + \frac{\mu\eta}{E} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\widehat{xx} - \widehat{yy}) = \\ &= \widehat{xx} + \frac{1}{2(m+1)} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\widehat{xx} + \widehat{yy}), \end{aligned} \quad (2.2691)$$

где m имеет значение, указанное в § 2.15. Подобно этому

$$\widehat{yy} = \widehat{yy} + \frac{1}{2(m+1)} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad (2.2692)$$

$$\widehat{xy} = \widehat{xy} + \frac{1}{2(m+1)} (z^2 - c^2/3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\widehat{xx} + \widehat{yy}). \quad (2.2693)$$

Следует отметить, что полученное решение является только одним из многих, при которых $\widehat{zz} = 0$ повсюду. Другие решения однако не приводят к тождественному обращению в нуль величин \widehat{xz} и \widehat{yz} .

§ 2.27. Напряжения по наклонным площадкам в двух измерениях.

Рассмотрим теперь, как меняются средние напряжения при переходе от площадок, параллельных осям Ox и Oy , к площадкам, проходящим через ту же точку P , но параллельным направлениям dn и ds (фиг. 2.27). Направление dn образует угол φ с положительным направлением оси Ox , а ds получается из dn путем вращения последней (против часовой стрелки) на 90° .

Рассмотрим прежде всего напряжения по площадке ds , перпендикулярной dn .

Обращаясь вновь к уравнениям (2.09), полагая

$$l = \cos \varphi, \quad m = \sin \varphi, \quad n = 0,$$

и кроме того заменяя q через n , мы находим

$$\left. \begin{aligned} \widehat{nx} &= \widehat{xx} \cos \varphi + \widehat{xy} \sin \varphi \\ \widehat{ny} &= \widehat{xy} \cos \varphi + \widehat{yy} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.271)$$

Вычисляя из уравнений (2.271) средние значения и помня, что φ является постоянной величиной при интегрировании, получаем соответствующие формулы перехода для средних напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \overline{nx} &= \overline{xx} \cos \varphi + \overline{xy} \sin \varphi \\ \overline{ny} &= \overline{xy} \cos \varphi + \overline{yy} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.2721)$$

и соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \overline{sx} &= -\overline{xx} \sin \varphi + \overline{xy} \cos \varphi \\ \overline{sy} &= -\overline{xy} \sin \varphi + \overline{yy} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.2722)$$

Проектируя уравнения (2.2721) и (2.2722) на направления dn и ds , находим:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{nn} &= \widehat{nx} \cos \varphi + \widehat{ny} \sin \varphi \\ \widehat{sn} &= \widehat{ns} = -\widehat{nx} \sin \varphi + \widehat{ny} \cos \varphi \\ &= \widehat{sx} \cos \varphi + \widehat{sy} \sin \varphi \\ \widehat{ss} &= -\widehat{sx} \sin \varphi + \widehat{sy} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.273)$$

откуда после вычисления среднего значения получаем уравнения, схожие по форме с уравнениями (2.2721) и (2.2722).

Подставляя в эти уравнения величины из (2.2721) и (2.2722), мы приходим к следующим формулам:

$$\overline{nn} = \overline{xx} \cos^2 \varphi + 2\overline{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \overline{yy} \sin^2 \varphi, \quad (2.2731)$$

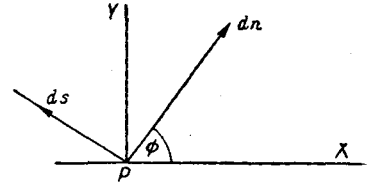
$$\overline{ss} = \overline{xx} \sin^2 \varphi - 2\overline{xy} \cos \varphi \sin \varphi + \overline{yy} \cos^2 \varphi, \quad (2.2732)$$

$$\overline{ns} = (\overline{yy} - \overline{xx}) \cos \varphi \sin \varphi + \overline{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (2.2733)$$

Заметим, что из (2.2731) и (2.2732) после сложения получаем

$$\overline{nn} + \overline{ss} = \overline{xx} + \overline{yy} = \nabla^2 \chi, \quad (2.274)$$

что является инвариантом в данной точке (x, y) .



Фиг. 2.27.

Кроме того

$$\overline{nn} - \overline{ss} = (\overline{xx} - \overline{yy}) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 4\overline{xy} \cos \varphi \sin \varphi. \quad (2.275)$$

§ 2.28. *Линии главных средних напряжений. Изоклинические, изохроматические линии и другие кривые.*

В двухмерных задачах теории упругости мы имеем в каждой точке два направления главных напряжений (в случае плоской деформации) или главных средних напряжений (в случае обобщенного плоского напряженного состояния).

Чтобы найти эти направления, мы пользуемся условием, что \overline{ns} (или \overline{ns} , в зависимости от случая) обращается в нуль. Пользуясь уравнением (2.273), получаем

$$(\overline{yy} - \overline{xx}) \sin \varphi \cos \varphi + \overline{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\overline{xy}}{\overline{xx} - \overline{yy}}. \quad (2.281)$$

Углы φ , $\varphi + \frac{\pi}{2}$, получаемые из формулы (2.281), определяют направления главных напряжений. Уравнение (2.281) имеет два решения, а именно:

$$\cos 2\varphi = \pm \frac{\overline{xx} - \overline{yy}}{\sqrt{(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2}}, \quad \sin 2\varphi = \pm \frac{2\overline{xy}}{\sqrt{(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2}}, \quad (2.282)$$

причем берется либо верхний, либо нижний знаки. Если первый выбор дает φ , то второй дает $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Главные средние напряжения могут быть вычислены из уравнений (2.274) и (2.275), а именно

$$\overline{nn} + \overline{ss} = \overline{xx} + \overline{yy},$$

что дает сумму двух главных средних напряжений, и

$$\overline{nn} - \overline{ss} = (\overline{xx} - \overline{yy}) \cos 2\varphi + 2\overline{xy} \sin 2\varphi = \sqrt{(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2}, \quad (2.283)$$

что определяет разность главных средних напряжений; последняя величина является основной при исследованиях оптическим методом.

Мы будем обозначать обычно главные средние напряжения буквами P и Q . Таким образом имеем:

$$P = \frac{1}{2} (\overline{xx} + \overline{yy}) + \frac{1}{2} \sqrt{(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2}, \quad (2.2841)$$

$$Q = \frac{1}{2} (\overline{xx} + \overline{yy}) - \frac{1}{2} \sqrt{(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2}. \quad (2.2842)$$

При этих обозначениях P является алгебраическим большим напряжением, причем растяжение считаем положительным. Следовательно, в равенстве (2.282) нужно взять знак плюс, и мы получим

$$\left. \begin{aligned} (P - Q) \cos 2\varphi &= \overline{xx} - \overline{yy}, \\ (P - Q) \sin 2\varphi &= 2\overline{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2.285)$$

что определяет φ однозначно.

В главе III будет показано, как могут быть определены значения φ и $(P - Q)$ непосредственно в пластинке из прозрачного материала путем наблюдения в поляризованном свете.

Способ определения P и Q отдельно путем графического интегрирования будет дан позже; способ же определения P и Q при помощи поперечного экстенсометра дан в § 2.34.

Кроме линий главных нормальных напряжений, существуют еще два семейства линий, имеющих большое значение при оптическом методе изучения напряжений.

Первая группа линий является геометрическим местом точек, в которых направление главных средних напряжений параллельно заданным направлениям образующим, например, углы α'

$\alpha + \frac{\pi}{2}$ с положительным направлением оси Ox .

Эти линии называются *изоклиническими* линиями; α является параметром соответствующей изоклины. Уравнение изоклины параметра α имеет очевидно вид (так как в § 2.281 $\varphi = \alpha$)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\overline{xy}}{\overline{xx} - \overline{yy}}. \quad (2.286)$$

Вторая группа является геометрическим местом точек, в которых разность главных средних нормальных напряжений имеет данную величину. Благодаря важному оптическому свойству этих линий, мы будем обычно называть их *изохроматическими* линиями. Уравнение изохроматической линии имеет вид

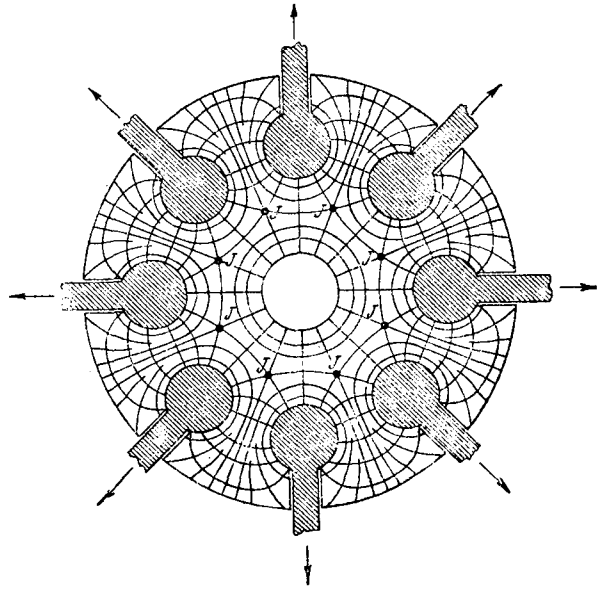
$$(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2 = R^2, \quad (2.287)$$

где R является параметром изохроматической линии.

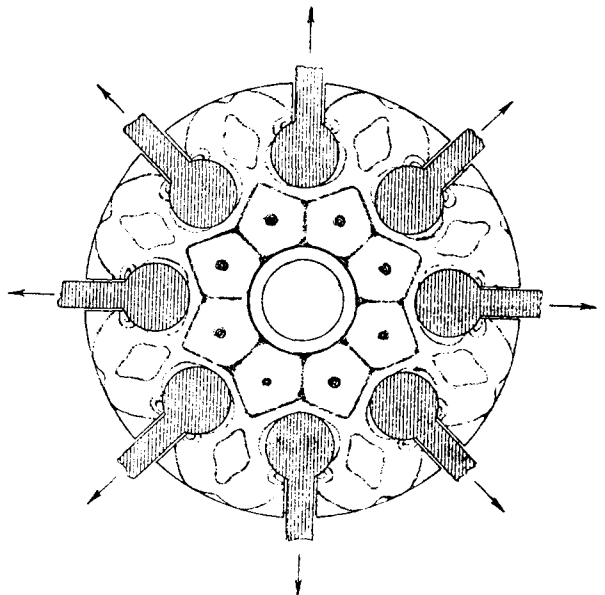
В некоторых точках мы можем получить разность главных напряжений равной нулю. Для этого необходимо соблюдение двух независимых условий, а именно

$$\overline{xx} - \overline{yy} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{xy} = 0,$$

так что, вообще говоря, это может иметь место только в *изолированных точках*, которые называются *нейтральными* или *изотропными* точками. В особых случаях



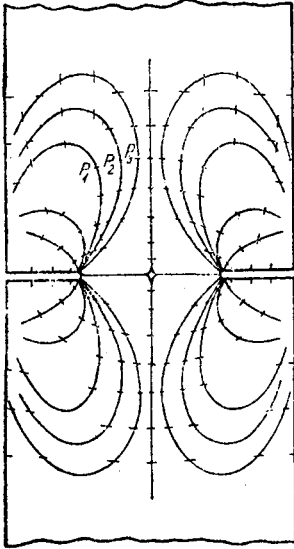
Фиг. 2.281a.



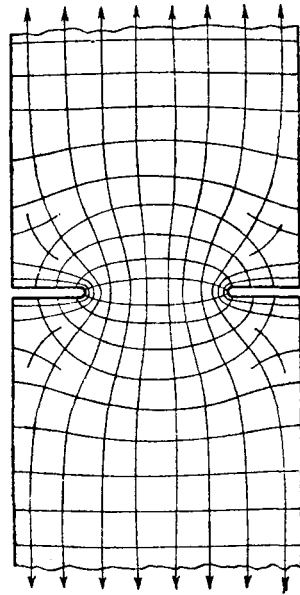
Фиг. 2.281b.

может случаться, что будет существовать непрерывная линия таких нейтральных или изотропных точек.

В общем изотропная точка является пределом ряда изохроматических овалов, окружающих эту точку. Кроме того, поскольку в такой точке $\operatorname{tg} 2\varphi$ принимает



Фиг. 2.282.



Фиг. 2.283.

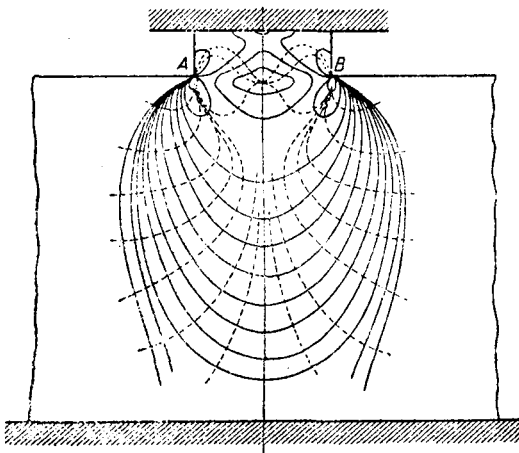
форму $\frac{0}{0}$ и является, таким образом, неопределенным, изотропная точка является точкой, через которую проходят *все* изоклины.

Фиг. 2.281 (a) и (b) показывают на частном примере зависимость между изотропными точками и линиями главных напряжений и изохроматическими линиями.

Фиг. 2.282 показывает изоклинические линии для случая растянутого образца с двумя симметрично расположенными надрезами, идущими перпендикулярно к направлению растяжения. Исходя из этого чертежа, можно построить линии главных средних напряжений следующим образом.

Возьмем какую-нибудь точку P_1 на изоклине, параметр которой будет α_1 , и через эту точку проведем линию, наклоненную под углом α_1 к оси Ox . Этот отрезок будет элементом одной из двух линий главных средних напряжений, проходящих через точку P_1 , в то время как вторая линия будет наклонена под углом $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ к оси Ox .

Пусть эта линия встречается соседнюю изоклину параметра α_2 в точке P_2 ; проведем через P_2 линию, наклоненную под углом α_2 к оси Ox , встречающую следующую изоклину (параметра α_3) в точке P_3 .



Фиг. 2.284.

Если бы изоклины были расположены бесконечно близко друг к другу, то это построение дало бы в точности линию главного напряжения, проходящего через точку P_1 . В действительности параметры изоклин различаются как конечные величины, как видно из рисунка, так что построение является только приближенным; однако на практике линии главного нормального напряжения получаются в большинстве случаев с достаточной точностью.

На фиг. 2.283 показаны линии главных нормальных напряжений, полученные из изоклинических линий при помощи этого построения.

Другим семейством кривых линий, которые бывают иногда полезны, являются линии, совпадающие по своему направлению с наибольшим градиентом разности $(P - Q)$ в данной точке. Последние являются ортогональными к изохроматическим линиям. Изохроматические линии для случая бруска (фиг. 2.284) показаны сплошными линиями, линии же максимума градиента $(P - Q)$ — пунктирными линиями.

Важным семейством линий будут линии максимального среднего касательного напряжения.

Согласно уравнению (2.2733) касательное напряжение получает наибольшее значение, когда выражение

$$\frac{1}{2} (\bar{y}y - \bar{x}x) \sin 2\varphi + \bar{x}y \cos 2\varphi$$

достигает максимума.

Пользуясь уравнениями (2.285), в которых мы принимаем $\varphi = \alpha$, где α определяет направление линии главного напряжения, получаем

$$\bar{n}s = \frac{1}{2} (P - Q) (\cos 2\varphi \sin 2\alpha - \sin 2\varphi \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} (P - Q) \sin 2(\alpha - \varphi). \quad (2.288)$$

Таким образом, касательное напряжение бывает численно наибольшим, когда $\varphi = \alpha \pm \frac{\pi}{4}$, так что линии максимального касательного напряжения пересекают линии главных напряжений под углом 45° и могут быть получены таким образом из последних путем графических построений.

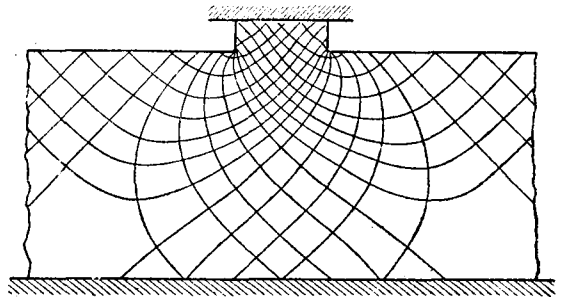
Кроме того они могут быть получены непосредственно из изоклин при помощи построения, подобного описанному ранее в этом параграфе для линий главных нормальных напряжений, с той разницей, что последовательные элементы P_1P_2 , P_2P_3 и т. д. должны быть проведены под углами $\alpha_1 \pm \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 \pm \frac{\pi}{4}$, $\alpha_3 \pm \frac{\pi}{4}$ и т. д., вместо углов α_1 , α_2 и α_3 и т. д.

Фиг. 2.285 показывает линии максимального среднего касательного напряжения, найденные таким образом для ранее приведенного примера.

§ 2.29. Теорема Менаже об изоклинических линиях.

Эта теорема связывает изоклинические линии с изменением главных нормальных напряжений по их траектории; в частности, она показывает, что главное нормальное напряжение достигает максимума или минимума при движении точки по линии главного нормального напряжения, там, где последняя пересекает изоклиническую линию под прямым углом.

Пусть $ABCD$ (фиг. 2.29) элементарный „криволинейный“ прямоугольник, ограниченный четырьмя смежными линиями главных нормальных напряжений, при-

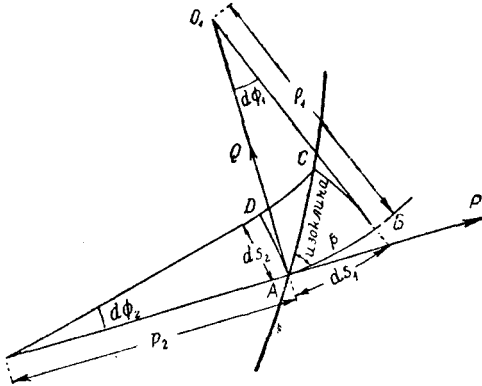


Фиг. 2.285.

чем AB составляет в точке A угол φ и в точке B угол $\varphi + d\varphi_1$ с осью Ox ; а AD образует в точке A угол $\varphi + \frac{\pi}{2}$, и в точке D угол $\varphi + \frac{\pi}{2} + d\varphi_2$ с той же осью.

Обозначим длины дуг AB и AD через ds_1 , ds_2 , а их радиусы кривизны через ρ_1 , ρ_2 . Положительными направлениями дуг будем считать направления, показанные стрелкой на фиг. 2.29.

Обозначим, как и раньше, главные средние напряжения через P и Q , а составляющие объемной силы в направлениях AB и CD через Ξ и H .



Фиг. 2.29.

Составим уравнения равновесия для выделенного прямоугольника (толщину прямоугольника принимаем равной единице).

Проектируем усилия на направление AB .

Усилия по граням AD и BC дают сумму

$$\text{arc } BC \left(P + \frac{\partial P}{\partial s_1} ds_1 \right) - \text{arc } AD \cdot P. \quad (2.291)$$

Далее

$$\text{arc } BC = (\rho_2 + ds_1) d\varphi_2,$$

и

$$\text{arc } AD = \rho_2 d\varphi_2,$$

так как дуги BC и AD могут считаться параллельными в первом приближении.

Таким образом, выражение (2.291) принимает вид

$$\begin{aligned} & d\varphi_2 \left\{ (\rho_2 + ds_1) \left(P + \frac{\partial P}{\partial s_1} ds_1 \right) - \rho_2 P \right\} = \\ & = d\varphi_2 ds_1 \left(P + \rho_2 \frac{\partial P}{\partial s_1} \right) = ds_1 ds_2 \left(\frac{P}{\rho_2} + \frac{\partial P}{\partial s_1} \right), \end{aligned} \quad (2.292)$$

если пренебречь величинами третьего порядка малости.

Напряжения Q по площадкам AB и CD дадут составляющую усилия в направлении AB благодаря относительному наклону этих площадок на угол $d\varphi_2$ к этому направлению; эта составляющая равна

$$- Q ds_1 d\varphi_2 \quad \text{или} \quad - \frac{Q}{\rho_2} ds_1 ds_2. \quad (2.2931)$$

Наконец составляющая объемной силы выражается так:

$$\rho \Xi ds_1 ds_2, \quad (2.2932)$$

где ρ — плотность.

Складывая (2.292), (2.2931) и (2.2932) и приравнявая сумму нулю, после деления на $ds_1 ds_2$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial s_1} + \frac{P - Q}{\rho_2} + \rho \Xi = 0. \quad (2.294)$$

Подобно этому, приравнявая нулю составляющую в направлении AB , мы находим ¹

$$\frac{\partial Q}{\partial s_2} + \frac{P - Q}{\rho_1} + \rho H = 0; \quad (2.295)$$

¹ Уравнения (2.294), (2.295) являются частными случаями более общих уравнений, данных *Lamé*, *Coordonnées Curvilignes*, стр. 274; см. также *Maxwell*, *On the Equilibrium of Elastic Solids*, *Trans. R. S. Edin.* 20, P. I; или *Collected Papers*, I, 68—70. Для более общей (трехмерной) теории нужно обращаться к *Love*, *Theory of Elasticity*, § 58, 59

(2.294) и (2.295) являются уравнениями равновесия, выраженными в функции главных нормальных напряжений, и дают линейную скорость изменения P и Q вдоль их траекторий.

Рассмотрим теперь изменение угла φ при переходе от A к C . От A до B это изменение выразится величиной $d\varphi_1$. От B до C изменение будет такое же, как от A до D , т. е. с точностью до первого приближения оно будет равно $d\varphi_2$.

Таким образом полное изменение φ при переходе от A к C будет

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2 = \frac{ds_1}{\rho_1} + \frac{ds_2}{\rho_2}.$$

Если теперь точка C лежит на изоклине, проходящей и через A , то $d\varphi = 0$ или

$$\frac{ds_1}{\rho_1} + \frac{ds_2}{\rho_2} = 0:$$

Если эта изоклина образует угол β с траекторией главного напряжения P , то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (2.296)$$

Мы будем иметь максимум или минимум для P при перемещении точки по траектории, если $\frac{\partial P}{\partial s_1} = 0$. Отсюда следует на основании (2.294), что

$$\frac{P - Q}{\rho_2} + \rho E = 0.$$

Наиболее важны практически случаи, когда объемными силами можно пренебречь. Предположим, что $E = H = 0$.

Тогда условие для максимума принимает вид

$$\frac{P - Q}{\rho_2} = 0:$$

Это требует: либо а) $P - Q = 0$, случай, при котором точка является изотропной точкой и траектории главных напряжений являются неопределенными; либо б) $\rho_2 = \infty$, т. е. $\beta = \frac{\pi}{2}$, что и показывает, что изоклина пересекает траекторию главного нормального напряжения P под прямым углом. В этом и заключается теорема Менаже.

Кроме того, из этой теоремы можно еще сделать некоторые важные заключения. Если точка C лежит не на изоклине параметра φ , а на соседней параметра $\varphi + d\varphi$, то мы имеем

$$d\varphi = \frac{ds_1}{\rho_1} + \frac{ds_2}{\rho_2},$$

так что отрезки, отсекаемые этими изоклинами на линиях AB и AD , определяются равенствами:

$$ds_1 = \rho_1 d\varphi, \quad ds_2 = 0,$$

или

$$ds_1 = 0, \quad ds_2 = \rho_2 d\varphi.$$

Если dP и dQ являются соответствующими приращениями, тогда уравнения (2.294) и (2.295) (при E, H равных нулю) дают

$$dP = -\frac{\rho_1}{\rho_2} (P - Q) d\varphi = (P - Q) \operatorname{ctg} \beta d\varphi, \quad (2.297)$$

$$dQ = -\frac{\rho_2}{\rho_1} (P - Q) d\varphi = (P - Q) \operatorname{tg} \beta d\varphi. \quad (2.298)$$

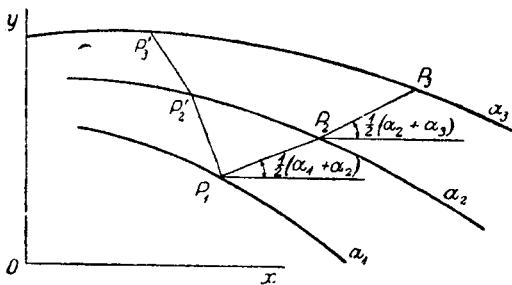
Эти уравнения могут быть представлены в другом виде, а именно:

$$\left. \begin{aligned} dP &= - (ds_1)^2 \frac{P+Q}{\rho_1 \rho_2 d\varphi}, \\ dQ &= - (ds_2)^2 \frac{P-Q}{\rho_1 \rho_2 d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.299)$$

Равенства (2.299) показывают, что приращения главных напряжений вдоль обеих траекторий всегда имеют одинаковый знак, по мере того как мы двигаемся к соседней изоклине, и являются пропорциональными квадратам отрезков между соседними изоклинами. Это последнее также доказано Менаже.¹

§ 2.30. Полное исследование напряжений в пластинке, с применением изоклинических и изохроматических линий.

В главе III будет показано, что оптический метод изучения напряжений дает возможность составить точный чертеж расположения изоклинических и изохроматических линий в напряженной пластинке и установить для каждой из них соответствующий параметр α и R . Таким образом, φ и $(P-Q)$ будут известны во всех точках пластинки.



Фиг. 2.301.

Траектории главных напряжений могут быть тогда нанесены на чертеж посредством следующего простого построения.

Пусть P_1 (фиг. 2.301) какая-нибудь точка на изоклине параметра α_1 и пусть α_2, α_3 и т. д. параметры последующих изоклин.

Через точку P_1 проведем линию $P_1 P_2$ образующую с осью Ox угол

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

и пересекающую изоклину параметра α_2 в точке P_2 . Затем через точку P_2 проведем линию $P_2 P_3$, образующую с Ox угол $\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$, до встречи изоклины параметра α_3 в точке P_3 и т. д.

Линия $P_1 P_2 P_3 \dots$ является таким образом (при условии, что параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ различаются только на небольшие величины) траекторией одного из главных напряжений, проходящей через P_1 ; ортогональная линия $P_1 P_2' P_3' \dots$ строится подобным же образом, причем последовательные элементы образуют с осью Ox углы

$$\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3), \quad \text{и т. д.}$$

После того как линии главных напряжений построены, значения P и Q в любой точке могут быть получены из уравнений (2.294) или (2.295), начиная вычисления от точки на поверхности, где напряжения заданы. Этот способ получения напряжений был дан первоначально Клерком Максвеллом (Trans. R. S. Edin., том XX, ч. I), который считает его „лучшим способом нахождения P и Q путем графического построения“. Он не дает, тем не менее, каких бы то

¹ A. Mesnager, Annales des Ponts et Chaussées (partie technique), Série IX, 16, 4, 135—186.

ни было подробностей об этом способе; между тем очевидно, что если применять уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial s_1} = - \frac{P - Q}{\rho_2}$$

в этой форме для интегрирования по траектории главного нормального напряжения, то это численное интегрирование требует определения радиуса кривизны ρ_2 , что никоим образом не может считаться точным графическим методом.

Наоборот, если мы используем уравнения в форме (2.297) или (2.298), то правые части этих уравнений известны точно. Действительно, $\beta + \varphi$ равно углу наклона изоклины к оси Ox в точке пересечения с линией главного нормального напряжения: значения $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ для величины β в нескольких точках пересечения легко могут быть сведены в таблицу, и на участке P_1P_2 мы можем принять $\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$. Величина $(P - Q)$ получается для средней точки отрезка P_1P_2 путем интерполяции между двумя смежными изохроматическими линиями, а $d\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Поэтому

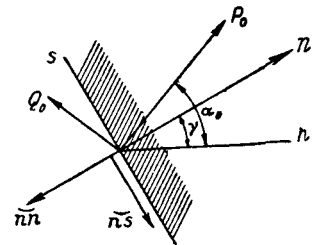
$$P - P_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (P - Q)_{n+\frac{1}{2}} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_n + \beta_{n+1}) \quad (2.301)$$

и суммирование проводится без затруднений; таким образом получаются величины P для точек, расположенных вдоль одной из линий главного нормального напряжения.

Этот способ применим во всех случаях, где можно получить ряд изохроматических линий, расположенных настолько близко друг к другу, что интерполяция для величины $(P - Q)$ в любой точке надежна.

Определение P_0 в точке, где линия главного напряжения встречает поверхность, производится без затруднений следующим образом.

Пусть \overline{nn} , \overline{ns} будут нормальным и касательным напряжениями в точке на поверхности; величины этих напряжений предполагаются известными. Тогда, если α_0 является значением φ на поверхности, а γ — угол, который образует внутренняя нормаль с осью Ox (фиг. 2.302), то, пользуясь формулами (2.285) [заменяя x через n , y через s , φ через $(\alpha_0 - \gamma)$], получаем:



Фиг. 2.302.

$$\left. \begin{aligned} (P_0 - Q_0) \cos^2 (\alpha_0 - \gamma) &= \overline{nn} - \overline{ss} \\ P_0 + Q_0 &= \overline{nn} + \overline{ss} \\ (P_0 - Q_0) \sin 2 (\alpha_0 - \gamma) &= 2\overline{ns}, \end{aligned} \right\} \quad (2.302)$$

откуда, исключая Q_0 и \overline{ss} , получаем:

$$P_0 = \overline{nn} + \overline{ns} \operatorname{tg} (\alpha_0 - \gamma). \quad (2.303)$$

Это равенство дает выражение для P_0 через известные или легко определяемые величины.

§ 2.31. *Случай, когда одна из линий главных нормальных напряжений совпадает с изоклиной.*

Способ графического интегрирования, описанный в предыдущем параграфе, требует изменения, когда линия главного нормального напряжения, вдоль которой

происходит интегрирование, является одновременно изоклинической линией. В этом случае уравнение

$$dP = (P - Q) \operatorname{ctg} \beta \, d\varphi$$

не может быть применено, так как $d\varphi = 0$ и $\operatorname{ctg} \beta = \infty$.

Возьмем ближайшую изоклину с параметром $\varphi + \delta\varphi$. Обозначим через $\delta s_2 = y$ расстояние по перпендикуляру между (ближайшими параллельными) изоклинами в любой точке.

Тогда, так как (из фиг. 2.29)

$$\delta s_2 = \rho_2 \delta\varphi,$$

то

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\delta\varphi}{\delta s_2} = \frac{\delta\varphi}{y};$$

и, следовательно из уравнения

$$\frac{\delta P}{\delta s_1} = - \frac{(P - Q)}{\rho_2} = - \delta\varphi \frac{(P - Q)}{y}$$

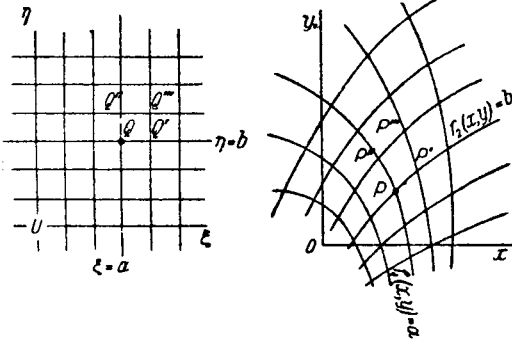
получаем

$$P - P_0 = - \delta\varphi \int_0^{s_1} \frac{(P - Q)}{y} \, ds_1.$$

Этот способ может применяться всякий раз, когда при малой величине угла β способ § 2.30 делается неудобным. Мы тогда берем за y отрезок между соседними изоклинами φ и $\varphi + \delta\varphi$; этот отрезок измеряется в направлении, перпендикулярном линии главного напряжения, вдоль которой мы производим интегрирование. Таким образом неопределенность $\operatorname{ctg} \beta \, d\varphi$ устраняется на любом таком участке.

После прохождения этого участка можно вернуться к прежнему способу, который бывает обычно более удобным.

Однако способ, описанный здесь, может при желании применяться всюду. Его слабой стороной является неизбежность большой относительной ошибки при измерении малого отрезка y .



Фиг. 2.32.

ременные ξ, η , выбираемые так, чтобы ξ или η имели постоянное значение на рассматриваемом контуре.

Замена переменных происходит путем применения уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f_1(x, y) \\ \eta &= f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.321)$$

где f_1 и f_2 являются известными функциями. Это преобразование может быть представлено графически следующим образом (фиг. 2.32). Пусть (x, y) являются прямоугольными координатами в плоскости (x, y) ; подобно этому (ξ, η) пусть будут прямоугольными координатами в плоскости (ξ, η) .

§ 2.32. Применение криволинейных координат.

Во многих задачах, в которых мы имеем дело с криволинейными контурами, удобно вводить вместо прямоугольных координат x, y другие пере-

Началом координат в плоскостях (x, y) и (ξ, η) пусть будут, соответственно, точки O и U . Если P является точкой в плоскости (x, y) , а Q точка в плоскости (ξ, η) , причем координаты точки Q , (ξ, η) , связаны с координатами $P(x, y)$ уравнениями преобразования (2.321), то говорят, что точка Q соответствует P .

Если P описывает какую-нибудь кривую в плоскости (x, y) , Q описывает соответствующую кривую в плоскости (ξ, η) ; каждой фигуре в одной плоскости соответствует некоторая фигура в другой.

В частности, прямоугольной сети линий в плоскости (ξ, η) , изображаемой уравнениями:

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad (2.322)$$

где a и b являются постоянными, соответствуют в плоскости (x, y) кривые

$$f_1(x, y) = a; \quad f_2(x, y) = b, \quad (2.323)$$

образующие криволинейную сетку.

Решая уравнения (2.321) относительно x и y , получим

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(\xi, \eta) \\ y &= F_2(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.324)$$

так что прямоугольная сеть в плоскости x, y переходит в криволинейную сеть в плоскости (ξ, η) .

Отметим, что если рассматриваемое преобразование не будет гомографическим, т. е. если уравнения (2.321) и (2.324) не будут линейными по отношению к обеим группам координат, то оно не будет однозначным. Введя дополнительное условие, можно сделать это преобразование однозначным, ограничиваясь рассмотрением лишь одной ветви получаемых кривых; однако такой способ не может быть применен во всех случаях, так как могут существовать точки в плоскости координат, являющиеся общими по крайней мере двум ветвям; после прохождения через или вокруг такой точки легко попасть на другую ветвь кривой, поэтому особенные точки кривых (2.323), (2.324) требуют дополнительного рассмотрения.

Точки, где F_1, F_2 или f_1, f_2 принимают бесконечные значения, должны также рассматриваться особо в каждом частном случае.

Иногда особенные точки могут быть исключены из рассмотрения самим контуром рассматриваемой пластинки; до тех пор пока они находятся вне этого контура, они не вызывают трудностей. В других случаях их приходится искусственно исключать и вводить условия непрерывности для напряжений и перемещений.

Примеры преодоления подобных затруднений будут даны ниже.

§ 2.33. Преобразование элементарного прямоугольника.

Рассмотрим на фиг. 2.32 элементарный прямоугольник $QQ'Q''Q'''$, ограниченный прямыми линиями $\xi, \xi + \delta\xi, \eta, \eta + \delta\eta$. В плоскости (x, y) он переходит в криволинейный параллелограмм $PP'P''P'''$ со сторонами $PP' = \delta s_\xi$, $PP'' = \delta s_\eta$ и углом $P'PP'' = \omega$; таким образом δs_ξ является дугой кривой $\eta = \text{const}$, соответствующей увеличению параметра на $\delta\xi$. Отношения

$$\frac{\delta s_\xi}{\delta\xi}, \quad \frac{\delta s_\eta}{\delta\eta} \quad (2.331)$$

обозначаются через $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ соответственно и являются отношениями масштабов преобразования.

Мы имеем, пользуясь уравнениями (2.324),

$$(\delta s_\xi)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 (\delta\xi)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 (\delta\xi)^2.$$

Таким образом

$$\frac{1}{h_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (2.332)$$

и аналогично

$$\frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2. \quad (2.333)$$

С другой стороны, из уравнений (2.321) получаем:

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y, \\ 0 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta y; \end{aligned}$$

второе равенство дает

$$\frac{\delta x}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} = \frac{\delta y}{-\frac{\partial \eta}{\partial x}} = \frac{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\delta s_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}};$$

делая подстановку в первое уравнение, получаем

$$h_1 = \frac{\delta \xi}{\delta s_\xi} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}}. \quad (2.334)$$

Аналогично

$$h_2 = \frac{\delta \eta}{\delta s_\eta} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}}. \quad (2.335)$$

Далее для того, чтобы найти угол ω , напомним

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\eta=\text{const}} &= - \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\xi=\text{const}} &= - \frac{\partial \xi}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{- \frac{\partial \xi}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \eta}{\partial y}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}}. \quad (2.336)$$

Заметим, что знак квадратного корня в знаменателях (2.334) и (2.335) должен быть выбран так, чтобы h_1 и h_2 были положительными.

Точки, где h_1 и h_2 равны нулю или принимают бесконечно большие значения, будут особенными точками преобразования.

§ 2.34. Ортогональные преобразования.

Преобразование, при котором $\omega = \frac{\pi}{2}$ во всякой точке, т. е. преобразование, при котором прямоугольная сеть в плоскости (ξ, η) преобразуется в сеть ортогональных кривых в плоскости xu , называется *ортогональным*.

При ортогональном преобразовании $\operatorname{tg} \omega = \infty$, или согласно (2.336) имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (2.341)$$

Таким образом элементарный квадрат или прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат в плоскости (ξ, η) , преобразуется в элементарный прямоугольник в плоскости (x, y) .

Однако это положение не остается в силе для элементарного прямоугольника, стороны которого не параллельны осям (ξ, η) .

Рассмотрим элемент QQ''' (фиг. 2.32), связывающий точки (ξ, η) и $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$.

Соответствующий элемент PP''' связывает точки (x, y) и $(x + dx, y + dy)$, причем

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy, \quad (2.342)$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy, \quad (2.343)$$

и так как $d\eta = \operatorname{tg} \theta d\xi$, то, вычисляя отношение $d\eta/d\xi$ из (2.342), (2.343), получаем

$$dx \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta \right) + dy \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0.$$

Отсюда, для угла наклона φ линии PP''' к Ox

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta}{\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{ctg} \theta}.$$

Если увеличим θ на $\frac{\pi}{2}$, φ переходит в φ' , для которого

$$\operatorname{tg} \varphi' = - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \operatorname{tg} \theta}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{tg} \theta}.$$

Условие, выражающее, что преобразованные линии являются также взаимно перпендикулярными, будет

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi' = -1,$$

или

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \operatorname{tg} \theta \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{tg} \theta \right) = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \theta) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

или на основании равенства (2.341)

$$\operatorname{tg} 2\theta \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется лишь при $\theta = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, если не будет следующего равенства:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \quad (2.344)$$

Очевидно, что равенство (2.344) выражает условие, что

$$h_1 = h_2 = h,$$

принимая во внимание равенства (2.334) и (2.335).

Масштабы искажения были бы тогда в обоих направлениях одинаковыми, и небольшой элементарный квадрат в плоскости ξ, η преобразовывался бы в элементарный квадрат в плоскости x, y . Следовательно, и при обратном порядке преобразования этот результат будет оставаться в силе, так как мы показали, что все прямые углы в одной плоскости будут преобразовываться в прямые углы в другой. Таким образом, элементарный прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, преобразовывается в прямоугольник, диагонали которого также взаимно перпендикулярны, т. е. переходит в квадрат.

Однако, тот факт, что масштабы искажения одинаковы, приводит к дальнейшим результатам. Так например, $\frac{P'P'''}{PP'}$ = $\frac{Q'Q'''}{QQ'}$ (фиг. 2.32) и углы в точках Q' и P' являются прямыми углами, а $\angle Q''QQ' = \angle P''PP'$. Таким образом любая линия, проходящая через точку P , образует с PP' угол, равный углу, образованному соответствующей линией, проходящей через точку Q с QQ' . Применяя этот результат ко второй линии, проходящей через P , и к соответствующей линии, проходящей через Q , и беря разности углов, образованных этими линиями с PP' и QQ' , мы находим, что угол между парой линий, проходящих через P , равен углу, заключенному между соответствующими линиями, проведенными через Q .

Таким образом любые соответствующие элементарные фигуры в обеих плоскостях являются равноугольными и следовательно подобными. Любая такая фигура преобразовывается без искажения. Такое преобразование называется *конформным*.

§ 2.35. Конформные преобразования.

Возвращаясь к уравнениям (2.341), (2.344) и подставляя вместо $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ его значение $-\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} / \frac{\partial \eta}{\partial x}$, получаем:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} / \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} / \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\},$$

и аналогичным образом

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\}.$$

Отсюда, согласно равенству (2.344), получаем:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} / \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = 1, \quad (2.351)$$

если только не удовлетворяется следующее равенство:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (2.352)$$

Последнее равенство, однако, исключено, так как в противном случае мы пришли бы к условию, что $h_1 = h_2 = 0$, что невозможно.

Итак мы имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

и уравнение (2.341) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Не нарушая общности наших выводов, мы можем принять произвольно либо верхние, либо нижние знаки в этих двух уравнениях, так как изменение выбора подразумевает перемену знака у ξ или η . Беря нижние знаки, получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2.353)$$

Умножим второе уравнение на $i (= \sqrt{-1})$ и прибавим к первому, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi = \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta.$$

Таким образом получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\xi + i\eta) = 0, \quad (2.354)$$

решение которого представляется в следующем виде:

$$\xi + i\eta = f(x + iy). \quad (2.355)$$

Далее, если мы умножим второе из уравнений (2.353) на i и вычтем из первого, то получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\xi - i\eta) = 0,$$

или

$$\xi - i\eta = F(x - iy). \quad (2.356)$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left\{ f(x + iy) + F(x - iy) \right\} \\ \eta &= \frac{1}{2} i \left\{ F(x - iy) - f(x + iy) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.357)$$

Две функции ξ и η , которые удовлетворяют уравнениям (2.353), называются *сопряженными функциями*.

Наиболее частым и важным случаем бывает случай, когда f является действительной функцией своего аргумента и ξ и η являются тоже действительными величинами. В этом случае очевидно, что F должно быть такой же функцией как f , а ξ и η являются действительной и мнимой частями от $f(x + iy)$.

Важно, тем не менее, отметить, что этот случай не охватывает общего случая теории сопряженных функций и, следовательно, конформного преобразования.

В общем случае, когда f не является реальной функцией своего аргумента, можно принять

$$f = f_1 + if_2,$$

где f_1 и f_2 являются реальными функциями своих аргументов. ξ , η , во всех случаях действительных преобразований, должны быть действительными величинами. Так что, если

$$\xi + i\eta = f_1(x + iy) + if_2(x + iy),$$

то

$$\xi - i\eta = f_1(x - iy) - if_2(x - iy),$$

что дает общий вид функции F в этом случае.

§ 2.36. Преобразования типа $x + iy = f(\xi + i\eta)$.

Преобразования типа $x + iy = f(\xi + i\eta)$ охватывают большое количество важных случаев, которые мы теперь и рассмотрим.

Обозначим $x + iy$ через z , $x - iy$ через z' ; $\xi + i\eta$ через ζ , $\xi - i\eta$ через ζ' , так что $z = f(\zeta)$; $z' = f(\zeta')$.

Прежде всего постараемся найти для любого преобразования этого типа выражения для масштабов искажения и для угла наклона φ кривой $\eta = \text{const}$ к оси Ox .

Заметим, что так как x и y являются сопряженными функциями от ξ и η , то

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (2.361)$$

откуда согласно (2.332), (2.333) следует, что

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = J^2, \quad (2.362)$$

и также

$$J^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - i \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = f'(\xi + i\eta) f'(\xi - i\eta). \quad (2.363)$$

Далее пусть $(x + dx, y + dy)$ соответствует $(\xi + d\xi, \eta)$, т. е. эти координаты соответствуют точкам P' и Q' (фиг. 2.32); обозначим длины элементарных дуг в направлениях возрастающих ξ , η через ds_ξ , ds_η , как и раньше; тогда:

$$dx = ds_\xi \cos \varphi, \quad dy = ds_\xi \sin \varphi,$$

где

$$ds_\xi / d\xi = J.$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} = J \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = J \sin \varphi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = -J \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = J \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.364)$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} J e^{-i\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = f'(\xi + i\eta) \\ J e^{-i\varphi} = f'(\xi - i\eta). \end{aligned} \right\} \quad (2.365)$$

и

Беря логарифмы, получаем

$$\lg J + i\varphi = \lg f'(\xi + i\eta). \quad (2.3651)$$

Таким образом $\lg J$ и φ являются реальной и мнимой частями функции от $\xi + i\eta$, т. е. $x + iy$, и представляют собой таким образом сопряженные функции в обеих координатных плоскостях.

В частности

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}; \quad \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \eta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \quad (2.366)$$

Это равенство дает значения для радиусов кривизны обеих семейств кривых. Пусть ρ_1 является радиусом кривизны кривой $\eta = \text{const}$, а ρ_2 — радиусом кривизны кривой $\xi = \text{const}$. Примем, что радиусы кривизны являются положительными, когда касательная вращается против часовой стрелки по мере того, как мы движемся в положительную сторону по любой из двух кривых; тогда мы получаем сразу

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial s_\eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.367)$$

§ 2.37. Примеры конформных преобразований. Полярные координаты.

Самым простым примером конформного преобразования является переход от прямоугольных координат к полярным.

Здесь преобразование выражается функцией

$$z = e^\zeta$$

или

$$\zeta = \lg z = \lg(x + iy) = \lg\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\} = \lg r e^{i\theta} = \lg r + i\theta.$$

Таким образом $\xi = \lg r$, $\eta = \theta$, r и θ представляют собой полярные координаты на плоскости.

Преобразование показано на фиг. 2.37, где сеть взаимно перпендикулярных линий в плоскости (ξ, η) преобразуется в плоскости (x, y) в ряд concentрических окружностей с центром в начале координат и ряд радиальных прямых линий. Важно отметить, что преобразование не охватывает всей плоскости (ξ, η) , а только бесконечно длинную полосу шириною 2π вдоль оси ξ .

При рассматриваемом преобразовании мы имеем

$$J e^{i\varphi} = f'(\zeta) = e^\zeta = r e^{i\theta},$$

так что

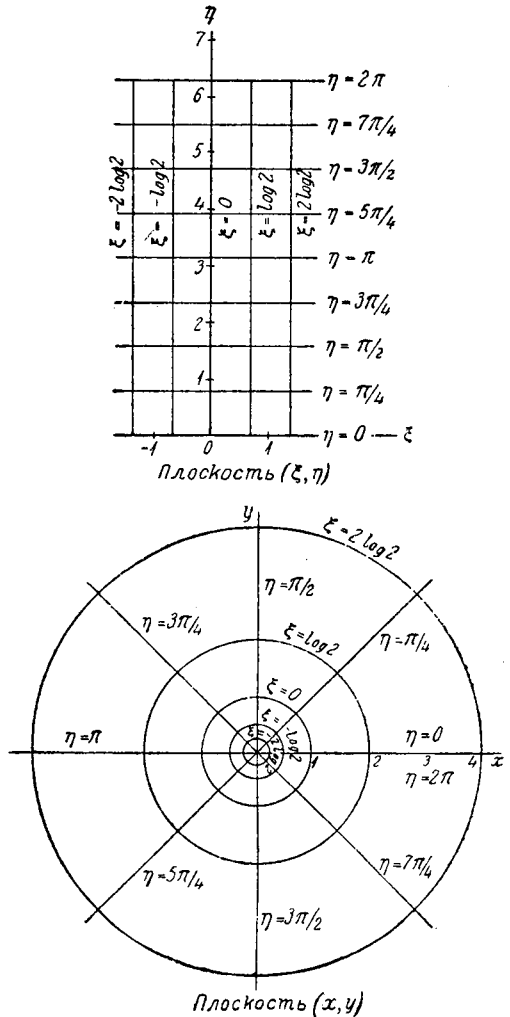
$$J = r, \quad \varphi = \theta,$$

что очевидно из геометрических соображений. Из уравнения (2.367) получаем:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \lg r} = \frac{1}{r},$$

что и требовалось доказать.



Фиг. 2.37.

§ 2.38. Примеры конформного преобразования. Инверсия.

Рассмотрим преобразование

$$z = \frac{k^2}{\zeta}.$$

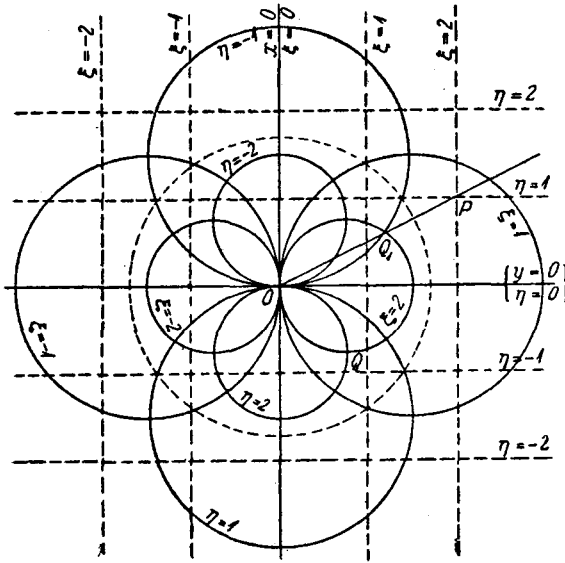
Если примем, что

$$\zeta = r'e^{i\theta'},$$

то

$$\theta' = -\theta, \quad rr' = k^2.$$

Совместим теперь обе плоскости (ξ, η) и (x, y) так, чтобы совпали их начала и вещественные оси. Выбирая точку Q_1 симметрично Q относительно оси η (Q и P соответственные точки), получаем, что точки Q_1 и P лежат на одной и том же радиусе-векторе, проходящем через общее начало, и кроме того $OQ_1 \cdot OP = k^2$. Преобразование P в Q_1 тождественно тогда с инверсией относительно круга с центром в O и радиусом k , а преобразование точки P в Q тождественно инверсии и отражению.



Фиг. 2.38.

Фиг. 2.38 показывает, как сеть взаимно перпендикулярных линий плоскости (ξ, η) преобразовывается в ряд ортогональных окружностей в плоскости (x, y) . В этом случае преобразование является всеобъемлющим, т. е. плоскость (ξ, η) целиком, включая бесконечно удаленную точку, преобразовывается в плоскость (x, y) .

Мы имеем здесь

$$Je^{i\varphi} = -\frac{k^2}{\zeta^2} = -\frac{z^2}{k^2},$$

так что

$$J = \frac{r^2}{k^2}, \quad \varphi = 2\theta - \pi.$$

Так как $J = \frac{k^2}{\xi^2 + \eta^2}$, то уравнения (2.367) приводятся к виду:

$$\frac{1}{\rho_1} = +\frac{2\eta}{k^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{2\xi}{k^2},$$

что подтверждает, что кривые $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ являются окружностями и дают величины радиусов, соответствующие их параметрам. Более подробный разбор этого преобразования будет дан в главе IV.

§ 2.39. Примеры конформного преобразования. Биполярные координаты.

Эти координаты будут иметь большое применение в главе IV при рассмотрении областей, ограниченных не концентрическими окружностями.

При рассматриваемом преобразовании

$$z = f(\zeta) = -a \operatorname{cth} \frac{1}{2} \zeta, \quad (2.3911)$$

что дает:

$$\zeta = \lg \left(\frac{z-a}{z+a} \right). \tag{2.3912}$$

Обозначая через (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2) полярные координаты, отнесенные соответственно к точкам $(\pm a, 0)$, отделяя реальную и мнимую части в (2.3912) и принимая

$$z - a = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\theta_2},$$

мы находим

$$\xi = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad \eta = \theta_1 - \theta_2. \tag{2.392}$$

Таким образом кривые $\xi = \text{const}$ являются геометрическим местом точек, для которых $\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$ и представляют собой окружности, центры которых лежат на оси Ox , и которые в пределе переходят в точки $(\pm a, 0)$. Кривые $\eta = \text{const}$ являются геометрическими местами точек, для которых $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$, т. е. круговыми дугами, проходящими через точки $(\pm a, 0)$. Такие координаты ξ и η называются *биполярными* координатами.

Верхняя часть фиг. 2.39 дает изображение кривых $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, в плоскости (x, y) . Точки A и B являются предельными точками $(\pm a, 0)$. Значения ξ изменяются от $-\infty$, соответствующего $\frac{r_1}{r_2} = 0$, т. е. точке A , до $+\infty$, соответствующего $\frac{r_1}{r_2} = \infty$, т. е. точке B .

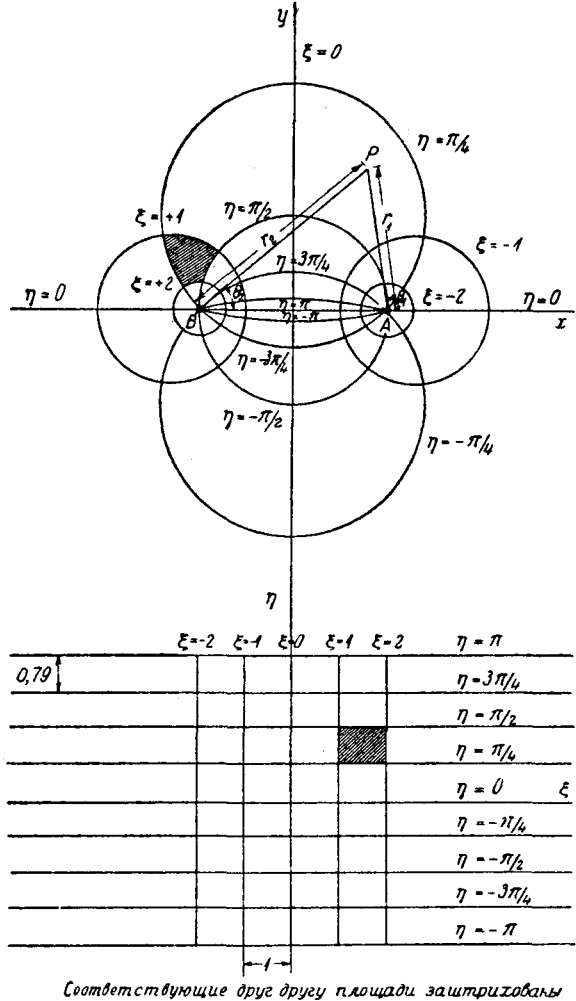
Ось Oy соответствует $\xi = 0$. Значения η изменяются от $\eta = 0$ вдоль оси Ox , вне AB , до $\eta = +\pi$ на верхней стороне прямой AB ; дуги, проходящие ниже AB , соответствуют отрицательным значениям η , и нижняя сторона прямой AB соответствует $\eta = -\pi$. Таким образом, при переходе через прямую AB , η претерпевает разрыв непрерывности, выражающийся величиной 2π .

Заметим, что как и в случае полярных координат, вся плоскость (x, y) соответствует в плоскости ξ, η полосе, ограниченной прямыми $\eta = \pm \pi$ и не ограниченной в направлении ξ .

Полезно будет вычислить значение J для этих координат.

Имеем

$$J e^{i\varphi} = \frac{dz}{d\zeta}.$$



Фиг. 2.39.

Но

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{2a}{z^2 - a^2};$$

следовательно

$$J e^{i\varphi} = \frac{z^2 - a^2}{2a} = \frac{r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}{2a},$$

откуда

$$J = \frac{r_1 r_2}{2a}, \quad \varphi = \theta_1 + \theta_2. \quad (2.393)$$

Выразим теперь эти величины через ξ и η .

Заметим, что из (2.3912) сразу получаем:

$$z - a = -\frac{2ae^\zeta}{e^\zeta - 1}; \quad z + a = -\frac{2a}{e^\zeta - 1},$$

так что

$$z^2 - a^2 = \frac{4a^2 e^\zeta}{(e^\zeta - 1)^2},$$

и

$$J e^{i\varphi} = \frac{2a}{e^\zeta + e^{-\zeta} - 2} = \frac{a}{\operatorname{ch} \zeta - 1}.$$

Но

$$\operatorname{ch} \zeta - 1 = \operatorname{ch} \xi \cos \eta + i \operatorname{sh} \xi \sin \eta - 1.$$

Мы имеем следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{a}{J} \cos \varphi &= \operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1, \\ \frac{a}{J} \sin \varphi &= -\operatorname{sh} \xi \sin \eta. \end{aligned}$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{J^2} &= (\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta = \operatorname{ch}^2 \xi + \cos^2 \eta - 2 \operatorname{ch} \xi \cos \eta = \\ &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^2, \end{aligned}$$

и отсюда

$$J = a / (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta), \quad (2.394)$$

учитывая, что $\operatorname{ch} \xi > 1 > \cos \eta$ и что J является по существу положительной величиной.

Подставляя вместо J его значение в предыдущие уравнения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \\ \sin \varphi &= -\frac{\operatorname{sh} \xi \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \end{aligned} \right\} \quad (2.395)$$

§ 2.40. Примеры конформного преобразования. Эллиптические координаты.

В главе VI мы будем иметь дело с координатами, которые являются постоянными в точках эллиптического контура.

Такие координаты получаются путем преобразования

$$z = c \operatorname{ch} \zeta;$$

откуда, отделяя действительные и мнимые части, получаем:

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \\ y &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \end{aligned}$$

Кривые $\xi = \operatorname{const}$ преобразуются в кривые, уравнения которых

$$\frac{x^2}{c^2 c \operatorname{h}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1,$$

и являются семейством *конфокальных* эллипсов, фокусами которых будут точки $(\pm c, 0)$.

Кривые $\eta = \operatorname{const}$ преобразуются в кривые

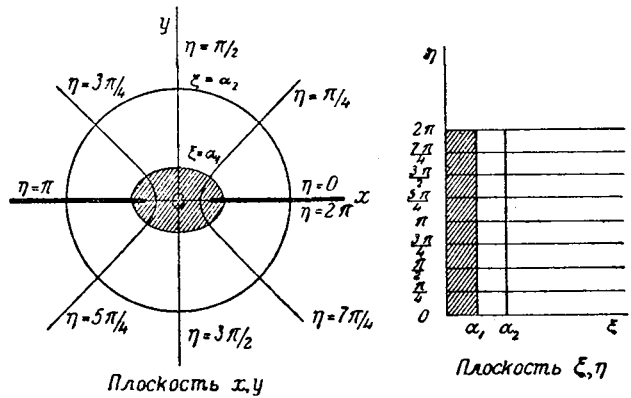
$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1,$$

являющиеся семейством гипербол, конфокальных и ортогональных с семейством эллипсов.

Здесь опять вся плоскость x, y не преобразовывается целиком в плоскость ξ, η .

При этом мы можем ограничиться положительными значениями ξ , каждое из которых соответствует определенному эллипсу. Величина η тогда соответствует эксцентрическому углу точки на эллипсе и может принимать значения от 0 до 2π или $\pi/4$ — π до $3\pi/4$. Таким образом, плоскость (x, y) соответствует полу-бесконечному прямоугольнику $(0 < \xi < +\infty, 0 < \eta < 2\pi)$ в плоскости (ξ, η) .

При этом η претерпевает разрыв непрерывности при пересечении оси Ox между фокусами; каждое частное значение η отвечает лишь четверти соответствующей гиперболы.



Фиг. 2.40.

Может быть принято и другое условие, а именно: значения η могут изменяться от 0 до π и всей ветви гиперболы соответствует повсюду одинаковое значение η . Однако в этом случае верхняя половина эллипса соответствует положительному ξ , а нижняя — отрицательному ξ . Плоскость (x, y) соответствует следовательно бесконечной полосе $(-\infty < \xi < +\infty, 0 < \eta < \pi)$. Однако на этот раз разрыв непрерывности претерпевает величина ξ , что будет иметь место всякий раз, когда мы пересекаем ось Ox вне отрезка между фокусами.

Выбор того или другого условия для отдельных задач может быть сделан по желанию; однако, во всяком случае, необходимо быть весьма внимательным в отношении указанных разрывов непрерывности.

Фиг. 2.40 иллюстрирует взаимоотношение координат при наличии первого условия; заштрихованные площади в диаграммах xu и $\xi\eta$ являются соответствующими друг другу.

Координаты ξ, η этого параграфа известны под названием *эллиптических* координат.

Для того чтобы найти J, φ в эллиптических координатах, вычислим:

$$J e^{i\varphi} = \frac{dz}{d\zeta} = c \operatorname{sh} \zeta = c (\operatorname{sh} \xi \cos \eta + i \sin \eta \operatorname{ch} \xi).$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} J \cos \varphi &= c \operatorname{sh} \xi \cos \eta \\ J \sin \varphi &= c \operatorname{ch} \xi \sin \eta, \end{aligned} \right\} \quad (2.401)$$

откуда

$$J^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta) = \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \quad (2.402)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctgh} \xi \operatorname{tg} \eta. \quad (2.403)$$

§ 2.41. Выражения для напряжений в криволинейных координатах.

Рассмотрим сеть взаимно перпендикулярных кривых, определяемых криволинейными координатами ξ и η . Пользуясь теми же обозначениями, что и раньше, мы имеем

$$\begin{aligned} \overline{\xi x} &= \overline{xx} \cos \varphi + \overline{xy} \sin \varphi \\ &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ &= \left\{ \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s_\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.411)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) - \frac{\partial \cos \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \sin \varphi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) + \left(\sin \varphi \frac{\partial \chi}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.4112)$$

Подобно этому мы находим

$$\begin{aligned} \overline{\xi y} &= \overline{xy} \cos \varphi + \overline{yy} \sin \varphi \\ &= - \frac{\partial}{\partial s_\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.4121)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.4122)$$

$$\begin{aligned} \overline{\eta x} &= \overline{xx} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \overline{xy} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial s_\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.4131)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.4132)$$

$$\overline{\eta y} = + \frac{\partial}{\partial s_\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \quad (2.4141)$$

$$= + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.4142)$$

Из этих равенств мы получаем

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi} &= \overline{\xi x} \cos \varphi + \overline{\xi y} \sin \varphi \\ &= \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi \\ &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial s_\eta^2} + \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\eta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial s_\eta^2} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi}, \end{aligned} \quad (2.4151)$$

$$\begin{aligned} \overline{\xi\eta} &= \overline{\xi x} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \overline{\xi y} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) - \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi} = -\frac{\partial}{\partial s_\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi}. \end{aligned} \quad (2.4152)$$

И для той же составляющей:

$$\begin{aligned} \overline{\eta\eta} &= \overline{\eta x} \cos \varphi + \overline{\eta y} \sin \varphi \\ &= -\frac{\partial}{\partial s_\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\eta} = -\frac{\partial}{\partial s_\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta}, \end{aligned} \quad (2.4153)$$

и, для составляющей

$$\begin{aligned} \overline{\eta\eta} &= -\overline{\eta x} \sin \varphi + \overline{\eta y} \cos \varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial s_\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) - \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial s_\xi^2} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi}. \end{aligned} \quad (2.4154)$$

Следует отметить, что при дифференцировании по дугам s_ξ, s_η порядок дифференцирования не безразличен. Это очевидно из сравнения двух выражений для составляющей напряжения $\overline{\xi\eta}$. Мы можем доказать, что они равны: в самом деле для кривых, соответствующих конформному преобразованию, рассмотренному в § 2.36:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s_\xi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \right) - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{J\rho_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \\ &= -\frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{J^3} \frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \frac{1}{J\rho_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \\ &= -\frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{J^3} \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{1}{J\rho_2} \frac{\partial \chi}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

пользуясь уравнениями (2.367)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s_\eta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s_\xi} \right) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \chi}{\partial s_\eta}, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство двух значений $\overline{\xi\eta}$.

Формулы (2.4151) — (2.4154) дают непосредственно выражения для напряжений в криволинейных координатах, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\xi\xi} &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \\ \overline{\eta\eta} &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \\ \overline{\xi\eta} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \\ &= -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.416)$$

Пользуясь уравнениями (2.367) и производя дифференцирование в первых слагаемых, мы получаем

$$\overline{\xi\xi} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \right), \quad (2.4171)$$

$$\overline{\eta\eta} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} \right), \quad (2.4172)$$

$$\overline{\xi\eta} = -\frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \right). \quad (2.4173)$$

§ 2.42. Напряжения в полярных координатах.

Формулы для напряжений в полярных координатах могут быть выведены непосредственно из уравнений (2.4151) — (2.4154) последнего параграфа. В этом случае $ds_\xi = dr$, $ds_\eta = r d\theta$, $\frac{1}{\rho_1} = 0$, $\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r}$. Мы имеем таким образом

$$\overline{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (2.421)$$

$$\overline{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (2.422)$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}. \quad (2.423)$$

Однако в этом случае возможно получить эти же формулы более простым способом, не прибегая к теории криволинейных координат.

Из обычных формул преобразования (§ 2.10) находим, поскольку направляющими косинусами оси Ox относительно r , θ и z являются $\cos \theta$, $-\sin \theta$, 0 ,

$$\overline{xx} = \overline{rr} \cos^2 \theta - 2r\theta \cos \theta \sin \theta + \overline{\theta\theta} \sin^2 \theta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}. \quad (2.424)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) = \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \\ &= \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (2.425)$$

Из выражений (2.424) и (2.425), приравнявая коэффициенты при $\cos^2 \theta$, $\cos \theta \sin \theta$ и $\sin^2 \theta$, мы получаем уравнения (2.421), (2.422) и (2.423).

§ 2.43. Преобразование оператора Лапласа к криволинейным координатам.

Результаты § 2.41 позволяют нам написать сразу выражение для ∇^2 при конформном преобразовании. Мы знаем, что при сложении уравнений (2.2841), (2.2842) получаем:

$$\overline{xx} + \overline{yy} = P + Q,$$

где P и Q являются главными средними нормальными напряжениями.

Отсюда следует, что $\overline{xx} + \overline{yy}$ не зависит от выбора координатных осей и следовательно, что

$$\overline{xx} + \overline{yy} = \overline{\xi\xi} + \overline{\eta\eta},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \right), \quad (2.431)$$

после сложения (2.4171) и (2.4172).

Очень часто приходится преобразовывать оператор Лапласа к полярным координатам. Имеем:

$$J = r, \quad \xi = \lg r, \quad \eta = \theta$$

и

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \chi, \quad (2.432)$$

так что

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.433)$$

§ 2.44. Выражения для перемещений в криволинейных координатах.

Выражения для перемещений, данные в § 2.25, не удобны, когда мы пользуемся криволинейными координатами, так как они вводят дифференцирования и интегрирования по x и y , что делает вычисления весьма затруднительными.

Мы постараемся получить формулы для перемещений в другом виде.

Из уравнений (2.2531), (2.2532) и (2.252), (2.254) следует, что составляющие перемещения могут быть выражены следующим образом:

$$2\mu U = - \frac{\partial \chi}{\partial x} + (1 - \sigma)\alpha, \quad (2.4411)$$

$$2\mu V = - \frac{\partial \chi}{\partial y} + (1 - \sigma)\beta, \quad (2.4412)$$

где

$$\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \beta = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

так что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega, \quad (2.4421)$$

и

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.4422)$$

Так как

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

то α и β являются сопряженными функциями и, следовательно,

$$\alpha + i\beta = f(x + iy) = f(z), \quad (2.443)$$

пользуясь обозначениями § 2.36.

Отсюда $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ = действительной части $f'(z)$, или

$$\text{действительная часть } f'(z) = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega.$$

Таким образом $\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega$ является решением уравнения $\nabla^2 = 0$, т. е. гармонической функцией. Она будет иметь сопряженную функцию R , которую можно получить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega \} &= \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega \} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.444)$$

так как $\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega$ и R являются сопряженными относительно ξ , η так же, как и относительно x , y .

Таким образом $\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR$ = функции от $\xi + i\eta$, т. е. от $x + iy$. Но эта функция, поскольку она имеет ту же самую действительную часть, должна быть тождественна с $f'(z)$.

Таким образом

$$f'(z) = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR,$$

или

$$f(z) = \int (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) dz = \int J e^{i\varphi} (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) d\xi. \quad (2.445)$$

Интегрирование часто более удобно производить, когда подинтегральная функция выражена в координатах ξ и η . Отделяя действительную и мнимую части, можно найти значения α и β .

Нас интересуют составляющие перемещений в направлении возрастающих ξ и η ; их мы обозначим через U_ξ , U_η .

Эти величины получаются путем простого разложения в виде

$$\begin{aligned} U_\xi &= U \cos \varphi + V \sin \varphi, \\ U_\eta &= -U \sin \varphi + V \cos \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$2\mu U_\xi = - \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi + (1 - \sigma) \{ \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi \},$$

$$2\mu U_\eta = - \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi + (1 - \sigma) \{ -\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi \},$$

или

$$\left. \begin{aligned} 2\mu U_{\xi} &= -\frac{\partial \chi}{\partial s_{\xi}} + (1 - \sigma) \alpha', \\ 2\mu U_{\eta} &= -\frac{\partial \chi}{\partial s_{\eta}} + (1 - \sigma) \beta', \end{aligned} \right\} \quad (2.446)$$

где

$$\alpha' = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi,$$

$$\beta' = -\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi.$$

Согласно этому

$$\begin{aligned} \alpha' + i\beta' &= \alpha (\cos \varphi - i \sin \varphi) + \beta (\sin \varphi + i \cos \varphi) \\ &= (\alpha + i\beta) (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= (\alpha + i\beta) e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Но

$$\alpha + i\beta = \int J e^{i\varphi} (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) d\zeta.$$

Таким образом

$$\alpha' + i\beta' = e^{-i\varphi} \int J e^{i\varphi} (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) d\zeta. \quad (2.447)$$

Отделяя снова действительную и мнимую части по выполнении интегрирования, мы получаем α' , β' , а уравнения (2.446) дают искомые составляющие перемещений.

§ 2.45. Перемещения в полярных координатах.

В случае полярных координат, α' и β' могут быть получены в простом виде через функцию перемещений, аналогичную функции, существующей для прямоугольных координат.

В этом случае мы видим, что

$$J = r, \quad \varphi = \theta, \quad \zeta = \lg r + i\theta.$$

Таким образом уравнение (2.447) может быть написано:

$$(\alpha' + i\beta') e^{i\theta} = \int e^{i\theta} (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) (dr + ir d\theta).$$

Составляя полные дифференциалы от обеих частей, мы получаем

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial r} + i \frac{\partial \beta'}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} + i \frac{\partial \beta'}{\partial \theta} + i\alpha' - \beta' \right) e^{i\theta} d\theta = \\ = (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) (d\zeta + ir d\theta) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.451)$$

Приравнявая коэффициенты при dr и $d\theta$ в этом уравнении, получаем:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial r} + i \frac{\partial \beta'}{\partial r} = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR, \quad (2.4521)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} - \beta' + i \left(\frac{\partial \beta'}{\partial \theta} + \alpha' \right) = -Rr + ir(\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega). \quad (2.4522)$$

Отделяя затем действительную и мнимую части в уравнениях (2.4521), (2.4522) получаем:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial r} = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega, \quad (2.4531)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial r} = R, \quad (2.4532)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} - \beta' = -Rr, \quad (2.4533)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \theta} + \alpha' = r(\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega). \quad (2.4534)$$

Исключая R и $\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega$ из уравнений, приведенных выше, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} - \beta' + r \frac{\partial \beta'}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \beta'}{\partial \theta} + \alpha' &= r \frac{\partial \alpha'}{\partial r}, \end{aligned}$$

что может быть переписано так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\beta'}{r} \right) = 0, \quad (2.4541)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\beta'}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha'}{r} \right). \quad (2.4542)$$

В силу равенства (2.4542) мы можем написать

$$\frac{\alpha'}{r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\beta'}{r} = r \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad (2.455)$$

где ψ_1 является некоторой функцией r и θ .

Функция ψ_1 должна удовлетворять уравнениям (2.4531) и (2.4541). Для того, чтобы она удовлетворяла (2.4531), мы должны иметь:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega, \quad (2.456)$$

что является равенством, аналогичным (2.252), полученному для прямоугольных координат.

А для того, чтобы ψ_1 удовлетворяло (2.4541), мы должны иметь

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0,$$

т. е.

$$\nabla^2 \psi_1 = 0 \quad (2.457)$$

в силу (2.432).

Уравнения (2.456) и (2.457) определяют функцию ψ_1 , как и в случае прямоугольных координат, и перемещения выражаются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu U_r &= -\frac{\partial \chi}{\partial r} + (1-\sigma) r \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \\ 2\mu U_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + (1-\sigma) r^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.458)$$

§ 2.46. Другой вид формул для перемещений.

Иное выражение для перемещений данное Джеффреем,¹ является пригодным для всех случаев, где $\frac{1}{J}$ имеет вид $f(\xi) + F(\eta)$, и в частности для биполярных координат. Напишем:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu U_{\xi} &= (1-2\sigma) \frac{\partial \chi}{J \partial \xi} + (1-\sigma) \alpha_0 \\ 2\mu U_{\eta} &= (1-2\sigma) \frac{\partial \chi}{J \partial \eta} + (1-\sigma) \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.461)$$

где

$$\alpha_0 = \alpha' - \frac{2}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \quad \beta_0 = \beta' - \frac{2}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \eta}, \quad (2.462)$$

причем α' , β' имеют те же значения, что и раньше.

Если мы возвратимся теперь к уравнению

$$e^{i\varphi} (\alpha' + i\beta') = \int J e^{i\varphi} (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega + iR) d\xi,$$

и возьмем полные дифференциалы, а затем приравняем коэффициенты при $d\xi$, $d\eta$ и отделим действительную и мнимую части, получим четыре уравнения:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \xi} - \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = J (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega),$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \xi} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = RJ,$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \eta} - \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -RJ,$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \eta} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = J (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega),$$

или, пользуясь формулой (2.366),

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \xi} + \frac{\beta'}{J} \frac{\partial J}{\partial \eta} = J (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega), \quad (2.4631)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \xi} - \frac{\alpha'}{J} \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \eta} - \frac{\beta'}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi} = 0, \quad (2.4632)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \eta} + \frac{\alpha'}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi} = J (\nabla^2 \chi + 2\rho\Omega). \quad (2.4633)$$

Выражения (2.4631) и (2.4633) могут быть переписаны так:

$$\frac{\partial (\alpha' J)}{\partial \xi} + \beta' \frac{\partial J}{\partial \eta} - \alpha' \frac{\partial J}{\partial \xi} = J^2 \nabla^2 \chi + 2\rho\Omega J^2,$$

или, пользуясь уравнением (2.431), получим

$$\frac{\partial (\alpha' J)}{\partial \xi} + \beta' \frac{\partial J}{\partial \eta} - \alpha' \frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + 2\rho\Omega J^2, \quad (2.4641)$$

$$\frac{\partial (\beta' J)}{\partial \eta} + \alpha' \frac{\partial J}{\partial \xi} - \beta' \frac{\partial J}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + 2\rho\Omega J^2. \quad (2.4642)$$

¹ G. B. Jeffery, Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates, Phil. Trans. A. 221, pp. 265—93.

Подставляем теперь вместо $\alpha'J$ и $\beta'J$ их значения из (2.462), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_0 J) + \beta' \frac{\partial J}{\partial \eta} - \alpha' \frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + 2\rho \Omega J^2, \quad (2.4643)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\beta_0 J) + \alpha' \frac{\partial J}{\partial \xi} - \beta' \frac{\partial J}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + 2\rho \Omega J^2. \quad (2.4644)$$

Предположим, что можно пренебречь всеми объемными силами, так что можно положить $\Omega = 0$; тогда складывая уравнения (2.4643) и (2.4644), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha_0 J) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\beta_0 J) = 0.$$

Таким образом

$$J\alpha_0 = -\frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad J\beta_0 = \frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

где Q представляет некоторую функцию от ξ , η .

Из уравнения (2.462) мы имеем:

$$\alpha' = \frac{1}{J} \left(2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right), \quad \beta' = \frac{1}{J} \left(2 \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right).$$

Подставляя значения α' и β' , в уравнения (2.4632) и (2.4643) или в (2.4644), получаем после некоторых простых сокращений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \frac{2}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) + 4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{4}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} - \frac{2}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial J}{\partial \eta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Эти формулы могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{Q}{J} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{Q}{J} \right) - Q \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{J} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{1}{J} \right) \right\} + \\ + 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\chi}{J} \right) - 4 \chi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{1}{J} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4651)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{Q}{J} \right) - Q \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{1}{J} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{\chi}{J} \right) - \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{J}. \quad (2.4652)$$

Если теперь

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{1}{J} \right) = 0, \quad (2.466)$$

что справедливо для случая биполярных координат, то уравнение (2.4652) приводится к виду

$$Q = J \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\chi}{J} - \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{J} \right\} d\xi d\eta \quad (2.467);$$

это значение Q ограничено условием, чтобы полученная таким образом величина Q/J удовлетворяла уравнению (2.4651).

Обращаясь к уравнению (2.394), мы видим, что в случае биполярных координат

$$\frac{1}{J} = \frac{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}{a},$$

так что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{J} = \frac{1}{J},$$

и уравнение (2.4651) сводится к

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right) \frac{Q}{J} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\chi}{J} \right) = 0, \quad (2.4681)$$

тогда как уравнение (2.467) принимает более простую форму

$$\frac{Q}{J} = \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right) \frac{\chi^1}{J} \cdot d\xi d\eta. \quad (2.4682)$$

Так как решение для χ в биполярных координатах приводит непосредственно к простой формуле для χ/J , этот способ дает величину перемещений с минимальной затратой труда. Выражения для перемещений получаются из (2.461) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu U_\xi &= (1 - 2\sigma) \frac{\partial \chi}{J \partial \xi} - \frac{(1 - \sigma)}{J} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \\ 2\mu U_\eta &= (1 - 2\sigma) \frac{\partial \chi}{J \partial \eta} + \frac{(1 - \sigma)}{J} \frac{\partial Q}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.469)$$

§ 2.47. Поперечный экстенсометр.

Определение главных напряжений P и Q может быть выполнено, когда известны изохроматические и изоклинические линии, при помощи методов, описанных в §§ 2.30, 2.31.

Другой способ заключается в том, что нужно измерить изменение толщины пластинки, возникающее в результате перехода пластинки из ненапряженного состояния в напряженное. Зная изменение толщины, можно определить сумму главных напряжений в каждой точке по способу, впервые примененному Менаже.¹

Выбирая оси x и y в случае обобщенного плоского напряженного состояния вдоль линий главных напряжений в рассматриваемой точке, получаем из уравнений (2.2451) и (2.2452),

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial U}{\partial x} &= P - \eta Q, \\ E \frac{\partial V}{\partial y} &= Q - \eta P; \end{aligned} \right\} \quad (2.471)$$

причем упругие постоянные η и E связаны с σ и μ равенствами

$$\sigma = \frac{\eta}{1 + \eta}, \quad (1 + \eta) 2\mu = E.$$

Далее уравнение (2.2333) переписывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

¹ A. Mesnager, Mesure des efforts intérieurs dans les solides et applications, Buda-Pesth. Congress of the International Association for Testing Materials, 1901.

Интегрируя это уравнение по толщине пластинки, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} (\omega_{+c} - \omega_{-c}) &= - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{(1-\eta)}{E} \cdot (P+Q) = - \frac{\eta}{E} (P+Q). \end{aligned} \quad (2.472)$$

Величина $(\omega_{+c} - \omega_{-c}^{*})$ является полным изменением толщины пластинки рассматриваемой в точке.

Отсюда

$$P+Q = - \frac{E}{2c\eta} [\text{полное изменение толщины}]. \quad (2.473)$$

На практике не совсем удобно каждый раз умножать измеренную величину на коэффициент E/η , и сумма главных напряжений может быть получена проще путем сравнения наблюдаемого изменения толщины с изменением толщины, получаемым в подобной же пластинке при простом растяжении или сжатии. Таким образом, если T является напряжением при простом растяжении для пластинки, имеющей

толщину $2c$, и если ε_0 является полным приращением толщины, наблюдаемым в этом случае, ε — полным приращением толщины, наблюдаемым в эксперименте, где главными напряжениями будут $P+Q$, тогда

$$T = - \frac{E}{2c\eta} \varepsilon_0, \quad (2.474)$$

$$P+Q = - \frac{E}{2c\eta} \varepsilon, \quad (2.475)$$

отсюда

$$\frac{P+Q}{T} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad (2.476)$$

отношение, независимое от упругих постоянных, которых поэтому можно не определять.

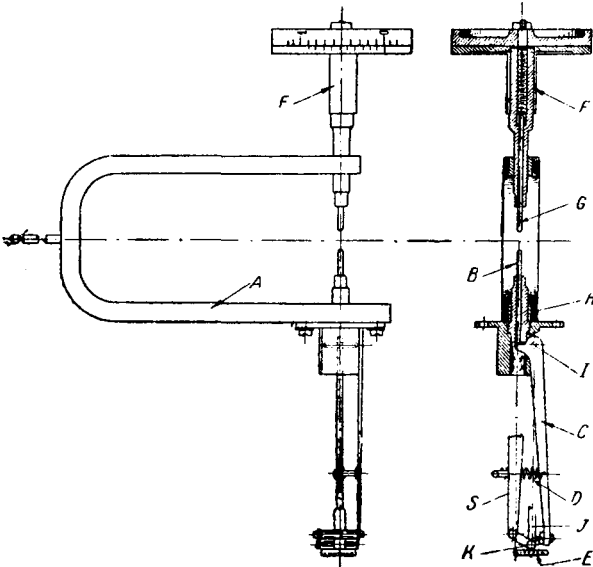
Обычно мы всегда встречаемся с очень малыми деформациями, и так как пластинка имеет обычно толщину меньшую, чем $0,5$ см, то требуются изме-

рения очень малых изменений. Для нитроцеллюлозы средняя величина E равна 21000 кг/см^2 , а соответствующая величина η равна $0,4$.

Изменение толщины пластинки, имеющей, скажем, начальную толщину в $0,38$ см при напряжении $0,07 \text{ кг/см}^2$, равно $5,08 \times 10^{-7}$ см, и для того, чтобы определить распределение напряжений с точностью $0,35 \text{ кг/см}^2$, требуется поперечный экстенсометр, производящий измерения с точностью до 10^{-6} см. Это не представляет особых затруднений при условии, что температура лаборатории может держаться достаточно постоянной и будут отсутствовать воздушные течения.

Прежние типы поперечного экстенсометра, предназначенного для таких измерений, уже описывались неоднократно;¹ однако, с тех пор было внесено много

¹ E. G. Coker, A Laboratory Apparatus for measuring the Lateral Strains in Tension and Compression Members, with some Applications to the Measurement of the Elastic Constants of Metals. Proc. Roy. Soc. Edin. 25, 1904—1905. См. также Dictionary of Applied Physics, vol. I, и E. G. Coker and W. A. Scobie, The Distribution of Stress due to a rivet in a plate. Trans. Inst. Naval Architects, 1913.



Фиг. 2.471.

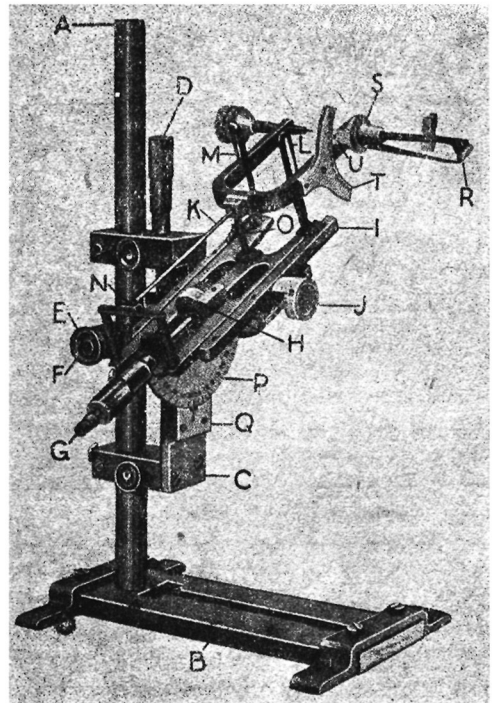
небольших улучшений, которые увеличили применимость этого инструмента; на приложенной фотографии (фиг. 2.472) показан его современный вид. Основные части измерительного приспособления показаны более ясно на чертеже (фиг. 2.471), на котором *A* представляет собой *U*-образную раму, в которой трением держится микрометр *F*, имеющий свободно двигающуюся измерительную иглу *G*. Вторая подобная игла *B*, находящаяся на одной линии с первой, проходит через направляющую *H*, и ее наружный конец упирается в короткое плечо рычага *C*, вращающегося на оси *I*; конец более длинного плеча этого рычага прижимается посредством легкой пружины к выступающему плечу *J* зеркала *E*, прикрепленного на шарнире в точке *K* к элементу *S* рамы *A*. Каждое изменение расстояния между кончиками измерительных иглок вызывает поворот зеркала и служит для измерения изменений толщины, имеющих место в напряженной пластинке, установленной между иглами.

Разумеется, при установке поперечного экстенсометра для измерения изменений толщины в любой точке пластинки и для установления координат этой точки необходимо иметь соответствующие приспособления. Основное приспособление состоит из комбинации скользящих частей и устроено следующим образом.

Основная несущая рама *C* (фиг. 2.472) представляет собой вертикальную пластинку с горизонтальными выступами, скользящими по вертикальной стойке *A*; она перемещается в вертикальной плоскости посредством микрометрического винта *D*, нижний конец которого опирается на вторую поперечину *E* (невидимую на снимке), надетую на стойку и также могущую скользить по ней вертикально, но обычно закрепленную зажимом *F*.

В некоторых случаях может быть желательно передвигать вертикальную раму *C*, не меняя установки микрометрического винта *D*; для выполнения этого предусмотрен второй микрометрический винт с небольшим шагом наряду с первым. Он дает возможность наблюдателю начать установку для наблюдений в том положении, когда верхний вертикальный микрометр будет стоять на нуле, что является очевидным преимуществом; описанное приспособление эквивалентно двум микрометрам, расположенным на одной линии; один служит для регулировок, а второй для измерений. Кроме того предусмотрена возможность применения дополнительных вставок, так что ход микрометра может быть увеличен. Наконец центральная поперечина *E* образует общий элемент, скользящий по стойке, с главной рамой *C*; таким образом эта последняя может быть поставлена в такое положение, что ее средняя вертикальная плоскость, проходящая через ось главной стойки, может быть повернута на любой требуемый азимутный угол.

Главный поперечный ползун *I*, несущий экстенсометр, имеет подобные микрометрические винты *G* и *H*, расположенные на одной линии, и укрепляется на перпендикулярно скользящей части, передвигаемой микрометрическим винтом *J*, который виден на переднем плане. Таким образом могут производиться небольшие перемещения,

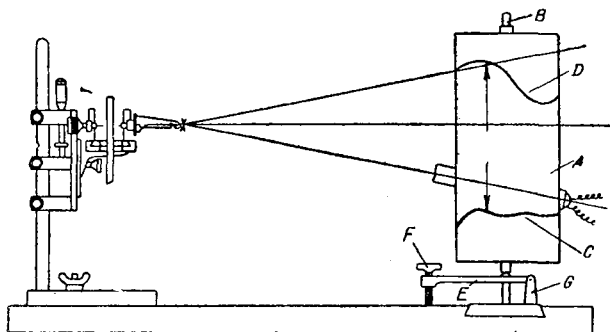


Фиг. 2.472.

позволяющие поставить экстенсометр в такое положение, что ось его хвостового стержня K будет расположена в центральной плоскости этой скользящей части.

Как видно из рисунка, подковообразная рама экстенсометра поддерживается на поперечном ползуне I в трех точках посредством подвеса, состоящего из двух тонких проволок L, M на передних концах и сферического шарикового подшипника N на конце хвостового стержня K .

Это позволяет производить некоторые качания микрометра, что вообще говоря, желательно, но влечет за собой возможность того, что измерительные иглы не будут прилегать нормально к пластинке. Это последнее требование обеспечивается поперечным ползуном, упомянутым выше, и кроме того наличием двух тонких линий, одна из которых выгравирована на экстенсометре, а другая на



Фиг. 2.473.

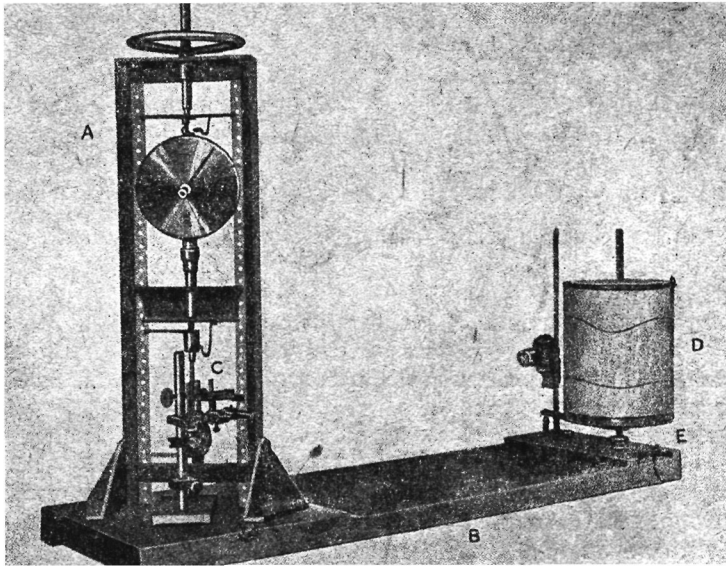
стойке O , прикрепленной к главному поперечному ползуну. Когда установка правильна, эти линии совпадают. Случается иногда, что линия, вдоль которой требуется измерить изменения толщины пластинки, наклонна; в виду этого главный поперечный ползун установлен на горизонтальной оси, невидной на рисунке; поэтому его можно устанавливать под любым углом, отсчитываемым по лимбу P с нониусом Q ; лимб прикреплен к опоре C . Все это приспособление, при наклоне, заставляет пятно света, отраженное от зеркала R' на экстенсометре, двигаться под углом к вертикали. Это неудобно по ряду причин, о которых будет сказано ниже. Для того чтобы пятно света двигалось все время в вертикальной плоскости, державка S , содержащая увеличивающий прибор экстенсометра, приспособляется так, что может вращаться вокруг оси измерительных игл и устанавливаться под требуемым углом при помощи лимба T и нониуса U . Этот лимб P так градуирован, что когда они правильно поставлены, их показания одинаковы.

Путем этих приспособлений легко измерять изменения толщины в несколько тысячных дюйма; однако новое затруднение возникает из-за чрезмерного количества времени, требуемого для анализа сотен наблюдений, заносимых в лабораторный журнал, так как в каждой точке требуется по крайней мере два наблюдения, поскольку параллельные поверхности, к которым прикасаются иголки, никогда не бывают „плоскими“ в оптическом смысле. Они бывают обычно в таком состоянии, что естественные колебания в толщине в разных точках оказываются того же порядка, что и изменения, вызываемые напряжением. Для того чтобы обеспечить правильную установку, при которой измерения могли бы легко расшифровываться, прибор устроен так, что каждое наблюдение наносится непосредственно на большой лист миллиметровой бумаги, обернутый вокруг барабана A (фиг. 2.473), вращающегося на вертикальной оси B .

Движение пятна света, вызванное естественными колебаниями в толщине образца вдоль любой линии, принимается за основную линию C , от которой и измеряются наблюдаемые изменения толщины вследствие напряжения, выраженные кривой D ; требуемые исправления, описываемые далее, наносятся при помощи бумажных шаблонов.

Таким образом окончательные результаты измерения напряжений получаются без всяких арифметических вычислений и все изображаются графически на одном и том же листе. Можно упомянуть, что в целях удобства принято относить измеренную величину поперечной деформации к определенной толщине материала для того, чтобы облегчить сравнение между различными исследованиями.

Записывающий барабан устроен так, что может подниматься и опускаться посредством винта F (фиг. 2.473), расположенного на наружном конце уровня E , вращающегося на оси G ; поэтому нулевое показание экстенсометра может устанавливаться в определенном месте разграфленного листа. Когда исследуется большая модель, удобнее помещать барабан на поперечном ползуне, чтобы следить за горизонтальным движением экстенсометра. Приводимый снимок (фиг. 2.474)



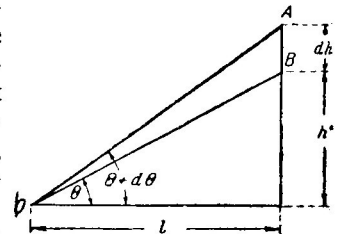
Фиг. 2.474.

показывает такое размещение, в котором небольшая испытательная машина A устанавливается на основание B с поперечным экстенсометром C . Записывающий барабан D и источник света F установлены оба на поперечном ползуне E , передвигаемом от руки. Эта установка может быть сделана самозаписывающей, для чего и микрометрический ползун должен быть снабжен механическим приводом, и запись может производиться на фото-бумаге; это усовершенствование пока не осуществлено.

§ 2.48. Способ измерений и поправок.

Как при оптических, так и механических измерениях удобнее всего производить первоначальные наблюдения сначала при небольшой нагрузке, а затем при большой, после чего берется разность измеренных величин. Этот метод устраняет ошибки, возникающие иногда при производстве отсчетов от нулевых нагрузок, а также от влияния каких-либо небольших первоначальных напряжений, которые могут иметь место. Правда, при этом вводятся повторные измерения, однако увеличивающаяся точность оправдывает этот дополнительный труд.

Порядок колебаний в толщине образца, вырезанного из пластинки, был установлен измерениями на нижней половине квадрата со стороной в 2,54 см и толщиной приблизительно 0,638 см. Результаты приводятся к таблице 2.48; необходимо отметить, что наибольшие колебания наблюдаются в общем вдоль краев и особенно на углах, где пересекаются грани, по которым производился вырез пластинки.



Фиг. 2.48.

ТАБЛИЦА 2.48.

Изменения толщины пластинки, имевшей первоначальную толщину 0,636 см. Единица—
 $2,54 \cdot 10^{-5}$ см.

		Ширина (в сантиметрах).								
		0,025	0,127	0,254	0,763	1,270	1,780	2,290	2,415	2,515
Высота	1,270	- 50	- 18	- 6	- 8	+ 1	+ 13	+ 16	+ 8	- 22
	0,763	- 29	- 11	+ 10	0	- 4	- 2	+ 8	+ 4	- 21
	0,254	+ 3	-	+ 39	+ 12	- 1	- 11	0	0	- 24
	0,127	+ 23	+ 39	+ 57	+ 38	+ 14	+ 1	+ 11	+ 10	- 13
	0,025	- 35	- 11	+ 1	- 11	- 33	- 40	- 46	- 51	- 76

На подвергнутой действию атмосферы свежесрезанной поверхности нитроцеллюлозы, если ее не отполировать, наблюдается обычно легкое изменение ее свойств у краев, происходящее, вероятно, вследствие улетучивания небольшой части одной из составных частей.

Тем не менее это изменение может быть устранено почти полностью путем покрытия свежей поверхности разреза бесцветным лаком и просушиванием в печи при температуре приблизительно 38°C в течение нескольких часов. В толстой пластинке, не прошедшей такой обработки, влияние выветривания проявляется часто появлением белой линии вдоль контура при рассмотрении образца в полярископе. В тонких образцах это влияние тоже наблюдается, но менее резко, даже по прошествии нескольких лет.

Ряд ошибок может происходить вследствие трения осей вращения частей экстенсометра и измерительных игл в их опорах в том случае, если небольшие царапины или неровности на поверхности образца сказываются внезапными изменениями в показаниях. Действие трения можно парализовать при помощи легких постукиваний карандашом по испытательной машине или, если машина массивная, то при помощи легких колебаний действием очень маленького электрического зуммера, прикрепленного к основанию машины и действующего от сухой батареи. Действие небольшой царапины заставляет иногда брать показания с каждой стороны от нее и из них получать значение толщины для точки, в которой находится царапина.

Обычные ошибки при тангенциальных отсчетах должны быть учтены, так как в некоторых случаях они бывают значительными. Пусть, например, $AB = dh$ будет небольшим отсчетом вследствие изменения угла от θ до $\theta + d\theta$ (фиг. 2.48). Тогда

$$dh = l \{ \operatorname{tg}(\theta + d\theta) - \operatorname{tg} \theta \} = l \sec^2 \theta d\theta,$$

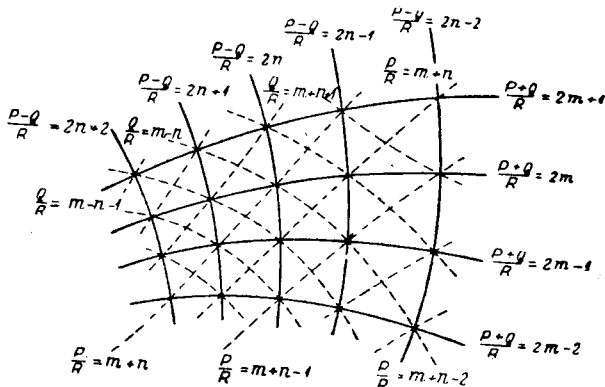
значительно точнее, чем $ld\theta$. В качестве крайнего примера пусть отсчет производится при средней высоте 30 см над зеркалом O , при $l = 80$ см. и угловом перемещении зеркала $\theta = 10^{\circ}37'$; тогда ошибка, принимая $ld\theta = dh$, равна приблизительно 3%.

Все показания следовательно должны быть исправлены по кривым, построенным для любого отношения между h и l . Производя эти поправки, необходимо учитывать изменения высоты зеркала относительно показаний на рабанае; некоторая небольшая ошибка в измерении этой высоты является практически незначительной.

§ 2.49. Способ графического получения линий главных напряжений

В главе III будет изложено, как наблюдения в поляризованном свете дают нам возможность изобразить изохроматические линии, соответствующие равным интервалам значений R , разности главных напряжений $P - Q$.

При наблюдениях поперечным экстенсометром мы можем измерить $P + Q$ в ряде точек и получить таким образом (обычно путем интерполяции) кривые, для которых $P + Q$ имеет равную величину. Эти кривые мы можем коротко назвать *изопахическими* кривыми или кривыми равной толщины.



Фиг. 2.49.

Если мы получили ряд изопахических линий, параметры которых изменяются через те же равные интервалы R , что и параметры изохроматических линий, то линии равных главных напряжений P или Q получаются следующим построением.¹

Пусть мы имеем три изохроматических линии (фиг. 2.49), для которых

$$\left(\frac{P - Q}{R}\right) = 2n + 1, 2n, 2n - 1,$$

где n — целое число; пусть ряд трех изопахических линий будет выражен числами

$$\left(\frac{P + Q}{R}\right) = 2m + 1, 2m, 2m - 1;$$

тогда там, где первая изохроматическая линия пересекает третью изопахическую,

$$\frac{P - Q}{R} = 2n + 1, \quad \frac{P + Q}{R} = 2m - 1,$$

так что

$$\frac{P}{R} = m + n, \quad \frac{Q}{R} = m - n - 1.$$

Для точки, где вторая изохроматическая пересекает вторую изопахическую:

$$\frac{P - Q}{R} = 2n, \quad \frac{P + Q}{R} = 2m,$$

так, что

$$\frac{P}{R} = m + n, \quad \frac{Q}{R} = m - n;$$

¹ Coker, Chakko and Satake, Photo-elastic and strain measurements of the effects of circular holes in the distribution of stress in tension members. Proceedings of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland, 1919.

Наконец для точки, где третья изохроматическая линия пересекает первую изопахическую

$$\frac{P-Q}{R} = 2n - 1, \quad \frac{P+Q}{R} = 2m + 1,$$

и

$$\frac{P}{R} = m + n, \quad \frac{Q}{R} = m - n + 1.$$

Вообще говоря, $\frac{P}{R} = m + n$ — в точке, где изохроматическая линия порядка $2n + s$ пересекает изопахическую линию порядка $2m - s$.

Линии равного напряжения получаются таким образом путем соединения на чертеже точек последовательных пересечений изохроматических линий с возрастающими параметрами и изопахических линий с убывающими и наоборот.

С другой стороны, если мы берем пересечения

$$\frac{P-Q}{R} = 2n + s, \quad \frac{P+Q}{R} = 2m + s,$$

то $\frac{Q}{R} = m - n$, так что линии равного напряжения получаются путем соединения точек последовательных пересечений, причем параметры как изохроматических, так и изопахических линий одновременно увеличиваются или уменьшаются.

Фиг. 2.49 представляет это построение сплошные линии изображают изохроматические и изопахические линии, а пунктирные — линии P или Q .

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ИСКУССТВЕННОГО ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ

§ 3.01. *Опыты Брюстера.*

Открытие, что стекло и другие прозрачные тела, находясь в напряженном состоянии, могут приобретать свойство двойного лучепреломления, сделано Давидом Брюстером.

В докладе Королевскому обществу 19 февраля 1816 г.,¹ Брюстер говорит:

„Если края стеклянной пластинки, не имеющей действия на поляризованный свет, сжимать или растягивать какой-либо силой, она будет показывать отчетливые нейтральные оси и оси деполяризации, подобно всем двупреломляющим кристаллам, и будет разлагать поляризованный свет на его дополнительные цвета. Нейтральные оси параллельны и перпендикулярны направлению приложения сил, а оси деполяризации расположены под углом в 45° к нейтральным осям“.

По терминологии того времени „нейтральные“ оси были теми, которые теперь назвали бы осями поляризации псевдокристалла (см. § 1.33). При рассмотрении стекла, подвергнутого натяжению, в полярископ при скрещенных осях поляризатора и анализатора, мы не наблюдаем никакого эффекта, когда эти оси параллельны осям поляризации вставленного образца: отсюда и терминология Брюстера — „нейтральные оси“. Наоборот, если оси поляризатора и анализатора расположены под углом в 45° к предыдущим направлениям, мы получаем наибольшее количество восстановленного света; вследствие этого соответствующие направления были названы *осями деполяризации* кристаллической пластинки.

Утверждение Брюстера таким образом сводится к следующему:

Когда свет проходит через стеклянную пластинку, находящуюся в напряженном состоянии в плоскости поперечной к направлению распространения света — оси поляризации в стекле расположены параллельно и перпендикулярно направлению напряжения.

Это утверждение может быть рассматриваемо как первый экспериментальный закон двойного лучепреломления в изотропных прозрачных материалах, находящихся в состоянии натяжения.

Далее Брюстер говорит: „Когда стеклянная пластинка подвергнута действию сжимающей силы, ее строение такое же, как у одного класса двупреломляющих кристаллов, включающего известковый шпат, берилл и т. д.; но когда та же пластинка подвергнута действию растягивающей силы, ее строение такое же, как у другого класса двупреломляющих кристаллов, включающего сернокислый кальций, кварц и т. д.“

Другими словами, стекло под давлением имеет свойства *отрицательного*, а при растяжении — *положительного* одноосного кристалла (гл. I, § 1.13), причем оптическая ось, по симметрии, проходит вдоль линии напряжения.

На основании изложенного в § 1.13 мы можем сказать, что волна, поляризованная по линии напряжения, является в обоих случаях *обыкновенной* волной. В положительном кристалле эта волна будет распространяться с большей скоростью

¹ On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances by mechanical compression and dilatation, Phil. Trans. Roy. Soc. 1816, стр. 156—78.

в пластинке, вырезанной параллельно оптической оси. Отсюда, при растяжении волна, поляризованная по линии напряжения, распространяется быстрее, чем волна, поляризованная под прямыми углами к напряжению. При сжатии стекла мы имеем обратное явление.

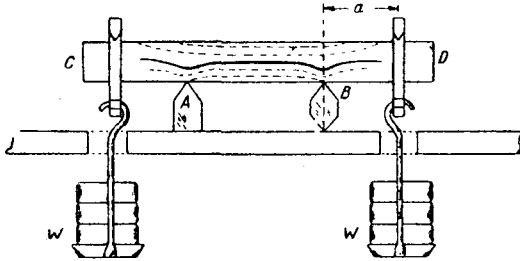
Обозначая через n_o и n_e обыкновенный и необыкновенный показатели преломления для стекла под действием напряжения, мы имеем

$$n_e - n_o \begin{cases} > 0 \text{ для растяжения} \\ < 0 \text{ для сжатия.} \end{cases}$$

Нужно сразу же отметить, что, хотя эти результаты, полученные Брюстером, остаются в силе для значительного большинства стекол, тем не менее имеются исключения из этого правила. Покельс¹ и Файлон² находят, что $n_e - n_o$ имеет знак противоположный у некоторых очень тяжелых сортов флинтгласа.

§ 3.02. Опыт с чистым изгибом.

Утверждение, что относительное отставание двух противоположно поляризованных лучей при данном равномерном напряжении пропорционально толщине, является непосредственным выводом



Фиг. 3.021.

из предположения, что напряжение превращает стекло во временный кристалл. Также очевидно, что величины n_o и n_e , а следовательно и разность между ними являются функциями приложенного напряжения. Очевидно, что раз перемена знака напряжения меняет также двойное лучепреломление, выражение $n_e - n_o$ должно быть нечетной функцией, и сразу же приходит мысль, что, как первое приближение, оно должно быть прямо пропорционально напряжению.

Однако Брюстер встретился со значительными затруднениями при получении однородного поля напряжения в сжатом куске стекла. В своем труде он дает чертеж распределения напряжений при сжатии такого образца стекла между двумя винтами, упирающимися в центры противоположных граней. Однако система напряжений, полученная этим путем, чрезвычайно сложна и трудно измерима.

Легче получить количественные данные, если изменить постановку опыта.

„Если длинную пластинку или полосу стекла, — говорит Брюстер,³ — согнуть рукой, то в ней обнаруживаются обе противоположные структуры, описанные выше. Выпуклая или растянутая сторона пластинки дает одну группу цветных полос, похожих на те, которые получаются в одном классе двупреломляющих кристаллов. Вогнутая или сжатая сторона дает другую группу цветных полос, похожих на получающиеся в другом классе кристаллов. Эти две группы цветных полос разделены глубокой черной линией, где нет ни сжатия, ни растяжения“.

Этот опыт лучше всего проводить, подвергая прямоугольную полосу CD (фиг. 3.021) из стекла или другого прозрачного материала чистому изгибу без сдвига.

Это достигается путем расположения полосы на двух опорах AB так, что ее концы выходят за опоры; к ним привешиваются два симметрично расположен-

¹ Ueber die Aenderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation. Annalen der Physik, Ser. IV, vol. VII (1902), pp. 745—71.

² On the variation with the wave-length of the double-refraction in strained glass, Camb. Phil. Soc. Proc. vol. XII (1903), p. 335.

³ Brewster, loc. cit.

ных груза W . Для того, чтобы избежать трения у острых опор A и B , возникающего вследствие сжатия нижней стороны полосы, одной из опор, например B , дается возможность слегка качаться, как показано на рисунке. Тогда реакция этой опоры находится неизбежно в плоскости, соединяющей оба поддерживающие лезвия, и достаточно вертикальна, благодаря чему не вводится существенной ошибки.

Если мы пренебрежем собственным весом полосы (обычно очень незначительным по сравнению с другими приложенными силами), то реакции обеих опор A и B должны быть, согласно законам элементарной статики, вертикальными, и каждая равняется W , так что отрезок полосы AB находится под действием постоянного изгибающего момента aW , где a есть плечо каждого из грузов относительно ближайшей опоры; перерезывающая сила по всей длине отрезка полосы AB между опорами равна нулю.

Если мы теперь сосредоточим наше внимание на средней части полосы, для того, чтобы исключить влияние местных напряжений, вызываемых остриями опор, то поле при помещении образца в плоском полярископе, согласно описанию Брюстера, окажется пересеченным рядами прямых горизонтальных полос. Эти полосы имеют последовательность цветов кристаллических пластинок, если на них смотреть с некоторого расстояния в телескоп, сфокусировав его на вертикальную плоскость, проходящую через продольную ось полосы, и если измерить окулярным микрометром последовательные промежутки между полосами, имеющими чувствительную окраску, то эти полосы окажутся расположенными на равных расстояниях.

Эти полосы соответствуют относительным отставаниям $\pm\lambda$, $\pm 2\lambda$..., где λ есть длина волны желтого света. Поскольку напряжение всюду *продольное* (математическая теория для этого вида напряжений будет дана позже, в §§ 5.03, 5.04) и пропорционально расстоянию от нейтральной плоскости полосы, будучи равным $\frac{aWy}{I}$, где I момент инерции поперечного сечения относительно его горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения, а y — вертикальное расстояние точки, взятой выше этой оси, то следует, что отставания λ , 2λ , 3λ и т. д. соответствуют напряжениям; также пропорциональным 1, 2, 3 и т. д.

Изогнутая полоса таким образом совершенно подобна компенсатору Бабинэ.

Итак, если d есть толщина пластинки, то относительное отставание (см. главу I § 1.35) будет $(n_e - n_o) d$.

Таким образом $n_e - n_o$ пропорционально приложенному напряжению для данной величины d . Меняя толщину стекла или применяя ряд подобных полос, мы можем сопоставить полосы, соответствующие относительному отставанию на какое-либо точное число длин волн с весьма обширным рядом напряжений, и таким способом проверить пропорциональность между относительным отставанием и напряжением.

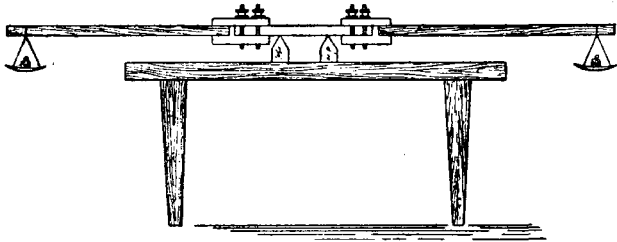
Практически легче всего провести этот опыт с натриевым светом. Все полосы при этом опыте черного цвета и резко очерчены.

Закон пропорциональности между относительным отставанием и напряжением был подтвержден независимо различными путями (что будет видно в дальнейшем); во всяком случае для стекла никаких отклонений от этого закона при нормальных температурах не наблюдалось¹.

При применении этого метода изгиба оказывается весьма удобным подвешивать грузы к прикрепленным к концам стеклянной полосы двум длинным выдающимся в стороны полосам из легкого дерева (см. фиг. 3.022). Это позволяет получить требуемый изгибающий момент с помощью гораздо меньших грузов. При таком способе реакции опор гораздо меньше, что имеет два преимущества: 1) уменьшение местных искажений в поле напряжений, вызванных остриями ножей, и 2) столь значительное уменьшение возможного трения, что обычно пред-

¹ Последние опыты однако показывают, что для кварцевого стекла этот закон не до-
статочно точен. *Filon and Harris, Roy. Soc. Proc. A.*, 130, 1930, 422—3.

ставляется возможным обойтись без качающегося устройства опоры B (см. фиг. 3.021), этим устраняется риск падения или поломки прибора. Далее, этот способ допускает применение более короткой полосы, чем это требовалось бы в противном случае, а при применении стекла это является неопределимым преимуществом и большой экономией в расходах.



Фиг. 3.022.

Этот опыт „чистого изгиба“ является одним из основных в оптическом способе испытания материалов и его основы впоследствии войдут в ряд других экспериментальных методов.

§ 3.03. Оптический коэффициент напряжения.

Если мы обозначим через r относительное отставание двух противоположно поляризованных лучей, определяя его более точно как расстояние, на которое фронт волны, поляризованной по линии напряжения, опережает фронт волны, поляризованной поперек линии напряжения, или, что то же самое, оптический (эквивалентный) ход второй волны минус оптический ход первой волны; тогда

$$r = (n_e - n_o) d.$$

Так как $n_e - n_o$ пропорционально напряжению T (считаемому, как обычно, положительным в случае растяжения), то

$$n_e - n_o = CT,$$

где C есть постоянная, зависящая только от материала и длины волны света.

Мы имеем тогда

$$r = CTd. \quad (3.031)$$

Это постоянная величина C называется *относительным оптическим коэффициентом напряжения*¹ материала для данной длины волны. В случаях, не вызывающих сомнения, слово „относительный“ обычно опускается.

Следует заметить, что оптический коэффициент напряжения есть величина, имеющая размерность, а именно, как это видно из уравнения (3.031), он является обратным напряжению, так что может измеряться в метрических абсолютных единицах, в квадратных сантиметрах на дину. Однако это является неудобной единицей измерения, так как при этом оптический коэффициент напряжения для стекол и многих других веществ выражается очень малыми числами. Удобной единицей измерения для большинства случаев является единица, равная 10^{-13} см²/дина, — при пользовании этой единицей оптические коэффициенты большинства стекол выражаются числами между 1 и 10; коэффициенты твердых тел, как целлюлоид или бакелит, — числами между 10 и 100. Эта единица измерения была предложена Файлоном,² предложившим также назвать ее, в честь лица, открывшего явление двойного лучепреломления при напряжениях, — *брюстером*. Эта единица и ее название будут употребляться и в дальнейшем.

Для вычисления отставания Брюстер имеет еще то особое преимущество, что если в уравнении $r = CTd$ C выражено в Брюстерах, d в миллиметрах, T — в барах (метрическая единица давления, обычно применяемая в метеорологии,

¹ Термин, введенный Файлоном (Filon, Camb. Phil. Soc. Proc. 12, I, 1902, 57.

² Royal Soc. Proc. A, 89, 589.

равная одному мегадину на 1 см^2 , или почти равная 1 кг/см^2 или атмосферному давлению на поверхности земли), тогда r , как вытекает из формулы, выражается непосредственно в онгстремах (\AA) без введения какого-либо множителя.

Если T выражается в английских фунтах (вес) на квадратный дюйм, и d в дюймах, то для приведения к онгстремам (что всегда необходимо для сравнения со стандартными длинами волн) мы имеем очень удобную формулу

$$r = (1,752) C T d,$$

в которой коэффициент приведения может быть взят равным $1 \frac{3}{4}$, что для большинства практических целей является весьма удобным при вычислениях.

§ 3.04. Опыты Френеля.

Хотя, как мы видели, Брюстер описал опыт, который при условии точных измерений должен был привести к установлению закона пропорциональности относительного отставания волн напряжению, он (Брюстер) повидимому не произвел точного количественного исследования этого закона.

Вскоре после этого Био¹ показал, что свет между скрещенными николями восстанавливается, если ввести в полярископ полоску стекла, подвергаемого продольным колебаниям.

В том же году Френель² опубликовал результаты некоторых наблюдений, из которых он, с помощью метода, впоследствии примененного Нейманном и описанного в § 3.09, вывел, что излишек скорости обыкновенной волны по сравнению со скоростью света в среде, не находящейся в состоянии напряжения, был вдвое больше соответствующего излишка скорости в случае необыкновенного луча.

Повидимому Френель испытывал большие затруднения при измерении действительных деформаций своих образцов, что легко объяснить, вспомнив, что теория упругости в то время была в зачаточном состоянии, вследствие этого он не мог получить каких-либо абсолютных коэффициентов. Он формулировал закон, который можно истолковать как положение, что скорость обыкновенной волны была в $\left(1 + \frac{1}{4} \delta\right)$ раз больше скорости в среде, не находящейся в состоянии напряжения, где δ есть объемное расширение.

Результаты его опытов целиком опровергаются (как это позже было указано Нейманном) тем фактом, что он очевидно пренебрег изменениями поперечных размеров материала под действием продольного растяжения или сжатия.

В более поздней работе Френель³ описал опыт, в котором он действительно получил два противоположно поляризованных изображения, пропуская свет через лучепреломляющие края. Это является первым осуществлением действительного разделения двух лучей, полученных при искусственном двойном лучепреломлении.

§ 3.05. Теория Нейманна.

Первое систематическое исследование полной теории оптических явлений при любой системе комбинированных напряжений и первое определение соответствующих постоянных принадлежит Нейманну. Его работа была представлена Бер-

¹ M. Biot, Sur une nouvelle propriété physique qu'acquière les lames de verre quand elles exécutent des vibrations longitudinales. Ann. de Chimie et de Physique, 13, 1820, 151—5.

² A. Fresnel, Résumé d'un mémoire sur la réflexion de la lumière, Ann. de Chimie et de Physique, 15, 1820, 379—86.

³ A. Fresnel, Note sur la double réfraction du verre comprimé, Ann. de Chimie et de Physique, 20, 1822, 376—83.

линской академии в 1841 году, но опубликована двумя годами позже.¹ Большая часть этой работы уделяет внимание температурным напряжениям, о которых будет сказано с следующим отделом.

Важно отметить то, что Нейманн, следуя Френелю, относит двойное лучепреломление к *деформациям* в материале и только косвенно относит его к *напряжению*. Повидимому все ранние исследователи держались той точки зрения, что напряжения вызывают правильное перераспределение молекул в твердых телах и что именно это, если можно так выразиться, геометрическое изменение образца создает искусственную кристаллическую структуру.

В подлинной работе Нейманна деформации все время предполагаются очень малыми, и некоторые использованные им формулы, например, прогиб балки (нагруженной сосредоточенным грузом), несомненно гипотетически предполагают совершенную упругость. Он далее принимает, что скорость волн отличается от скорости в материале, не находящемся в состоянии деформации, на величины, квадратами которых можно пренебречь.

В изложении, к которому мы сейчас приступаем, теория прежде всего будет освобождена от этих предположений, не являющихся необходимыми для ряда выводов.

Очевидно, например, что если теория должна быть применена к веществам в роде резины, то нельзя предполагать, что деформации будут очень малыми.

В дальнейшем изложении мы предположим, что имеем дело с куском материала, в котором деформации и напряжения однородны, т. е. не изменяются от точки к точке, хотя они неодинаковы в различных направлениях в одной и той же точке, так что материал находится в состоянии гомогенном, но не изотропном.

§ 3.06. Обобщенное определение составляющих деформации.

Прежде всего мы должны изменить и обобщить определение деформации, которое было дано в главе II § 2.06. В этом параграфе составляющие деформации были получены на основании предположения, что их квадратами и произведениями можно пренебречь, кроме того они были отнесены к положению (x, y, z) рассматриваемой точки *до* деформации.

Для цели, стоящей перед нами сейчас, необходимо отнести составляющие деформации к действительному положению точки P в материале, находящемся в деформированном состоянии.

Поэтому мы будем называть x, y, z — координатами действительного положения P в деформированном твердом теле; x', y', z' будут теперь координатами P в *естественном* состоянии, так что

$$u = x - x', \quad v = y - y', \quad w = z - z'$$

являются перемещениями и будут рассматриваться как функции координат *после* деформации, а не координат *до* деформации, как это было до сих пор.

Рассмотрим теперь первоначальные координаты $x' + dx', y' + dy', z' + dz'$ точки Q , координаты которой в теле, подвергшемся деформации, будут $x + dx, y + dy, z + dz$.

Если $u + du, v + dv, w + dw$ суть соответствующие перемещения, то мы находим

$$dx - dx' = du,$$

$$dy - dy' = dv,$$

$$dz - dz' = dw.$$

¹ F. E. Neumann, Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern, Abh. d. Kön. Acad. d. Wissenschaften zu Berlin, 1841, II, 1 — 254.

Поэтому:

$$dx' = dx \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + dy \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + dz \left(-\frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (3.061)$$

$$dy' = dx \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) + dy \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + dz \left(-\frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (3.062)$$

$$dz' = dx \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + dy \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right) + dz \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.063)$$

Так как, по предположению, деформация *однородна*, то уравнения перехода от dx, dy, dz к dx', dy', dz' должны быть идентичны для всех точек тела, так что $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и т. д. — постоянные величины.

Пусть теперь $ds = PQ$ и $ds' =$ соответствующей длине $P'Q'$ в недеформированном состоянии.

Возводя в квадрат, складывая (3.061), (3.062) и (3.063) и обозначая через λ, μ, ν направляющие косинусы PQ , так что

$$dx = \lambda ds, \quad dy = \mu ds, \quad dz = \nu ds,$$

мы получаем

$$(ds')^2 = (ds)^2 \{ 1 - 2(s_x \lambda^2 + s_y \mu^2 + s_z \nu^2 + \mu\nu \sigma_{yz} + \nu\lambda \sigma_{zx} + \lambda\mu \sigma_{xy}) \},$$

где

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (3.0641)$$

$$s_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}, \quad (3.0642)$$

$$s_z = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}, \quad (3.0643)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}, \quad (3.0644)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\}, \quad (3.0645)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}. \quad (3.0646)$$

Мы будем называть величины $s_x, s_y, s_z, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ шестью составляющими *конечной деформации*.

Если мы обозначим через s_r величину

$$s_r = \frac{(ds)^2 - (ds')^2}{2(ds)^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{ds'}{ds} \right)^2 \right\}, \quad (3.065)$$

тогда, когда $\frac{ds'}{ds}$ очень близко к единице, это определение приводит к обычному определению *деформации* в направлении r , где r — направление элемента PQ . Таким образом, деформация определяется как

$$\frac{(\text{новая длина})^2 - (\text{первоначальная длина})^2}{2(\text{новая длина})^2}$$

Это определение дает нам уравнение

$$s_r = \lambda^2 s_x + \mu^2 s_y + \nu^2 s_z + \mu\nu \sigma_{yz} + \nu\lambda \sigma_{zx} + \lambda\mu \sigma_{xy}, \quad (3.066)$$

имеющее совершенно тот же вид, как и уравнение (2.024), дающее деформацию в любом направлении для малых деформаций.

Беря для λ , μ , ν последовательно значения (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), мы видим, что s_x , s_y , s_z — конечные удлинения в направлении координатных осей.

Мы можем тем же путем обобщить понятие о сдвиге. Предположим, что PR , PT — два элемента в точке P , соответствующие направлениям r , t ; их направляющие косинусы — $(\lambda_1, \mu_1, \nu_2)$ и $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$; мы получаем тогда

$$\begin{aligned} dx_1' dx_2' + dy_1' dy_2' + dz_1' dz_2' &= \\ &= ds_1 ds_2 [\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 - \\ &- \{2\lambda_1 \lambda_2 s_x + 2\mu_1 \mu_2 s_y + 2\nu_1 \nu_2 s_z + \sigma_{yz}(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + \\ &+ \sigma_{zx}(\nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1) + \sigma_{xy}(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\}]. \end{aligned}$$

Обозначая через θ_{rt} угол RPT после деформации и через θ_{rt}' соответствующий угол до деформации, имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{rt} &= \frac{ds_1'}{ds_1} \cdot \frac{ds_2'}{ds_2} \cos \theta_{rt}' = \\ &= 2\lambda_1 \lambda_2 s_x + 2\mu_1 \mu_2 s_y + 2\nu_1 \nu_2 s_z + \\ &+ \sigma_{yz}(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + \sigma_{zx}(\nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1) + \sigma_{xy}(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1). \end{aligned}$$

Если направления r , t взаимно перпендикулярны, и если мы определим конечный сдвиг σ_{rt} уравнением

$$\sigma_{rt} = - \frac{ds_1'}{ds_1} \cdot \frac{ds_2'}{ds_2} \cos \theta_{rt}' = - \sqrt{(1 - 2s_r)(1 - 2s_t)} \cos \theta_{rt}', \quad (3.067)$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rt} &= 2\lambda_1 \lambda_2 s_x + 2\mu_1 \mu_2 s_y + 2\nu_1 \nu_2 s_z + \\ &+ \sigma_{yz}(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + \sigma_{zx}(\nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1) + \sigma_{xy}(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1), \end{aligned} \quad (3.068)$$

что является уравнением того же самого вида, как и уравнение (2.027) преобразования бесконечно малых сдвигов; далее это уравнение дает нам геометрическое значение величин σ_{yz} , σ_{zx} , σ_{xy} . Когда деформации бесконечно малы, эти величины приводят к обычным сдвигам.

Из этого непосредственно вытекает, что для установленных таким путем конечных деформаций, точно так же, как и для бесконечно малых деформаций, существует поверхность (второго порядка) деформации, выражающаяся уравнением

$$x^2 s_x + y^2 s_y + z^2 s_z + yz \sigma_{yz} + zx \sigma_{zx} + xy \sigma_{xy} = 1. \quad (3.069)$$

Эта поверхность деформации такова, что продольная деформация в любом направлении равна корню квадратному из величины, обратной радиусу-вектору этой поверхности. Точно так же следует, что сдвиг исчезает для любых двух сопряженных, взаимно перпендикулярных диаметров этой поверхности, т. е. для направлений вдоль главных осей любого центрального сечения, и только для них.

Эти направления являются главными направлениями деформации в любой заданной плоскости.

Главные оси поверхности второго порядка (3.069) дают три направления чистых продольных деформаций, и очевидно, что эти оси определяют плоскости симметрии для материала, поскольку вопрос идет о деформации.

§ 3.07. Оптические уравнения деформации Нейманна.

Теперь проследим следствия гипотезы о зависимости оптического явления исключительно от деформации, т. е. от действительного изменения размера и формы материала.

Из этой гипотезы следует, что эллипсоид Френеля, по соображениям симметрии, имеет те же самые главные оси, что и поверхность деформации.

Беря эти оси за оси координат, мы получаем для эллипсоида Френеля уравнение

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \quad (3.070)$$

и для поверхности деформации уравнение

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 = 1, \quad (3.071)$$

где s_1, s_2, s_3 — главные конечные удлинения, а a, b, c — главные скорости волн (см. § 1.11).

Предположим, что v_0 есть скорость света в недеформированном некристаллическом материале. Тогда мы должны иметь

$$a = v_0 + f(s_1, s_2, s_3) \quad (3.072)$$

и по симметрии

$$b = v_0 + f(s_2, s_3, s_1), \quad (3.073)$$

$$c = v_0 + f(s_3, s_1, s_2), \quad (3.074)$$

где f есть некоторая функция, равная нулю, когда $s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

Далее благодаря симметрии поверхности волны и поверхности деформации относительно главных осей, f неизбежно является симметричной функцией ее второго и третьего аргументов.

Рассматривая две волны, распространяющиеся в направлении оси Oz , и основываясь на опыте с изгибом, который, как мы видели, дает как деформацию, так и разность показателей преломления пропорциональными расстоянию от нейтральной оси, Нейманн приходит к выводу, что

$$a - b = K(s_1 - s_2), \quad (3.075)$$

где K есть некоторая постоянная, зависящая от материала и длины волны. Нейманн, правда, не принимает во внимание возможного изменения этой величины от длины волны, но это не влияет серьезным образом на его выводы.

В действительности наблюдение дает $s_1 - s_2$ пропорциональным $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; но так как квадратом $a - b$ можно пренебречь, то это эквивалентно соотношению (3.075).

Теперь (3.075) совместно с (3.072) — (3.074) приводит к

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2, s_3) - Ks_1 &= f(s_2, s_3, s_1) - Ks_2 \\ &= f(s_2, s_1, s_3) - Ks_2, \end{aligned} \quad (3.076)$$

откуда следует, что если мы напишем

$$f(s_1, s_2, s_3) - Ks_1 = g(s_1, s_2, s_3), \quad (3.077)$$

то на функцию g не будет влиять одновременная перестановка ее первого и второго и ее второго и третьего аргументов, т. е. эта функция тем самым является симметричной функцией всех трех главных деформаций s_1, s_2, s_3 .

Если мы теперь напишем

$$g(s_1, s_2, s_3) = p(s_1 + s_2 + s_3) + h(s_1, s_2, s_3),$$

где

$$p = \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} \right)_{0,0,0} = \left(\frac{\partial g}{\partial s_2} \right)_{0,0,0} = \left(\frac{\partial g}{\partial s_3} \right)_{0,0,0},$$

то h будет симметричной функцией s_1, s_2, s_3 второго и высших порядков

относительно s_1, s_2, s_3 . Обозначив $v_0 + h = v_0'$, и $K = q - p$, мы получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a &= v_0' + p(s_2 + s_3) + qs_1 \\ b &= v_0' + p(s_3 + s_1) + qs_2 \\ c &= v_0' + p(s_1 + s_2) + qs_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.078)$$

Это — уравнения Нейманна для скоростей волн: p и q — оптические постоянные деформации, и v_0' отличается от скорости волн в стекле, не подвергшемся деформации, на симметричную функцию деформаций, которая содержит только величины второго и высшего порядков. Однако, из этого не следует, что ею следует пренебрегать, если деформации очень малы.

Из этих уравнений Нейманн, попрежнему пренебрегая квадратами $a - v_0$ и т. д., выводит следующие два важных закона:

I. Направления поляризации в данном фронте волны параллельны направлениям главных деформаций в этом фронте волны, т. е. главным осям сечения поверхности деформации плоскостью, параллельной фронту волны.

II. Разность скоростей распространения двух противоположно поляризованных волн, имеющих тот же самый волновой фронт, пропорциональна разности главных деформаций в плоскости фронта волны.

В настоящее время эти два закона могут быть проверены непосредственно на опыте. Поскольку речь идет о деформациях в пределах упругости, они неизменно подтверждаются наблюдением.¹ Однако необходимо сделать оговорку, что полного исследования для любого возможного наклона лучей при наиболее обычных условиях деформации сделано не было. Но доказательства того, что, во всяком случае, закон I является точным, достаточно убедительны.

§ 3.08. Точные оптические уравнения деформаций.

Представляет значительный интерес проследить, какой вид принимают законы, связывающие скорости волн и деформации, если предположить, что закон I является точным.

Попутно обратным ходом рассуждения мы получаем доказательство правильности результатов Нейманна; это прямое доказательство было опущено, чтобы избежать повторения выводов.

Мы видели (§ 1.11), что направления поляризации в любом фронте волны суть главные оси параллельного ему сечения эллипсоида Френеля.

Из этого непосредственно следует, что закон I предполагает, что все центральные сечения эллипсоида Френеля и поверхности деформации имеют одни и те же оси.

Но в § 1.12 было показано, что направления поляризации в любой плоскости получаются посредством деления пополам двугранных углов между плоскостями, проведенными через нормаль к поверхности волны и оптические оси, т. е. между плоскостями, перпендикулярными к поверхности волны и круговому сечению эллипсоида Френеля.

Очевидно, что этот вывод является чисто геометрическим и приложим к любой поверхности второго порядка. Совершенно такое же построение приводит к главным осям соответствующего сечения поверхности деформации.

Так как построение содержит только фронт волны и плоскости кругового сечения, то для того, чтобы главные оси любого сечения были одними и теми же для обеих поверхностей, необходимо, чтобы оба имели бы одни и те же круговые сечения.

¹ См. примечание на стр. 164.

Общеизвестно, что плоскости кругового сечения поверхности второго порядка

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 = 1$$

проходят через линию пересечения этой поверхности и концентрической шаровой поверхности, и поэтому могут быть выражены уравнением

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 = A(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3.080)$$

где A есть некоторый постоянный множитель.

Подобным же образом уравнение круговых сечений эллипсоида Френеля может быть выражено в виде

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = B(x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.081)$$

Если эти два уравнения являются одним и тем же уравнением, тогда, если мы умножим первое на некоторый множитель D и вычтем его из второго, то разность будет тождественно равна нулю. Отсюда, обозначив $B - AD = C$, мы получаем

$$\left. \begin{aligned} a^2 - C - Ds_1 &= 0 \\ b^2 - C - Ds_2 &= 0 \\ c^2 - C - Ds_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.082)$$

Эти уравнения дают необходимые соотношения, если закон считать *точным*. Очевидно, что C и D , если они вообще включают в себе деформации, могут включать их только симметрично.

Рассмотрим теперь выводы, к которым приводят равенства (3.082) для скоростей распространения волн, имеющих заданный волновой фронт. Обозначим через v_r скорость волны, поляризованной в направлении r , и через v_t — скорость волны, поляризованной в направлении t . Тогда согласно § 1.11, $v_r^2 =$ обратной величине квадрата радиуса-вектора эллипсоида Френеля в направлении t .

Рассмотрим радиусы-векторы R и R' поверхности деформации и эллипсоида Френеля, имеющих одинаковые направления (λ, μ, ν) .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} &= s_1\lambda^2 + s_2\mu^2 + s_3\nu^2, \\ \frac{1}{R'^2} &= a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 = C + \frac{D}{R^2}, \end{aligned}$$

если сделать подстановку для a^2, b^2, c^2 из уравнения (3.082).

Отсюда, поскольку $\frac{1}{R^2} =$ деформации в направлении λ, μ, ν , мы имеем

$$\left. \begin{aligned} v_r^2 &= C + Ds_t \\ v_t^2 &= C + Ds_r, \end{aligned} \right\} \quad (3.083)$$

или

$$v_r^2 - v_t^2 = D(s_t - s_r). \quad (3.084)$$

Поэтому точная общая формулировка закона II должна быть такова:

II А. Разность квадратов скоростей распространения двух противоположно поляризованных лучей, имеющих один и тот же фронт волны, пропорциональна для данного тела в данном состоянии деформации разности главных деформаций в плоскости фронта волны, причем коэффициент пропорциональности является симметричной функцией трех главных деформаций.

Допуская эту несколько общую формулировку, мы очевидно можем ввести дальнейшие ограничения. Простейший вид, который приходит на ум, следующий:

$$\left. \begin{aligned} C &= v_0^2 + m(s_1 + s_2 + s_3) \\ D &= n - m, \end{aligned} \right\} \quad (3.085)$$

где m , n суть постоянные для материала и длины волны.

Тогда мы получаем уравнения

$$a^2 = v_0^2 + m(s_2 + s_3) + ns_1 \quad (3.086)$$

и два подобных же уравнения для b^2 и c^2 .

Так же, поскольку из уравнений деформаций

$$s_r + s_t + s_u = s_1 + s_2 + s_3,$$

где r , t , u — три взаимно перпендикулярных направления, мы имеем равенства

$$v_r^2 = v_0^2 + m(s_r + s_u) + ns_t, \quad (3.0871)$$

$$v_t^2 = v_0^2 + m(s_t + s_u) + ns_r, \quad (3.0872)$$

дающие скорости волн, поляризованных в направлениях r , t . Величина u обозначает нормаль к поверхности волны.

Эти уравнения являются *простейшими* оптическими уравнениями деформации, заключающими в себе деформации только первого порядка, которые согласуются с законом I, *если не введено никаких приближений*.

Небольшое обобщение достигается для этих формул, если мы прибавляем к v_0^2 симметричную функцию h от деформаций s_1 , s_2 , s_3 , где h предполагается зависящей только от второго и высшего порядков деформаций.

Извлекая квадратные корни из (3.086) и (3.0871) и пренебрегая квадратами $a - v_0$ и т. д., мы получаем

$$\begin{aligned} a &= v_0 + \frac{h}{2v_0} + \frac{m}{2v_0}(s_2 + s_3) + \frac{n}{2v_0}s_1 = \\ &= v_0' + p(s_2 + s_3) + qs_1 \end{aligned} \quad (3.0881)$$

$$v_r = v_0' + p(s_r + s_u) + qs_t, \quad (3.0882)$$

где

$$v_0' = v_0 + \frac{h}{2v_0}, \quad p = \frac{m}{2v_0}, \quad q = \frac{n}{2v_0}.$$

Эти уравнения являются уравнениями Нейманна, и приводят к его формулировке закона II.

До сих пор не было найдено материала, обладающего свойством искусственного двойного лучепреломления в достаточно заметной степени, чтобы было возможно на основе опыта сделать выбор между формой уравнений Нейманна и формой уравнений, предложенных здесь; поэтому точность закона I и точная формулировка закона II остаются, до некоторой степени, вопросом открытым. Дальнейшие исследования, несомненно, прольют свет на это дело.

Действительные абсолютные и относительные отставания согласно приближенным предположениям Нейманна выражаются формулами приблизительно так:

$$\begin{aligned} (n_r - n_0)d &= \left(\frac{u}{v_r} - \frac{u_0}{v_0} \right) d = \frac{ud}{v_0^2} (v_0 - v_r) \text{ приблизительно} \\ &= \frac{ud}{v_0^2} [v_0 - v_0' - p(s_r + s_u) - qs_t] \end{aligned} \quad (3.0891)$$

и подобным же образом

$$(n_t - n_0) d = \frac{ud}{v_0^2} [v - v_0' - p(s_t + s_n) - qs_t], \quad (3.0892)$$

$$(n_r - n_t) d = \frac{ud}{v_0^2} (q - p) (s_r - s_t), \quad (3.0893)$$

где u есть скорость света в вакууме, и n_0 — показатель преломления материала, неподвергнувшегося деформации.

§ 3.09. *Опыты Нейманна.*

Нейманн прежде всего повторил опыт изгиба. Однако, в его опытах балка не подвергалась чистому изгибу, а была помещена просто на опорах и нагружалась по середине; прогиб среднего сечения измерялся микрометром.

Применяя обычные формулы изгиба и пренебрегая каким-либо резким изменением направления оси, вызванным нагрузкой, мы легко получим для кривизны на расстоянии x от средней точки выражение

$$3\sigma(a - x)/a^3, \quad (3.0901)$$

где $2a$ есть пролет и σ — прогиб в середине пролета, измерявшийся Нейманном.

Конечно, Нейманн пренебрегал влиянием перерезывающей силы, которое в его время не было достаточно понято. Если же это учесть, то для продольного удлинения s_1 на расстоянии u от нейтральной плоскости мы легко найдем выражение $u \times$ кривизну,¹ т. е.

$$s_1 = 3\sigma u (a - x)/a^3, \quad (3.0902)$$

и удлинения в перпендикулярных направлениях выразятся через

$$s_2 = s_3 = -3\eta\sigma u (a - x)/a^3. \quad (3.0903)$$

Относительное отставание выражается тогда формулой

$$r = -\frac{ud}{v_0^2} (p - q) (1 + \eta) \frac{3\sigma u (a - x)}{a^3}. \quad (3.091)$$

Если теперь длина волны желтого света известна, а расстояние u „чувствительной окраски“ данного порядка измерено путем наблюдения, то тем самым найдена величина $p - q$ для этого цвета, поскольку все остальные величины в уравнении либо известны, либо могут быть непосредственно измерены.

Таблицы длин волн, хорошо известные в наше время всем, изучающим физику, в то время не были распространены; кроме того Нейманн, применяя белый свет, считал более удобным сравнение с широко известной последовательностью цветов, известной под именем колец Ньютона: таблица Ньютона для толщин слоя воздуха, дающего данный цвет при интерференции света, отраженного от двух поверхностей воздушной пленки, позволила ему непосредственно получать относительное отставание для данной чувствительной окраски. Попутно мы можем заметить, что это сравнение в скрытой форме предполагало, что оптический коэффициент деформации для всех цветов является одним и тем же (что впоследствии оказалось не совсем точным).

Второй опыт Нейманна был очевидно идентичным с опытом Френеля, хотя задуман самостоятельно. Мы видели в § 1.47, что свет из одного и того же источника, пройдя через два маленьких отверстия в экране, будет интерферировать. В рассматриваемом случае применялась решетка, но то же самое действие можно получить, применяя только две параллельные щели, расположенные перед

¹ Для проверки см. главу V, §§ 5.03, 5.04.

объективом телескопа. Если в формуле в § 1.47 мы примем $n=2$, то получим для интенсивности света в фокальной плоскости телескопа число, пропорциональное $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Это выражение имеет максимум, когда $\alpha = 2k\pi$, причем k — целое число.

Таким образом мы имеем ряд дифракционных полос, соответствующих

$$\sin i + \sin \theta = k\lambda/c,$$

где c расстояние между двумя щелями (обозначенное d в § 1.47).

Предположим теперь, что свет падает перпендикулярно (под прямым углом) на экран, $i=0$, в таком случае центральная белая полоса, соответствующая $k=0$, лежит на оптической оси телескопа ($\theta=0$). Однако, если свет падает наклонно, появляется некоторое отставание $c \sin i$ между двумя щелями. Совершенно тот же результат получится, если вместо наклона падающей волны на экран, мы введем любым другим способом разность отставания света у двух щелей.

Если свет у верхней щели отстает по отношению к свету у нижней щели на длину r , то соответствующий наклон i получается из $\sin i = r/c$ и наклоны θ линий, ведущих к последовательным светлым полосам, будут

$$\sin \theta = \frac{k\lambda - r}{c}.$$

Таким образом, центральная белая полоса теперь смещена, по сравнению с ее положением, когда такого отставания нет, на r/c раз фокусное расстояние телескопа.

Если теперь рассмотрим волну, поляризованную по линии напряжения, то мы имеем для ее отставания на уровне y

$$\begin{aligned} (n_1 - n_0) d &= \frac{ud}{v_0^2} [v_0 - v_0' - p(s_1 + s_2) - qs_3] \\ &= \frac{ud}{v_0^2} [v_0 - v_0' - (p(1 - \eta) - \eta q) 3\sigma y (a - x)/a^3]. \end{aligned} \quad (3.0921)$$

Поскольку растянута нижняя часть стержня, y измеряется со знаком $+$ (положительно) вниз.

Далее, если щели расположены на равном расстоянии сверху и снизу от нейтральной оси, $v_0 - v_0'$ на уровне двух щелей отличается только членами нечетного порядка: главные члены, которые будут четного порядка, должны быть одинаковыми. Если мы пренебрежем членами третьего порядка в деформациях, мы найдем излишек отставания у нижней щели, равный

$$- \frac{ud}{v_0^2} [p(1 - \eta) - \eta q] 3\sigma c (a - x)/a^3. \quad (3.0922)$$

Поэтому центральная полоса будет поднята на величину

$$\frac{ud}{v_0^2} [p(1 - \eta) - \eta q] 3\sigma (a - x)/a^3, \quad (3.0923)$$

при этом фокусное расстояние телескопа принято равным единице.

Однако, при этом вводится дополнительная разность отставания вследствие того, что изменяются размеры поперечного сечения, а именно d обращается в $d(1 + s_2)$.

Полное соответствующее отставание в воздухе будет

$$(n_1 - 1) d(1 + s_2) - (n_0 - 1) d = (n_1 - n_0) d + (n_1 - 1) ds_2,$$

и второй член с правой стороны вводит разность отставаний между двумя щелями, приблизительно равную

$$- 3\eta\sigma c (n_0 - 1) d (a - x)/a^3. \quad (3.0924)$$

Полный подъем центральной полосы выразится поэтому (в угле, измеренном у центра объектива телескопа)

$$\theta_1 = \frac{3\sigma(a-x)}{a^3} d \left[\frac{n_0}{v_0} \{ p(1-\eta) - \eta q \} + \eta(n_0 - 1) \right], \quad (3.0925)$$

поскольку

$$u/v_0 = n_0.$$

Подобным же образом волна, поляризованная под прямыми углами к линии напряжения, дает подъем идентичному ряду дифракционных полос, которые поднимаются на величину

$$\theta_2 = \frac{3\sigma(a-x)}{a^3} d \left[\frac{n_0}{v_0} \{ q - 2p\eta \} + \eta(n_0 - 1) \right]. \quad (3.0926)$$

Если η и n_0 измерены соответствующим независимым опытом, и если перемещения θ_1 и θ_2 точно измерены микрометром в окуляре телескопа, с помощью которого мы ведем наблюдение, то мы получаем два линейных уравнения для p и q , так что оптические коэффициенты деформации получаются точно известными.

Повидимому Нейманн не был в состоянии точно определить абсолютные величины перемещений θ_1 и θ_2 ; он удовлетворился измерением их отношения, найденного им равным 2. Однако, поскольку он независимо определил $p - q$, это дало ему недостающие данные для $\theta_1 - \theta_2$.

Он не измерял величины η для своего стекла, но принял коэффициент Пуассона равным $1/4$, поскольку гипотеза об одинаковой изотропии всех тел была тогда широко принята. Мы теперь знаем, что эта величина для стекла неправильна.¹

Но даже и в таком случае его вычисления привели бы к некоторому приближению к истине, если бы он, выводя свои формулы, не сделал серьезной ошибки, а именно не принял бы, что запаздывание, вызванное изменением толщины Δd , будет $n_0 \Delta d$ вместо $(n_0 - 1) \Delta d$, как это должно быть. Для того, чтобы привести вышеприведенные формулы (3.0925) и (3.0926) к формулам Нейманна, было бы необходимо изменить последний член в квадратных скобках из $\eta(n_0 - 1)$ на ηn_0 , что дает очень серьезное изменение. Это не только обесценило численные результаты Нейманна, но и привело его к ошибочному заключению, что отношение $\theta_1 : \theta_2$ не зависит от первоначального показателя преломления n_0 стекла — заключение, которое является неправильным.

Поэтому вряд ли стоит приводить численные значения, полученные Нейманном для p и q , особенно поскольку они даны в парижских дюймах — единице измерения, теперь совершенно исчезнувшей.

Однако, не считая этого, его метод был правильным, и весьма удивительно, что эта ошибка не была исправлена в самом же начале, и опыты повторялись даже после того, как Корню на простом эксперименте показал, как определить коэффициент Пуассона для стекла.

§ 3.10. Максвелл и законы для оптических явлений в зависимости от напряжений.

Одиннадцать лет после того, как Нейманн сделал свой доклад, мы находим ту же проблему вновь формулированной Клэрком Максвеллом в следующих словах:²

„Я не нашел никаких описаний каких-либо опытов относительно существования зависимости между свойством двойного лучепреломления, сообщенного посред-

¹ См. *M. A. Cornu*, C. R. 69, 1869, 333; *Straubel*, Über die Elasticitätszahlen und Elasticitätsmoduln des Glases, Ann. d. Phys. u. Chem. 68, 1899, 369, и *H. T. Jessop*, On Cornu's Method of Determining the Elastic Constants of Glass, Phil. Mag. 42, 1921, 551—68.

² *Clerk Maxwell*, On the Equilibrium of Elastic Solids, Trans. Roy. Soc. Edin. 20, I.

ством сжатия стеклу или другим упругим твердым телам, и силой сжатия, вызывающей его. Но явления в изогнутом стекле повидимому указывают на то, что в однородных однопреломляющих веществах, подвергнутых давлению, главные оси давления совпадают с главными осями двойного лучепреломления и что разность давления по любым двум осям пропорциональна разности скоростей противоположно поляризованных лучей, направление которых параллельно третьей оси“.

Из этого следует, что повидимому Максвеллу не были известны опыты Нейманна, а также и выводы, приведенные в конце последнего параграфа, так же как и выводы, сделанные Нейманном из его теории. Тем не менее формулировка Максвелла интересна тем, что она обращает внимание на напряжения, а не на деформации, и предполагает совершенно иное физическое объяснение результатов.

Легко видеть, что формулировка Максвелла предполагает следующие уравнения для главных скоростей волн:

$$h = v_0 + F + Q \widehat{xx} + P(\widehat{yy} + \widehat{zz}) \quad (3.100)$$

и два подобных же уравнения, где P и Q — постоянные материала, а F есть симметричная функция второго и высших порядков относительно трех главных напряжений \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{zz} , причем за оси координат взяты главные оси напряжений (см. главу II § 2.10), так что поверхность напряжений принимает вид

$$x^2 \cdot \widehat{xx} + y^2 \cdot \widehat{yy} + z^2 \cdot \widehat{zz} = 1. \quad (3.101)$$

Равенство (3.100) представляет ряд уравнений, очень похожих по виду на уравнения Нейманна, с той единственной разницей, что главные деформации заменены главными напряжениями.

Одинаковая математическая обработка может быть применена в обоих случаях с той только разницей, что нет необходимости в обобщении наших обычных определений на конечную величину деформации, потому что уравнения для напряжений обычно устанавливаются для подвергнутого напряжению тела и не ограничены требованием малости напряжений.

Может быть показано, как и в § 3.08, что если *точные* уравнения для главных скоростей волн имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= v_0^2 + \varepsilon + \alpha(\widehat{yy} + \widehat{zz}) + \beta \widehat{xx} \\ b^2 &= v_0^2 + \varepsilon + \alpha(\widehat{zz} + \widehat{xx}) + \beta \widehat{yy} \\ c^2 &= v_0^2 + \varepsilon + \alpha(\widehat{xx} + \widehat{yy}) + \beta \widehat{zz}, \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

где α , β — постоянные и ε — симметричная функция напряжений порядка, по крайней мере равного 2, то справедливы следующие два закона:

I'. Направления поляризации для какого-либо фронта волны расположены вдоль главных осей напряжения в этом фронте волны, т. е. вдоль направлений наибольшего и наименьшего напряжения во фронте волны.

II'. Разность квадратов скоростей распространения двух волн пропорциональна разности двух главных напряжений в плоскости фронта волны.

Обратно, если справедливы законы I' и II', то скорости волн должны удовлетворять уравнениям (3.102). Таким образом, если r и s — направления главных осей напряжения во фронте волны, а t — направление нормали к поверхности волны, то

$$\left. \begin{aligned} v_r^2 &= v_0^2 + \varepsilon + \alpha(\widehat{rr} + \widehat{tt}) + \beta \widehat{ss}, \\ v_s^2 &= v_0^2 + \varepsilon + \alpha(\widehat{ss} + \widehat{tt}) + \beta \widehat{rr}, \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

откуда, пренебрегая квадратами $v_r - v_0$, $v_s - v_0$ мы имеем для абсолютных отставаний на единицу толщины

$$\begin{aligned} n_r - n_0 &= \frac{n_0}{2v_0^2} (v_0^2 - v_r^2) \quad \text{приблизительно} \\ &= -\frac{n_0}{2v_0^2} \{ \alpha(\widehat{rr} + \widehat{tt}) + \widehat{\beta ss} \} - \frac{n_0 \varepsilon}{2v_0^2} \\ &= C_1 \widehat{ss} + C_2(\widehat{rr} + \widehat{tt}) - \frac{n_0 \varepsilon}{2v_0^2}, \end{aligned} \quad (3.1041)$$

$$n_s - n_0 = C_1 \widehat{rr} + C_2(\widehat{ss} + \widehat{tt}) - \frac{n_0 \varepsilon}{2v_0^2}, \quad (3.1042)$$

где

$$C_1 = -n_0 \beta / 2v_0^2, \quad C_2 = -n_0 \alpha / 2v_0^2$$

постоянны для материала и длины волны применяемого света.

Эти величины удобно назвать *поперечным* и *прямым* оптическими коэффициентами напряжения, причем C_1 — связывающее отставание с напряжением *под прямым углом* к направлению поляризации — есть *поперечный* коэффициент, и C_2 — относящийся к напряжению *по* направлению поляризации волны, есть *прямой* коэффициент. Оба они нормально измеряются в брюстерах.

Заметим далее, что

$$n_s - n_r = (C_1 - C_2)(\widehat{rr} - \widehat{ss}), \quad (3.1043)$$

так что $C_1 - C_2 = C$ — относительный оптический коэффициент напряжения, определенный выше (3.03).

Как будет показано, опытные данные определенно указывают на то, что величина ε , содержащая квадраты и высшие степени напряжения, если не равна нулю, то во всяком случае вполне пренебрежима.

Опуская ее, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} n_r - n_0 &= C_1 \widehat{ss} + C_2(\widehat{rr} + \widehat{tt}) \\ n_s - n_0 &= C_1 \widehat{rr} + C_2(\widehat{ss} + \widehat{tt}). \end{aligned} \right\} \quad [(3.105)]$$

Однако, следует помнить, что эти выражения являются только приближенными, если предположить, что законы I' и II' обладают достаточной точностью.

Замечание, сделанное в § 3.08, равным образом приложимо и здесь: в настоящее время точность методов наблюдения не столь велика, чтобы позволить нам решить, какая группа выражений является правильной и обе группы должны быть рассматриваемы как эквивалентные.

§ 3.11. Законы оптических явлений, связанных одновременно с напряжением и деформацией.

Если мы теперь зададимся более широким вопросом, а именно: каков же должен быть вид законов, когда и деформация и напряжение *одновременно* входят в формулы, то в этом случае весьма немного можно получить из теории; некоторые экспериментальные результаты будут рассмотрены позднее.

Одно или два общих соображения могут быть сформулированы здесь: во-первых, если закон, связывающий деформацию и напряжения, таков, что главные оси напряжения не идентичны с главными осями деформации (а для деформаций, включающих в себе пластическое течение материала, с этой возможностью необходимо считаться), то очевидно, что в этом случае ничего нельзя сказать а priori о направлении главных осей эллипсоида Френеля.

Однако, если главные оси напряжения можно считать идентичными с главными осями деформации, то мы можем с достаточным основанием, применяя принципы симметрии, утверждать, что эти оси должны быть также и главными осями эллипсоида Френеля.

Но тогда, вообще говоря, нельзя утверждать, что главные оси деформации и главные оси напряжения совпадают *в любой данной плоскости*. Чтобы это было так, поверхность деформации и поверхность напряжения должны иметь идентичные круговые сечения, и если мы применим метод § 3.08, то следует, что законы, связывающие напряжения и деформации, должны быть вида

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= A + Bs_1 \\ \widehat{yy} &= A + Bs_2 \\ \widehat{zz} &= A + Bs_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.110)$$

где s_1, s_2, s_3 — главные деформации согласно определению в § 3.06 для конечных деформаций; A и B — величины, зависящие вообще не только от состояния материала в данный момент, но и от его прошлой истории.

Из вышесказанного следует, что нормальное растяжение \widehat{rr} в каком-либо направлении r определяется из равенства

$$\widehat{rr} = A + Bs_r, \quad (3.111)$$

так что, если r и t суть два направления главной деформации в заданной плоскости, то

$$\widehat{rr} - \widehat{tt} = B(s_r - s_t), \quad (3.112)$$

или разности главных напряжений должны быть пропорциональными разностям главных деформаций, причем коэффициент пропорциональности зависит от состояния и истории материала.

Если это условие не выполняется строго, то не могут иметь силы и законы типа I и I', так как совершенно очевидно, что невозможно совпадение осей поляризации с двумя группами перпендикулярных направлений, вообще говоря, различных.

Однако, если это условие выполнено, тогда возможно постоянное совпадение осей поляризации с (идентичными) направлениями главных деформаций и напряжений в плоскости фронта волны.

Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо и достаточно, чтобы выражения для главных скоростей волн были бы вида:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= L + Ms_1 = L' + M'\widehat{xx}, \\ b^2 &= L + Ms_2 = L' + M'\widehat{yy}, \\ c^2 &= L + Ms_3 = L' + M'\widehat{zz}, \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

где L, M, L', M' — величины той же природы, как и вышеприведенные величины A и B .

Эти уравнения подразумевают для скоростей v_r и v_t волн, поляризованных в направлениях r и t , значения

$$\left. \begin{aligned} v_r^2 &= L + Ms_t = L' + M'\widehat{tt} \\ v_t^2 &= L + Ms_r = L' + M'\widehat{rr} \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

и

$$v_r^2 - v_t^2 = M(s_t - s_r) = M'(\widehat{tt} - \widehat{rr}). \quad (3.115)$$

До сих пор повидимому не было проделано опытов с целью проверки этих законов для материала под любой системой комбинированного напряжения свыше предела упругости. Ясно, что, поскольку мы остаемся в пределах упругости, обычные соотношения между напряжением и деформациями показывают, что то, что может быть названо формулировками Нейманна и Максвелла, в действительности эквивалентно только-что рассмотренной соединенной формулировке.

§ 3.12. Случай искусственной конической рефракции.

Согласно выше изложенной теории, мы можем ожидать явления конической рефракции в том случае, когда нормаль к поверхности волны направлена под прямым углом к круговому сечению поверхности напряжения.

Если мы предположим, что оси x , y , z выбраны так, что \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{zz} расположены в нисходящем порядке (алгебраической) величины, тогда уравнение круговых сечений поверхности напряжения будет:

$$x^2(\widehat{xx} - \widehat{yy}) + z^2(\widehat{zz} - \widehat{yy}) = 0. \quad (3.120)$$

Направляющие косинусы нормали к одному из этих сечений выразятся через

$$l = \sqrt{\frac{\widehat{xx} - \widehat{yy}}{\widehat{xx} - \widehat{zz}}}, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{\frac{\widehat{yy} - \widehat{zz}}{\widehat{xx} - \widehat{zz}}}. \quad (3.1201)$$

Назовем это направление p . Тогда

$$\widehat{pp} = l^2\widehat{xx} + m^2\widehat{yy} + n^2\widehat{zz} = \widehat{xx} + \widehat{zz} - \widehat{yy}. \quad (3.1211)$$

С другой стороны, если q есть направление в соответствующем круговом сечении под прямым углом к оси y , то направляющими косинусами q будут

$$l = \sqrt{\frac{\widehat{yy} - \widehat{zz}}{\widehat{xx} - \widehat{zz}}}, \quad m = 0, \quad n = -\sqrt{\frac{\widehat{xx} - \widehat{yy}}{\widehat{xx} - \widehat{zz}}},$$

откуда

$$\widehat{qq} = \widehat{yy}. \quad (3.1212)$$

Также легко доказать, что

$$\widehat{py} = \widehat{qy} = 0; \quad (3.1213)$$

но

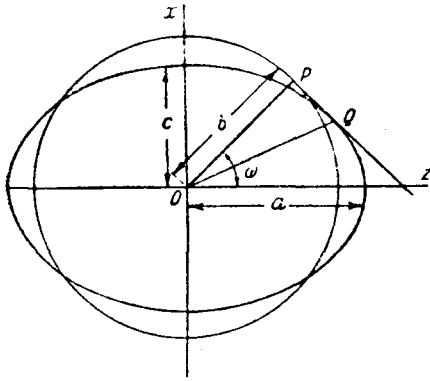
$$\widehat{pq} = \sqrt{(\widehat{xx} - \widehat{yy})(\widehat{yy} - \widehat{zz})}. \quad (3.1214)$$

Группа напряжений в (ортогональных) направлениях p , q , y дает нам указание на систему напряжений, которую мы должны приложить, чтобы получить коническую рефракцию для случая волны, пересекающей нормально пластинку, вырезанную перпендикулярно к p .

Пластинка должна быть подвергнута однородному всестороннему растяжению в своей собственной плоскости. Кроме того может быть некоторое растяжение по направлению нормали и сдвиг вдоль поверхности пластинки. Однако существенно наличие только-что указанного сдвига, потому что, если $\widehat{pq} = 0$, то либо $\widehat{xx} = \widehat{yy}$, либо $\widehat{yy} = \widehat{zz}$, и как поверхность напряжения, так и эллипсоид Френеля превращаются в поверхности вращения, и таким образом мы имеем случай одноосного кристалла, который, конечно, не дает конической рефракции.

Простейший и наиболее очевидный случай мы имеем, когда все напряжения исчезают за исключением сдвига \widehat{pq} , параллельного поверхности пластинки. Так, например, луч, пересекающий стеклянный цилиндр, подвергнутый кручению, параллельно (но не вдоль) оси, должен теоретически давать коническую рефракцию, и замечательно, что это будет так даже по рассмотренным нами ранее обобщенным законам, которые не ставят необходимым условием превышение предела упругости.

Подобный луч разбивается в конус лучей, и поэтому, после того как он пересечет толщину d материала, он выходит из него в виде цилиндра, образующие которого параллельны первоначальному направлению луча. Радиус этого цилиндра может быть легко вычислен из формул главы I.



Фиг. 3.12.

Рассмотрим сечение (фиг. 3.12) поверхности волны плоскостью xz , в которой расположены оптические оси. Это сечение состоит из круга радиуса b и эллипса с полуосями a и c . Проведем общую касательную PQ к кругу и эллипсу. Благодаря симметрии поверхности волны PQ является диаметром круга касания касательной плоскости с поверхностью волны в точке P .

Если ω есть угол между перпендикуляром p , опущенным из центра эллипса на касательную линию, и большой осью, то

$$p^2 = a^2 \cos^2 \omega + c^2 \sin^2 \omega;$$

расстояние между основанием перпендикуляра и точкой касания будет

$$-\frac{dp}{d\omega} = \frac{(a^2 - c^2) \sin \omega \cos \omega}{p},$$

откуда, когда $p = b$, мы находим

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Поэтому

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \cos \omega = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

и

$$PQ = \frac{1}{b} \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}. \quad (3.122)$$

Обращаясь теперь к уравнениям (3.102), мы получаем:

$$a^2 - b^2 = (\beta - \alpha) (\widehat{xx} - \widehat{yy}), \quad b^2 - c^2 = (\beta - \alpha) (\widehat{yy} - \widehat{zz}),$$

и поскольку из (3.1042) и следующих

$$\alpha = -2v_0^2 C_2 / n_0, \quad \beta = -2v_0^2 C_1 / n_0,$$

мы имеем, приближенно:

$$\beta - \alpha = 2v_0^2 (C_2 - C_1) / n_0 = -2v_0^2 C / n_0 = -2b^2 C / n_0.$$

Отсюда

$$a^2 - b^2 = -\frac{2b^2}{n_0} C (\widehat{xx} - \widehat{yy}),$$

$$b^2 - c^2 = -\frac{2b^2}{n_0} C (\widehat{yy} - \widehat{zz}).$$

Таким образом

$$PQ = \frac{2b}{n_0} C \sqrt{(\widehat{xx} - \widehat{yy})(\widehat{yy} - \widehat{zz})} = \frac{2b}{n_0} \widehat{pq} C. \quad (3.123)$$

Угол

$$POQ = \text{arctg} \left(\frac{2C\widehat{pq}}{n_0} \right)$$

и диаметр круга, после того как лучи пересекли толщину d материала, будет

$$\frac{2C\widehat{pq} \cdot d}{n_0}. \quad (3.124).$$

$2C \cdot \widehat{pq} \cdot d$ идентично с запаздыванием, вызванным сдвигом \widehat{pq} , действующим в плоскости пластинки. Эта величина почти для всех известных материалов представляет обыкновенно небольшую часть длины волны света. Такая величина слишком незначительна, чтобы ее можно было наблюдать. Но если бы был открыт материал с очень высоким оптическим коэффициентом напряжения, то наблюдение этого явления было бы очень строгим испытанием точности законов, связывающих напряжения с оптическими явлениями, о которых мы говорили, в частности закона I.

§ 3.13. Исследования Вертгейма.

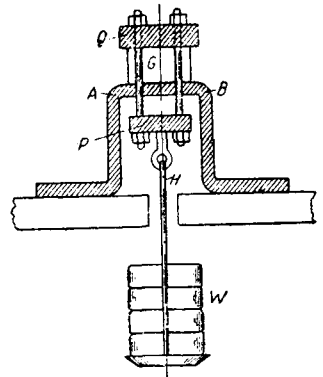
Следующие по времени важные количественные наблюдения были сделаны Вертгеймом.¹

Вертгейм первый проверил законы лучепреломления для стекла, находящегося под простейшим видом однородного напряжения, а именно под простым сжатием и растяжением. Его прибор для получения однородного давления, отсутствие которого представляло большие затруднения для Брюстера и Френеля, чрезвычайно остроумен и будет поэтому здесь описан.

Образец стекла G помещен на солидное металлическое перекрытие AB (фиг. 3.13). Металлический брус Q помещен над образцом так, что его концы выступают за перекрытие и соединены посредством металлических стержней со вторым металлическим брусом P , находящимся под перекрытием. Этот брус, в свою очередь, имеет кольцо с подвеской H , несущей груз W .

Если точка подвешивания подобрана так, что вертикальная линия, проведенная через H , проходит точно через середину образца стекла, то давление при растяжении от верхней и нижней поверхностей образца, достаточном для того, чтобы можно было применить правило Сен-Венана,² будет распределено равномерно и притом независимо от тщательности выверки несущих поверхностей.

Кроме того при наличии такого приспособления не трудно это проверить, нагружая его до чувствительной окраски (см. § 1.35), когда всякая неравномер-



Фиг. 3.13.

¹ G. Wertheim, Mémoire sur la double réfraction temporairement produite dans les corps isotropes, et sur la relation entre l'élasticité mécanique et l'élasticité optique, Ann. de Chimie et de Phys. Sér. III, 40, 156 и сл. (1854).

² Это хорошо известное положение гласит, что, на известном расстоянии от точки приложения нагрузки, система напряжений зависит только от статической равнодействующей этой нагрузки и не зависит от способа ее приложения.

ность напряжения может быть наблюдаема оптически; этим приспособлением удобно пользоваться при условии, что не имеет места неодинаковое во всех точках сжатие стекла. Повидимому Вертгейм не встретил никаких затруднений в этом отношении.

Полярископ Вертгейма имел ту особенность, что в качестве анализатора Вертгейм применил в нем не николю, а призму исландского шпата, пропускающую одновременно и обыкновенный и необыкновенный лучи. Полярископ прежде всего устанавливается так, что, когда стекло не введено, происходит полное потухание одного из лучей. Наблюдение этого луча соответствовало обычному наблюдению в скрещенных николях. Наблюдение же второго луча было аналогично наблюдению при параллельном поляризатору николе-анализаторе.

Окраски изображений, даваемых этими двумя лучами, были неизбежно дополнительными, и они попеременно потухали (или попеременно проходили через чувствительную окраску) при увеличении отставания на *половину* длины волны. Это позволило делать наблюдения на вдвое меньших интервалах, чем при пользовании только одним николем.

Опыты Вертгейма замечательны также и тем, что он действительно наблюдал образцы стекла под равномерным прямым растяжением; приложить такое растяжение к стеклу, очень трудно; Вертгейм разрешил эту задачу, прикрепляя к противоположным поверхностям, к которым предполагалось приложить растяжение, металлические конуса. Затем к кольцам, укрепленным у вершин этих конусов, прикладывались силы, по величине не превосходящие прочности цемента, скрепляющего образец и конуса. Линия, соединяющая точки приложения грузов, совпадала с вертикальной осью образца. Таким путем Вертгейм был в состоянии приложить к стеклу растягивающее усилие до 50 кг/см^2 .

§ 3.14. Общие выводы Вертгейма.

Сравнивая результаты опытов над образцами различных размеров и при различных нагрузках, Вертгейм пришел к следующим выводам:

1) Нагрузки для данного (относительного) отставания независимы от длины и ширины образца, но для всякого вещества пропорциональны толщине.

Иными словами, относительное отставание r есть функция от Td , где T есть напряжение и d — пройденная светом толщина.

Однако, поскольку совершенно очевидно, что отставание равно $(n_e - n_o) d$ и $n_e - n_o$ может зависеть только от состояния материала, а не от его толщины, то есть, если

$$r = f(Td) = (n_e - n_o) d,$$

то отсюда должно следовать, что $f(x)$ имеет вид Cx , где C есть постоянная величина, а это и есть формулированный ранее закон, связывающий напряжения с оптическими явлениями.

Однако в дальнейшем Вертгейм говорит следующее:

2) Относительное отставание пропорционально механическому удлинению или сжатию, но удлинение или сжатие не строго пропорциональны нагрузкам.

Если нагрузки отложить по абсциссам, а деформации по ординатам, тогда для случая сжатия кривая получается вогнутой по отношению к оси W и выпуклой для случая растяжения (фиг. 3.14); при этом кривая выпрямляется по обеим сторонам при увеличении нагрузки и в конце концов сливается в одну прямую линию, соответствующую обычно принятому модулю упругости.

Вертгейм в действительности нигде не измеряет деформацию в своем стекле: таким образом он *предполагает*, что отставание пропорционально деформации, так что его кривая „отставание — нагрузка“ является кривой „деформация — напряжение“, вычерченной в соответственном масштабе.

Единственное экспериментальное оправдание этого допущения заключается

в ссылке на утверждения Понселэ и Ходжкинсона, что начальные удлинения слишком малы, а начальные сжатия слишком велики, поддерживаемой общими соображениями относительно деформации.

Вертгейм определенно утверждает, что: „величина $P_{\lambda/2}$ является всегда наименьшей, последующие нагрузки возрастают до $P_{3\lambda/2}$ или $P_{4\lambda/2}$; от этой точки они (т. е. возрастания нагрузки при возрастании отставания на $\lambda/2$) повидимому стационарны. Обратное явление происходит в случае растяжения: наибольшей величиной является $T_{\lambda/2}$; затем они уменьшаются, и хотя опыты не могли быть проведены столь далеко, как в случае сжатия, все же они достаточны, чтобы показать, что обе кривые приближаются к одной и той же прямой линии“.

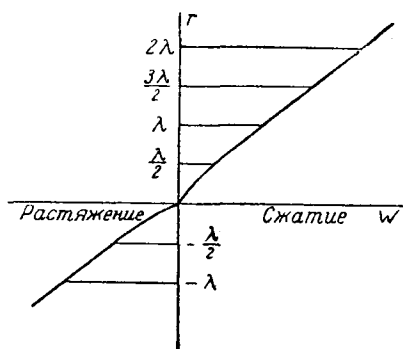
Вертгейм дает таблицу разности приложенных нагрузок для трех отдельных цветов и для чувствительной окраски в белом свете, и для трех различных стекол при увеличении отставания ступенями в половину длины волны. Красный и фиолетовый цвета были получены при помощи цветных стекол и т. д.

Увеличения нагрузок в килограммах для полуволны.

М а т е р и а л	Фиолетовый	Белый (чувств. окр.)	Нагровый	Красный
Кронглас P_1	52	68	74	78
из Клиши $P_2 - P_1$	56	74	79	87
$P_3 - P_2$	58	74	80	89
$P_4 - P_3$	—	74	81	88
Флинтглас I T_1	128	155	—	—
P_1	107	140	145	182
$P_2 - P_1$	120	146	155	190
$P_3 - P_2$	120	145	167	189
Флинтглас II P_1	—	185	—	222
$P_2 - P_1$	—	190	—	233

Однако заключения Вертгейма являются чрезвычайно сомнительными в этом отношении. Его результаты повидимому не были подтверждены более поздними исследованиями, и отсутствие непрерывности (фиг. 3.14), допущенное им в кривых „отставание — напряжение“, кажется невероятным.

В недавней работе Сэвор¹ произвел тщательное исследование этого вопроса, применяя для получения растяжения в стеклянном образце захваты, действующие трением. Он исследовал ряд длинных стеклянных плиток при простом растяжении и простом сжатии, применяя три различные источника монохроматического света, а именно: пламя натрия, зеленую (5461 Å) и фиолетовую (4358 Å) линии дуговой ртутной лампы, причем каждое из обоих монохроматических излучений было изолировано при помощи соответствующего фильтра. Следуя за Вертгеймом, Сэвор применял анализатор и поляризатор как в скрещенном, так и в параллельном положениях. Кривые отставания по отношению к напряжению оказались во всех случаях прямыми линиями и в пределах ошибок наблюдения идентичными как для растяжения, так и для



Фиг. 3.14.

¹ Savur, On the Stress-Optical Coefficients for Direct Tension and Pressure measured in the case of Glass, Phil. Mag. I, 1925, 453—63.

сжатия. Однако, эти прямые линии обычно не проходили через начало координат, показывая этим, что имело место некоторое первоначальное двойное лучепреломление. Сэвор в заключение говорит, что в пределах ошибок наблюдения до напряжений в 100 бар—напряжений в два раза больших, чем максимальное растяжение, достигнутое Вертгеймом, закон, связывающий двойное лучепреломление с напряжением для стекла, является точно линейным, и одним и тем же для растяжения и для сжатия.

Нет никаких указаний на какое-либо отклонение от этого закона для малых нагрузок, как это предполагал Вертгейм. В своей работе (стр. 186) Вертгейм утверждает, что для боросиликатного кронгласа, содержащего цинк и поташ, нагрузки для отставания в полволны при сжатии и растяжении были соответственно 151 кг и 207 кг. Эта весьма значительная разница (около 30%) никоим образом не согласуется с опытами Сэвора над боросиликатным кронгласом (Hilger № В. S. С. 7641), устанавливающими весьма тесное совпадение между прямыми линиями для растяжения и сжатия.

Наиболее вероятным объяснением результатов, полученных Вертгеймом, является то, что повидимому образцы, над которыми он производил наблюдения, не были в действительности отожджены в должной степени. Если они сохраняли какое-нибудь внутреннее напряжение, оптически эквивалентное небольшому давлению, то это должно было привести как раз к тем результатам, какие были им получены, во всяком случае в отношении неравенства T_1 и P_1 ; кроме того можно заметить, что за одним или двумя исключениями, которые могут быть случайными, большая часть отклонений, на которых Вертгейм основывал свои выводы, относится к нагрузкам для первой половины длины волны.

Так например, в случае флинтгласа I прибавление 8 кг к P_1 в любом случае и вычитание той же величины из T_1 в большой степени сглаживают разность нагрузок.

3) Третий вывод Вертгейма заключается в том, что относительное отставание (в сантиметрах) не зависит от длины волны, для данного материала, толщины и нагрузки, так что не обнаруживается заметной дисперсии при двойном лучепреломлении. Напомним, что этот самый закон был принят Нейманном. Однако, дальнейшие опыты Масэ-де-Лепинэ,¹ Покельса,² Файлона³ и других не подтвердили этого заключения.

§ 3.15. Измерение Вертгеймом оптических постоянных напряжения и деформации для различных материалов.

Вертгейм ввел в оптический метод изучения напряжений и деформаций весьма ценный прием измерения, а именно прием компенсатора. Он определил, с большой точностью, отставания, вызванные данными напряжениями в определенном куске кронгласа, который он затем применял как стандартный. Применение его заключалось в дифференциальном методе, сущность которого состояла в следующем. Стандартный образец прежде всего подвергается сжатию до чувствительной окраски. Другой образец, находящийся под небольшим напряжением, помещается затем против него, и если оси поляризации параллельны, то отставания просто алгебраически складываются. Окраска теперь совершенно изменяется, но при добавлении или уменьшении нагрузки на стандартный образец чувствительная окраска может быть восстановлена, тогда груз, добавленный или снятый со стандартного образца, измеряет отставание для второго образца.

Однако, в вышесказанном имеется явное допущение, повидимому не замеченное Вертгеймом: в случае белого света оптический коэффициент напряжения во всех

¹ С. R., 86, 1878, 326.

² Ann. d. Physik, Ser. IV, 7, 1902, 745—71.

³ Camb. Phil. Soc. Proc. 11, 1902, 478—92; 12, 1903—4, 55—64, 313—36; Phil. Trans. A, 207, 1907, 263—306.

прозрачных средах должен изменяться согласно одному и тому же самому закону, иначе компенсация не будет одинакова для всех цветов. Это замечание, конечно, отпадает, если принять справедливость закона Вертгейма относительно отсутствия дисперсии, или если мы будем применять монохроматический свет.

Этот метод компенсации Вертгейма был повидимому основательно забыт и вновь выдвинут Кокером¹ в последние годы.

Вертгейм также был первым, кто действительно измерил для ряда различных веществ оптический коэффициент напряжения, или более точно, его обратную величину, которую он назвал коэффициентом оптической упругости; он также первый сравнил эти величины с величинами других физических постоянных.

Для того чтобы можно было сравнить данные Вертгейма с данными нашего времени, его коэффициенты оптической упругости, выраженные в килограммах на квадратный сантиметр, были пересчитаны в оптические коэффициенты напряжения в брестерах и помещены в таблицу, приведенную ниже.

Им был вычислен оптический коэффициент напряжения, дающий отношение $n_p - n_0$ к продольному напряжению и являющийся отношением модуля Юнга к его коэффициенту оптической упругости. Это соответствует выражению Нейманна

$$\frac{n}{v_0} (q - p) (1 + \nu).$$

Таблица 3.15.

Измеренные Вертгеймом оптические коэффициенты напряжения и деформации для различных материалов.

М а т е р и а л	<i>C</i>	$(n_e - n_0)/s$	<i>n</i>	<i>E</i>	ρ
Кронглас от М. М. Maës и Clémandot . .	3,78	0,218	1,532	5 888	2,657
Кронглас от Feil	3,41	0,214	1,541	6 397	2,629
Флинтглас от Guinand	3,93	0,192	1,617	4 976	3,589
Зеркальное шлифовальное стекло	3,15	0,191	1,543	6 180	2,457
Обыкновенный кронглас	2,94	0,179	1,517	6 220	2,447
Флинтглас от Maës и Clémandot	3,13	0,163	1,614	5 323	3,538
Плавленый шпат	1,83	0,155	1,436	8 647	3,183
Каменная соль	2,65	0,101	1,557	3 876	2,136
Боросиликат свинца	1,96	0,100	1,676	5 208	4,050
Тяжелый флинт от Feil	2,00	0,099	1,624	5 017	4,056
Флинт Фарадея	1,78	0,088	1,681	5 017 *	4,358
Неактивные квасцы	6,71	0,064	1,455	975	1,632
Алмаз	2,318	—	2,470	10 865 *	—

В последних трех столбцах таблицы 3.15 даны показатель преломления *n* материала, его модуль Юнга *E* в килограммах на квадратный миллиметр и его плотность ρ .

Вышеприведенные оптические коэффициенты напряжения и деформации определены для среднего желтого света (чувствительной окраски).

Из этих данных Вертгейм выводит заключение, что сила двойного лучепреломления не находится в прямой зависимости с плотностью или показателем преломления при отсутствии напряжения или с модулем нормальной упругости, и это заключение не опровергнуто позднейшими работами, хотя опыты Покельса и показали существование зависимости между *C* и количеством различных составных частей в стекле.

¹ E. G. Coker, Photo-Elasticity, Engineering, January 6-th, 1911.

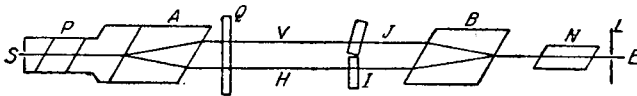
* Предположено Вертгеймом.

Величины, полученные для плавикового шпата, каменной соли, квасцов и алмаза, не являются вполне определенными. Покедьс показал, что в кристаллах даже кубической системы, являющихся однопреломляющими кристаллами, наблюдаемый оптический коэффициент напряжения является функцией от ориентировки, а Вертгейм не указывает, как были вырезаны его кристаллы по отношению к их осям симметрии.

Работе Вертгейма мы уделили такое внимание потому, что она действительно поставила физические основания оптического метода исследования напряжений на прочный фундамент; его работа в некотором смысле равноценна работе Нейманна, математическая обработка которого все еще лежит в основании всех применений этой отрасли физики.

§ 3.16. Определения Кэрра и Покедьса прямого и поперечного оптического коэффициента напряжения.

Было уже упомянуто, что Нейманн сделал попытку определить два абсолютных оптических коэффициента напряжения стекла, но благодаря ошибке в вычислении пришел к неправильным величинам, из которых он вывел несколько неожиданное заключение, что свет в стекле под действием однородного всестороннего сжатия распространяется с большей скоростью.



Фиг. 3.161.

Опыты Нейманна были повторены в 1872 году Ма-

хом.¹ Мах исправил ошибку Нейманна, но благодаря несчастной случайной ошибке в знаке, впоследствии указанной Покедьсом,² пришел к выводам, мало отличным от выводов Нейманна и в равной мере ошибочным.

Первое, хотя и грубое, но приемлемое теоретически определение абсолютных оптических коэффициентов напряжения принадлежит Кэрру.³

Кэрр применял интерферометр собственной конструкции, которая сводится к следующему.

A и *B* (фиг. 3.161) — два равные и подобно расположенные кристалла исландского шпата, оси поляризации которых горизонтальны и вертикальны. Свет от вертикальной освещенной щели *S* поляризуется при помощи поляризатора *P* в плоскости, расположенной под углом в 45° к вертикали. Затем свет падает на кусок *A* и разлагается на два луча *H* и *V*, поляризованных горизонтально и вертикально. Эти лучи выходят параллельно (по утверждению Кэрра расстояние между ними равнялось 14 мм, что предполагает применение Кэрром кристаллов необычайных размеров).

Затем лучи проходят через пластинку *Q* в полволны, оси поляризации которой расположены под углом в 45° к вертикали. Вследствие этого (см. § 1.33) плоскости поляризации этих лучей повертываются на 90° . Затем, когда лучи падают на шпат *B*, каждый луч принимает направление, параллельное тому, что имел другой луч в шпате *A*. Выходя из шпата *B*, они соответственно вновь соединяются и, если прибор правильно выполнен, — то без разности хода; таким образом они соединяются в плоско поляризованный луч, плоскость поляризации которого однако повернута под прямым углом к азимуту поляризатора. Затем свет наблюдается через анализатор *N*, скрещенный с поляризатором, глазом в *E*, смотрящим через маленькое отверстие *L*, снабженное скрещенными нитями. Тогда, если прибор хорошо смонтирован, поле представляется равномерно светлым.

Если, однако, существует небольшая погрешность в приборе, которую можно

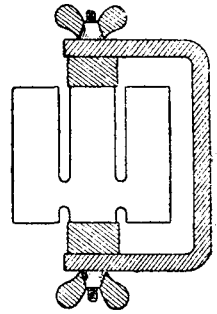
¹ Pogg. Ann. 146, 1872, 313—16. См. также: Mach, Optisch-Akustische Versuche, Prag, 1873..

² F. Pockels, Ann. d. Physik, Ser. III, 37, 1889, 392.

³ Phil. Mag., October, 1888.

искусственно вызвать передвижением с помощью *точного* винта шпата *B*, то это равносильно введению разности хода между двумя лучами *V* и *H*, которая будет изменяться в зависимости от угла наклона шпата. Изображение щели *S* представляется тогда пересеченным рядом темных полос, соответствующих разностям хода на нечетное число полуволн; изменяя наклон шпата, полосы можно по желанию сделать более широкими или более узкими, а также поднять или опустить их по отношению к нити, помещенной в *L*.

Если теперь ввести некоторую разность хода между пучками лучей *V* и *H* путем помещения на пути лучей стеклянной пластинки (не показанной на фиг. 3.161), находящейся под действием горизонтальных и вертикальных главных напряжений, то это вызовет определенное перемещение полос, которое может быть измерено. Для того чтобы произвести это измерение, Кэрт применил компенсатор Жамена, т. е. два подобные куска стекла *I* и *J*, поставленные под небольшим углом один к другому, причем один кусок пересекался лучами *V*, а другой — лучами *H*. Посредством соответствующего наклона стекла можно компенсировать введенную между пучками лучей разность хода.



Фиг. 3.162.

„При весьма благоприятных условиях, — говорит Кэрт, — (тщательная установка образцов, небольшие отставания, отсутствие тряски и т. д.) — ошибка отдельного определения не превышает одной двадцатой средней длины волн“.

После нескольких предварительных опытов над пластинкой, подвергавшейся изгибу, с переменным пропусканием лучей *V* и *H* через растянутый (или сжатый) край и вдоль „нейтральной оси“, Кэрт решил применить то, что он называет „крылатой“ пластинкой (фиг. 3.162), представляющей собой один цельный кусок, только средняя часть которого находится под сжатием, производимым с помощью рамы.

Попеременно пропуская *V* через деформированный столбик и *H* через недеформированное крыло, или *H* через деформированный столбик и *V* через недеформированное крыло, Кэрт нашел, что запаздывание вертикально поляризованного луча $r_V = 2r_H$; среднее из 80 определений дало

$$r_V = 2,004r_H. \tag{3.160}$$

Этот результат действительно находится в согласии с наблюдениями Френеля, Нейманна и Маха.

Кэрт совершенно правильно принял во внимание добавочное отставание, вызываемое изменениями толщины. Если толщину, как и раньше, обозначим через *d* и через δn разность показателей преломления, вызванную напряжением, то

$$r = d(\delta n) + (n - 1)\delta d. \tag{3.1611}$$

Для того чтобы принять во внимание изменение толщины, Кэрт погрузил крылатую пластинку в жидкость с показателем преломления n_0 ; тогда отставание будет

$$r' = d(\delta n) + (n - n_0)\delta d, \tag{3.1612}$$

откуда

$$r - r' = (n_0 - 1)\delta d$$

$$\delta n = \left\{ r - \frac{n - 1}{n_0 - 1} (r - r') \right\} : d = \frac{(n_0 - n)r + (n - 1)r'}{(n_0 - 1)d} \tag{3.162}$$

дает соответствующее изменение показателя преломления.

Применяя пластинку с показателем преломления 1,53 и воду с показателем преломления 1,33, Кэрт нашел, что для вертикально поляризованного луча $r/r' = 100/69$.

Таким образом,

$$\delta n_V = \frac{1}{2} \frac{r_V}{d}, \quad (3.1631)$$

с достаточно большой точностью. Но

$$\frac{r_V - r_H}{d} = \delta n_V - \delta n_H;$$

подставляем

$$r_H = \frac{1}{2} r_V, \quad \frac{1}{2} \frac{r_V}{d} = \delta n_V - \delta n_H;$$

откуда, полагая

$$\delta n_V = \frac{1}{2} \frac{r_V}{d},$$

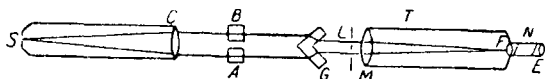
получаем

$$\delta n_H = 0, \quad (3.1632)$$

или, в обозначениях § 3.10, поперечный оптический коэффициент напряжения $C_1 = 0$.

Таким образом, прямой оптический коэффициент напряжения C_2 должен быть равен по величине, но противоположен по знаку относительному или разностному оптическому коэффициенту напряжения $C_1 - C_2$.

Повидимому Кэрр проверил то положение, что оптический эффект пропорционален нагрузке. Опыт на растяжение длинной полосы зеркального полированного стекла, к



Фиг. 3.163.

концам которого с помощью захватов был приложен груз, дал результаты, которые при предположении, что средняя длина волны белого света равняется 5500 Å, привели к значению оптического коэффициента напряжения, равному 2,762 брукстеров.

Согласно Кэрру мы таким образом получаем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -2,762, \quad (3.164)$$

и поскольку для однородного всестороннего сжатия P изменение δn показателя преломления (см. § 3.10, формула 3.105) равно

$$\delta n = -(C_1 + 2C_2)P, \quad (3.165)$$

то отсюда следует, что показатель преломления увеличивается при давлении, что и следовало ожидать.

Через несколько месяцев после опубликования Кэрром его работы Покельс¹ в приложении к трем статьям, посвященным детальному исследованию явления двойного лучепреломления в кристаллах, дал критический обзор различных попыток измерения C_1 и C_2 и опубликовал результаты нескольких измерений, сделанных им самим. Он измерял разностный оптический коэффициент напряжения, помещая против куска стекла, подверженного сжатию, компенсатор Бабинэ, оси поляризации которого были параллельны и перпендикулярны направлению напряжения, — метод, который до сих пор остается наиболее быстрым и удобным. Он также применял натровый свет, устраняющий многие неопределенности относительно длины волны, которую нужно подставлять в формулы. Чтобы получить отдельно C_1 и C_2 или более точно *оптические коэффициенты напряжения* Нейманна p и q ,

¹ Ann. d. Phys., ser. III, 37, 389—94.

которыми он непрерывно пользуется, он употреблял щель и коллиматор (фиг. 3.163).

Свет, исходящий из щели, делается параллельным при помощи чечевицы *C* коллиматора. Один пучок лучей проходит через кусок стекла *A*, находящийся под напряжением. Другой проходит через второй подобный кусок *B*, свободный от деформации. Оба пучка при помощи углообразного куска стекла *G* с плоско-параллельными поверхностями сближаются один с другим и падают на две близкие щели *L* и *M*, расположенные против объектива телескопа *T*. Оба потока соединяются в фокусе *F* этого объектива, где они интерферируют и дают обычную для двойной щели дифракционную картину. Эта картина наблюдается через окуляр *E*, содержащий вращающийся николь *N*.

При *A*, свободном от напряжения, в *F* получается некоторая дифракционная картина, но, как только прилагается давление, возникает дополнительное отставание пучка, приходящего к щели *M*, и вследствие этого, как и в ранее описанном опыте Нейманна, дифракционная картина немного передвигается от ее первоначального положения.

Поскольку отставание различно для вертикально и горизонтально поляризованных лучей, в действительности происходят два перемещения и получаются две наложенные одна на другую дифракционные картины. Устанавливая николь *N* горизонтально или вертикально, мы можем наблюдать каждую из этих картин по очереди и измерить оба перемещения. Это было сделано Покельсом при помощи вращения уголка *G*, который заменял ему компенсатор Жамена. Однако, он в отличие от своих предшественников, получавших перемещение вертикально поляризованной картины ровно вдвое большим, чем перемещение горизонтально поляризованной, нашел, что

$$r_V = 2,13 \cdot r_H. \tag{3.166}$$

Повидимому его прибор не давал возможности непосредственного определения изменения толщины путем погружения стекла в жидкость; равным образом он повидимому не имел определенных данных относительно упругих постоянных своего стекла. Однако он пользовался следующими определениями Фойгта для величин *E* и η :

	<i>E</i> в граммах (вес) на 1 мм ²	η
Зеленое стекло Гинана	$6,48 \times 10^6$	0,21
Белое рейнское зеркальное стекло	$7,358 \times 10^6$	0,2085

Наблюдаемые отставания, для вертикального давления *P* выражаются через

$$r_V = Pd \left[-C_2 + \frac{\eta}{E}(n-1) \right],$$

$$r_H = Pd \left[-C_1 + \frac{\eta}{E}(n-1) \right],$$

откуда, подставляя в уравнение (3.166), получаем

$$2,13C_1 - C_2 = \frac{1,13\eta(n-1)}{E}. \tag{3.1671}$$

Прямое наблюдение относительного отставания привело к

$$C_1 - C_2 = 2,571 \text{ брюстеров}; \tag{3.1672}$$

наблюдения Покельса пересчитаны применительно к нашим единицам измерения.

Пользуясь значениями *E* и η для каждого из сортов стекла, он получил результаты (для величин Нейманна *p* и *q*), эквивалентные

$$2,13C_1 - C_2 = 1,932 \text{ брюстера}$$

и

$$2,13C_1 - C_2 = 1,693 \text{ брьюстера.}$$

Отсюда два ряда данных:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = -0,565 \text{ брьюстеров} \\ C_2 = -3,136 \quad \text{''} \end{array} \right\} (3.1681)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = -0,777 \quad \text{''} \\ C_2 = -3,348 \quad \text{''} \end{array} \right\} (3.1682)$$

которые прекрасно согласуются с теми, которые были получены с того времени для многих обыкновенных стекол.

Покельс, подвергая критике результат, полученный Кэрром ($C_1 = 0$), приходит к заключению, что получилось бы большее согласие с его собственным результатом, если бы величина η для стекла Кэрра была бы более близка к 0,3, чем к 0,2.

§ 3.17. Влияние химического состава на оптические постоянные. Результаты Покельса для свинцовых стекол.

В апреле 1902 г. Покельс¹ опубликовал ряд определений оптических коэффициентов напряжения для ряда иенских стекол, состав которых был известен. Наблюдения производились в приблизительно монохроматическом свете; применялось пламя, содержащие соли лития, натрия или таллия, дающее соответственно длины волны 6730, 5892 и 5360 Å. Для измерения относительного оптического коэффициента напряжения, применялся компенсатор Бабинэ, причем учитывалась дисперсия двойного лучепреломления в кварце компенсатора.

Абсолютные отставания измерялись интерферометром Жамена, и так как отражения в этом интерферометре происходили при углах, близких к углу поляризации, то оказалось, что интерференционные полосы фактически состояли из горизонтально поляризованного света. Два одинаковых, по возможности, куска стекла были помещены на пути двух интерферирующих пучков лучей (потоков) (см. § 1.44); прилагая давление только к одному из кусков, Покельс наблюдал боковое перемещение системы интерферирующих полос.

Судя по величинам полученных при наблюдении относительных отставаний в центральной вертикали и в боковых, было весьма трудно достигнуть однородного давления на куски стекла, и отдельные наблюдения весьма отличались от среднего.

Точно так же Покельс применял куски стекла, только номинально одинаковые по составу; позднейшие исследования дают основания полагать, что подобные куски могут заметно отличаться по их оптическим коэффициентам напряжения; но Покельс дал среднее из определений для нескольких подобных кусков.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона для каждого куска брались из данных, полученных другими исследователями, и не определялись независимо для каждого случая.

При измерении интерферометром весь прибор был тщательно защищен от потоков воздуха, кроме того был предпринят ряд особых предосторожностей. Это всегда необходимо делать при применении одного из интерферометрических методов для измерения абсолютных отставаний, возникших вследствие напряжений, так как эти методы особенно чувствительны к перемене температуры, могущей неодинаково повлиять на каждый из образцов; попутно можно отметить, что то же самое замечание относится к перемещению ряда дифракционных полос в прежних опытах Френеля, Нейманна и Покельса. Покельс говорит, что в некоторых случаях

¹ Ann. d. Physik, Ser. IV, 7, стр. 745 и след.

интерференционные полосы имели медленное перемещение, которое учитывалось при наблюдениях. Повидимому он приписывал это медленное перемещение случайным изменениям температуры; но возможно, что это перемещение вызывалось увеличением толщины стекла, вследствие пластического течения, или постепенным перераспределением нагрузки по той же причине.

Покельс дает результаты своих наблюдений применительно к постоянным Нейманна p и q . Однако не трудно пересчитать наблюдения и получить оптические коэффициенты напряжения в брюстерах, что и сделано ниже.

Номера Иенского каталога и химический состав (в некоторых случаях специально определенный) стекол следующие:

Таблица 3.171.

Заводской номер	Процентный состав											Упругие постоянные	
	SiO ₂	PbO	B ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	BaO	CaO	MgO	Na ₂ O	K ₂ O	As ₂ O ₅	Fe ₂ O ₃	$E_{кг/мм^2}$	η
S.205	—	—	69,1	18,0	4,7	—	—	8,0	—	0,2	—	4 800	0,274
O.428	—	32,0	56,0	12,0	—	—	—	—	—	—	—	4 720	0,268
O.658	32,75	25,0	31,0	7,0	—	—	—	1,0	3,0	0,25	—	5 470	0,250
O.2154	54,2	33,0	1,5	—	—	—	—	3,0	8,0	—	—	6 100	0,222
O.1571	41,0	51,7	—	—	—	—	—	—	7,0	0,3	—	5 470	0,224
O.500	29,3	67,5	—	—	—	—	—	—	3,0	0,2	—	5 500	0,239
S.57	17,8	80,05	—	следы	—	0,15	0,3	0,32	0,36	—	1,02	5 035	0,260
2954	23,64	74,61	—	0,8	—	0,34	—	0,24	0,37	—	следы	—	—

Последнее в ряду стекло 2954 было из опытной плавки, специально сделанной в Иене по указаниям Покельса.

Оптические коэффициенты напряжения, полученные из наблюдений, помещены в приведенной ниже таблице. Поскольку величины C_1 и C_2 большей частью отрицательные, даны величины $-C_1$, $-C_2$.

Таблица 3.172.

Оптические коэффициенты напряжения в брюстерах.

Стекло	$-C_1$			$-C_2$			$C_1 - C_2$		
	Li	Na	Tl	Li	Na	Tl	Li	Na	Tl
S. 205	0,665	0,490	0,263	5,022	4,903	4,737	4,357	4,413	4,474
O. 428	— 0,799	— 0,846	— 0,828	1,972	1,970	2,022	2,771	2,816	2,850
O. 658	1,264	1,094	0,952	5,100	4,928	4,782	3,836	3,834	3,830
O. 2154	1,911	2,018	2,117	4,876	5,016	5,148	2,965	2,998	3,031
O. 1571	3,511	3,493	3,474	6,146	6,156	6,164	2,635	2,663	2,690
O. 500	4,907	4,868	4,831	6,299	6,259	6,210	1,392	1,391	1,379
S. 57	9,654	9,576	9,456	7,847	7,639	7,376	— 1,807	— 1,937	— 2,080
2954	—	—	—	—	—	—	— 0,135	— 0,193	— 0,237

Однако в действительности не следует полагаться на третий десятичный знак в приведенных выше цифрах, и даже часто второй десятичный знак внушает сомнения, особенно в отношении абсолютных оптических коэффициентов напряжения. Так, для S.205 при обработке одного ряда наблюдений для натриевого света вели-

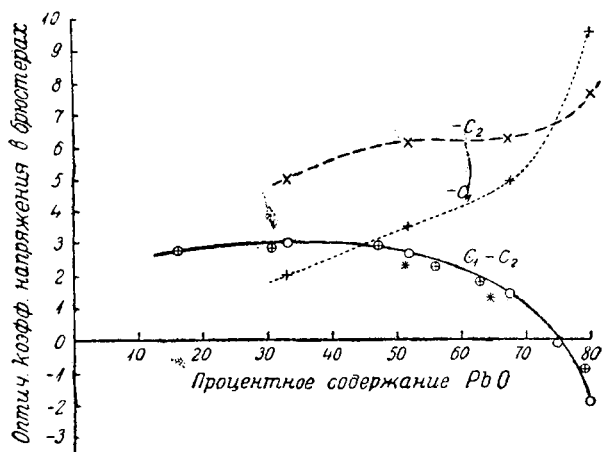
чина C_1 оказывается равной—0,572 брюстера вместо —0,490, и величина $C_2 = -4,986$ брюстера вместо —4,903.

Тем не менее эти результаты приводят к заключениям величайшей важности.

Во-первых, стекло, S,57, очень тяжелый флин тгласс, содержащий свыше 80% PbO, является замечательным исключением из правила, впервые сформулированного Брюстером, что стекло под действием нагрузки обнаруживает свойства отрицательного кристалла. Хотя ранее было открыто, что некоторые виды клея (например вишневый клей¹⁾ имеют отрицательный относительный оптический коэффициент напряжения, но стекла, обладающего этим свойством, никогда не было найдено.

Далее если мы рассмотрим четыре стекла O.2154, O.1571, O.500 и S.57, то окажется, что они имеют главными составными частями кремний и окись свинца и в общем образуют серию одного и того же типа, в котором главной переменной величиной является процентное содержание окиси свинца.

Если теперь оптические коэффициенты напряжения этих четырех стекол для какого-либо одного цвета (скажем для желтого натриевого) нанести на диаграмму в зависимости от процентного содержания окиси свинца, то полученные таким образом точки указывают на правильный ход кривой.



Фиг. 3.17.

Кривые показаны на фиг. 3.17; точки, обозначенные простыми крестами и кругами, относятся к наблюдениям

Покельса; точки, обозначенные крестами в кругах, относятся к позднейшим наблюдениям Файлона² над подобной же серией свинцовых стекол.

Из диаграммы видно, что значения для относительного оптического коэффициента напряжения как Файлона, так и Покельса вполне хорошо укладываются по одной и той же кривой, несмотря на то, что стекла, о которых здесь идет речь, не образуют, благодаря меняющимся примесям, других составных частей, кроме свинца, вполне последовательного ряда.

Современные определения Сэвора³ включены в эту диаграмму и показаны звездочками. Химический состав этих флинтглассов и величины $C_1 - C_2$ для натрового света приводятся ниже:

Таблица 3.173

Стекло	SiO ₂	PbO	K ₂ O	Na ₂ O	Al ₂ O ₃	CaO	(C ₁ - C ₂) _{Na}
E. D. F. 4840	30,4	64,4	1,65	1,85	0,2	1,8	1,38
H. F. 6652	41,0	51,3	3,8	1,4	0,7	0,7	2,29

¹ См. V. von Ebyer, Untersuchungen ueber die Ursachen der Anisotropie organischer Substanzen, Leipzig 1882, стр. 28; Ueber das optisch-anomale Verhalten des Kirschgummis und des Traganthes gegen Spannungen, Wiener Akad. Sitzungsberichte, 97, Abth. 2a, 1888, 39—50; также H. Ambronn, Ann. d. Physik, Ser. III, 38, 1889, 159.

² On the Variation with the wave-length of the double refraction in Strained Glass, Proc. Camb. Phil. Soc. 12, 313—36.

³ Phil. Mag. Aug. 1925, 456, 460.

Эти наблюдения, как видно, лежат заметно ниже общей кривой (так же как и для стекла О.2154). Мы позже увидим, что эти стекла по причине, которая все еще не ясна, повидимому принадлежит к различным сериям.

Оставляя эти исключительные случаи в стороне, мы видим, что кривая на диаграмме 3.17 показывает, что $C_1 - C_2$ исчезает при наличии PbO около 75%. Покельс имел стекло приблизительно этого состава, отлитое фирмой Шотт в Иене: это и есть стекло 2954, упомянутое выше.

Этот образец имел оптические дефекты, так что нельзя было применить метода интерференции и можно было наблюдать только разностный оптический коэффициент напряжения, как и указано в таблице 3.172. Он оказался отрицательным, но чрезвычайно малым и вполне соответствующим (как это видно из диаграммы 3.17) эмпирической кривой, подтверждая замечательным образом предсказание Покельса.

Следует отметить, что все кривые очень быстро увеличивают свою крутизну, если процентное содержание PbO возрастает на 80%, и повидимому приближаются к асимптоте между 80% и 90%. Известно, что существует предельное процентное содержание свинца в стекле, свыше которого оптическое стекло не может быть изготовлено, и повидимому оптические коэффициенты напряжения становятся бесконечными при приближении к этому пределу.

§ 3.18. Влияние изменения процентного содержания других составных частей.

Столь полный ряд боросиликатных стекол, как выше приведенный ряд свинцовых стекол, не был исследован, так как коммерчески гораздо труднее получить расположенную в последовательном порядке без больших пропусков серию боросиликатных стекол без примеси других составных частей, нарушающих непрерывность. Тем не менее в дополнение к стеклам S.205, O.428 и O.658, исследованных Покельсом, ряд боросиликатных иенских стекол был исследован Файлоном в 1907 г.¹ Величины, приведенные здесь Файлоном для абсолютного оптического коэффициента напряжения, вызывают значительное сомнение, так как его метод предназначался для другой цели, а именно исследования изменения относительного оптического коэффициента C в зависимости от длины волны. Помимо этих данных, они дают некоторое представление о свойствах боросиликатных стекол.

Файлон дал значения двух постоянных C_0 и λ_0 , посредством которых

Таблица 3.18.

Стекло	Na	SiO ₂	PbO	B ₂ O ₃	K ₂ O	Al ₂ O ₃	BaO	MgO	ZnO	Na ₂ O	As ₂ O ₃	Наблюдатель
S.205	4,413	—	—	69,1	—	18,0	4,7	—	—	8	0,2	Покельс
O.658	3,834	32,75	25,0	31,0	3,0	7,0	—	—	—	1	0,25	"
3413	3,44	31,6	23,6	33,0	3,8	8,0	—	—	—	—	—	Файлон
1809	3,31	35,4	18,7	34,3	7,4	3,7	—	0,5	—	—	—	"
935	3,18	32,5	28,2	27,7	3,1	8,5	—	—	—	—	—	"
3296	3,11	67,5	—	15,4	16,7	—	—	0,4	—	—	—	"
O.2154	2,998	54,2	33,0	1,5	8,0	—	—	—	—	3	—	Покельс
O.428	2,816	—	32,0	56,0	—	12,0	—	—	—	—	—	"
3749	2,45	70,2	—	5,9	23,9	—	—	—	—	—	—	Файлон
3453	2,36	68,1	—	5,7	20,8	—	—	5,4	—	—	—	"
2783	2,15	52,7	31,6	1,4	12,5	0,6	—	—	1,2	—	—	"

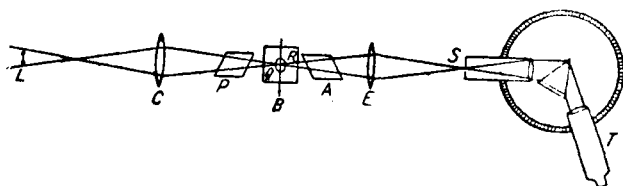
¹ On the Dispersion in Artificial Double Refraction (Phil. Trans. A, 207, 263—306). Приведенные результаты даны на стр. 302—3.

он выражал как и двойное лучепреломление, так и его дисперсию. Для сравнения со стеклами, исследованными Покельсом, C_{Na} было вычислено из постоянных Файлона: его значения приведены в таблице 3.18, где приведен также и химический состав различных стекол.

Из своих наблюдений Файлон вывел заключение, что оптический коэффициент напряжения *возрастает* при наличии B_2O_3 , и *уменьшается* при наличии K_2O . Однако, если мы примем во внимание данные Покельса, то мы найдем, что стекло 0.428, содержащее 56% B_2O_3 и не содержащее K_2O , в действительности ниже стекла 0.2154, содержащего 8% K_2O и только 1,5% B_2O_3 . Из этого следует, что другие составные части, например алюминий и натрий, повидимому имеют большое влияние.

§ 3. 19. Определение C методом призмы.

Изменение оптического коэффициента напряжения стекла в связи с окраской примененного света было исследовано Файлоном¹ в ряде трудов. В первом из них он наблюдал положения черных полос, когда горизонтальный спектр, поляризованный при помощи николя,



Фиг. 3. 19.

был виден через стеклянную полосу, находящуюся в состоянии чистого изгиба через (скрещенный) анализатор; при этом как щель, так и преломляющий край были вертикальны, и щель была сфокусирована на стеклянную шкалу,

прикрепленную к изгибаемому образцу.

Этот способ является изменением способа чистого изгиба, описанного в § 3.02. Горизонтальная шкала была калибрована по длинам волн путем наблюдения за положением линий известного спектра; при определении C применялся сплошной спектр. В этом случае вертикальные ординаты черных полос пропорциональны $n\lambda/C$, где n есть порядок полосы.

Файлон измерял эти ординаты по своей стеклянной шкале.

Этот метод является неизбежно грубым и не может дать большой точности. Однако, он вполне достаточен для того, чтобы на примере полосы зеркального стекла установить неправильность закона Вертгейма об отсутствии дисперсии искусственного двойного лучепреломления, так как C получилось заметно больше для фиолетовых лучей, чем для красных; это заключение было подтверждено в большинстве случаев более точными опытами Покельса с тремя достаточно монохроматическими лучами (см. таблицу 3.172).

Однако, в своих более поздних опытах Файлон применял другой метод, позволивший ему исследовать весь видимый спектр со значительной точностью. Принцип этого метода был повидимому впервые предложен Махом;² затем он был применен Масэ-де-Лепинэ³ при исследовании дисперсии двойного лучепреломления и позднее Кундтом⁴ при опытах по наблюдению оптических явлений при натяжениях в вязких жидкостях. Хотя по времени эти исследователи работали раньше Файлона, примененный ими метод призмы имел некоторые добавочные осложнения; удобнее их установку приборов объяснить после того, как мы рассмотрим работы Файлона.

¹ Camb. Phil. Soc. Proc. 11, 478—92; 12, 55—64, 313—36; Phil. Trans. A, 207, 1907, 263—306; R. S. Proc. A, 83, 572—99.

² Mach, Ueber die temporäre Doppelbrechung der Körper durch einseitigen Druck (Pogg. Ann. d. Physik 146, 1872, 313—16).

³ Macé de Lépinay, Recherches sur la double-réfraction accidentelle. C. R. 86, 1878, 326.

⁴ Kundt, Ann. d. Physik, Ser. III, 13, 1881, 110—33.

Мы опишем эту установку с некоторыми усовершенствованиями, введенными позднее.

Свет от источника L (фиг. 3.19) собирается чечевицей C и проходит через поляризатор P . После прохождения через образец B , могущий подвергаться равномерному растяжению или сжатию, свет анализируется николем A и фокусируется на щель S спектроскопа чечевицей E , которая расположена так, что дает изображение щели S на вертикальной линии, проведенной через центр O образца B .

На практике весьма желательно, чтобы анализатор и поляризатор были расположены непосредственно около образца, иначе чечевицы, которые редко бывают достаточно хорошо отожжены, будут производить деполяризующее влияние и дадут расплывчатое изображение.

Если образец B свободен от деформаций и в нем нет первоначальных напряжений, то при скрещенных поляризаторе или анализаторе поле зрения спектроскопа T будет совершенно темным.

Если теперь к образцу будет приложено вертикальное давление P , то свет восстановится за исключением тех мест, где

$$r\lambda = CPd,$$

d есть толщина куска стекла, а r — целое число.

Поэтому мы видим спектр пересеченным рядом черных полос, соответствующих

$$\lambda = CPd/r.$$

Если спектроскоп заранее тщательно проградуирован с помощью известного спектра сравнения, то длина волны, соответствующая отсчету по кругу спектроскопа, когда центр черной полосы находится на пересечении нитей зрительной трубы T , легко измеряется, и C сразу же получается, если известен порядок r полосы.

Это порядок легко узнать следующим путем.

Когда нагрузка P увеличивается, то сперва появляется в спектре, в фиолетовой части, темная полоса первого порядка, далее она постепенно передвигается по спектру к красной части. Вскоре после ее исчезновения в пределах красного цвета, в пределах фиолетового цвета, появляется полоса второго порядка и т. д., все полосы последовательных порядков следуют одна за другой тем же путем.

В первоначальных установках, поляризатор P (фиг. 3.19) помещался между источником света и чечевицей C , действующей как коллиматор, так что через B проходил параллельный пучок света. Таким образом свет, падающий на щель, состоял из лучей, пересекавших различные части куска стекла B , и какое-нибудь отсутствие равномерности в распределении давления сразу же вызывало размытость полос в спектре, которые из-за этого часто невозможно было наблюдать. Получение равномерного давления представляло большие затруднения, и если после тщательной установки удавалось добиться удовлетворительной картины полос, то при изменении нагрузки установка расстраивалась (вследствие слабого искривления или другого изменения образца).

Это затруднение в значительной степени преодолено устройством, изображенным на фиг. 3.19. Ибо, если O не смещается значительно в боковом направлении, то какой-либо момент, могущий вызвать неравномерность напряжения, не производит соответственного напряжения в O , и напряжением по вертикальной линии, проходящей через O , является среднее давление, определяемое действительной нагрузкой. Кроме того, все лучи, сходящиеся у щели, прошли через O и их среднее отставание будет одно и то же во всех случаях, даже если существует равномерное падение напряжения от одной стороны куска стекла к другой. Очевидно, что всякое уменьшение (или увеличение) отставания, вызванное этим обстоятельством на пути QO , уравнивается соответствующим увеличением (или уменьшением) на пути OR . Полоса в спектре будет тогда во всех случаях резко очерчена.

Далее, поскольку удвоенная длина волны крайних красных лучей больше утроенной длины волны крайних фиолетовых лучей, мы можем получить в поле спектра полосы второго и третьего порядков в одно и то же время, не изменяя нагрузки. В этом случае возможно непосредственно сравнивать оптические коэффициенты напряжения, так как небольшие ошибки вследствие нецентрального расположения нагрузки, несущественны. Очевидно, что если λ_r , λ_v суть длины волн наблюдаемых полос, C_r и C_v — их оптические коэффициенты деформации, то

$$\frac{C_r}{C_v} = \frac{2\lambda_r}{3\lambda_v}.$$

Если бы было возможно получить полосы четвертого и пятого порядков, то мы могли бы получить в одно и то же время три полосы в поле наблюдения. Однако это не представляется возможным при кусках толщиной в 3 см, применявшихся Файлоном, так что опыт в этом виде невозможно было систематически продолжать.

Файлон спроектировал другой метод преодоления влияния неравномерности напряжения. При этом методе параллельный свет пропускался сквозь два пробных бруска стекла, расположенных один за другим, причем к брускам были приложены противоположные изгибающие моменты, так что верхняя половина одного бруска была растянута, а верхняя половина другого — сжата. Тогда, если бруски находятся на одном уровне, лучи, пересекающие их горизонтально, не будут подвержены какому-либо влиянию. Но как только будет введена разница в уровне между двумя брусками, все лучи, пересекающие их в горизонтальном направлении, претерпевают одинаковое относительное отставание, поскольку вертикальные градиенты напряжения для обоих брусков равны и противоположны.

Поэтому получается тот же самый результат, как если бы лучи пропускались через один брусок, находящийся под совершенно равномерным давлением.

В действительных опытах источником света была освещенная горизонтальная щель, расположенная на некотором расстоянии. В таком случае можно показать, что для получения постоянного относительного отставания изгибающие моменты брусков не должны быть строго равны между собой и противоположны, но нужно только соответствующим образом подобрать их отношение. Однако это легко сделать соответствующим изменением плеч приложенных моментов, и такая установка, однажды сделанная, сохраняется неопределенное время.

Пучок лучей света затем фокусируется на (вертикальную) щель спектроскопа цилиндрической чечевицей, кривизна которой располагается в горизонтальной плоскости. Благодаря этому, различные части щели спектроскопа освещаются светом, пересекающим стеклянный брусок на различных уровнях.

Это дает автоматический контроль правильности установки, потому что, если отставание постоянно, то это сразу скажется в том, что полоса будет пересекать спектр *наклонно*.

Более того (и это с точки зрения общей теории является одним из наиболее важных выводов из опытов) всякое отклонение от закона пропорциональности отставания относительно напряжения или относительно деформации неизбежно обнаружится в виде *кривизны полосы*.

Предположим, что разность уровней установлена так, что нейтральная плоскость одного бруска соответствует уровню другого бруска при максимальном растяжении T ; тогда верхняя и нижняя части полосы относятся к отставаниям, вызванным растяжениями $T + 0$ и $0 + T$, средняя часть вызывается растяжением $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T$; если теперь отставание, вызванное $\frac{1}{2}T$, не есть точно половина отставания, вызванного T , то отставание для середины полосы не равняется отставанию ее концов, и полоса представится (будет казаться) изогнутой. Из всех применявшихся установок такая установка наиболее чувствительна, так как таким путем легко может быть обнаружено расхождение на несколько ангстремов.

На самом деле в течение опытов никогда не было заметно кривизны, за исключением одного случая, который будет рассмотрен ниже.

Метод расположения брусков один за другим встречает три серьезных возражения: 1) нет уверенности, что бруски достаточно идентичны, чтобы оптические коэффициенты напряжения могли быть в точности равными: это может быть исправлено путем изменения изгибающих моментов обоих брусков, при условии, что отношение этих коэффициентов постоянно для всех цветов; всякое отклонение от этого условия будет выражаться во все возрастающем наклоне полосы в спектре; 2) определение абсолютных значений C этим методом является весьма неточным, так как затруднительно точно измерить разность уровней и другие величины, входящие в вычисление значений C ; 3) невозможно точно корректировать влияние нагрузки на разность уровней благодаря пластичному течению стекла у ножей призмы.

Поэтому метод спектроскопа является наиболее ценным в применении к кускам, подвергаемым простому давлению, при условии, что нагрузки тщательно центрированы и фокус щели наведен на ось блока, как было объяснено выше. Поставленный должным образом, этот метод является наиболее точным методом определения C .

§ 3.20. Способ призмы Маха.

В методе призмы, примененном Махом, кристаллическая пластинка, оси поляризации которой параллельны и перпендикулярны направлению напряжения, помещаются рядом с исследуемым образцом B (фиг. 3.19). Если мы обозначим через $N(\lambda)$ относительное отставание, вызванное кристаллической пластинкой для света с длиной волны λ , то, даже если образец (который предполагается свободным от первоначальных напряжений) не подвергнут нагрузке, спектр будет пересечен темными полосами, определяемыми равенством

$$N(\lambda) = r\lambda, \quad (3.200)$$

где r есть целое число; и так как N пропорционально толщине кристаллической пластинки, то можно получить полосы на нужном расстоянии одна от другой.

Если теперь приложить напряжение P , то уравнение, определяющее полосы, принимает вид

$$N(\lambda) + C_\lambda Pd = r\lambda \quad (3.201)$$

(обозначения те же, что и в последнем параграфе) и полосы в спектре перемещаются.

Если теперь отсчитать длину волны λ для полосы порядка r , то уравнение (3.201) дает нам возможность определить C_λ при условии, что мы можем определить $N(\lambda)$ с достаточной точностью и что порядок r полосы нам известен. Этот порядок определяется влиянием только одной кристаллической пластинки, причем необходимо только просчитать полосы, проходящие при постепенной нагрузке образца. Если однако порядок полос одной только кристаллической пластинки велик, то определение его представляется затруднительным, и тогда приходится обратиться к специальным методам. В большинстве случаев его можно вычислить, измерив толщину кристаллической пластинки и зная показатель преломления для длины волны, соответствующей середине полосы, если эти величины точно известны.

Даже если порядки полос известны, то применение формулы (3.201) требует для $N(\lambda)$ предварительного полного сведения в таблицу показателей преломления данного кристалла для большего числа длин волн на близких интервалах: иначе всегда остается сомнение, следует ли приписывать небольшие неправильности (а они, как мы увидим в будущем, встречаются) естественному двойному лучепреломлению кристалла или искусственному двойному лучепреломлению образца.

Замечательно, что Мах, введший этот способ, повидимому не заметил его главной ценности, а именно той точности, с которой могут быть определены спектроскопом длины волн, соответствующие серединам темных полос. Повидимому с целью преодолеть затруднения, связанные с введением поправок на дисперсию кристалла, он ввел в оптическую систему между поляризатором и анализатором кварцевый компенсатор типа Бабинэ, и отставание, вызванное им, присоединял к отставанию, вызванному как кристаллом, так и образцом. Перемещая кварцевые клинья, он имел возможность возвращать полосу данного порядка к ее первоначальному положению в спектре. Обозначая через Q и Q' отставания, вызванные компенсатором при двух наблюдениях, мы получаем два уравнения

$$N(\lambda) + Q = r\lambda, \quad (3.201)$$

$$N(\lambda) + Q' + C_\lambda Pd = r\lambda, \quad (3.202)$$

и после вычитания

$$Q - Q' = C_\lambda Pd. \quad (3.203)$$

Таким образом, порядок r полосы и оптические постоянные кристаллической пластинки исключаются. Но точность наблюдений сразу же сводится к точности показаний компенсатора; и более того, необходимо, чтобы компенсатор был градуирован для *каждой* исследуемой *длины волны*; таким образом одно затруднение только подменяется другим. Далее, если компенсатор не состоит из двойного клина, образующего пластинку регулируемой толщины, то возникают ошибки вследствие того, что различные лучи, сходящиеся на щели спектроскопа, проходят несколько отличные оптически один от другого пути в кварце.

Другое возражение относится к чувствительности метода и равным образом может быть приложено к любому методу, требующему получения спектра, первоначально пересеченного большим числом полос.

Если мы возьмем уравнение для C

$$N(\lambda) + CPd = r\lambda,$$

то погрешность ΔC в определяемом оптическом коэффициенте напряжения для длины волны λ , обусловленная небольшой погрешностью $\Delta\lambda$, при измерении длины волны темной полосы, определяется из уравнения

$$\frac{dN}{d\lambda} \Delta\lambda + \left(\Delta C + \frac{dC}{d\lambda} \Delta\lambda \right) Pd = r\Delta\lambda,$$

т. е. приблизительно

$$\frac{\Delta C}{\Delta\lambda} = \frac{1}{Pd} \left(r - \frac{dN}{d\lambda} \right) - \frac{dC}{d\lambda} = \frac{r}{Pd}, \quad (3.203)$$

так как $\frac{dN}{d\lambda}$ и $\frac{dC}{d\lambda}$ обычно малы.

Таким образом, чувствительность метода постепенно уменьшается при увеличении r и следует еще взвесить, покрывается ли это преимуществом, получаемым увеличением точности установки на более резкую полосу.

Тем не менее при соответствующих условиях способ призмы, в том виде, как его применил Мах, или некоторое его изменение может представлять известные выгоды. В частности он может быть применим для исключения первоначального двойного лучепреломления, существующего в образце (при условии, что оси поляризации этого двойного лучепреломления параллельны и перпендикулярны направлению линии напряжения), потому что, если $\alpha(\lambda)$ есть относительное отставание, вызываемое этим первоначальным двойным лучепреломлением, то оно должно быть приложено к левым частям как уравнения (3.201), так и (3.202), и исчезает в уравнении (3.203) при вычислении разности.

Метод Файлона может дать результаты, независимые от первоначальных напряжений, только в том случае, когда можно наблюдать полосы по крайней мере *двух* различных порядков для какого-либо данного цвета, а это возможно, только когда оптический коэффициент напряжения достаточно велик.

Рееб¹ и Рамспек² пользовались еще другим изменением метода призмы при исследовании оптического коэффициента напряжения целлюлоида и желатина. Они поместили на пути лучей света, между анализатором и поляризатором, составную пластинку из кварца, сделанную из двух половин одной и той же пластинки, причем одна половина была повернута относительно другой на 90° в ее собственной плоскости, и обе половины помещены рядом. Этот „бикварц“ („двойной кварц“) фокусируется на щель спектроскопа так, что свет, проходящий через одну половину пластинки, освещает одну половину щели, а свет, проходящий через другую половину пластинки — другую половину щели. Поскольку отставания равны по величине (хотя и противоположны по знаку), черные полосы в верхней и нижней половинах спектра являются продолжением одни других. Если, однако, на пути света введен находящийся под напряжением образец, расположенный таким образом, что он вызывает дополнительное относительное отставание между составляющими, поляризованными вдоль осей поляризации „бикварца“, то полные отставания перестают быть равными по величине, и черные полосы верхнего и нижнего спектров раздваиваются.

Тогда на пути света вводится компенсатор особого вида Солейля-Бабинэ. Он состоит из кварцевой пластинки и двух клиньев, двойное лучепреломление которых одного и того же направления, но противоположно двойному лучепреломлению кварцевой пластинки. Вращая микрометрический винт, регулирующий перекрестие одного клина другим, можно изменять действующую их толщину таким образом, чтобы компенсатор в определенных пределах вводил любое желаемое положительное или отрицательное отставание.

Пользуясь этим компенсатором, ориентированным таким образом, чтобы его оси поляризации были параллельны осям поляризации „бикварца“, можно свести к нулю относительное запаздывание, вызываемое образцом, и вновь привести к совпадению полосы в верхней и нижней частях спектра. Определяют разницу x показаний микрометра, соответствующих совпадению полос как для нагруженного образца, так и для образца ненагруженного; если теперь x_0 есть разница показаний микрометра, соответствующая отставанию на целую длины волны, то

$$x/x_0 = Cp d/\lambda$$

является уравнением, определяющим C для данной длины волны; x_0 легко находится путем наблюдения двух последовательных совпадений полос верхнего и нижнего спектров при передвижении компенсатора винтом микрометра.

§ 3.21. Способ Маха для определения C_1 и C_2 .

Мах чрезвычайно остроумно применил метод призмы для определения как абсолютного, так и относительного оптического коэффициента напряжения; приведем его описание.

Мах в своей работе (Ann. d. Physik, 1872) описывает свой прибор в общих чертах, так что детали его приходится заново конструировать.

На фиг. 3.21 приведена общая схема устройства. Образец B и его дубликат B' помещаются между пластинками P и Q интерферометра Жамена, причем два интерферирующие пучка лучей проходят соответственно через B и B' .

Свет исходит из точки L , делается параллельным с помощью коллиматора U

¹ Reeb, Ann. d. Physik, Ser. IV, 71, 1923, 427—56.

² A. Ramspeck, Ann. d. Physik, Ser. IV, 74, 1924, 722—42.

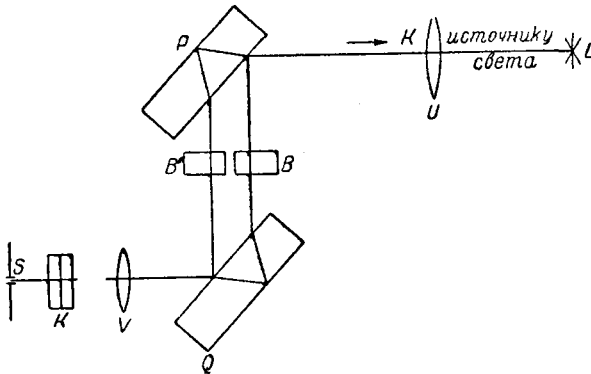
и, пройдя через интерферометр, фокусируется чечевицей V на щель S спектроскопа.

Для того чтобы отделить свет, поляризованный вертикально, от света, поляризованного горизонтально, Мах ввел призму K из исландского шпата, преломляющий (горизонтальный) край которой параллелен оптической оси шпата; таким образом на щели получаются два изображения, которые в свою очередь дают в поле зрения спектроскопа два спектра, расположенные один над другим.

Однако в действительности оказывается, что при описанном выше устройстве прибора, так как угол поляризации близок к 45° , действие зеркал интерферометра Жамена в сильной степени ослабляет волну, поляризованную вертикально, так что спектры получаются весьма различной интенсивности. Если перед щелью S ввести николю с горизонтально расположенной осью, то он совершенно уничтожит вертикально поляризованный свет.

Практически достаточно определить один из двух абсолютных оптических коэффициентов напряжения; зная разность между ними или относительный оптический коэффициент напряжения, мы можем определить и другой.

Однако, если желательно наблюдать спектр, образуемый светом, поляризованным по линии напряжения, вышеупомянутый николю нужно повернуть на 90° ; если же спектр, полученный этим способом, будет слишком слаб для наблюдения, мы можем либо а) приложить к куску B горизонтальное напряжение вместо вертикального, или б) ввести между B , B' и P и затем также между B , B' и Q — оптическое приспособление, вращающее плоскость поляризации на 90° . Примерами



Фиг. 3.21. Прибор для определения C_1 и C_2 спектрально-метрическим методом.

такого приспособления являются: 1) пластинка в полволны с осями, расположенными под 45° к горизонту, подобная той, которой пользовался Кэрт, 2) пластинка из кварца, вырезанная перпендикулярно к оптической оси, или из какого-либо другого материала, вращающего плоскость поляризации (например раствор сахара), причем толщина ее берется такая, чтобы получалось вращение на 90° . Таким образом большая часть света, будучи поляризованной вертикально во время прохождения ее через стекло, является поляризованной горизонтально при ее отражении от зеркал интерферометра Жамена.

Допустим, что d толщина куска B , свободного от напряжения, $d + \Delta d_0$ толщина куска B' , n_λ — показатель преломления недеформированного образца для длины волны λ ; тогда при совершенной установке интерферометра, т. е. при полной параллельности пластинок P и Q , полученный спектр окажется пересеченным черными полосами в местах, определяемых уравнением

$$(n_\lambda - 1) \Delta d_0 = \left(r + \frac{1}{2}\right) \lambda. \tag{3.210}$$

Желательно, чтобы B' и B не были в точности одной и той же толщины или чтобы B' имел некоторый наклон для создания первоначальной разности хода лучей.

Допустим, что $C_1(\lambda)$ есть (абсолютный) оптический коэффициент напряжения для света, поляризованного в избранном азимуте; тогда при приложении давления P длина волн, соответствующих черным полосам, удовлетворяет [следует помнить,

что здесь $\Delta n_\lambda = -C_1 P d$, из (3.105), если мы обратим внимание на знак] уравнению

$$(n_\lambda - 1)(\Delta d_0 - \Delta d) + C_1(\lambda) P d = \left(r + \frac{1}{2}\right)(\lambda + \Delta\lambda), \quad (3.211)$$

где Δd — приращение толщины под действием давления P .

Это обуславливает перемещение полос в спектре: если мы пренебрежем дисперсией и будем считать n_λ и $C_1(\lambda)$ постоянными, то, вычитая (3.211) из (3.210), найдем, что

$$(n - 1)\Delta d - C_1 P d + \left(r + \frac{1}{2}\right)\Delta\lambda = 0. \quad (3.212)$$

Если известны упругие постоянные образца и известно $\Delta d/P$, то, получив $\Delta\lambda$ из перемещения полос, находим C_1 .

Но такой случай редко имеет место; тогда необходимо повторить опыт, погрузив блоки B, B' в жидкость, показатель преломления которой n' известен.

Мы имеем тогда

$$(n - n')\Delta d - C_1 P d + \left(r + \frac{1}{2}\right)\Delta'\lambda = 0, \quad (3.213)$$

где $\Delta'\lambda$ есть изменение длины волны, наблюдаемое при нагрузке P , когда блоки погружены в жидкость.

Исключая Δd , получаем C_1 из уравнений (3.212) и (3.213).

Таков был повидимому метод, принятый Махом. Он действительно измерил перемещение полос, но (как это отмечено в § 3.16) ошибка исказила результат его вычислений; с тех пор этот метод повидимому никем не применялся для получения точных результатов.

При проведении наблюдений по вышеописанному методу, не следует рассчитывать на точное определение величин C_1 или C_2 для различных длин волн, так как мы пренебрегаем дисперсией.

Но в большинстве случаев вполне возможно поступать следующим образом.

Сперва, если это представляется необходимым, доведем напряжение до P_1 так, чтобы придать полосе порядка r данное положение в спектре, соответствующее данной длине волны λ . Тогда

$$(n_\lambda - 1)(\Delta d_0 - \Delta d_1) + C_1(\lambda) P_1 d = \left(r + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Изменяя напряжение до P_2 , приводим полосу порядка $r+1$ к данному положению в спектре

$$(n_\lambda - 1)(\Delta d_0 - \Delta d_2) + C_1(\lambda) P_2 d = \left(r + \frac{3}{2}\right)\lambda.$$

После вычитания мы имеем

$$(n_\lambda - 1)\Delta d - C_1(\lambda) P d = \lambda, \quad (3.214)$$

где

$$\Delta d = \Delta d_1 - \Delta d_2, \quad P = P_1 - P_2.$$

Повторяем наблюдения с погруженными блоками; тогда

$$(n_\lambda - n'_\lambda)\Delta d' - C_1(\lambda) P' d = \lambda, \quad (3.215)$$

где P' есть увеличение напряжения и $\Delta d'$ — соответствующее увеличение толщины для того, чтобы повысить порядок полосы (при λ) на единицу при новых условиях.

Предполагая упругость совершенной, мы имеем $\Delta d/P = \Delta d'/P'$, так что, умножая уравнение (3.215) на $\frac{n_\lambda - 1}{P'}$ и (3.214) на $\frac{n_\lambda - n'_\lambda}{P}$ и вычитая, находим

$$(n'_\lambda - 1) C_1(\lambda) d = \lambda \left\{ -\frac{n_\lambda - 1}{P'} + \frac{n_\lambda - n'_\lambda}{P} \right\}, \quad (3.216)$$

а также

$$\frac{\Delta d}{P} (n'_\lambda - 1) = \lambda \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P'} \right). \quad (3.217)$$

Это последнее уравнение позволяет определить $\Delta d/P$ из одного только наблюдения, соответствующего той длине волны, для которой n' для данной жидкости оно хорошо известно. Получив $\Delta d/P$, мы можем поставить его в уравнение (3.214) вместо Δd и тогда получаем $C_1(\lambda)$, причем требуется только знать n — обыкновенный показатель преломления образца для каждой наблюдаемой длины волны. Однако все известные в настоящее время методы определения абсолютных оптических коэффициентов напряжения требуют знания этого показателя преломления.

§ 3.22. Дисперсия при искусственном двойном лучепреломлении.

Из наблюдений, подобных описанным в § 3.19, было найдено, что для многих стекол изменение оптических коэффициентов напряжения в зависимости от цвета в общем близко удовлетворяет следующей формуле:

$$C = \frac{C_0}{1 - \lambda_0/\lambda}, \quad (3.220)$$

где C_0 , λ_0 — постоянные для данного стекла.

Исчезновение λ_0 соответствует отсутствию дисперсии при искусственном двойном лучепреломлении, по крайней мере в границах рассматриваемых λ , и тем самым подтверждает справедливость закона Вертгейма (§ 3.14).

Как правило, величина λ_0 весьма мала, значительно меньше 1000 онгстремов, но в очень тяжелых флинтгласах дисперсия двойного лучепреломления очень значительна и может достигать 2000 или 3000 Å.

Некоторые стекла, как это видно из таблиц 3.221 и 3.222, в действительности имеют отрицательное λ_0 , так что для них оптический коэффициент напряжения численно возрастает в направлении от фиолетового цвета к красному, что является обратным обычному порядку. По физическим причинам положительные значения λ_0 должны быть ограничены ультрафиолетовой частью спектра, потому что положительное λ_0 в видимом спектре влечет за собой бесконечное значение оптического коэффициента напряжения, чего на самом деле не наблюдается. Величина $\lambda_0 = 4218$ для стекла 2954 в таблице 3.221 в действительности не противоречит этому, так как это стекло очень плохо удовлетворяет формуле и постоянные, вычисленные из величин 6708 Å и 5351 Å, следует рассматривать как дающие только общие указания на характер дисперсии.

Не следует думать, что формула (3.220) может быть применима во всех случаях. Если оставить в стороне некоторые местные неправильности, о которых будет сказано ниже, то все же представляется очень сомнительным, чтобы для какого-нибудь стекла C действительно исчезло бы одновременно для всех цветов — положение, неизбежно вытекающее из этой формулы.

Найдено, что при некотором химическом составе стекол C_0 стремится стать малым, а λ_0 — большим, отрицательным или положительным; это заставляет предполагать для λ_0 перемену знака при переходе через бесконечность, но в действительности, как это уже было объяснено, большие положительные величины λ_0 в видимом спектре физически исключены и величины λ_0 в инфракрасной части спектра не были найдены, так что к стеклам такого химического состава эта формула не может быть применима.

Результаты, полученные различными исследователями для дисперсии при искусственном двойном лучепреломлении, перечислены и собраны в таблицах 3.221 и 3.222; в каждом случае в таблице помещены лучшие значения для C_0 и λ_0 . В некоторых случаях одно и то же стекло наблюдалось в различное время и результаты никоим образом не согласуются между собой. Вполне возможно, приняв во внимание то, что будет сказано в § 3.27, что это расхождение имеет реальное основание. В то же время следует помнить, что хотя эти результаты сведены вместе в таблицу для справок, они были получены различными методами, оценка которых естественно должна быть различная. В частности некоторые значения были получены из пары одиночных наблюдений в различных монохроматических лучах. Если данное стекло не удовлетворяет в точности формуле (3.220), то из двух различных пар цветов получатся различные значения C_0 и λ_0 .

Таблица 3.221.

Дисперсия при оптическом напряжении во флинтах.

Стекло	Исследователь	$\frac{\sigma}{\rho}$ РbO	C_0	λ_0	Примечание
O.152	Файлон	16,0	2,410	721	Содержат K_2O и небольшое количество B_2O_3
O.154	"	31,0	2,484	822	
2783	"	31,6	1,97	500	
O.2154	Покельс	33,0	2,733	530	
O.103	Файлон	47,0	2,488	751	
H. F. 6652	Сэвор	51,3	2,30	0	
O.1571	Покельс	51,7	2,436	503	
O.192	Файлон	56,0	2,024	565	
O.41	"	63,0	1,797	—65	
E. D. F. 4840	Сэвор	64,4	2,00	—2650	
O.500	Покельс	67,5	1,446	—258	Плохо удовлетворяет формуле
2954	"	74,61	—0,050	4218	
S.57	Файлон	79,0	—0,461	3136	
S.57	Покельс	80,05	—1,180	2283	

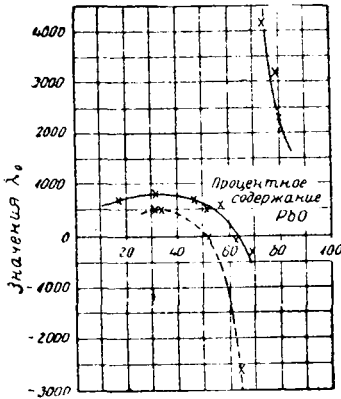
Таблица 3.222.

Дисперсия при оптическом напряжении в других стеклах.

Стекло	Наблюдатель	Процентное содержание			λ_0	Примечание
		РbO	B_2O_3	C_0		
1809	Файлон (1907)	18,7	34,3	3,00	561	Боросиликатный флинт
1809	Сэвор (1925)	18,7	34,3	3,08	900	"
3413	Файлон	23,6	33,0	3,11	553	"
O.658	Покельс	25,0	31,0	3,86	—42	"
935	Файлон (1907)	28,2	27,7	2,94	451	"
935	" (1909)	28,2	27,7	3,35	0	"
O.428	Покельс	32,0	56,0	2,50	664	Баритовый флинт
S.205	"	—	69,1	3,945	631	Алюминиевый барит
3296	Файлон	—	15,4	2,82	537	Боросиликат
7641	Сэвор	неизвестно	—	2,17	510	Боросиликатный крон
3749	Файлон	—	5,9	2,21	564	Калиевый барит
3453	"	—	5,7	2,15	524	"
U. V. 3492	Сэвор	неизвестно	—	3,15	720	" Увиоль "
U. V. 3199	Файлон (1909)	неизвестно	—	2,67	971	"

Стекла, приведенные в таблице 3.222, слишком разнородны для графического анализа.

Но таблица 3.221 относится только к флинтам. Если мы нанесем постоянные по отношению к процентному содержанию PbO , то окажется, что C_0 в общем, за исключением индивидуальных отступлений, следует кривой, приведенной для C_{Na} на фиг. 3.17.



Фиг. 3.221.

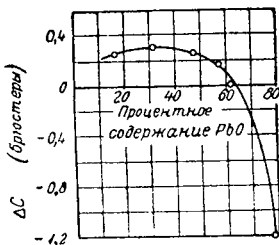
Кривая λ_0 представлена на фиг. 3.221. Разрыв непрерывности, когда мы проходим область, где оптический коэффициент напряжения меняет знак, — очевиден.

Из этой диаграммы мы видим, что стекла повидимому распадаются на две отличные друг от друга серии. Серия I, представленная на рисунке сплошной кривой, включает в себе большую часть образцов и имеет нулевую дисперсию при процентном содержании окиси свинца от 62 до 65%. Серия II, включающая стекла 2783, O.2154, H.F.6652 и E.D.F.4840, дает кривую во всех точках ниже первой, и нулевая дисперсия соответствует 51—52% окиси свинца.

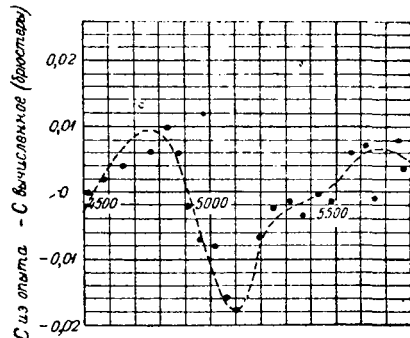
Причины расхождения между этими сериями не ясны. Полный химический состав многих стекол из серии I неизвестен, только процентное содержание PbO было сообщено изготовителями. Однако и в тех случаях, когда полностью известен химический состав стекол, все же нельзя указать объяснения причины расхождения между сериями. Может быть возраст и прошлая история образцов играет здесь важную роль.

Если мы вычислим C_{Na} для трех стекол из серии II, а именно для 2783 H.F.6652 и E.D.F.4840, то найдем, что они лежат на значительном расстоянии вне общей кривой на фиг. 3.17, подтверждая этим свою принадлежность к особой группе.

Обращаемся к серии I; была вычислена разность $\Delta C = C_{\lambda=4000} - C_{\lambda=7000}$, где это позволяли данные, и результаты представлены кривой на фиг. 3.222.



Фиг. 3.222.



Фиг. 3.223. Неправильности в дисперсии при двойном лучепреломлении для стекла 3453.

Когда результаты представлены в таком виде, то мы уже больше не видим разрыва непрерывности, который получался на кривой для λ_0 . Таким образом этот разрыв непрерывности физически не существует, но является результатом попытки распространить формулу за пределы ее естественной применимости.

Однако одним из важных применений формулы (3.220) является то, что она дает простой закон, с которым можно сравнивать действительно существующую дисперсию; при этом легко можно подметить местные небольшие отклонения. Суще-

ствование местных отклонений было впервые открыто Файлоном (Phil. Trans. A, vol. 207, стр. 198) при исследовании стекол 3296 и 3453. Фиг. 3.223 дает кривую отклонений величин C , полученных путем наблюдения, от значений C , вычисленных с помощью наиболее подходящей формулы типа (3.220) для стекла 3453, в пределах длин между 4500 Å и 5800 Å. Пунктирная линия грубо проведена через точки, полученные путем наблюдения. Некоторые из этих точек лежат значительно вне ее, что повидимому можно приписать случайным ошибкам при наблюдении $C_{\text{набл.}} - C_{\text{выч.}}$ (в брестерах).

Однако общее направление отступлений является несомненным и ясно указывает на существование аномальной дисперсии по соседству с $\lambda = 4900 \text{ Å}$.

Наличие подобных же отступлений в той же части спектра было открыто в стекле 3296 и в значительно меньшей степени — в стекле 3413.

Для этих же стекол были получены некоторые указания на понижение около $\lambda = 6000 \text{ Å}$ с последующим повышением.

Существование подобных же местных аномалий абсолютных оптических коэффициентов напряжений C_1 и C_2 было впоследствии наблюдаемо Файлоном (Proc. Roy. Soc. A, том 83, стр. 572—579), применившим совершенно иной метод в стекле, номинально идентичном со стеклом O.935 (химический состав которого дан в таблице 3.18) и в стекле увиоль Иенского каталога под № U. V. 3199.

Причина этих аномалий до сих пор не ясна. Повидимому их не следует связывать с полосами поглощения материала в его ненапряженном состоянии.

Совсем недавно Файлон и Харрис произвели тщательные наблюдения над дисперсией при оптических напряжениях в образцах кварца и нашли для них характеристики, в точности схожие с приведенными на фиг. 3.223, при этом они нашли те же самые колебания с несколько большей амплитудой.

Повторяя свои опыты, Файлон и Харрис применили пару кварцевых клиньев, чтобы придать кварцевой пластинке регулируемую толщину, что позволило им наблюдать резко очерченные полосы высших порядков; при таком способе они открыли, что кривая дисперсии при оптическом напряжении в кварце имеет ряд вполне отчетливых колебаний, частью сглаженных в предыдущих наблюдениях благодаря расплывчатому характеру полос низких порядков, полученных без применения кварцевой пластинки.

Теперь повидимому не представляет сомнения, что главные отклонения на фиг. 3.223 обязаны своим происхождением наличию кварца; они не были обнаружены до этих пор в стеклах с содержанием кварца ниже 35%. Возможно, что те места в спектре, где возникают колебания, связаны с некоторыми характерными линиями спектра кварца; но это является до сих пор только предположением и вызвало бы значительные затруднения при попытке его физического истолкования.

Помимо стекла, дисперсия при оптическом напряжении была исследована в желатине Реебом и в целлюлоиде Рамспеком (§ 3.20). Рееб получил относительные значения оптических коэффициентов напряжения в пяти образцах желатина для семи значений длин волны; он не дает ни приложенного напряжения, ни толщины образцов, так что абсолютные значения не могут быть выведены из его результатов.

Относительные значения приведены в таблице 3.223, где C_1 есть величина C для длины волны $\lambda = 5854$. В последней колонке приведена величина λ_0 , вычисленная из этих данных графически; однако результаты, полученные Реебом, удовлетворяют формуле (3.220) только приблизительно.

Образцы I, II, III и IV представляли собой гели с концентрациями соответственно 17,2, 20,21 и 20%; к образцу II было прибавлено 10 г NaCl, к III — 15,9 г сахара и к IV — 2,5 г CuSO_4 . Образцом V был тонкий лист чистого сухого желатина. Следует заметить, что влияние прибавки солей на дисперсию при оптических напряжениях сравнительно небольшое; наиболее действительным в отношении увеличения дисперсии является сахар. С другой стороны, в сухом желатине диспер-

Таблица 3.223.

Относительные значения C для желатина.
Величины C/C_1 .

Образец	λ 6450	λ 6141	λ 5854	λ 5599	λ 5365	λ 5155	λ 4961	λ_0
I	0,9829	0,9918	1,0000	1,0099	1,0204	1,0313	1,0426	1 081
II	0,9847	0,9923	1,0000	1,0093	1,0199	1,0309	1,0400	1 014
III	0,9756	0,9878	1,0000	1,0114	1,0228	1,0365	1,0521	1 255
IV	—	—	1,0000	1,0094	1,0189	1,0308	1,0415	1 063
V	0,9898	0,9953	1,0000	1,0059	1,0104	1,0153	1,0177	560

сия значительно меньше. Во всех случаях оптический коэффициент напряжения является наибольшим в фиолетовых лучах.

Рамспек применил подобный же метод к целлюлоиду. Его результаты были осложнены явлением медленного перемещения полос в этом веществе, о котором упоминалось в § 3.35. Он пришел к заключению, что дисперсия при оптических напряжениях в целлюлоиде, при небольших нагрузках, до 200 кг/см^2 , следует приблизительно тому же самому закону, что и дисперсия в кварце; это заключение практически имеет большое значение, так как из него следует, что пластинка кварца может быть использована как ахроматический компенсатор для целлюлоида, подвергшегося деформации. Поэтому для этих небольших нагрузок C для целлюлоида приблизительно на 3% больше в фиолетовом, чем в красном цвете. Однако Рамспек нашел, что при увеличении нагрузок значительно выше предела упругости, до 350 и 400 кг/см^2 , результаты получаются обратные и имеет место дисперсия при оптическом напряжении аномального вида, в котором C в красном цвете больше, чем C в фиолетовом. Подобного же рода обратный ход дисперсии наблюдается и тогда, когда образец подвергается постепенному напряжению постоянной нагрузкой, превышающей предел упругости, и путем повторения этих больших нагрузок можно достичь дисперсии аномального вида, в котором C для красного цвета превышает C для фиолетового приблизительно на 8% .

§ 3.23. Определение C_1 и C_2 способом „эквивалентной призмы“.

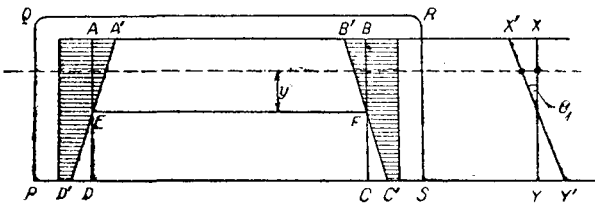
Этот способ введен Файлоном,¹ и по сравнению с интерференционными методами, примененными Покельсом и позднее Твайманом,² имеет следующие преимущества:

а) не требует специальных предосторожностей для защиты прибора от небольших изменений температуры и б) может быть применен для наблюдений, простирающихся непрерывно по всему спектру.

Этот метод основан на следующем принципе.

Если плоская световая волна падает под прямым углом на вертикальную

поверхность AD (фиг. 3.231) стеклянной пластинки с прямоугольным сечением $ABCD$, подвергающейся чистому изгибу в вертикальной плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка, то вследствие градиента напряжения от вершины пластинки к ее основанию различные элементы волны, входящие в стекло у AD



Фиг. 3.231.

¹ Roy. Soc. Proc. A, 79, 440—2 и 83, 572—9.

² F. Twyman and I. W. Perry, Proc. of the Physical Society of London, 34, 1922, 151—4.

в одной и той же фазе, выходят из стекла в различных фазах. Если изгибающий момент M приложен так, чтобы вызывать кривизну, направленную книзу, и y есть высота, на которой луч PQ пересекает стекло, то тогда напряжение T на этой высоте $= My/I$ (см. главу V, § 5.03), где I есть момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси $EF = b^3d/12$, причем b и d являются соответственно высотой и толщиной пластинки. Поэтому запаздывание этого луча при выходе, если мы предположим, что волна поляризована вертикально, будет

$$C_1 T d$$

или

$$\frac{12M}{b^3} C_1 y. \quad (3.230)$$

Таким образом, точки, у которых колебания находятся в одной и той же фазе, вместо того чтобы лежать в плоскости XY , параллельной поверхности AD стеклянной пластинки, лежат в плоскости $X'Y'$, наклоненной к XY под углом $\theta_1 = 12 C_1 M/b^3$. Поэтому такая пластинка под действием изгиба будет отклонять фронт волны, подобно призме, на угол θ_1 . Подобным же образом волна, поляризованная горизонтально, будет отклонена на угол $\theta_2 = 12 C_2 M/b^3$.

В действительности явление осложняется тем обстоятельством, что верхняя и нижняя половины пластинки сжимаются и расширяются,¹ так как они находятся соответственно под действием растяжения и сжатия.

Новая ширина пластинки на высоте y будет тогда

$$d \left(1 - \frac{\eta T}{E} \right),$$

т. е.

$$d \left(1 - \frac{12M}{b^3 d} \frac{\eta}{E} y \right), \quad (3.231)$$

где E есть модуль Юнга, η — коэффициент Пуассона.

Таким образом, кусок вследствие деформации обратился в призму с углом $\frac{12M}{b^3} \frac{\eta}{E}$, причем преломляющий край этой призмы (в данном случае) находится сверху.

Если принять во внимание такое изменение формы, то для полного отклонения вертикально и горизонтально поляризованных лучей получим выражение

$$\theta_1' = \frac{12M}{b^3} \left[C_1 - \frac{\eta}{E} (n-1) \right], \quad \theta_2' = \frac{12M}{b^3} \left[C_2 - \frac{\eta}{E} (n-1) \right], \quad (3.232)$$

где n есть естественный показатель преломления примененного света.

Для того, чтобы ввести поправку на изменение формы, мы погружаем стекло в жидкость, показатель преломления которой известен (для этого подходит кедровое масло).

Для этой цели на пластинку помещается седлообразная часть $PQRS$ (фиг. 3.231), состоящая из двух параллельных кусков стекла PQ и RS , приклеенных к перемычке QR ; вследствие капиллярности введенная жидкость удерживается в положении, показанном на рисунке штриховкой.

Если n_0 есть показатель преломления жидкости, наблюдаемые отклонения при погруженных пластинках выразятся через

$$\theta_1'' = \frac{12M}{b^3} \left[C_1 - \frac{\eta}{E} (n - n_0) \right], \quad \theta_2'' = \frac{12M}{b^3} \left[C_2 - \frac{\eta}{E} (n - n_0) \right]. \quad (3.233)$$

¹ В боковом направлении.

Вычитая уравнение (3.232) из (3.233), находим

$$\theta_1'' - \theta_1' = \theta_2'' - \theta_2' = \frac{12M}{b^3} (n_0 - 1) \frac{\eta}{E}. \quad (3.234)$$

Обозначая эту разность, полученную непосредственно из наблюдения, через Δ , мы имеем

$$C_1 = \frac{b^3}{12M} \left[\theta_1 + \Delta \frac{n-1}{n_0-1} \right], \quad (3.2351)$$

$$C_2 = \frac{b^3}{12M} \left[\theta_2' + \Delta \frac{n-1}{n_0-1} \right]. \quad (3.2352)$$

Практически Δ нужно определить только для одной линии спектра (если применяемая жидкость кедровое масло, $n_0 = 1,515$ для D -линий); однако n должно быть найдено для каждой наблюдаемой линии спектра.

Для наблюдения отклонений пластинка вводится в установку, в действительности соответствующую спектроскопу, расположенному в вертикальной плоскости.

Свет из освещенной горизонтальной щели S (фиг. 3.232) проходит через вертикальный коллиматор C и затем дифракционной решеткой G или призмой разлагается в вертикальный спектр. Последний после прохождения через образец B , подвергнутый напряжению, или наблюдается глазом с помощью зрительной трубы и микрометра, или, что еще лучше, фотографируется спектрографической камерой K .

Весьма существенно, чтобы наблюдаемый спектр состоял из ярких линий. Таким образом, во всех случаях следует пользоваться газообразным источником света высокой температуры. Газ между углями вольтовой дуги является полезным источником подходящей интенсивности. Для получения желаемого спектра в угли вводятся сердечники из различных металлов, или же применяются металлические полюса.

На одной и той же пластинке делаются два снимка в быстрой последовательности один за другим при ненагруженной и нагруженной стеклянной пластинке. Затем перемещения изображений измеряются с помощью компаратора и из них вычисляются отклонения θ_1' и θ_2' .

Для определения переводного множителя, связывающего перемещение на пластинке с угловым отклонением, удалялась решетка G и взамен ее помещалось двойное зеркало, состоящее из двух зеркал, склеенных вместе под заранее известным небольшим углом i между ними. Два зеркала давали два изображения щели на пластинке; расстояние между этими двумя изображениями соответствовало угловому отклонению $2i$.

В целях увеличения перемещения желательно иметь механическое приспособление, пользуясь которым можно изгибающему моменту пластинок придавать *обратное направление*. Оно может состоять из системы рычагов, соединяющихся с выступающими плечами, причем стекла удерживаются силою давления, приложенного непосредственно над поддерживающими ножами опор. Таким образом перемещение может быть увеличено вдвое.

Применяя последовательно две пластинки, толщиной 6 см каждая, Файлон мог получить на фотографической пластинке перемещения размером в несколько миллиметров.

Следует отметить, что при этом на пластинке вместе фотографируются четыре спектра, а именно: по одному горизонтально-поляризованному и одному вертикально-поляризованному для прямого и обратного изгибающего моментов.

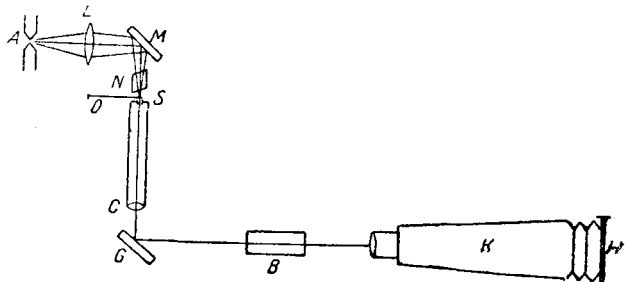
Для того чтобы избежать могущей произойти пуганицы в спектрах, можно применить николю или иной поляризатор и поляризовать падающий свет, прежде чем он достигнет щели. В таком случае снимки горизонтально и вертикально поляризованных спектров берутся отдельно.

Изображения, соответствующие положительному и отрицательному изгибающему моменту, могут быть различаемы путем применения закрывающей за-

слонки, поочередно отрезающей часть щели у того или иного конца. Тогда линии спектра появляются на пластинке в несколько ступенчатом порядке и их легко различить.

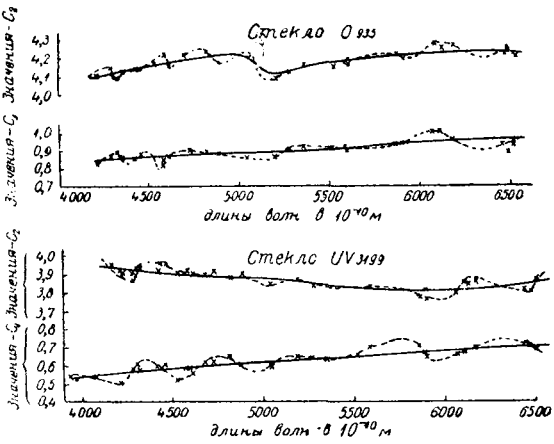
Определение n для различных линий спектра представляет собой значительные трудности. Если мы имеем стекло известного типа, то обычно можно пользоваться показателями преломления для ряда стандартных линий и можно подобрать одну из общепринятых формул дисперсии, удовлетворяющую данным величинам; по этой формуле вычисляется n для каждой линии. Однако такой прием не является вполне удовлетворительным, так как нельзя принимать во внимание возможные небольшие отклонения дисперсии, могущие быть в стекле.

Лучшим, но более кропотливым способом является изготовление из исследуемого образца призмы и непосредственное определение показателей преломления для линий требуемого спектра. Это может быть сделано весьма легко путем вырезки небольшой пластинки, шлифовки ее под призму с небольшим углом и полирования. Если затем эту призму ввести в оптическую систему фиг. 3.232, удалив предварительно пластинку, и пропустить свет частью сквозь призму, а частью сквозь воздух, то на фотографической пластинке образуются два спектра, и расстояния между соответствующими линиями дают непосредственно величину $(n - 1)$.



Фиг. 3.232.

А—источник света, О—задерживающий экран, L—собирающая линза, М—зеркало, N—николь, S—щель, С—коллиматор, G—решетка, В—стеклянный образец, К—камера, H—фотопластинка.



Фиг. 3.241.

In Royal Soc. Proceedings за 1910 г. (A, том 83, стр. 572—9) приведены подробные значения для C_1 и C_2 . Они являются отрицательными для обоих стекол. Фиг. 3.241 взята из самой статьи; крестиками показаны действительно наблюдаемые величины, а сплошная линия, проведенная через крестики, дает приближенное значение опытной кривой, без учета небольших отступлений, вызванных ошибками при наблюдении. Однако Файлон полагает, что эти небольшие отступления имеют некоторое значение, и пунктирная кривая представляет собой вариант кривой, учитывающий отступления.

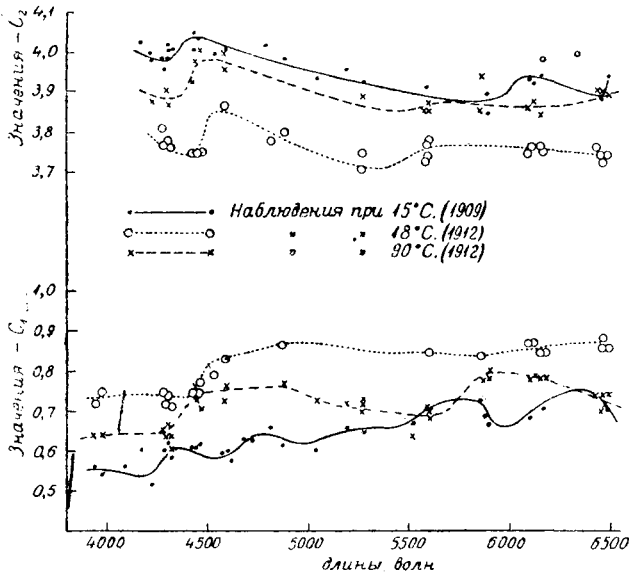
Три года спустя, опыты над стеклом U. V. 3199 были повторены с целью определения изменения C_1 и C_2 при переменах температуры.

Следует отметить, что попутно этот метод дает возможность измерения E/η для стекла. Чтобы определить отдельно η и отдельно E , требуется самостоятельный опыт.

§ 3.24. Дисперсия в прямом и поперечном оптическом коэффициенте напряжения.

Только два стекла были полностью исследованы при помощи метода, описанного в предыдущем параграфе, а именно стекла O.935 и U. V. 3199, о которых было сказано выше.

Результаты наблюдений над стеклом U. V. 3199 представлены на фиг. 3.242.¹ Для каждого C_1 и C_2 даны три кривые, показывающие результаты наблюдений, произведенных: 1) в 1909 г. при 15° С (показана сплошной линией, отдельные наблюдения показаны точками), 2) в 1912 г. при 18° С (пунктирная линия, наблюдения показаны кружками) и 3) в 1912 г. при 90° С (прерывистая линия, наблюдения показаны крестиками).



Фиг. 3.242.

Некоторые характерные аномалии повсюду упорно повторяются и повидимому имеют существенное значение, например, отчетливое увеличение C_2 около 4400 Å, встречающееся во всех кривых.

Вообще говоря, влияние температуры меньше, чем расхождение, вызванное временем или обработкой. Это видно из положения прерывистой линии, лежащей обычно между сплошной и пунктирной линиями.

Вообще говоря, влияние температуры меньше, чем расхождение, вызванное временем или обработкой. Это видно из положения прерывистой линии, лежащей обычно между сплошной и пунктирной линиями.

§ 3.25. Определение оптических коэффициентов напряжения способом Тваймана.

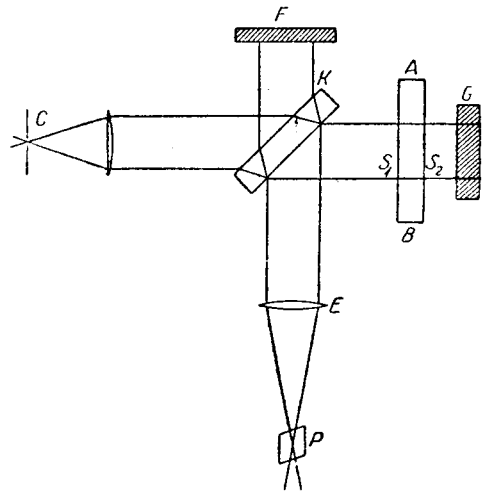
В этом способе² образец AB подвергается деформации чистого изгиба в вертикальной плоскости и вводится между одним из зеркал G (фиг. 3.25) и полуперебренной пластинкой K интерферометра Майкельсона (см. § 1.45). Николь P ставится непосредственно перед глазом наблюдателя, так что картина может быть наблюдаема при свете, поляризованном либо горизонтально, либо вертикально. Интерферометр прежде всего устанавливается так, чтобы при отсутствии нагрузки наблюдалась равномерная „чувствительная окраска“ по всей площади боковой поверхности стеклянного стержня.

Затем стержень подвергается изгибу. Пусть c — толщина этого стержня, n — нормальный показатель преломления стекла; тогда, если Δc есть изменение c между нижней и верхней поверхностями стекла и Δn — соответствующее изменение показателя преломления для одной из поляризованных составляющих, общая разность отставания света в верхней и нижней частях стержня, вызванная действием изгиба, будет

$$2\Delta(n-1)c = 2c\Delta n + 2(n-1)\Delta c,$$

¹ Фиг. 3.242 была перечерчена, так как некоторые кривые в работе Файлона были нанесены в несколько ошибочном масштабе вследствие того, что поправка на небольшое изменение в единицах измерения была взята с неверным знаком.

² F. Twyman and J. W. Perry, London Phys. Soc. Proc. 34 (1922), 151 — 4.



Фиг. 3.25.

так как мы не должны забывать, что луч пересекает стекло *дважды*. Таким образом, мы получаем поле, пересеченное числом полос m , где

$$m\lambda = 2c\Delta n + 2(n - 1)\Delta c.$$

Затем опыт повторяется при закрытых зеркалах F и G , так что сам образец применяется в качестве интерферометра Фабри и Перо, причем свет, отраженный от передней поверхности S_1 образца, интерферирует со светом, дважды пересекающим образец и отраженным от задней поверхности S_2 . Здесь разность относительного отставания, введенного между верхним и нижним лучами, будет $2\Delta(nc) = 2c\Delta n + 2n\Delta c$ и соответственно, если m' число полос между верхней и нижней поверхностями бруса, то

$$m'\lambda = 2c\Delta n + 2n\Delta c,$$

причем, если m и m' были наблюдаемы в монохроматическом свете (Твайман и Перри применяли зеленую ртутную линию при λ 5461), то оба уравнения, приведенные выше, могут быть разрешены для Δn и Δc . Если нагрузки и размеры стержня известны, то оптический коэффициент напряжения для света, поляризованного в данном направлении, получается непосредственно.

Твайман и Перри применили этот метод к кронгласу Derby следующего химического состава: 54,83 SiO₂; 34,64 PbO; 6,23 Na₂O и 4,30 K₂O, и нашли $C_1 = -2,37$ брюстера, $C_2 = -5,93$ брюстера.¹

Далее также может быть получена величина Δc , а отсюда может быть выведена постоянная величина η/E . Наблюдение кривизны для верхней поверхности стержня с помощью метода Корню² позволяет определить η . Таким образом, целиком определяются как коэффициенты упругости, так и оптические коэффициенты напряжения.

Метод Тваймана вызывает два возражения: а) он требует образцов, изготовленных весьма тщательно, с боковыми поверхностями оптически плоскими и параллельными; б) при применении этого метода возникает ошибка, оставленная без внимания в вышеизложенном рассуждении, но которые необходимо учесть если желают достигнуть высокой точности. Главная из этих ошибок является следствием того, что после изгиба поверхности стержня уже не параллельны. В соответствии с этим отраженный луч не проходит обратно по своему первоначальному направлению и пересекает разные уровни в стержне на своем пути туда и обратно. Это вводит весьма существенную поправку.

§ 3.26. Влияние температуры на оптические коэффициенты напряжения.

Влияние высоких температур на оптические коэффициенты напряжения стекла было изучено Харрисом,³ в 1924 г. Уже опыты Файлона в 1912 году указали на имеющееся с возрастанием температуры повышение — C_2 и в среднем падение — C_1 , ведущие к возрастанию относительного оптического коэффициента напряжения сповышением температуры, для стекла увиоль. Однако, Файлон, применяя метод „эквивалентной призмы“ (см. § 3.23) к пластинкам под действием изгиба, должен был заключить весь прибор в паровой кожух и не мог получить устойчивой температуры, значительно превышающей 90°C.

Харрис, применяя усовершенствованный прибор с непосредственным сжатием небольшого куска стекла и измеряя C для натрового света с помощью компенса-

¹ Эти значения приведены Твайманом и Перри в гравитационных единицах 10^{-7} см²/кг, отличающихся от брюстеров, называемых здесь *абсолютными единицами*, приблизительно на 20%.

Данные Тваймана и Перри повсюду отнесены к принятым здесь единицам.

² Метод Корню, см. § 3.09, подстрочное примечание.

³ F. C. Harris, The Photo-Elastic Constants of Glass as affected by High Temperatures and by Lapse of Time, Roy. Soc. Proc. A, 106, 1924, 718 — 23.

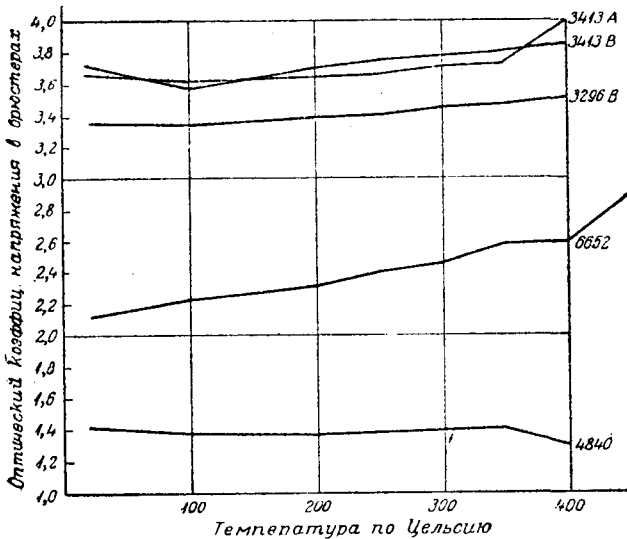
тора Бабинэ методом Покельса, заключил свой кусок стекла в небольшую электропечь и был в состоянии достигнуть устойчивых температур в 450°C . В некоторых случаях он довел свои наблюдения даже до точки размягчения стекла.

Этим путем он определил изменение C в зависимости от повышения температуры для пяти стекол, включая несколько образцов, испытанных прежде Файлоном.

Химический состав, установленный последующим анализом, был следующим.¹

Стекло	SiO_2	PbO	B_2O_3	Al_2O_3	K_2O	CaO	Na_2O	MgO
	31,6	23,6	33,0	8,0	3,8	—	—	—
	67,5	—	15,4	—	16,7	—	—	0,4
	41,4	52,0	—	0,7	3,8	0,7	1,4	—
	30,4	64,4	—	0,2	1,65	1,8	1,85	—

Изменение C в связи с изменением температуры для пяти исследованных образцов изображено на фиг. 3.26; номер стекла поставлен против соответствующей кривой.



Фиг. 3.26.

Влияние температуры на оптические коэффициенты напряжения стекла.

Легко видеть отчетливое возрастание оптического коэффициента напряжения при повышении температуры за исключением одного случая, а именно тяжелого флинтгласа 4840. Это может служить еще одной иллюстрацией уже упоминавшегося любопытного изменения оптических явлений при напряжениях, наблюдающегося при увеличении процентного содержания свинца.

За исключением этого факта нет никаких определенных указаний о влиянии различных

составных частей на эти явления; число исследованных стекол однако слишком незначительно, чтобы можно было прийти к каким-нибудь определенным заключениям. Имеются указания на резкое изменение температурного градиента оптического коэффициента напряжения при приближении к температуре отжига ($400 - 450^{\circ}\text{C}$). К сожалению, трудно провести наблюдения при более высоких температурах, потому что, как только стекло начинает размягчаться, — возникает медленное непрерывное изменение явления, и полученные результаты трудно объяснить.

§ 3.27. Влияние времени на оптические коэффициенты напряжения.

В своих исследованиях Харрис вновь определил C_{Na} при нормальных температурах для многих образцов стекла, оптические коэффициенты напряжения которых

¹ См. §§ 3.17, 3.18.

были определены Файлоном несколькими годами ранее; при этом Харрис нашел, что во многих случаях имело место *увеличение С*, которое не может быть объяснено ошибками при наблюдении. Он также приводит для сравнения несколько определений, сделанных Джессопом в промежуточное время. Результаты приведены в таблице 3.27.

Таблица 3.27.

Изменение оптических коэффициентов напряжения с течением времени.

Стекло	Исследователь и время исследования.				Возрастан. С в процент.
	Файлон (1903)	Файлон (1907)	Джессоп (1920)	Харрис (1923)	
3413 А.	—	3,364	—	3,662	8,9
3413 В.	—	3,500	—	3,735	6,7
3296 В.	—	3,173	—	3,366	5,8
3749 В.	—	2,469	—	2,700	9,4
3453 А.	—	2,383	—	2,664	11,9
3453 В.	—	2,350	—	2,663	13,3
2783 А.	—	2,150	—	2,999	39,5
2783 В.	—	2,462	—	2,921	18,6
О.154	2,865	—	3,01	2,957	3,2
О.152	2,738	—	2,95	2,758	0,8
О.103	2,844	—	—	2,959	4,0
О.41	1,781	—	1,84	1,831	2,8

Заметим, что увеличения значительно меньше для последних четырех стекол, испытанных в 1903 г. спустя значительный промежуток времени с момента их плавки.

Выводы, сделанные Харрисом, в значительной степени проливают свет на некоторые противоречия, остававшиеся до этого времени необъясненными. Так, определения, сделанные Файлоном над одним и тем же образцом (О.935) в 1907 и 1909 гг., дали для *С* соответственно 3,18 и 3,33 брюстеров, что дает повышение приблизительно в 5% за 2 года. Выводы Харриса объясняют отчасти и замечательное противоречие между величиной C_{Na} , определенной Покельсом для стекла S 57 (—1,937 брюстера), и той же величиной, определенной Файлоном (—0,986 брюстера) двумя годами позднее. Хотя в последнем случае образцы не были идентичными, тем не менее изменение кажется большим, чем должно было иметь место для стекол одного и того же номера; но если мы предположим, что оба стекла взяты из одной плавки, изменение с течением времени произошло в том же направлении (алгебраически), как и в наблюдениях Харриса.

Результат, полученный Сэвором,¹ дает дальнейшее подтверждение. Сэвор вновь определил в 1925 г. оптический коэффициент напряжения для натрового света для стекла 1809 и нашел его равным 3,64 брюстеров, против 3,31 брюстеров, найденных Файлоном в 1907 г., что дает увеличение в 10%.

Изменение (фиг. 3.242), замеченное Файлоном в стекле U. V. 3199 в период времени между 1909 и 1912 гг., очевидно противоречит выводам Харриса, так как оно дает уменьшение *С*. Но в этом случае необходимо отметить, что наблюдения 1912 г. при комнатной температуре были по времени произведены позже, чем наблюдения при более высокой температуре. Поэтому стекло, о котором идет речь, подвергалось влиянию температуры в 90°C в течение больших промежутков времени, что могло парализовать влияние времени и могло восстановить более раннее состояние стекла, близкое к тому, которое оно имело при выходе из плавильной печи. На возможность этого явления указывает случай с тяжелым флинтном

¹ S. R. Savur. Phil. Mag. I, 1925, 460.

(Н. Ф. 6652), оптический коэффициент напряжения которого уменьшился после нагревания до 400°C с 2,31 до 2,24 брюстеров. ¹ Разница хотя и небольшая, но с правильным знаком.

Повидимому напрашивается заключение, что эти свойства не являются постоянными, но изменяются с течением времени и в зависимости от истории каждого отдельного образца стекла.

Возможно, что внутри стекла имеет место медленное восстановление первоначальных внутренних условий.

§ 3.28. Неравномерное распределение напряжений в пластинке из прозрачного материала. Изоклинические линии.

В предыдущих параграфах мы имели дело с простейшими случаями распределения напряжений в исследуемом образце, а именно со случаями равномерного сжатия и растяжения, или чистого изгиба. Но важнейшее применение оптического метода изучения напряжений относится к сложному распределению напряжений в прозрачных пластинках.

Прежде всего рассмотрим решение для обобщенного плоского напряженного состояния в пластинке толщиной $2c$, причем оси x и y расположим в плоскости пластинки. Применяя точное решение § 2.26, мы имеем

$$\widehat{xx} = \widetilde{xx} + \left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right) \frac{\lambda}{6\lambda + 4\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}), \quad (3.2801)$$

$$\widehat{yy} = \widetilde{yy} + \left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right) \frac{\lambda}{6\lambda + 4\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}), \quad (3.2802)$$

$$\widehat{xy} = \widetilde{xy} + \left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right) \frac{\lambda}{6\lambda + 4\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\widetilde{xx} + \widetilde{yy}). \quad (3.2803)$$

Если толщина пластинки *незначительна*, то вторыми членами выше приведенных выражений для напряжений можно пренебречь и \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{xy} можно считать постоянными и равными их средним значениям \widetilde{xx} , \widetilde{yy} и \widetilde{xy} .

Тогда, согласно законам Максвелла и Нейманна, связывающим оптические явления с напряжениями, для луча, пересекающего пластинку под прямым углом, направления поляризации, соответствующие направлениям главных напряжений в плоскости пластинки, будут постоянными по всей толщине пластинки.

Так, для луча, пересекающего пластинку в точке (x, y) , наклон φ осей поляризации в пластинке относительно координатных осей выразится через

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\widetilde{2xy}}{\widetilde{xx} - \widetilde{yy}}. \quad (3.281)$$

Относительное отставание ρ двух взаимно противоположно поляризованных лучей выразится через $\rho = C \times 2c \times$ разность двух главных напряжений, или

$$\rho = 2cC \sqrt{(\widetilde{xx} - \widetilde{yy})^2 + 4\widetilde{xy}^2}. \quad (3.282)$$

Соответственным образом, если такая напряженная пластинка рассматривается в плоском полярископе (см. §§ 1.32, 1.33), то поле является темным повсюду, где главные оси напряжения параллельны осям поляризатора и анализатора. Если

они расположены под углом α по отношению к координатным осям, то это дает кривую

$$\varphi = \alpha$$

или

$$(\overline{xx} - \overline{yy}) \operatorname{tg} 2\alpha = 2\overline{xy}. \quad (3.283)$$

Так как эти точки очевидно одни и те же для всех цветов, рассматриваемая полоса будет черной. Вращая одновременно как анализатор, так и поляризатор (или вращая образец), можно изменять α , и черная полоса будет изменять свое положение и очертание. Наблюдая ряд таких черных полос для различных углов α , мы можем получить направления главных напряжений по всему образцу. Эти черные полосы являются линиями, уже названными в § 2.28 линиями равного наклона, или изоклиническими линиями пластинки.

Если нанесено достаточное число изоклинических линий, то легко графически построить линии главных напряжений при помощи метода, изложенного в § 2.28.

Преимуществом пользования изоклиническими линиями является то обстоятельство, что они видимы при весьма малых напряжениях; это имеет значение, когда нежелательно подвергать материал значительным деформациям.

§ 3.29. Изохроматические линии.

В плоском полярископе со скрещенными анализатором и поляризатором происходит потухание света всякий раз, когда полное отставание света равно целому числу r длин волны. Это вытекает из рассуждений §§ 1.33, 1.35, если мы пренебрежем (как это обычно делается) разницей множителей уменьшения интенсивности.

Точки пластинки, для которых это (потухание) имеет место, определяются уравнением

$$P - Q = \frac{r\lambda}{2cC}, \quad (3.2901)$$

где P , Q — средние главные напряжения, как в § 2.28. Вышеприведенное уравнение может быть написано также в виде

$$(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2 = (r\lambda/2cC)^2. \quad (3.2902)$$

Так как длина волны входит в это уравнение, то очевидно, что, вообще говоря, потухание будет полным только для одного цвета; для всех остальных цветов потухание будет частичным. Но для данной величины $P - Q$ относительное отставание $2cC(P - Q)$ есть величина постоянная для любого заданного цвета, так что интенсивность прошедшего света этого цвета, хотя и не равняется нулю, является постоянной на протяжении кривой, выраженной уравнением (3.2901). Таким образом получающаяся окраска остается неизменной на протяжении всей кривой, и поэтому подобные линии называются *линиями одинаковой окраски*, или *изохроматическими линиями*. Они уже были упомянуты, только без их оптической характеристики, в § 2.28.

Изохроматические линии разделяются, в зависимости от величины целого числа r , на изохроматические линии первого, второго, третьего и т. д. порядков, и они имеют обычную последовательность цветов кристаллических пластинок (см. § 1.35). Изохроматические линии нулевого порядка соответствуют равенству $P - Q = 0$. В этом случае отставание исчезает для всех цветов. Таким образом, эта линия, когда она существует, кажется *черной*, и ее можно называть *нейтральной линией*.

Вообще говоря, нейтральная линия не будет иметь вида кривой. Легко видеть, что исчезновение $P - Q$ определяется двумя условиями, а именно

$$\overline{xx} - \overline{yy} = 0 \text{ и } \overline{xy} = 0.$$

Каждое из этих равенств соответствует кривой в плоскости пластинки. Эти кривые, вообще говоря, пересекаются в ряде отдельных точек, так что нейтральная линия обычно сводится к ряду изолированных черных точек. Эти точки являются *особенными* точками, упомянутыми в § 2.28.

В этих точках напряжение имеет характер равномерного всестороннего сжатия (или растяжения), и если мы пренебрежем напряжениями, перпендикулярными к плоскости пластинки (исчезающими на поверхностях и повсюду являющимися очень незначительными), то оптическая ось соответствующего кристалла будет перпендикулярной к плоскости пластинки.

В исключительных случаях нейтральная линия может быть непрерывной линией: например, это случается, когда имеет место чистый изгиб в плоскости пластинки, где во всех точках $x_x = My/I$, $y_y = x_y = 0$ (см. главу V), так что когда $y = 0$, оба условия удовлетворяются независимо, и нейтральная линия совпадает с технической „нейтральной осью“.

С другой стороны, как уже объяснено в § 2.28, каждая изоклина проходит через особенную точку или точки.

Практически важно иметь возможность делать различие между особенными точками, где оба главные напряжения P и Q действительно исчезают, и теми точками (что является обычным случаем), где эти напряжения только равны. Это легко можно сделать путем опыта, если природа материала (например в случае целлюлоида или бакелита) легко позволяет просверлить в пластинке маленькое отверстие в точке, о которой идет речь. Если черная точка действительно является одной из точек нулевого напряжения, просверливание дыры никоим образом не нарушит систему напряжений, и черное пятно будет попрежнему покрывать дыру. Но если P и Q не равняются нулю, вся система напряжений изменяется, и вокруг нее появятся цветные круги, приблизительно концентричные по отношению к отверстию.

Нейтральную линию или точки, когда они существуют, легко отличить от черных изоклинических линий давая небольшое вращение поляризатору и анализатору. Это конечно изменяет видимую изоклиническую линию, зависящую от наклона николей. С другой стороны, это не изменяет ни нейтральных, ни изохроматических линий, так как в их уравнения не входит наклон поляризатора и анализатора.

Для многих целей является полезным совершенно удалить изоклины из поля наблюдения и наблюдать только изохроматические линии, иначе первые могут заметно затемнять последние.

Это легко сделать при наблюдении пластинки в полярископе с круговой поляризацией (§ 1.38). В этом случае потухание имеет место только тогда, когда относительное отставание является кратным числом целой длины волны, т. е. когда единственными видимыми в поле наблюдения линиями являются цветные изохроматические линии.

В § 2.30 было указано, что, зная полный ряд изохроматических и изоклинических линий и их параметры, можно полностью определить напряжение в пластинке путем весьма простого графического построения. Пример применения этого метода к круглой пластинке, подверженной кручению, приведен в В. А. Report for 1923¹ и показывает, что этот метод обладает вполне достаточной точностью.

Для применения этого метода и вообще для исследования напряжения этим путем, желательнее получить возможно более частую сеть изохроматических линий. Этого можно достигнуть, увеличивая все нагрузки на пластинку постепенно в одном и том же отношении. Во многих случаях, если пластинка обладает совершенной упругостью, напряжение в каждой точке увеличивается в том же самом отношении и изохроматические линии данного целого порядка последовательно займут положения

¹ L. N. G. Filon, On the Graphical Determination of Stress from Photo-Elastic Observations. В. А. Report, 1923, 350 — 7.

промежуточных изохроматических линий, невидимых для глаза при первоначальной нагрузке. Таким образом, если

$$(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2 = a^2$$

является уравнением изохроматической линии 1-го порядка при нагрузках, выраженных величиной W , то при нагрузках, выраженных величиной kW , напряжения в каждой точке будут $k\overline{xx}$, $k\overline{yy}$, $k\overline{xy}$, и уравнение изохроматической линии 1-го порядка будет

$$(k\overline{xx} - k\overline{yy})^2 + 4(k\overline{xy})^2 = a^2,$$

т. е.

$$(\overline{xx} - \overline{yy})^2 + 4\overline{xy}^2 = a^2/k^2,$$

что является изохроматической линией порядка $1/k$ при первоначальных нагрузках. Этим путем мы можем нанести изохроматические линии дробных порядков.

Однако не следует думать, что этот метод всегда приводит к точным результатам; может случиться (если, например, мы желаем изучить продольный изгиб стоек), что распределение напряжений может само по себе зависеть от величины полной нагрузки; это может произойти или от неполной упругости образца, обуславливающей перераспределение внутренних напряжений, или вследствие реакции опор.

Поэтому весьма важно при данном состоянии нагрузки сделать одновременно видимыми возможно большее число изохроматических линий. При скрещенных поляризаторе и анализаторе отчетливо видны только изохроматические линии целых порядков и они могут быть разделены в поле (зрения) значительными интервалами. Пользуясь измененным круговым полярископом, мы можем сделать видимыми изохроматические линии порядка, определяемого нечетным целым числом плюс половина. Ибо если мы вспомним результаты § 1.38 и применим вместо *правого кругового* анализатора *левый круговой* анализатор в сочетании с правым круговым поляризатором, то тогда левополяризованная по кругу волна будет остановлена при выходе из пластинки, и интенсивность поля выразится через

$$I \cos^2 \frac{1}{2} \chi,$$

где $\chi = \frac{2\pi}{\lambda}$ (отставание в длинах волн) согласно § 1.38, вместо $I \sin^2 \frac{1}{2} \chi$. Из этого следует, что интенсивность теперь исчезает всякий раз, когда отставание является нечетным числом половин длины волн, т. е., что изохроматические линии порядка $r + \frac{1}{2}$ теперь будут видимыми в поле наблюдения и могут быть нанесены на диаграмму.

Для осуществления такого изменения необходимо только повернуть одну из двух пластинок в четверть волны в круговом полярископе на 90° в ее собственной плоскости. Когда требуется высшая точность для нанесения этими методами на диаграмму изохроматических линий, полезно пользоваться монохроматическим светом пламени натрия или ртутной лампы или применять хороший фильтр. Одной из причин применения монохроматического света является то обстоятельство, что шкала цветов, как это объяснено в § 1.35, отличается для различных порядков, и поэтому нельзя быть уверенным, что „чувствительная окраска“, соответствующая переходу от красного или оранжевого к голубому или зеленому, в точности соответствует той же самой длине волны.

Другой причиной является то обстоятельство, что пластинка в „четверть волны“, применяемая для устройства кругового полярископа, является точно пластинкой в „четверть волны“ только для одной определенной длины волны. Для

других длин волн относительное запаздывание в слюдяной пластинке будет, вообще говоря, весьма заметно отличаться от четверти волны; поэтому свет этих длин волн, проходя через пластинку, не меняется от плоской к круговой поляризации (или обратно) и вычисления, которыми мы пользовались, не могут более применяться.

Подобное же устройство может быть применено и в случае плоского полярископа; если мы поставим анализатор и поляризатор параллельно и пренебрежем множителями уменьшения интенсивности света, то мы легко найдем для интенсивности поля

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left[\cos^2 \frac{\pi R}{\lambda} + \cos^2 2\varphi \sin^2 \frac{\pi R}{\lambda} \right] \\ &= I_0 \left[\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \cos^2 \frac{\pi R}{\lambda} \right], \end{aligned}$$

где R есть отставание.

Из этого следует: наименьшая интенсивность получается тогда, когда $R = \left(r + \frac{1}{2}\right) \lambda$ и полностью исчезает, когда $\varphi = \pi/4$. Поэтому изохроматические линии порядка $r + \frac{1}{2}$ видимы, но только в виде прерывистых линий. Они исчезают полностью вблизи изоклинических линий $\varphi = 0; \pi/2$ и ясно и хорошо очерчены вблизи изоклинических линий $\varphi = \pi/4; 3\pi/4$.

Однако при одновременном вращении поляризатора и анализатора изоклины движутся поперек поля, и изохроматические линии порядка $r + \frac{1}{2}$ могут быть нанесены на диаграмму; однако такой способ является гораздо более затруднительным методом, чем применение кругового поляризатора. Подобный метод был применен Вертгеймом (см. § 3.13) в случае равномерного давления, где конечно не встречается затруднений, так как поле является однородным.

§ 3.30. Компенсационный метод Кокера для определения разности главных напряжений в любой точке.

Хотя описанный выше способ наблюдения изохроматических линий и дает легкий прием их построения, он не дает возможности надежного определения параметров этих линий, т. е. величины разности главных напряжений, так как наблюдаемая чувствительная окраска зависит от смещения бесконечно большого числа цветов, имеющих каждый свою собственную интенсивность, зависящую от своего собственного оптического коэффициента напряжения, а последний, как мы видели, связан с длиной волны сложным законом, значительно изменяющимся для различных веществ.

Определение путем вычисления чувствительной окраски, соответствующей данной разности напряжений, было бы весьма сложной и сомнительной по результатам задачей, поскольку до сих пор нет надежного правила для суммирования действия света различных цветов.

Эмпирическая шкала цветов, подобная предложенной Ньютоном для его колец, могла бы быть выработана путем наблюдения над опытным образцом, изготовленным из идентичного материала и той же самой толщины, что и исследуемая пластинка под действием стандартных нагрузок. Это действительно и было принято Вертгеймом, предложившим „динамометр“, основанный на этом принципе.

Однако точная стандартизация цветов была бы затруднительна, и даже в случае ее осуществления процесс отождествления цветов несомненно был бы подвержен серьезным ошибкам вследствие личного уравнивания наблюдателя.

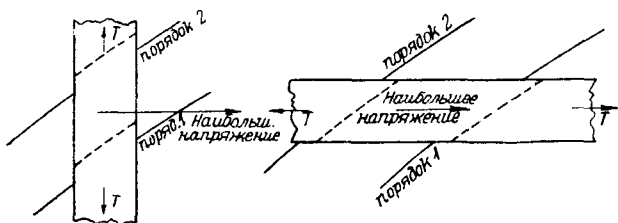
Метод компенсатора, описанный в § 3.15 и усовершенствованный Кокером, разрешает это затруднение. Опытный образец, который принят за компенсатор, сделан из того же самого материала и той же самой толщины, что и исследуемая пластинка (в действительности оба вырезаются из одной и той же пластинки); этот опытный образец помещается в особую рамку и может быть подвергнут любому заданному растяжению при помощи точных пружинных весов (см. главу VIII, § 8.04). Это конечно было бы трудно осуществимо при применении стекла, но материалы, применяемые для исследований всех технических моделей, неизменно являются органическими коллоидами (как, например, целлюлоид, ксилонит и бакелит), имеющими высокий оптический коэффициент напряжения, которыми можно пользоваться в виде сравнительно тонких пластинок, легко режущихся и просверливаемых инструментами и вследствие этого принимающих любую форму, поэтому их легко подвергнуть действию простого растяжения.

Определение разности напряжений в любой точке пластинки в таком случае проводится следующим образом.

Прежде всего компенсатор устанавливается так, что его длина параллельна одной из главных осей напряжения в пластинке; это направление предварительно определяется путем наблюдения изоклинических линий.

Наблюдаемое относительное отставание является тогда алгебраической суммой относительных отставаний, вызванных как пластинкой, так и компенсатором.

Если теперь установить компенсатор так, чтобы его длина была направлена по направлению наименьшего главного



Фиг. 3.30.

растяжения в пластинке, и подвергнуть компенсатор растяжению, то общее отставание будет равняться нулю, когда растяжение компенсатора равно разности главных растяжений в пластинке. В этом случае поле должно быть пересечено в наблюдаемой точке черной полосой.

Однако, если компенсатор установлен так, что его длина расположена вдоль оси наибольшего главного растяжения, то для получения того же результата необходимо подвергнуть компенсатор сжатию, что не всегда может быть осуществимо.

Простой опыт позволяет исследователю распознать эти два случая. Если мы начнем наш опыт с компенсатором, не подвергнутым действию напряжения, так что изохроматические линии пластинки видны через него неизменными, то, когда мы подвергнем компенсатор действию растяжения, будет казаться, что части изохроматических линий, видимые через компенсатор, смещаются от низшего к высшему порядку, в случае расположения оси компенсатора вдоль оси наименьшего растяжения, и от высшего к низшему порядку, — в случае расположения оси компенсатора вдоль оси наибольшего растяжения (фиг. 3.30).

Во втором случае, единственное, что требуется, если только компенсатор может быть подвергнут только действию растяжения, — это повернуть его на 90° . Затем растяжение увеличивается до тех пор, пока полоса нулевого порядка не будет доведена до рассматриваемой точки, — величина растяжения в компенсаторе тогда дает разность напряжений в пластинке.

Подобным же образом может быть применен также и обычный компенсатор Бабинэ. Однако, вследствие различия дисперсии двойного лучепреломления для кварца компенсатора Бабинэ и для материала пластинки, желательнее для большей точности применять монохроматический свет, и для определения полосы нулевого порядка необходима некоторая осторожность. Перемещением компенсатора Бабинэ в длину эта полоса нулевого порядка наводится на требуемую точку, и

относительное отставание тогда определяется из отсчета по компенсатору Бабинэ и кривой его градуирования. Однако, это предусматривает знание оптического коэффициента напряжения материала пластинки.

Раз только величина разности напряжения определена для какой-нибудь одной точки, лежащей на изохроматической линии, она известна для всех остальных точек этой изохроматической линии. Таким образом может быть проведено полное исследование величин главной разности напряжения по всей пластинке.

§ 3.31. Изменение напряжения по толщине.

В предшествующих рассуждениях предполагалось, что распределение напряжения в пластинке остается одинаковым повсеместно по всей толщине пластинки. Как было указано в § 2.26, а также совершенно очевидно из уравнений (3.2801) — (3.2803), это предположение будет обычно только приблизительным. Однако при условии, что *направления* действующих главных напряжений \widehat{pp} , \widehat{qq} в плоскости, параллельной x , y , остаются постоянными во всех точках пластинки, общее относительное отставание является просто алгебраической суммой элементарных отставаний при прохождении через различные слои и выражается через

$$\rho = C \int_{-c}^{+c} (\widehat{pp} - \widehat{qq}) dz = 2c C (P - Q),$$

где P и Q , как и раньше, обозначают главные *средние* напряжения в плоскости пластинки, потому что они являются тогда средними из действительных главных напряжений, что конечно перестает быть, вообще говоря, правильным, если направления главного напряжения изменяются при прохождении через пластинку.

Полученные уже нами выводы все же будут иметь силу, но только при условии, что мы можем пренебречь изменением направлений главного напряжения в направлении z .

Если мы обратимся к уравнениям (3.2801), (3.2802) и (3.2803) и припомним уравнения § 2.24, выражающие \overline{xx} , \overline{yy} , \overline{xy} через функцию χ среднего напряжения, то условие, необходимое для того, чтобы линии главного напряжения имели направление, не изменяющееся по всей толщине пластинки, будет иметь вид

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla^2 \chi)}{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \chi} = \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 \chi}{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi}, \quad (3.310)$$

условие, которое, вообще говоря, не удовлетворяется. Однако члены, влияющие на отклонение линий главного напряжения, малы, за исключением случая, когда $\overline{xx} = \overline{yy}$, $\overline{xy} = 0$, при котором направления главного напряжения, полученные по средним напряжениям, являются неопределенными. Однако в этих точках уравнения (3.2801) — (3.2803) показывают, что

$$\frac{2\overline{xy}}{\overline{xx} - \overline{yy}} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\overline{xx} + \overline{yy}) \left/ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\overline{xx} + \overline{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{xx} + \overline{yy}) \right) \right., \quad (3.311)$$

так что случай, рассмотренный выше, осуществляется в точности, поскольку направления главного напряжения являются независимыми от z .

Точно так же в этом случае $\widehat{pp} - \widehat{qq}$ имеет вид $(z^2 - c^2/3) \times$ (функция от x, y); таким образом, так как среднее значение $z^2 - c^2/3 = 0$, общее отставание равняется

в точности 0, и свойство особенной точки соответствовать черному пятну сохраняется вполне. С другой стороны, утверждение, что все *изоклины* будут проходить через эту точку, уже не будет вполне правильно, так как направления поляризации в непосредственном соседстве с этой точкой имеют ограниченную величину, определяемую уравнением (3.311).

Однако в обыкновенных точках, где изменение направлений главного напряжения по толщине пластинки является незначительным, приближительная поправка может быть получена следующим образом.

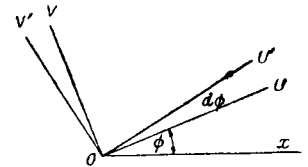
Предположим, что OU, OV (фиг. 3.31) — направления главного напряжения в слое, находящемся на расстоянии z от средней плоскости пластинки, и предположим, что OU расположено под углом φ по отношению к оси x .

Предположим, что составляющие светового вектора вдоль этих направлений будут соответственно

$$u = a \sin(pt - \varepsilon_1) \quad v = b \sin(pt - \varepsilon_2), \tag{3.312}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ суть отставания по фазе, выраженные в радианах. На расстоянии $z + dz$ в том же самом слое составляющие светового вектора будут

$$\left. \begin{aligned} u &= a \sin \left(pt - \varepsilon_1 - \frac{2\pi}{\lambda} n_1 dz \right) \\ v &= b \sin \left(pt - \varepsilon_2 - \frac{2\pi}{\lambda} n_2 dz \right) \end{aligned} \right\} \tag{3.313}$$



Фиг. 3.31.

где λ есть длина волны в воздухе и n_1, n_2 — показатели преломления двух волн в рассматриваемой точке.

Пусть теперь волны падают на слой, главные оси OU', OV' которого образуют угол $d\varphi$ с OU, OV .

Пренебрегая изменениями интенсивности, вызываемыми отражением при переходе от одного слоя к другому, что является допустимым предположением в этом случае, когда среда является действительно сплошной, мы находим путем простого вычисления с точностью до величин первого порядка малости

$$\begin{aligned} &(a + da) \sin(pt - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1) = \\ &= a \sin \left(pt - \varepsilon_1 - \frac{2\pi}{\lambda} n_1 dz \right) + b \sin \left(pt - \varepsilon_2 - \frac{2\pi}{\lambda} n_2 dz \right) d\varphi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &da \sin(pt - \varepsilon_1) - ad\varepsilon_1 \cos(pt - \varepsilon_1) = \\ &= b \sin(pt - \varepsilon_2) d\varphi - \frac{2\pi a}{\lambda} n_1 \cos(pt - \varepsilon_1) dz, \end{aligned}$$

и подобным же образом

$$\begin{aligned} &db \sin(pt - \varepsilon_2) - bd\varepsilon_2 \cos(pt - \varepsilon_2) = \\ &= -a \sin(pt - \varepsilon_1) d\varphi - \frac{2\pi b}{\lambda} n_2 \cos(pt - \varepsilon_2) dz. \end{aligned}$$

В первом из этих уравнений напомним

$$\sin(pt - \varepsilon_2) = \sin(pt - \varepsilon_1) \cos \rho + \cos(pt - \varepsilon_1) \sin \rho,$$

где $\rho = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и является относительным отставанием по фазе; затем, приравни-

вая коэффициенты у $\sin(pt - \varepsilon_1)$ и $\cos(pt - \varepsilon_1)$ в обеих сторонах уравнения, мы имеем

$$da = b \cos \rho \, d\rho, \quad (3.3141)$$

$$ad\varepsilon_1 = -b \sin \rho \, d\rho + \frac{2\pi a}{\lambda} n_1 \, dz. \quad (3.3142)$$

Поступая подобным же образом со вторым уравнением и положив

$$\sin(pt - \varepsilon_1) = \sin(pt - \varepsilon_2)\cos \rho - \cos(pt - \varepsilon_2)\sin \rho,$$

мы находим

$$db = -a \cos \rho \, d\rho, \quad (3.3151)$$

$$bd\varepsilon_2 = -a \sin \rho \, d\rho + \frac{2\pi b}{\lambda} n_2 \, dz. \quad (3.3152)$$

Из уравнений (3.3141) и (3.3151) следует, что

$$a \, da + b \, db = 0,$$

или

$$a^2 + b^2 = \text{const},$$

что согласуется с нашим предположением, что потери света здесь не происходит.

Если мы положим $a = k \cos \gamma$, $b = k \sin \gamma$, уравнения (3.3141) и (3.3151) приводят к

$$d\gamma = -\cos \rho \cdot d\rho, \quad (3.316)$$

а из уравнений (3.3142) и (3.3152), разделив на a и b и вычитая, получаем

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = d\rho = 2 \operatorname{ctg} 2\gamma \cdot \sin \rho \cdot d\rho + \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) \, dz. \quad (3.317)$$

Эти два уравнения являются дифференциальными уравнениями для ρ и γ .

Точное их решение было бы весьма затруднительным, но приближенное решение приводит к полезным выводам.

Прежде всего мы заметим, что

$$n_1 - n_2 = C \sqrt{(\widehat{xx} - \widehat{yy})^2 + 4\widehat{xy}^2};$$

применяя формулы (3.2801), (3.2802) и (3.2803) и разлагая в ряд по степеням (обычно малой) величины $z^2 - c^2/3$, мы находим

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 = & C \sqrt{(\widehat{xx} - \widehat{yy})^2 + 4\widehat{xy}^2} + \\ & + \left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right) W_1(x, y) + \left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right)^2 W_2(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (3.318)$$

где W_1, W_2, \dots являются функциями от x, y , которые нет надобности здесь выписывать. Приведенный выше образ действия обычно является вполне допустимым, при условии, что мы не находимся в непосредственной близости к особой точке.

Так как

$$\int_{-c}^{+c} (z^2 - c^2/3) \, dz = 0,$$

то, пренебрегая квадратами и высшими степенями $z^2 - c^2/3$ и интегрируя уравнения (3.316) и (3.317) по z вдоль толщины пластинки, мы имеем

$$\rho_c = \frac{2\pi}{\lambda} C \sqrt{(xx-yy)^2 + 4xy^2} \times 2c + \int_{-c}^{+c} 2 \operatorname{ctg} 2\gamma \sin \rho \frac{d\varphi}{dz} dz, \quad (3.3191)$$

$$\gamma_c - \gamma_{-c} = - \int_{-c}^{+c} \cos \rho \frac{d\varphi}{dz} dz. \quad (3.3192)$$

При вычислении интегралов в уравнениях (3.3191) и (3.3192) достаточно будет взять для ρ его приближенное значение, а именно

$$\frac{2\pi C(z+c)}{\lambda} \sqrt{(xx-yy)^2 + 4xy^2}.$$

Если точка (x, y) , в которой производится наблюдение, лежит на изохроматической линии целого порядка, так что при выходе ρ_c в точности равно $2r\pi$, то тогда приближенно $\rho = r\pi$, когда $z=0$ и $\cos \rho$ является симметричным по ту и другую сторону средней плоскости $z=0$.

Из формы уравнений (3.2801), (3.2802) и (3.2803) также очевидно, что φ является четной функцией z , так что $\frac{d\varphi}{dz}$ является нечетной по отношению к z , и

поэтому $\gamma_c - \gamma_{-c} = 0$. Таким образом γ остается тем же самым при входе и по выходе и волна при выходе имеет те же характеристики, как и при входе, так что при скрещенных анализаторе и поляризаторе мы имеем темноту (потухание). Этим объясняется то явление, что изохроматические линии в однородном свете являются резко очерченными и черными.

В этом случае $\sin \rho$ имеет противоположные знаки по обе стороны от средней плоскости и $\sin \rho \frac{d\varphi}{dz}$ будет симметричным. Так как 2γ будет очевидно постоянным, интеграл в уравнении (3.3191) будет обычно давать поправку первого порядка, если только γ не равняется $\frac{\pi}{4}$, когда ось поляризатора расположена под равными углами к линиям главного напряжения. Вращая образец, мы можем осуществить это условие в любой желаемой точке на изохроматической линии. С другой стороны изменение γ меняет второй член в ρ_c и таким образом должно вызвать легкое перемещение изохроматической линии. Если подобного перемещения не наблюдается, то это является прекрасным оправданием того, что изменением распределения напряжения поперек пластинки можно пренебречь.

Что касается изоклинических линий, то они соответствуют $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi/2$, и в этом случае примененный метод решения задачи требует изменения.

В этом случае v и b во всех точках малы и в первом приближении a можно считать постоянным.

Если u' , v' составляющие светового вектора при входе в слой, где оси поляризации (фиг. 3.31) OU' , OV' и u , v соответствующие составляющие при выходе из слоя, где оси поляризации OU , OV , то мы имеем

$$u' = u, \\ v' = v - u d\varphi,$$

при прохождении светом толщины dz в каждом члене выражения для v уменьшается на $\frac{2\pi n_2}{\lambda} dz$; в то же время при прохождении толщины dz во всех членах

выражение для u и pt уменьшается на $\frac{2\pi n_1}{\lambda} dz$.

Отсюда, если первоначально $v = v_0(pt)$ и $u = u_0(pt)$, когда $z = -c$, мы находим

$$v(\zeta) = v_0 \left(pt - \int_{-c}^{\zeta} \frac{2\pi n_2}{\lambda} dz \right) - \int_{-c}^{\zeta} u_0 \left(pt - \int_{-c}^z \frac{2\pi n_1}{\lambda} dz - \int_z^{\zeta} \frac{2\pi n_2}{\lambda} dz \right) d\varphi. \quad (3.3193)$$

Введем сокращенные обозначения

$$\varepsilon_1(z) = \int_{-c}^z \frac{2\pi n_1}{\lambda} dz, \quad \varepsilon_2(z) = \int_{-c}^z \frac{2\pi n_2}{\lambda} dz, \quad \rho(z) = \varepsilon_1(z) - \varepsilon_2(z),$$

так что ε_1 , ε_2 , ρ приближенно (хотя не совсем точно) соответствуют их предшествовавшим значениям; уравнение (3.3193) принимает вид

$$v(\zeta) = v_0 \{ pt - \varepsilon_2(\zeta) \} - \int_{-c}^{\zeta} u_0 \{ pt - \varepsilon_2(\zeta) - \rho(z) \} d\varphi,$$

и, в частности, если $\zeta = c$,

$$v(c) = v_0(pt - \varepsilon_2) - \int_{-c}^{+c} u_0 \{ pt - \varepsilon_2 - \rho(z) \} d\varphi,$$

причем вместо $\varepsilon_1(c)$, $\varepsilon_2(c)$ для краткости написано ε_1 и ε_2 , так что они соответствуют разностям фаз для всей толщины.

Если падающий свет будет плоско-поляризованным под азимутом, составляющим малый угол $\text{arctg}(b/a)$ с линией OU_0 главного напряжения в плоскости $z = -c$, то

$$u_0 = a \sin pt, \quad v_0 = b \sin pt,$$

так что при выходе

$$\begin{aligned} u &= a \sin(pt - \varepsilon_1), \\ v &= b \sin(pt - \varepsilon_2) - a \int_{-c}^{+c} \sin[pt - \varepsilon_2 - \rho(z)] d\varphi = \\ &= b' \sin(pt - \varepsilon_2 + \eta), \end{aligned}$$

где

$$b' \cos \eta = b - a \int_{-c}^{+c} \cos \rho(z) d\varphi,$$

$$b' \sin \eta = a \int_{-c}^{+c} \sin \rho(z) d\varphi.$$

Вообще говоря, ни $\int_{-c}^{+c} \cos \rho(z) d\varphi$, ни $\int_{-c}^{+c} \sin \rho(z) d\varphi$ не исчезают вдоль изо-

клинической линии, но так как изменение φ предполагается малым, оба эти интеграла также малы, так что, пользуясь отношением b/a , т. е. вращая незначительно *поляризатор*, возможно придать η любую требуемую величину и в частности сделать $\eta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. В этом случае выходящий свет будет плоско-поляризованным в азимуте, составляющем угол $\text{arctg}(b'/a)$ с линией OU главного напря-

жения при выходе, а эта линия по симметрии параллельна соответствующей линии главного напряжения при входе.

Вращая анализатор на небольшой угол так, чтобы расположить его ось под прямым углом к плоскости поляризации выходящего света, можно получить полное потухание, но анализатор и поляризатор теперь уже не будут расположены точно под прямыми углами.

Такую установку в данный момент можно произвести только в одной отдельной точке изоклины.

Опыт показывает, что в некоторых случаях небольшие вращения николей действительно усиливают черноту изоклинических линий, но количественной систематической проверки этого не было сделано.

§ 3.32. Начальное напряжение. Его влияние на искусственное двойное лучепреломление.

Когда стекло в расплавленном состоянии подвергается быстрому охлаждению, оно дает при исследовании в полярископ в холодном состоянии цветные полосы, весьма похожие по форме и по оттенку на полосы, даваемые стеклом или другими прозрачными материалами, находящимися под напряжением. Исчезновения этих цветных полос можно достичь путем нагревания стекла до температуры, несколько nižшей, чем температура размягчения — процесс, известный под названием *отжига*. Брюстеру и позже Максвеллу было хорошо известно это свойство двойного лучепреломления „неотожженного“ стекла, и Максвелл¹ разработал примерные кривые и цвета, наблюдаемые в различных случаях при определенных условиях охлаждения. Нейманн в своей работе в 1841 г. дал теорию этого явления.

На практике было обнаружено, что подобное двойное лучепреломление в некоторой степени существует не только в стекле, но и в таких веществах, как целлюлоид и бакелит,² значительно изменяясь по своей величине в зависимости от обстоятельств. В тех случаях, когда требуется большая точность, необходимо произвести предварительное измерение (компенсатором Бабинэ или каким-нибудь другим компенсатором), чтобы определить направление осей постоянной поляризации и величину двойного лучепреломления в каждой рассматриваемой точке. Если мы обозначим через P_0 , Q_0 , S_0 (предполагаемое) внутреннее напряжение, вызывающее остаточное двойное лучепреломление, через φ_0 — угол между осями поляризации для остаточного двойного преломления и координатными осями и через r_0 остаточное относительное отставание, тогда мы имеем, обозначая через d толщину

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2S_0}{P_0 - Q_0}, \quad r_0 = Cd \sqrt{(P_0 - Q_0)^2 + 4S_0^2}, \quad (3.320)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} 2S_0 &= \frac{r_0}{Cd} \sin 2\varphi_0 \\ P_0 - Q_0 &= \frac{r_0}{Cd} \cos 2\varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.321)$$

Если теперь на это напряжение накладывается действующее напряжение (P , Q , S), то получается

$$2(S + S_0) = \frac{r}{Cd} \sin 2\varphi, \quad (3.3221)$$

$$P - Q + P_0 - Q_0 = \frac{r}{Cd} \cos 2\varphi, \quad (3.3222)$$

где r — отставание и φ — азимут осей поляризации.

¹ Maxwell, Trans. R. S. Edin. 20, 1853, 117.

² I. Arakawa, On the Determination of the Stress-optical Coefficient of Bakelite with initial stress. Proc. Physico-Math. Soc. of Japan, Ser. III, 5, 1923, 117 — 36.

Отсюда, путем вычитания получаем формулы

$$2S = \frac{r \sin 2\varphi - r_0 \sin 2\varphi_0}{Cd}, \quad (3.3231)$$

$$P - Q = \frac{r \cos 2\varphi - r_0 \cos 2\varphi_0}{Cd}, \quad (3.3232)$$

определяющие S и $P - Q$, как и прежде.

Если (r', φ') будут величинами r, φ с поправкой на начальное напряжение, т. е. теми, которые мы получили бы на этом же самом месте, если бы пластинка была отожжена в совершенстве; мы легко находим из равенств

$$2S = (r' \sin 2\varphi')/Cd; \quad P - Q = (r' \cos 2\varphi')/Cd,$$

что

$$(r')^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos 2(\varphi - \varphi_0), \quad (3.3241)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi' = \frac{r \sin 2\varphi - r_0 \sin 2\varphi_0}{r \cos 2\varphi - r_0 \cos 2\varphi_0}. \quad (3.3242)$$

Для избежания этого явления в большинстве случаев достаточно ограничиться при исследовании напряжения такими материалами, как хорошо отожженное стекло или отборные образцы целлюлоида; некоторые из этих образцов могут быть получены почти совершенно свободными от напряжения. Для большинства случаев несовершенных образцов r_0 будут малыми и поправки $r' - r$ и $\varphi' - \varphi$ тогда легко получить из уравнений (3.3241) и (3.3242).

В бакелите начальное напряжение может быть столь большим, что оно делает r_0 равным нескольким длинам волны. В этом случае необходимо вычислять точную поправку; далее определение порядка наблюдаемой полосы в таком случае может представить затруднения. Благодаря сильной оранжевой окраске этого материала при пользовании белым светом, обычная шкала цветов не дает указаний и даже нельзя различить центральную черную полосу.

В этом случае, применяя компенсатор Бабинэ или какой-либо другой компенсатор, необходимо часть рассматриваемого образца сфокусировать на щель спектроскопа, как показано на фиг. 3.19. Затем винт компенсатора поворачивается до тех пор, пока полоса, видимая в спектре, не станет столь рассеянной, что затемнит почти-что весь спектр. Обычно она не будет затемнять *весь* спектр, благодаря разнице между дисперсией при двойном лучепреломлении в образце и дисперсией в компенсаторе. Однако, если компенсатор типа Кокера, т. е. сделан из полосы того же материала, что и образец, то компенсация будет полной; но это не является действительно необходимым.

Когда вышеприведенное явление имеет место, полоса приводится к нулевому порядку и по заранее известной градуировке компенсатора можно определить ее первоначальный порядок. Однако этот метод должен применяться с осторожностью в тех случаях, где закон дисперсии двойного лучепреломления в исследуемом материале имеет аномальный характер.¹

§ 3.33. Причины, вызывающие начальное напряжение.

Все первые исследователи предполагали, и это убеждение сохранилось до самого последнего времени, что это „начальное“ напряжение в неотожженном стекле (и также в других материалах) имеет своей причиной неравномерное охла-

¹ См. § 3.34; также *S. R. Savur*, On the Stress-Optical Effect in Permanently Overstrained Celluloid, *Roy. Soc. Proc. A*, **109**, 1925, 338 — 50.

ждение различных частей стекла, сцепление между которыми затем вызывает внутренние упругие напряжения, которые в свою очередь вызывают наблюдаемое двойное лучепреломление.

Неизбежно, что во многих случаях это явление должно происходить и некоторые из наблюдаемых цветных оттенков несомненно вызваны этой причиной. Но если бы это было только единственным объяснением, то напряжения, о которых мы говорим, должны были бы следовать законам статического равновесия, т. е. составляющие \overline{xx}_0 , \overline{yy}_0 , \overline{xy}_0 среднего „остаточного“ напряжения должны были бы удовлетворять обычным уравнениям напряжения в теле, выражающим условия статического равновесия

$$\frac{\partial \overline{xx}_0}{\partial x} + \frac{\partial \overline{xy}_0}{\partial y} = 0, \quad (3.331)$$

$$\frac{\partial \overline{xy}_0}{\partial x} + \frac{\partial \overline{yy}_0}{\partial y} = 0. \quad (3.332)$$

В частности, если мы имеем пластинку неотожженного стекла, наружная поверхность которой совершенно свободна от напряжений, то „начальные“ напряжения в любом сечении должны согласно этой гипотезе привести к системе сил, находящихся в статическом равновесии.

Это предположение обычно и делалось, ввиду того что различить отдельные напряжения в каждом данном случае представляет некоторые затруднения, так как оптическое наблюдение непосредственно дает только *разность* главных напряжений.

Однако в § 2.30 был детально описан метод, которым можно получить графически оба напряжения непосредственно из изохроматических и изоклинических линий. Файлон и Харрис¹ применяли этот метод к кускам флинтгласа, подвергавшимся нагреванию до 400°С, а затем охлаждению при действии значительного сжатия в продольном направлении. Было найдено, что результаты, полученные оптическим путем, указывали на наличие явного напряжения по некоторому поперечному сечению; это напряжение по своей природе являлось сжатием по всему этому сечению, и поэтому невозможно, чтобы оно могло вестись к системе сил, находящихся в состоянии равновесия, поскольку поверхность образца была свободна от напряжения.

Другое стекло со значительно большим процентным содержанием свинца дало весьма сходные результаты, отличаясь только тем, что кажущееся напряжение по сечению было *растяжением*.

Очевидно, что результаты, полученные оптическим путем, не представляют полной картины напряжения в материале потому, что полное действительное напряжение должно удовлетворять законам статики.

Файлон и Харрис объясняют полученные ими результаты предположением, что стекло не является гомогенным веществом, но по своей природе является тем, что в химии называется дисперсоидом или коллоидом, т. е. сложным веществом, аналогичным раствору, где частицы одного составляющего вещества рассеяны между частицами другого. Если эти два составляющих вещества имеют различную упругость и смесь затвердевает, подвергаясь действию сжатия, то после охлаждения снятие нагрузки повлечет за собой натяжения в обоих составляющих веществах (или *фазах*, на физико-химическом языке), причем одно составляющее вещество будет в состоянии растяжения, в то время как другое — сжатия. Если оба составляющих вещества имеют один и тот же оптический коэффициент напряжения, то вызванное среднее отставание будет равняться нулю, так что эти напряжения не будут видны. Но если составляющие вещества имеют различные оптические

¹ *Filon and Harris, On the Diphasic Nature of Glass, as shown by Photo-elastic Observations, Roy. Soc. Proc. A, 103, 561 — 71.*

коэффициенты напряжения, то один из них будет преобладать над другим и приведет к заметному отставанию лучей, объяснявшемуся старой теорией как отдельно существующее напряжение в гомогенном материале.

Следует отметить, что теория в таком виде включает в себе предположение, что рассеянные частицы (или рассеянные фазы) велики по сравнению с длиной волны света. Существует другая теория, которая будет изложена позже, предполагающая, что рассеянные частицы малы по сравнению с длиной волны; какую бы теорию мы ни приняли, очевидно, что мы больше не можем рассматривать стекло как действительно гомогенное вещество, но должны рассматривать его как нечто, по природе своей близкое к (твердому) раствору или эмульсии.

Во всяком случае вопрос о возникновении „начальных“ внутренних напряжений в прозрачном теле стал значительно более сложным, чем раньше, и даже смысл, связываемый с термином „начальное напряжение“, стал сомнительным. Действительно, теперь нет причины для того, чтобы кажущиеся начальные напряжения удовлетворяли бы уравнениям (3.331) и (3.332); таким образом метод, примененный Файлоном и Харрисом для доказательства того, что кажущиеся первоначальные напряжения не следуют законам статики, этим отрицательным результатом сам себя опровергает и не может быть применен для распознавания действительно существующих напряжений в отдельных фазах.

Однако, кажется вероятным, что уравнения (3.321) § 3.32 продолжают оставаться в силе, с измененным толкованием $P_0 - Q_0$ и $2S_0$.

Недавно Окуда¹ наблюдал охлаждение полос стекла под действием растяжения и подтвердил наличие остаточного двойного лучепреломления при этих обстоятельствах. Остаточное двойное лучепреломление обнаруживало в каждом случае явное растяжение, но (химический) состав стекла не указан. Было найдено, что результат является независимым от скорости нагревания и охлаждения и порядка применения нагревания и напряжения, так как остаточное двойное лучепреломление было пропорционально приложенной нагрузке и зависело от нее и от достигнутой наивысшей температуры. Дальнейшее повторение этого процесса не влияло на остаточное двойное лучепреломление. Окуда также нашел, что остаточное двойное лучепреломление совершенно исчезало, когда (ненагруженный) образец, служивший для сравнения, вновь нагревался до наивысшей температуры цикла нагревания и охлаждения, которому этот образец предварительно подвергался под действием нагрузки.

§ 3.34. Остаточное напряжение. Оптическое последствие при разгрузке.

При опытах со стеклом и другими веществами, подвергаемыми действию различного вида напряжений, часто замечается, что если приложенные нагрузки были значительны, то между скрещенными николями свет продолжает быть видимым и после снятия нагрузки. В большинстве случаев этот свет с течением времени постепенно и исчезает.

В тех случаях, когда распределение напряжений не является однородным, — как например случай изгиба бруса или работы пластинки под действием местного непосредственного давления на ее край, — это явление может быть легко объяснено в значительной степени тем же способом, как и явление двойного лучепреломления в неотожженном стекле. Некоторые части образца, напряжение в которых является наибольшим, были перенапряжены временно или постоянно, и поэтому при удалении нагрузки они не приобретают вновь своих первоначальных размеров.

Окружающие же части, которые не подвергались перенапряжению и остались (вследствие этого) упругими, стремятся, по удалении нагрузки, полностью восстановить свое прежнее состояние. Но в этом им препятствуют части образца, подвергшиеся перенапряжению, и вследствие этого получается некоторое приспособление одних частей к другим, вызывающее систему внутренних напряжений в материале.

¹ *Katumi Okuda*, Effect of Temperature on the Stress-optical Behaviour of Glass, Mem. Coll. Eng. Kyushi Imp. Univ. (Japan), 4, 1927, 159—91.

Очевидно, что в данном случае не получается какого-либо действительно нового явления, и что все это явление является следствием несовершенной упругости образца — свойства, весьма хорошо известного. Вопросы о соотношении между оптическим явлением и физическим состоянием материала не возникает.

Однако, дело обстоит совсем иначе, когда явление подобного характера наблюдается в материале, подвергавшемся *однородному* напряжению, например простому продольному растяжению или сжатию. В этом случае каждая часть образца подвергается напряжению и деформируется в совершенно той же степени, как и другие, и если весь образец является в достаточной мере однородным, то нет основания предполагать, что восстановление будет неодинаковым в различных частях, а поэтому нет и причины для возникновения внутреннего напряжения при удалении нагрузки. Если при подобных обстоятельствах все же наблюдается явление оптического последствия, то несомненно, что оно вызвано некоторым изменением во внутренней структуре материала.

Наиболее ранние количественные наблюдения такого последствия, которые мы могли найти, принадлежат Бьеркену.¹ Бьеркен наблюдал резину и образцы из желатина различной концентрации под действием растяжения. Он нашел, что для желатина отставание лучей было пропорционально не *напряжению*, но *деформации*; далее он нашел, что имело место значительное медленное нарастание под действием постоянной нагрузки как в отношении деформации, так и оптического явления, и что и деформация, и оптическое явление давали после снятия нагрузки, кроме частичного восстановления, постоянный остаточный эффект.

В 1904 г. Лейк² предпринял изучение желатина и подтвердил вывод Бьеркена, что оптическое явление пропорционально *деформации*, а не *напряжению*, но, повидимому, он особо не исследовал вопроса о медленном нарастании явления с течением времени.

Весьма важная серия опытов была проведена Росси в 1910 г.³ Росси изучал пластинки резины, желатина, целлюлоида и стекла — первые три под действием простого растяжения и четвертое — под действием простого сжатия. В случае резины и стекла он нашел строгую пропорциональность между *напряжением* и оптическим явлением, двойное лучепреломление исчезло, как только нагрузка была удалена. *Деформация* (несомненно для резины и весьма вероятно для стекла) обнаруживала значительное отклонение от закона Гука. Этот результат для стекла подтверждается старым одиночным наблюдением Файлона,⁴ который, наблюдая своим методом спектроскопа стержни под действием изгиба (см. § 3.19), заметил, что при очень больших нагрузках некоторое определенное стекло давало заметную кривизну полосы, пересекающей спектр, причем эта полоса принимала почти V-образную форму непосредственно перед разрывом, происходившим действительно внезапно. Так как известно, что под действием изгиба без сдвига *деформация* изменяется линейно, при любых взаимоотношениях между напряжением и деформацией в материале, то это наблюдение показывает, что оптическое отставание лучей, конечно, не могло быть строго пропорциональным деформации, и Файлон доказал, что наблюдаемая кривая была в качественном отношении такой, какую следует ожидать, предполагая, что оптическое явление зависит только от напряжения.

Результаты, полученные Росси для стекла, были подтверждены независимым путем несколько лет спустя Файлоном и Джессопом⁵ и повидимому не приходится сомневаться, что для стекла, во всяком случае при обыкновенных температурах, в основном физически связаны между собою оптическое явление и *напряжение*;

¹ P. von Bjerkén, Ann. d. Physik, Ser. III, 43, 1891, 808—16.

² Leick, Ann. de Physik, Ser. IV, 14, 1904, 139—52.

³ Paolo Rossi, Napoli Accad. Sci. Rendiconto, Ser. III, 16, 125—34, 142—51, 181—92, 206—15; 17, 207—12.

⁴ Filon, Phil. Trans. A, 207, 303—5.

⁵ Filon and Jessop, Phil. Trans. A, 223, стр. 91—2.

но не оптическое явление и деформация, как, следуя за Нейманном, продолжает предполагать большинство германских исследователей.

Однако, в случае желатина и целлюлоида Росси нашел, что значительное относительное отставание все еще наблюдается при разгрузке.

При желатине дело весьма усложнилось тем обстоятельством, что двойное лучепреломление повидимому вызывается усыханием, причем этот последний процесс происходит весьма быстро. Росси частично устранил это путем прибавления глицерина к желатину, что в значительной степени уменьшало испарение. Все же он нашел при разгрузке остаточное отставание лучей. Росси предлагает искать объяснения разницы в свойствах желатина и каучука в этом отношении в том обстоятельстве, что в желатине можно предполагать сложную структуру, и приводит мнение Квинкэ,¹ что природа этого вещества сходна с эмульсией, причем стенки ячеек состоят из более концентрированного раствора, а промежутки между ними заполнены более разбавленным раствором. Если это объяснение является правильным, то поведение желатина в процессе усыхания должно быть строго аналогичным поведению стекла вблизи температуры размягчения, отмеченному в предыдущем параграфе, причем внутренняя разница напряжений между двумя фазами фиксируется при затвердевании.

Следует отметить, что в противоположность тому, что имеет место в стекле и каучуке, оптическое явление в желатине повидимому почти пропорционально действительной *деформации*. Что оно не может быть пропорциональным напряжению, очевидно из того обстоятельства, что остаточное отставание существует, когда напряжение равно нулю. Однако при рассмотрении полученных результатов следует признать, что этот закон пропорциональности является весьма приближенным. Это подтверждают предыдущие работы Бьеркена и Лейка (loc. cit.).

В случае целлюлоида вопроса о „высыхании“ не возникает, и здесь Росси нашел то, что Файлон и Джессоп² подтвердили для ксилонита, а именно, что остаточное оптическое явление *постепенно исчезает с течением времени*.

С другой стороны Амбронн³ и недавно Вехтлер⁴ нашли, что постоянное двойное лучепреломление возникает в целлюлоиде при нагрузке его за предел упругости; Вехтлер в частности исследовал два вида (типа) материалов: один (А), содержащий нитроцеллюлозу и камфару, и другой (В), в котором камфара была заменена ксиолом.

Вехтлер утверждает, что в целлюлоиде типа (А) знак остаточного двойного лучепреломления в действительности изменяется на обратный, при увеличении постоянной нагрузки за предел упругости; при этом положении точка перемены знака изменяется в зависимости от цвета и соответствует при зеленом свете постоянному удлинению в 15%. Фиг. 3.34 представляет кривые из работы Вехтлера, причем кривые, обозначенные 1, 2, 3, соответственно относятся к длинам волны света в 6500, 5460 и 4360 Å. Для целлюлоида типа (В) Вехтлер не обнаружил подобного изменения знака. Исходя из этого замечательного результата для целлюлоида типа (А), Вехтлер (loc. cit.) возражает против применения моделей, сделанных из целлюлоида, при исследовании напряжений, но вряд ли это возражение является основательным, так как наибольшие действительные деформации при подобных исследованиях напряжений почти никогда не превышают 2 и 3% и постоянные деформации конечно много меньше.

Помимо этого, недавние опыты Сэвора⁵ вызвали сомнение в точности выводов

¹ Quincke, Ann. d. Physik, Ser. IV, 15, 1904, стр. 30 и след.

² Filon and Jessop, On the stress-optical effect in transparent solids strained beyond the elastic limit. Phil. Trans. A, 223, 1923, 89—125.

³ H. Ambronn, Berichte d. kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften (Leipzig) (Math. Phys. KV.), 18, 1911, 249—57, 402—6.

⁴ Wächtler, Eine Bemerkung über die optischen Methoden zur Prüfung von Materialbeanspruchungen insbesondere bei Verwendung von Zelluloid, Zeitschr. f. techn. Physik, 5, 1924, 418—23.

⁵ R. Savor, On the Stress-Optical Effect in permanently-Overstrained Celluloid, Roy. Soc. Proc. A, 109, 1925, 338—50.

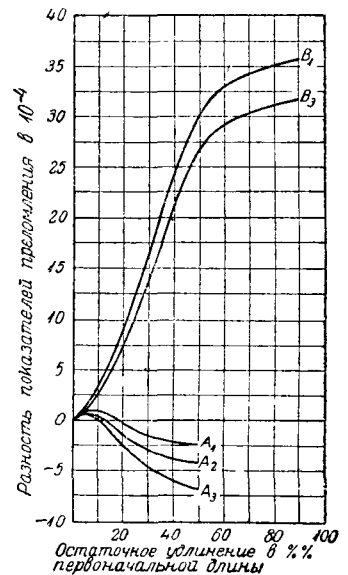
Амбронна и Вехтлера. Сэвор, работая над ксилонитом, являющимся целлюлоидом, содержащим камфару и поэтому вероятно приближающимся по типу к целлюлоиду типа (А) Вехтлера, не нашел никаких указаний на перемену знака постоянного двойного лучепреломления, вызванного нагрузкой, превышающей предел упругости. С другой стороны он нашел (и это согласуется с уже приведенными результатами Рамспека), что закон дисперсии этого двойного лучепреломления при увеличении постоянной деформации постепенно становится аномальным, а именно, разность показателей преломления не только увеличивается от фиолетового цвета к красному, но увеличивается скорее, чем длина волны, так что естественная последовательность цветов в полярископе изменяется на обратную. Сэвор предполагает, что это явление ввело в заблуждение Амбронна и Вехтлера и послужило причиной того, что они в своих опытах за полосу, соответствующую нулевому отставанию, приняли полосу, нейтральную по цвету, получающуюся вследствие этой аномалии дисперсии. На основе этого предположения он весьма хорошо воспроизвел кривые для (целлюлоида) типа (А) на фиг. 3.34, исходя из видимого (но ошибочного) нуля.

Следует отметить, что сам Рамспек в упомянутой уже работе¹ выразил сомнение в этом направлении (а именно): не может ли ошибка в целом кратном числе длин волны влиять на его запаздывания. Однако он придерживается взгляда, что это обратное явление действительно существует и, таким образом, он рассматривает свои опыты как подтверждающие заключение Вехтлера. Если эта точка зрения правильна, то следует предположить, что целлюлоид, применявшийся этими германскими исследователями, является материалом, существенно отличным от ксилонита, обычно нами применяемого для исследований по оптическому методу. Такому ксилониту обычно перед употреблением дается возможность созреть в течение нескольких лет и камфары в течение этого времени может в значительной степени улетучиться. Файлон и Джессоп (см. § 3.36) находят, что время не влияет на свойства этого материала в отношении двойного лучепреломления.

Причины этого „остаточного“ двойного лучепреломления до сих пор не ясны, но кажется весьма вероятным, что оно вызывается каким-то взаимодействием двух „фаз“ подобно воображаемому начальному напряжению, наблюдаемому в стекле, охлаждаемом под действием нагрузки. Амбронн и германская школа объясняют это явление теорией, которая будет приведена в § 3.38.

Но это явление можно равным образом хорошо объяснить теорией, приведенной в § 3.33 для результатов, полученных Файлоном и Харрисом, предполагающей, что частицы рассеянной фазы все еще являются упругими, в то время как окружающая фаза уже перешла за ее критическую точку (предел текучести) и растягивается с весьма малым увеличением напряжения. При удалении нагрузки упругость заключенных в веществе частиц заставляет их стремиться к восстановлению их размеров и формы, и вследствие этого между двумя фазами возникает напряжение, видимое оптически либо как растяжение, либо как сжатие.

Возможно даже, что этим путем можно объяснить обратное явление, описанное Амбронном и Вехтлером, так как возможно, что при увеличении нагрузки за предел упругости частицы текут сами, пока наконец их стремление к восстановлению не становится меньшим, чем у окружающей фазы; в этом случае предыду-



Фиг. 3.34.
Влияние остаточного удлинения в целлюлоиде (по Вехтлеру).

¹ Ramspeck, Ann, d. Physik, Ser. IV, 74, 1924, 722—42.

щее явление обращается. Однако следует отметить, что если это объяснение является правильным, то точка обращения при ее существовании должна быть одной и той же для всех цветов. Этому противоречат результаты Вехтлера, так что если считать их имеющими основание, то они не согласуются с этим объяснением.

§ 3.35. Оптический крип (медленное изменение) в целлюлоиде или ксилоните.

Теперь мы подходим к вопросу о влиянии времени на двойное лучепреломление. Этот вопрос при исследованиях напряжений имеет важное значение, так как для нас весьма существенно знать, в какой мере наши результаты зависят от промежутка времени, истекшего с момента приложения нагрузки, и от способа (последепенного или какого-либо иного) ее приложения.

В стекле при обычных температурах под действием любого *однородного напряжения* никакого изменения со временем до сих пор не наблюдалось. Отставание лучей зависит только от приложенного напряжения и, поскольку можно заметить, мгновенно принимает свою полную величину и исчезает целиком немедленно по удалении напряжения.

Но это явление наблюдается не у всех веществ. Двумя веществами, влияние времени на которые было наблюдаемо, являются целлюлоид (особенно вид его, называемый ксилонитом) и бакелит — прозрачная смесь фенола и альдегида, точный состав которого не может быть приведен. Помимо работ Росси (loc. cit.) можно указать для ксилонита на работы Кокера и Чакко (loc. cit.), а также Файлона и Джессопа; для бакелита — на работы Аракава.¹

Росси выдерживал полосу целлюлоида под постоянной нагрузкой в течение нескольких дней, измеряя в промежутках удлинения и оптические отставания. Он нашел наличие медленного изменения как удлинения, так и отставания лучей, причем это изменение вначале было более быстрым, а затем замедляющимся. Но замечательно то, что по истечении шести дней как изменение деформации, так и изменение двойного лучепреломления были еще несомненно заметны. Величина полного медленного изменения за 6,16 дней достигла 50% первоначальной величины деформации и 12,5% первоначальной величины оптического отставания. При разгрузке остаточные деформации были почти в точности равны величине полного медленного изменения при нагрузке, и по истечении 17 дней полная величина получившегося нарастания уменьшилась на 75%. Росси нашел, что между оптическим медленным изменением и медленным изменением деформации нет пропорциональности, как при нагрузке, так и при восстановлении. Повидимому Росси при исследовании целлюлоида не исследовал закона, связывающего медленное изменение со временем, но при испытании каучука он сделал попытку воспользоваться тем свойством, что в каучуке двойное лучепреломление является строго пропорциональным напряжению, для того чтобы определить время релаксации Максвелла в полосе каучука, выдерживаемой при постоянном удлинении; при этом он сделал очень интересное открытие, что релаксация напряжения в этом случае не подчиняется во времени показательному закону, вытекающему из теории Максвелла.

При исследованиях Кокера и Чакко фактор времени специально не принимался во внимание, но авторы указывают, что если перенапряженный образец рассматривать в полярископ по снятии нагрузки, то наблюдается заметная окраска. Отставание было измерено с помощью компенсатора, сделанного из того же самого материала, но из ряда слоев до такой толщины, что предел упругости не был превзойден. Отставание в таком случае выражалось „эквивалентным напряжением“ в идеальном образце из целлюлоида, обладающем совершенной упругостью при любой нагрузке. Результаты показывают, что закон отставания по отношению к *напряжению* является линейным не только до предела упругости, но в действительности до предела, превышающего предел упругости по крайней

¹ I. Arakawa, Proc. Physico-Math. Soc. of Japan, Ser. III, 5, 1924, 117—36.

мере вдвое, откуда невозможно, чтобы закон, связывающий отставание с деформацией, был линейным.

Файлон и Джессоп продолжали путем, весьма сходным с Росси, попытки определить вязкость ксилонита по его „времени релаксации“. Отставание измерялось компенсатором Бабинэ. Их метод в каждом случае состоял в том, что они прикладывали данную нагрузку и периодически одновременно измеряли как удлинение, так и оптическое отставание; при этом первая из этих величин (удлинение) непрерывно измерялась весьма чувствительным экстенсометром. По истечении более или менее продолжительного времени, иногда равного нескольким дням, нагрузка удалялась и те же самые величины наблюдались при восстановлении в отсутствии нагрузки.

Подобно Росси, Файлон и Джессоп пробовали согласовать показательные кривые с их кривыми времени растяжения и времени оптического отставания, исходя из предварительной теории, согласно которой напряжение состоит из двух частей: упругой и вязкой. Подобное смешанное напряжение возникло бы, если бы мы предположили, что материал состоит из смеси упругого твердого тела и вязкой жидкости, причем первое образует, так сказать, каркас, промежутки которого плотно заполнены вторым. Делая дальнейшее предположение, что „гидростатическое давление“ в уравнении Стокса для движения вязкой жидкости должно быть пропорциональным приложенному растяжению T и равным γT , где γ есть некоторая постоянная величина, они пришли к нижеследующим уравнениям для деформации s и относительного отставания r на единицу толщины:

$$s = \frac{1}{3} \frac{(1 + 3\gamma)}{3\lambda + 2\mu} T + \frac{1}{3\nu} e^{-\mu t/\nu} \int_0^t e^{\mu t'/\nu} T dt, \tag{3.350}$$

$$r = BT + (A - B) (\mu/\nu) e^{-\mu t/\nu} \int_0^t e^{\mu t'/\nu} T dt, \tag{3.351}$$

где λ , μ — постоянные Лямэ, ν — вязкость материала, A и B — два оптических коэффициента напряжения, относящиеся соответственно к упругой и вязкой частям напряжения; γ и T определены выше.

Эти уравнения, когда растяжение T приложено внезапно и поддерживается постоянным, приводят для деформации к формуле следующего вида:

$$a) \quad s = a - b e^{-\mu t/\nu},$$

где a , b — постоянные величины, пропорциональные приложенной нагрузке T .¹

β) Начальная деформация при нагрузке $s_0 = a - b$ и пропорциональна приложенной нагрузке.

γ) Крип вплоть до любого момента также пропорционален приложенной нагрузке.

δ) Если нагрузка удалена по истечении некоторого времени t_ω , первоначальная деформация s_0' при восстановлении в точности равна величине полного крипа во время нагрузки, таким образом, что

$$s_0' = b (1 - e^{-\mu t_\omega/\nu})$$

ε) Деформация s' спустя промежуток времени t' после разгрузки $= s_0' e^{-\mu t'/\nu}$

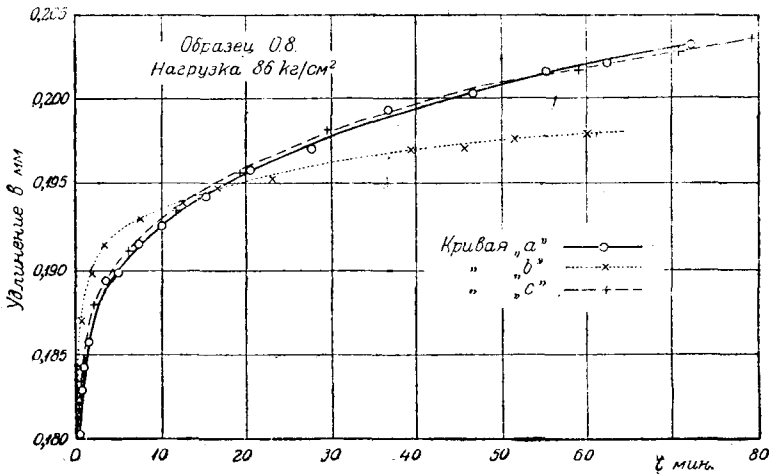
ζ) Для $t' = t$, т. е. для равных интервалов соответственно после нагрузки и разгрузки отношение величин крипа, при восстановлении и при нагрузке равно $1 - e^{-\mu t_\omega/\nu}$ равно постоянной величине для данного опыта.

¹Случайно эти уравнения для упруго-вязкой среды приводят к парадоксальному заключению, что первоначальные продольные и поперечные деформации равны. Один такой вывод был бы серьезным возражением против этой теории.

η) Если $t_{\omega} = \infty$, т. е. если нагрузка была приложена в течение весьма продолжительного времени, кривые при нагрузке и восстановлении при повороте на 180° совмещаются.

Все вышеприведенные выводы применимы также к зависимости между отставанием лучей и временем со следующими оговорками: I) оптический крип не существует, если A и B не являются *различными*, т. е. если вязкая и упругая фазы не имеют различных оптических коэффициентов напряжения; II) не может быть начального запаздывания при нагрузке, если B не отличается от нуля, т. е. если вязкая фаза не является оптически активной.

В общем весьма замечательно, насколько хорошо эта теория дает *качественные* объяснения наблюдаемых явлений. Даже в количественном отношении неко-



Фиг. 3.351.

торые из ее выводов имеют силу, — например β) и γ) вполне удовлетворяются; δ) и ζ) удовлетворяются только приближенно, и тем ближе, чем дольше выдерживалась нагрузка.

Но γ) определенно не удовлетворяется, и когда кривые были тщательно проанализированы, было найдено, что совершенно невозможно применить к ним формулы типа α) и ε). Это целиком подтверждает выводы Росси для каучука.

Кроме того, *все* кривые как для оптического отставания, так и для деформации обнаруживают весьма замечательное свойство, определенно исключающее показательную формулу вышеприведенного типа, а именно то свойство, что вначале скорость изменения той и другой величины кажется увеличивающейся сверх всяких границ. Кривые весьма отчетливо касаются оси деформации (или отставания) при $t=0$. Это особенно хорошо видно на фиг. 3.351, взятой из работы Файлона и Джессопа, изображающей ряд измерений крипа деформации.

Эта диаграмма представляет также весьма интересный результат, обнаруженный наблюдателями, а именно, что на крип, как при оптических явлениях, так и при деформации, весьма серьезно влияет предыдущая обработка материала.

Так, на диаграмме (3.351) кривая *a* представляет собой ход крипа деформации, полученный для одного образца при первой нагрузке, кривая *b* — при повторной нагрузке после 3-часового отдыха, и кривая *c* — при повторной нагрузке после 10-дневного отдыха. Как видно, *a* и *c* — практически идентичны, откуда следует, что в течение 10 дней материал имел время должным образом восстановить свои свойства. Но кривая *b* значительно отличается от любой из двух предыдущих, и другие результаты повидимому показывают, что как промежуток

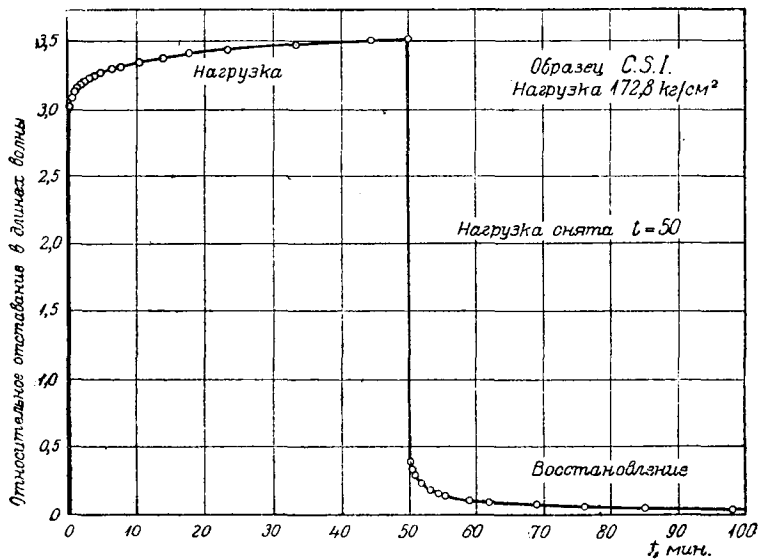
времени, так и прошлая история материала могут вызвать весьма значительные изменения в этих свойствах.

Файлон и Джессоп, испытав целый ряд формул, в конце концов, остановились на следующих:

$$s = s_0 + at^{\frac{1}{3}} + bt, \quad (3.352)$$

$$r = r_0 + pt^{\frac{1}{3}} + qt, \quad (3.353)$$

где s_0 , r_0 для данной нагрузки являются постоянными величинами, пропорциональными нагрузке T , a и p — постоянные величины, повидимому порядка T^2 , хотя строгого закона пропорциональности с T^2 повидимому не существует, b и q — весьма малые величины, не совсем точно определенные, отношение которых к приложенной нагрузке повидимому весьма неправильно.



Фиг. 3.352.

Эти формулы весьма точны на протяжении того промежутка времени (обычно около одного часа), в течение которого производятся наблюдения. Закон $t^{\frac{1}{3}}$ подтверждает результаты Андраде,¹ полученные им при растягивании свинцовых проволок. Сравнительно недавно Пейрс² нашел, что, хотя этот закон является приблизительно точным для закручивания хлопчатобумажной нити, однако большую точность можно получить, применяя формулу $s = s_0 + a(1 - e^{-kt^{\frac{1}{3}}})$. Очевидно, что, если k будет мало, выбор одной из этих двух формул не представит затруднения.

Для ксилонита постоянными величинами, измеряющими величину крипа, являются a и p . Величина крипа может быть весьма значительна. Так, для напряжения в 67,6; 134, 4; 200,1 и 236,4 бар (см. § 2.07) мы находим, что в одном образце крип деформации в течение тридцати минут соответственно достигает 9,3; 18,5; 38,2 и 43,2% первоначальной деформации и для двух средних из при-

¹ E. N. da C. Andrade, Roy. Soc. Proc. A, 84, 1910, 1—12.

² F. T. Peirce, Shirley Inst. Mem. 2, 1923, 278—301; см. также J. Text. Inst. 14, 1923, 390—413.

веденных выше напряжений оптический крип достигает 8,2 и 16,3% величины первоначального светового отставания.

Влияние времени на тот же самый образец было замечательно. Под нагрузкой в 167,7 бар, крип деформации и оптический крип в течение 30 минут сделались после промежуток в несколько месяцев соответственно равными 22,4 и 6,2%, причем последнее значительно меньше медленного оптического изменения крипа для нагрузки только в 134,5 бар при предыдущем наблюдении.

Это показывает, что при исследованиях распределения напряжений с помощью образцов из ксилонита следует остерегаться влияния крипа и повидимому наиболее надежным средством достичь этого является применение только выдержанных образцов, хранившихся на складе в течение нескольких лет.

Фиг. 3.352 дает типичную кривую оптического крипа под действием растяжения и оптического восстановления после нагрузки, приложенной в течение 50 минут. Кривая вычерчена в масштабе и дает ясное представление о развитии крипа и о величине его, которую можно ожидать.

Что касается кривых восстановления, то для них нельзя сформулировать никакого определенного закона, так как кривые восстановления зависят весьма сложным образом от обстоятельств нагрузки, но данные опыта повидимому показывают, что для применяемых нагрузок окончательно происходит полное восстановление как в отношении деформации, так и в отношении оптических явлений.

§ 3.36. Закон, связывающий двойное лучепреломление с напряжением и деформацией в ксилоните.

Тот факт, что кривые, связывающие деформацию и запаздывание со временем, имеют один и тот же характер, наводит на мысль, что между ними может быть прямое соотношение. Результаты, полученные Файлоном и Джессопом, подтверждающие выводы, полученные Росси для целлюлоида, показывают, что в ксилоните, во всяком случае это соотношение не может принять форму прямой пропорциональности, установленной Бьеркеном и Лейком для желатина. Однако они нашли, что некоторый линейный закон, включающий как напряжение, так и деформацию, будет вполне удовлетворять всем их наблюдениям. Таким образом относительное отставание r на единицу толщины в ксилонитовом образце повидимому следует закону

$$r = \alpha T + \beta s, \quad (3.360)$$

где α , β — постоянные величины для данного образца.

Очевидно, что α — оптический коэффициент напряжения и должен измеряться в брюстерах; β — оптический коэффициент деформации и имеет измерение в единицах длины. Поэтому представляется удобным измерять β в единицах, равных 10^5 \AA , или $\frac{1}{100}$ мм.

Было найдено, что для ряда различных образцов ксилонита, подвергавшихся исследованию, α и β изменялись в значительной степени, особенно последняя; α изменялось от 5,4 до 9,6 брюстера и β от 0,40 до 1,58.

Если этот закон имеет силу при всех условиях, то отставание при разгрузке должно было бы быть строго пропорциональным деформации и выражаться равенством $r = \beta s$. В общем это оказалось правильным и привело повидимому к тому же самому значению β , но число наблюдений было слишком незначительно, чтобы считать этот вывод несомненным. Росси¹ не получает отставание при разгрузке в целлюлоиде строго пропорциональным деформации, однако измененные им величины столь малы, что не исключена вероятность того, что это расхождение вызвано ошибками наблюдения.

¹ Rossi, Napoli Rendiconti, 16, 1910, стр. 206 и след., таблица V.

Следует отметить тот факт, что с течением времени относительные величины α и β повидимому дают значительное изменение в одном и том же образце. Так, полоса, дающая $\alpha = 7,8$, $\beta = 0,83$, при повторном испытании спустя несколько месяцев дала $\alpha = 9,6$, $\beta = 0,43$.

Этот закон сопоставлялся его авторами с результатами Кокера и Чакко (loc. cit.), и было найдено, что в целом он удовлетворяет этим результатам столь близко, сколько можно было ожидать.

Если этот закон действительно имеет силу, то он дает переход от стекла и резины, с одной стороны, для которых Росси показал пропорциональность двойного лучепреломления и *напряжения*, к желатину, с другой стороны, для которого Бьеркен и Лейк показали пропорциональность двойного лучепреломления и *деформации*. Эти два случая могут быть получены как предельные случаи более общей формулы путем задания соответственно $\beta = 0$ или $\alpha = 0$.

Однако представляется затруднительным положить такой смешанный закон в основу физического представления об явлении искусственного двойного лучепреломления и в целях подкрепления данных о сложной природе веществ, вызывающих это явление, представляет интерес нижеследующая теория, считающая *напряжение* во всех случаях решающим фактором.

Предположим, что материал, о котором идет речь, состоит из двух составных частей или фаз, из которых одна предполагается идеально упругой, а другая пластичной.

Предположим, что a , b — соответственно ширина и толщина образца, P — полная приложенная нагрузка. Часть этой нагрузки P_1 будет взята на себя упругой частью вещества, а другая часть нагрузки P_2 — пластической. Тогда, если между обеими составными частями вещества не происходит *скольжения*, $P_1 = Ks$, где K есть постоянная величина, зависящая от размеров образца, концентрации упругой фазы и ее коэффициентов упругости. Далее, если C_1 , C_2 — оптические коэффициенты напряжения обеих фаз, и b_1 , b_2 — их действительные толщины, то полное отставание равно

$$C_1 (P_1/ab_1) b_1 + C_2 (P_2/ab_2) b_2 = (C_1 P_1 + C_2 P_2)/a,$$

откуда отставание на единицу толщины

$$r = \frac{C_1 P_1 + C_2 P_2}{ab}. \quad (3.361)$$

Но

$$P_2 + P_1 = P.$$

Отсюда, поскольку $\frac{P}{ab} = T$,

$$r = \frac{C_2 P}{ab} + \frac{(C_1 - C_2) K}{ab} s = \alpha T + \beta s, \quad (3.362)$$

где

$$\alpha = C_2, \quad \beta = \frac{(C_1 - C_2) K}{ab}. \quad (3.363)$$

Эту неоднородность (гетерогенность) материала можно представить себе или распределенной равномерно в веществе, которое в таком случае является дисперсоидом или коллоидом, или же можно предположить упругую и пластическую части вещества отделенными одну от другой, например, мы можем иметь пластическую сердцевину, окруженную упругой оболочкой. На то, что подобная оболочка, оптические явления в которой заметно отличаются от оптических явлений внутри ее, существует у ксилонита, было указано Кокером и Чакко (loc. cit.).¹ С целью испытать влия-

¹ См. также § 2.48.

ние этой оболочки, с одного образца был удален поверхностный слой толщиной в 1 мм и образец был немедленно испытан, прежде чем новая оболочка успела затвердеть. Изменение постоянных величин α и β однако не достигло ожидаемой величины и закон $r = \alpha T + \beta s$ остался в силе.

Эти результаты подсказывают в таком случае объяснение следующего характера.

Материалы, с которыми здесь имели дело, являются по своей природе дисперсоидами или коллоидами: вследствие пластичной или вязкой природы одной из фаз с течением времени обычно будет иметь место перераспределение нагрузки между ними.

Если оптические коэффициенты напряжения этих фаз равны, или если упругость упругой фазы очень слабая (K — мало), или если по какой-либо причине *практически все напряжение воспринимается одной составной частью*, то мы получаем r пропорциональным T , как, например, в каучуке или стекле.

Если вязкая или пластичная фаза имеет весьма малый оптический коэффициент напряжения, $\alpha = 0$, и мы имеем случай, соответствующий желатину.

Независимо от правильности или неправильности вышеизложенной теории, мы имеем налицо определенное количество прямых опытных данных в пользу существования этих фаз. Так, Росси в своей работе по целлюлоиду утверждает, что когда образец исследовался в полярископе между скрещенными никелями с помощью микроскопа, то поле представлялось усеянным небольшими блестящими частями, обязанными своим происхождением частицам вещества, обладающего свойством двойного лучепреломления, рассеянного в веществе образца. Также и Рейгер,¹ исследуя двойное лучепреломление в вязких жидкостях (см. ниже § 3.39), наблюдал исчезновение двойного лучепреломления в нагретых растворах канифоли и воска в толуоле, когда частицы воска осаждались при охлаждении — факт, уже ранее отмеченный Амбронном.

§ 3.37. Оптический крип в других веществах.

Точных данных, относящихся к крипу в твердых телах, помимо целлюлоида налицо весьма мало. Уже упоминалось об опытах Бьеркена с желатином. Бьеркен нашел, что крип в желатине (как деформации, так и оптических свойств) может быть выражен формулой вида

$$\text{деформация (или оптическое отставание)} = a + \frac{b}{c + t}. \quad (3.37)$$

Это находится в несоответствии с выводами, сделанными для целлюлоида; в частности эта формула не дает бесконечно большой скорости крипа при $t = 0$. Однако Лейк подверг сомнению точность результатов Бьеркена для малых отставаний, основываясь на том, что последний пренебрег естественной вращательной способностью желатина, а также на том, что образцы, хотя и были под действием постоянной нагрузки, но вследствие поперечного сужения не были в действительности под постоянным напряжением, что в значительной степени усложняет результаты.

О том, что для этого вещества $r = \beta s$, было уже упомянуто.

Сравнительно недавно Аракава² исследовал крип оптических свойств в бакелите под действием сжатия. Это вещество, хотя и резко окрашенное, является в высокой степени прозрачным, и при опыте можно пользоваться образцом толщиной в 3 см. Благодаря существованию сложной системы остаточных напряжений, ненагруженный образец давал в натровом свете между скрещенными никелями ряд изохроматических ли-



Фиг. 3.37.

¹ Reiger, Ann. d. Physik, Ser. IV, 31, 1910, стр. 93 — 7.

² I. Arakawa, Proc. Physiko-Math. Soc. of Japan, ser. III, 5, 1924, 117 — 36.

ний весьма высокого порядка, как показано на фиг. 3.37. Этим воспользовались для упрощения опыта, а именно: сам образец был использован как его собственный компенсатор Бабинэ, и отставание измерялось путем отметки момента, когда следующие одна за другой полосы при нагрузке проходили через определенные точки шкалы, нанесенной на поверхности образца.

Оказалось, что при этом крип достигал нескольких длин волн и мог быть измерен со значительной точностью.

Наблюдения не позволяли измерить сжатие, так что закон $r = \alpha T + \beta s$ не мог быть проверен, но отставание с большой точностью следовало закону

$$r = r_0 + pt^{\frac{1}{3}} + qt,$$

причем q было весьма мало; кроме того это вещество обнаружило ту особенность, что для любого момента времени крип, так же как и r_0 (начальное отставание), был пропорциональным приложенной нагрузке, — результат, явно неправильный для целлюлоида.

Из результатов этого и предыдущего параграфов очевидно, что время релаксации в том смысле, как его понимает Максвелл, для этих пластических или полупластических твердых тел не существует вовсе; закон релаксации даже приблизительно не следует показательной функции с отрицательным показателем времени.

§ 3.38. Теория двойного лучепреломления Амбронна — Винера.

Физическая теория искусственного двойного лучепреломления была выдвинута Амбронном;¹ эта теория, основывается на данном Винером² объяснении так называемого пластинчатого двойного лучепреломления.

Рассмотрим среду, составленную из последовательно чередующихся плоских слоев двух веществ, имеющих диэлектрические постоянные K_1 и K_2 , и толщину h_1 и h_2 . Допустим, что поле электрического вектора перпендикулярно к слоям и E_1 и E_2 — соответственные его значению. Как известно, на поверхности разделения обеих сред (см. § 1.22) нормальная составляющая электрической индукции D является одинаковой в обоих слоях; таким образом

$$D = E_1 K_1 = E_2 K_2. \quad (3.380)$$

Среднее значение электрического вектора E выражается через

$$E(h_1 + h_2) = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

или, обозначая через δ_1 , δ_2 относительные количества двух составных частей по объему, так что $\delta_1 : \delta_2 = h_1 : h_2$ и $\delta_1 + \delta_2 = 1$,

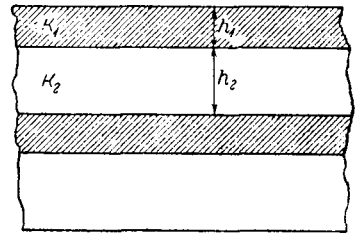
$$E = E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2. \quad (3.381)$$

Если K — действующая диэлектрическая постоянная сложного материала, то

$$K = \frac{D}{E}. \quad (3.382)$$

¹ H. Ambronn, Göttingen Nachrichten (Math.-Phys. Kl.), 1919, Heft 2, 299—320.

² O. Wiener, Ber. d. kgl. Sächs Ges. d. Wiss. zu Leipzig (Math.-Phys. Kl.) 62, 1910, 255; также 61, 1909, 113; Abhandlungen (те же) 32, 1912, 6.



Фиг. 3.381.

Подставляя соответственно в уравнение (3.381) вместо E , E_1 и E_2 , их значения D/K , D/K_1 , D/K_2 , мы имеем

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta_1}{K_1} + \frac{\delta_2}{K_2}. \quad (3.383)$$

Рассмотрим теперь поле электрического вектора, параллельное слоям; здесь условие (см. § 1.22), что тангенциальная составляющая электрического вектора должна быть непрерывной, требует, чтобы значение электрического вектора E' было бы одинаковым повсюду, причем электрические индукции D_1' и D_2' будут теперь различны. Средняя электрическая индукция

$$D' = \delta_1 D_1' + \delta_2 D_2', \quad (3.384)$$

если K' есть теперь эффективная диэлектрическая постоянная:

$$D' = K' E', \quad D_1' = K_1 E', \quad D_2' = K_2 E'.$$

Подставляя эти последние значения в уравнение (3.384), мы имеем

$$K' = \delta_1 K_1 + \delta_2 K_2, \quad (3.385)$$

и оказывается, что действующие диэлектрические постоянные различны в обоих направлениях.

Если толщина слоев мала по сравнению с длиной волны света, то действие, оказываемое средою на световые колебания, будет в действительности *средним* действием, и среда будет вести себя как одноосный кристалл, причем главные скорости волн будут $K^{-\frac{1}{2}}$, $(K')^{-\frac{1}{2}}$ (если среда является немагнитной, так что $\mu = 1$).

Таким образом (предполагая, что закон $n^2 = K$ имеет силу), $\sqrt{K'}$ будет показателем преломления обыкновенного луча n_o и \sqrt{K} — показателем преломления необыкновенного луча n_e .

Если мы обозначим через n_1 , n_2 естественные показатели преломления вещества слоев, то из уравнений (3.383) и (3.385), мы будем иметь

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{\delta_1}{n_1^2} + \frac{\delta_2}{n_2^2}, \quad (3.3851)$$

$$n_o^2 = \delta_1 n_1^2 + \delta_2 n_2^2, \quad (3.3852)$$

откуда легко получается

$$n_o^2 - n_e^2 = -\frac{\delta_1 \delta_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2}. \quad (3.3853)$$

Заметим, что разность $n_o^2 - n_e^2$ здесь существенно положительна, так что $n_o > n_e$ и результирующий кристалл является *отрицательным*; таким образом материал дает то же самое двойное лучепреломление, как и большинство стекол под действием *сжатия* (положительный оптический коэффициент напряжения).

Если мы теперь рассмотрим материал *волокнистого* строения (фиг. 3.382), состоящий из длинных волокон, обладающих диэлектрической постоянной K_1 , внедренных в среду, обладающую диэлектрической постоянной K_2 , то мы найдем, как и прежде, что под действием продольной электрической поляризации, значение электрического вектора E вследствие условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического вектора является повсеместно постоянным.

С другой стороны

$$D = D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2, \quad (3.3860)$$

так что, если K — является действующей диэлектрической постоянной в направлении волокон, мы имеем из уравнений (3.380) и (3.3860)

$$K = K_1 \delta_1 + K_2 \delta_2. \quad (3.3861)$$

Случай, когда электрический вектор является поперечным по отношению к волокнам, представляется значительно более сложным. Если мы предположим, что волокна представляют собой круглые цилиндры, то приближенное решение может быть получено следующим путем.

Поскольку мы рассматриваем *статическое* поле, мы имеем

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0,$$

или из уравнения (1.079):

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

и два подобных уравнения, откуда

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}; \quad (3.3870)$$

V называется *электростатическим потенциалом*.

Применяя внутри гомогенной среды, не подверженной нагрузке, условие

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 = \text{div } \mathbf{E},$$

мы видим, что электростатический потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 V = 0, \quad (3.3871)$$

где ∇^2 , как обычно, стоит вместо оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если мы рассмотрим поле двух измерений под прямым углом по отношению к отдельному бесконечному волокну, имеющему круговое поперечное сечение радиуса a , то тогда, если E есть значение неизменного электрического вектора, мы имеем на некотором расстоянии от волокна в среде, обладающей диэлектрической постоянной K_2 :

$$E_x = E, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0,$$

что приводит к потенциалу

$$V_2 = -Ex = -Er \cos \theta,$$

где r и θ — обычные полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к волокну; начало их лежит на оси самого волокна.

Вследствие наличия волокна, этот потенциал претерпевает возмущение, причем величина возмущения уменьшается с возрастанием r . Попробуем удовлетворить этим условиям, приняв для V_2 выражение следующего вида:

$$V_2 = -Ex + \frac{A \cos \theta}{r}, \quad (3.3872)$$

где A есть постоянная; это выражение удовлетворяет уравнению (3.3871).

Мы должны также предположить существование потенциала *внутри* волокна. Допустим, что он будет

$$V_1 = Bx = Br \cos \theta. \quad (3.3873)$$

При таком виде, который мы придали выражениям (3.3872) и (3.3873), $\cos \theta$ входит множителем как в V_1 , так и в V_2 ; вследствие этого мы можем удовлетворить пограничным условиям для всех значений θ .

На поверхности тангенциальные составляющие электрического вектора являются непрерывными, т. е.

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta},$$

или

$$\left(-Ea + \frac{A}{a}\right) \sin \theta = Ba \sin \theta,$$

что приводит к

$$-E + \frac{A}{a^2} = B. \quad (3.3874)$$

Нормальные составляющие электрической индукции также являются непрерывными, так что

$$-K_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = -K_2 \frac{\partial V_2}{\partial r},$$

когда $r = a$; т. е.

$$K_2 \left(E \cos \theta + \frac{A}{a^2} \cos \theta\right) = -K_1 B \cos \theta$$

или

$$E + \frac{A}{a^2} = -B \frac{K_1}{K_2}. \quad (3.3875)$$

Решая приведенные выше уравнения (3.3874) и (3.3875) относительно A и B , мы получаем

$$A = -\frac{Ea^2(1 - K_1/K_2)}{1 + K_1/K_2}, \quad B = -\frac{2E}{1 + K_1/K_2}.$$

Вычислим теперь *полное действие*, оказываемое волокном на: а) полный объемный интеграл электрического вектора; б) полный объемный интеграл электрической индукции по всему объему, причем как для электрического вектора, так и для вектора индукции, возьмем составляющие, параллельные оси Ox .

Рассмотрим прежде всего а).

Полный интеграл возмущения, произведенного волокном, электрического вектора, параллельного x , на единицу длины волокна будет

$$\iint \left(-\frac{\partial V_2}{\partial x} - E\right) dx dy + \iint \left(-\frac{\partial V_1}{\partial x} - E\right) dx dy,$$

где первый интеграл распространяется на всю площадь вне круга $r = a$, а второй — внутри круга $r = a$.

Для вычисления первого интеграла, мы находим, что

$$-\frac{\partial V_2}{\partial x} - E = \frac{A(-1 + 2 \cos^2 \theta)}{r^2} = \frac{A \cos 2\theta}{r^2}.$$

Таким образом интеграл принимает вид

$$A \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^R \frac{\cos 2\theta}{r} dr,$$

где верхний предел R стремится к бесконечности.

Но

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot d\theta = 0.$$

Поэтому вышеприведенный интеграл обращается в нуль.

Очевидно, что второй интеграл будет равен

$$-\pi a^2 (B + E)$$

или

$$\frac{\pi a^2 E (1 - K_1/K_2)}{1 + K_1/K_2}. \quad (3.3881)$$

Поступая подобным же образом с b), мы получим полный интеграл возмущения электрической индукции на единицу длины волокна

$$K_2 \iint_{r>a} \left(-\frac{\partial V_2}{\partial x} - E \right) dx dy + \iint_{r<a} \left(-K_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} - K_2 E \right) dx dy,$$

и так как первый интеграл, как и в предыдущем случае, обращается в нуль, то это выражение приводится к

$$-\pi a^2 (K_1 B + K_2 E),$$

или

$$\frac{\pi a^2 E (K_1 - K_2)}{1 + K_1/K_2} \quad (3.3882)$$

Если мы теперь вернемся к случаю большого числа параллельных волокон и предположим, что расстояние одного волокна от другого достаточно велико, так что каждое волокно вызывает то же самое полное возмущение электрического поля, как если бы имелось только одно это волокно, то при δ_1 и δ_2 , имеющих то же значение, что и прежде, средний электрический вектор на единицу объема будет

$$E \left\{ 1 + \frac{\delta_1 (1 - K_1/K_2)}{1 + K_1/K_2} \right\}, \quad (3.3883)$$

где E — есть электрический вектор в среде K_2 на некотором расстоянии от волокна. Средняя электрическая индукция на единицу объема будет

$$K_2 E + \frac{\delta_1 E (K_1 - K_2)}{1 + K_1/K_2}. \quad (3.3884)$$

Отношение этих выражений дает действующую удельную диэлектрическую постоянную

$$K' = \frac{K_2 + K_1 + \delta_1 (K_1 - K_2)}{1 + K_1/K_2 + \delta_1 (1 - K_1/K_2)},$$

или, учитывая, что

$$\delta_1 + \delta_2 = 1,$$

$$K' = \frac{K_2 \{ 2K_1 \delta_1 + (K_1 + K_2) \delta_2 \}}{2K_2 \delta_1 + (K_1 + K_2) \delta_2}. \quad (3.3885)$$

Таким образом, для подобного „волокнистого материала“

$$n_e^2 = n_1^2 \delta_1 + n_2^2 \delta_2,$$

$$n_o^2 = \frac{n_2^2 \{ 2n_1^2 \delta_1 + (n_1^2 + n_2^2) \delta_2 \}}{2n_2^2 \delta_1 + (n_1^2 + n_2^2) \delta_2},$$

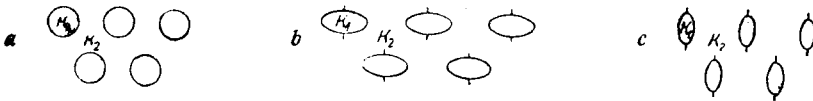
откуда

$$n_o^2 - n_e^2 = - \frac{\delta_1 \delta_2 (n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2 + n_2^2 \delta_1 + n_1^2 \delta_2}. \quad (3.389)$$

Отметим, что в этом случае результирующий одноосный кристалл является *положительным*, так что материал дает то же самое двойное лучепреломление, как и вещество, обладающее положительным оптическим коэффициентом напряжения под действием *растяжения*.

Эти два случая пластинчатой и волокнистой структуры соответственно представляют собой два крайних случая примерно следующего состояния вещества.

Предположим, что некоторое количество сферических частиц (фиг. 3.383*a*), обладающих диэлектрической постоянной K_1 , симметрично распределено в среде, обладающей диэлектрической постоянной K_2 ; тогда очевидно, что действующая диэлектрическая постоянная будет одной и той же по всем направлениям, и явления двойного лучепреломления не будет.



Фиг. 3.383.

Но предположим, что эти частицы сплющены, как показано на фиг. 3.383*b* и имеют форму планетарных сфероидов, все оси которых (показанные на рисунке) параллельны. Мы имеем теперь состояние, приближающееся к *пластинчатой* структуре, первой из исследованных нами, и мы можем ожидать получения отрицательного кристалла,

$$n_o^2 - n_e^2 = (n_1^2 - n_2^2) \times f(\delta_1, \delta_2, n_1, n_2),$$

где f есть функция, вид которой зависит от конфигурации и сплющивания частиц.

С другой стороны, вытянем наши частицы, как показано на фиг. 3.383*c*, тогда получим двойное лучепреломление, обратное по знаку.

Но и в том и в другом случае следует ожидать наличия множителя $(n_1^2 - n_2^2)^2$, потому что, если $n_1 = n_2$, то явления двойного лучепреломления не будет.

Точно такой же результат получается (и именно здесь, собственно говоря, начинается применение теории Амбронна), если мы сферические частицы, показанные на фиг. 3.383*a*, заменим удлинненными частицами (например маленькими иголками), беспорядочно разбросанными по всем направлениям.

Если теперь большие оси этих частиц собираются в группы вдоль по какому-либо определенному направлению (например, по направлению, указанному осями сфероидов на фиг. 3.283*b* и 3.383*c*), то в результате получится расположение, в общем похожее на фиг. 3.383*c*.

Но если эти оси отталкиваются от этого направления и имеют склонность группироваться в экваториальной плоскости, общий результат будет аналогичен показанному на фиг. 3.383*b*.

Амбронн рассматривает это явление как аналогичное тому, что происходит при искусственном двойном лучепреломлении. Удлиненные частицы, находясь в среде, обладающей другим показателем преломления, приобретают путем напряжения или деформации систематическую ориентацию в некотором направлении. Вследствие этого возникает искусственное двойное лучепреломление, в большой степени зависящее от разности показателей преломления двух фаз. Это явление может быть названо двойным лучепреломлением, вызванным ориентацией.

Такое двойное лучепреломление, вызванное ориентацией, приведет к положительному оптическому коэффициенту напряжения.

Но в дополнение к этому двойному лучепреломлению, вызванному ориентацией, Амбронн в результате своих опытов предполагает существование дополнительного двойного лучепреломления, которое он называет *собственным* двойным лучепреломлением. Он не говорит ничего вполне определенного относительно причины этого собственного двойного лучепреломления. Возможно, что оно вызвано отсутствием симметрии (вызванным напряжением или деформацией) в распределении самих частиц, независимо от их ориентации. Это собственное двойное лучепреломление очевидно заметно не зависит от показателей преломления фаз.

Амбронн проверил свою теорию на веществах, способных к поглощению значительного количества жидкостей, с различными показателями преломления. В частности он пользовался веществом, называемым *целлоидин*, представляющим собой супернитрированную нитроцеллюлозу.

Погружая полосы этого материала в различные жидкости, он имел возможность в зависимости от поглощенной жидкости получить ряд показателей преломления (n_2 по теории) в пределах от 1,33 до 1,77. Жидкости были тщательно подобраны такие, которые не влияют на нитроцеллюлозу ни физически, ни химически.

Кривая, выражающая зависимость оптического коэффициента напряжения (в единицах Амброина) от n_2 , имеет вид, подобный виду кривой на фиг. 3.384.

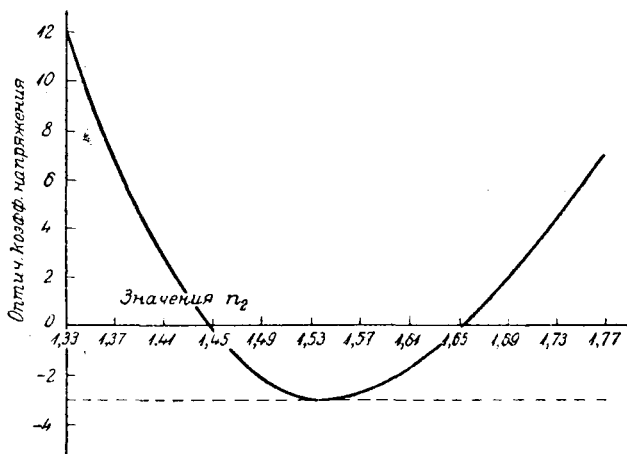
Алгебраический минимум получился при $n_2 = 1,53$ и случайно был равен n_1 — показателю преломления самой нитроцеллюлозы.

Если провести в этой точке минимума горизонтальную касательную линию (показанную пунктиром на фиг. 3.384), то оптический коэффициент напряжения, измеренный от этой линии, взятой за ось абсцисс, будет представлять собой двойное лучепреломление, вызванное ориентацией.

Положение самой пунктирной линии будет указывать величину собственного двойного лучепреломления, в данном случае *отрицательного*. Однако совсем не необходимо, чтобы оно было отрицательным; это вытекает из подобного же ряда опытов с обыкновенной целлюлозой, для которой минимум кривой получается выше нулевой линии.

Амбронн проверил также, что эта теория дает правильную дисперсию, если ее вычислять из двойного лучепреломления, вызванного ориентацией.¹ Дальнейшие подробности приведены в других работах.²

В настоящее время можно сказать, что эта теория, хотя, конечно, чрезвычайно остроумная и обнимающая собой большое количество фактов, требует значительной переработки (прежде, чем она может быть окончательно принята). Остается еще выяснить, чем можно объяснить любопытные местные аномалии дисперсии, найденные Файлоном в некоторых стеклах, а также известные факты, связанные с крипом и остаточными явлениями. В некоторой степени решающим вопросом для теории является вопрос о размерах частиц, о которых



Фиг. 3.384.

¹ H. Ambronn, Kolloid Zeitschrift, 18, 1916, 278 — 9; 20, 1917, 176 — 7.

² H. Ambronn, Kolloid Zeitschrift, 18, 1916, 90, 273.

идет речь. Если принять теорию Амбронна — Винера, то она предполагает, что частицы являются малыми по сравнению с длиной волны света. Однако если наблюдения Росси, описанные в конце § 3.36, являются правильными, и частицы в целлюлоиде действительно видимы в микроскоп, то это наводит на мысль, что следует ожидать более крупно-зернистой структуры.

Наконец, подобная теория, имеющая характер основной теории, должна объяснить временное двойное лучепреломление не только в твердых телах, но и в вязких жидкостях.

§ 3.39. Двойное лучепреломление в вязких жидкостях.

Клерк Максвелл¹ в 1866 г. заметил, что если мешать канадский бальзам плоской лопаточкой, двигая ее ребром вперед, то свет, пропущенный через бальзам, восстанавливается между скрещенными николями, при условии, что движение лопаточки происходит параллельно оси поляризатора или анализатора. Однако, если движение лопаточки производится под углом в 45° по отношению к этим осям, то никакого эффекта не наблюдается. Это указывает на то, что главные оси поляризации в бальзуме располагаются под углом в 45° по отношению к направлению скольжения вязких слоев.

В данном случае основным напряжением является сдвиг S , параллельный направлению скольжения, и если мы возьмем в данную минуту это направление скольжения за ось x , то поверхность напряжения (§ 2.10) будет гиперболическим цилиндром

$$2xy \cdot S = k.$$

Главные оси напряжения расположены поэтому под углом в 45° по отношению к направлению скольжения, и легко проверить [применяя или свойство поверхности напряжения или уравнения (2.2841), (2.2842) для плоского напряженного состояния], что главными напряжениями являются соответственно растяжение и сжатие, причем каждое из них равно S .

Таким образом, опыт показал, что оптическое явление в вязкой жидкости в отношении направления поляризации следует тому же самому закону, как и в твердом теле, и Максвелл без колебания вывел это заключение.

Максвелл описывает метод исследования этого явления, которого большею частью придерживались почти все дальнейшие исследователи. В этом методе он пользуется тем видом движения в вязкой жидкости, который можно считать тщательно разобранным, а именно — он предполагает существование так называемого пластинчатого движения, тогда как хорошо известно, что если будет превзойдена некоторая критическая скорость, этот вид движения становится неустойчивым и уступает место вихревому движению, некоторые детали которого до настоящего времени в достаточной мере не поддаются математической теории. Изучаемая вязкая жидкость помещается в пространство, образуемое двумя концентрическими цилиндрами с радиусами a и b ($b > a$). Внешний цилиндр радиуса b остается неподвижным, а внутреннему цилиндру радиуса a придается равномерное вращение с угловой скоростью ω . Когда движение примет устойчивый характер, частица P на расстоянии r от оси равномерно вращается по кругу со скоростью v .

Скорость скольжения слоев у частицы P , $\frac{ds_r}{dt}$, тогда равняется $\frac{dv}{dr} \frac{v}{r}$. Так как слой между r и $r + dr$ не имеет углового ускорения, срезающее усилие S должно создавать равномерный вращающий момент относительно оси цилиндра, т. е.

$$2\pi r S \times r = \text{постоянной величине или } S = A/r^2.$$

¹ Clerk Maxwell, Double-refraction of Viscous Fluids in Motion, Roy. Soc. Proc. 22, 1873 — 4, стр. 46. См. также Collected Papers, 2, 379.

Для нахождения A , мы имеем

$$S = v \frac{d\sigma_{r\theta}}{dt},$$

где v есть коэффициент вязкости.

Поэтому

$$\frac{A}{vr^2} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right),$$

так что

$$\frac{v}{r} = -\frac{A}{2vr^2} + B,$$

или

$$v = -\frac{A}{2vr} + Br.$$

Откуда, так как $v = 0$, когда $r = b$, и $v = a\omega$, когда $r = a$,

$$A = 2vBb^2$$

и

$$a^2\omega = B(a^2 - b^2).$$

Отсюда

$$S = -\frac{2vb^2a^2\omega}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}, \quad (3.390)$$

и

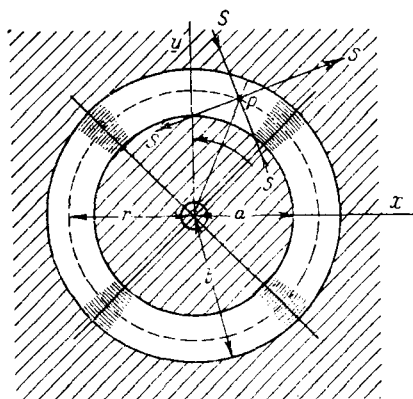
$$v = \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2\omega}{r}. \quad (3.391)$$

Главные напряжения в точке P состоят из растяжения S и сжатия S в направлениях, получаемых путем вращения OP на 45° , соответственно по и против часовой стрелки, как показано на фиг. 3.391.

Из этого следует, что если направления поляризации в жидкости идут по линиям главных напряжений, то они совпадают с направлениями осей поляризатора и анализатора для точек, лежащих на радиусах, наклоненных под углом в 45° по отношению к осям поляризатора и анализатора; эти радиусы поэтому кажутся черными в поле зрения (см. фиг. 3.391, где оси Ox , Oy являются осями поляризатора и анализатора).

Максвелл испытал этот метод на растворе клея и на сахарном сиропе, но получил отрицательный результат.

В 1873 г. Мах¹ наблюдал двойное лучепреломление в стеклянных прутиках, размягченных в огне, при внезапном изгибе. Он подтвердил существование этого явления в канадском бальзаме и показал, что это явление имело тот же знак, что и в стекле (положительный оптический коэффициент напряжения), но что в метафосфорной кислоте оно имеет обратный знак. Кундт² повторил опыты Максвелла



Фиг. 3.391.

¹ *Mach*, *Optisch-Akustische Versuche*, Prag 1873.

² *A. Kundt*, *Ann. d. Physik*, Ser. III, 13, 1881, 110—33.

над рядом веществ, а именно, над маслами, растворами клея и желатина и коллоидом. Во всех этих веществах он нашел существование двойного лучепреломления. Вода, раствор альбумина, растворы сахара, глицерина, скипидара, алкоголя и бензола дали отрицательный результат. Вообще говоря, он установил, что жидкости, в которых это явление наблюдается в наиболее значительной степени, являются коллоидами или маслами: в кристаллоидах этого явления повидимому не существует. Кундт повидимому не производил количественных измерений относительного отставания, но он наблюдал углы, образуемые темными ветвями с осями анализатора и поляризатора. Во многих веществах этому явлению сопутствовало естественное вращение плоскости поляризации, и вывести определенное заключение представлялось затруднительным.

Из подвергшихся исследованию невращающих веществ оливковое масло, льняное масло и смесь оливкового масла с парафином дали темные кисти в соответствии с положением, предсказанным теорией.

Но в случае *коллодия* их положение заметно отклонялось от угла в 45° , будучи в действительности смещено приблизительно на 20° в направлении вращения внутреннего цилиндра. Было найдено, что этот угол не зависит от толщины ($b - a$) слоя жидкости; разбавление коллодия алкоголем или эфиром не оказывало на этот угол заметного влияния.

С того времени существование этой замечательной аномалии было подтверждено другими исследователями; Закржевский и Крафт¹ показали, что вещества, являющиеся не гомогенными и имеющие коллоидную природу, дают отклонение осей поляризации от угла в 45° по отношению к радиусу.

Первые количественные измерения отставания принадлежат де Мецу.² Он производил опыты над невращающими жидкостями, как, например, касторовое масло, оливковое масло, рыбий жир, масло сладкого миндаля и смесь оливкового масла с $5,5\%$ парафина. Он нашел, что относительное отставание для данного расстояния от оси было пропорционально угловой скорости вращения цилиндра.

Повидимому не существует зависимости между вязкостью и свойством двойного лучепреломления в различных веществах, но де Мец, производя свои опыты при различных температурах, а стало быть и при значительных изменениях вязкости, нашел, что для одного и того же вещества свойство двойного лучепреломления было пропорционально вязкости; этот факт, если сравнить уравнения (3.390) и (3.391), наводит на мысль, что это явление, повидимому, скорее пропорционально напряжению в данном веществе, чем деформации скорости.

Можно сослаться также на более поздние работы Умлауфа,³ Альми⁴ и Хилс.⁵ Своеобразная аномалия, открытая Кундтом, повидимому не получила соответствующего объяснения. Шведовым⁶ были сделаны некоторые предположения, а целая разработанная теория вязкости была дана Натансоном⁷ в ряде его работ. Эта теория допускает существование „истинной“ деформации в среде, отличающейся от „кажущейся“ деформации, причем обе деформации связаны одна с другой рядом дифференциальных уравнений, включающих в себе „время релаксации“ Максвелла, играющее в этой теории несомненно основную роль.

¹ K. Zakrzewski, Sur la position des axes optiques dans les liquides déformés (по-польски), Kraków Rozpr. Akad., 44, 1904, 83—9; Zakrzewski and Kraft, Directions principales dans les liquides biréfringents par l'effet du mouvement, Kraków Rozpr. Akad., 45, 1905, 206—20 (по-польски); см. также Bull. Akad. Sci. Cracovie, 1905, 506—10 (по-французски и по-польски).

² G. de Metz, Ann. d. Physik, ser. III, 35, 1888, 497—507. См. также того же автора: La double réfraction accidentelle dans les liquides, Paris 1906.

³ K. Umlauf, Ann. der Physik, ser. III, 45, 1892, 304 и след.

⁴ J. E. Almy, Phil. Mag., ser. V, 44, 1897, 499—503.

⁵ V. Hill, Phil. Mag., ser. V, 48, 1899, 485—98; и ser. VI, 2, 1901, 524—7.

⁶ Th. Schwedoff, Journal de Physique, ser. III, 1, 1892, 41 и след.

⁷ L. Natanson, On the Laws of Viscosity, Phil. Mag., 1901, 342—56. On double Refraction in Moving Viscous Liquids, Phil. Mag., 1901, 469—77. См. также Bull. Acad. Sci. Cracovie, 1901, 161—71; 1903, 268—83; 767—87; 1904, 1—22, 103—13.

Теория Натансона, повидимому, никогда не была серьезно принята другими работниками в области вязкости, и само понятие „времени релаксации“ было в значительной мере поколеблено рядом доказательств того, что для пластических веществ во всяком случае деформация совершенно определенно не падает по показательному закону. Более этого, Рейгер¹ в 1910 г. в действительности измерил оптическое время релаксации в растворе канифоли и воска в толуоле и нашел его равным 130 000 секунд, откуда он получил для волны возмущения в среде скорость, находившуюся в полном несоответствии с наблюдением. Он пришел к заключению, что идентичности между временем оптической и механической релаксации не существует.

В свете результатов Закржевского и Крафта, приведенных выше, можно считать, что теория Амбронн — Винера повидимому дает объяснение; согласно этой теории поток жидкости может оказывать влияние на систематическую ориентацию взвешенных частиц. Подобная систематическая ориентация в случае частиц, имеющих форму эллипсоидов в вязкой жидкости, находящейся в пластинчатом движении, была на основании математических выводов предсказана Джеффри² и позже проверена путем опытов Тэйлором³ для пространства между двумя цилиндрами. Последним, например, было найдено, что если частицы имеют форму „иголок“, то амплитуда колебаний их больших осей в плоскости, перпендикулярной к радиусу, будет больше амплитуды колебания их в самой аксиальной плоскости. Это указывает на стремление осей группироваться в среднем вокруг направления, перпендикулярного к аксиальной плоскости.

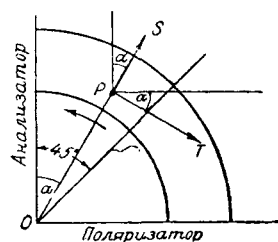
Рассмотрим этот случай (частиц, имеющих форму „иголок“), который, как мы знаем из § 3.38, будет соответствовать наиболее частому виду искусственного двойного лучепреломления. Мы можем получить некоторое представление об ожидаемом результате, если мы отметим, что группировка осей в направлении, перпендикулярном по отношению к радиусу, есть то, что обычно соответствовало бы в твердом коллоиде этого типа растяжению T , перпендикулярному по отношению к радиусу. Это растяжение, когда оно сочетается с действительным срезом S , дает направление (действительного) главного напряжения, составляющее угол α с радиальным и перпендикулярным к радиусу направлением, как показано на фиг. 3.392, где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2S/T.$$

При положительных T и S это уравнение дает для α значение, меньшее, чем 45° , и $45^\circ - \alpha$ возрастает с T .

Тогда $45^\circ - \alpha$ есть смещение, в направлении движения внутреннего цилиндра, темной ветви относительно точки P (фиг. 3.392), в которой направления главного напряжения параллельны поляризатору и анализатору. Это смещение поэтому следует по направлению движения, а это в точности то, что было найдено Кундтом.

Конечно, соединение предполагаемого растягивающего усилия T с существующим срезывающим усилием S с целью найти действующую оптическую главную ось не является строго обоснованным и имеет целью только дать общие указания на характер ожидаемого явления.



Фиг. 3.392.

¹ Reiger, Ann. d. Physik, ser. IV, 31, 1910, 93—7.

² G. B. Jeffery, The Motion of Ellipsoidal Particles immersed in a Viscous Fluid, Roy. Soc. Proc. A, 102, 1922, 161—79.

³ G. I. Taylor, The Motion of Ellipsoidal Particles in a Viscous Fluid, Roy. Soc. Proc. A, 103, 1923, 58—61.

§ 3.40. Искусственное двойное лучепреломление в естественных кристаллах.

То, что может быть названо элементарной теорией двойного лучепреломления, вызываемого напряжением или деформацией, созданной Нейманном, было распространено и на естественные кристаллы Покельсом¹ в ряде работ, опубликованных в 1889 и 1890 гг.

До этого было сделано несколько отдельных наблюдений: было замечено, например, Муаньо и Солейль,² что одноосные кристаллы под действием давления, приложенного перпендикулярно по отношению к оптической оси, становятся двuosными, но систематического исследования не было предпринято.

В своей работе Покельс повсюду оперирует соотношением между двойным лучепреломлением и *деформацией*. Для того чтобы согласовать его изложение с идеями и обозначениями, принятыми здесь, теория будет изложена применительно к соотношению между двойным лучепреломлением и *напряжением*. Это практически очень удобно, так как устраняет необходимость введения всех упругих постоянных исследуемого кристалла для каждого данного случая.

Вопроса о каком-либо существенном физическом различии здесь не может возникнуть, поскольку всюду предполагается, что упругость является идеальной.

Предположим, что Ox , Oy и Oz — главные оси эллипсоида Френеля (§ 1—11) в кристалле, не подверженном напряжению, т. е. главные оси поверхности волны. Назовем их *основными* осями. Тогда, если a , b и c — главные скорости волн в кристалле, не подверженном напряжению, уравнение первоначального эллипсоида Френеля будет

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1. \quad (3.400)$$

Предположим, что составляющие приложенного напряжения относительно основных осей будут

$$\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{zz}, \widehat{yz}, \widehat{zx}, \widehat{xy}.$$

Вследствие этого напряжения в большинстве случаев главные оси измененного эллипсоида Френеля уже не совпадают с осями координат. Предположим, что его уравнение будет

$$B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{23}yz + 2B_{31}zx + 2B_{12}xy = 1. \quad (3.401)$$

Теперь мы *предположим*, что расхождения между коэффициентами измененного и первоначального эллипсоидов Френеля суть малые величины первого порядка и линейны относительно напряжений.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} B_{11} - a^2 &= C_{11}\widehat{xx} + C_{12}\widehat{yy} + C_{13}\widehat{zz} + C_{14}\widehat{yz} + C_{15}\widehat{zx} + C_{16}\widehat{xy}, \\ B_{22} - b^2 &= C_{21}\widehat{xx} + C_{22}\widehat{yy} + C_{23}\widehat{zz} + C_{24}\widehat{yz} + C_{25}\widehat{zx} + C_{26}\widehat{xy}, \\ B_{33} - c^2 &= C_{31}\widehat{xx} + C_{32}\widehat{yy} + C_{33}\widehat{zz} + C_{34}\widehat{yz} + C_{35}\widehat{zx} + C_{36}\widehat{xy}, \\ B_{23} &= C_{41}\widehat{xx} + C_{42}\widehat{yy} + C_{43}\widehat{zz} + C_{44}\widehat{yz} + C_{45}\widehat{zx} + C_{46}\widehat{xy}, \\ B_{31} &= C_{51}\widehat{xx} + C_{52}\widehat{yy} + C_{53}\widehat{zz} + C_{54}\widehat{yz} + C_{55}\widehat{zx} + C_{56}\widehat{xy}, \\ B_{12} &= C_{61}\widehat{xx} + C_{62}\widehat{yy} + C_{63}\widehat{zz} + C_{64}\widehat{yz} + C_{65}\widehat{zx} + C_{66}\widehat{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.402)$$

Таким образом мы имеем 36 оптических коэффициентов напряжения C . Это число, в случае наиболее общего вида кристаллов (*триклинной* системы) не может быть уменьшено, так как здесь мы не можем исходить из аналогии с упругими постоянными, где равенство $\mu_{rs} = \mu_{sr}$ вытекает из существования энергии деформации.

¹ F. Pockels, Ann. d. Physik, Ser. III, 37, 1889, 144—72, 269—305, 372—88; Ser. III, 39, 1890, 440—69.

² Moigno et Soleil, C. R. 30, 1850, 361.

Однако, для кристаллов, обладающих различными осями симметрии, число постоянных может быть уменьшено. Принято говорить, что кристалл имеет *n*-го-нальную симметрию относительно какой-либо оси, если вращение на $2\pi/n$ относительно этой оси не вызывает никаких изменений, так что система линий, соединяющих элементы кристалла, проведенная в одном положении кристалла, после поворота вполне совпадает с такой же системой, построенной в другом положении кристалла.

В действительности единственно возможные значения для *n*: 2, 3, 4 и 6.

Моноклинная система. Кристаллы этой системы обладают *дигональной* симметрией относительно одной оси. Возьмем эту ось за *Ox*. Тогда вращение на π относительно *Ox* обращает \widehat{zx} и \widehat{xy} , но оставляет \widehat{xx} , \widehat{yy} , \widehat{zz} , и \widehat{yz} неизменными. Также, если в уравнении измененного эллипсоида Френеля мы изменим знаки у *y* и *z* и вспомним, что уравнение должно сохранить свой первоначальный вид, то мы увидим, что B_{11} , B_{22} , B_{33} и B_{23} останутся неизменными, но знак у B_{31} и B_{12} должен быть обратный. Рассмотрение уравнений (3.402) тогда показывает, что мы неизбежно должны иметь $C_{rs} = 0$, где: либо *r* равняется 5 или 6, а *s* равняется 1 или 2 или 3 или 4, либо *s* равняется 5 или 6, а *r* равняется — 1 или 2 и т. д.

Таким образом, шестнадцать *C* совпадают и число постоянных низводится до 20.

Ромбическая система. В этой системе три оси *Ox*, *Oy*, *Oz* являются диагональными осями. Применяя предыдущий метод, мы видим теперь, что $C_{rs} = 0$, если только *r* и *s* не принадлежат к группе 1, 2, 3.

Уравнения (3.402) принимают простой вид:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} - a^2 &= C_{11}\widehat{xx} + C_{12}\widehat{yy} + C_{13}\widehat{zz}, & B_{23} &= C_{44}\widehat{yz} \\ B_{22} - b^2 &= C_{21}\widehat{xx} + C_{22}\widehat{yy} + C_{23}\widehat{zz}, & B_{31} &= C_{55}\widehat{zx} \\ B_{33} - c^2 &= C_{31}\widehat{xx} + C_{32}\widehat{yy} + C_{33}\widehat{zz}, & B_{12} &= C_{66}\widehat{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (3.403)$$

и число постоянных низводится до 12.

Тетрагональная система. В этой системе одна ось (например ось *Oz*) является тетрагональной осью и оси *Ox* и *Oy* являются двумя дигональными осями. Так как тетрагональная симметрия включает в себе дигональную симметрию, то она является частным случаем последней. Однако, мы можем получить некоторое дальнейшее уменьшение числа постоянных и прежде всего мы отметим, что, так как вращение на $\pi/2$ относительно *Oz* не вызывает каких-либо изменений, то мы должны иметь $b = a$, т. е. кристалл этого типа является неизбежно одноосным.

Вращение на $\pi/2$ относительно *Ox* меняет *y* на *x*, а *x* на *y*. Соответственно, из равенств (3.401) B_{22} изменяется в B_{11} , и обратно B_{23} изменяется в B_{31} , B_{31} в $-B_{23}$, B_{12} изменяет знак, B_{33} остается неизменным.

\widehat{xx} и \widehat{yy} меняются местами, \widehat{zz} остается неизменным, \widehat{xy} меняет знак, \widehat{xz} становится $-\widehat{yz}$, а \widehat{yz} переходит в \widehat{xz} .

В результате этих изменений уравнения (3.403) принимают вид:

$$\begin{aligned} B_{11} - a^2 &= C_{22}\widehat{xx} + C_{21}\widehat{yy} + C_{23}\widehat{zz}, & B_{23} &= C_{55}\widehat{yz}, \\ B_{22} - a^2 &= C_{12}\widehat{xx} + C_{11}\widehat{yy} + C_{13}\widehat{zz}, & B_{31} &= C_{44}\widehat{zx}, \\ B_{33} - c^2 &= C_{32}\widehat{xx} + C_{31}\widehat{yy} + C_{33}\widehat{zz}, & B_{12} &= C_{66}\widehat{xy}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (3.403), с которыми они должны быть идентичными, мы очевидно имеем:

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{32} = C_{31}, \quad C_{44} = C_{55},$$

и число постоянных теперь сводится к *семи*, связываемых уравнениями

$$\left. \begin{aligned} B_{11} - a^2 &= C_{11}\widehat{xx} + C_{12}\widehat{yy} + C_{13}\widehat{zz}, & B_{23} &= C_{44}\widehat{yz}, \\ B_{22} - a^2 &= C_{12}\widehat{xx} + C_{11}\widehat{yy} + C_{13}\widehat{zz}, & B_{31} &= C_{44}\widehat{zx}, \\ B_{33} - c^2 &= C_{31}\widehat{xx} + C_{31}\widehat{yy} + C_{33}\widehat{zz}, & B_{12} &= C_{66}\widehat{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.404)$$

Эти уравнения являются весьма важными уравнениями, так как они применимы ко многим одноосным кристаллам.

Правильная или кубическая система. Теперь мы подходим к очень интересному случаю, а именно — случаю *однопреломляющего* кристалла, примером которого могут служить каменная соль и плавиковый шпат. В этом случае все три оси Ox , Oy , Oz эквивалентны, все являются тетрагональными осями. По симметрии мы имеем тогда

$$C_{66} = C_{44}, \quad C_{33} = C_{11}, \quad C_{12} = C_{13} = C_{31}.$$

Таким образом у нас остаются только три постоянные и уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} - a^2 &= (C_{11} - C_{12})\widehat{xx} + C_{12}(\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}), & B_{23} &= C_{44}\widehat{yz}, \\ B_{22} - a^2 &= (C_{11} - C_{12})\widehat{yy} + C_{12}(\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}), & B_{31} &= C_{44}\widehat{zx}, \\ B_{33} - a^2 &= (C_{11} - C_{12})\widehat{zz} + C_{12}(\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}), & B_{12} &= C_{44}\widehat{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.405)$$

Изотропные тела. Приведение числа постоянных к двум для изотропных тел не лишено интереса, как пример этого метода. В этом случае уравнения должны остаться одинаковыми по виду для *любого* вращения осей координат. Если мы возьмем оси Ox' и Oy' , полученные из осей Ox , Oy путем вращения на θ относительно оси Oz , мы будем иметь по обычным уравнениям преобразования составляющих напряжения

$$\begin{aligned} \widehat{x'x'} &= \widehat{xx} \cos^2 \theta + \widehat{yy} \sin^2 \theta + 2\widehat{xy} \cos \theta \sin \theta, \\ \widehat{y'y'} &= \widehat{xx} \sin^2 \theta + \widehat{yy} \cos^2 \theta - 2\widehat{xy} \cos \theta \sin \theta, \\ \widehat{x'y'} &= \widehat{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\widehat{yy} - \widehat{xx}) \cos \theta \sin \theta, \\ \widehat{x'z'} &= \widehat{xz} \cos \theta + \widehat{yz} \sin \theta, \\ \widehat{y'z'} &= -\widehat{xz} \sin \theta + \widehat{yz} \cos \theta, \end{aligned}$$

и одновременно

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{aligned}$$

Преобразовывая эллипсоид Френеля, мы находим

$$\begin{aligned} B_{11}' &= B_{11} \cos^2 \theta + 2B_{12} \cos \theta \sin \theta + B_{22} \sin^2 \theta, \\ B_{22}' &= B_{11} \sin^2 \theta - 2B_{12} \cos \theta \sin \theta + B_{22} \cos^2 \theta, \\ B_{33}' &= B_{33}, \\ B_{23}' &= B_{23} \cos \theta - B_{31} \sin \theta, \\ B_{31}' &= B_{23} \sin \theta + B_{31} \cos \theta, \\ B_{12}' &= (B_{22} - B_{11}) \cos \theta \sin \theta + B_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнение

$$B_{11}' - a^2 = (C_{11} - C_{12}) \widehat{x'x'} + C_{12} (\widehat{x'x'} + \widehat{y'y'} + \widehat{z'z'}),$$

и применяя выражения (3.405) для B_{11} и т. д., чтобы выразить обе стороны через \widehat{xx} , \widehat{yy} и т. д., мы получаем

$$\begin{aligned} & (C_{11} - C_{12}) \{ \widehat{xx} \cos^2 \theta + \widehat{yy} \sin^2 \theta \} + \\ & + C_{12} (\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}) + 2C_{44} \widehat{xy} \cos \theta \sin \theta = \\ = & (C_{11} - C_{12}) \{ \widehat{xx} \cos^2 \theta + \widehat{yy} \sin^2 \theta + 2\widehat{xy} \cos \theta \sin \theta \} + \\ & + C_{12} (\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}), \end{aligned}$$

откуда следует, что $C_{11} - C_{12} = C_{44}$, а это ведет к выводам, сделанным в §§ 3.08-3.10, а именно, что эллипсоид Френеля и поверхность напряжения имеют одни и те же круговые сечения.

Легко проверить, что остальные пять уравнений приводят к тому же самому заключению.

Открытие, сделанное Покельсом, что действие напряжения на кристалл кубической системы отличается от действия на изотропное тело, является весьма важным и было целиком упущено прежними исследователями, в частности, Вертгеймом, исследовавшим каменную соль и плавленый шпат вне всякой зависимости от того, как образцы были вырезаны. Поэтому оптические коэффициенты напряжения, приведенные для них в таблице 3.15, не являются истинными, постоянными для этих материалов.

Более того, можно доказать, что под действием давления, приложенного в одном направлении, вещества, подобные каменной соли и плавленому шпату, превратились бы в *двуосный* кристалл (а не одноосный, как это имело бы место, например, в случае стекла).

В самом деле, если мы применим уравнения (3.405), то уравнение, относящееся к измененному эллипсоиду Френеля, примет вид:

$$\begin{aligned} & \{ a^2 + C_{12} (\widehat{xx} + \widehat{yy} + \widehat{zz}) \} (x^2 + y^2 + z^2) + \\ & + (C_{11} - C_{12}) \{ x^2 \widehat{xx} + y^2 \widehat{yy} + z^2 \widehat{zz} \} + 2C_{44} \{ yz \widehat{yz} + zx \widehat{zx} + xy \widehat{xy} \} = 1. \end{aligned}$$

Но, если напряжение возникло вследствие растяжения T , приложенного в направлении (l, m, n) , то мы имеем

$$\widehat{xx} = l^2 T, \widehat{yy} = m^2 T, \widehat{zz} = n^2 T, \widehat{yz} = mn T, \widehat{zx} = nl T, \widehat{xy} = lm T,$$

а это дает

$$\begin{aligned} & (a^2 + C_{12} T) (x^2 + y^2 + z^2) + \\ & + (C_{11} - C_{12}) T \{ x^2 l^2 + y^2 m^2 + z^2 n^2 \} + 2C_{44} T \{ mnyz + nlzx + lmyx \} = 1. \end{aligned}$$

Затем, обычным методом легко показать, что уравнение двух плоскостей кругового сечения имеет вид

$$\alpha (l^2 x^2 + y^2 m^2 + z^2 n^2) + 2\beta (mnyz + nlzx + lmyx) = \lambda (x^2 + y^2 + z^2)$$

где $\alpha = (C_{11} - C_{12}) T$, $\beta = C_{44} T$ и λ — множитель, подобранный так, чтобы можно было уравнение разбить на два уравнения для двух плоскостей.

Если это уравнение должно представлять собой две *совпадающие плоскости* (как в случае одноосного искусственного кристалла), то вышеприведенное уравнение должно иметь вид

$$k (Lx + My + Nz)^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты, мы сразу получаем

$$\frac{mn}{MN} = \frac{nl}{NL} = \frac{lm}{LM},$$

откуда, либо

$$\frac{l}{L} = \frac{m}{M} = \frac{n}{N}, \quad (I)$$

либо например $l=0, L=0$, причем λ должно $= a l^2$, так что x выпадает из уравнения, принимающего вид

$$a(y^2 m^2 + z^2 n^2) + 2\beta mn yz = 0.$$

Это опять может быть точным квадратом для любых значений α и β , только при условии, что m или $n=0$. Мы имеем тогда, как вторую возможность,

$$l=0, m=0, n=1 \quad (II)$$

(или по симметрии $l=1, m=0, n=0$, или $l=0, m=1, n=0$).

Если мы возьмем решение (I), то сразу видно, что мы должны иметь

$$\lambda = (\alpha - \beta) l^2 = (\alpha - \beta) m^2 = (\alpha - \beta) n^2,$$

так что $l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3}$. Эти величины соответствуют лучам, одинаково наклоненным по отношению к трем главным (или „кубическим“) осям, и известным в кристаллографии под именем „октаэдрических“ осей подобного кристалла.

Из этого ясно, что если линия давления направлена не вдоль кубический или октаэдрической оси, то получаемый искусственный кристалл будет неизбежно двусосным.

Случай нагрузки естественного одноосного кристалла перпендикулярно к оптической оси также представляет значительный интерес. Применяя формулу (3.404) для тетрагональной системы, где ось z является осью симметрии и вследствие этого оптической осью, напомним $\widehat{xx} = -P$, и все другие составляющие напряжения положим равными нулю. Мы имеем

$$B_{11} = a^2 - C_{11} P,$$

$$B_{22} = a^2 - C_{12} P,$$

$$B_{33} = c^2 - C_{31} P.$$

Измененный эллипсоид Френеля имеет своим уравнением

$$(a^2 - C_{11} P) x^2 + (a^2 - C_{12} P) y^2 + (c^2 - C_{31} P) z^2 = 1,$$

или

$$a'^2 x^2 + b'^2 y^2 + c'^2 z^2 = 1.$$

Очевидно, что поскольку изменения, вызванные напряжением, малы по сравнению с естественными скоростями волн, C' всегда будет наименьшей скоростью, если конечно кристалл *положительный*.

Соответственно, если $a' > b'$, т. е. если $C_{12} > C_{11}$, то плоскость xz будет плоскостью оптических осей в искусственном двусосном кристалле; это значит, что линия напряжения заключается в плоскости оптических осей. С другой стороны, если $C_{12} < C_{11}$, $b' > a'$ — плоскость оптических осей расположена под прямым углом к линии напряжения.

Муаньо и Солейль (loc. cit.) нашли, что в положительных кристаллах имеет место первый случай.

В отрицательном кристалле $a < c$, так что если здесь $C_{12} > C_{11}$, то b' будет наименьшей скоростью волны, плоскость оптических осей есть плоскость yz и расположена она под прямым углом к линии напряжения. Это также нахо-

дится в соответствии с наблюдениями Муаньо и Солейля, так как повидимому для всех исследованных ими кристаллов $C_{12} > C_{11}$.

Заметим, что если изменить знак у P , все вышеприведенные выводы обращаются. Таким образом, если бы было практически возможно подвергнуть один и тот же кристалл последовательно давлению и растяжению в направлении, поперечном по отношению к оптической оси, новые оптические оси расходились бы в двух случаях во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Вычисление главных осей измененного эллипсоида Френеля и вычисление оптических осей в общем случае является длительным и утомительным, и здесь опущено. Однако, это вычисление не представляет собой каких-либо весьма серьезных математических затруднений и следует обычным правилам, изложенным в учебниках для приведения уравнения второй степени к его главным осям.

Следует добавить, что Покельс проверил всю теорию полными и законченными измерениями над кварцем (в этом случае теория была значительно расширена, чтобы принять во внимание вращательные свойства), над плавиковым шпатом, над каменной солью и над сильвином; последние три являются правильными кристаллами. Он действительно нашел весьма тесное согласие между теорией и наблюдениями. Его действительные числа выражены через деформацию и требовали бы полного пересчета для согласования их с принятой нами системой обозначения. Однако, мы можем отметить важный результат, а именно — на опыте было показано, что C_{rs} , вообще говоря, не равно C_{sr} . Существования подобного рода соотношений, как было уже объяснено ранее, на основании теоретических рассуждений нельзя было предполагать.

§ 3.41. Различные численные результаты.

Некоторые численные результаты, полученные для искусственного двойного лучепреломления в веществах, отличных от стекла и являющихся в ненапряженном состоянии изотропными, приведены в таблице 3.41.

В тех случаях, когда опубликованные данные не были выражены в брюстерах, величины оптических коэффициентов напряжения были пересчитаны.

Для веществ, подверженных оптическому крипу, приведенные результаты естественно страдают значительной неточностью, за исключением тех случаев, когда метод определения оптического коэффициента напряжения точно указан.

В отношении желатина Лейк дал следующий закон, который, однако, удовлетворяется очень приблизительно, а именно, что если E есть модуль Юнга, c — концентрация и C — оптический коэффициент напряжения, то оптический коэффициент напряжения изменяется как c , и E изменяется как c^2 .

Если это правильно, то C изменяется обратно c .

Но, если составить произведение Cc для желатинов, исследованных Лейком, то эти величины изменяются между 166000 и 336000 — для мягких желатинов и между 234000 и 382000 — для твердых желатинов.

Лейк испытал влияние добавления различных солей к желатину, в частности NaCl , KCl , LiCl , CaCl_2 , MgCl_2 , KNO_3 , Na_2SO_4 ; он добавлял также глицерин и тростниковый сахар. Добавление сульфата натрия, повидимому, ничего не изменяло. Добавление всех других солей в значительной степени уменьшало как оптический коэффициент деформации, так и модуль упругости, причем уменьшение было приблизительно пропорционально количеству добавленной соли. Однако заслуживает внимания тот факт, что оптический коэффициент напряжения в действительности несколько увеличивается при добавлении соли, причем уменьшение E более чем компенсирует уменьшение оптического коэффициента деформации.

Повидимому для абсолютных значений оптического коэффициента напряжения в вязких жидкостях нет надежных определений, которыми можно было бы воспользоваться; но, во всяком случае, опубликованные данные не дают возможности приведения их к брюстерам по тем сведениям, которые даны авторами.

Таблица 3.41.

Вещество	Исследователь	Образец	Оптический коэффициент напряжения	Примечание		
Целлюлоид Ксилонит	Росси, Файлон и Джессоп	A	10,7	Вычислено из мгновенного отставания при нагрузке Следует, вообще говоря, принимать в расчет крип, который может достигнуть 1 или 2 брюстеров; его надо прибавить		
		0,12	11,8			
		0,13	11,6			
		0,14	10,25			
		0,15	10,1			
Бакелит	Аракава		53,2	То же, что и выше. Поправка на крип может достигнуть 8 брюстеров, приблизительно за 2 часа		
Резина	Бьерке и		2 455	Среднее для 2 нагрузок		
	Росси	Чистая резина	2 100			
		Смешанная с 15% серы	2 050			
Желатин	Бьеркен	I	15 000—11 000	Найдено, что оптический коэффициент напряжения уменьшается с приложенной нагрузкой В зависимости от состава		
		II	5 300—2 100			
		III	4 500—3 400			
		IV	2 900—2 500			
		(17 образцов)	14 000—1 700			
		Концентрация в % = с				
		Лейк	Мягкие желатины			
			10,0		17 400	
			10,2		18 700	
			18,6		8 900	
	18,9		9 800			
	30,0		8 200			
	32,0		7 800			
	45,0		7 500			
	Твердые желатины					
	12,6		19 900			
	12,6	19 100				
	12,7	20 400				
	17,5	13 400				
	19,0	15 400				
20,8	15 100					
28,3	11 800					
31,7	12 100					
45,6	7 500					
Росси		25,0	23 000	Состав следующий: Желатина 20,5 Глицерина (86%) . . . 63,0 Воды 16,0		
		38,0	10 000			
	Желатин с глицерином	4 000				

ГЛАВА IV.

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ И КРУГОВЫМ КОНТУРАМ.

§ 4.01. Решение уравнения $\nabla^4\chi = 0$.

В настоящей главе, мы рассмотрим некоторые решения задачи обобщенного плоского напряженного состояния для контуров различных очертаний при различных пограничных условиях для напряжений.

За исключением особо оговоренных случаев, будем предполагать, что объемные силы равны нулю.

В случае задачи плоской деформации необходимо величины $U, V, \overset{\sim}{xx}, \overset{\sim}{xy}$ и $\overset{\sim}{yy}$ заменить величинами $u, v, \overset{\sim}{xx}, \overset{\sim}{xy}, \overset{\sim}{yy}$, а также заменить постоянную λ' постоянной Ляме λ .

Будем придерживаться системы обозначений, приведенной в § 2.23 и далее.

Сначала получим решения дифференциального уравнения для функции напряжения, а именно

$$\nabla^4\chi = 0 \quad (4.011)$$

в прямоугольных координатах x, y . Это можно сделать в совершенно общем виде следующим путем.

Рассмотрим некоторую функцию φ , являющуюся решением уравнения

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (4.012)$$

Тогда

$$\nabla^2(x\varphi) = \varphi\nabla^2x + 2\left(\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + x\nabla^2\varphi = 2\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

откуда

$$\nabla^4(x\varphi) = 2\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi = 0,$$

так что

$$\chi = x\varphi \quad (4.013)$$

является решением уравнения (4.011).

Подобным же образом

$$\chi = y\varphi \quad (4.014)$$

является решением уравнения (4.011).

Далее, любое решение уравнения $\nabla^2\chi = 0$ есть также решение $\nabla^4\chi = 0$.

Известно, что наиболее общее выражение для φ дается формулой

$$\varphi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy), \quad (4.015)$$

где $i = \sqrt{-1}$, и f_1, f_2 — произвольные функции.

Поэтому

$$\chi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy) + x\{f_3(x + iy) + f_4(x - iy)\} \quad (4.016)$$

есть решение уравнения $\nabla^4\chi = 0$.

Так как это решение содержит четыре произвольных функции, то оно является общим интегралом дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных. Уравнению (4.016) может быть придан следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi = & f_1(x+iy) + f_2(x-iy) + (x+iy)f_3(x+iy) + (x-iy)f_4(x-iy) + \\ & + iy\{f_4(x-iy) - f_3(x+iy)\} = F_1(x+iy) + F_2(x-iy) + \\ & + y\{F_3(x+iy) + F_4(x-iy)\}, \end{aligned} \quad (4.017)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x+iy) &= f_1(x+iy) + (x+iy)f_3(x+iy) \\ F_2(x-iy) &= f_2(x-iy) + (x-iy)f_4(x-iy), \\ F_3(x+iy) &= -if_3(x+iy), \\ F_4(x-iy) &= if_4(x-iy). \end{aligned}$$

Уравнение вида (4.017) может быть также получено из уравнения (4.014) тем же путем, как уравнение (4.016) выведено из уравнения (4.013).

Сейчас получим другой необходимый нам вид этого уравнения, который является основным для решения задач в полярных координатах.

Возьмем уравнение (4.016); оно может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi = & f_1(x+iy) + f_2(x-iy) + \frac{x+iy}{2}f_3(x+iy) + \frac{x-iy}{2}f_4(x-iy) + \\ & + \frac{x-iy}{2}f_3(x+iy) + \frac{x+iy}{2}f_4(x-iy) = \\ = & f_1(x+iy) + \frac{x+iy}{2}f_3(x+iy) + f_2(x-iy) + \\ + & \frac{x-iy}{2}f_4(x-iy) + \frac{(x-iy)(x+iy)}{2} \left[\frac{f_3(x+iy)}{x+iy} + \frac{f_4(x-iy)}{x-iy} \right] = \\ = & \varphi_1(x+iy) + \varphi_2(x-iy) + (x^2+y^2)\{\varphi_3(x+iy) + \varphi_4(x-iy)\}, \end{aligned} \quad (4.018)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x+iy) &= f_1(x+iy) + \left(\frac{x+iy}{2}\right)f_3(x+iy), \\ \varphi_2(x-iy) &= f_2(x-iy) + \left(\frac{x-iy}{2}\right)f_4(x-iy), \\ \varphi_3(x+iy) &= \frac{1}{2}f_3(x+iy)/(x+iy), \\ \varphi_4(x-iy) &= \frac{1}{2}f_4(x-iy)/(x-iy). \end{aligned}$$

Так как

$$\varphi_3'(x+iy) + \varphi_4(x-iy)$$

представляет собой общее решение уравнения $\nabla^2\varphi = 0$, то из уравнения (4.018) следует, при

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

что

$$\chi = r^2\varphi$$

есть решение уравнения (4.011), если φ является решением уравнения (4.012).

§ 4.02. Симметричные решения.

Общеизвестно, что $\varphi = \lg r$ и $\varphi = \text{const} (= 1)$ являются решениями $\nabla^2 \varphi = 0$. Следовательно получаем три симметричных решения для χ , а именно:

$$\chi = \lg r, \quad (4.021)$$

$$\chi = r^2, \quad (4.022)$$

$$\chi = r^2 \lg r. \quad (4.023)$$

Рассмотрим их одно за другим и вычислим перемещения и напряжения для каждого случая, применяя формулы §§ 2.42 и 2.45.

В случае $\chi = \lg r$, мы имеем $\nabla^2 \chi = 0$ и подходящая для ψ_1 величина есть $\psi_1 = 0$. Очевидно, что это значение удовлетворяет как уравнению (2.456), так и уравнению (2.457), поскольку $\Omega = 0$.

Следовательно

$$2\mu U_r = -\frac{1}{r}, \quad 2\mu U_\theta = 0, \quad (4.0211)$$

$$\tilde{r}r = \frac{1}{r^2}, \quad \tilde{r}\theta = 0, \quad \overset{\sim}{\theta}\theta = -\frac{1}{r^2}. \quad (4.0212)$$

В этом случае получаются вполне симметричные перемещения, так как $\tilde{r}r + \overset{\sim}{\theta}\theta = 0$ и кубическое расширение равно нулю.

В случае $\chi = r^2$, имеем:

$$\nabla^2 \chi = 4, \quad (4.0221)$$

и

$$r\psi_1 = 4r\theta + rf(r) + F(\theta);$$

так как $\psi_1 = 4\theta$ есть решение уравнения $\nabla^2 \psi_1 = 0$, мы можем опустить функции f и F и взять

$$\psi_1 = 4\theta, \quad (4.0222)$$

откуда

$$2\mu U_r = 2(1 - 2\sigma)r, \quad 2\mu U_\theta = 0, \quad (4.0223)$$

$$\tilde{r}r = 2, \quad \tilde{r}\theta = 0, \quad \overset{\sim}{\theta}\theta = 2. \quad (4.0224)$$

Это соответствует случаю пластинки под действием всестороннего равномерного растяжения.

Наконец рассмотрим решение (4.023). Имеем

$$\nabla^2 \chi = 4(\lg r + 1). \quad (4.0231)$$

Уравнение (2.456) приводится тогда к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi_1) = 4(\lg r + 1),$$

откуда

$$r\psi_1 = 4\theta r \lg r + rf(r) + F(\theta),$$

т. е.

$$\psi_1 = 4\theta \lg r + f(r) + \frac{F(\theta)}{r}. \quad (4.0232)$$

Далее $\nabla^2 (\theta \lg r) = 0$, что легко проверить, вспомнив, что

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Следовательно, мы можем принять

$$\psi_1 = 4\theta \lg r \quad (4.0233)$$

и находим для перемещений и напряжений формулы:

$$2\mu U_r = (1 - 2\sigma) 2r \lg r - r, \quad (4.0234)$$

$$2\mu U_\theta = (1 - \sigma) 4r\theta, \quad (4.0235)$$

$$\widehat{rr} = 1 + 2 \lg r, \quad (4.0236)$$

$$\widehat{\theta\theta} = 3 + 2 \lg r, \quad (4.0237)$$

$$\widehat{r\theta} = 0. \quad (4.0238)$$

Это решение имеет тот недостаток, что, хотя система напряжений является вполне симметричной, перемещения не являются симметричными. Уравнение (4.0235) показывает, что радиусы-векторы, оставаясь прямыми, получают вращение пропорционально векторному углу. Другим недостатком этого решения является то, что перемещения не являются однозначными, так как $2\mu U_\theta$ увеличивается после полного оборота вокруг начала координат на величину $8\pi r(1 - \sigma)$.

§ 4.03. Толстостенные круговые цилиндры под действием внутреннего давления.

Несомненно, что поставленную задачу мы можем рассматривать как задачу плоской деформации, и следовательно, необходимо учесть при решении нормальные напряжения \widehat{zz} .

Кроме того необходимо во всех уравнениях взять величины напряжений и деформаций для случая плоской деформации, а постоянную σ заменить постоянной η .

Прежде всего мы предположим, что эта задача является задачей плоской деформации, а затем исследуем, какую величину получит продольное напряжение \widehat{zz} (какие допущения должны быть сделаны для продольного напряжения \widehat{zz}).

Мы имеем здесь случай, когда мы должны применить наши формулы к решению задачи плоской деформации. Поэтому мы должны в формулах § 4.02 поставить η вместо σ .

Так как поперечное сечение пустотелого цилиндра представляет круговое кольцо, мы должны выбрать такое решение, которое дало бы однозначные величины перемещений. Решение $\chi = r^2 \lg r$ для этого случая непригодно и мы должны его отбросить, и принять за функцию напряжения

$$\chi = Ar^2 + B \lg r, \quad (4.031)$$

что дает

$$\widehat{rr} = 2A + \frac{B}{r^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2}, \quad \widehat{r\theta} = 0, \quad (4.032)$$

$$u_r = \frac{A(1 - 2\eta)r}{\mu} - \frac{B}{2\mu r}, \quad u_\theta = 0. \quad (4.033)$$

Постоянные величины A и B определяются из условий на контуре.

Пусть a — внешний, b — внутренний радиусы цилиндра; p_0 — внешнее, p_1 — внутреннее давления.

Тогда

$$\widehat{rr} = -p_0, \quad \text{при } r = a,$$

$$\widehat{rr} = -p_1, \quad \text{при } r = b,$$

что приводит к

$$2A + \frac{B}{a^2} = -p_0; \quad 2A + \frac{B}{b^2} = -p_1,$$

откуда

$$A = \frac{p_1 b^2 - p_0 a^2}{2(a^2 - b^2)}, \quad B = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_1)}{(a^2 - b^2)}. \quad (4.034)$$

После этого, значения напряжения и перемещений могут быть легко вычислены.

Заметим еще, что

$$\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta} = 2 \frac{B}{r^2}, \quad (4.035)$$

так что максимальная числовая разность нормальных напряжений теперь всегда бывает на внутренней поверхности полого цилиндра.

Вставляя теперь значения A и B во вторую формулу (4.032), получим:

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{p_1 b^2 - p_0 a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} (p_0 - p_1)}{a^2 - b^2}. \quad (4.036)$$

Так как $\widehat{\theta\theta}$ меняется непрерывно при изменении r , то оно ($\widehat{\theta\theta}$) повсюду сохраняет один и тот же знак, за исключением того случая, когда оно имеет противоположные знаки при $r = a$ и $r = b$.

Из формулы (4.036) получаем:

при $r = a$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{2p_1 b^2 - p_0 (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}, \quad (4.0371)$$

и при $r = b$:

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{p_1 (a^2 + b^2) - 2p_0 a^2}{a^2 - b^2}, \quad (4.0372)$$

откуда следует, что $\widehat{\theta\theta}$ является всюду растяжением, если p_1/p_0 превышает наибольшую из величин $(a^2 + b^2)/2b^2$ и $2a^2/(a^2 + b^2)$, т. е. превышает $(a^2 + b^2)/2b^2$; $\widehat{\theta\theta}$ является всюду сжатием, если p_1/p_0 меньше, чем меньшая из величин $(a^2 + b^2)/2b^2$ и $2a^2/(a^2 + b^2)$, т. е. меньше, чем $2a^2/(a^2 + b^2)$; и $\widehat{\theta\theta}$ меняется от сжатия к растяжению, когда мы идем внутрь, если

$$(a^2 + b^2)/2b^2 > p_1/p_0 > 2a^2/(a^2 + b^2).$$

Обращаясь теперь к уравнению (2.221), получаем

$$\widehat{zz} = \lambda \Delta' = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\widehat{xx} + \widehat{yy}) = \tau (\widehat{xx} + \widehat{yy}) = \tau (\widehat{rr} + \widehat{\theta\theta}) = 4\eta A. \quad (4.038)$$

Продольное напряжение в толстостенном цилиндре является таким образом постоянной величиной и может быть устранено путем наложения решения, соответствующего равномерному растяжению, описанного в § 2.15. Это решение соответствует растягивающему напряжению $-4\eta A$ и не влияет на величины \widehat{rr} , $\widehat{r\theta}$ и $\widehat{\theta\theta}$; к перемещениям же u_r и u_θ прибавляются соответственно слагаемые $\frac{4\eta^2 A}{E} r$ и 0.

Полные перемещения после этого выразятся формулами:

$$u_r = \left\{ \frac{A(1 - 2\eta)}{\mu} + \frac{4\eta^2 A}{E} \right\} r - \frac{B}{2\mu r}, \quad u_\theta = 0. \quad (4.039)$$

Очевидно, что после наложения только что описанного решения $\widehat{zz} = 0$ во всех точках кольца задача свелась к задаче обобщенного плоского напряженного состояния, решение которой могло быть получено сразу. В самом деле, в этом случае $\widehat{xx} + \widehat{yy} = \widehat{rr} + \widehat{\theta\theta} = \text{const}$ и уравнения (2.2681) (2.2682) и (2.2691) — (2.2693) дают величины действительных напряжений и перемещений равными средним значениям напряжений и перемещений.

Что это так, легко проверить, так как

$$\frac{A(1-2\eta)}{\mu} + \frac{4\eta^2 A}{E} = \frac{A}{\mu} \left[1 - 2\eta + \frac{2\eta^2}{1+\eta} \right] = \frac{A}{\mu} \left[1 - \frac{2\eta}{1+\eta} \right] = \frac{A}{\mu} (1-2\sigma),$$

так что

$$u_r = \frac{A(1-2\sigma)}{\mu} r - \frac{B}{2\mu r},$$

величина, которую мы получили бы для U_r из соответствующей формулы для обобщенного плоского напряженного состояния.

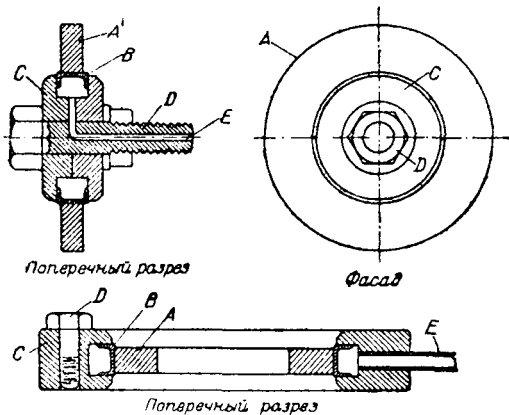
§ 4.04. Исследования напряжений в толстостенных пустотелых цилиндрах оптическим методом.

Значение толстостенных цилиндров в инженерной практике оправдывает опытные исследования в этом направлении, тем более, что аналитическое решение задачи при сложном внешнем контуре не всегда возможно. В тех случаях, когда необходимо получить радиальную деформацию внутреннего контура, наиболее удобным приспособлением является коническая пробка, точно прилегающая к подобному же конусу, ввернутому внутрь напрягаемого кольца. Полученная деформация может быть легко определена по осевому перемещению и диаметру концов конуса. Подобного же вида приспособление может быть устроено, чтобы вызвать радиальную деформацию на внешнем контуре.

Фиг. 4.04. Прибор для нагрузки гидростатическим давлением внутренней и внешней поверхности кольца.

мы получаем необходимые данные при изучении напряжений.

Примененное нами приспособление показано на фиг. 4.04 и состоит в следующем: очень тонкая манжета B , с корытообразным поперечным сечением, установлена в кольцеобразном канале двумя металлическими дисками C , соединенными между собою болтом D . Жидкость под давлением подается из насоса через трубку E в кольцеобразный канал и вызывает напряжения в кольце A , надетом на кожаную манжету. Эта последняя должна быть сделана настолько тонкой, что давления в несколько англ. фунтов на квадратный дюйм достаточно, чтобы разорвать ее; когда же на нее надето кольцо A , то давление в одну тонну и больше на квадратный дюйм может быть приложено безопасно и без заметного просачивания. С целью распределить давление возможно равномернее по толщине кольца оно должно быть сделано немного меньше внутренней ширины кожаной манжеты. Поперечное сечение подобного же приспособления для передачи давления жидкости на



внешнюю поверхность кольца также показано на этом рисунке, причем одни и те же части помечены одинаковыми буквами, так что дальнейшее описание является излишним.

Для простого случая толстостенного цилиндра будет достаточно сравнить величины $(\overline{rr}, \overline{\theta\theta})$, найденные теоретическим путем, с теми же величинами, полученными путем опыта. Если пренебречь внешним атмосферным давлением p_0 по сравнению с приложенным внутренним давлением p_1 , то мы имеем из уравнений (4.032) и (4.034)

$$\overline{rr} = \frac{p_1 b^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \overline{\theta\theta} = \frac{p_1 b^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right),$$

и

$$\overline{rr} - \overline{\theta\theta} = -\frac{2p_1 a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{1}{r^2}, \quad (4.041)$$

где (по симметрии) \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$ являются главными напряжениями. В случае кольца толщиной 0,6408 см, у которого $a = 5,08$ см и $b = 7,93$ см, под действием внутреннего давления в 33 кг/см² разность напряжений, $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$ в точках радиуса была найдена следующей:

Расстояние r (в см)	2,03	2,29	2,54	2,79	3,81	4,83
$(\overline{rr} - \overline{\theta\theta})$ в кг/см ² , полученная измерением . . .	7,6	56,1	44,3	37,1	25,7	10,7
$(\overline{rr} - \overline{\theta\theta})$ в кг/см ² , полученная вычислением . . .	69,6	55,2	44,6	36,8	26,4	12,4

Эта таблица показывает, что распределение напряжений, найденное теоретическим путем, подтвердилось на опыте и что применение манжеты с гидравлическим давлением дает правильные результаты, за исключением части кольца на небольшом расстоянии от внутреннего контура. Это подтверждается также измерениями величины $\overline{rr} + \overline{\theta\theta}$ (см. § 2.47), которая в этом случае должна иметь постоянное значение во всех точках кольца

$$\overline{rr} + \overline{\theta\theta} = \frac{2p_1 b^2}{a^2 - b^2} = 11,2 \text{ кг/см}^2.$$

Величины, полученные путем наблюдения, были:

Расстояние r (в см)	2,03	2,096	2,29	2,54	2,79	3,81	4,83	5,017
$\overline{rr} + \overline{\theta\theta}$ кг/см ² , полученные путем наблюдения	2,7	7,9	12,3	11,9	11,5	11,5	12,0	11,5

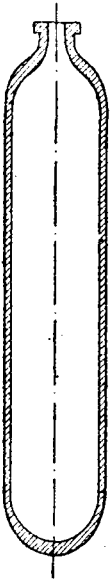
Из таблицы видно, что кожаная манжета в произведенном опыте повидимому не давала достаточно равномерного распределения давления на внутренней поверхности, но что это местное искажение весьма быстро исчезало при удалении от внутреннего контура. Это местное искажение выразилось в увеличении значений $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$ и уменьшении $\overline{rr} + \overline{\theta\theta}$ на внутреннем контуре и вблизи него.

Изохроматические линии показали, что распределение напряжений по всем остальным радиальным сечениям было такое же, как и по указанному в таблицах.

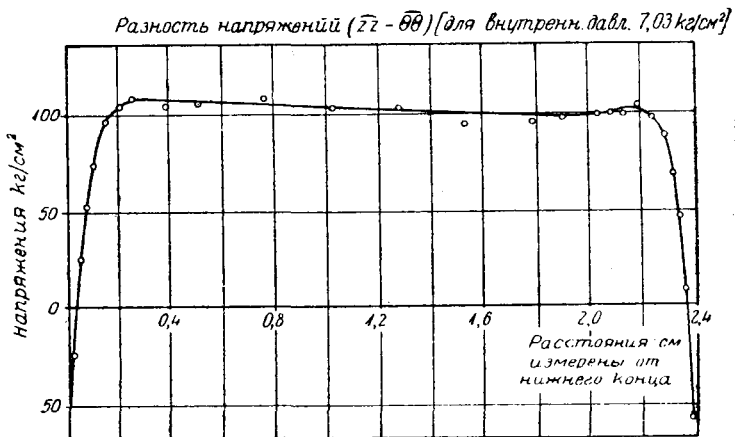
Аналогичными опытами было показано,¹ что составные цилиндры, подобно применяемым в орудиях, в сосудах для жидкости под высоким давлением и т. д., в которых один цилиндр надет на другой, могут быть исследованы этим же способом; местные искажения в передаче давления между ними не будут иметь места, если цилиндры тщательно выточены с небольшим уклоном по конусу и надеты один на другой под давлением, приложенным точно по оси.

§ 4.05. Цилиндрические сосуды; влияние днищ.

Другим весьма важным примером повседневного применения цилиндрических сосудов являются сосуды для кислорода, водорода, аммиака и тому подобных газов. С целью хранения возможно большей массы газа, в них применяется очень высокое давление от 100 до 120 кг/см^2 . Эти цилиндры изготавливаются с весьма большой тщательностью из материалов высшего качества, имея в виду серьезные последствия, могущие возникнуть, если будет иметь место разрушение оболочки. В большинстве случаев они имеют один полусферический конец, цилиндрическую часть



Фиг. 4.051.



Фиг. 4.052.

и второй конец, для наполнения, подобный по очертанию первому, поскольку присутствие клапанов и отверстий это позволяет. При изготовлении, процесс которого нет надобности здесь описывать, было установлено, что стенки этих газовых сосудов получаются несколько толще на полусферических концах, как показано на фиг. 4.051. С целью изучить распределение напряжений по длине сосуда и в особенности на его концах было проделано несколько экспериментальных исследований оптическим методом; при этом подверглись изучению как цилиндрические сосуды, с жесткими плоскими концами, изготовленные из нитроцеллюлозы, так и стеклянные сосуды с полусферическими днищами; напряжения вызывались давлением воды. Эти сосуды в полярикопе ведут себя как линзы без определенного фокусного расстояния, и поэтому оказалось необходимым погрузить их в стеклянный бак с параллельными сторонами, с целью увидеть и измерить оптические эффекты, вызванные внутренним давлением. Эти оптические эффекты, вообще говоря, видимы наилучшим образом в осевой плоскости сосуда. Поскольку во всех этих случаях имеет место цилиндрическая симметрия, это обстоятельство не создает затруднений.

Лист из нитроцеллюлозы, взятый для изготовления этих сосудов, имел модуль $E = 28200 \text{ кг/см}^2$ и предел пропорциональности $126,5 \text{ кг/см}^2$.

¹ E. G. Coker, Photo-elasticity, Journal of the Franklin Institute, March, 1925.

Сосуд для одного из опытов был изготовлен из листа толщиной в 0,152 см с прикрепленными к цилиндру плоскими днищами. Распределение средней разности напряжений $\widehat{zz} - \widehat{\theta\theta}$ по длине цилиндра для данного опыта дано на фиг. 4.052. Вдоль цилиндрической части сосуда не наблюдается заметных колебаний в кривой распределения разности напряжений; по мере же приближения концов имеет место небольшое возрастание, а затем весьма резкое падение с переходом через нуль до значительной отрицательной величины у заделки. Подобные же результаты были получены со стеклянными сосудами, диаметром около 8 см, с одним полусферическим концом и с другим, закрытым пробкой, снабженной кожаной манжетой и имеющей центральное отверстие для ввода воды.

Напряжение в тонкостенных цилиндрах с закрытыми концами было исследовано Грасгофом¹ математическим путем, при наличии некоторых предположений, значительно упростивших математическую обработку. Грасгоф предполагает, что напряжение в продольной полосе (вызванное раздачей цилиндра под влиянием давления, причем его средний радиус r переходит в $r + \rho$) складывается из продольного напряжения $p_1 = \frac{P}{A}$, где P — полное давление на днище, а A — площадь поперечного сечения, и напряжения изгиба, полученного по обычной формуле для балки, а именно $p_2 = B \frac{y}{R}$, где y — расстояние от средней поверхности стенок цилиндра, а R — радиус кривизны средней линии (медианы) продольного диаметрального сечения. Уравнения для напряжений в цилиндрических координатах, у которых начало взято в центре цилиндра, Грасгоф получил в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta} &= \eta \frac{P}{A} + E \frac{P}{r} - \frac{E}{1 - \eta^2} y \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \\ \widehat{zz} &= \frac{P}{A} - \frac{E}{1 - \eta^2} y \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \\ \widehat{rz} &= - \frac{E}{1 - \eta^2} \frac{t^2 - 4y^2}{8} \frac{\partial^3 \rho}{\partial z^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.051)$$

где t — толщина стенок цилиндра.

Подставляя эти величины в уравнение равновесия выделенного элемента, мы получаем величину ρ . Если концы цилиндра рассматривать как заделанные, так что для них $\rho = a$, постоянной величине, и $\frac{d\rho}{dz} = 0$, то максимальные напряжения будут в среднем и концевом сечениях. Грасгоф нашел, что в среднем сечении при внутреннем давлении p максимальное продольное напряжение и напряжение в тангенциальном направлении соответственно выражаются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{zz} &= (1 - 2\eta) \frac{pr}{2t} \\ \widehat{\theta\theta} &= (2 - \eta) \frac{pr}{2t} \end{aligned} \right\} \quad (4.052)$$

причем последнее больше первого. В этом сечении касательное напряжение отсутствует. Для концевого сечения Грасгоф нашел, что максимальные напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} \widehat{zz} &= \frac{pr}{2t} \left\{ (1 - \eta^2) + (2 - \eta) \sqrt{3(1 - \eta^2)} \right\} \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\eta}{\eta - 1} \widehat{zz} \end{aligned} \right\} \quad (4.053)$$

¹ *Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, стр. 316—29.*

причем оба имеют наибольшее числовое значение на внутренней поверхности цилиндра.

Наличие касательного напряжения в этом сечении делает возможным появление максимального нормального напряжения в середине стенки, но после дополнительных вычислений обнаружено, что это напряжение оказалось меньшим, чем напряжение на внутренней стороне стенки у концов. Действительно, исследование показало, что эта последняя величина \widehat{zz} оказывается наибольшей по сравнению с напряжением в любой точке.

Вероятнее всего, что концы сосудов, подвергавшихся экспериментальному исследованию, удовлетворяли условию $p = \text{постоянная}$ величине, но осуществить конструкцию так, чтобы угловые деформации не имели места, затруднительно.

Поэтому можно высказать предположение, что $\frac{dp}{dz}$ не равнялось нулю, как это принято в теоретическом исследовании. Текучесть материала уменьшает напряжения в цилиндрической части и вблизи ее концов. При сравнении результатов теории с результатами опыта нами была вычислена разность — напряжение для сечения по середине цилиндра из уравнения (4.052):

$$\widehat{\theta\theta} - \widehat{zz} = \frac{pr}{2t}(1 + \eta). \quad (*)$$

Величины, входящие в формулу (*), в наших опытах имели следующие числовые значения: $p = 7 \text{ кг/см}^2$, $r = 3,40 \text{ см}$, $t = 0,1542 \text{ см}$ и $\eta = 0,4$ для примененного материала. При этих значениях величина разности $\widehat{\theta\theta} - \widehat{zz} = 108,6 \text{ кг/см}^2$, что довольно хорошо соответствует величине, полученной путем опыта, а именно $105,5 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 4.052).

Для сечений у концов сосуда соответствие расчетных и опытных данных весьма неудовлетворительно; при тех же самых данных, применяя уравнения (4.053), мы должны получить $\widehat{\theta\theta} - \widehat{zz} = -2,80 \frac{pr}{t}$, что сходится с опытными данными весьма приблизительно. Поэтому очевидно, что теоретические предположения Грасгофа для концов цилиндра в данном случае не осуществляются; для всей же остальной части они повидимому имеют место.

Если бы эти предположения для концов цилиндра были более точно осуществлены, вероятно максимальные напряжения в этих местах были бы гораздо большими.

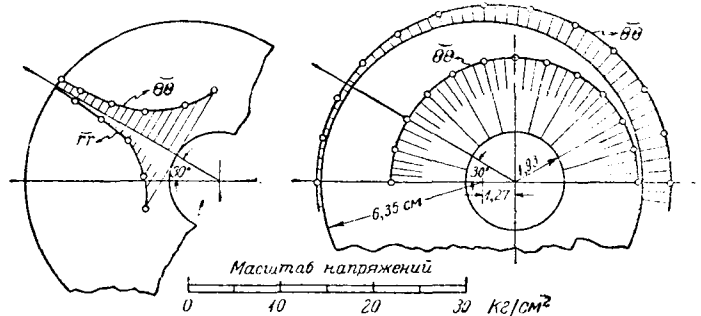
В сосудах, применяемых на практике, концы цилиндрической части могут оказаться в условиях такого же закрепления, как это имело место при экспериментальном исследовании, хотя обычно на практике и имеет место утолщение сферического днища, все же оно является недостаточным для того, чтобы заметным образом предотвратить поворот концевых сечений цилиндра. Если бы утолщение оказывало это влияние, то напряжения у концов были бы более значительными.

§ 4.06. Задача определения напряжений в эксцентричном цилиндре.

На практике мы иногда встречаемся со случаями, когда круговые очертания цилиндров высокого давления не являются концентричными. Эта неточность в изготовлении вызвана какими-либо случайностями, как например, для трубчатой цилиндрической отливки вследствие отклонения сердечника от направления ее оси или для цельнотянутой трубы вследствие неправильной прокатки. Если этот дефект не может быть исправлен, необходимо принять его в расчет и оценить влияние

эксцентриситета на распределение напряжений. За исключением мест у концов цилиндров, распределение напряжений можно рассматривать либо как для случая обобщенного плоского напряженного состояния, либо как для случая плоской деформации; полученные величины напряжений будут зависеть от принятого нами того или иного допущения. Для иллюстрации распределения напряжений выбран несколько необычный для практики случай (фиг. 4.06) цилиндра с внешним диаметром в 12,7 см и внутренним диаметром 3,856 см. Центры обоих круговых профилей расположены на расстоянии 1,3 см один от другого.

На этом чертеже показано распределение напряжений на внутреннем и внешнем контурах при действии внутреннего давления 7 кг/см². Нагрузка передавалась при помощи кожаной манжеты, поглощавшей 6,6% внутреннего давления; на чертеже также показано полученное на опыте распределение напряжений по одному из радиальных сечений.¹ В то время, когда производились эти опыты, не существовало теоретического решения для распределения напряжений в цилиндрах подобного вида, но с тех пор проф. Джеффери² получил точное решение для этого случая, применяя биполярные координаты, что позволяет проверить правильность этого и других экспериментальных исследований.



Фиг. 4.06.

Джеффери² получил точное решение для этого случая, применяя биполярные координаты, что позволяет проверить правильность этого и других экспериментальных исследований.

Это решение по существу является приложением общей теории напряжений в криволинейных координатах, что описано в главе II, § 2.32 и след., и мы приводим ее вследствие большого практического значения, которое она имеет. Преобразуем прежде всего уравнение $\nabla^4 \chi = 0$ для биполярных координат.

Из § 2.43 следует, что

$$\nabla^2 = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \tag{4.061}$$

В данном случае удобнее рассматривать уравнение для функции χ' , равной $\chi' = \chi/J$.

Мы находим

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \chi'}{\partial \xi^2} + \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \chi'}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \left(\frac{1}{J} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \chi'}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \left(\frac{1}{J} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \chi'}{\partial \eta} + \chi' \left(\frac{1}{J^2} \right) \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} \right),$$

$$a \nabla^2 \chi = (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial \eta^2} \right) - 2 \operatorname{sh} \xi \frac{\partial \chi'}{\partial \xi} - 2 \sin \eta \frac{\partial \chi'}{\partial \eta} + (\operatorname{ch} \xi + \cos \eta) \chi'$$

и

$$a \nabla^4 \chi = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial \eta^2} \right) - 2 \operatorname{sh} \xi \frac{\partial \chi'}{\partial \xi} - 2 \sin \eta \frac{\partial \chi'}{\partial \eta} + (\operatorname{ch} \xi + \cos \eta) \chi' \right],$$

¹ E. G. Coker, Photo-elasticity, Journal of the Franklin Institute, March, 1925.

² G. B. Jeffery, Plane stress and plane strain in bipolar coordinates, Phil. Trans A, vol. CCXXI, 1920, 265—93.

что после некоторых сокращений приводит к уравнению

$$\nabla^4 \chi = \frac{1}{J^3} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right] \left(\frac{\chi}{J} \right). \quad (4.062)$$

Если мы теперь рассмотрим преобразования § 2.39, то видим, что разрыв непрерывности для η в промежутке 2π имеет место, когда пересекаем отрезок AB (фиг. 2.39), а также, что сами точки A и B являются критическими точками, в которых $\xi = \pm \infty$, так что $J = 0$. Поэтому, чтобы не впасть в ошибку, необходимо исключить эти точки из области, на которую распространяется наше решение.

Разрыв непрерывности для η при пересечении AB требует, чтобы мы ограничились значениями η периодом 2π .

Что касается точек A и B , то надо заметить, что наше исследование распространяется на два замкнутых круга $\xi = \alpha_1$, $\xi = \alpha_2$, причем один из них целиком заключает в себе другой, а материал занимает пространство между ними. Отсюда следует, что точки A и B исключаются из рассмотрения и, следовательно, затруднения по этому поводу не могут возникнуть.

Перейдем теперь к отысканию решений вида χ/J , независимых от η , а также и таких, которые включают в себя множители $\cos \eta$ или $\sin \eta$.

Первый вид решения мы получаем из дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^4}{d\xi^4} - 2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right) \frac{\chi}{J} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\chi}{J} = (A + B\xi) \operatorname{ch} \xi + (C + D\xi) \operatorname{sh} \xi. \quad (4.0631)$$

Второй вид получаем из дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\chi}{J} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\chi}{J} = (E\xi + F + G \operatorname{ch} 2\xi + H \operatorname{sh} 2\xi) \cos(\eta + \varepsilon). \quad (4.0632)$$

Величины $A, B \dots H$ и ε в формулах (4.0631) и (4.0632) являются постоянными интегрирования.

Однако в виду разрыва непрерывности для η в точках, указанных выше, весьма существенно установить, чтобы как напряжения, так и перемещения были однозначны; для этого необходимо, чтобы они были периодическими функциями от η . Поскольку χ обладает этим свойством, а напряжения получаются из χ путем простого дифференцирования, очевидно, что это условие удовлетворено для напряжений.

Для того чтобы установить, удовлетворено ли условие однозначности для перемещений, применим для определения последних метод, приведенный в § 2.46. Из уравнения (2.4682), мы находим в данном случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right) \frac{\chi}{J} = 2B \operatorname{sh} \xi + 2D \operatorname{ch} \xi + (4G \operatorname{ch} 2\xi + 4H \operatorname{sh} 2\xi) \cos(\eta + \varepsilon),$$

откуда

$$\frac{Q}{J} = (2B \operatorname{ch} \xi + 2D \operatorname{sh} \xi) \eta + (2G \operatorname{sh} 2\xi + 2H \operatorname{ch} 2\xi) \sin(\eta + \varepsilon) + f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ определяются из уравнения (2.4681), которое приводит к

$$f_1''(\xi) - f_1(\xi) - f_2''(\eta) - f_2(\eta) - 4E \sin(\eta + \varepsilon) = 0.$$

Достаточно взять для $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ любое частное решение этого уравнения. Легко видеть, что

$$f_1(\xi) = 0, f_2(\eta) = 2E\eta \cos(\eta + \varepsilon)$$

является подходящим частным решением.

Таким образом мы имеем

$$\frac{Q}{J} = (2B \operatorname{ch} \xi + 2D \operatorname{sh} \xi) \eta + (2G \operatorname{sh} 2\xi + 2H \operatorname{ch} 2\xi) \sin(\eta + \varepsilon) + 2E\eta \cos(\eta + \varepsilon). \quad (4.064)$$

Слагаемые, могущие ввести неперериодичность в выражениях для перемещений, могут быть только те, которые зависят от Q , т. е. вида

$$-\frac{(1-\sigma)}{J} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad \frac{(1-\sigma)}{J} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad (\text{ср. 2.469})$$

а из них только те, которые получаются из выражения

$$Q = 2\eta J \{ B \operatorname{ch} \xi + D \operatorname{sh} \xi + E \cos(\eta + \varepsilon) \}. \quad (4.065)$$

Следовательно, чтобы удовлетворить условию однозначности перемещений, необходимо положить:

$$\varepsilon = 0, \quad E = -B, \quad D = 0.$$

В этом случае Q приводится к виду

$$2\eta JB (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) = 2aB \cdot \eta,$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = 2aB, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0,$$

и неоднозначные слагаемые, таким образом, не входят в выражения для перемещений. Из этого следует, что все возможные решения χ/J , удовлетворяющие всем условиям задачи, заключаются в выражениях:

$$\begin{aligned} & A \operatorname{ch} \xi + G \operatorname{sh} \xi, \\ & B\xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + (G \operatorname{ch} 2\xi + H \operatorname{sh} 2\xi + F) \cos \eta + \\ & + (G' \operatorname{ch} 2\xi + H' \operatorname{sh} 2\xi + F') \sin \eta. \end{aligned} \quad (4.066)$$

§ 4.07. Вычисление напряжений в эксцентрическом цилиндре.

Обращаясь вновь к формулам (2.4171) — (2.4173) и выражая их через χ/J , мы находим:

$$\widetilde{a_{\xi\xi}^{\chi}} = \left\{ (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \operatorname{sh} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \operatorname{ch} \xi \right\} \left(\frac{\chi}{J} \right), \quad (4.0701)$$

$$\widetilde{a_{\eta\eta}^{\chi}} = \left\{ (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \operatorname{sh} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos \eta \right\} \left(\frac{\chi}{J} \right), \quad (4.0702)$$

$$\widetilde{a_{\xi\eta}^{\chi}} = -(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\chi}{J} \right). \quad (4.0703)$$

Рассмотрим теперь подобный пустотелый цилиндр под действием равномерного давления P по внутренней поверхности и при отсутствии давления на внешнюю поверхность. Контурные условия тогда примут вид:

$$\begin{aligned} \overline{\xi\xi} &= -P, \quad \overline{\xi\eta} = 0, \quad \text{когда } \xi = \alpha_1, \\ \overline{\xi\xi} &= \overline{\xi\eta} = 0, \quad \text{когда } \xi = \alpha_2. \end{aligned}$$

Из условия симметрии задачи очевидно, что χ должно являться четной функцией от η . Поэтому достаточно взять решение в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{J} &= A \operatorname{ch} \xi + C \operatorname{sh} \xi + \\ &+ B\xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + (G \operatorname{ch} 2\xi + H \operatorname{sh} 2\xi + F) \cos \eta. \end{aligned}$$

Рассмотрим сперва решение вида

$$\frac{\chi}{J} = A \operatorname{ch} \xi + C \operatorname{sh} \xi,$$

которому соответствует:

$$\overline{a\xi\xi} = A, \quad \overline{a\eta\eta} = A, \quad \overline{a\xi\eta} = 0,$$

так что члену с коэффициентом C соответствует отсутствие напряжений и он может быть целиком опущен, а члену с множителем A соответствует равномерное растяжение A/a в материале цилиндра. Это решение совпадает с решением

$$\frac{\chi}{J} = F \cos \eta,$$

потому что каждое из них может быть превращено в другое путем прибавки слагаемого

$$\chi/J = \operatorname{const} \times (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \quad \text{или} \quad \chi = \operatorname{const};$$

эти добавочные слагаемые не вызывают напряжений. Поэтому мы можем не принимать в расчет члены с множителями A и C и сосредоточить наше внимание на слагаемых с коэффициентами B, G, H, F .

Когда мы вычислим соответствующие напряжения из приведенных выше уравнений, то получим

$$\begin{aligned} \overline{a\xi\xi} &= -B \operatorname{sh} \xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + G (\operatorname{ch} 2\xi - 2 \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} 2\xi \cos \eta) + \\ &+ H (\operatorname{sh} 2\xi - 2 \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} 2\xi \cos \eta) + F; \end{aligned} \quad (4.0711)$$

$$\begin{aligned} \overline{a\eta\eta} &= B \operatorname{sh} \xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + G (\operatorname{ch} 2\xi + 4 \operatorname{ch} 2\xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta - 2 \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} 2\xi \cos \eta) - \\ &- 4 \operatorname{ch} 2\xi \cos^2 \eta + H (\operatorname{sh} 2\xi + 4 \operatorname{sh} 2\xi \operatorname{ch} \xi \cos \eta - 2 \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} 2\xi \cos \eta) - \\ &- 4 \operatorname{sh} 2\xi \cos^2 \eta + F; \end{aligned} \quad (4.0712)$$

$$\begin{aligned} \overline{a\xi\eta} &= -B (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \sin \eta + 2G (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \operatorname{sh} 2\xi \sin \eta + \\ &+ 2H (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \operatorname{ch} 2\xi \sin \eta. \end{aligned} \quad (4.0713)$$

Условие, что $\overline{\xi\eta} = 0$, при $\xi = \alpha_1$ и $\xi = \alpha_2$, сразу приводит к

$$B = 2G \operatorname{sh} 2\alpha_1 + 2H \operatorname{ch} 2\alpha_1, \quad (4.0721)$$

$$B = 2G \operatorname{sh} 2\alpha_2 + 2H \operatorname{ch} 2\alpha_2. \quad (4.0722)$$

Условия, что

$$\overline{\xi\xi} = -P \quad \text{при } \xi = \alpha_1 \quad \text{и равно нулю при } \xi = \alpha_2,$$

приводят к следующим двум уравнениям:

$$a \overline{(\xi\xi)}_{\xi=\alpha_1} = -B \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + G \operatorname{ch} 2\alpha_1 + H \operatorname{sh} 2\alpha_1 + F = -Pa \quad (4.0723)$$

$$a \overline{(\xi\xi)}_{\xi=\alpha_2} = -B \operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ch} \alpha_2 + G \operatorname{ch} 2\alpha_2 + H \operatorname{sh} 2\alpha_2 + F = 0. \quad (4.0724)$$

Решение системы четырех уравнений (4.0721) — (4.0724) дает

$$B = 2aM \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2), \quad (4.0731)$$

$$G = -aM \operatorname{sh} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (4.0732)$$

$$H = aM \operatorname{ch} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (4.0733)$$

$$F = aM \{ \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{sh} 2\alpha_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) \}, \quad (4.0734)$$

где

$$M = \frac{1}{2} P \operatorname{cosech} (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \{ \operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2 \}^{-1}. \quad (4.0735)$$

Наиболее важной частью задачи является вычисление напряжений, возникающих в точках внутренней и внешней поверхностей цилиндра.

С этой целью необходимо вычислить напряжения $\overline{\eta\eta}$, при $\xi = \alpha_1$ и $\xi = \alpha_2$. Вычисление можно значительно упростить, определив сначала разность $\overline{\eta\eta} - \overline{\xi\xi}$. Из уравнений (4.0711) и (4.0712) получаем:

$$a \overline{(\eta\eta - \xi\xi)} = 2B \operatorname{sh} \xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + 4G \operatorname{ch} 2\xi \cos \eta (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + 4H \operatorname{sh} 2\xi \cos \eta (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) = 2 (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) [B \operatorname{sh} \xi + (2G \operatorname{ch} 2\xi + 2H \operatorname{sh} 2\xi) \cos \eta]. \quad (4.074)$$

Заменяя величины B , G и H их значениями, получаем

$$\overline{\eta\eta} - \overline{\xi\xi} = 4M (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) [\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{sh} (2\xi - \alpha_1 - \alpha_2) \cos \eta],$$

что приводит к следующему виду для $\overline{\eta\eta}$: на поверхности $\xi = \alpha_1$

$$\overline{(\eta\eta)}_{\alpha_1} = -P + \frac{2P (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \eta) [\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ctgh} (\alpha_1 - \alpha_2) + \cos \eta]}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2}, \quad (4.0751)$$

и на поверхности $\xi = \alpha_2$

$$\overline{(\eta\eta)}_{\alpha_2} = \frac{2P (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \eta) [\operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{ctgh} (\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \eta]}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2}. \quad (4.0752)$$

Эти формулы могут быть выражены через радиусы кругов r_1 и r_2 и расстояние d между их центрами.

Величины радиусов могут быть получены из уравнения (2.367). Здесь $r = \rho_2$ и

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) = -\frac{\operatorname{sh} \xi}{a}.$$

Таким образом

$$r_1 = -a \operatorname{cosech} \alpha_1, \quad r_2 = -a \operatorname{cosech} \alpha_2. \quad (4.0761)$$

Обратим особое внимание на знаки: α_1 и α_2 в рассматриваемом случае должны быть отрицательными.

Далее из уравнения преобразования (2.3911) следует, что абсцисса той точки, где круг $\xi = \alpha_1$ пересекает ось x справа от A , выражается формулой

$$x_1 = -a \operatorname{ctgh} \frac{1}{2} \alpha_1,$$

и абсцисса d_1 центра этого круга выражается через

$$d_1 = x_1 - r_1 = a \operatorname{cosech} \alpha_1 - a \operatorname{ctgh} \frac{1}{2} \alpha_1 = -a \operatorname{ctgh} \alpha_1. \quad (4.0762)$$

Подобным же образом для центра внешнего круга

$$d_2 = -a \operatorname{ctgh} \alpha_2, \quad (4.0763)$$

и таким образом расстояние d между центрами равно

$$d = d_2 - d_1 = a (\operatorname{ctgh} \alpha_1 - \operatorname{ctgh} \alpha_2). \quad (4.0764)$$

Заметим еще раз, что α_1 — отрицательно и численно больше, чем α_2 (см. фиг. 2.39).

Из этих уравнений мы получаем следующие:

$$d_1 = (r_2^2 - r_1^2 - d^2)/2d, \quad (4.0771)$$

$$d_2 = (r_2^2 - r_1^2 + d^2)/2d, \quad (4.0772)$$

$$a^2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2 - d^2)^2 - 4r_1^2 d^2}{4d^2} = \frac{(r_2^2 - r_1^2 + d^2)^2 - 4r_2^2 d^2}{4d^2} =$$

$$= \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 2d^2(r_2^2 + r_1^2) + d^4}{4d^2} = \frac{\{r_2^2 - (r_1 + d)^2\} \{r_2^2 - (r_1 - d)^2\}}{4d^2}, \quad (4.0773)$$

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d^2}{2r_1 d}, \quad (4.0774)$$

$$\operatorname{sh} \alpha_1 = -\frac{\{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 2d^2(r_2^2 + r_1^2) + d^4\}^{\frac{1}{2}}}{2r_1 d} = -\frac{a}{r_1}, \quad (4.0775)$$

$$\operatorname{ch} \alpha_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2r_2 d}, \quad (4.0776)$$

$$\operatorname{sh} \alpha_2 = -\frac{\{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 2d^2(r_2^2 + r_1^2) + d^4\}^{\frac{1}{2}}}{2r_2 d} = -\frac{a}{r_2}, \quad (4.0777)$$

откуда

$$\operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}, \quad (4.0778)$$

$$\operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2) = -\frac{ad}{r_1 r_2} = -\frac{\{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 2d^2(r_1^2 + r_2^2) + d^4\}^{\frac{1}{2}}}{2r_1 r_2}. \quad (4.0779)$$

Используя эти результаты, мы получаем, после некоторых сокращений

$$\widetilde{(\eta\eta)}_{\alpha_1} = -P + \frac{2Pr_2^2 \{ (r_2^2 - d^2)^2 - r_1^2 (r_1 + 2d \cos \eta)^2 \}}{(r_1^2 + r_2^2) \{ r_2^2 - (r_1 - d)^2 \} \{ r_2^2 - (r_1 + d)^2 \}}, \quad (4.0781)$$

$$\widetilde{(\eta\eta)}_{\alpha_2} = \frac{2Pr_1^2 \{ r_2^2 (r_2 - 2d \cos \eta)^2 - (r_1^2 - d^2)^2 \}}{(r_1^2 + r_2^2) \{ r_2^2 - (r_1 - d)^2 \} \{ r_2^2 - (r_1 + d)^2 \}} =$$

$$= \frac{2Pr_1^2 \{ r_2^2 (r_2 - 2d \cos \eta)^2 - (r_1^2 - d^2)^2 \}}{(r_1^2 + r_2^2) \{ r_1^2 - (r_2 - d)^2 \} \{ r_1^2 - (r_2 + d)^2 \}} \quad (4.0782)$$

(переставляя множители в знаменателе).

§ 4.08. Напряжения на внутренней поверхности.

Рассматривая напряжения на внутренней поверхности цилиндра, необходимо прежде всего отметить, что $(\eta\eta)_{\alpha_1} + P$ [см. (4.0781)] не может быть равным нулю, ибо такое равенство предполагало бы либо

$$\cos \eta = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d^2}{2r_1d}, \quad (4.081)$$

либо

$$\cos \eta = -\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1d}. \quad (4.082)$$

Правая часть первого равенства, как мы уже видели, есть $\operatorname{ch} \alpha_1$, и поэтому больше единицы; правая же часть второго равенства равняется $-(r_2/d) \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2)$, где оба множителя численно больше единицы, так как один круг лежит целиком внутри другого, $r_2 > r_1 + d$ и а fortiori $r_2 > d$. На основании сказанного заключаем, что сумма $(\eta\eta)_{\alpha_1} + P$ не изменит знака ни при каком значении η ; более того, мы видим, разлагая числитель на множители и принимая во внимание только что вычисленные соотношения, что числитель дроби в формуле (4.0781) всегда положителен. Поэтому он является наименьшим, когда $r_1 + 2d \cos \eta$ принимает наибольшее численное значение, а именно $r_1 + 2d$, при $\eta = 0$.

Таким образом наименьшее напряжение в точках внутренней поверхности имеет место при $\eta = 0$ и соответствует точке на линии центров у наиболее толстой части цилиндра. Это наименьшее напряжение на внутренней поверхности равно

$$P \left\{ \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1d - d^2}{r_2^2 - (r_1 - d)^2} - 1 \right\},$$

т. е.

$$P \left\{ \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{r_2^2 + 2r_1d - d^2 + r_1^2}{r_2^2 + 2r_1d - d^2 - r_1^2} - 1 \right\}. \quad (4.083)$$

Знаменатель второго множителя в первом члене является всегда положительным, поскольку $r_2 > r_1 + d$. Этот множитель поэтому имеет форму $\frac{A+B}{A-B}$, где $A > B$ и, следовательно, множитель больше единицы. С другой стороны, так как r_2 больше r_1 , то $2r_2^2/(r_1^2 + r_2^2) > 1$. Поэтому указанное выше первое слагаемое > 1 , и наименьшее контурное напряжение всегда является растяжением, а следовательно, контурное напряжение является растяжением в любой точке внутренней поверхности.

Контурное напряжение $\eta\eta$ будет наибольшим, когда $r_1 + 2d \cos \eta$ окажется численно наименьшим.

При рассмотрении максимума $(\eta\eta)_{\alpha_1}$ необходимо различать два случая: 1) расстояние между центрами меньше половины внутреннего радиуса, т. е. $r_1 + 2d \cos \eta$ никогда не меняет знака и будет наименьшим при $\eta = \pi$; 2) расстояние между центрами больше половины внутреннего радиуса, тогда численный минимум $r_1 + 2d \cos \eta$ будет нулем при $\cos \eta = -r_1/2d$.

Взяв по порядку эти два случая, мы имеем: 1) максимальное растягивающее напряжение при $\eta = \pi$, т. е. в точке на линии центров у наиболее тонкой части стенки цилиндра. Его величина равняется:

$$P \left\{ \frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{r_2^2 - d^2 - 2r_1d + r_1^2}{r_2^2 - d^2 - 2r_1d - r_1^2} - 1 \right\}; \quad (4.084)$$

2) максимальные растягивающие напряжения имеют место в точках, положение которых определяется равенством

$$\cos \eta = -r_1/2d,$$

величина их выражается формулой

$$P \left[\frac{2r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{(r_2^2 - d^2)^2}{\{r_2^2 - (r_1 - d)^2\} \{r_2^2 - (r_1 + d)^2\}} - 1 \right]. \quad (4.085)$$

В этом случае напряжение при $\eta = \pi$ (наиболее тонкая часть стенок цилиндра) является промежуточным минимумом, хотя все же бóльшим, чем наименьшее напряжение при $\eta = 0$.

§ 4.09. Напряжение на внешней поверхности.

Из уравнения (4.0782) мы видим, что для обращения в нуль $(\overline{\eta\eta})_\alpha$ должно выполняться одно из следующих условий:

$$\cos \eta = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2r_2d} = \text{ch } \alpha_2,$$

что невозможно, или

$$\cos \eta = \frac{r_2^2 + r_1^2 - d^2}{2r_2d}. \quad (4.091)$$

Последнее равенство, однако, может иметь место лишь в том случае, если

$$2r_2d > r_2^2 + r_1^2 - d^2,$$

т. е.

$$(d + r_2)^2 > 2r_2^2 + r_1^2,$$

или

$$d > \sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2. \quad (4.092)$$

Напряжение $(\overline{\eta\eta})_\alpha$ является алгебраическим максимумом, когда $r_2 - 2d \cos \eta$ является численным максимумом, что имеет место при $\eta = \pi$. Мы тогда получаем

$$\overline{\eta\eta} = 2Pr_1^2 \frac{(r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2) \{ (r_2 - d)^2 - r_1^2 \}}; \quad (4.093)$$

это напряжение является всегда растяжением, поскольку $r_2 > d$ и $r_2 - d > r_1$.

Так же, как и для напряжений на внутренней поверхности возможны два случая:

1) Расстояние между центрами меньше половины внешнего радиуса, тогда алгебраический минимум (который однако может быть максимальным сжатием, если $d > \sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2$, как указано выше) имеет место при $\eta = 0$. Величина этого напряжения выразится тогда формулой

$$\frac{2Pr_1^2 (r_2^2 + r_1^2 - 2r_2d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2) \{ (r_2 + d)^2 - r_1^2 \}}. \quad (4.094)$$

Его знак зависит от условия, приведенного выше.

2) Расстояние между центрами превышает половину внешнего радиуса, тогда алгебраические минимумы получаются в точках, определяемых условием $\cos \eta = r_2/2d$. Эти алгебраические минимумы неизбежно являются отрицательными, так что они соответствуют максимальным сжимающим напряжениям, выраженным формулой

$$\frac{2Pr_1^2 (r_1^2 - d^2)^2}{(r_1^2 + r_2^2) \{ r_2^2 - (r_1 - d)^2 \} \{ r_2^2 - (r_1 + d)^2 \}}. \quad (4.095)$$

Мы получаем тогда при $\eta = 0$ алгебраический максимум, соответствующий минимальному сжатию.

Отметим в этом случае, что, так как $r_1 < r_2 - d$ и $d > \frac{1}{2}r_2$, то r_1 всегда $< \frac{1}{2}r_2$, так что

$$\sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2$$

меньше, чем $\sqrt{\frac{9}{4}r_2^2 - r_2}$, т. е. $\frac{1}{2}r_2$; отсюда следует, что если расстояние $d > \frac{1}{2}r_2$, то оно также всегда больше $\sqrt{2r_2^2 + r_1^2} - r_2$, и условие для возможности появления сжатия удовлетворено, как и следовало ожидать.

Контурное напряжение меняет свою величину, начиная с максимального растяжения у наиболее тонкого места ($\eta = \pi$), уменьшается до нуля при

$$\cos \eta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_2d},$$

после чего переходит в сжатие. Это сжатие увеличивается до максимума при $\cos \eta = \frac{r_2}{2d}$ и затем уменьшается до минимума при $\eta = 0$.

Если мы теперь сравним наибольшее растяжение с наибольшим сжатием, то мы найдем, что первое больше или меньше второго, смотря по знаку неравенства

$$r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2 \geq \frac{(r_1^2 - d^2)^2}{(r_2 + d)^2 - r_1^2},$$

т. е.

$$(r_2^2 + 2r_2d + r_1^2 - d^2)(r_2^2 + 2r_2d - r_1^2 + d^2) \geq (r_1^2 - d^2)^2,$$

т. е.

$$(r_2^2 + 2r_2d)^2 \geq 4(r_1^2 - d^2)^2,$$

или

$$r_2^2 + 2r_2d \geq \sqrt{2}(d^2 - r_1^2),$$

так как в этом случае d всегда $> r_1$.

Но $2d > r_2$, следовательно $r_2^2 + 2dr_2 > 2r_2^2$; также каждое из $d + r_1$, $d - r_1$ меньше r_2 , поэтому

$$\sqrt{2}(d^2 - r_1^2) < \sqrt{2}r_2^2 < 2r_2^2.$$

Отсюда следует, что в неравенстве должен быть взят верхний знак, поэтому растяжение в точке $\eta = \pi$ всегда является численно наибольшим напряжением.

§ 4.10. Точка с наибольшим напряжением.

Вопрос, в какой точке поперечного сечения цилиндра будет иметь место наибольшее напряжение, трудно разрешить в общем виде.

Даже, если мы допустим (вообще говоря, это допущение не является правильным), что наибольшее напряжение имеет место на поверхности, не легко установить, примет ли оно наибольшее значение на внутренней или на внешней поверхности.

Мы видели, что наибольшее напряжение на внешней поверхности выражается формулой

$$\frac{2Pr_1^2(r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2)\{(r_2 - d)^2 - r_1^2\}},$$

и на внутренней поверхности

$$-P + \frac{2Pr_2^2(r_2^2 + r_1^2 - 2r_1d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2) \{r_2^2 - d^2 - 2r_1d - r_1^2\}},$$

если $d < \frac{1}{2}r_1$, и формулой

$$-P + \frac{2Pr_2^2(r_2^2 - d^2)^2}{(r_1^2 + r_2^2) \{r_2^2 - (r_1 - d)^2\} \{r_2^2 - (r_1 + d)^2\}},$$

если $d > \frac{1}{2}r_1$.

Производя сравнение для первого случая, мы видим, что напряжение на внутренней поверхности больше или меньше напряжения на внешней поверхности, смотря по знаку неравенства:

$$\frac{2r_2^2(r_2^2 + r_1^2 - 2r_1d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2)(r_2 + r_1 + d)(r_2 - r_1 - d)} - \frac{2r_1^2(r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2)(r_2 + r_1 - d)(r_2 - r_1 - d)} \geq 1,$$

которое переходит в

$$2r_2^2(r_2^2 + r_1^2 - 2r_1d - d^2)(r_2 + r_1 - d) - 2r_1^2(r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2)(r_2 + r_1 + d) - (r_1^2 + r_2^2)(r_2 + r_1 + d)(r_2 + r_1 - d)(r_2 - r_1 - d) \geq 0. \quad (4.101)$$

Обозначая левую сторону этого неравенства через $f(d)$, мы видим, что

$$f(0) = \{2r_2^2(r_2^2 + r_1^2) - 2r_1^2(r_1^2 + r_2^2)\}(r_1 + r_2) - (r_1^2 + r_2^2)(r_1 + r_2)^2(r_2 - r_1) = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1)^2(r_1^2 + r_2^2) > 0,$$

так что, если d достаточно мало, наибольшее напряжение всегда получается на внутренней поверхности

Сделав перестановку, мы можем написать

$$f(d) = (r_1^2 + r_2^2)(r_2 - r_1 - d)(r_2 + r_1 + d)(r_2 + r_1 - d) - 8r_1^2r_2^2d.$$

Если мы подставим сюда $d = \frac{1}{2}r_1$, то получим

$$f\left(\frac{1}{2}r_1\right) = (r_1^2 + r_2^2)\left(r_2 - \frac{3}{2}r_1\right)\left(r_2 + \frac{3}{2}r_1\right)\left(r_2 + \frac{1}{2}r_1\right) - 4r_1^3r_2^2.$$

Эта величина, очевидно, становится отрицательной, если r_2 превосходит $\frac{3}{2}r_1$. Таким образом, в случае достаточно тонкого кольца, в его наиболее узкой части наибольшее напряжение будет иметь место на внешней поверхности. Мы замечаем, что $f(\infty) > 0$, $f(-\infty) < 0$, и $f(r_2 - r_1) < 0$, так что все корни уравнения $f(d) = 0$ действительны и лежат между $-\infty$ и 0, 0 и $r_2 - r_1$, $r_2 - r_1$ и $+\infty$, причем первый и последний являются очевидно неподходящими. Из этого следует, что наибольшее напряжение переходит из точек одной поверхности к точкам другой только один раз.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $d > \frac{1}{2}r_1$. Наибольшее напряжение на внутренней поверхности теперь превышает или становится меньшим, чем наибольшее напряжение на внешней поверхности, смотря по знаку неравенства

$$\frac{2r_2^2(r_2^2 - d^2)^2}{(r_1^2 + r_2^2) \{(r_2 + d)^2 - r_1^2\} \{(r_2 - d)^2 - r_1^2\}} - \frac{2r_1^2(r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2)}{(r_1^2 + r_2^2) \{(r_2 - d)^2 - r_1^2\}} - 1 \geq 0,$$

т. е.

$$2r_2^2(r_2^2 - d^2)^2 - 2r_1^2\{(r_2 + d)^2 - r_1^2\}\{r_2^2 + r_1^2 + 2r_2d - d^2\} - (r_1^2 + r_2^2)\{(r_2 + d)^2 - r_1^2\}\{(r_2 - d)^2 - r_1^2\} \geq 0. \tag{4.102}$$

Если мы дадим d в этом неравенстве наибольшее из возможных значений, а именно: $r_2 - r_1$, то левая часть неравенства (4.102) приводится к виду:

$$2r_1^2r_2^2\{2r_1^2 - (2r_2 - r_1)^2\},$$

и так как в этом случае

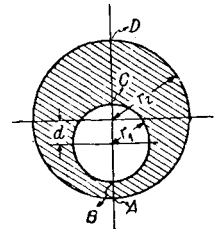
$$r_2 > \frac{3}{2}r_1 \left(r_2 > r_1 + d, d > \frac{1}{2}r_1 \right),$$

то множитель в фигурных скобках является всегда отрицательным, а поэтому наибольшее напряжение в этом случае имеет место в точках внешней поверхности.

Из сказанного следует: что если расстояние d между центрами мало, наибольшее напряжение будет в точках внутренней поверхности. Однако, независимо от величины радиусов существует критическое значение для d , при переходе через которое точка наибольшего напряжения переходит на внешнюю поверхность

Следует заметить, что изложенное выше получено при предположении, что напряжение не достигает максимального значения внутри материала стенок. Математическое исследование этого вопроса было бы чрезвычайно сложным и здесь не приводится.

Экспериментальное решение задачи о распределении напряжений в толстостенных цилиндрах с эксцентрической базой было произведено (фиг. 4.10) для ряда колец, подвергнутых давлению по их внутренним поверхностям с помощью приспособления, описанного в § 4.04, причем было измерено напряжение $\eta\eta$ в точках A, B, C и D . Полученные величины приведены в таблице 4.10 для четырех случаев, когда величины r_1, r_2 и d изменялись в значительных пределах; во всех случаях было получено полное соответствие между опытом и расчетом. Поскольку теоретическое решение является точным, следовало ожидать подобного совпадения. Более детальные данные могут быть найдены в работе, указанной на стр. 265.



Фиг. 4.10. Чертеж цилиндра с разной толщиной стенок.

Таблица 4.10.

Средняя толщина колец = 0,6408 см. Давление 7 кг/см².

№ кольца	1	2	3	4
Внутренний радиус r_1 (в см)	1,928	1,928	1,928	1,908
Внешний радиус r_2 (в см)	6,350	4,440	3,160	2,301
Эксцентриситет d (в см)	1,27	0,643	0,632	0,071
Нормальное напряжение ($\eta\eta$) в кг/см ²	3,2	6,0	24,6	39,5
В точке A полученное путем опыта	} 3,1	5,8	22,1	39,4
„ „ A „ „ вычисления				
В точке B полученное путем опыта	9,1	11,5	25,4	45,1
„ „ B „ „ вычисления	9,5	12,1	25,3	46,6
В точке C „ „ опыта	8,2	9,6	12,4	32,8
„ „ C „ „ вычисления	8,6	9,8	12,7	32,6
В точке D „ „ опыта	0,6	1,8	3,3	24,7
„ „ D „ „ вычисления	0,6	2,0	3,4	23,6

§ 4.11. Увеличение напряжения, вызванное небольшими ошибками в центрировании контуров.

Если расстояние d между центрами мало по сравнению с радиусами или разностью радиусов, то наибольшее напряжение имеет место на внутренней поверхности при $\eta = \pi$ и выражается формулой (4.084). Если мы развернем это выражение, оставляя только первые степени d , то получим наибольшее напряжение в виде:

$$P \left\{ \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{8r_1^2 r_2^2 d}{(r_2^2 - r_1^2)^2 (r_2^2 + r_1^2)} \right\}. \quad (4.111)$$

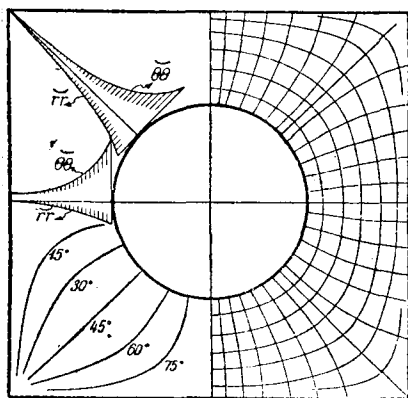
Первый член представляет собою в соответствии с хорошо известной формулой напряжение на внутренней поверхности вполне концентрической трубы, а второй член представляет собой добавочное напряжение, вызванное небольшой ошибкой при центрировании контуров. Если плохо центрированную трубу сравнить с концентрической трубой того же внутреннего радиуса, с внешним радиусом, соответствующим наименьшей толщине стенок, так что $r'_2 = r_2 - d$, то наибольшее напряжение в этой второй трубе выразится формулой

$$P \left(\frac{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 d + d^2}{r_2^2 - r_1^2 - 2r_2 d + d^2} \right) = P \left\{ \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{4r_1^2 r_2 d}{(r_2^2 - r_1^2)^2} \right\} \quad (4.112)$$

с той же точностью, что и раньше. Это максимальное напряжение будет больше, чем напряжение в эксцентрической трубе, так как

$$4r_1^2 r_2 (r_2^2 + r_1^2) > 8r_1^2 r_2^2.$$

Поэтому прочность подобной трубы может быть надежно вычислена по обычным формулам для толстостенных труб, если мы примем, что внешний радиус равен внутреннему радиусу плюс наименьшая толщина стенок трубы.



Фиг. 4.11. Изоклины, линии главных напряжений и распределение напряжений в цилиндре с внешним очертанием по квадрату.

Этот вывод, конечно, относится только к сравнительно небольшим ошибкам центрирования. В общем случае могут быть составлены таблицы для максимальных напряжений, появляющихся при различных соотношениях радиусов и различном расстоянии между центрами.

Различные другие случаи распределения напряжения встречаются на практике в толстостенных цилиндрах, где условия задачи еще более усложнены наличием других видов внешних поверхностей, для которых, повидимому, невозможно применить ни один из способов решения задачи, известных в настоящее время.

Подобного рода пример имеет место в практике холодильного дела, где цилиндр компрессора иногда изготавливается из стальной болванки, обычно с округленными углами, путем высверливания в ее центре цилиндрического отверстия, как показано на фиг. 4.11.

Этот случай и другие задачи подобного же вида, как например, работа сплошного блока для четырех или более цилиндров, применяемого иногда в практике автомобильного моторостроения, в настоящее время полностью не изучены; поэтому представляется единственно возможным указать общий характер полученных на опыте

изоклинических линий и линий напряжений, а также дать график распределения радиального и тангенциального напряжений в наименьшем и наибольшем радиальных сечениях.

§ 4.12. Круговое кольцо при чистом изгибе.

Рассмотрим теперь третье решение § 4.02.

Помножим названное решение на небольшой множитель D и применим его к кольцу, разрезанному по двум смежным радиусам AB и CD , соответствующим значениям угла $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi - \varepsilon$, где ε — небольшой угол (фиг. 4.12) (в этом случае перемещения могут быть определены как однозначные функции координат). Тогда, вследствие деформации [см. уравнение (4.0235)], радиус OCD повернется на угол $\frac{8\pi D(1-\sigma)}{2\mu}$ в направлении, соответствующем стремлению закрыть прорез в кольце, и займет положение $OC'D'$.

Чтобы контурные круги $r = a$ и $r = b$ были бы свободны от напряжений, необходимо на названное решение наложить два других симметричных решения.

Окончательно наше решение принимает вид:

$$\chi = Ar^2 + B \lg r + Dr^2 \lg r. \tag{4.121}$$

Производя соответствующие операции дифференцирования, мы получаем средние напряжения

$$\bar{r}r = 2A + \frac{B}{r^2} + D(1 + 2 \lg r), \tag{4.1221}$$

$$\bar{\theta}\theta = 2A - \frac{B}{r^2} + D(3 + 2 \lg r), \tag{4.1222}$$

$$\bar{r}\theta = 0. \tag{4.1223}$$

Условия, что на поверхности $r = a$ и $r = b$ не действуют внешние усилия, дают уравнения

$$2A + \frac{B}{a^2} + D(1 + 2 \lg a) = 0, \tag{4.1231}$$

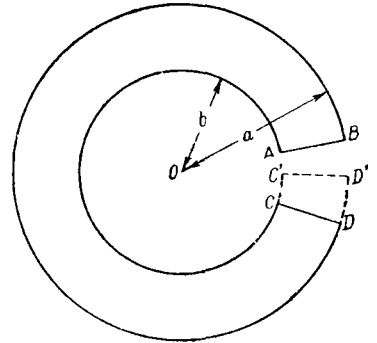
$$2A + \frac{B}{b^2} + D(1 + 2 \lg b) = 0. \tag{4.1232}$$

Остается рассмотреть усилия по граням AB и CD прореза.

Очевидно, что эти усилия (поскольку $\bar{r}\theta = 0$) не имеют радиальной составляющей.

Составляющая усилия, перпендикулярная радиусу, равна

$$\int_b^a \bar{\theta}\theta dr = 2A(a - b) + B\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + D(a - b + 2a \lg a - 2b \lg b). \tag{4.1241}$$



Фиг. 4.12.

Легко показать, что правая часть уравнения (4.1241) тождественно равна нулю; для этого достаточно умножить (4.1231) на a и (4.1232) на b и вычесть из первого второе.

Таким образом, силы, действующие по граням AB и CD , приводятся к паре сил. Обозначим через M момент этой пары, направленный против часовой стрелки. Взяв момент относительно точки O , мы имеем

$$\begin{aligned} -M &= \int_b^a r \overline{\theta} dr = A(a^2 - b^2) - B(\lg a - \lg b) + \\ &+ D(a^2 - b^2 + a^2 \lg a - b^2 \lg b). \end{aligned} \quad (4.1242)$$

Уравнения (4.1231), (4.1232) и (4.1242) определяют A, B, D в функции изгибающего момента M .

Находим

$$A = \frac{M(a^2 - b^2 + 2a^2 \lg a - 2b^2 \lg b)}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 (\lg a/b)^2}, \quad (4.1251)$$

$$B = -\frac{4a^2 b^2 M \lg a/b}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 (\lg a/b)^2}, \quad (4.1252)$$

$$D = -\frac{2(a^2 - b^2)M}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 (\lg a/b)^2}. \quad (4.1253)$$

Заметим, что круги радиуса r , концентрические с кругами контуров, преобразовались при деформации в концентрические круги со средним радиусом $r + U_r$, так что среднее изменение кривизны равно $-U_r/r^2$, или

$$\frac{A(1 - 2\sigma)}{\mu r} - \frac{B}{2\mu r^3} + D \left\{ \frac{(2 - 4\sigma) \lg r - 1}{2\mu r} \right\}. \quad (4.126)$$

Это изменение кривизны, однако, различно в зависимости от r , и в данном случае нет простой зависимости вида $M = k \times$ кривизна.

Мы можем приведенное выше решение рассматривать еще с другой точки зрения. С этой целью будем считать, что зазор между сечениями AB и CD настолько мал, что перемещения в соответствующих точках сечений AB и CD будут идентичными, за исключением поворота из CD в $C'D'$. Поэтому, если мы представим себе, что величина зазора так подобрана, что $C'D'$ совпадает с AB и оба конца склеены вместе, мы приходим к тому положению, что соответствующие точки обоих сечений будут наложены друг на друга.

Из этого следует, что мы можем вызвать рассмотренный вид деформации, вырезав из кольца небольшой клин ($ABDC$) и склеив края прореза. После этого мы получим целое кольцо, не испытывающее действие внешних нагрузок, но подверженное системе внутренних напряжений.

Деформации этого вида были названы у Вольтерра „distorzioni“¹ и „смещением“ у Ловэ². Этот вид деформаций является основным, когда мы рассматриваем пластинки с прорезанными в них отверстиями; к рассмотрению этого случая мы вернемся позднее.

§ 4.13. Экспериментальная проверка для кругового кольца при чистом изгибе.

Экспериментальная проверка для случая кругового кольца при чистом изгибе легче всего может быть проведена путем исследования напряжений в радиальном

¹ V. Volterra, Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, Ann. de l'École Normale, Paris, sér. III, 24 (1907), стр. 401—517.

² Love, Mathematical Theory of Elasticity (4-th ed.). Appendix to Chaps. VIII and IX.

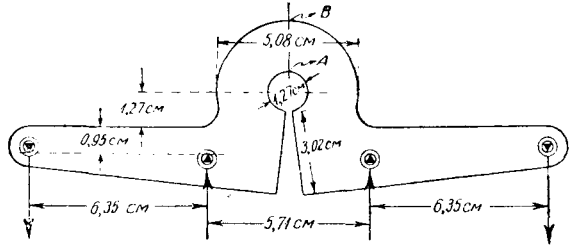
сечении балки, имеющей вид, показанный на фиг. 4.131. Из пластинки нитроцеллюлозы вырезано полукольцо с внешним радиусом $a = 2,54$ см и внутренним радиусом $b = 0,64$ см. Выступающие концы приспособлены для приложения требуемых нагрузок, чтобы дать определенный изгибающий момент в среднем сечении AB . Эта балка лежит на двух опорных призмах, проходящих через отверстия, имеющие втулки из стальных трубок. Одна из этих призм закреплена неподвижно, а другая может при изгибе балки передвигаться в горизонтальном направлении, как описано в § 3.02, с целью обеспечить постоянное направление реакций параллельно среднему сечению AB .

Нагрузки прикладываются к внешним концам с помощью калиброванных пружинных весов.

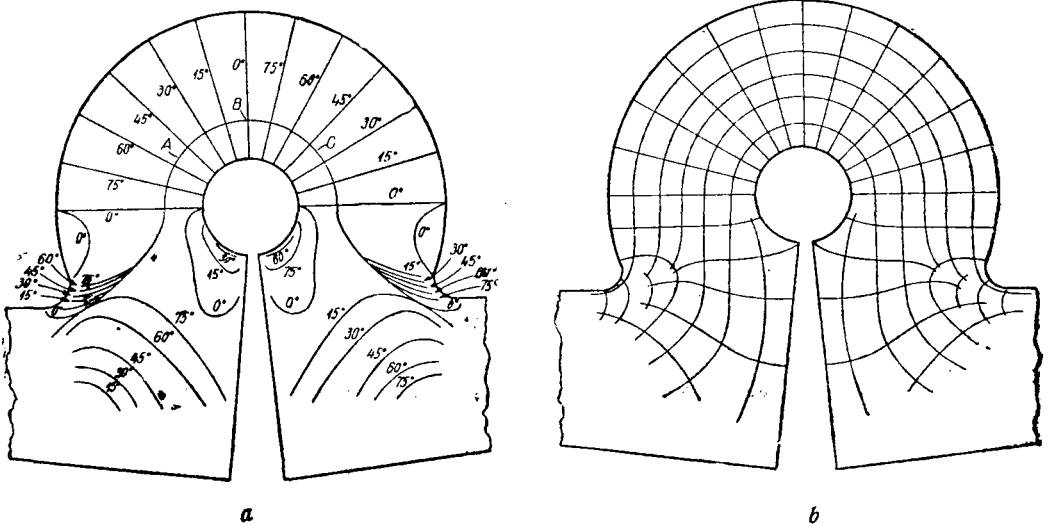
Всякое стремление к изгибу в направлении, перпендикулярном плоскости балки, устраняется усилением плеч рычагов по обеим сторонам с помощью жестких ребер, создающих надежный момент сопротивления изгибу в этом направлении.

Изоклинические линии (фиг. 4.132а) являются в точности радиальными прямыми в пределах значительного угла с обеих сторон изучаемого сечения, но принимают несколько запутанный характер при приближении к опорам.

Черная полоса ABC , пересекающая радиальные изоклинические линии под прямым углом, повидимому имеет сходство с нейтральным слоем прямой балки.



Фиг. 4.131. Кривой стержень при нагрузке, вызывающей чистый изгиб.



Фиг. 4.132 (а) и (б). Изоклины и линии главных напряжений в кривом стержне при чистом изгибе.

Однако, как показывают вычисления, это обстоятельство указывает только на то, что хотя в каждой точке этой кривой $P - Q = 0$, все же P и Q (здесь они равны соответственно $\theta\theta$ и rr) имеют равные значения, отличные от нуля. Действительно, ни в одной точке этого бруса напряжение не обращается в нуль, и поэтому здесь

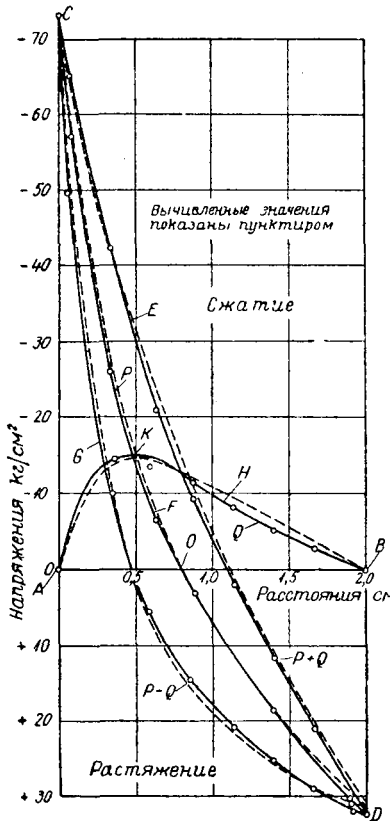
нет соответствия нейтральному слою прямого бруса, подверженного действию постоянного изгибающего момента.¹

Переходя теперь к изучению распределения напряжений в сечении AB , приводим в таблице 4.13 найденные экспериментально в достаточном числе точек величины $P \pm Q$. На диаграмме фиг. 4.133 эти величины нанесены вместе с кривыми для P и Q , полученными из первых путем сложения и вычитания.

Эти кривые указывают, как это уже было указано выше, что в данном случае нет действительного нейтрального слоя, а лишь при радиусе, равном 1,080 см, величина $P - Q$ равняется нулю.

Площадь сжатия OAC (рис. 4.133) равняется $3,92 \text{ см}^2$ (масштаб диаграммы $1 \text{ см} = 10 \text{ кг/см}^2$ и $1 \text{ см} = 0,5 \text{ см}$), площадь же растяжения OBD равняется $3,89 \text{ см}^2$, что показывает, что изучаемое сечение подвергается действию чистого изгиба.

С целью сравнения распределения напряжений, полученного путем измерений, с результатами вычислений, мы подставляем найденные выше (4.1251, 2,3) значения постоянных A , B и D в формулы для rr и $\theta\theta$; тогда мы имеем



$$\left. \begin{aligned} Q = rr &= -\frac{M}{S} \left\{ (a^2 - b^2) \lg \frac{r}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) b^2 \lg \frac{a}{b} \right\}, \\ P = \theta\theta &= -\frac{M}{S} \left\{ (a^2 - b^2) + a^2 \lg \frac{r}{a} - \right. \\ &\quad \left. - b^2 \lg \frac{r}{b} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{a}{b} \right\}, \\ r\theta &= 0, \end{aligned} \right\} (4.13)$$

где

$$S = \left\{ \frac{1}{4} (a^2 - b^2)^2 - a^2 b^2 \left(\lg \frac{a}{b} \right)^2 \right\},$$

а M — изгибающий момент на единицу толщины.

Имея в виду, что толщина образца равняется 0,465 см, мы можем вычислить напряжения по этим формулам.

Полученные данные приведены в таблице 4.131 и нанесены на диаграмму 4.133.

Совпадение между теоретическими и экспериментальными данными получается весьма точное, и тот факт, что величины напряжений Q , найденные путем опытов, не столь хорошо согласуются с теорией, как опытные значения P , может быть объяснен тем, что первые определены с помощью метода разностей, который при малых Q может дать некоторые погрешности. Из уравнения (4.13) получаем:

$$P - Q = \frac{M}{S} \left\{ (a^2 - b^2) - \frac{2a^2 b^2}{r^2} \lg \frac{a}{b} \right\},$$

¹ Кривые главных напряжений мы получаем обычным графическим построением из поля изоклин (фиг. 4.132b). Из чертежа ясно, что кривые главных напряжений у среднего сечения и вблизи его образуют окружности и радиальные прямые.

Таблица 4.131.

Расстояние от внутреннего края в см	Экспериментальные значения				Теоретические значения			
	$P+Q$	$P-Q$	P	Q	$P+Q$	$P-Q$	P	Q
0	-72,8	-72,8	-72,8	- 0	-70,7	-70,7	-70,7	- 0
0,064	-64,7	-49,9	-57,3	- 7,4	-63,6	-52,0	-57,6	- 5,9
0,318	-42,2	-10,0	-26,1	-16,1	-42,0	-11,6	-26,8	-15,3
0,576	-21,1	+ 6,0	- 7,5	-13,6	-24,3	+ 6,5	- 8,9	-15,4
0,826	-10,0	+15,0	+ 2,4	-12,4	-10,6	+15,8	+ 2,6	-13,2
1,800	- 1,8	+20,9	+11,3	-11,4	+ 9,8	+21,4	+11,2	-10,2
1,334	+12,0	+24,0	+17,9	- 6,0	+11,0	+24,9	+17,9	- 7,0
1,586	+21,1	+26,9	+24,0	- 2,9	+19,8	+27,6	+23,6	- 3,8
1,841	+28,1	+30,0	+29,0	- 0,9	+27,5	+29,0	+28,3	- 0,8
1,905	+29,9	+29,9	+29,9	- 0	+29,3	+29,3	+29,3	- 0

или $P - Q$ обращается в нуль при

$$r = \sqrt{\left(2a^2 b^2 \lg \frac{a}{b}\right) / \left(a^2 - b^2\right)} = 1,09 \text{ см},$$

что также очень хорошо согласуется с опытными измерениями, приведенными выше. Таким образом экспериментальные исследования подтверждают теорию с значительной точностью.

§ 4.14. Сосредоточенная сила в точке внутри бесконечной пластинки.

Рассмотрим решение

$$\chi = x \lg r = r \lg r \cdot \cos \theta. \tag{4.141}$$

Легко проверить, что

$$\nabla^2 \chi = \frac{2 \cos \theta}{r}. \tag{4.142}$$

Для определения перемещений применим метод § 2.45. Из уравнения (2.456) имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \psi_1) = \frac{2 \cos \theta}{r}, \tag{4.1431}$$

откуда

$$r \psi_1 = 2 \sin \theta \cdot \lg r + r f(r) + F(\theta),$$

или

$$\psi_1 = \frac{2 \lg r}{r} \sin \theta + f(r) + \frac{F(\theta)}{r}.$$

Но согласно уравнению (2.3381) $\nabla^2 \psi_1 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = 0,$$

что приводит к выражению:

$$-\frac{4 \sin \theta}{r^3} + f''(r) + f'(r) + \frac{F(\theta)}{r^3} + \frac{F''(\theta)}{r^3} = 0, \tag{4.1432}$$

или

$$F''(\theta) + F(\theta) - 4 \sin \theta + r^3 f''(r) + r^2 f'(r) = 0. \quad (4.1433)$$

Очевидно, что мы можем взять любое частное решение, удовлетворяющее уравнению (4.1433). Возьмем $f(r) = 0$, тогда уравнение для $F(\theta)$ будет

$$\frac{d^2 F}{d\theta^2} + F = 4 \sin \theta, \quad (4.1434)$$

частный интеграл которого легко найти путем обычных методов в виде:

$$F = -2\theta \cos \theta.$$

Таким образом

$$\psi_1 = \frac{2 \lg r}{r} \sin \theta - \frac{2\theta \cos \theta}{r} \quad (4.144)$$

есть искомая функция перемещений в полярных координатах. Уравнения (2.458) тогда дают

$$2\mu U_r = -(1 + \lg r) \cos \theta + (1 - \sigma) \{2(\lg r - 1) \cos \theta + 2\theta \sin \theta\}, \quad (4.1451)$$

$$2\mu U_\theta = \lg r \cdot \sin \theta + (1 - \sigma) \{2(1 - \lg r) \sin \theta + 2\theta \cos \theta\}. \quad (4.1452)$$

Величины средних напряжений получаются из уравнений (2.421, 2, 3), откуда

$$\overline{rr} = \frac{\cos \theta}{r} = \overline{\theta\theta}, \quad \overline{r\theta} = \frac{\sin \theta}{r}. \quad (4.146)$$

Это решение соответствует случаю, когда сумма сил, приложенных к точкам круга радиуса r , описанного вокруг начала координат, равна нулю. Момент этих сил относительно начала координат также равен нулю, так что рассматриваемое решение соответствует действию системы сил, приложенных в точках круга радиуса r и находящихся в статическом равновесии.

Заметим однако, что величины перемещений U_r и U_θ не являются однозначными. Оказывается, что после полного обхода вокруг начала координат к величинам $2\mu U_r$ и $2\mu U_\theta$ должны быть прибавлены соответственно слагаемые:

$$4\pi(1 - \sigma) \sin \theta \quad \text{и} \quad 4\pi(1 - \sigma) \cos \theta. \quad (4.1461)$$

Поэтому невозможно применять это решение для нахождения напряжений в пластинке, представляющей одно целое. Позже мы увидим, как использовать этот результат.

Сейчас, имея в виду, что $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ является решением уравнения $\nabla^2 \theta = 0$, исследуем выражение

$$\chi = y\theta. \quad (4.1471)$$

Находим

$$\nabla^2 \chi = \frac{2x}{r^2} = \frac{2 \cos \theta}{r}; \quad (4.1472)$$

сравнивая это выражение с формулой (4.142), видим, что это исследуемое решение приводит к тем же значениям ψ_1 , как и первое. Соответственным образом мы находим

$$2\mu U_r = -\theta \sin \theta + 2(1 - \sigma) \{(\lg r - 1) \cos \theta + \theta \sin \theta\}, \quad (4.1473)$$

$$2\mu U_\theta = -(\sin \theta + \theta \cos \theta) + 2(1 - \sigma) \{(1 - \lg r) \sin \theta + \theta \cos \theta\}, \quad (4.1474)$$

$$\overline{rr} = \frac{2 \cos \theta}{r}, \quad \overline{\theta\theta} = 0, \quad \overline{r\theta} = 0. \quad (4.1475)$$

Разложив напряжение \overline{rr} , действующее по площадке $r = \text{const}$, на направления осей x и y , получаем

$$\overline{rx} = \frac{2 \cos^2 \theta}{r}, \quad \overline{ry} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r}. \quad (4.1476)$$

Обозначим через X , Y составляющие усилия, действующие на цилиндрическую поверхность $r = \text{const}$, толщина которой равна единице; тогда

$$X = \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta}{r} r d\theta = 2\pi, \quad Y = \int_0^{2\pi} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \quad (4.1477)$$

Также очевидно, что эта система сил дает момент, равный нулю относительно начала координат, так как все усилия (см. 4.1475) действуют исключительно в радиальном направлении.

Только что полученное решение также не может быть распространено на всю пластинку по той же причине, что и в предыдущем случае, а именно, потому, что $2\mu U_r$ и $2\mu U_\theta$ не являются однозначными функциями, и следовательно, после полного обхода вокруг начала координат увеличиваются соответственно на величины

$$2\pi(1 - 2\sigma) \sin \theta \quad \text{и} \quad 2\pi(1 - 2\sigma) \cos \theta. \quad (4.1478)$$

Однако совершенно очевидно, что наложение одного решения на другое дает однозначность в перемещениях.

Умножим предыдущее решение на $(1 - 2\sigma)/2(1 - \sigma)$, т. е. на $\frac{(1 - \eta)}{2}$, и вычтем из него последнее; получим:

$$\chi = \frac{1}{2}(1 - \eta) r \lg r \cos \theta - r \theta \sin \theta, \quad (4.1481)$$

$$\overline{rr} = -\frac{3 + \eta}{2} \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.1482)$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{1 - \eta}{2} \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.1483)$$

$$\overline{r\theta} = \frac{1 - \eta}{2} \frac{\sin \theta}{r}, \quad (4.1484)$$

$$2\mu U_\theta = \frac{3 - \eta}{2} \lg r \sin \theta \quad (4.1485)$$

и

$$2\mu U_r = -\cos \theta \left\{ \frac{3 - \eta}{2} \lg r - \frac{1 + \eta}{2} \right\}. \quad (4.1486)$$

Это решение представляет собой систему напряжений, вызванных силой 2π , приложенной в начале координат в *положительно* [поскольку решение (4.1471) было *вычтено*] направлении оси Ox .

Особенно отметим, что хотя ни дифференциальное уравнение для χ , ни формула для величины приложенной силы не содержат отношения упругих постоянных, тем не менее χ и выражения для напряжений неизбежно зависят от упругих постоянных. Это вызывается тем обстоятельством, что благодаря периодическому характеру перемещений для χ должны были быть соединены два решения, и η вошло в окончательную формулу как следствие этого наложения.

Очевидно, если мы прибавим какую-нибудь постоянную величину к θ во всех полученных формулах, то это вызовет поворот всего тела, как одного целого, на некоторый угол.

Так, подставляя $\theta - \pi/2$ вместо θ , мы получим решения:

$$\chi = r \lg r \sin \theta, \quad \chi = -r \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta,$$

или $\chi = -x\theta$, так как слагаемое $\frac{\pi}{2} \times r \cos \theta = \frac{\pi x}{2}$ может быть отброшено, ибо оно очевидно ничего не изменит в величине напряжений. Соединяя эти два решения, получим:

$$\chi = \frac{1 - \eta}{2} r \lg r \sin \theta + r\theta \cos \theta,$$

что даст решение для случая деформации, вызванной силой 2π , направленной в положительную сторону оси Oy .

§ 4.15. Сила, приложенная к вершине клина.

Решения, полученные из функций напряжений $\chi = y\theta$ и $\chi = -x\theta$, могут быть приложены без изменения к случаю пластинки, представляющей сектор, ограниченный радиусами $\theta = \pm \alpha$, проведенными из начала координат.

Напряжения, соответствующие этим решениям, будут:

для $\chi = y\theta, \quad \overline{rr} = 2 \cos \theta / r, \quad (4.151)$

для $\chi = -x\theta, \quad \overline{rr} = 2 \sin \theta / r; \quad (4.152)$

$\overline{r\theta}$ и $\overline{\theta\theta}$ равняются нулю.

Равнодействующее усилие, передаваемое через дугу радиуса r , выражается для решения (4.151):

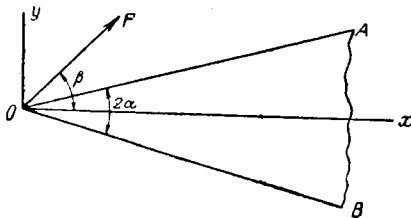
$$X = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2 \cos^2 \theta d\theta = 2\alpha + \sin 2\alpha,$$

$$Y = 0;$$

для решения (4.152)

$$X = 0,$$

$$Y = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2 \sin^2 \theta d\theta = 2\alpha - \sin 2\alpha.$$



Фиг. 4.151.

Следовательно, если силу, приложенную к вершине клина, обозначим через F , угол, который составляет ее направление с осью симметрии клина, через β , то решение будет иметь вид

$$\chi = (Ay - Bx)\theta, \quad (4.153)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(2\alpha + \sin 2\alpha) &= -F \cos \beta \\ B(2\alpha - \sin 2\alpha) &= -F \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.154)$$

Напряжение, получаемое из решения (4.153), будет равно:

$$\overline{rr} = -\frac{2F}{r} \left(\frac{\cos \theta \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin \theta \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right); \quad (4.155)$$

остальные составляющие напряжения равны нулю.

Так как $\tilde{r}\theta = 0 = \tilde{r}\theta$, то внешние усилия по граням OA и OB равны нулю. Таким образом это решение соответствует случаю равновесия клина под действием одной силы F , приложенной к вершине.

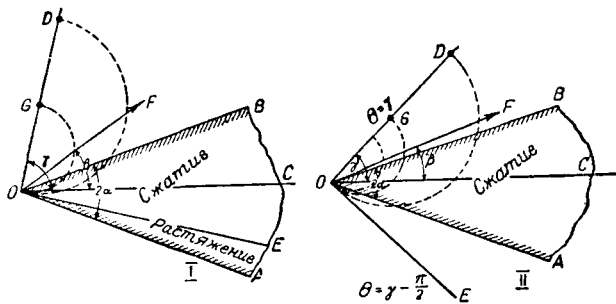
Этот вывод имеет существенное значение при оценке распределения напряжений в резце, когда он делает неглубокий надрез. Кроме того рассматриваемое решение дает величину напряжений в суживающейся к концу консоли под нагрузкой, приложенной в конце перпендикулярно оси консоли. Чтобы получить решение для этого последнего случая, необходимо положить $\beta = \pi/2$ в приведенных выше формулах.

Изохроматические линии, соответствующие уравнению (4.155), определяются равенством $\tilde{r}r = -k$ или

$$kr = 2F \left\{ \frac{\cos \theta \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin \theta \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right\} = 2pF \cos(\theta - \gamma), \tag{4.156}$$

где

$$p \cos \gamma = \frac{\cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad p \sin \gamma = \frac{\sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha}, \tag{4.157}$$



Фиг. 4.152.

так что

$$p = \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}}, \tag{4.158}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \tag{4.159}$$

Кривые (4.156) представляют собой круги, центры которых расположены на линии $\theta = \gamma$. Уравнение (4.159) показывает, что γ всегда больше β , так что если направление внешней силы лежит вне клина, то линия центров изохроматических линий или цветных полос также лежит вне клина; однако последнее может иметь место даже и тогда, когда направление приложенной силы лежит внутри контура клина.

Общая касательная в точке O к изохроматическим линиям направлена под прямым углом к линии центров, так что ее уравнение имеет вид

$$\theta = \gamma \pm \frac{1}{2} \pi;$$

и в силу уравнения (4.156) она соответствует нейтральной линии ($k = 0$).

Если $\gamma > \frac{1}{2} \pi - \alpha$, то линия лежит внутри клина и видима при просвечивании в виде черной полосы. Изохроматические линии в этом случае проходят через начало координат. Если $\gamma < \frac{\pi}{2} - \alpha$, то подобное обстоятельство уже не имеет места и изохроматические линии пересекают грани клина на определенном расстоянии от начала координат B . На фиг. 4.152 показаны оба случая.

Когда резец делает неглубокий надрез, силы, действующие на него, могут быть с достаточным приближением заменены одной силой, приложенной в точке O , и при помощи оптического метода изучения напряжений мы можем определить величину и направление этой силы, пользуясь уравнениями (4.156) — (4.159).

Найдя с помощью простого геометрического построения центр G любой изохроматической линии, мы получаем линию OG — искомую линию центров. Угол γ , образуемый ею с осью клина, может быть таким образом измерен. Если угол 2α клина известен, то уравнение (4.159) дает β . Измерение координат (r, θ) какой-либо точки на изохроматической линии данного параметра k позволяет из уравнения (4.156) определить F . Обычно для измерения удобно взять ту точку, где изохроматическая линия, о которой идет речь, встречает край клина.

Иногда (например в случае II, фиг. 4.152) пригоден еще один простой метод. Если известная изохроматическая линия пересекает оба края клина ($\theta = \pm \alpha$) на расстояниях r_1, r_2 от O , то:

$$kr_1 = 2F \left\{ \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right\},$$

$$kr_2 = 2F \left\{ \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right\},$$

откуда

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left\{ \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right\},$$

что дает β , после чего любое из двух уравнений определит F .

Приведенные выше результаты будут в достаточной степени правильными даже тогда, когда напряжения в острие резца перешли предел текучести, при условии, что изохроматическая линия, взятая при определении β и F , расположена на достаточном расстоянии от острия резца.

Отметим, что изоклинические линии во всех случаях являются прямыми, проходящими через вершину клина.

§ 4.16. Распределение напряжения в резце.

Экспериментальные исследования,¹ проделанные с резцами из стекла при снятии стружки с ксилонитового диска, показывают, что система напряжений, возникающих в резцах, по видимому является системой простого типа, могущей возникнуть под влиянием одной силы, действующей на режущее ребро резца. Однако чрезвычайно затруднительно установить полное распределение напряжений в крайней точке стеклянного резца при его работе.

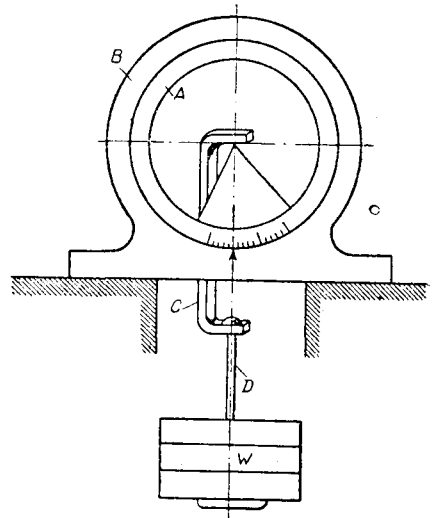
Эта трудность усложняется еще тем, что оптическая постоянная для стекла мала и поэтому цветные полосы не столь хорошо видимы, как это имеет место, например, в ксилонитовых или бакелитовых образцах. Упругие постоянные для стекла и ксилонита колеблются в следующих пределах: для зеркального стекла, например, величина E , полученная путем измерения,² равняется $0,7 \times 10^6$ кг/см², а для ксилонита $0,2 \times 10^6$; коэффициент Пуассона соответственно равняется 0,227 и 0,4. Отношение величины E/η в этих двух случаях равно около $1/63$ и величины поперечных деформаций для стекла и ксилонита находятся в этом же соотношении. На основании этих данных целесообразнее применить косвенный метод при решении этой задачи, а именно исследовать клин, изготовленный из ксило-

¹ E. G. Coker and K. C. Chakko, An account of some experiments on the action of cutting tools, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, 1922.

² F. D. Adams and E. G. Coker, An investigation into the elastic constants of rocks, Proceedings of the Carnegie Institution, Washington 1906.

нита, нагруженный силой, приложенной к его вершине. С этой целью клин с углом в 60° у вершины прикреплен к пластинке *A* (фиг. 4.161), представляющей собой градуированный кольцеобразный диск с внешним диаметром, равным 10 см. Диск вставлен в раму *B* таким образом, что ось клина может образовать любой угол (в широких пределах) с вертикальным направлением. Нагрузка на клин передается при помощи стремени *C* и подвески *D*. С целью предотвратить местное разрушение материала вершина клина была закруглена по кривой малого радиуса, насколько это было возможно.

Исследование напряженного состояния в подобном клине под влиянием внешней нагрузки было произведено сперва при симметричном положении клина относительно линии нагрузки, а затем в положениях, когда ось клина образует с вертикалью углы в 5° , 10° , 15° и 20° . Характерной особенностью во всех этих случаях является то, что изоклинические линии, вообще говоря, расположены почти радиально по отношению к точке приложения нагрузки и это направление меняется только при приближении к заделанному краю клина. Isoхроматические линии представляют собою приблизительно дуги кругов, центры которых лежат в каждом отдельном случае на определенной линии. У вершины клина, где материал перешел уже за предел упругости, цветные полосы не являются дугами кругов и распределение напряжений в этом месте не может быть в настоящее время определено с достаточной степенью точности, поскольку основные законы оптического метода недостаточно хорошо изучены. Однако есть основания предполагать, что в материале резца, работающего в пределах упругости на всем протяжении вплоть до вершины, распределение напряжений будет того же самого вида, как было найдено для части ксилонитового клина, работающей в пределах упругости.



Фиг. 4.161.

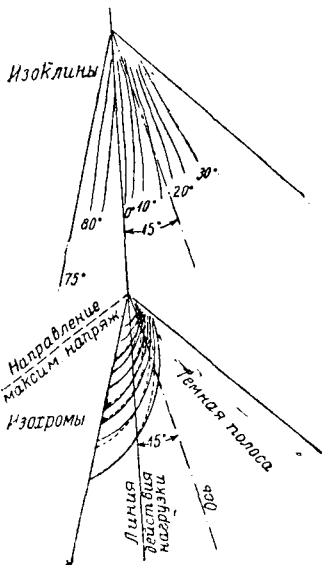
Под влиянием симметрично расположенной нагрузки, изохроматические линии, характеризующие величину разности главных напряжений, представляют собою приблизительно дуги кругов, центры которых лежат на линии действия силы, проходящей через вершину клина. Однако, если материал вершины переходит в пластичное состояние, то по площади смятия имеет место перераспределение и выравнивание напряжений. Isoхроматические линии, расположенные непосредственно ниже смятой части, оказываются приблизительно параллельными линии раздела упругого и пластичного материала, и на этом протяжении цветные полосы имеют больший радиус, чем это следует из формул теории упругости вследствие указанного явления перераспределения напряжений. Когда нагрузка несколько несимметрична, цветные полосы, характеризующие разность напряжений, все же остаются приблизительно дугами кругов, с центрами, лежащими на линии, проходящей через вершину клина; но эта линия теперь наклонена под значительным углом по отношению к оси симметрии. Для еще больших отклонений приложенной силы наблюдаются те же характерные особенности, и появляется темная радиальная полоса, указывающая на отсутствие напряжения в определенной части материала, что подтверждают следующие изменения. Все это согласуется с теоретическими выводами § 4.15.

Картина распределения напряжений в несимметрично нагруженном клине показана на фиг. 4.162, где цветные полосы изображают изохроматические линии (линии $P - Q = \text{const}$). Поле изохром получается при круговой поляризации, так

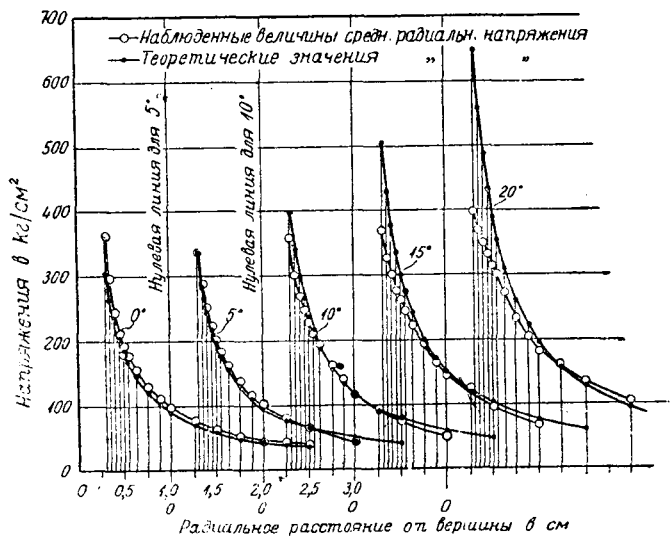
как в этом случае все изоклинические места уничтожаются. Следует заметить, что материал острия клина уже работает в пластичной зоне и поэтому стал полупрозрачным. Цветные полосы непосредственно ниже этой пластичной зоны следуют за ее очертанием, но на достаточном расстоянии от нее снова принимают вид дуг кругов.

На фиг. 4.163 изображены изоклинические и изохроматические линии для клина с углом в 60° при нагрузке в $22,7 \text{ кг}$, а также нанесены кривые (пунктиром) разности главных напряжений, вычисленные по уравнению (4.156).

Последние кривые, как указано в § 4.15, являются кругами, проходящими через вершину клина; центры их лежат на линии, проведенной под прямым углом к темной полосе, показанной на фиг. 4.163.



Фиг. 4.163. Сплошной линией показаны опытные кривые разности $(P - Q) = \text{const}$. Теоретические кривые — пунктиром.



Фиг. 4.164. Напряжения в точках линии, совпадающей с нагрузкой, для клина с углом 60° . Модель толщиной $0,254 \text{ см}$. Груз равен $22,5 \text{ кг}$. Графики относятся к различным направлениям силы.

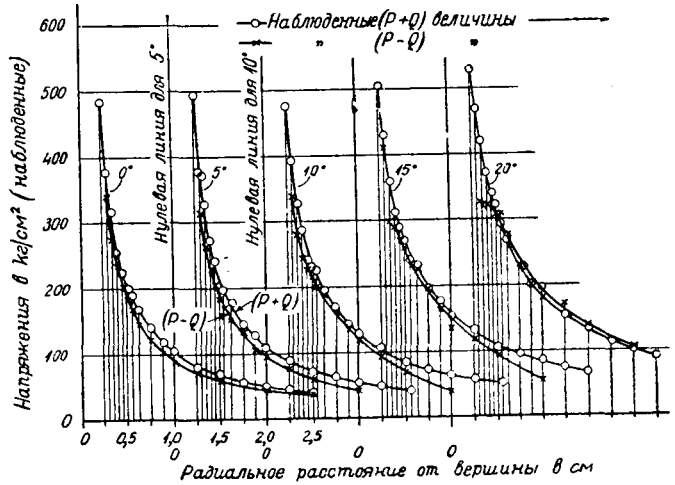
Измерения величины напряжения ради удобства были произведены только вдоль линии действия нагрузки. Величины $(P \pm Q)$, полученные для различных направлений линии действия силы, нанесены на фиг. 4.164. Эти измерения указывают на наличие некоторого нормального напряжения Q ($Q = \bar{q}$), которое также выявляется на графике в виде разности ординат двух серий кривых. Это напряжение, вообще говоря, незначительно и, повидимому, вызвано боковым изгибом образца при наклонных нагрузках. В этих последних случаях величины \bar{r} , полученные экспериментальным путем, и величины \bar{r} , полученные путем вычислений, не столь хорошо согласуются между собой, как в других случаях, вследствие больших величин напряжения.

Наглядное сравнение сделано на фиг. 4.165, где средние значения величин $(P + Q)$ и $P - Q$ фиг. 4.164 взяты за величины \bar{r} для сравнения с теми же величинами, вычисленными из уравнения (4.155).

Расхождение при углах в 15° и 20° достаточно велико вблизи вершины клина, вследствие перехода материала в пластическое состояние и возможного случайного влияния изгиба. Вероятно в очень толстой пластинке это расхождение было бы меньше.

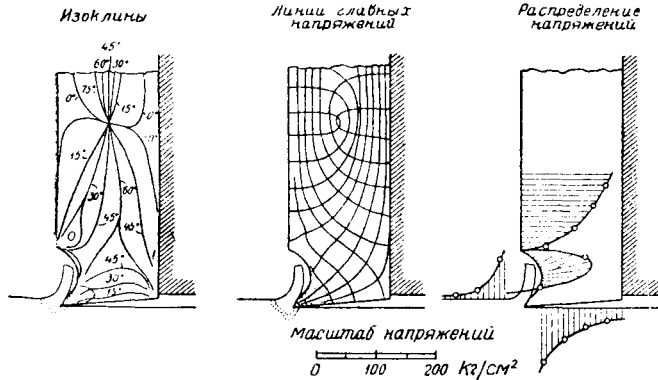
Описанные экспериментальные данные в целом могут быть рассматриваемы как подтверждение теории распределения напряжений в вершине клина. Допустив это, мы значительно упростим наблюдения над работой резцов, производимые с помощью этого метода. При тонкой стружке распределение напряжений может быть получено только из наблюдений за одними цветными полосами без необходимости поперечных или других измерений; при этом только одна точка цветной полосы требует калибровки для возможности вычисления напряжения в любой точке упругой зоны резца.

Кроме того, как это уже описано выше (§ 4.15), величина и направление силы, вызванной резанием, также могут быть получены из наблюдения цветных полос. Однако вплоть до настоящего времени не представлялось возможным поддерживать в должном состоянии режущее ребро инструмента, изготовленного из прозрачного материала в течение достаточного промежутка времени, чтобы обеспечить измерения напряжений в этом ребре. В виду этого введено следующее изменение: изготавливаются два резца совершенно одинаковых очертаний — один из стали, а другой из твердого ксилонита или бакелита.



Фиг. 4.165. Напряжения в точках линии нагрузки для клина с углом 60°.

Стекло в данном случае неприемлемо, так как оно слишком хрупко.



Фиг. 4.166. Распределение напряжений в резце и обрабатываемом материале.

Если в материале резца нет остаточных деформаций, то распределение напряжений в нем, получаемое с помощью оптического метода, не отличается от распределения напряжения в стальном резце, следовательно распределение напряжений в стальном резце может быть найдено, исходя из картины распределения напряжений в ксилонитовом образце.

Для пояснения этих опытов мы приводим несколько измерений для строгального резца. На фиг. 4.166 показан резец из бакелита, поддерживаемый сзади стальной пластинкой, прижатой к незаконченному надрезу, сделанному стальным резцом.

Пунктирные линии показывают положения изохроматических линий, соответствующие серии пурпурно-голубого цвета. Линия этого цвета является наиболее резко очерченной из всех наблюдаемых систем линий при применении белого света. Следует заметить, что они видны вплоть до линии четвертого порядка, а в некоторых случаях и выше. Изоклины и линии главных напряжений для рассматриваемого случая приведены на фиг. 4.166.

Результат измерения напряжений у контура резца показан на том же рис. 4.166. В рассматриваемом случае, однако, отношение сил, приложенных к обоим резцам, не могло быть определено с помощью имевшегося приспособления, так что действительное распределение напряжений в стальном резце во время работы является копией распределения напряжений в резце из бакелита, увеличенной в некотором неизвестном масштабе.

§ 4.17. Напряжения в материале под действием резца.

Решение § 4.15 для клина легко может быть применено к случаю действия сосредоточенной силы на полуплоскость в точке O .

Мы можем ожидать, что это решение даст первое приближение для изучения распределения напряжений в материале, к которому посредством резца приложена некоторая сила. Очевидно, что картина распределения напряжений в непосредственной близости к острию резца будет значительно искажена, вследствие снятия стружки, а также, хотя и в меньшей степени, конечных размеров детали. Несмотря на это, подобное решение дает ценные указания при оценке расхождений, вызванных двумя указанными причинами.

Полагая в решении § 4.15 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и обозначая через β угол между линией действия силы F и внутренней нормалью к краю пластинки, получаем из уравнений (4.153), (4.155):

$$\chi = -\frac{F}{\pi} \sin(\theta - \beta) r\theta, \quad (4.171)$$

$$\overline{rr} = -\frac{2F}{\pi r} \cos(\theta - \beta), \quad \overline{r\theta} = \overline{\theta\theta} = 0, \quad (4.172)$$

простой результат, показывающий, что здесь система напряжений представляет собой совокупность сжимающих усилий, радиально расходящихся от точки O и распределенных симметрично относительно линии действия ($\theta = \beta$) приложенной силы, независимо от направления этой линии.

Поскольку начало координат не лежит внутри области, занятой телом, а на ее контуре, то нет необходимости добиваться однозначности перемещений, как это было сделано в § 4.14.

Так как \overline{rr} при данном выборе координат является единственным из напряжений, отличным от нуля, линии главных напряжений оказываются прямыми, расходящимися радиально из точки O , и кругами, имеющими O общим центром.

Изоклиническими линиями, соответствующими углу α , являются два луча, проходящие через O параллельно и перпендикулярно линии наклона α .

Далее $P - Q = \overline{rr}$, так что изохроматические линии являются кривыми, выражающимися уравнением

$$\overline{rr} = \text{const} = -\frac{2F}{\pi k},$$

или

$$k \cos(\theta - \beta) = r,$$

т. е. они являются кругами, проходящими через O . Центры этих кругов расположены на линии действия силы.

На фиг. 4.171 изображены линии главных напряжений (пунктирные), две линии (жирные), соответствующие одной изоклинической линии с параметром α , и изохроматические линии (сплошные), вычерченные для ряда параметров, изменяющихся в арифметической прогрессии, так что величины k находятся в гармонической прогрессии.

Мы замечаем, что если θ лежит в пределах $\beta \pm \frac{\pi}{2}$, \overline{rr} — отрицательно, следовательно этот сектор пластинки подвержен сжатию. Если θ лежит вне этих границ, \overline{rr} — положительно, и следовательно соответствующая часть пластинки подвержена растяжению.

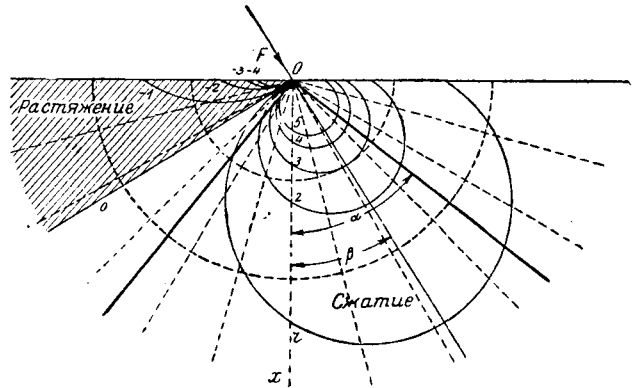
Практически важным является случай, когда сосредоточенная сила F приложена перпендикулярно к краю; тогда имеем:

$$\beta = 0, \quad \overline{rr} = \frac{2F \cos \theta}{\pi r},$$

$$\overline{r\theta} = \overline{\theta\theta} = 0.$$

Распределение напряжений подобного вида было проверено экспериментально Менаже для стеклянной пластинки.¹

В этом случае система напряжений является точно такой, как показано на фиг. 4.171, но лишь симметричной относительно нормали к краю пластинки; вся пластинка подвержена сжатию.



Фиг. 4.171.

Однако точное определение напряжений, возникающих при действии резца, находится вне пределов имеющихся у нас математических методов исследования, и мы должны прибегнуть к помощи оптического метода изучения напряжений.

Знание действия резцов важно для практики потому, что большая часть работы современных механических мастерских состоит в удалении излишнего материала заготовки путем обработки резцами на станках с целью получить точно исполненные детали машин и конструкций.

Нами были проделаны некоторые исследования с помощью оптического метода по изучению действия резцов при различных условиях. Так как на современных станках, применяемых на практике, невозможно провести экспериментальные исследования, то возникла необходимость сконструировать подобные машины несколько измененного вида с целью получить возможность наблюдения над действием резцов, обрабатывающих прозрачный материал в луче поляризованного света.

Одной из простейших машин подобного типа является несколько видоизмененный строгальный станок, показанный на фиг. 4.172. Прозрачная пластинка A движется в направляющей раме B с помощью червячной передачи. Резец C , закрепленный в вертикальном суппорте D , поддерживаемом рамой станка, снимает стружку с пластинки, как указано на фиг. 4.172. Резец плотно удерживается тремя зажимными винтами E , а микрометрический винт F , нажимающий на державку

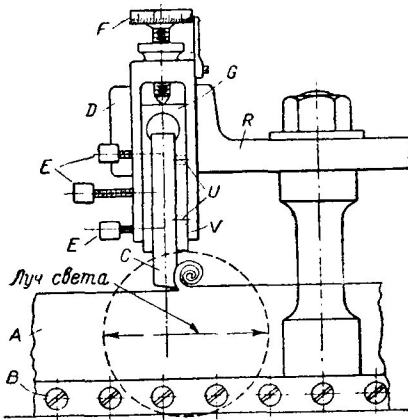
¹ Mesnager, Annales des Ponts et Chaussées, I, 1901.

резца G , служит для регулировки глубины надреза. Это устройство допускает беспрепятственное прохождение луча света через пластинку A , как показано пунктирным кругом на этой фигуре.

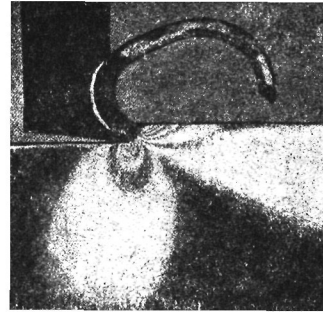
Когда резец берет стружку по пластинке, то видны изохроматические полосы, начинающиеся у острия резца и образующие две отчетливо выявленные системы, разделенные темной клинообразной полосой, как показано на фиг. 4.173. Это несколько напоминает картину, получающуюся в случае, когда на край пластинки действует наклонная сила, о чем уже говорилось в этом параграфе. Однако, рассматриваемая картина распределения напряжений имеет несколько более сложный характер вблизи лезвия резца, как видно из линий главных напряжений (фиг. 4.174).

Распределение напряжений в упругой зоне пластинки может быть приблизительно выражено уравнением (4.172), но вблизи лезвия резца распределение напряжений вследствие пластических деформаций становится весьма сложным.

Исследование напряжений показывает, что (фиг. 4.173) часть материала, находящаяся впереди темной клинообразной полосы, подвержена сжатию, а часть



Фиг. 4.172. Модель строгального станка.



Фиг. 4.173. Работа резца при строжке.

материала позади ее — растяжению. Из фиг. 4.171 видно, что сила, приложенная резцом к обрабатываемой поверхности, образует угол приблизительно в 135° с направлением внутренней нормали. Этот результат показывает, что сила, передающаяся от резца на материал, имеет одну составляющую в направлении движения резца, а другую — под прямым углом к краю по направлению наружной нормали к обрабатываемой детали; обе составляющие приблизительно равны между собою.

Действие резца поэтому имеет характер отрыва стружки в сторону от материала — обстоятельство, весьма важное для практики.

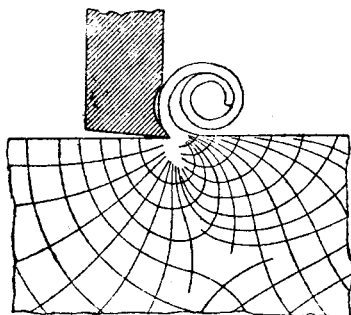
Весьма интересное явление, впервые замеченное в связи с изучением строгального резца, заключается в том, что после прохода и отвода назад резца часто замечается, что острие резца не касается строгаемой поверхности. Это в особенности заметно в тех случаях, когда строгаемая поверхность остается несколько шероховатой. Попытки воспроизвести это явление на металле были в некоторых случаях успешны.

Ряд опытов с ксилонитом, медью и сталью, проделанных с целью изучить это явление, показали, что во всех этих случаях, когда резец был остановлен в какой-нибудь точке и отведен на небольшое расстояние назад с целью измерить полученный зазор, последний оказывался в зависимости от очертаний примененного резца порядка от $0,00127$ см до $0,0127$ см в ксилоните. Для латуни наблю-

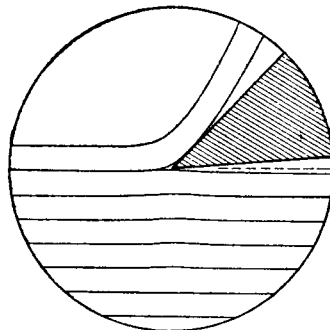
дался просвет в 0,0064 см при применении резца с углом резания в 45° ¹ и с несколько притупленным лезвием.

Когда угол резания был доведен до 90° , зазор уже не получался, и при обратном ходе резца его острие чертило по строгаемой поверхности; при следующем ходе резца он вновь снимал тонкий слой материала. Подобное же явление можно наблюдать также на токарном станке, когда обтачивается край стальной пластинки.

Однако в тех случаях, где зазор имеет место, при дальнейшем продвижении резца правильность строгаемой поверхности восстанавливается. На законченной отстроганной или обточенной поверхности не видно следа того места, где резец был остановлен. Эти явления могут быть объяснены, если имеет место некоторый местный подъем или понижение материала у острия инструмента во время его работы; вообще говоря, это искажение имеет вид, показанный на фиг. 4.175, где линии, параллельные движению резца, испытывают местный подъем в момент реза; поскольку эта деформация является упругой, она исчезает при дальнейшем продвижении резца.



Фиг. 4.174. Направления главных напряжений в материале при строжке.



Фиг. 4.175. Искажение линий, параллельных поверхности строжки.

§ 4.18. *Непрерывные наблюдения с помощью оптического метода над действием (работой) режущих инструментов.*

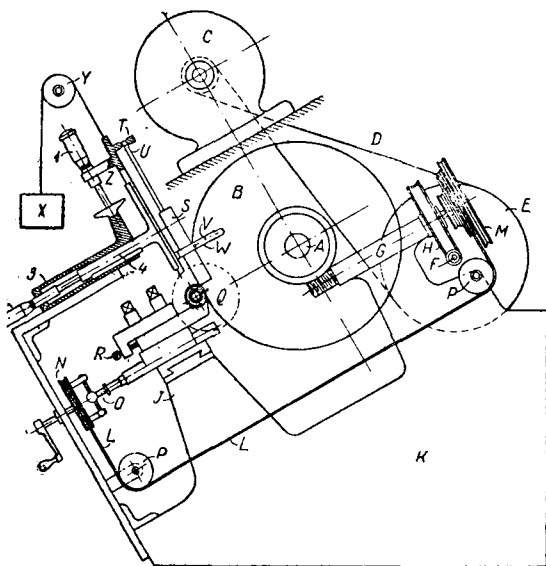
Строгальный станок имеет то преимущество, что он дает очень простой тип обработки резцом, движущимся по прямой линии, однако, возможность производить наблюдения в течение долгого промежутка времени он не дает. Произвести наблюдения во времени хорошо на токарном станке, на котором стружка почти любой длины может быть снята, если обтачивать резцом равномерно вращающийся диск.

Токарный станок простого типа, сконструированный для этой цели, показан на фиг. 4.181. Ось *A*, несущая прозрачный диск *B*, приводится в движение мотором *C* при помощи ремня *D*, надетого на шкив *E* и насаженного на вал *F*. Последний с помощью червячной передачи *H* приводит в движение второй вал *G*. Этот вал *G* вращает ось *A* с помощью червячной передачи, как показано на рисунке, обеспечивая этим весьма ровное и медленное вращение, необходимое для измерений, производимых с помощью оптического метода. С целью иметь возможность менять скорость вращения в значительных пределах шкивы имеют несколько ступеней; кроме того может меняться скорость мотора. Небольшой суппорт *I*

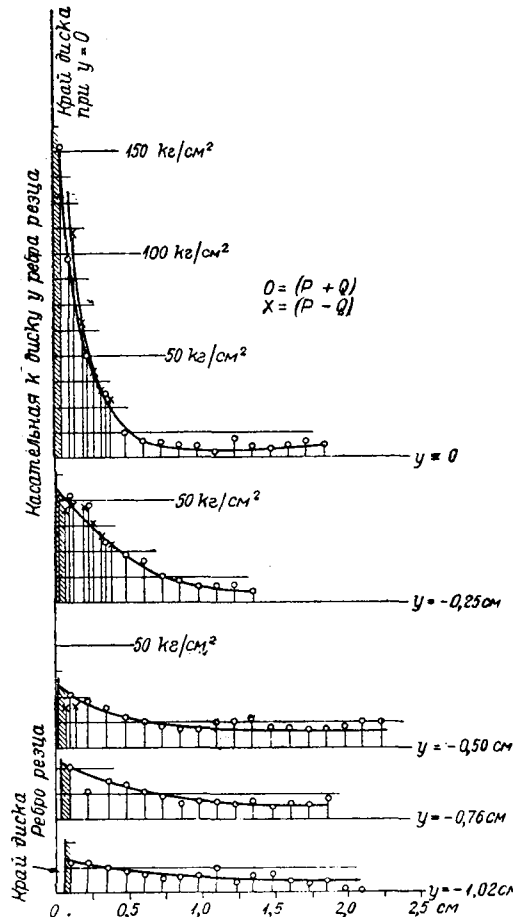
¹ В этом случае обе плоскости, образующие лезвие, были перпендикулярны к центральной плоскости пластинки. Угол резания и задний угол резца, о которых здесь упоминается, являются углами наклона верхней и нижней граней резца к плоскости, касательной к краю пластинки в точке соприкосновения с резцом.

обычного вида укреплен на раме машины; нижние салазки суппорта приводятся в движение вторым валом (G) с помощью бесконечного ремня L , причем последний надет на конический шкив M второго вала (G) и на шкив N , прикрепленный к подающему резец винту O нижних салазок суппорта. Ремень Z снабжен натяжными роликами P , что обеспечивает его достаточное натяжение, необходимое для равномерной радиальной подачи резца. Практически эта задача разрешается вполне удовлетворительным образом.

Резец Q укреплен обычным способом; упорный винт R , надавливая на конец резца Q , устраняет возможность сдвига резца назад. Весь прибор сконструирован так, чтобы обеспечить прохождение луча света через диск во время резания. Распределение напряжений может тогда быть изучено при помощи наблюдения изохроматических полос.



Фиг. 4.181.



Фиг. 4.182. Полное распределение напряжений в диске при угле резания 45° и стружке толщиной 0,038 см.

К раме этой машины прикреплен боковой экстенсометр, типа, описанного в § 2.47, для возможности определения суммы главных напряжений в любой точке. Положение измеряющих иголок определяется с помощью микрометров 1 и 2 , а положение исследуемой точки диска фиксируется специальным прибором, отмечающим ее и приводимым в действие с помощью червячной передачи.

Направления главных напряжений вблизи острия резца в диске значительных размеров не слишком отличаются от показанных на фиг. 4.174 для прямой полосы. Измерения напряжений в какой-либо точке вращающегося диска значительно осложняются во время опыта, вследствие небольших изменений в толщине материала, имеющих величину того же порядка, как и боковые изменения (вызванные напряжением), и определяющих величину $(P \pm Q)$. Однако, с помощью счетчика

насаженного на оси F , и градуированного круга на шкиве E , что позволяет отмечать углы поворота диска, определения напряжений совершаются со значительной точностью. В настоящем параграфе описан случай распределения напряжений в 15 см диске, обрабатываемом резцом с углом резания 45° и задним углом 5° , при снятии стружки в 0,038 см. Результаты наблюдений изображены на диаграмме 4.182 для ряда сечений, параллельных радиальной линии, проходящей через острие резца. Расстояние таких сечений от этой радиальной линии обозначено через y ; оно считается положительным в сторону, обратную движению резца.

Обращаясь к первой серии этих наблюдений для сечения с $y=0$, т. е. направленного по радиусу, мы видим, что величины $(P+Q)$ и $(P-Q)$ почти равны между собой на протяжении всего обследованного участка; подобное же равенство имеет место для сечений с $y=-0,25$ см и $-0,50$ см. Получить значения величин $(P \pm Q)$ на большем расстоянии от начального сечения не представлялось возможным, за исключением точек на очень небольшом участке. Так как оба ряда проведенных наблюдений приводят к заключению, что главным напряжением Q практически можно пренебречь, то это и можно считать установленным.

С другой стороны, если рассматривать сечения по другую сторону от начального на соответствующих расстояниях, то напряжение почти повсеместно окажется растяжением. Таким образом, на основании этих данных можно заключить, что распределение напряжений, вызванное резцом, будет почти чистым сжатием выше черной полосы, разделяющей обе системы цветных полос, и почти чистым растяжением ниже этой полосы. Исключение представляет очень небольшой участок, где появляются пластические деформации, но так как теория пластических деформаций недостаточна изучена, наши измерения не могут дать определенных результатов в этой области.

Сказанное в общих чертах согласуется с выводами § 4.17.

При работе как строгального, так и токарного резцов особенно интересно указать на замечательно однородный характер картины распределения напряжений как в обрабатываемом материале, так и в снимаемой стружке, при хорошо отточенном и имеющем правильные очертания резце, как это видно на фотографии 4.183а. Если же лезвие вследствие долгого употребления или других причин притупляется, то возникает целый ряд совершенно новых явлений. Стружка при этих условиях дает периодически повторяющуюся картину черных пятен, соответствующих значительной пластической деформации, разделенных между собою интервалами, менее подвергнутыми наклепу, как это показано на фиг. 4.183б. Цветные пятна сопровождаются сильными искривлениями изохроматических линий, в то время как обрабатываемый край диска, ранее гладкий, теперь становится шероховатым, с неправильными очертаниями, как это видно на фотографии.

Все эти явления являются следствием нового характера действия резца, когда материал повидимому снимается откалывающим действием лезвия резца, врезающегося в материал и вызывающего трещину впереди себя. Вследствие этого имеет место значительное увеличение напряжений, которое падает сразу при появлении трещины. Резец отталкивает в сторону оторванную таким путем часть материала и вызывает значительную пластическую деформацию в месте соединения стружки с остальной частью материала, достаточную для того, чтобы воспрепятствовать свободному прохождению света через эту часть стружки. Более отдаленная часть стружки подвергается пластической деформации не в столь значительной степени, и в ней наблюдаются изохроматические пятна.

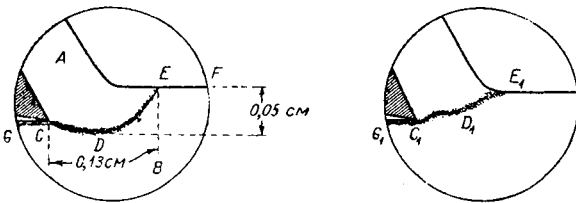
По окончании оборота явления повторяются, и мы получаем поэтому стружку со светлыми и темными пятнами и весьма шероховатую, обточенную поверхность диска.

В редких случаях оказалось, что снимаются две легко отличимые стружки: одна внешняя и больших размеров, отколотая вышеописанным путем, и другая — внутренняя и более тонкая, отрезанная острием резца.

Подобное же явление наблюдалось иногда и для металлов. Возможно, что тонкая пыль, падающая с острия резца при обточке чугуна, является стружкой второго описанного выше вида.

Микроскопические исследования полированной стальной пластинки при строжке или обточке ее краев без какой-либо смазки обнаруживают весьма заметное изменение структуры металла у поверхности впереди резца. Это изменение выделяет из материала, подвергающегося упругим деформациям, область, где напряжения перешли за предел текучести. Отграничивающая эту область поверхность по форме несколько похожа на самую внешнюю цветную полосу, наблюдаемую впереди инструмента во время резания прозрачных материалов в поле поляризованного света. Однако нет никаких следов изменений в структуре металла в зоне, соответствующей цветным полосам у задней части инструмента.

Размеры „цветной“ волны, продвигающейся впереди резца по мере его врезывания в материал, показаны на фиг. 4.184 для случая обработки пластинки мягкой стали; в случае, изображенном на левой стороне фиг. 4.184, зона остаточных изменений структуры опускается ниже глубины резания и вследствие этого обрабатываемая поверхность все время подвергается остаточной деформации.



Фиг. 4.184.

Если однако мы добьемся, что эта зона не будет распространяться ниже новой поверхности, полученной после обработки, то эта поверхность не будет испытывать наклепа, что является весьма желательным обстоятельством при механической

обработке, поскольку оно устраняет возможность дальнейших деформаций в вязких материалах; эти деформации могли бы появиться при постепенном восстановлении материала из наклепанного состояния. Это условие повидимому бывает приблизительно выполнено при резании без смазки, если не имеет место явление „наплыва“ или вдавливания материала под действием резца, о чем сказано выше. Поэтому вероятно, что резцы, которые так отточены, что сводят последнее явление к минимуму, дадут наилучшие результаты. Кроме того, если инструмент имеет стремление поднимать стружку или придавливать ее, то он вызовет шероховатость поверхности обрабатываемой части.

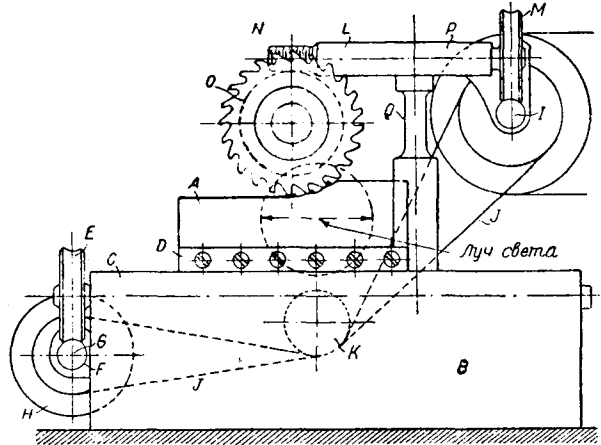
Уменьшение зоны пластических деформаций уменьшает также энергию, затрачиваемую при резании; в вязких материалах на него в значительной степени влияет присутствие какого-либо смазочного вещества. Малейший след наличия масла, например, вызывает немедленное сокращение кривой CDE (фиг. 4.184) до $C_1D_1E_1$, как показано на правой стороне рисунка, где зона изменения структуры металла теперь находится целиком выше острия инструмента. Легкость, с которой при употреблении смазки получается ровная поверхность, очевидно связана с положением этой границы, в то время как уменьшение площади материала, подвергающегося остаточной деформации, показывает, что расход энергии значительно уменьшается по сравнению со случаем обработки без смазки.

§ 4.19. Фрезы.

С целью изучить действие фрез была сконструирована также особая машина для наблюдения за явлением резания во время обработки пластинки из прозрачного материала в поляризованном свете. Фасад этой машины, приспособленной для фрезеровки пластинки, показан на фиг. 4.19. На чугунной плите B установлен суппорт C , подвижная часть которого D имеет зажимы, обеспечивающие надежное закрепление прозрачной пластинки A , обрабатываемой фрезой. Этой пла-

стинке сообщается непрерывная подача при помощи винта суппорта, на который насажено червячное колесо *E*, приводимое в действие червяком *F*, который составляет одно целое с осью *G*. Ступенчатый шкив *H*, укрепленный на другом конце оси, присоединен к главному движущему валу *I* при помощи ремня *J*. Ремень *J* проходит через два направляющих шкива *K*, имеющих специальные приспособления с целью предотвратить скольжение ремня. На практике оказывается, что это приспособление дает вполне равномерную подачу, поскольку действующие силы сравнительно невелики. Особое усложнение системы передаточных колес для осуществления равномерной подачи не является необходимым.

Во многих случаях представляется желательным иметь возможность быстро отвести обрабатываемый материал в исходное положение для начала нового реза, не пользуясь сравнительно медленным движением, имеющим место при фрезеровке. С этой целью червячная ось *G* поставлена в специальные подшипники, позволяющие перемещать всю ось так, что червяк *F* выключается из передачи, и тогда винт суппорта можно поворачивать вручную, пока пластинка не достигнет исходного положения и будет готова для начала нового реза. Ось *G* тогда опять включается в передачу и закрепляется специальным винтом.



Фиг. 4.19. Фасад модели фрезерного станка.

С целью обеспечить вращение фрезы с определенной скоростью по отношению к скорости подачи, основная ось *I* приводит в движение вторую ось *L* червяком *M*, а фреза вращается с помощью второй подобной же передачи; червяк *N* видим на рисунке, а червячное колесо *O* закрыто фрезой и показано пунктиром.

§ 4.20. Действие фрез.

Наиболее отличительной чертой действия фрезы является то, что толщина снимаемой стружки уже не является постоянной, как это имеет место при строгании или обточке, но по мере продвижения постепенно увеличивается. Это вызывается тем обстоятельством, что острие каждого зуба, вообще говоря, описывает по отношению к обрабатываемому материалу плоскую трохойду, получающуюся в результате сочетания вращения и подачи.

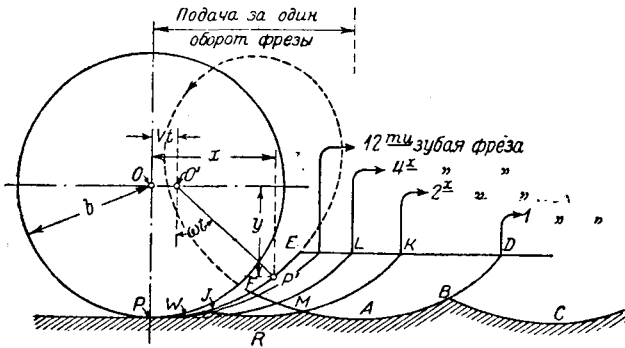
Рассмотрим зуб *P* (фиг. 4.201), расположенный непосредственно под центром вращения *O* фрезы, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω и двигающейся в горизонтальном направлении со скоростью *V* единиц в секунду. По истечении промежутка времени *t*, центр вращения переместится в точку *O'*, где $OO' = Vt$, в то время как радиус *OP* займет новое положение *O'P'*, наклоненное под углом ωt к вертикали. Координаты *x*, *y* режущего ребра зуба по отношению к горизонтальной и вертикальной осям, проходящим через точку *O*, выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= Vt + b \sin \omega t \\ y &= b \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

где *b* — расстояние зуба от *O*. Отношение между *V* и ω имеет линейный вид $V = a\omega$, где *a* есть длина, заданная уравнением $2\pi a =$ подаче за один оборот. Из

уравнений (4.20) легко может быть определена траектория лезвия, если a , b и ω известны.

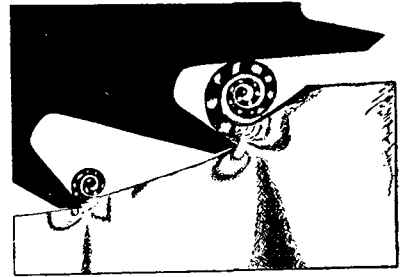
Если мы проследим за этим зубом на протяжении его пути, то станет очевидным, что, пока скорость подачи незначительна по сравнению со скоростью на контуре острия зуба, что всегда имеет место на практике, описанная кривая имеет петлеобразный вид. Таким образом, если бы было только одно режущее



Фиг. 4.201. Работа фрез.

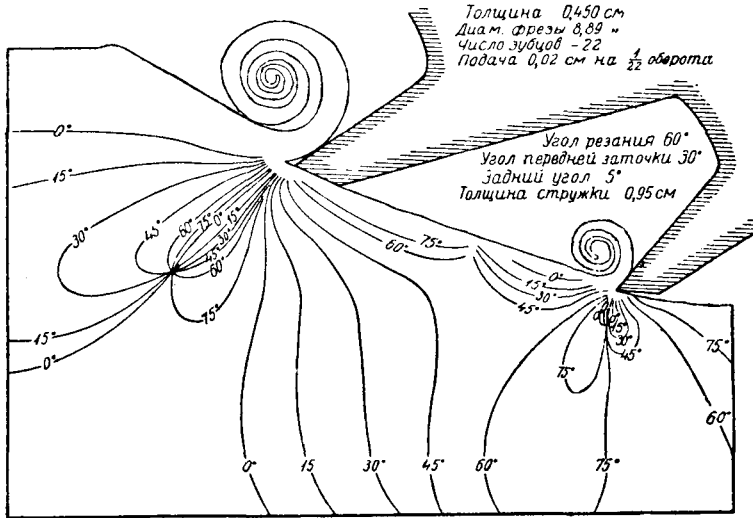
лезвие, то оно удалило бы часть материала $EFABD$ между криволинейной трохоидальной поверхностью и плоскостью ED . Поверхность обработанного материала представляла бы тогда собой ряд волн $PFABC$, имеющих вершины и впадины на одном и том же уровне. Фреза с двумя зубьями должна была бы снять криволинейный клин EJK , имеющий толщину, увеличивающуюся от его начала к концу и с более заостренным начальным углом, чем предыдущая стружка. Он составил бы серию волн $PJRMA$ с значительно уменьшенной глубиной по сравнению с предыдущим очертанием, но того же самого вида и с удвоенной частотой. При фрезе с четырьмя зубьями мы имели бы стружки EWL попеременно изменяющейся толщины; обработанная поверхность представляла бы серию еще более мелких волн четырехкратной частоты; каково бы ни было число лезвий, мы всегда получим стружку переменной толщины с начальным углом, зависящим от числа зубьев, скорости подачи, радиуса фрезы и угловой скорости. В каждом случае стружка постепенно утолщается по мере продвижения реза, в то время как на обрабатываемом материале появляется соответствующая серия волн, глубина которых практически сводится к очень малому размеру путем соответствующего подбора величин, находящихся в нашем распоряжении — размеров фрезы и условий резания.

При работе подобных фрез наблюдаются некоторые интересные особенности, не имеющие места при действии резцов, описанных выше. Эти отличительные черты обязаны своим происхождением главным образом зубьям, расположенным близко один от другого и снимающим стружку различной толщины одновременно. Было уже указано, что изолированное действие одного зуба вызывает напряжение, направленное приблизительно радиально по отношению к острию резца; это напряжение быстро падает по своей величине при удалении изучаемых точек от острия и изменяется по знаку в зависимости от получаемого радиального направления. Мы также видели, что зона, расположенная впереди черной клинообразной полосы, берущей свое начало от острия инструмента, подвержена почти чистому сжатию, а зона позади этой полосы подвержена растяжению. Но поскольку в рассматриваемом случае работают два или более зубьев, то, вообще говоря, должна быть некоторая область между двумя последовательными зубьями, где растяжение, вызванное действием одного зуба, нейтрализуется сжатием от другого

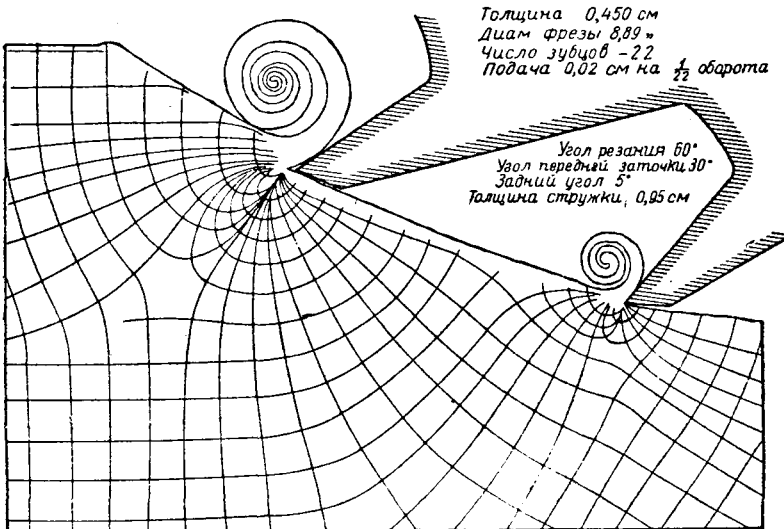


Фиг. 4.202. Фреза, снимающая стружку целлюлоида в поляризованном свете.

зуба, движущегося сзади первого; это обстоятельство подтвердилось при опытно-исследовании. На поверхности и вблизи к ней было найдено между каждой парой зубьев черное пятно, которое, вообще говоря, при продвижении реза не остается в неподвижном положении по отношению к зубьям, благодаря одновременным неодинаковым изменениям в напряжениях у следующих один за другим зубьев реза.



Фиг. 4.203. Изоклины при одновременной работе двух резцов фрезы.



Фиг. 4.204. Линии главных напряжений при одновременной работе двух зубцов фрезы.

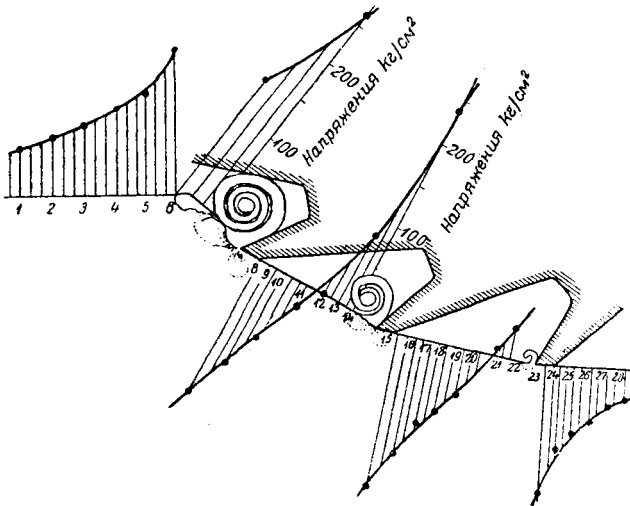
Общий характер наблюдаемых явлений показан на фиг. 4.202, и здесь можно заметить, что характерные изохроматические полосы, описанные при изучении действия других резцов, имеют место также и здесь, хотя их характер указывает на возможность несколько более сложного распределения напряжений. Черные пятна между каждым двумя зубьями тоже показаны на чертеже, в то

время как подобные же характерные пятна на стружке указывают на то, что материал ее отрывается или откалывается при действии фрезы.

Необходимо здесь указать, что стальные фрезы, применявшиеся в этих опытах, были обычного вида, но углы их лезвий не имеют величины, обычно применяемой при фрезеровке металлов, так как зубья срезаны с задней стороны очень сильно, чтобы обеспечить беспрепятственное завивание стружки.

При этих опытах фреза диаметром 8,89 см имела 22 зуба, каждый из которых имел угол резания 60° и задний угол 5° . Скорость подачи при описываемых опытах была равна 0,45 см на один оборот при глубине реза 0,95 см или 1,43 см.

Примеры некоторых обнаруженных при опытах явлений пояснены на фиг. 4.203; на ней изображено расположение наблюдаемых изоклинических линий в момент, когда передний зуб был близок к концу своего реза.



Фиг. 4.205. Напряжения в точках контура при одновременной работе трех зубцов фрезы. Толщина 0,45 см. Диаметр фрезы 8,89 см; число зубьев — 22. Подача $0,023 \frac{1}{20}$ оборота. Угол резания 60° . Угол передней заточки 30° . Задний угол 5° . Материал снимается на глубину 1,429 см. Пунктирные линии указывают появление „чувствительной окраски“.

Изучение напряжений в точках вдоль контура (фиг. 4.205) показывает

весьма быстрый переход от сжатия к растяжению; следует здесь отметить, что распределение напряжений не является линейной функцией от расстояния по контуру и что по мере продвижения реза место с нулевым напряжением продвигается перед лезвием вперед по отношению к нему. Это место имеет положительное движение по отношению к окружности фрезы.

§ 4.21. Растянутый стержень переменного сечения.

Другим приложением решения задачи о распределении напряжений в клине (§ 4.15) является применение его к образцу с равномерно суживающимся очертанием (фиг. 4.21).

Для некоторых целей, как, например, измерений напряжения с помощью компенсационного метода, описанного в § 3.90, желательно применить подобный стержень вместо прямого образца. Причиной этого служит то обстоятельство, что при растяжении образца постоянного сечения нельзя менять напряжений, не

Как можно заметить, большинство промежуточных изоклинических линий сходятся к небольшому участку, ограниченному контуром черного пятна; таким образом, подтверждая заключение, что это черное пятно является изотропной точкой, и поскольку оно наблюдается у свободной поверхности, это пятно действительно должно соответствовать месту, не подвергающемуся напряжению.

Линии главных напряжений, построенные по приведенным выше данным, показаны на фиг. 4.204. Обращает на себя внимание характер перехода линий главных напряжений, расположенных против каждого лезвия, в снимаемую стружку; их след там теряется вследствие остаточных деформаций, нарушающих оптическую характеристику материала.

меня нагрузок, что в некоторых случаях может быть и неудобным и неточным.

Другую картину мы наблюдаем в стержне переменного сечения, который дает автоматическую шкалу изменения напряжения вдоль своей длины. Будучи градуирован соответственно этой шкале, он может быть применен для измерений разностей напряжений при условии, что величина напряжений в какой-либо точке взята за стандартную.

Следует тщательно следить за тем, чтобы нагрузки были правильно центрированы, т. е., чтобы оба края суживающейся части пересекались на линии действия нагрузки и были бы расположены симметрично по отношению к ней. Тогда можно использовать решение для случая клина, т. е.

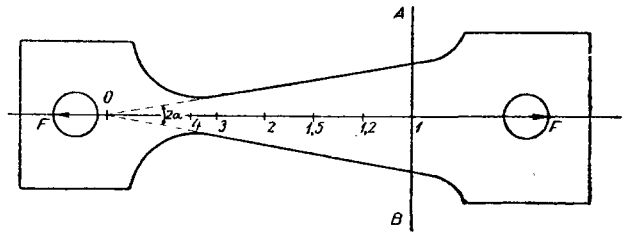
$$\gamma = Fy\theta (2\alpha + \sin 2\alpha),$$

$$\overline{rr} = \frac{2F \cos \theta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)r}, \quad \overline{r\theta} = \overline{\theta\theta} = 0,$$

где F — растягивающая сила, а 2α — угол клина.

Измерения желательно делать в точках, расположенных вдоль оси клина, являющейся одной из линий главных напряжений. В этом случае напряжения изменяются обратно пропорционально расстоянию от вершины O клина.

Растяжение в средней точке произвольного сечения AB принимается за единицу и подбирается по величине так, чтобы иметь требуемое значение. Напряжение в других точках выражается в долях этого напряжения при помощи масштаба, как показано на рисунке.



Фиг. 4.21.

§ 4.22. Контактные напряжения при соприкосновении по малой площадке.

Решение § 4.17 предполагает, что сосредоточенная сила приложена в некоторой точке к краю полуплоскости (в действительности же сила действует вдоль некоторой линии, идущей перпендикулярно к краю пластинки).

При экспериментальных исследованиях и на практике представляется единственно возможным передавать нагрузку через конечную площадь, которая однако может быть весьма малой, как это имеет место при давлении друг на друга двух велосипедных шариков. Площадь соприкосновения двух тел в действительности никогда не может быть точкой или линией вследствие физических свойств материала (его деформируемости). Распределение нагрузки по площади соприкосновения и величина напряжений в соприкасающихся телах имеют особо важное значение на практике, где никогда не представляется возможным избежать передачи большой сосредоточенной нагрузки, как например в опорных призмах, в роликовых подшипниках или при передаче нагрузки от колес паровоза к рельсам.

Некоторые физические опыты над материалами также представляют собой интересные случаи соприкосновения двух тел. Примером могут служить опыты на вдавливание для определения твердости; сферический шарик или конус давит на материал с силой, достаточной, чтобы вызвать остаточную деформацию.

Другое обстоятельство, вызывающее на практике отклонения от условий задачи § 4.17, возникает вследствие конечных размеров нагружаемого тела. В этих случаях сжимающие усилия, распределенные по нижней поверхности, главным образом сосредотачиваются в центральной части площади, передающей на-

грузку; это происходит вследствие стремления концов пластинки прямоугольного поперечного сечения подняться вверх, когда одна из ее поверхностей прижата грузом, приложенным к ее середине, к другой плоской поверхности значительно большей площади и приблизительно одинаковой твердости.¹ Это явление легко наблюдать на образце каучука около 150 мм длины прямоугольного сечения, шириною 25 мм, при прижимании его к какой-либо твердой поверхности, сосредоточенной силой, приложенной в его центре; при этом обнаруживается заметный подъем концов образца и соприкосание между ними и поверхностью отсутствует. Даже такой твердый материал, как стекло, будучи прижат к плоской металлической пластинке, дает ту же самую картину, хотя в этом случае деформации столь незначительны, что подъем концов образца видим с трудом.

Для проверки всего сказанного был проделан опыт на сжатие на небольшой машине, описанной в § 7.07.

Была изготовлена пластинка из ксилонита наибольших размеров, допускаемых применением этой машины. Пластинка имела прямоугольную форму длиной 13,06 см и толщиной 26,67 см, одна сторона ее была точно пригнана к плоской стальной пластинке поддерживаемой еще одной, ниже расположенной пластинкой. Сжимающая сила была приложена к верхней грани пластинки симметрично относительно центра грани по квадратной площади со стороною около 0,3 см.

Эта форма передачи силы была выбрана с целью не допустить повреждения пластинки и избежать остаточной деформации в месте соприкосания.

Чтобы перейти к разрешению задачи вычисления напряжений от равномерно распределенного на единицу длины давления p , приложенного на участке AB (фиг. 4.221) края полуплоскости, рассмотрим прежде всего решение для сосредоточенной силы F , приложенной нормально к этому краю в точке с координатой $x = \xi$. Это решение дано уравнением (4.171) при $\beta = 0$, так что

$$\chi = -\frac{F}{\pi} r \sin \theta \cdot \theta,$$

где r и θ отсчитываются от точки $(\xi, 0)$ и таким образом

$$r \sin \theta = x - \xi,$$

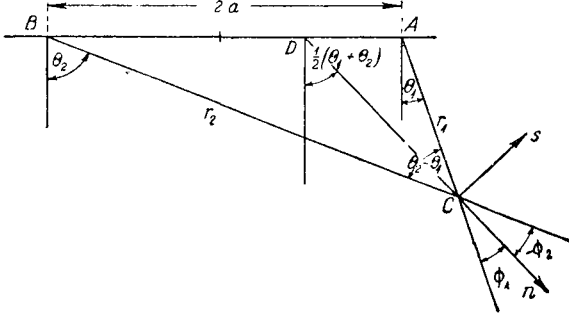
$$\theta = \arctg \left(\frac{x - \xi}{y} \right).$$

Возьмем теперь $F = pd\xi$ и проинтегрируем полученные формулы по длине $2a$ отрезка AB , средняя точка которого может быть взята за начало координат.

Функция напряжений для данного случая выразится формулой:

$$\chi = -\frac{p}{\pi} \int_{-a}^{+a} (x - \xi) \theta d\xi.$$

¹ Анализ этой задачи будет дан в главе V.



Фиг. 4.221.

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{p}{2\pi} [(x - \xi)^2 \theta]_{-a}^{+a} + \frac{p}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{(x - \xi)^2 y \, d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} \\ &= \frac{p}{2\pi} [(x - \xi)^2 \theta]_{-a}^{+a} + \frac{p}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \left[y - \frac{y^3}{(x - \xi)^2 + y^2} \right] d\xi \\ &= \frac{p}{2\pi} [(x - \xi)^2 + y^2 \theta]_{-a}^{+a} + \frac{p}{2\pi} [\xi y]_{-a}^{+a} \\ &= \frac{p}{2\pi} (r^2 \theta)_{-a}^{+a} + \frac{p a y}{\pi}. \end{aligned}$$

Слагаемое $\frac{p a y}{\pi}$ не влияет на напряженное состояние, поскольку оно исчезает при двукратном дифференцировании.

Отсюда для искомой функции напряжений получаем следующее выражение:

$$\chi = \frac{p}{2\pi} (r_1^2 \theta_1 - r_2^2 \theta_2), \tag{4.221}$$

причем (r_1, θ_1) являются полярными координатами с началом в A и (r_2, θ_2) — полярными координатами с началом в B .

С целью определить напряжения, соответствующие этой функции, вычислим сначала их для функции

$$\chi = \frac{p}{2\pi} r^2 \theta.$$

Последние сразу же определяются из формул (2.421, 2, 3):

$$\overline{rr} = \frac{\theta p}{\pi} = \overline{\theta\theta}, \quad \overline{r\theta} = -\frac{p}{2\pi}.$$

Напряжения \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$, будучи равными, вызывают равномерное всестороннее растяжение $\frac{\theta p}{\pi}$. Подставив в полученное решение один раз индекс 1, а другой раз индекс 2, и складывая полученные результаты, мы находим, что в точке C будет равномерное всестороннее растяжение

$$R = (\theta_1 - \theta_2) \frac{p}{\pi}.$$

Рассмотрим теперь влияние касательных напряжений $\overline{r\theta}$. Для этого разложим его на составляющие по направлению DC (фиг. 4.221), которое мы обозначим через n , и направлению s , образующему прямой угол с n . CD будет при этом внутренней биссектрисой угла ACB .

Пусть поворот на угол φ_1 совмещает r_1 с n , а поворот на $\varphi_2 - r_2$ с n ; тогда

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1).$$

Применим теперь формулы преобразования (2.2731, 2, 3), в которых заменяем направления x, y последовательно через (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2) ; складывая результаты, получим:

$$\begin{aligned} \overline{nn} &= \overline{r_1 \theta_1} \sin 2\varphi_1 - \overline{r_2 \theta_2} \sin 2\varphi_2 = -\overline{ss}, \\ \overline{ns} &= r_1 \theta_1 \cos 2\varphi_1 - r_2 \theta_2 \cos 2\varphi_2 \end{aligned}$$

(здесь влияние \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$ не учтено).

Учитывая значения φ_1 и φ_2 и формулы

$$\overline{r_1 \theta_1} = \overline{r_2 \theta_2} = -\frac{p}{2\pi},$$

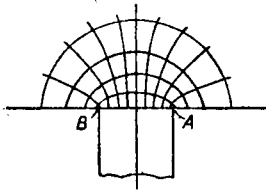
получаем

$$\overline{nn} = \frac{p}{\pi} \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\overline{ss}, \quad \overline{ns} = 0.$$

Прибавляя теперь равномерное всестороннее растяжение, вызванное напряжениями \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$, рассмотренными выше, мы находим для окончательных значений напряжений формулы

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} &= \frac{p}{\pi} [\theta_1 - \theta_2 + \sin(\theta_1 - \theta_2)], \\ \overline{ss} &= \frac{p}{\pi} [\theta_1 - \theta_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2)], \\ \overline{ns} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.222)$$

Так как $\overline{ns} = 0$, то n и s — направления главных напряжений в точке C ; поскольку они оба направлены вдоль двух биссектрис угла ACB , — линии главных напряжений представляют собой семейство эллипсов (фиг. 4.222) и ортогональных к ним гипербол; обе серии кривых имеют одни и те же фокусы A, B . У площадки соприкасания эти линии резко отличаются от линий главных напряжений, возникающих при действии сосредоточенной силы, но уже на небольшом расстоянии от площадки соприкасания вглубь материала кривые мало отличаются от кругов и ортогональных к ним прямых линий, имеющих центр в середине площади, передающей давление.



Фиг. 4.222. Линии главных напряжений при нормальном давлении на часть края бесконечной пластинки.

Легко видеть, что изохроматические линии являются кругами, проходящими через A и B . В самом деле мы имеем

$$P - Q = \overline{nn} - \overline{ss} = \frac{2p}{\pi} \sin(\theta_1 - \theta_2),$$

так что $P - Q = \text{const}$, если $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$, что соответствует дугам кругов, как указано выше.

Для изоклинических линий мы очевидно имеем

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\alpha;$$

т. е.

$$\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2 = (1 - \text{tg } \theta_1 \text{tg } \theta_2) \text{tg } 2\alpha,$$

полагая

$$\text{tg } \theta_1 = (x - a)/y, \quad \text{tg } \theta_2 = (x + a)/y,$$

где x отсчитывается от середины AB , и упрощая, получаем

$$2xy + (x^2 - y^2 - a^2) \text{tg } 2\alpha = 0.$$

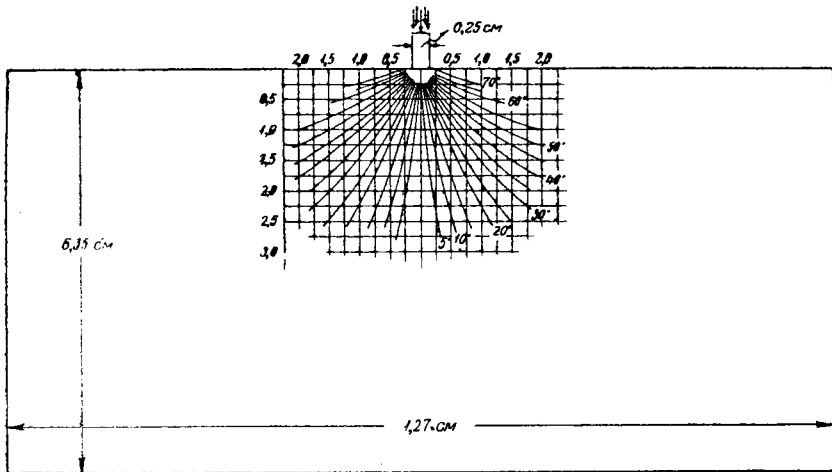
Это — уравнение гипербол, проходящих через точки A и B , асимптоты которых образуют угол α с вертикальной и горизонтальной осями.

§ 4.23. Исследование с помощью оптического метода пластинки, находящейся под действием распределенной нагрузки.

Наиболее удобным способом исследования является сравнение величин разности напряжений ($P - Q$), полученных экспериментально, с величинами, полу-

ченными путем вычисления в точках вдоль вертикальной линии, проходящей через центр площадки.

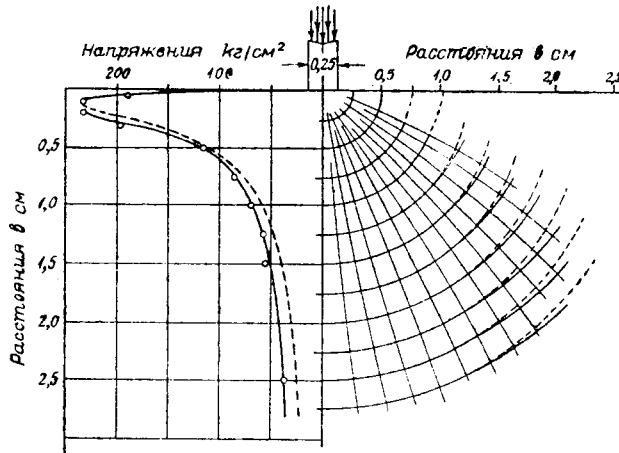
Исследование изохроматических полос (фиг. 4.231) в пластинке, описанной выше, показывает однако, что допущения, на которых основано вычисление практи-



Фиг. 4.232. Изоклины в прямоугольной пластинке, опертой нижним краем и нагруженной в центре верхней стороны.

чески не могут быть осуществлены. У крайних точек площадки соприкосновения обнаруживается дополнительный пучок цветных полос, кроме кругов, проходящих через точки *A* и *B*. Согласно теории, основанной на предположении равномерно распределенной нагрузки, следовало ожидать только этих последних кругов.

Нагрузка 45,36 кг.



Распределение разности главных напряжений вдоль средней вертикальной линии.

Линии главных напряжений в ограниченной прямоугольной пластинке, нагруженной в середине верхнего края.

Фиг. 4.233.

Круговые полосы этого типа очень хорошо выражены, но в дополнение к ним имеют место разветвляющиеся кривые, начинающиеся тоже от крайних точек *A* и *B*; они проникают вглубь пластинки и указывают на некоторое отступление от равномерного распределения напряжений.

Цветная картина поэтому приводит к заключению, что передача давления не является равномерной, но характер ее не может быть полностью определен с помощью этих оптических измерений. Однако, измерения наклона линий главных напряжений обнаруживают, что изоклинические линии (фиг. 4.232) являются кривыми, изогнутыми наружу, что указывает на сосредоточение нагрузки в центре нижнего края пластинки; это же подтверждается расположением линии главных напряжений, которые легко получить из системы изоклин.

Эти линии изгибаются вверх, направляясь к нижней поверхности так, как показано на фиг. 4.233, и повидимому пересекают ее под углом, немного отличающимся от 90° , вследствие наличия касательных напряжений, вызванных трением между двумя поверхностями (нижней поверхностью пластинки и основанием).

Вследствие этих обстоятельств можно ожидать, что значение разности главных напряжений в точках центральной линии больше, чем это следует из выражения

$$P - Q = 2 \frac{P}{\pi} \sin(\theta_1 - \theta_2),$$

что подтверждается на опыте, как это видно из таблицы 4.23 и фиг. 4.233.

Во всех точках, где были произведены измерения, оказалось, что величины, полученные путем наблюдения, больше, чем вычисленные. Эта разница особенно заметна для более удаленных точек, к которым казалось бы приложим принцип Сен-Венана. Однако, в данном случае ни одна точка пластинки, расположенная вблизи средней линии, в действительности не удалена на достаточное расстояние от нагруженной поверхности, чтобы оправдать применение этого принципа. Действительная картина распределения давлений по плоскости соприкосновения несомненно отличается от обычного упрощенного представления о равномерности распределения этих давлений.

Таблица 4.23.

Величины разности главных напряжений в точках средней вертикальной линии.

Расстояние в см	Получено	
	вычислением	наблюдением
	кг/см ²	
0	0	0
0,05	161,7	187,0
0,10	229,2	229,9
0,20	210,9	232,0
0,30	166,6	195,1
0,51	110,4	114,9
0,76	75,9	85,4
1,0	57,6	69,2
1,27	46,4	57,3
1,52	39,0	61,5

Большое значение разности главных напряжений в близлежащих к наружной поверхности точках возможно вызывается скальвающим усилием местного характера. Эта точка зрения повидимому подтверждается наблюдениями над деформациями у оснований металлических колонн, установленных на каменном или бетонном фундаменте. В этих местах можно видеть, что оттиск жесткой плиты основания колонны окаймлен небольшими кусками материала, отделившимися от напряженной поверхности фундамента.

Концентрация напряжений в средней части нижней поверхности подтверждается теоретическими исследованиями, так как можно доказать,¹ что реакция основания Q на нижнюю поверхность бесконечно длинной пластинки толщиной b выражается интегралом вида

$$Q = \frac{2W}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u + u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cos \frac{ux}{b} du.$$

Здесь W — сосредоточенная сила на единицу толщины пластинки, а x — расстояние от средней линии (где приложена сила W). Этот интеграл может быть вычислен разложением в ряд, и величина давлений оказывается большой вблизи точки приложения силы, затем быстро падающей и обращающейся в нуль при значении $x = 1,35b$; за этой точкой необходимо небольшое растягивающее напряжение, чтобы удержать пластинку в соприкосании с верхней поверхностью основания. Это означает, что условия, принятые при решении рассматриваемой задачи, которая будет более полно изучена в главе V, не могут быть физически осуществлены, и удаленные от нагрузки части пластинки приподнимутся с основания, как это было указано выше. Однако поправки, которые нужно внести в систему напряжений, оказываются незначительными.

Если бы равномерно распределенное давление могло бы быть приложено к небольшой ограниченной части полуплоскости, то величины напряжений, полученные путем измерений, вероятно согласовались бы с вычислениями.

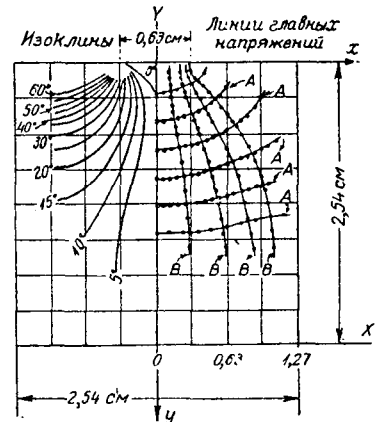
§ 4.24. *Распределение напряжений в прямоугольных массивах, опирающихся нижней стороной на фундамент, под действием сил, приложенных к части верхней стороны.*

Изучение распределения напряжений в массивах прямоугольной формы и конечных размеров при действии нагрузки имеет значение в практике инженерного и архитектурного дела, так как конструкции из кирпича и камня, воспринимающие нагрузку по всей площади двух противоположных граней, обычно имеют эту форму. В некоторых случаях, когда имеет место передача большой сосредоточенной нагрузки, как, например, в основаниях под колоннами, это давление передается на массив через часть верхней грани и уравновешивается реакцией основания, распределенной по всей нижней поверхности.

Опыты, описанные выше, показывают, что напряжения распределены неравномерно по поверхности передачи давления, и поэтому кажется возможным, что уменьшение размеров массива не изменит в основном характера явлений, хотя распределение напряжений может отчасти измениться.

Эти соображения основаны на картине, полученной при испытании образца квадратной формы со сторонами в 2,54 см и толщиной в 0,318 см под нагрузкой, приложенной к средней части одной из его боковых сторон.

Фиг. 4.241 показывает характер распределения напряжений в подобном



Фиг. 4.242.

¹ L. N. G. Filon, On the approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, Phil. Trans. A, 201, 1903, 63 — 155. См. также главу V, § 5.10.

образце, когда к нему приложена сила в 22,7 кг, распределенная на длину 0,63 см при помощи прокладки из того же самого материала. Появляющиеся, при этом цветные полосы проходят через крайние точки прокладки, однако они не представляют собой дуг кругов, и можно подозревать наличие больших местных напряжений в этих крайних точках, так как обнаруживаются выходящие из них дополнительные петлеобразные цветные полосы.

С целью выяснить распределение напряжений для этого случая были измерены, по возможности по всей площади образца и прокладки, величины и направления главных напряжений (фиг. 4.242).

Как видно, материал, прилегающий к верхним наружным углам образца, практически не испытывает напряжений, так как остается темным при всех поворотах образца в плоско-поляризованном свете. Слабые полосы у свободной от нагрузки части верхнего края по видимому вызваны влиянием изгиба.

Изоклинические линии отчетливо выявляются по всему полю за исключением участка непосредственно под местом приложения нагрузки, где определение их представляется несколько затруднительным. Расположение этих линий, полученных в достаточном числе, чтобы построить линии главных напряжений, изображено на левой стороне фиг. 4.242. Линии главных напряжений нанесены на правой стороне рисунка. Легко заметить, что их расположение несколько напоминает подобную же картину в случае равномерно распределенной нагрузки, приложенной на некотором участке полуплоскости; исключением является участок в непосредственной близости к месту приложения нагрузки. В нижней

половине пластинки, где вследствие небольшой величины напряжений наблюдений более затруднительно, линии, идущие от верхней площади соприкосновения, изгибаются и вероятно пересекают нижний край почти под прямым углом, что указывает на незначительность касательных усилий по плоскости соприкосновения.

С целью получить распределение нормальных напряжений по сечениям, параллельным верхнему краю, были вычислены значения u_y из формулы

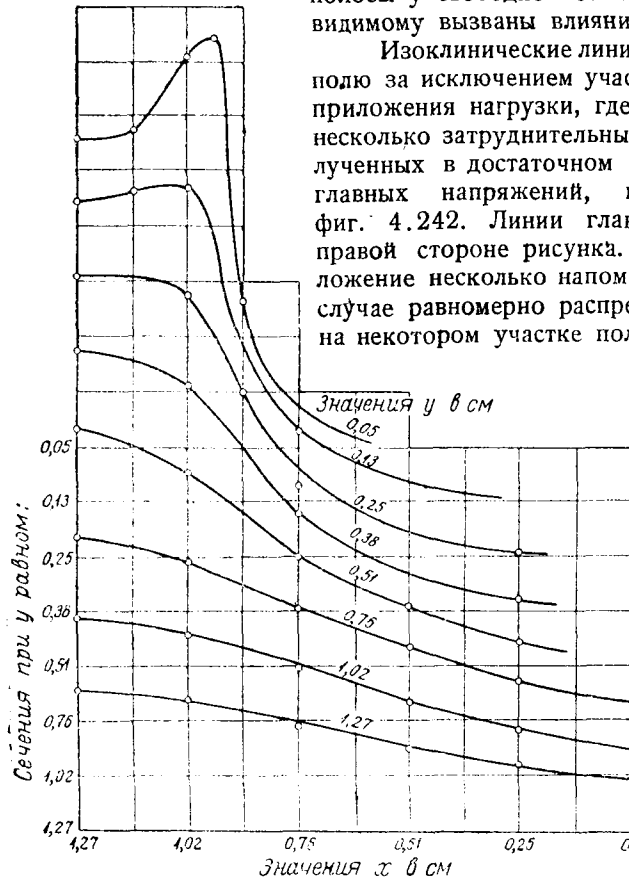
$$u_y = P \cos^2 \theta + Q \sin^2 \theta;$$

Фиг. 4.243. Значения u_y . Расстояние между горизонтальными линиями — 14 кг/см².

результаты нанесены на фиг. 4.243.

Оказалось, что для сечений, параллельных верхнему краю, величина меньшего главного напряжения уменьшается по мере удаления от этого края и становится весьма малой для расстояний, больших 0,51 см, пока на это напряжение не начинает влиять распределение давлений по нижнему краю образца.

Как показывают наблюдения, вдоль сечения с ординатой $y = 0,05$ см отчетливо выражен неравномерный характер распределения напряжений. В центре этого сечения нормальное напряжение несколько более 77,3 кг/см² и доходит почти



до $105,5 \text{ кг/см}^2$ непосредственно под крайней кромкой верхней прокладки, в то время как напряжение в поперечном направлении, не показанное на рисунке, равно приблизительно $36,9 \text{ кг/см}^2$ в центре; оно уменьшается далее до нуля и очень резко меняет свой знак вблизи точки, где первое главное напряжение достигает своего максимального значения.

Подобный же характер распределения напряжений сохраняется вплоть до сечения, находящегося на расстоянии около $0,25 \text{ см}$ от верхнего края; далее как $(P+Q)$, так и $(P-Q)$ достигают максимальной величины в центре сечения.

Все наблюдения указывают на далеко неравномерное распределение давлений как по верхней, так и по нижней поверхности образца, в то время как распределение напряжений, возникающих в материале, в значительной степени зависит от близости точек к этим поверхностям и боковым граням.

§ 4.25. Пара сил, приложенная в бесконечной пластинке.

Рассмотрим теперь некоторые другие простейшие решения и в частности те из них, которые не зависят от r .

Их легко найти, если перепишем уравнение

$$\nabla^4 \chi = 0$$

в полярных координатах, а именно:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \chi = 0.$$

Если χ является функцией, зависящей только от θ , то предыдущее равенство переписывается так:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = 0,$$

т. е.

$$\frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^4} + 4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = 0,$$

т. е. мы пришли к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид

$$\chi = C_1 \cos 2\theta + C_2 \sin 2\theta + C_3 \theta + C_4.$$

Постоянный член решения можно опустить, как не вызывающий напряжений. Рассмотрим по порядку решения

$$\chi = \theta \tag{4.251}$$

и

$$\chi = \sin 2\theta. \tag{4.252}$$

Решение $\chi = \cos 2\theta$ получается из предыдущего путем вращения осей координат на 45° .

Начиная с решения $\chi = \theta$, мы имеем $\nabla^2 \chi = 0$ и соответственно $\psi_1 = 0$. Перемещения тогда выражаются формулами

$$2\mu U_r = 0, \quad 2\mu U_\theta = -\frac{1}{r} \tag{4.253}$$

и напряжения

$$\overline{rr} = \overline{\theta\theta} = 0; \quad \overline{r\theta} = \frac{1}{r^2}. \quad (4.254)$$

Полученное решение соответствует своего рода „полому вихрю“ вокруг начала координат; физическая картина явления может быть воспроизведена путем скрепления внутренней и внешней поверхностей кругового кольца с жесткими концентрическими цилиндрами, поворачивающимися один относительно другого.

Этот метод весьма часто применялся при исследованиях оптическим методом вязких жидкостей и пластических масс, причем исследуемый материал помещался между двумя концентрическими цилиндрами разного диаметра, которые затем вращались один относительно другого. В этом случае распределение напряжений может быть определено независимо от вида материала вследствие статического характера равновесия.

Принимая затем $\chi = \sin 2\theta$, мы находим

$$\nabla^2 \chi = -\frac{4}{r^2} \sin 2\theta. \quad (4.255)$$

Уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi_1) = -\frac{4}{r^2} \sin 2\theta$$

дает для ψ_1 величину

$$\psi_1 = -\frac{2 \cos 2\theta}{r^2} + f(r) + \frac{F(\theta)}{r};$$

но так как функция

$$\psi_1 = \cos 2\theta/r^2,$$

как легко видеть, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \psi_1 = 0$, мы можем положить $f(r) = F(\theta) = 0$ и

$$\psi_1 = -\frac{2 \cos 2\theta}{r^2}. \quad (4.256)$$

Перемещения тогда выражаются формулами:

$$2\mu U_r = \frac{(1-\sigma)4 \sin 2\theta}{r}, \quad 2\mu U_\theta = (1-2\sigma) \frac{2 \cos 2\theta}{r}, \quad (4.257)$$

а напряжения равны:

$$\overline{rr} = -\frac{4}{r^2} \sin 2\theta, \quad \overline{r\theta} = \frac{2}{r^2} \cos 2\theta, \quad \overline{\theta\theta} = 0 \quad (4.258)$$

Проектируя составляющие напряжений на координатные оси x , y , получаем

$$\left. \begin{aligned} \overline{rx} &= -\frac{(4 \sin 2\theta \cos \theta + 2 \cos 2\theta \sin \theta)}{r^2} = -\frac{(\sin \theta + 3 \sin 3\theta)}{r^2} \\ \overline{ry} &= -\frac{(4 \sin 2\theta \sin \theta - 2 \cos 2\theta \cos \theta)}{r^2} = \frac{3 \cos 3\theta - \cos \theta}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.259)$$

Отсюда следует, что равнодействующая всех сил, приложенных к кругу радиуса $r = \text{const}$, имеет проекции на оси координат, соответственно равные

$$\int_0^{2\pi} \overline{rx} \cdot r d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \overline{ry} \cdot r d\theta.$$

Оба интеграла равны нулю.

Момент этих сил относительно начала координат равен

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{r\theta} \cdot r^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot d\theta = 0.$$

Из сказанного следует, что решению (4.252) соответствует отсутствие какой-либо силы или пары сил в начале координат.

С другой стороны решение (4.251) соответствует наличию пары сил с моментом 2π , передающейся на начало координат, и следовательно пары с моментом -2π , передающейся от начала координат на пластинку.

Из этого следует, что решение (4.252) является излишним, когда мы имеем дело с бесконечной пластинкой, хотя, как мы увидим, оно может быть применено в случае полуплоскости или клина.

Решение (4.251) соответствует случаю действия пары сил с моментом G , отнесенным к единице толщины; пара приложена в центре бесконечной пластинки.

Мы тогда имеем для напряжений

$$\widetilde{rr} = \widetilde{\theta\theta} = 0, \quad \widetilde{r\theta} = G/2\pi r^2.$$

Линии главных напряжений являются логарифмическими спиралями, пересекающимися как концентрические круги, так и радиусы под углом $\frac{\pi}{4}$, в то время как изоклинические линии имеют радиальное направление.

Таблица 4.25.

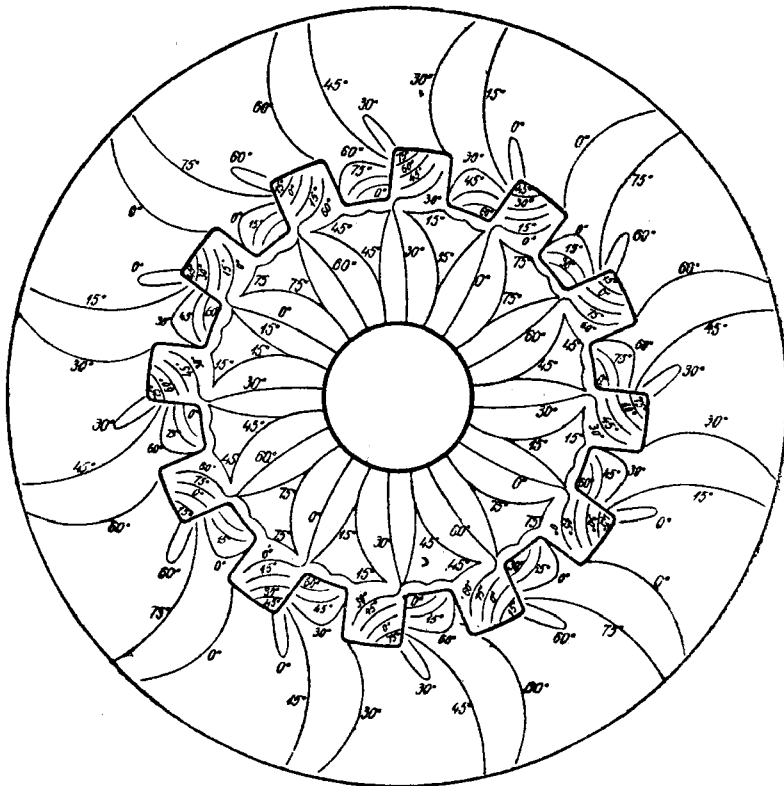
Расстояние от центра (в см)	— Q , кг/см ² , полученные		Ошибка (в %)
	измерением	вычислением	
1,27	103,6	102,9	+ 0,7
1,91	46,8	45,8	+ 2,2
2,54	25,4	25,7	- 1,1
3,18	16,6	16,5	+ 0,7
3,81	11,5	11,5	—
4,45	8,3	8,4	- 2,0
5,08	6,4	6,4	- 1,4

Эти результаты были получены оптическим методом для случая пластинки конечных размеров, прикрепленной в центре к специальному диску, к которому была приложена по окружности пара сил.

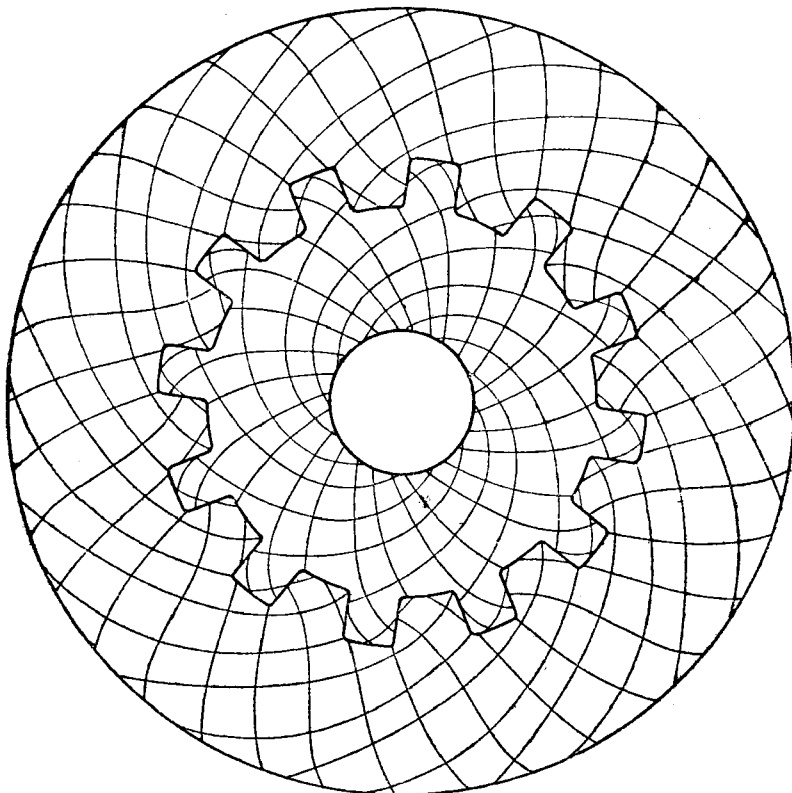
Так, например, результаты таблицы 4.25 получены для случая круговой пластинки с радиусом 13,2 см и толщиной в 0,460 см при воздействии пары сил с моментом 239,9 кг.см.

Как видно из таблицы 4.25, экспериментальные данные хорошо подтверждаются теорией.

Случаи, подобные только-что рассмотренному, часто встречаются на практике. Одним из примеров может служить вал с зубчатыми выступами, зацепляющимися за соответствующие вырезы в окружающем вал диске, приводимом в движение валом. К этому типу принадлежат многие кулачные закрепления, а также передачи в коробках скоростей у автомобилей.

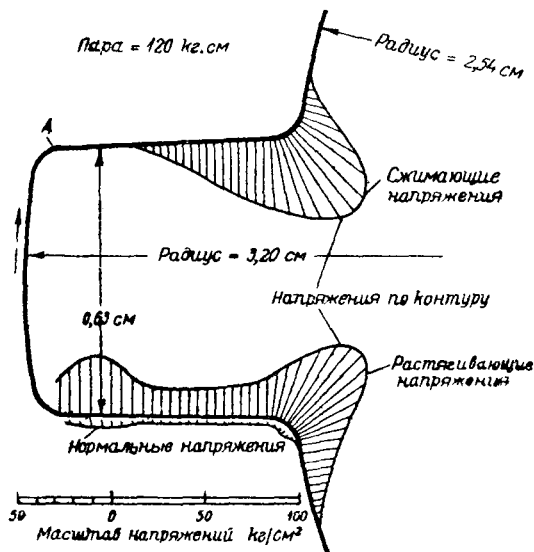


Фиг. 4.251 (а). Изоклины.



Фиг. 4.251 (б). Линия главных напряжений.

Изоклинические линии и линии главных напряжений для диска с двенадцатью прямоугольными выступами показаны на фиг. 4.251а и б. Линии главных напряжений представляют собой сеть ортогональных спиралей, отличающихся от тех, которые получаются в бесконечной пластинке, поскольку имеет место заметное угловое перемещение по направлению действия пары. Это заметно и во внешней пластинке, где спиральные линии главных напряжений имеют искажения в местах нарушения непрерывности материала. Выступы внутреннего диска испытывают наибольшие напряжения в местах соединения их с основным материалом диска, как показано на фиг. 4.252. На этом чертеже изображено распределение напряжений в точках на поверхности соприкосновения зубца с внешним диском при скручивающем моменте, равном 119,9 кг.см, приложенном к наружному диску. Можно отметить значительные местные напряжения у нижнего закругления зубца. Давление по соприкасающимся поверхностям сравнительно мало, за исключением места у концов зуба.



Фиг. 4.252.

В наружном диске отмечено только одно место, где напряжение поддается измерению, а именно около верхнего входящего угла, соответствующего закругленной части А зубца. Однако в этом месте напряжение очень незначительно.

§ 4.26. Пара сил, приложенная к вершине клина.

Рассматривая клин, ограниченный прямыми $\theta = \pm \alpha$, мы увидим, что и решение (4.251) и решение (4.252) дают на боковых гранях клина напряжения $r\theta$, не равные нулю. Если, однако, мы соединим эти два решения в виде функции

$$\chi = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \cdot \cos 2\alpha, \quad (4.261)$$

то формулы для напряжений примут вид

$$\overline{rr} = -\frac{2}{r^2} \sin 2\theta, \quad \overline{r\theta} = \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{r^2}, \quad \overline{\theta\theta} = 0, \quad (4.262)$$

и $\bar{r}\theta$ обращается в нуль при $\theta = \pm \alpha$, так что боковые грани клина свободны от напряжений.

Равнодействующие сил, передающихся от клина на его вершину, равны

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\bar{r}r \cos \theta - \bar{r}\theta \sin \theta) r d\theta$$

и

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\bar{r}r \sin \theta + \bar{r}\theta \cos \theta) r d\theta.$$

Эти интегралы тождественно равны нулю. Момент пары сил, передающихся клином на его вершину, выражается формулой:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \bar{r}\theta d\theta &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \cos 2\alpha \right)_{-\alpha}^{\alpha} = \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

т. е. момент внешней пары сил, приложенной к клину, равен

$$2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha. \quad (4.263)$$

Отсюда для пары сил с моментом M , приложенной к вершине клина:

$$\gamma = \frac{M(\sin \theta \cos \theta - \theta \cos 2\alpha)}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad (4.264)$$

а напряжения окажутся равными: ¹

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}r &= \frac{-2M \sin 2\theta}{r^2(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)} \\ \bar{r}\theta &= \frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{r^2(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)} \\ \bar{\theta}\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.265)$$

§ 4.27. Решения порядка „ n “ в полярных координатах.

Под решением порядка n подразумевается решение, включающее $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$ как множители. Очевидно, что подобное решение бывает однозначным при обходе начала координат только тогда, когда n — целое число.

Из уравнения (4.018), подставив вместо входящих в него функций простые степени, получаем, что

$$(x \pm iy)^n \quad \text{и} \quad r^2(x \pm iy)^n$$

будут решениями уравнения

$$\nabla^4 \gamma = 0.$$

Но

$$x + iy = re^{i\theta}, \quad x - iy = re^{-i\theta}.$$

¹ Это решение было опубликовано prof. C. E. Inglis, Some special cases of two-dimensional stress or strain, Trans. Inst. Naval Architects, 64, 1922.

Отсюда, комбинируя выражения этого вида, мы получаем в качестве решений функции

$$r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta, \quad r^{n+2} \cos n\theta \quad \text{и} \quad r^{n+2} \sin n\theta.$$

Заменяя n на $-n$, мы получаем новый ряд решений

$$r^{-n} \cos n\theta, \quad r^{-n} \sin n\theta, \quad r^{-n+2} \cos n\theta, \quad r^{-n+2} \sin n\theta,$$

что дает восемь независимых решений порядка n .

Они могут быть написаны короче в такой форме:

$$r^{\pm n} \cos(n\theta + \varepsilon), \quad r^{\pm n+2} \cos(n\theta + \varepsilon).$$

Найдем сначала выражения для перемещений.

Рассмотрим функцию

$$\chi = r^{\pm n} \cos(n\theta + \varepsilon). \quad (4.271)$$

Тогда $\nabla^2 \chi = 0$, и мы можем принять $\psi_1 = 0$. Для перемещения получаем:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu U_r &= \mp n r^{\pm n-1} \cos(n\theta + \varepsilon), \\ 2\mu U_\theta &= n r^{\pm n-1} \sin(n\theta + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (4.272)$$

которые являются однозначными функциями.

Далее рассмотрим функцию

$$\chi = r^{\pm n+2} \cos(n\theta + \varepsilon). \quad (4.273)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \chi \\ &= \cos(n\theta + \varepsilon) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial r^{\pm n+2}}{\partial r} - n^2 r^{\pm n} \right\} \\ &= \cos(n\theta + \varepsilon) \{ (\pm n + 2)^2 - n^2 \} r^{\pm n} \\ &= 4(\pm n + 1) r^{\pm n} \cos(n\theta + \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.274)$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi_1) = 4(\pm n + 1) r^{\pm n} \cos(n\theta + \varepsilon),$$

мы находим

$$\psi_1 = \frac{4r^{\pm n}}{n} \sin(n\theta + \varepsilon) + f(r) + \frac{F(\theta)}{r},$$

и так как

$$\nabla^2 r^{\pm n} \sin(n\theta + \varepsilon) = 0,$$

то

$$\psi_1 = \frac{4r^{\pm n}}{n} \sin(n\theta + \varepsilon). \quad (4.275)$$

Эти вычисления всегда возможны при условии, что ни $(\pm n + 1)$, ни n не равны нулю. Если $n = 1$ и мы берем нижний знак, то $r^{-1+2} \cos(\theta + \varepsilon)$ обращается в $r \cos(\theta + \varepsilon)$, и второй вид решения совпадает с первым, уже разобранным.

Случай $n = 0$ требует отдельного исследования.

Исключая подобные особенные случаи, мы имеем, применяя формулы (4.102) и (4.1022):

$$2\mu U_r = -(\pm n + 2)r^{\pm n+1} \cos(n\theta + \epsilon) \pm (1 - \sigma)4r^{\pm n+1} \cos(n\theta + \epsilon),$$

$$2\mu U_\theta = nr^{\pm n+1} \sin(n\theta + \epsilon) \pm 4(1 - \sigma)r^{\pm n+1} \sin(n\theta + \epsilon),$$

т. е.

$$2\mu U_r = \{4(1 - \sigma) - 2\mp n\} r^{\pm n+1} \cos(n\theta + \epsilon), \quad (4.276)$$

$$2\mu U_\theta = \{n \pm 4(1 - \sigma)\} r^{\pm n+1} \sin(n\theta + \epsilon). \quad (4.277)$$

Перемещения и в этом случае являются также однозначными. Поэтому все решения изучаемого вида могут быть применяемы без опасения получить многозначные величины для перемещений.

Особенные решения не могут встретиться, пока $n \geq 2$ и для каждого n имеются восемь независимых решений.

Для дальнейшего будет полезно привести здесь формулы для напряжений, соответствующие решениям (4.271) и (4.273).

Для (4.271) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= (\pm n - n^2) r^{\pm n-2} \cos(n\theta + \epsilon) \\ \overline{\theta\theta} &= (n^2 \mp n) r^{\pm n-2} \cos(n\theta + \epsilon) \\ \overline{r\theta} &= n(\pm n - 1) r^{\pm n-2} \sin(n\theta + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.278)$$

и для (4.273)

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= (\pm n + 2 - n^2) r^{\pm n} \cos(n\theta + \epsilon) \\ \overline{\theta\theta} &= (\pm n + 2)(\pm n + 1) r^{\pm n} \cos(n\theta + \epsilon) \\ \overline{r\theta} &= n(\pm n + 1) r^{\pm n} \sin(n\theta + \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4.279)$$

§ 4.28. Решения порядка нуля и единица.

Если $n = 1$, то оказывается, что лишь решения

$$r^3 \cos \theta, \quad r^3 \sin \theta, \quad \frac{\cos \theta}{r}, \quad \frac{\sin \theta}{r}$$

являются определенными и имеющими значение.

Решения же

$$r \cos \theta, \quad r \sin \theta \quad \text{и} \quad r^2 \left(\frac{\cos \theta}{r} \right), \quad r^2 \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)$$

могут быть отброшены, так как они дают нулевую величину напряжений во всех точках и не имеют значения при вычислении деформаций.

Мы однако уже нашли (§ 4.14) четыре решения, которые приводят к правильным выражениям для напряжений, а именно:

$$r \lg r \cos(\theta + \epsilon) \quad \text{и} \quad r\theta \sin(\theta + \epsilon).$$

Но, как было уже показано, им соответствует многозначность перемещений. С другой стороны, комбинированное из них решение

$$\chi = \frac{1}{2} (1 - \eta) r \lg r \cos(\theta + \epsilon) - r\theta \sin(\theta + \epsilon) \quad (4.281)$$

приводит, как было показано, к однозначным перемещениям. Формулы для напряжений в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -\frac{(3 + \eta) \cos(\theta + \epsilon)}{2r}, & \overline{\theta\theta} &= \frac{(1 - \eta) \cos(\theta + \epsilon)}{2r}, \\ \overline{r\theta} &= \frac{(1 - \eta) \sin(\theta + \epsilon)}{2r} \end{aligned} \right\} \quad (4.282)$$

имеют правильную форму.

Принимая $\theta = 0$ и $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, мы получаем два решения, которые и заменяют четыре исчезнувших решения.

Таким образом мы имеем шесть решений порядка единицы. Далее мы докажем, что этих шести решений бывает всегда достаточно, чтобы удовлетворить условиям на контуре, вытекающим из уравнений статического равновесия.

Переходя к случаю $n = 0$, можно было бы ожидать наличия четырех решений. Однако находим, что два из них исчезают, решение же $\chi = 1$ не имеет никакого значения, и остается решение $\chi = r^2$, имеющее значение при вычислении напряжений.

Кроме того мы получаем (§§ 4.02, 4.25) еще три независимых друг от друга решения, а именно

$$\lg r, \quad r^2 \lg r, \quad \theta.$$

Второе из этих решений должно быть нами отброшено как приводящее (§ 4.02) к многозначности перемещений.

Первое решение приводит к однозначным выражениям так же, как решение $\chi = r^2$. Третье решение, хотя оно само по себе и многозначное, дает на основании § 4.25 однозначные выражения для напряжений и перемещений и должно быть поэтому сохранено.

Таким образом, у нас остаются три независимых решения нулевого порядка. Далее мы покажем, что этих трех решений достаточно, чтобы вполне удовлетворить всевозможным условиям на контуре.

Ниже приведена сводка всех решений для задач, относящихся к случаю, когда материал окружает со всех сторон начало координат.

Порядок нуль:

$$r^2, \quad \lg r, \quad \theta. \quad (4.283)$$

Порядок единица:

$$r^3 \cos \theta, \quad r^3 \sin \theta, \quad (4.284)$$

$$\frac{\cos \theta}{r}, \quad \frac{\sin \theta}{r}, \quad (4.285)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \eta) r \lg r \cos \theta - r\theta \sin \theta, \quad (4.286)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \eta) r \lg r \sin \theta + r\theta \cos \theta. \quad (4.287)$$

§ 4.29. Дислокации порядка единицы.

Прежде чем приступить к разбору общих методов исследования напряжений в диске или кольце, необходимо разобрать некоторые комбинации из решений, называемых решениями первого порядка, при которых мы не ставим условий однозначности перемещений, и выяснять физический смысл этих решений.

Мы уже исследовали (§ 4.12) одно подобное решение нулевого порядка для кольца, грани которого $r = a$, $r = b$ свободны от напряжений.

Рассмотрим теперь решение

$$\chi = A_1 r^3 \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r} + C_1 r \sin \theta + D_1 r \lg r \cos \theta, \quad (4.291)$$

приводящее к таким выражениям для средних напряжений:

$$\overline{rr} = \cos \theta \left(2A_1 r - \frac{2B_1}{r^3} + \frac{2C_1 + D_1}{r} \right), \quad (4.2921)$$

$$\overline{r\theta} = \sin \theta \left(2A_1 r - \frac{2B_1}{r^3} + \frac{D_1}{r} \right), \quad (4.2922)$$

$$\overline{\theta\theta} = \cos \theta \left(6A_1 r + \frac{2B_1}{r^3} + \frac{D_1}{r} \right). \quad (4.2923)$$

Если у нас \overline{rr} и $\overline{r\theta}$ будут равны нулю при $r=a$ и $r=b$, то

$$2A_1 a - \frac{2B_1}{a^3} + \frac{2C_1 + D_1}{a} = 0, \quad (4.2931)$$

$$2A_1 a - \frac{2B_1}{a^3} + \frac{D_1}{a} = 0, \quad (4.2932)$$

$$2A_1 b - \frac{2B_1}{b^3} + \frac{2C_1 + D_1}{b} = 0, \quad (4.2933)$$

$$2A_1 b - \frac{2B_1}{b^3} + \frac{D_1}{b} = 0. \quad (4.2934)$$

Отсюда после вычитания попарно получаем, что C_1 должно быть равно нулю, и у нас в таком случае остается только два уравнения (4.2932) и (4.2934), позволяющие выразить любые две из трех постоянных A_1 , B_1 , D_1 через третью. Эти уравнения дают:

$$A_1 = -\frac{D}{2(a^2 + b^2)}; \quad B_1 = \frac{D_1(a^2 b^2)}{2(a^2 + b^2)}. \quad (4.294)$$

Средние напряжения принимают теперь следующий вид:

$$\overline{rr} = \frac{D_1 \cos \theta (a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)r^3}, \quad (4.2951)$$

$$\overline{r\theta} = \frac{D_1 \sin \theta (a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)r^3}, \quad (4.2952)$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{D_1 \cos \theta [a^2 b^2 + r^2(a^2 + b^2) - 3r^4]}{(a^2 + b^2)r^3}. \quad (4.2953)$$

Средние значения перемещений получаются из уравнений (4.1451), (4.1452), (4.272), (4.276) и (4.277) в виде

$$2\mu U_r = \cos \theta \left[A_1 (1 - 4\sigma) r^2 + \frac{B_1}{r^2} + D_1 \{ (1 - 2\sigma) \lg r - (3 - 2\sigma) \} \right] + \\ + 2\theta \sin \theta (1 - \sigma) D_1, \quad (4.2961)$$

$$2\mu U_\theta = \sin \theta \left[A_1 (5 - 4\sigma) r^2 + \frac{B_1}{r^2} + D_1 \{ 2(1 - \sigma) - (1 - 2\sigma) \lg r \} \right] + \\ + 2\theta \cos \theta (1 - \sigma) D_1. \quad (4.2962)$$

Желательно однако в этом случае получить составляющие средних перемещений U , V , параллельные осям Ox и Oy . Эти составляющие вычисляются из формул

$$U = U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta,$$

$$V = U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta,$$

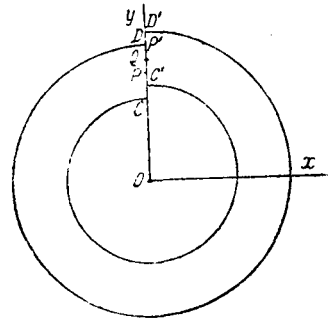
и имеют следующий вид:

$$2\mu U = -2A_1 r^2 + D_1 \left\{ (1 - 2\sigma) \lg r - \frac{5 - 4\sigma}{2} \right\} + \cos 2\theta \left\{ (3 - 4\sigma) A_1 r^2 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{D_1}{2} \right\}, \quad (4.2971)$$

$$2\mu V = \sin 2\theta \left\{ (3 - 4\sigma) A_1 r^2 + \frac{B_1}{r^2} - \frac{D_1}{2} \right\} + 2D_1 (1 - \sigma) \theta. \quad (4.2972)$$

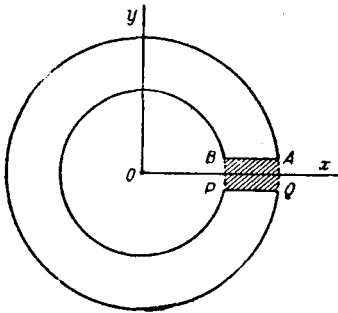
U оказывается однозначным, а V , после того как мы один раз обойдем вокруг начала координат, окажется увеличенным на $2\pi D_1 (1 - \sigma)$, т. е. на $4\pi D_1 / E$.

Если предположить, что кольцо наше было первоначально не сплошным, но разрезанным по сечению CD вдоль оси Oy (фиг. 4.291), то увидим, что полученное перемещение указывает на относительный вертикальный сдвиг двух краев разреза, доходящий до $4\pi D_1 / E$. Мы можем воспроизвести это физически, сдвинув один край разреза кверху на эту величину и снова склеив разрез. Заметим, однако, что точками, перемещения которых будут различаться на требуемую величину, будут совсем не точки P, P' , совпадавшие ранее, а точки Q, P' , которые совпадут после склейки. Перемещение точки Q отличается, правда, от перемещения P на величину второго порядка малости; подобными слагаемыми второго порядка в теории упругости всегда пренебрегают за исключением только задач устойчивости, где их приходится учитывать.

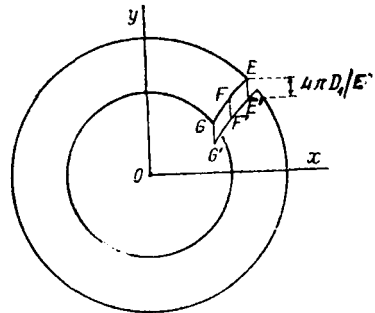


Фиг. 4.291.

Нам впрочем не нужно разрезать кольцо по оси Oy . Если вырезать из кольца участок $ABQP$ постоянной толщины $4\pi D_1 / E$ вдоль оси Ox (фиг. 4.292) и склеить края разреза, то перемещения для соединенных таким образом точек будут отличаться между собой на указанную часть перемещения V . Нет никакой необходи-



Фиг. 4.292.



Фиг. 4.293.

мости, чтобы такой разрез шел вдоль той или другой оси, к тому же он может не быть обязательно прямым. Разрез EFG (фиг. 4.293) может быть проведен в любом месте и иметь любую форму. Если кривая EFG может быть понижена на $4\pi D_1 / E$ без ее поворота или искажения в положение $E'F'G'$, а материал разрезан вдоль EFG и $E'F'G'$, то после соединения и склейки соответствующих точек этих двух кривых мы получаем прежнюю деформацию.

На основании установленной уже в § 4.12 терминологии мы будем называть подобную деформацию в склеенном после разреза кольце *смещением (дислокацией) первого порядка*.

Имеется еще и второй вид смещения первого порядка, соответствующий функции напряжений типа

$$\chi = \left\{ A_1' r^3 + \frac{B'}{r} + D_1' r \lg r \right\} \sin \theta. \quad (4.298)$$

Разрыв непрерывности обнаруживается в этом случае не для V , а для U , причем величина этого смещения равна $-\frac{4\pi D_1'}{E}$; оно получается из предыдущего типа поворотом на прямой угол.

Общий вид смещения, который может возникнуть в кольце, является соединением этих двух смещений вместе со смещением нулевого порядка (§ 4.12), получаемым, как мы уже видели, при поворачивании краев разреза на $4\pi D(1-\sigma)/\mu$, т. е. на $(8\pi D/E)$ вокруг начала координат.

Для получения подобного смещения наиболее общего вида проведем в кольце два близких разреза (прямых или кривых) совмещаемой формы; мы можем их совместить друг с другом посредством сдвигов Δx , Δy , параллельных осям координат, и поворота $\Delta\theta$ вокруг центра кольца. Тогда коэффициенты D , D_1 , D_1' трех этих смещений, которые соединяют края разреза, определяются из следующих формул:

$$4\pi D_1 = E\Delta y, \quad 4\pi D_1' = -E\Delta x, \quad 8\pi D = E\Delta\theta,$$

и полный вид решения может быть тотчас же получен.

§ 4.30. Полукольцо при действии срезающих сил по концам и разрезанное кольцо под действием концевых растягивающих сил.

Подобно тому как мы истолковали в § 4.12 деформацию при смещении нулевого порядка, как изгиб кругового кольца под действием постоянного изгибающего момента, так и здесь можно истолковать смещения, рассмотренные в § 4.29, как изгиб неполного кругового кольца при действии сил на его концы.

На основании уравнений (4.295₁, 2, 3) мы получаем следующие выражения для сил на единицу толщины, передающихся через сечение $\theta = \text{const}$ со стороны большего θ :

1) радиальную силу:

$$R = \int_b^a \overset{\sim}{r\theta} dr = D_1 \sin \theta \left[\lg \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right];$$

2) поперечную силу:

$$\Theta = \int_b^a \overset{\sim}{\theta\theta} dr = D_1 \cos \theta \left[\lg \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right].$$

Момент вокруг начала координат равен

$$\int_b^a \overset{\sim}{r\theta\theta} dr = 0.$$

Таким образом усилия по проведенному сечению приводятся к одной силе равной (на единицу толщины)

$$F = D_1 \left[\lg \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right]$$

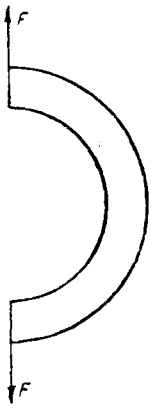
и действующей в положительном направлении оси Oy .

Применяя к кольцу принцип Сен-Венана (см. § 4.23), мы видим, что рассматриваемое напряженное состояние может возникнуть под действием двух равных

и противоположных сил F (на единицу толщины), приложенных к двум концам *полукольца* (фиг. 4.301), если только ширина кольца достаточно мала, чтобы принцип Сен-Венана мог быть применен с достаточным основанием.

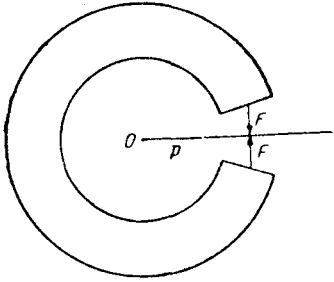
Мы можем также применить полученные результаты к случаю (фиг. 4.302), где обе стороны выреза, сделанного в кольце, стягиваются силами F . В этом случае однако к смещению первого порядка следует добавить смещение нулевого порядка; коэффициенты, определяющие его величины, даны формулами (4.1251, 2, 3), где $M = pF$; p обозначает расстояние от O точки приложения силы F .

Напряжения для случая, изображенного на фиг. 4.301, выражаются следующим образом:



Фиг. 4.301.

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= H \cos \theta (b^2 - r^2)(r^2 - a^2)/r^3, \\ \overline{r\theta} &= H \sin \theta (b^2 - r^2)(r^2 - a^2)/r^3, \\ \overline{\theta\theta} &= H \cos \theta (a^2 b^2 - 3r^4 + r^2(a^2 + b^2)) / r^3, \end{aligned} \right\} (4.301)$$



Фиг. 4.302.

где

$$H = F / \{ (a^2 + b^2) \lg(a/b) - (a^2 - b^2) \}. \tag{4.302}$$

§ 4.31. Равновесие сплошного кругового кольца при заданных напряжениях на контуре.

Теперь мы можем приступить к решению задачи отыскания распределения напряжений в круговом кольце с внешним радиусом a и внутренним b при заданной величине средних по толщине кольца напряжений на контуре.¹

Разлагая эти напряжения в ряды Фурье по θ , получаем при $r = a$

$$(\overline{rr})_a = a_0 + a_1 \cos \theta + a_1' \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + a_n' \sin n\theta), \tag{4.3111}$$

$$(\overline{r\theta})_a = c_0 + c_1 \cos \theta + c_1' \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos n\theta + c_n' \sin n\theta), \tag{4.3112}$$

и при $r = b$

$$(\overline{rr})_b = b_0 + b_1 \cos \theta + b_1' \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n \cos n\theta + b_n' \sin n\theta), \tag{4.3113}$$

$$(\overline{r\theta})_b = d_0 + d_1 \cos \theta + d_1' \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (d_n \cos n\theta + d_n' \sin n\theta). \tag{4.3114}$$

¹ Способ этот впервые намечен *A. Timpe: Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion, Göttingen Dissertation, B. G. Teubner, Leipzig 1905.*

Однако Тимпе не получил полного решения для общего случая.

Постоянные $a_n, b_n, c_n, d_n, a'_n, b'_n, c'_n, d'_n$ могут считаться заданными. Однако они не совсем произвольны, так как в силу условий статики суммы проекций сил (действующих по обоим контурам) на оси $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ должны обращаться в нуль так же, как и момент этих сил вокруг начала координат.

Следовательно, имеем

$$\int_0^{2\pi} (\overline{r r}_a \cos \theta - \overline{r \theta}_a \sin \theta) a \, d\theta = \int_0^{2\pi} (\overline{r r}_b \cos \theta - \overline{r \theta}_b \sin \theta) b \, d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} (\overline{r r}_a \sin \theta + \overline{r \theta}_a \cos \theta) a \, d\theta = \int_0^{2\pi} (\overline{r r}_b \sin \theta + \overline{r \theta}_b \cos \theta) b \, d\theta$$

и

$$\int_0^{2\pi} \overline{r \theta}_a^2 a^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \overline{r \theta}_b^2 b^2 \, d\theta,$$

что приводит непосредственно к зависимостям

$$(a_1 - c_1') a = (b_1 - d_1') b, \quad (4.3121)$$

$$(a_1' + c_1) a = (b_1' + d_1) b, \quad (4.3122)$$

$$c_0 a^2 = d_0 b^2. \quad (4.3123)$$

Эти зависимости ограничивают рассматриваемые постоянные таким образом, что только три из постоянных нулевого порядка и только шесть из числа постоянных первого порядка могут быть заданы произвольно.

Благодаря этому обстоятельству можно получить полное решение при помощи функций напряжений, перечисленных в § 4.28.

Примем за функцию напряжений

$$\begin{aligned} \chi = & A_0 r^2 + B_0 \lg r + C_0 \theta + \\ & + A_1 r^3 \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r} + C_1 \left\{ \frac{1-\eta}{2} r \lg r \cdot \cos \theta - r \theta \sin \theta \right\} + \\ & + A_1' r^3 \sin \theta + B_1' \frac{\sin \theta}{r} + C_1' \left\{ \frac{1-\eta}{2} r \lg r \cdot \sin \theta + r \theta \cos \theta \right\} + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ A_n r^{n+2} \cos n\theta + B_n r^{-n} \cos n\theta + C_n r^n \cos n\theta + D_n r^{-n+2} \cos n\theta + \right. \\ & \left. + A_n' r^{n+2} \sin n\theta + B_n' r^{-n} \sin n\theta + C_n' r^n \sin n\theta + D_n' r^{-n+2} \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (4.313)$$

Из предыдущего мы знаем, что этому значению χ соответствует наличие непрерывных и однозначных перемещений для всех точек кольца. Вычислив соответствующие этой функции значения напряжений, имеем

$$\begin{aligned} \overline{r r} = & 2A_0 + \frac{B_0}{r^2} + \\ & + 2A_1 r \cos \theta - \frac{2B_1}{r^3} \cos \theta - \frac{(3+\eta)}{2} C_1 \frac{\cos \theta}{r} + \\ & + 2A_1' r \sin \theta - \frac{2B_1'}{r^3} \sin \theta - \frac{(3+\eta)}{2} C_1' \frac{\sin \theta}{r} - \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1)(n-2) A_n r^n + n(n+1) B_n r^{-n-2} + n(n-1) C_n r^{n-2} + \\ & + (n-1)(n+2) D_n r^{-n} \} \cos n\theta - \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1)(n-2) A_n' r^n + n(n+1) B_n' r^{-n-2} + n(n-1) C_n' r^{n-2} + \\ & + (n-1)(n+2) D_n' r^{-n} \} \sin n\theta, \end{aligned} \quad (4.3141)$$

$$\begin{aligned}
 \overline{r\theta} = & \frac{C_0}{r^2} + 2A_1 r \sin \theta - \frac{2B_1}{r^3} \sin \theta + \frac{1-\eta}{2} C_1 \frac{\sin \theta}{r} - \\
 & - 2A_1' r \cos \theta + \frac{2B_1'}{r^3} \cos \theta - \frac{1-\eta}{2} C_1' \frac{\cos \theta}{r} + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ n(n+1) A_n r^n - n(n+1) B_n r^{-n-2} + \\
 & + n(n-1) C_n r^{n-2} - n(n-1) D_n r^{-n} \} \sin n\theta - \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} \{ n(n+1) A_n' r^n - n(n+1) B_n' r^{-n-2} + \\
 & + n(n-1) C_n' r^{n-2} - n(n-1) D_n' r^{-n} \} \cos n\theta,
 \end{aligned} \tag{4.3142}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\theta\theta} = & 2A_0 - \frac{B_0}{r^2} + \left\{ 6A_1 r + \frac{2B_1}{r^3} + \frac{1-\eta}{2} \frac{C_1}{r} \right\} \cos \theta + \\
 & + \left\{ 6A_1' r + \frac{2B_1'}{r^3} + \frac{1-\eta}{2} \frac{C_1'}{r} \right\} \sin \theta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1)(n+2) A_n r^n + n(n+1) B_n r^{-n-2} + \\
 & + n(n-1) C_n r^{n-2} + (n-1)(n-2) D_n r^{-n} \} \cos n\theta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1)(n+2) A_n' r^n + n(n+1) B_n' r^{-n-2} + \\
 & + n(n-1) C_n' r^{n-2} + (n-1)(n-2) D_n' r^{-n} \} \sin n\theta.
 \end{aligned} \tag{4.3143}$$

Приравнявая значения $\overline{rr_a}$, $\overline{rr_b}$, $\overline{r\theta_a}$, $\overline{r\theta_b}$, получим как раз достаточное количество уравнений для определения коэффициентов A_n и т. д., когда $n \geq 2$. Для

$$n = 0$$

имеем

$$2A_0 + \frac{B_0}{a^2} = a_0, \quad 2A_0 + \frac{B_0}{b^2} = b_0,$$

откуда получаем:

$$A_0 = \frac{1}{2} \frac{a_0 - b_0 q^2}{1 - q^2}; \quad B_0 = -\frac{a^2 q^2}{1 - q^2} (a_0 - b_0), \tag{4.3151}$$

где

$$q = b/a. \tag{4.316}$$

Этим сокращенным обозначением мы будем теперь систематически пользоваться. Дальше

$$\frac{C_0}{a^2} = c_0, \quad \frac{C_0}{b^2} = d_0.$$

Эти уравнения совпадают в силу (4.3123), и мы имеем

$$\frac{C_0}{a^2} = c_0 = d_0 q^2. \tag{4.3152}$$

Для $n = 1$ имеем

$$2A_1 a - \frac{2B_1}{a^3} - \frac{3 + \eta}{2} \frac{C_1}{a} = a_1,$$

$$2A_1 a - \frac{2B_1}{a^3} + \frac{1 - \eta}{2} \frac{C_1}{a} = c_1',$$

$$2A_1' a - \frac{2B_1'}{a^3} - \frac{3 + \eta}{2} \frac{C_1'}{a} = a_1',$$

$$2A_1' a - \frac{2B_1'}{a^3} + \frac{1 - \eta}{2} \frac{C_1'}{a} = -c_1;$$

к этим уравнениям добавляются четыре подобных же уравнения, в которых a , a_1' , c_1 и c_1' заменены через b , b_1 , b_1' , d_1 и d_1' соответственно.

После вычитания попарно получаем

$$\left. \begin{aligned} -2C_1 &= a(a_1 - c_1') = b(b_1 - d_1'), \\ -2C_1' &= a(a_1' + c_1) = b(b_1' + d_1); \end{aligned} \right\} \quad (4.3153)$$

эти результаты основаны на (4.3121) и (4.3122).

Решение принимает следующий вид:

$$A_1 a = \frac{(1 - \eta)(a_1 - b_1 q^3) + (3 + \eta)(c_1' - d_1' q^3)}{8(1 - q^4)}, \quad (4.3161)$$

$$A_1' a = \frac{(1 - \eta)(a_1' - b_1' q^3) - (3 + \eta)(c_1 - d_1 q^3)}{8(1 - q^4)}, \quad (4.3162)$$

$$\frac{B_1}{a^3} = \frac{(1 - \eta)(a_1 q^4 - b_1 q^8) + (3 + \eta)(c_1' q^4 - d_1' q^8)}{8(1 - q^4)}, \quad (4.3163)$$

$$\frac{B_1'}{a^3} = \frac{(1 - \eta)(a_1' q^4 - b_1' q^8) - (3 + \eta)(c_1 q^4 - d_1 q^8)}{8(1 - q^4)}. \quad (4.3164)$$

Перейдем теперь к уравнениям для A_n , B_n , C_n , D_n . Эти уравнения имеют вид

$$(n + 1)(n - 2)A_n a^n + n(n + 1)B_n a^{-n-2} + \\ + n(n - 1)C_n a^{n-2} + (n - 1)(n + 2)D_n a^{-n} = -a_n,$$

$$n(n + 1)A_n a^n - n(n + 1)B_n a^{-n-2} + \\ + n(n - 1)C_n a^{n-2} - n(n - 1)D_n a^{-n} = c_n',$$

$$(n + 1)(n - 2)A_n b^n + n(n + 1)B_n b^{-n-2} + \\ + n(n - 1)C_n b^{n-2} + (n - 1)(n + 2)D_n b^{-n} = -b_n,$$

$$n(n + 1)A_n b^n - n(n + 1)B_n b^{-n-2} + \\ + n(n - 1)C_n b^{n-2} - n(n - 1)D_n b^{-n} = d_n'.$$

Составим выражения

$$\left. \begin{aligned} f_n &= n \{ a_n - c_n' - q^n (b_n - d_n') \} \\ g_n &= n a_n - (n + 2) c_n' - q^{n+2} \{ n b_n - (n + 2) d_n' \} \\ h_n &= q^n \{ n b_n + (n - 2) d_n' \} - q^{2n-2} \{ n a_n + (n - 2) c_n' \} \\ k_n &= n q^n (b_n + d_n') - n q^{2n} (a_n + c_n'). \end{aligned} \right\} \quad (4.317)$$

Тогда получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} f_n &= 2n(n-1) [(n+1) A_n a^n (q^{2n} - 1) + n C_n a^{n-2} (q^{2n-2} - 1)] \\ g_n &= 2n(n+1) [(n A_n a^n (q^{2n+2} - 1) + (n-1) C_n a^{n-2} (q^{2n} - 1)] \\ h_n &= + 2n(n-1) [(n+1) B_n a^{-n} b^{-2} (q^{2n} - 1) + n D_n a^{-n} (q^{2n-2} - 1)] \\ k_n &= 2n(n+1) [n B_n a^{-n} b^{-2} (q^{2n+2} - 1) + (n-1) D_n a^{-n} (q^{2n} - 1)]. \end{aligned} \right\} (4.318)$$

Решив уравнения (4.318) относительно A_n и C_n , получаем

$$\left. \begin{aligned} A_n a^n &= \frac{(1-q^{2n})}{2nQ_n} f_n - \frac{(1-q^{2n-2})}{2(n+1)Q_n} g_n, \\ C_n a^{n-2} &= \frac{(1-q^{2n})}{2nQ_n} g_n - \frac{(1-q^{2n+2})}{2(n-1)Q_n} f_n \end{aligned} \right\}$$

и подобным же образом

$$\left. \begin{aligned} B_n a^{-n} b^{-2} &= \frac{(1-q^{2n})}{2nQ_n} h_n - \frac{(1-q^{2n-2})}{2(n+1)Q_n} k_n, \\ D_n a^{-n} &= \frac{(1-q^{2n})}{2nQ_n} k_n - \frac{(1-q^{2n+2})}{2(n-1)Q_n} h_n, \end{aligned} \right\}$$

где

$$Q_n = (1-q^{2n})^2 - n^2 q^{2n-2} (1-q^2)^2. \quad (4.3191)$$

Величины, на которые умножаются f_n , g_n , h_n , k_n в (4.319), зависят только от отношений радиусов и могут быть поэтому заранее сведены в таблицу. Как только n становится достаточно большим, получаем следующие приближенные значения:

$$\frac{(1-q^{2n})}{2nQ_n} \approx \frac{1}{2n}, \quad \frac{1-q^{2n+2}}{2(n-1)Q_n} \approx \frac{1}{2(n-1)}, \quad \frac{1-q^{2n-2}}{2(n+1)Q_n} \approx \frac{1}{2(n+1)}.$$

Коэффициенты со значками наверху вычисляются подобным же образом. Для этого остается только заменить в (4.317), a_n через a_n' , b_n через b_n' , c_n' через $-c_n$ и d_n' через $-d_n$.

Эта замена заканчивает формальное решение нашей задачи. Полученное решение обладает весьма важным свойством — величины упругих постоянных материала входят в формулах для напряжений только в слагаемые первого порядка.

Выражения для A_n и т. д. при $n \geq 2$ не содержат в себе упругих постоянных так же, как и A_0 , B_0 , C_0 . С другой стороны все коэффициенты при η в правой стороне равенства (4.3161, 2, 3, 4) содержат, в виде множителей величины $a_1 - c_1'$ или $b_1 - d_1'$ или $a_1' + c_1$ или $b_1' + d_1$.

Соответственно этому, если эти четыре величины будут равны нулю, то A_1 , A_1' , B_1 , B_1' не будут заключать в себе упругих постоянных. Но дальше из (4.3153) видно, что в этом случае C_1 и C_1' будут оба равны нулю, а это значит, что формулы для напряжений не будут совершенно содержать упругих постоянных.

Значение условий

$$a_1 - c_1' = b_1 - d_1' = a_1' + c_1 = b_1' + d_1 = 0 \quad (4.3192)$$

сразу же станет очевидным, если припомнить те уравнения, на основании которых выведены формулы (4.3121) и (4.3122).

Эти условия выражают то, что равнодействующие внешних сил, приложенных к каждому из двух контуров $r=a$ и $r=b$, в отдельности равны нулю, причем, однако, это не исключает случая пары сил. Если, следовательно, равнодействующая

сил, приложенных к каждому контуру, равна нулю, для чего в данном случае достаточно, чтобы равнодействующая сил на внутреннем контуре была равна нулю, тогда решение оказывается независимым от упругих постоянных.

В противном случае этого не будет.

Рассмотренный результат является частным случаем более общей теоремы, которая будет доказана в главе VI.

§ 4.32. Главный вектор и главный момент по поперечному сечению кругового кольца.

Полученные результаты можно применить также и к вычислению величин силы и пары, к которым приводятся напряжения, действующие по сечению $\theta = \text{const.}$ ¹ Результат получается в функции приложенных нагрузок в очень простом виде, причем вычисления возможно произвести без предварительного определения напряжений.

Алгебраические вычисления, приводящие к этим формулам, чрезвычайно кропотливы, но зато прямо приводят к цели. Здесь будут даны одни только конечные результаты.

Если R_0 и Θ_0 представляют собою отнесенные к единице толщины, радиальные и поперечные силы, по сечению $\theta = 0$, то оказывается, что

$$R_0 = bd_0 - c_0a + \frac{1}{4} \{ a(a_1' - c_1) - b(b_1' - d_1) \} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a(na_n' + c_n) - b(nb_n' + d_n)}{n^2 - 1} \right\} - \\ - \frac{a^3a_1' - b^3b_1'}{a^2 + b^2} + \frac{1}{4} a(a_1' + c_1) \left\{ (3 + \eta) \frac{1 - q^2}{1 + q^2} - (1 - \eta) \lg q \right\} \quad (4.321)$$

$$\Theta_0 = aa_0 - bb_0 + \frac{1}{4} \{ a(a_1 + c_1') - b(b_1 + d_1') \} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a(nc_n' - a_n) - b(nd_n' - b_n)}{n^2 - 1} \right\} + \frac{a^3a_1 - b^3b_1}{a^2 + b^2} - \\ - \frac{1}{4} a(a_1 - c_1') \left\{ (3 + \eta) \frac{1 - q^2}{1 + q^2} - (1 - \eta) \lg q \right\}. \quad (4.322)$$

Если теперь X_0 , Y_0 будут проекциями на оси X и Y всех внешних сил (на единицу толщины), приложенных к части кольца между сечениями 0 и θ , то при помощи выражений (4.3111, 2, 3, 4) легко можно проверить, что

$$X_0 = bd_0 - ac_0 + \frac{1}{4} \{ a(a_1' - c_1) - b(b_1' - d_1) \} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a(na_n' + c_n) - b(nb_n' + d_n)}{n^2 - 1} \right\} + \text{период. функции от } \theta. \quad (4.323)$$

Если, следовательно, возьмем среднее значение X_0 в пределах от 0 до 2π , и

¹ См. *Filon*, The Stresses in a Circular Ring, Selected Engineering Papers of the Institution of Civil Engineers, 1924.

обозначим его через \bar{X} (надо заметить, что X не равно сумме проекций на ось x всех сил, приложенных ко всему кольцу, эта сумма равна $X_{2\pi}$), то получим:

$$\begin{aligned} \bar{X} = & bd_0 - ac_0 + \frac{1}{4} \{ a(a_1' - c_1) - b(b_1' - d_1) \} + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a(na_n' + c_n) - b(nb_n' + d_n)}{n^2 - 1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3241)$$

Введя таким же образом обозначение \bar{Y} , получаем

$$\begin{aligned} \bar{Y} = & aa_0 - bb_0 + \frac{1}{4} \{ a(a_1 + c_1') - b(b_1 + d_1') \} + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a(nc_n' - a_n) - b(nd_n' - b_n)}{(n^2 - 1)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3242)$$

Пусть также (X_a', Y_a') будут составляющими равнодействующей всех сил, приложенных по нормали к контуру $r = a$, т. е. будут составляющими равнодействующей сил \overline{rr}_a ; $a(X_a'', Y_a'')$ будут составляющими равнодействующей всех сил, приложенных к контуру $r = a$ тангенциально, т. е. будут составляющими равнодействующей силы $r\theta$; тогда при подобном же обозначении для (X_b', Y_b') и (X_b'', Y_b'') получаем:

$$\begin{aligned} aa_1 = \frac{X_a'}{\pi}, \quad aa_1' = \frac{Y_a'}{\pi}, \quad bb_1 = -\frac{X_b'}{\pi}, \quad bb_1' = -\frac{Y_b'}{\pi}, \\ ac_1 = \frac{Y_a''}{\pi}, \quad ac_1' = -\frac{X_a''}{\pi}, \quad bd_1 = -\frac{Y_b''}{\pi}, \quad bd_1' = \frac{X_b''}{\pi}. \end{aligned} \quad (4.325)$$

Если мы теперь обозначим через (X_a, Y_a) составляющие равнодействующей всех сил, приложенных к контуру $r = a$, так что

$$X_a = X_a' + X_a'', \quad Y_a = Y_a' + Y_a'',$$

то, пользуясь результатами (4.3241), (4.3242) и (4.325) для упрощения формул (4.321) и (4.322) и обозначая

$$\frac{1}{4} \left\{ (3 + \eta) \frac{1 - q^2}{1 + q^2} - (1 - \eta) \lg q \right\} = \zeta, \quad (4.326)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} R_0 = \bar{X} - \frac{1}{\pi} \frac{a^2 Y_a' + b^2 Y_b'}{a^2 + b^2} + \frac{\zeta}{\pi} Y_a, \\ \Theta_0 = \bar{Y} + \frac{1}{\pi} \frac{a^2 X_a' + b^2 X_b'}{a^2 + b^2} - \frac{\zeta}{\pi} X_a. \end{aligned} \right\} \quad (4.327)$$

Для нахождения проекций X, Y равнодействующей всех усилий, действующих по сечению (θ) в нашем распоряжении, имеются уравнения равновесия для отрезка кольца $(0, \theta)$, из которых следует, что

$$R_0 = X + X_\theta, \quad \Theta_0 = Y + Y_\theta.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} X = \bar{X} - X_\theta - \frac{1}{\pi} \frac{a^2 Y_a' + b^2 Y_b'}{a^2 + b^2} + \frac{\zeta}{\pi} Y_a, \\ Y = \bar{Y} - Y_\theta + \frac{1}{\pi} \frac{a^2 X_a' + b^2 X_b'}{a^2 + b^2} - \frac{\zeta}{\pi} X_a. \end{aligned} \right\} \quad (4.328)$$

В статье, упомянутой в начале этого параграфа, приведены примеры применения этих формул к различным случаям равновесия кольца, находящегося под действием сосредоточенных сил, приложенных к его контуру.

Наконец, момент напряжений вокруг центра сечения M (на единицу толщины) равен:

$$M = \int_b^a r \bar{\theta} \theta d\theta = -\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} (a_0 - b_0) \lg q + \frac{1}{2} (a_0 a^2 - b_0 b^2) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a^2 c_n' - b^2 d_n') \cos n\theta - (a^2 c_n - b^2 d_n) \sin n\theta \} / n.$$

Обозначим через M_0 момент вокруг центра всех внешних сил, приложенных к отрезку кольца $(0, \theta)$; через \bar{M} — среднее значение M_0 , взятое в пределах от 0 до 2π , тогда находим, что

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2 c_n' - b^2 d_n'}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(a^2 c_n' - b^2 d_n') \cos n\theta - (a^2 c_n - b^2 d_n) \sin n\theta}{n} \right\}$$

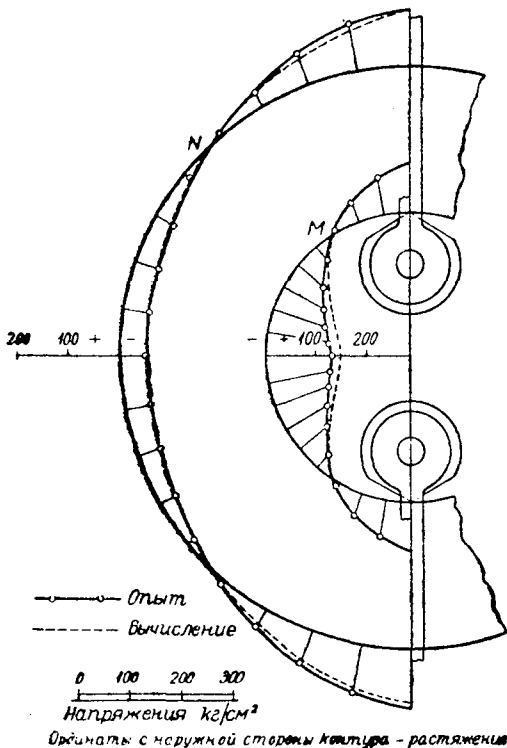
и

$$M = \bar{M} - M_0 - \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} (a_0 - b_0) \lg q + \frac{1}{2} (a_0 a^2 - b_0 b^2). \quad (4.329)$$

Необходимо отметить, что M всегда независим от упругих постоянных, в то время как продольная и поперечная силы, полученные из формулы (4.327), заключают в себе эти постоянные в величине ζ (если только не обратятся в нуль X_a и Y_a ; ср. § 4.31).

§ 4.33. Экспериментальная проверка напряжений в круговом кольце: сравнение этих данных с решением для двух полуколец.

Теория распределения напряжений в круговом кольце была проверена при помощи оптического метода для кольца, с отношением внешнего и внутреннего радиусов a и b равным 1,994. Для достижения возможно близкого соответствия с условиями, принятыми при вычислениях, нагрузка прикладывалась при помощи целлюлоидных призм, изображенных на фиг. 4.331. Полученная при этом картина распределения напряжений на внешнем и внутреннем контурах изображена в виде полярной диаграммы. Наблюдения показали, что на внешнем контуре теоретические результаты близки к опытным; то же можно сказать и о внутреннем контуре, за исключением участка вблизи среднего поперечного сечения, где наблюдавшиеся напряже-

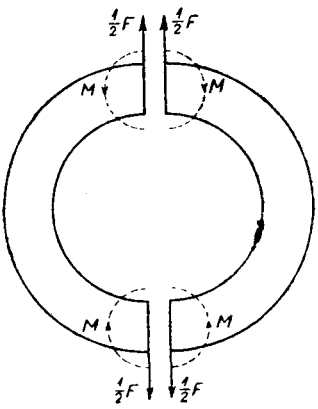


Фиг. 4.331.

ния оказались несколько меньшими, чем вычисленные. Возможно, что такое расхождение зависит от искривления кольца под влиянием сосредоточенных сил, которые придают ему слегка эллиптическую форму.

Теоретические значения средних напряжений в таком кольце были получены Файлоном (loc. cit.) на основании теории § 4.31, причем внешний радиус был взят точно вдвое большим внутреннего, что достаточно близко к соотношениям на фиг. 4.331.

Напряжения вычислялись на основании упрощенного предположения, что кольцо можно рассматривать как два полукольца (фиг. 4.332), нагруженных по концам срезающими силами, равными половине полной нагрузки; кроме того к этим же концам прикладывается изгибающий момент, равный изгибающему моменту, возникающему в полном кольце, в соответствии с уравнением (4.329). Результаты этих вычислений даны в таблицах 4.331 — 4.333, причем угол θ отсчитывался от оси, перпендикулярной линии действия нагрузки, так что точкам приложения груза соответствуют значения $\theta = \pm 90^\circ$.



Фиг. 4.332.

Таблица 4.331.

Сравнение значений $\bar{r}\bar{r}$ для полного кольца и полукольца.

θ	$r/a = 0,6$		$r/a = 0,7$		$r/a = 0,8$		$r/a = 0,9$	
	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо
0°	0,8952	0,8957	0,8939	0,8944	0,6366	0,6367	0,3189	0,3184
15	0,8207	0,8207	0,8128	0,8123	0,5738	0,5737	0,2845	0,2849
30	0,6080	0,6011	0,5820	0,5719	0,3953	0,3889	0,1886	0,1865
45	0,2931	0,2517	0,2401	0,1893	0,1236	0,0950	0,0366	0,0300
60	-0,0963	-0,2036	-0,2415	-0,3092	-0,2689	-0,2882	-0,1767	0,1739
75	-1,2896	-0,7338	-1,6907	-0,8898	-1,1649	-0,7343	-0,5367	-0,4113
90	-10,1207	-1,3029	-4,5148	-1,5128	-2,2068	-1,2130	-0,8502	-0,6661

Таблица 4.332.

Сравнение значений $\bar{r}\bar{v}$ для полного кольца и для полукольца.

θ	$r/a = 0,6$		$r/a = 0,7$		$r/a = 0,8$		$r/a = 0,9$	
	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо
0°	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0,5693	0,5690	0,6231	0,6230	0,4787	0,4788	0,2546	0,2548
30	1,0940	1,0993	1,2031	1,2036	0,9283	0,9249	0,4947	0,4923
45	1,5135	1,5546	1,7003	1,7021	1,3349	1,3080	0,7201	0,6962
60	1,7723	1,9040	2,0968	2,0846	1,6840	1,6019	0,9288	0,8526
75	2,3951	2,1236	2,3508	2,3251	1,6604	1,7867	0,8933	0,9510
90	0	2,1985	0	2,4071	0	1,8497	0	0,9845

Таблица 4.333.

Сравнение значений $\bar{\sigma}_\theta$ для полного кольца и для полукольца.

θ	$r/a = 0,5$		$r/a = 0,6$		$r/a = 0,7$	
	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо
0°	9,1900	9,1913	4,7235	4,7235	2,0258	2,0251
15	8,4984	8,5018	4,3926	4,3924	1,9310	1,9299
30	6,4765	6,4802	3,4225	3,4215	1,6482	1,6505
45	3,3185	3,2642	1,8766	1,8770	1,1677	1,2061
60	-0,4790	-0,9268	-0,1891	-0,1357	0,4405	0,6269
75	-3,8167	-5,8075	-2,8835	-2,4796	-0,2532	-0,0476
90	-6,1955	-11,0450	-2,0209	-4,9949	+0,3060	-0,7714

θ	$r/a = 0,8$		$r/a = 0,9$		$r/a = 1,0$	
	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо	Полное кольцо	Полу-кольцо
0°	0,0505	0,0501	-1,6055	-1,6052	-3,1145	-3,1153
15	0,1337	0,1304	-1,3829	-1,3827	-2,7737	-2,7706
30	0,3654	0,3657	-0,7288	-0,7302	-1,7603	-1,7598
45	0,7216	0,7401	+0,3225	+0,3076	-0,1253	-0,1518
60	1,1336	1,2279	1,7196	1,6602	+2,1398	+1,9437
75	1,6527	1,7961	3,2781	3,2353	4,8727	+4,3840
90	2,1874	2,4057	4,1271	4,9256	6,4082	+7,0028

Напряжения в графах, помеченных „полукольцо“, вычислены как сумма двух решений, а именно: 1) решения, получаемого при помощи формул (4.301), (4.302), с изменением F на $1/2 F$, и 2) решения, получаемого при помощи формул (4.13), где

$$M = (Fb/\pi) \left\{ \frac{1}{2} - \lg_e \left(\frac{b}{a} \right) / \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right\} \quad (4.33)$$

значение изгибающего момента в сечении приложения силы для сплошного кольца.

Графы, соответствующие значениям $\frac{r}{a} = 0,5$ или $1,0$, пропущены в таблицах 4.331 и 4.332, так как напряжения r^r и r^θ обращаются в нуль при $r = a$ или b ($b/a = 0,5$), за исключением точек фактического приложения груза.

Напряжения выражены в долях величины $F/\pi b$, принятой за единицу. При рассмотрении приведенных выше таблиц видим, что результаты вычислений для „полного“ кольца и „полукольца“ очень близки друг к другу для $\theta = 0$, довольно близки для сечений до $\theta = 45^\circ$, после чего начинается серьезное расхождение между полученными значениями. Но этого и следовало ожидать при искажении концов полуколец; они не могут сойтись без приложения дополнительных местных напряжений, значение которых очевидно настолько велико, что видоизменяет распределение напряжений на протяжении квадранта, заключающего в себе точку приложения груза.

Применявшийся здесь способ комбинирования результатов для двух полуколец оказывается недостаточно удовлетворительным, хотя он по всем вероятностям приведет к гораздо более точным результатам при меньшей ширине кольца, по сравнению с его радиусом, т. е. когда b/a будет приближаться к единице.

ТАБЛИЦА 4.334.
Напряжение $\widehat{\theta\theta}$ на контурах.

θ	Внешний контур		Внутренний контур	
	По наблюдению	По вычислению	По наблюдению	По вычислению
0°	-3,16	-3,11	8,42	9,19
15	-2,93	-2,77	7,38	8,50
30	-1,75	-1,76	6,04	6,48
45	0	-0,13	3,84	3,32
60	+2,43	+2,14	-0,45	-0,48
75	+5,36	+4,87	-3,62	-3,82
90	-	+6,41	-	-6,20

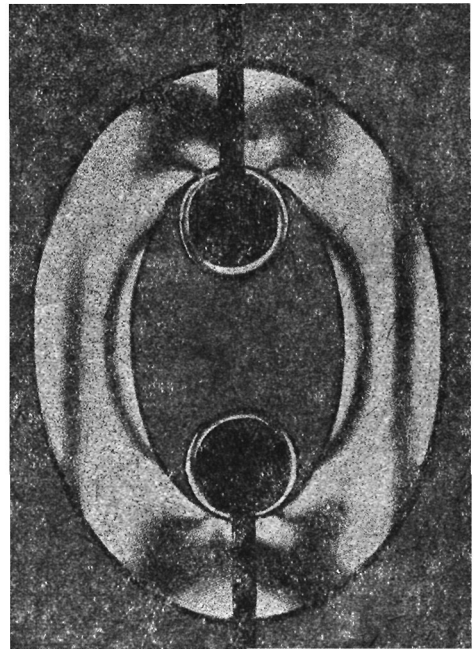
Переходя теперь к сравнению этих данных с результатами оптических наблюдений, рассмотрим фиг. 4.331, где показано распределение напряжений $\widehat{\theta\theta}$ в точках внешнего и внутреннего контуров. Действительные значения, полученные путем измерений оптическим методом, даны в таблице 4.334, где для сравнения повторяются первая и последняя графы таблицы 4.333. Напряжения выражены в тех же единицах $F/\pi b$, или $P/\pi bt$, где P — приложенный груз, а t — толщина.

Хорошим критерием совпадения теоретических и опытных результатов является расположение (черных) нейтральных точек M, N , где $\widehat{\theta\theta} = 0$. Эти точки соответствуют $\theta = 58^\circ$ для внутреннего контура и $\theta = 46^\circ$ для внешнего контура и здесь наблюдается очень близкая сходимость теории с наблюдением.

§ 4.34. Эллиптические звенья.

Для поднятия тяжелых грузов, в особенности же для якорных цепей и для подъемных механизмов, употребляются главным образом цепи с эллиптическими звеньями, а не с круговыми, хотя во многих случаях цепи вообще стали теперь заменять стальным тросом. При очень больших грузах такие звенья укрепляются поперечными распорками, вставляющимися в звенья или же образующими с ними одно целое.

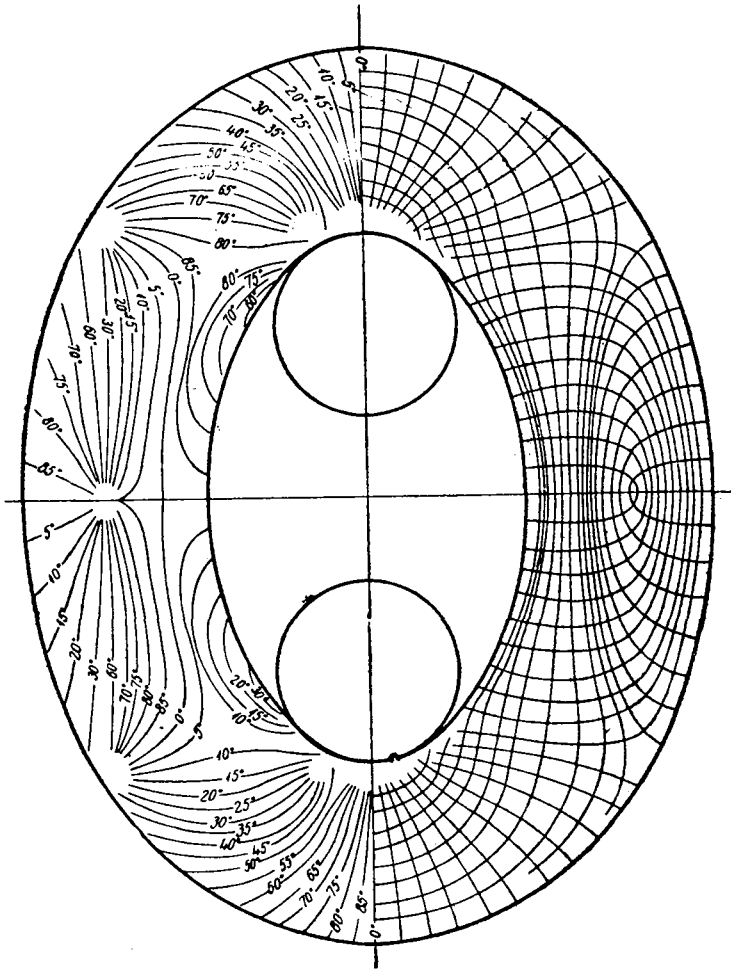
Поперечные сечения всех частей звена бывают обычно круглыми; эта форма не очень поддается исследованию оптическим методом, но значительное приближение к действительному распределению напряжений можно получить при изучении центрального сечения в плоскости, проходящей через груз.



Фиг. 4.341. Растяжение эллиптического звена в поляризованном свете.

Многочисленные исследования для подобных случаев были произведены и весьма углубленно проф. Чакко.¹

Распределение разности главных напряжений ($P - Q$) в плоской модели для простейшего случая эллиптического звена без распорки показано на фиг. 4.341, где изображено звено, ось которого представляет собою точный эллипс с большой осью $2a = 6,4$ см и с меньшей осью, равной $a\sqrt{2}$; толщина звена, симметричная



Фиг. 4.342. Изоклины и линии главных напряжений в эллиптическом звене.

по отношению к его оси, имеет величину 1,588 см, так что внутренний и внешний контуры не имеют той точной эллиптической формы, которую следовало бы иметь для сравнения с точной теорией, разобранный при помощи эллиптических координат. Данная форма имеет тем не менее то преимущество, что она дает повсюду одинаковые поперечные сечения.

Усилие прикладывается посредством роликов из того же материала, как и звенья, диаметром 1,588 см, с центральными отверстиями для вставки туда сталь-

¹ К. С. Chakko, Stresses in Chain Links, B. A., M. Sc., Thesis for the D. Sc. (Engineering) Degree of the University of London (University Archives); E. G. Coker, Curved Beams, Rings and Chain Links, Honorary Member's Lecture, The Junior Institution of Engineers, 1922.

ных стержней, диаметром 0,476 см, пропускаемых сквозь захваты небольшой испытательной машины. Такое устройство дает приблизительно то же самое распределение нагрузки по поверхности, какое должно бы возникнуть в действительных звеньях, если бы их поперечные сечения были круглыми.

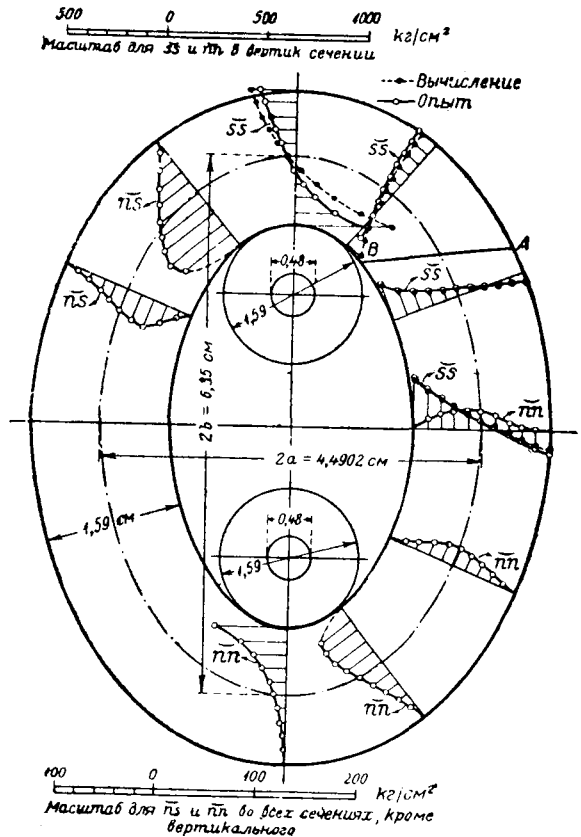
Фотография изохром фиг. 4.341 указывает на большие напряжения по внутреннему контуру, в особенности по дуге соприкосновения с целлюлоидными стержнями, и менее сильные по поперечным (горизонтальным) сечениям и вблизи от них. Влияние втулок и небольших центральных стальных стержней, как оказывается, мало чем отличается от влияния цельных роликов, имеющих форму цилиндра.

Изоклинические линии для плоского сечения звена, как показывают наблюдения, имеют очертания, представленные на фиг. 4.342. Линии главных напряжений получены из поля изоклин и изображены на том же чертеже. Эти наблюдения вместе с полным исследованием величины главных напряжений, а именно величин ($P \pm Q$), дают все необходимые данные для определения распределения напряжений по любому поперечному сечению. Эти напряжения представляют собой обычно систему продольных и поперечных нормальных напряжений, сопровождаемых касательным напряжением, что легко можно видеть по расположению линий главных напряжений, пересекающих все поперечные сечения звена наискось, за исключением плоскостей симметрии.

Для удобства изображения распределения напряжений величины ($P \pm Q$), полученные для различных сечений, соответствующих эксцентричному углу ψ , использованы для получения нормальных к сечению, поперечных и касательных напряжений в точках каждого сечения; угол ψ измеряется от поперечной малой оси звена. Нагрузка имела величину 45,4 кг, а толщина звена была 0,3 см, так что гипотетическое среднее напряжение по двум средним поперечным сечениям было 56,2 кг/см². Как видно из фиг. 4.343, наибольшие напряжения возникают в точках внутреннего контура на линии действия нагрузки, где как продольное, так и поперечное нормальные напряжения достигают максимальной величины, несколько большей, чем 351,5 кг/см²; они немного меньше для сечений с $\psi = 80^\circ$.

Во всех сечениях, поблизости от места приложения нагрузки, наблюдаются продольные и поперечные нормальные напряжения очень высокой интенсивности, сопровождаемые касательным напряжением. В промежуточных сечениях, в особенности по соседству с $\psi = 50^\circ$, напряжения достигают минимума, отчего это сечение или же соседнее с ним являются местами, подходящими для сварки.

Вслед за этим сечением в направлении уменьшающихся ψ наблюдается повышение интенсивности нормального напряжения, в особенности в точках внутрен-



Фиг. 4.343. Распределение напряжений в эллиптическом звене в сечениях при $\psi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90° .

него контура; это напряжение достигает максимума в $260,1 \text{ кг/см}^2$ в поперечном сечении $\psi = 0^\circ$.

Ясно, что точный математический анализ распределения напряжений в звене этой формы представляет собой очень трудную задачу, требующую даже для случая плоской задачи применения функций сложного вида.

В этом отношении интересно отметить, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния, вследствие равновесия нагрузок, приложенных к внутреннему контуру, распределение напряжений сплошь по всему звену должно быть независимым от отношения Пуассона.

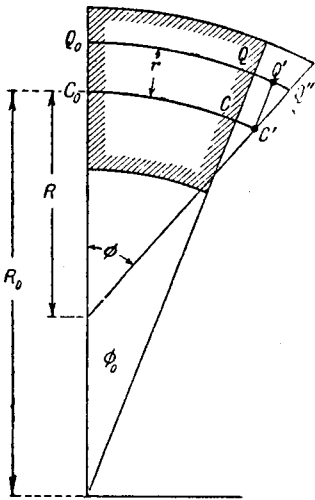
До сих пор не найдено еще точных решений для этого случая, а имеется только приближенное исследование, сделанное Пирсоном,¹ относительно распределения нормальных напряжений в подобных звеньях; это исследование основано на ранее существовавшей, но неточной, теории Винклера,² принимающей гипотезу Бернулли — Эйлера.

Желательно дать здесь краткое изложение этого исследования с тем, чтобы сравнить полученные этим путем результаты с экспериментальными данными.

Пусть R_0 обозначает первоначальный радиус линии C_0C (фиг. 4.344), проходящей через центры тяжести поперечных сечений кривого стержня, а R — этот же радиус после деформации. Тогда для любого расстояния r от C_0C изменение длины дуги Q_0Q (предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими) будет $QQ' + Q'Q''$; точка Q' определяется путем проведения параллели к CQ через точку C' — смещенное положение точки C . Мы имеем

$$\varepsilon_r = \frac{QQ' + Q'Q''}{Q_0Q} = \frac{\varepsilon_0 \cdot C_0C + r \cdot \Delta\varphi}{(r + R_0)\varphi_0}, \quad (4.341)$$

где ε_0 есть относительное удлинение линии C_0C , а $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$; мы пренебрежем возможными, в связи с деформацией, изменениями радиуса r .



Фиг. 4.344.

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\varepsilon_0 R_0 \varphi_0 + r \cdot \Delta\varphi}{(r + R_0)\varphi_0} = \left(\varepsilon_0 + \frac{r}{R_0} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} \right) / \left(1 + \frac{r}{R_0} \right) \\ &= \left(\varepsilon_0 + \frac{r}{R_0} \alpha \right) / \left(1 + \frac{r}{R_0} \right), \end{aligned} \quad (4.342)$$

где

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}.$$

Этим выражением для ε_r воспользуемся, чтобы вычислить нормальную силу P и пару сил M , передающиеся через поперечное сечение; при предположении, что волокна подвергаются только продольным напряжениям, имеем:

$$\left. \begin{aligned} P &= E \int \varepsilon_r \cdot dA = E \int \left\{ \varepsilon_0 + (\alpha - \varepsilon_0) \frac{r/R_0}{1 + r/R_0} \right\} dA \\ M &= E \int \varepsilon_r \cdot r dA = E \int \left\{ \varepsilon_0 r + (\alpha - \varepsilon_0) \frac{r^2}{r + R_0} \right\} dA, \end{aligned} \right\} \quad (4.343)$$

где dA — элемент площади поперечного сечения.

¹ Todhunter and Pearson, A History of Elasticity, v. II, Part I.

² E. Winkler, Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe. Der Civilingenieur, 4, 232 — 46, Freiberg 1858.

По аналогии с прямой балкой, где обычно обозначают $\int r^2 dA = Ak^2$, здесь принято

$$\int \frac{R_0 r^2}{R_0 + r} dA = Ah^2, \tag{4.344}$$

откуда при симметричности сечения относительно оси $r = 0$ получаются отношения следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} Ah^2 &= Ak^2 + \frac{1}{R_0^2} \int r^4 dA + \frac{1}{R_0^4} \int r^6 dA + \dots \\ \int \frac{R_0}{R_0 + r} dA &= A \left(1 + \frac{h^2}{R_0^2} \right) \\ \int \frac{R_0 r}{R_0 + r} dA &= -\frac{Ah^2}{R_0}. \end{aligned} \right\} \tag{4.345}$$

В случае прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой $2c$ первая из этих формул дает нам

$$h^2 = c^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{c^2}{R_0^2} + \frac{1}{7} \frac{c^4}{R_0^4} + \dots \right) \tag{4.346}$$

ряд, сходящийся, при $\frac{c}{R_0} < 1$; вторая же и третья формулы дают вместе с (4.343):

$$\left. \begin{aligned} P &= EA\varepsilon_0 \left(1 + \frac{h^2}{R_0^2} \right) - EA\alpha \frac{h^2}{R_0^2} = EA \left\{ \varepsilon_0 \left(1 + \frac{h^2}{R_0^2} \right) - \alpha \frac{h^2}{R_0^2} \right\} \\ M &= EAh^2 \frac{(\alpha - \varepsilon_0)}{R_0}. \end{aligned} \right\} \tag{4.347}$$

Обозначая для краткости

$$\left. \begin{aligned} p &= EA\varepsilon_0 = P + \frac{M}{R_0}, \\ m &= M + \frac{Ph^2}{R_0} + \frac{Mh^2}{R_0^2} = \frac{EAh^2\alpha}{R_0}, \end{aligned} \right\} \tag{4.347}$$

получаем

$$fA = EA\varepsilon_r = P + \frac{M}{R_0} + \frac{Mr}{h^2} \cdot \frac{R_0}{R_0 + r},$$

где f есть продольное напряжение, соответствующее волокну на расстоянии r .

Назовем через u, v составляющие перемещения любой из точек (x, y) оси звена, а θ — угол, образуемый недеформированной осью с осью Ox ; тогда если $u + du, v + dv$ будут перемещениями соседней точки, отстоящей на расстояние ds от точки x, y , считая по оси, то относительные перемещения (du, dv) выразятся через осевое растяжение $\varepsilon_0 \cdot ds$, и вращение $\Delta\theta$ элемента. Таким образом

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_0 ds \cos \theta - ds \sin \theta \cdot \Delta\theta, \\ dv &= \varepsilon_0 ds \sin \theta + ds \cos \theta \cdot \Delta\theta. \end{aligned}$$

Но $\Delta\theta$ складывается из углов $\Delta\varphi$, так что

$$\Delta\theta = \int \alpha \varphi_0 = \int \frac{\alpha}{R_0} ds,$$

а так как

$$ds \cos \theta = dx, \quad ds \sin \theta = dy,$$

то

$$u = \int \varepsilon_0 dx - \int dy \int \frac{\alpha}{R_0} ds,$$

$$v = \int \varepsilon_0 dy + \int dx \int \frac{\alpha}{R_0} ds.$$

Пронтегрировав по частям вторые интегралы в правой части равенства, выразив ε_0 , а через p , m , имеем:

$$\left. \begin{aligned} AEu &= \int p dx - y \int \frac{m}{h^2} ds + \int \frac{my}{h^2} ds, \\ AEv &= \int p dy + x \int \frac{m}{h^2} ds - \int \frac{mx}{h^2} ds. \end{aligned} \right\} \quad (4.348)$$

Рассмотрим теперь эллиптическое звено, подобное изображенному на фиг. 4.343 под действием нагрузки Q . Пусть M_0 будет изгибающий момент в горизонтальном сечении (считая его положительным, если он увеличивает кривизну), а T — усилие в распорке. Если $2a$ — длина последней, Δa — удлинение a под влиянием нагрузки, то

$$T = -\gamma \frac{EA\Delta a}{a} = qQ,$$

где γ — коэффициент, зависящий от формы и материала распорки; $\gamma = 1$, если распорка прямая и тонкая.

Обозначим теперь через θ угол, образуемый нормалью к центральной линии с осью Ox в точке, для которой эксцентричный угол, отсчитанный от оси, равен ψ ; исходя из условий равновесия, получим тогда

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} T \sin \theta + \frac{1}{2} Q \cos \theta = \frac{1}{2} Q (q \sin \theta + \cos \theta), \\ M &= M_0 + \frac{1}{2} Q(a-x) - Ty = \frac{1}{2} Q (na - qb \sin \psi - a \cos \psi), \end{aligned} \right\} \quad (4.349)$$

где n определяется из уравнения

$$\frac{1}{2} Qna = M_0 + \frac{1}{2} Qa.$$

Для нахождения неизвестных q и n мы используем следующие условия: 1) упругое изменение кривизны между вертикальным и горизонтальным сечениями звена равно нулю; 2) наружное перемещение точек оси в горизонтальном сечении равняется Δa .

Первое из этих условий дает

$$\int \frac{m ds}{h^2} = 0, \quad (4.3491)$$

а из второго на основании (4.348) следует:

$$AE\Delta a = \int \left(p \sin \theta + \frac{my}{h^2} \right) ds, \quad (4.3492)$$

причем интегрирование распространяется на четверть эллипса.

Заменим теперь p и m/h^2 их значениями из (4.347), используем равенства (4.349), а также следующие формулы, вытекающие из геометрических свойств эллипса:

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi}{\Delta}, \quad \sin \theta = \frac{a \sin \psi}{b\Delta}, \quad ds = b\Delta d\psi, \quad R_0 = \frac{b^2\Delta^3}{a},$$

где $\Delta^2 = 1 - e^2 \sin^2 \psi$, а e представляет собой эксцентриситет $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ эллипса; после некоторых сокращений получим:

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Delta}{h^2} + \frac{a^2}{b^4 \Delta^5} \right) d\psi + q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{b^3 \Delta^3} - \frac{b\Delta}{ah^2} - \frac{a}{b^3 \Delta^5} \right) \sin \psi d\psi +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{b^2 \Delta^3} - \frac{\Delta}{h^2} - \frac{a^2}{b^4 \Delta^5} \right) \cos \psi d\psi = 0. \quad (4.3493)$$

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{b^2 \Delta}{h^2} + \frac{a^2}{b^2 \Delta^3} + \frac{a^2}{b^2 \Delta^5} \right) \sin \psi \cdot d\psi + q \left[\frac{2}{\gamma} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{b\Delta} - \frac{a}{b\Delta^5} - \frac{b^3 \Delta}{ah^2} \right) \sin^2 \psi d\psi \right] +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta} + \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{1}{\Delta^3} - \frac{a^2}{b^2 \Delta^5} - \frac{b^2 \Delta}{h^2} \right\} \cos \psi \sin \psi d\psi = 0. \quad (4.3494)$$

На основании уравнения (4.346), принимая здесь $c^2 = 3k^2$ и пренебрегая членами порядка $\frac{1}{R_0^4}$, находим

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{9}{5R_0^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{9}{5} \frac{a^2}{b^4 \Delta^6};$$

подставляя это значение в выражения (4.3493) и (4.3494), преобразуем их в уравнения следующего вида:

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Delta}{k^2} - \frac{4}{5} \frac{a^2}{b^4 \Delta^5} \right) d\psi + q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{b^3 \Delta^3} - \frac{b\Delta}{ak^2} + \frac{4}{5} \frac{a}{b^3 \Delta^5} \right) \sin \psi \cdot d\psi +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{b^2 \Delta^3} - \frac{\Delta}{k^2} + \frac{4}{5} \frac{a^2}{b^4 \Delta^5} \right) \cos \psi \cdot d\psi = 0. \quad (4.3495)$$

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{b^2 \Delta}{k^2} + \frac{a^2}{b^2 \Delta^3} - \frac{4}{5} \frac{a^2}{b^2 \Delta^5} \right) \sin \psi \cdot d\psi +$$

$$+ q \left[\frac{2}{\gamma} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{b\Delta} + \frac{4}{5} \frac{a}{b\Delta^5} - \frac{b^3 \Delta}{ak^2} \right) \sin^2 \psi \cdot d\psi \right] +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta} + \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{1}{\Delta^3} + \frac{4}{5} \frac{a^2}{b^2 \Delta^5} - \frac{b^2 \Delta}{k^2} \right\} \cos \psi \sin \psi \cdot d\psi = 0. \quad (4.3496)$$

Коэффициенты q в уравнении (4.3495) и n в (4.3496), а также слагаемые, не зависящие от n и q в обоих уравнениях, представляют собой интегралы, выражаемые через простейшие функции.

Остальные интегралы могут быть выражены через полные эллиптические интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta dx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta} d\psi,$$

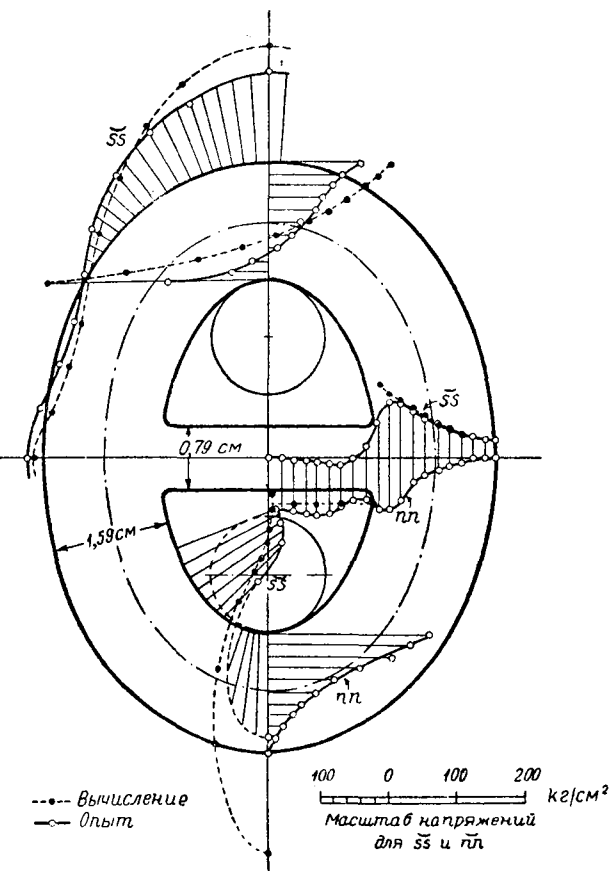
и значения их можно отыскать в таблицах Лежандра.

Этих двух уравнений достаточно для отыскания n и q в любом из случаев нагрузки; напряжения оказываются таким образом выясненными. Большое количество различных случаев рассмотрено Пирсоном. В настоящем случае $q = 0$ для звена без распорки и распределение напряжений показано на фиг. 4.343.

Значения напряжений указывают на хорошую согласованность опыта и расчета для сечений, удаленных от точек приложения груза; ближе к этим точкам экспериментальные значения оказываются несколько ниже вычисленных, в зависимости вероятно от распределения нагрузки по довольно большой дуге внутреннего контура, тогда как при вычислениях предполагается контакт звеньев лишь по линии (перпендикулярной контуру).

Поэтому весьма вероятно, что если бы груз был приложен именно этим образом, совпадение было бы более близким для всех сечений в отношении продольных напряжений, с которыми только и приходится считаться.

В подобном же звене, но с распоркой, ширина которой равна половине ширины звена, сходимость опыта и расчета неудовлетворительна, что можно видеть на фиг. 4.345; на нем показано, что в поперечном сечении экспериментальные результаты совпадают с результатами расчета до тех пор, пока мы не



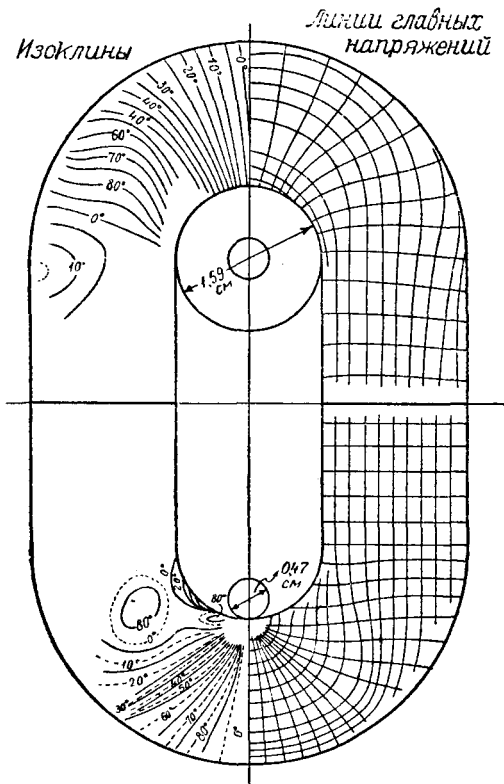
Фиг. 4.345. Распределение напряжений в кривых частях овального звена с распоркой для точек на наружном и внутреннем контуре, а также вдоль малой полуоси.

приблизились к распорке. Для точек внешнего контура наблюдается также хорошая сходимость за исключением участка около места приложения груза; в точках же внутреннего контура значения напряжений в общем гораздо ниже вычисленных.

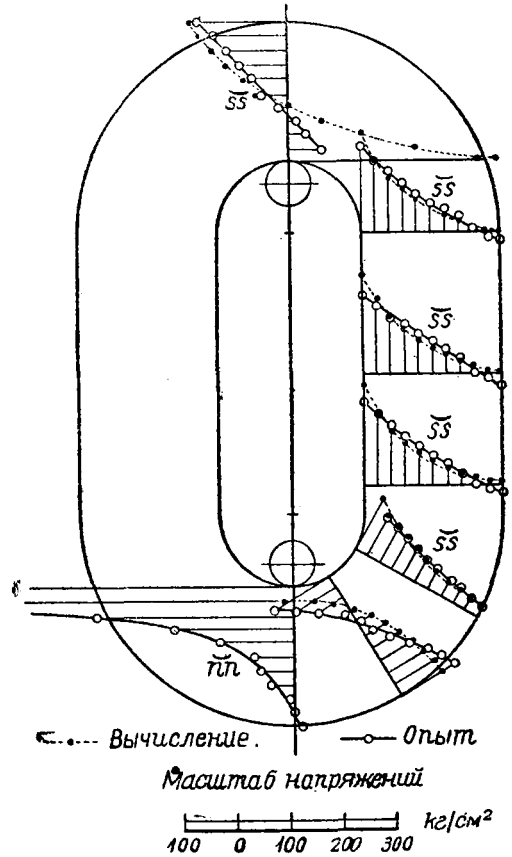
Приведенный нами пример представляет собою интересный, но чрезвычайно сложный случай, причем следует отметить, что при точном расчете отношение η Пуассона будет входить в формулы для напряжений, независимо от того, вставлена ли распорка в звено, или же образуется с ним одно целое.

Цепные звенья с полукруглыми концами и прямыми сторонами имеют также большое применение на практике. Обыкновенным примером таких цепей служат

цепи, употребляемые на железных дорогах для соединения вагонов поездов, состав которых не часто меняется. В таких случаях применяется звено с прямоугольным поперечным сечением. Оно бывает изогнуто так, чтобы его внутренний контур плотно прилегал к соединенным стержням; в этом случае получается распределение давления почти что по всей внутренней поверхности изогнутой части звена. Это способствует понижению того сильного напряжения, которое развивается в подобном соединении при внезапном трогании поезда, когда сила тяги на крюке сразу же доходит до максимума.



Фиг. 4.346.



Фиг. 4.347.

В поездах дальнего следования, где вагоны часто меняются, винтовые стяжки снабжены на концах звеньями того же типа, но с большим радиусом и круглым поперечным сечением; благодаря этому местное давление становится более интенсивным, а изгибающий момент соответственно этому достигает большей величины. Специальные предохранительные цепи, редко впрочем применяющиеся, делаются обычно такого же типа с круглым поперечным сечением и без распорок.

Для звена прямоугольного поперечного сечения с круглыми концами и прямыми сторонами (фиг. 4.346) изоклинические линии и линии главных напряжений показаны в верхней половине рисунка для случая, когда соединяемые стержни прилегают плотно к внутреннему контуру; в нижней же половине рисунка изображены изоклинические линии и линии главных напряжений, при передаче нагрузки через стержень малого радиуса. Концентрация давления в этом случае влечет за собой сильное повышение интенсивности напряжений в точках изогнутых концов и более слабое в точках прямых сторон по сравнению с напряжениями для ранее разобранный случая.

Распределение напряжений при применении стержня малого радиуса показано для нескольких поперечных сечений на фиг. 4.347. Поперечное нормальное напряжение невелико за исключением вертикальных сечений; там оно значительно, как видно на нижней части фиг. 4.347.

Распределение напряжений для этой формы также проанализировано Пирсоном, при помощи приведенных выше общих уравнений. Приводим его в основном.

Пусть a есть радиус оси полукруглых концов, а $2l$ — общая длина звена.

Пусть M_0 будет изгибающий момент в сечении, отделяющем криволинейную часть от прямой.

В точках этих прямых сторон имеем

$$m_s = M_s = M_0; \quad P_s = \frac{1}{2} Q = p_s, \quad h_s^2 = k^2,$$

так как $R_0 = \infty$; здесь значок s указывает на то, что эти значения относятся к прямым сторонам звена.

Применяя для кривых концов значок c , имеем

$$M_c = M_0 + \frac{1}{2} aQ (1 - \cos \theta),$$

$$P_c = \frac{1}{2} Q \cos \theta,$$

$$m_c = \left(M_0 + \frac{1}{2} aQ \right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} aQ \cos \theta,$$

$$p_c = \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} Q.$$

Так как полное изменение угла между средним поперечным сечением прямой стороны и вертикальным сечением равно нулю, то получается следующее соотношение:

$$EA \Delta \theta = \int \frac{m}{h^2} ds = 0,$$

или

$$\int_0^{(l-a)} \frac{M_0}{k^2} dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\left(M_0 + \frac{1}{2} aQ \right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} aQ \cos \theta}{h^2} \right\} a d\theta = 0,$$

где для сечений кривой части можно положить $jk^2 = h^2$; j определяется из формулы (4.344), которая в данном случае преобразовывается

$$h^2 = a^2 \left\{ \frac{a}{2c} \lg \frac{a+c}{a-c} - 1 \right\};$$

c здесь имеет прежнее значение.

Интегрируя, мы получаем:

$$M_0 = \frac{1}{2} aQ \frac{a - \frac{1}{2} a\pi \left(1 + j \frac{k^2}{a^2} \right)}{(l-a)j + \frac{1}{2} a\pi \left(1 + j \frac{k^2}{a^2} \right)}.$$

Таким образом

$$p_c \cdot a = M_0 + \frac{1}{2} aQ = \frac{1}{2} aQ \frac{(l-a)j + a}{(l-a)j + \frac{1}{2} a\pi \left(1 + j \frac{k^2}{a^2} \right)} = \frac{1}{2} aQ.$$

Отсюда для изогнутых частей имеем:

$$m_c = \frac{1}{2} aQ \left\{ \zeta \left(1 + j \frac{k^2}{a^2} \right) - \cos \theta \right\},$$

$$p_c = \frac{1}{2} \zeta Q,$$

$$M_c = \frac{1}{2} aQ (\zeta - \cos \theta),$$

$$P_c = \frac{1}{2} Q \cos \theta,$$

а для прямых частей

$$M_s = \frac{1}{2} aQ (\zeta - 1), \quad P_s = \frac{1}{2} Q.$$

Следовательно, напряжения в сечениях изогнутых концов будут

$$fA = \frac{1}{2} Q \left\{ \zeta + \frac{a^2}{h^2} \frac{r}{a+r} (\zeta - \cos \theta) \right\},$$

а в сечениях прямых сторон

$$fA = \frac{1}{2} Q \left\{ 1 + \frac{ar}{k^2} (\zeta - 1) \right\}.$$

Вычисленные на основании этих формул величины напряжений показаны на фиг. 4.347 для модели звена, нагруженной сосредоточенными давлениями.

Значения напряжений, как вычисленные, так и экспериментальные прекрасно совпадают во всех точках, за исключением участка, близкого к месту приложения нагрузки, где не получается предполагавшейся при расчете сосредоточенной передачи давления (линейного контакта).

При увеличении диаметра соединяемых звеном стержней максимальные напряжения заметно уменьшаются во всех поперечных сечениях. Можно отметить, что наиболее высокие напряжения вообще наблюдаются в точках внутреннего контура, резко падая при приближении к наружному контуру.

Это указывает на то, что лучшим типом подобных звеньев будет звено с поперечным сечением, применяемым для крюков или с подобным же сечением, где большее количество материала сосредоточено у внутреннего контура. Такого вида звенья будут, вероятно, самым подходящим для всяких нагрузок как легких, та и тяжелых, если только не встретится препятствий к их применению в виде добавочной затраты на их изготовление. В звеньях применяющихся форм увеличение напряжений в точках внутреннего контура способствует искривлению прямых сторон вогнутостью наружу. Это обстоятельство на практике несколько изменяет указанное здесь распределение напряжений, так как прямые части звена, будучи очень толстыми, не легко деформируются.

Чакко в упомянутой работе изучил много разных других форм звеньев.

Марис¹ также изучил ряд интересных случаев колец, различным способом закрепляемых, вроде тех колец, которые встречаются в шаровых подшипниках орудийных башен.

¹ H. B. Maris, Photo-Elastic Investigations on the Tensile Test Specimen, Notched Bar, the Ship Propeller Strut, and the Roller Path Ring, Journal of the Optical Society of America, 15, № 4, October 1927.

§ 4.35. Преобразование путем инверсии.

Приступим теперь к подробному изучению того преобразования, о котором вскользь говорилось в § 2.38, а именно — инверсии.

В § 2.38 рассматриваемое преобразование получалось из общего случая конформного преобразования типа

$$x + iy = f(\xi + i\eta),$$

что заставляло комбинировать с настоящей инверсией еще отражение ее по действительной оси.

Рассмотрим здесь преобразование путем инверсии само по себе. Если P и P' представляют собой две точки на радиусе-векторе, проведенном через начало координат (эта точка называется центром инверсии), причем длины их радиусов-векторов (r и r'), отсчитываемые от O , связаны отношением

$$rr' = a^2, \quad (4.351)$$

то P и P' называются *взаимными точками* по отношению к кругу с центром в O и с радиусом a . Этот круг называется *кругом инверсии*. Для краткости говорят часто о взаимных точках по отношению к O ; a называется *радиусом инверсии*.

Если мы применим это преобразование ко всем точкам P плоскости, то фигуры, расположенные на плоскости, преобразуются в соответствующие (т. е. взаимные) фигуры.

В частности, так как уравнение любого круга в полярных координатах имеет форму

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + d = 0,$$

где c , α , d являются постоянными, то это уравнение, при пользовании выражением (4.351), переходит в

$$a^4 - 2ca^2r' \cos(\theta - \alpha) + dr'^2 = 0;$$

отсюда следует, что точка (r', θ) лежит тоже на круге.

Таким образом инверсия круга есть круг.

Если в приведенном выше уравнении $d = 0$, или если первоначальный круг проходит через начало координат, то преобразованное уравнение будет

$$a^2 = 2cr' \cos(\theta - \alpha),$$

что представляет собой уравнение прямой линии.

Отсюда следует, что круги, проходящие через центр инверсии, превращаются в прямые линии и наоборот.

Результаты исследований в § 2.38 также доказывают, что равные углы преобразуются в равные же (так как инверсия есть один из видов конформного преобразования), но относящиеся одни к другим как отражение в зеркале к отражаемому предмету.

В частности, так как радиус-вектор, проходящий через O , очевидно преобразовывается сам в себя, то соответствующие кривые пересекают радиусы-векторы под одинаковым углом, но не параллельно.

Нашей ближайшей задачей будет преобразовывать уравнение

$$\nabla^2 \chi = 0,$$

переходя от координат (r, θ) к координатам (r', θ) .

Обозначим

$$\rho = \lg r, \quad \rho' = \lg r',$$

тогда

$$\rho + \rho' = 2 \lg a,$$

так что

$$d\rho = -d\rho'.$$

Таким образом

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = e^{-2\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

Отсюда

$$\nabla^4 \chi = e^{-2\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) e^{-2\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \chi. \quad (4.352)$$

Вспользуемся теперь общеизвестной формулой

$$f \left(\frac{d}{dx} \right) e^{kx} \chi = e^{kx} f \left(\frac{d}{dx} + k \right) \chi, \quad (4.353)$$

и мы получим

$$\begin{aligned} \nabla^4 \chi &= e^{-4\rho} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \chi \\ &= \frac{e^{4\rho'}}{a^8} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \rho'} + 2 \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \chi \\ &= \frac{e^{4\rho'}}{a^8} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \rho'} + 2 \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} (e^{-2\rho'} \cdot e^{2\rho'} \chi), \end{aligned}$$

так как порядок дифференцирования очевидно безразличен, ибо коэффициенты в операторах постоянны. Воспользовавшись снова (4.353), получим:

$$\nabla^4 \chi = \frac{e^{4\rho'}}{a^8} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} e^{-2\rho'} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} e^{2\rho'} \chi,$$

а аввивая это выражение с (4.352) и обозначая

$$(\nabla')^2 = \frac{1}{r'^2} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} \cdot r' \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = e^{-2\rho'} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right),$$

получим:

$$\nabla^4 \chi = \frac{l^{6\rho'}}{a^8} (\nabla')^4 (r'^2 \chi) = \frac{r'^6}{a^8} (\nabla')^4 (r'^2 \chi). \quad (4.354)$$

Этот результат, впервые полученный Митчелем, дает преобразование инверсии заданной величины. Если χ представляет собой функцию напряжений для какой-нибудь задачи, то $r'^2 \chi$ будет функцией напряжений для соответствующей задачи, относящейся к контуру, взаимному с контуром первой задачи. Таким образом мы получаем возможность решения новой задачи, для которой кроме того легко получить преобразованием формулы для напряжений по соответствующим площадкам.

В самом деле, пользуясь уравнениями § 2.42, мы находим:

$$\begin{aligned} \widetilde{r'r'} &= \frac{1}{(r')^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r' \frac{\partial}{\partial r'} \right] (r'^2 \chi) \\ &= e^{-2\rho'} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \rho'} \right] (e^{2\rho'} \chi) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \rho'} + 2 \right) \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \chi + 2 \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \\ &= r^2 \cdot \widetilde{rr} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (4.3551)$$

$$\begin{aligned}
 \check{\theta}\theta' &= \frac{\partial^2}{\partial r'^2} (r'^2 \chi) = \frac{\partial}{\partial r'} \cdot e^{-\rho'} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho'} (e^{2\rho'} \chi) \\
 &= e^{-\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \cdot e^{\rho'} \left(\frac{\partial}{\partial \rho'} + 2 \right) \chi = \left(\frac{\partial}{\partial \rho'} + 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho'} + 2 \right) \chi \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \right) \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - 3 \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \right) \chi \\
 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \chi + 2 \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \chi + 2 \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) \\
 &= e^{2\rho} \cdot e^{-\rho} \cdot e^{-\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \\
 &= e^{2\rho} \cdot e^{-\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot e^{-\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \chi + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \\
 &= r^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = r^2 \check{\theta}\theta + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right). \quad (4.3552)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \check{r}'\theta' &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta} r'^2 \chi \right) \\
 &= - \frac{\partial}{\partial r'} r' \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) = - r^2 \check{\theta}. \quad (4.3553)
 \end{aligned}$$

Из этих выражений следует, что система напряжений в преобразованной задаче состоит из двух частей:

1) Из системы, в которой формулы для напряжений получаются из формул первоначальной задачи умножением на r^2 , меняя однако знак касательного напряжения. Таким образом

$$(\check{r}'r', \check{\theta}'\theta', \check{r}'\theta')_1 = r^2 (rr, \theta\theta, -r\theta).$$

Перемена знака у $r\theta$ на обратный эквивалентна отражению по какой-либо из соответствующих линий, например по радиусу-вектору.

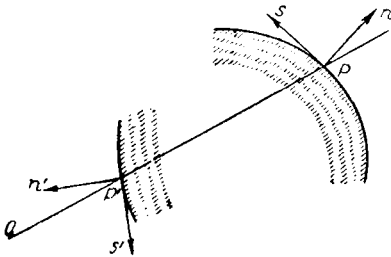
2) Из системы, представляющей собой всестороннее растяжение $2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$ в рассматриваемой точке.

Система 2, понятно, не влияет на положение линии главных напряжений.

Система 1 дает линии главных напряжений, которые связаны с $(r', -\theta')$ точно так же, как линии главных напряжений в первоначальной задаче с (r, θ) . Но эта зависимость представляет, как мы уже видели, то условие, которому должны удовлетворять при инверсии взаимные кривые в соответствующих точках.

Следовательно линии главных напряжений в одной задаче превращаются в линии главных напряжений другой задачи.

Рассмотрим теперь два взаимно перпендикулярных направления n и s , в точке P и два соответствующих им направления n' и s' в точке P' (фиг. 4.35). Заштрихованные стороны кривых s, s' преобразуются одна в дру-



Фиг. 4.35.

гую. Таким образом n' и s' будут также взаимно перпендикулярными направлениями.

Из зеркальной симметрии следует, что

$$\begin{aligned} (\widetilde{n'n'})_1 &= r^2 \cdot \widetilde{nn}, \\ (\widetilde{s's'})_1 &= r^2 \cdot \widetilde{ss}, \\ (\widetilde{n's'})_1 &= -r^2 \cdot \widetilde{ns}, \end{aligned}$$

так что для полных напряжений $\widetilde{n'n'}$ и т. д. получаем

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{n'n'} &= r^2 \cdot \widetilde{nn} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \widetilde{s's'} &= r^2 \cdot \widetilde{ss} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \widetilde{n's'} &= -r^2 \widetilde{ns}. \end{aligned} \right\} \quad (4.356)$$

Предположим, что кривая s соответствует в первоначальной задаче свободному от напряжений контуру, так что $\widetilde{nn} = \widetilde{ns} = 0$.

Тогда по соответствующему контуру в превращенной задаче

$$\begin{aligned} \widetilde{n'n'} &= 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \widetilde{n's'} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь, какие значения принимает функция $\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r}$ на свободном контуре. Мы имеем

$$\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} = \chi - x \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right),$$

но

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = -x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right). \quad (4.3561)$$

Если теперь l, m будут направляющими косинусами нормали n к кривой s , то

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{nx} &= \widetilde{lx} + m\widetilde{xy} = \left(l \frac{\partial}{\partial y} - m \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \\ \widetilde{ny} &= \widetilde{ly} + m\widetilde{yy} = \left(-l \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.357)$$

Но на свободном контуре $\widetilde{nx} = \widetilde{ny} = 0$, а поэтому

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = 0,$$

сюда

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = 0,$$

т. е.

$$\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const.}$$

Отсюда следует, что на кривой, взаимной с свободным контуром

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{n'n'} &= \text{const}, \\ \widetilde{n's'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3562)$$

Далее мы рассмотрим преобразование сосредоточенной силы, приложенной к первоначальному контуру; нормальная и касательная составляющие этой силы пусть будут N и S соответственно.

Принимая во внимание дифференциальные зависимости

$$\frac{dr'}{r'} = -\frac{dr}{r}, \quad \frac{r'd\theta'}{r'} = \frac{r d\theta}{r},$$

мы видим, что соответствующие элементы длины в точках P и P' относятся как радиусы, так что

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds'}{r'}. \quad (4.358)$$

Наши сосредоточенные силы могут рассматриваться как предел сплошных нагрузок, распределенных на протяжении очень небольших дуг. В таком случае, интегрируя на протяжении соответствующих отрезков дуги контура, имеем:

$$\begin{aligned} N' &= \int \widetilde{n'n'} ds' = \int r^2 \widetilde{nn} \frac{r'}{r} ds + 2 \int \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) ds' \\ &= a^2 \int \widetilde{nn} ds + 2 \int \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) ds' \\ &= a^2 N + 2 \int \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) ds'. \end{aligned}$$

Но мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) &= -x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ &= +x \widetilde{ny} - y \widetilde{nx}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{const} + \int (x \widetilde{ny} - y \widetilde{nx}) ds, \quad (4.3563)$$

т. е. эта функция отличается на постоянную величину от момента вокруг начала координат усилий, приложенных к первоначальному контуру.

Следовательно функция $\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r}$, переходя через точку приложения сосредоточенной силы, скачкообразно меняется на величину момента этой силы вокруг начала координат, но остается при этом всюду конечной.

Соответственно этому можно пренебречь интегралом

$$\int \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) ds',$$

взятым в бесконечно малом промежутке, и мы будем иметь

$$N' = a^2 N. \quad (4.3591)$$

подобно этому

$$S' = -a^2 S. \quad (4.3592)$$

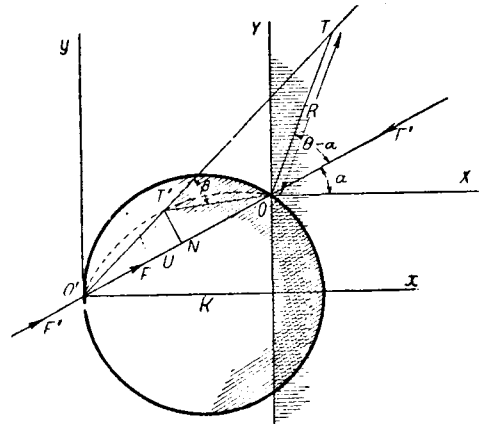
Таким образом, направления приложенных грузов (N, S) и (N', S') являются соответствующими направлениями при преобразовании, и величины этих сил находятся в определенном отношении, равном a^2 .

Вспомогательное уравнение (4.3563) показывает, что когда две части свободного от напряжения контура разделены сосредоточенной силой, то нормальная составляющая (постоянная по величине) усилий на контуре в преобразованной задаче имеет различное значение на соответствующих частях преобразованного контура; исключение составляет случай, когда момент силы относительно начала координат равен нулю, т. е. линия действия силы проходит через центр инверсии.

§ 4.36. Напряжения в сжатом диске.

Функция напряжений для полуплоскости, к краю которой в точке O приложена сосредоточенная сила F , составляющая угол α с внутренней нормалью, получается на основании уравнения (4.171), изменяя соответственно обозначения, в виде

$$\chi = -\frac{R\theta F}{\pi} \sin(\theta - \alpha), \quad (4.361)$$



Фиг. 4.36.

причем R и θ являются полярными координатами с началом в точке O ; $\theta = 0$ на направлении внутренней нормали в точке O .

Произведем теперь инверсию приведенного выше решения по отношению к точке O (фиг. 4.36), находящейся на линии действия силы F . Пусть точки T и T' будут представлять собою какие-либо две соответствующие точки; приняв теперь за радиус a круга инверсии длину $O'O$, видим, что прямой контур OY основной задачи преобразуется в круг, проходящий через O и O' , центр K которого находится на нормали к OY , проходящей через O' ; полуплоскость же вправо от OY преобразуется во внутренность упомянутого круга, как показано соответствующей штриховкой (фиг. 4.36).

Сила F превращается в силу $F' = a^2 F$, действующую на диск в точке O в обратном направлении.

Далее

$$\begin{aligned} \chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \left(\chi - X \frac{\partial \chi}{\partial X} - Y \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right) - a \left(\cos \alpha \frac{\partial \chi}{\partial X} + \sin \alpha \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right) = \\ &= \chi - x \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (\text{отсчитывая } x, y \text{ от точки } O') \end{aligned}$$

(если X, Y отсчитываются от точки O):

$$= \chi - R \frac{\partial \chi}{\partial R} + \frac{Fa}{\pi} \left\{ \cos \alpha \left(-\frac{Y}{R^2} [Y \cos \alpha - X \sin \alpha] - \Theta \sin \alpha \right) + \right. \\ \left. + \sin \alpha \left(\frac{X}{R^2} [Y \cos \alpha - X \sin \alpha] + \Theta \cos \alpha \right) \right\} = -\frac{Fa}{\pi} \frac{(Y \cos \alpha - X \sin \alpha)^2}{R^2}; \quad (4.362)$$

это выражение равно

$$-\frac{Fa}{\pi} \cos^2 \alpha, \quad \text{при} \quad X=0.$$

Следовательно диск в преобразованной задаче будет находиться под действием следующих сил:

- 1) силы F , приложенной в точке O , действующей по направлению к O' ;
- 2) равномерно распределенного нормального давления $\frac{2aF \cos^2 \alpha}{\pi}$ по всему контуру, которое представляет собой систему самоуравновешивающихся сил;
- 3) силы в точке O' , необходимой для равновесия диска. Она должна быть равна F' и действовать по направлению к точке O .

Нормальное давление $\frac{2aF \cos^2 \alpha}{\pi}$ тотчас же отпадает, как только к функции χ прибавляется слагаемое $\frac{aF \cos^2 \alpha}{\pi} (x^2 + y^2)$, которое добавляет равномерно распределенное растяжение.

Теперь наш диск свободен от напряжений на контуре, за исключением точек O и O' , где действуют равные и противоположные силы. Линии главных напряжений получаются непосредственно из таких же линий основной задачи. Эти линии представляют собой радиусы, идущие от точки O , и концентричные с точкой O круги. Радиусы преобразуются в дуги кругов, проходящие через O' и O ; концентричные круги преобразуются в семейство соосных (центры лежат на одной прямой) кругов, проходящих через точки O и O' .

Формулы для главных напряжений также получаются сразу же из таких же формул основной задачи при помощи уравнений (4.356).

В задаче для полуплоскости выражения для главных напряжений имеют вид:

$$\overline{nn} = \overline{RR} = -\frac{2F}{\pi R} \cos(\Theta - \alpha),$$

$$\overline{ss} = \overline{\Theta\Theta} = 0$$

Отсюда, обозначая главное напряжение, направленное по касательной к дуге $OT'O'$, через Q (фиг. 4.36), а главное напряжение, направленное по нормали, через P и добавляя равномерно распределенное растяжение указанной выше величины, имеем:

$$Q = \overline{n'n'} = (O'T)^2 \cdot \overline{nn} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{2aF \cos^2 \alpha}{\pi},$$

$$P = \overline{s's'} = (O'T)^2 \cdot \overline{ss} + 2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{2aF \cos^2 \alpha}{\pi};$$

но из (4.362)

$$\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{Fa}{\pi} \sin^2(\Theta - \alpha),$$

так что

$$Q = -\frac{2F}{\pi} \left\{ \frac{(O'T)^2}{R} (\cos(\Theta - \alpha) + a \sin^2(\Theta - \alpha) - a \cos^2 \alpha) \right\}, \quad (4.3631)$$

$$P = -\frac{2F}{\pi} a \sin^2(\Theta - \alpha) + \frac{2aF}{\pi} \cos^2 \alpha. \quad (4.3632)$$

Так как $\Theta = \text{const}$ на прямой OT и для всех точек T' дуги $OT'O'$, то и P будет $= \text{const}$ во всех точках этой дуги, так что главные напряжения, направленные под прямым углом к дуге, соединяющей O и O' будут иметь постоянную величину в точках вдоль всей дуги. Отметим, что величина $\Theta - \alpha$ в этом случае имеет очень простую геометрическую интерпретацию, являясь дополнением к углу, стягиваемому рассматриваемой дугой.

Обозначив угол $\Theta - \alpha$ через β , имеем:

$$P = \frac{2aF}{\pi} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta),$$

$$Q = P - \frac{2F}{\pi R} (O'T)^2 \cos \beta.$$

Эти выражения могут быть упрощены дальше, если учесть, что

$$O'T' \times O'T = (O'O)^2,$$

так что

$$O'T' : O'O = O'O : O'T$$

и треугольники $O'T'O$, $O'OT$ подобны, откуда

$$OT : O'T' = O'T : O'O,$$

т. е.

$$Ra = O'T' \cdot O'T.$$

Таким образом

$$\frac{(O'T')^2}{R} = \frac{aO'T}{O'T'} = \frac{a^3}{O'T' \cdot O'T'}.$$

Производя подстановки и пользуясь обозначением $F' = Fa^2$, получаем окончательно:

$$P = \frac{2F'}{\pi a} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta), \quad (4.3641)$$

$$Q - P = -\frac{2F' a \cos \beta}{\pi \cdot O'T' \cdot O'T'}. \quad (4.3642)$$

Второе уравнение может быть преобразовано следующим образом.

Проведем $T'N$ перпендикулярно $O'O$, тогда

$$\begin{aligned} T'N \cdot O'O &= \text{двойной площади треугольника } O'T'O = \\ &= O'T' \cdot O'T' \sin \beta, \end{aligned}$$

откуда

$$Q - P = -\frac{F' \sin 2\beta}{\pi \cdot T'N}. \quad (4.365)$$

Эта формула показывает, что разность главных напряжений в точках дуги $O'T'O$ меняется обратно пропорционально расстоянию от линии действия нагрузки.

Формулы (4.3641) и (4.365) дают очень простой способ вычисления напряжений в любой точке.

Изоклинические линии получаются очень легко, так как они представляют

собою геометрические места точек касания системы параллельных линий с кругами, проходящими через точки O и O' .

Для получения их уравнений в простейшем виде примем за начало координат среднюю точку U отрезка $O'O$ и самую линию $O'O$ за ось Ox .

Отметим, что x и y имеют теперь другое значение, чем было указано раньше.

Если касательная в точке T' составляет постоянный угол φ с OO' , то следовательно, на основании геометрических соображений,

$$\text{угол } O'OT' - \text{угол } OO'T' = \varphi;$$

полагая $a = 2c$, имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{y}{c-x} - \frac{y}{c+x} \right) : \left(1 + \frac{y^2}{c^2-x^2} \right) = \frac{2xy}{c^2-x^2+y^2}$$

или

$$(x^2 - y^2 - c^2) \operatorname{tg} \varphi + 2xy = 0. \tag{4.366}$$

Это уравнение представляет собою семейство гипербол, проходящих через точки O и O' .

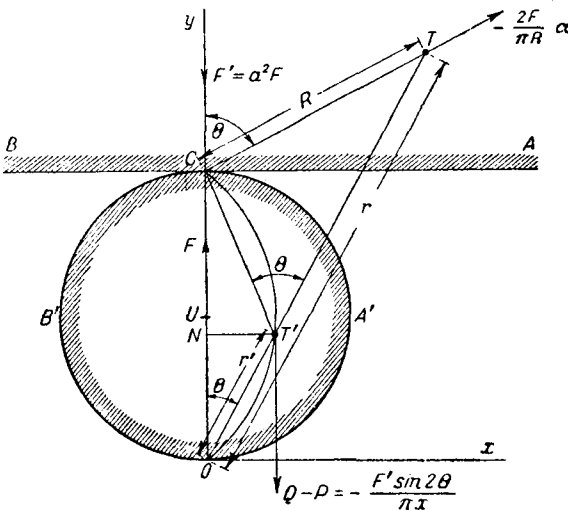
§ 4.37. Напряжения в цилиндрическом катке.

Самым важным частным случаем рассмотренной задачи является тот случай, когда линия действия сжимающих сил совпадает с диаметром диска, т. е. когда $\alpha = 0$.

Этот случай соответствует имеющему большое значение в инженерной практике случаю работы цилиндра под действием направленных по диаметру нагрузок F' (на единицу длины).

В виду практической важности этой задачи приводим ниже для нее особое решение применительно к данному случаю.

Пусть C на фиг. 4.37 будет в основной задаче точкой края ACB полуплоскости, к которой приложена нормально сила A (действующая снизу вверх).



За центр инверсии возьмем какую-нибудь точку O , лежащую на расстоянии a от C и пусть a будет радиусом инверсии.

Тогда край ACB преобразуется в круг $OA'CB'$, а полуплоскость над AB преобразуется во внутреннюю часть этого круга.

Пусть T и T' будут двумя соответствующими точками, и возьмем оси Ox, Oy как показано на фиг. 4.36. Обозначим углы $\angle UCT$ и $\angle OTT'$ через Θ и θ (в соответствии с обозначениями предыдущего параграфа). Пусть $CT = R, OT = r, OT' = r'$.

Тогда, на основании общей теории инверсии, задача после преобразования будет относиться к диску, находящемуся под дей-

Фиг. 4.37. Углы $\angle UCT$ и $\angle TT'C$ обозначены в тексте Θ , а угол $\angle COT'$ обозначен θ .

ствием нормально направленной сверху вниз силы F' , приложенной в точке C (уравновешенной конечно равной ей и противоположной силой F' в точке O)

и равномерно распределенного всестороннего растяжения, получаемого из функции

$$2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$$

на линии ACB . Сила $F' = a^2 F$.

На основании предыдущих результатов имеем теперь функцию напряжений для основной задачи в виде:

$$\chi = -\frac{F}{\pi} R \theta \sin \theta = -\frac{F}{\pi} x \operatorname{arctg} \frac{x}{y-a}. \quad (4.371)$$

Вычисляем как раньше

$$\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} = \chi - x \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{aF}{\pi} \frac{x^2}{x^2 + (y-a)^2} = -\frac{F'}{\pi a} \sin^2 \theta; \quad (4.372)$$

таким образом наше равномерно распределенное всестороннее растяжение, при $\theta = \pi/2$ обращается в сжатие

$$\frac{2F'}{\pi a}, \quad (4.373)$$

приложенное во всех точках контура диска. Рассмотрим теперь напряжение в точке T в основной задаче. Оно будет сжатием

$$\frac{2F}{\pi R} \cos \theta$$

в направлении CT .

Линия CT посредством инверсии преобразуется в дугу круга, проходящую через C , O и T' . Ясно, что напряжение в точке T' , соответствующее тому, что в § 4.35 называлось системой (1), будет сжатием, действующим по касательной к дуге с интенсивностью

$$r^2 \times \frac{2F}{\pi R} \cos \theta.$$

Кроме этого мы имеем здесь в точке T' всестороннее растяжение, представленное функцией $2 \left(\chi - r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$, т. е. всестороннее сжатие

$$\frac{2F'}{\pi a} \sin^2 \theta.$$

Если наложим на это решение равномерно распределенное всестороннее *растяжение* $\frac{2F'}{\pi a}$, то напряжения на контуре исчезнут, за исключением точек O и C , и мы будем иметь случай работы диска или цилиндра под действием диаметрально направленных сил F' (на единицу толщины).

Напряжения в точке T' складываются теперь из:

1) сжатия

$$r^2 \times \frac{2F}{\pi R} \cos \theta$$

вдоль по касательной к дуге и

2) всестороннего растяжения

$$\frac{2F'}{\pi a} \cos^2 \theta.$$

Заметим, что так как $OT':OC = OC:OT$, то треугольники OCT и $OT'C$.

подобны. Отсюда $\Theta = \angle CT'T$ и имеет постоянное значение в точках дуги любого круга, проходящего через O и C . Итак,

$$R : CT' = r : a,$$

так что формула для напряжения (1) приводится к виду:

$$\frac{r^2 \times 2Fa}{\pi \cdot r \cdot CT'} \cos \Theta = \frac{2Fa^3}{\pi \cdot CT' r'} \cos \Theta = \frac{2Fa^3 \sin \Theta \cos \Theta}{\pi r' \cdot CT' \sin \Theta} = \frac{2F' \sin \Theta \cos \Theta}{\pi r' \sin \Theta},$$

так как

$$CT' \sin \Theta = a \sin \theta.$$

Главные напряжения P и Q в точке T' направлены нормально и касательно к дуге $OT'C$ и равны:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{2F'}{\pi a} \cos^2 \Theta, \\ Q &= \frac{2F'}{\pi a} \cos^2 \Theta - \frac{2F'}{\pi r'} \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (4.374)$$

считая, как обычно, растягивающие напряжения положительными. Для этого случая легко получить уравнения изохроматических линий. Перенесем, как в § 4.36, начало координат (x, y) в центр U диска, и пусть c будет его радиусом.

Тогда:

$$P - Q = \frac{2F'}{\pi x} \sin \Theta \cos \Theta.$$

Далее

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\left(\frac{x}{y+c}\right) + \left(\frac{x}{c-y}\right)}{1 - \frac{x^2}{c^2 - y^2}} = \frac{2cx}{c^2 - x^2 - y^2},$$

откуда

$$\sin 2\Theta = \frac{2 \operatorname{tg} \Theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta} = \frac{4cx(c^2 - x^2 - y^2)}{(c^2 - x^2 - y^2)^2 + 4c^2 x^2}$$

и

$$Q - P = \frac{4cF'(x^2 + y^2 - c^2)}{\pi [(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 x^2]}. \quad (4.375)$$

Уравнение изохроматических линий будет

$$(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 x^2 - 4k(x^2 + y^2 - c^2) = 0, \quad (4.376)$$

$$k = F'c/\pi(Q - P).$$

Подобные кривые представляют собой семейство bicircular quartics, проходящих через точки O и C .

§ 4.38. Исследование оптическим методом напряжений в круглом диске, нагруженном по диаметру.

Напряжения в круглом диске, нагруженном по диаметру, как это было рассмотрено в последнем параграфе, были исследованы¹ по способу, описанному в § 2.30, при помощи одних только оптических измерений без применения поперечного экстенсометра.

¹ L. N. G. Filon, On the Graphical Determination of Stress from Photo-Elastic Observations, V. A. Report, 1923, 350--7.

Для исследования пользовались моделью из бакелита, отличающегося значительной величиной оптического коэффициента напряжения (около 50 брюстеров). При применении этого материала встречаются обычно затруднения в виду значительных оптических эффектов, обнаруживаемых в нем в ненапряженном состоянии. Эти неудобства были устранены благодаря трудам Джессопа, которому удалось избрести способ полного отжига примененной модели.

Диск зажимался в специальной раме, которая не допускала непосредственного измерения силы F' . Отношение этого давления к напряжениям определялось из результатов наблюдений путем вычисления суммы напряжений Q (применяя обозначения последнего параграфа) по диаметру, перпендикулярному линии действия силы. Этим способом сила F' выражалась в функции взятого за эталон напряжения; это напряжение соответствовало отставанию, вызывающему чувствительную окраску. При принятой единице длины 2,54 см, F' оказывалось равным 10,84 выбранных единиц.

Из этого видно, что для материала не требовалось находить ни оптических коэффициентов напряжения, ни его упругих постоянных; в этом-то и заключается интересная особенность описываемого способа, при котором можно свободно обойтись без вспомогательных определений.

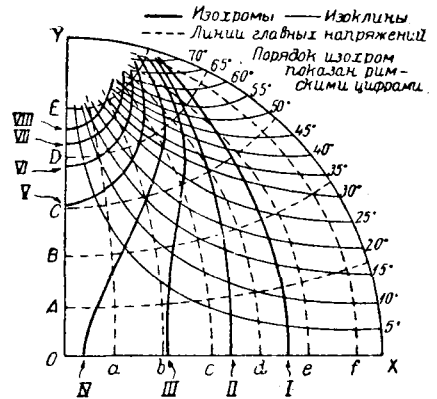
Другое преимущество данного способа состоит в том, что результаты оказываются независимыми от „ползучести“; Аракава доказал, что в бакелите оптическая ползучесть, так же как и механическая, пропорциональна в каждый момент времени величине напряжения; таким образом влияние ползучести сказывается здесь только изменением как оптического коэффициента напряжений, так и упругих постоянных, и не влияет на результаты измерений, если только наблюдения производятся достаточно быстро или (как это и было) после того только, как достигалось устойчивое состояние.

Полученные при наблюдениях изоклинические линии, построенные для значений φ через 5° , а также изохроматические линии, порядка от I до VIII, изображены на фиг. 4.38 только для одного квадранта диска; линии же для других квадрантов могут быть получены по симметрии. Изоклинические линии изображены тонкими линиями, а изохроматические толстыми, причем сам контур представляет собою изохроматическую линию нулевого порядка. Их общее расположение соответствует предсказаниям теории (§ 4.37). Линии главных напряжений изображены пунктиром; они получены обычным способом на основании изоклинических линий. Как видно из чертежа, окружающая точку Y (где приложен груз) линии отличаются значительной долей эллиптичности. Это явление объясняется тем, что сжимающая диск рама сплющила его несколько и давление стало распространяться по большему участку контура.

При вычислении P и Q в точках вдоль оси OX прежде всего пользовались уравнением (см. § 2.31)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta\varphi \left(\frac{P-Q}{\Delta y} \right) = 0, \tag{4.381}$$

где Δy является отрезком между OX и смежной изоклинической линией параметра $\Delta\varphi$. Сначала чертилась вспомогательная кривая, изображающая $P-Q$ в функции x . Значения этой разности наносились на ординатах, проведенных через точки пересечения изохроматических линий с осью OX . С этой кривой



Фиг. 4.38.

были взяты значения $P-Q$, соответствующие $\frac{x}{c} = 0,1; 0,2$ и т. д. Здесь величина c обозначала радиус диска, а Δy — были вертикальные отрезки для этих значений x между изоклиническими линиями $\varphi = +5^\circ$ и $\varphi = -5^\circ$, так что $\Delta\varphi =$ дуге 10° . Результаты даны в таблице 4.381, причем интегрирование производилось обычным графическим способом.

Таблица 4.381.

Вычисление P в точках оси OX .

$\frac{x}{c}$	$P-Q$	Δy (см)	$-\frac{\partial P}{\partial x}$	P		Q	
				графически	теоретически	графически	теоретически
0	4,08	∞	0	0,84	1,06	-3,24	-3,18
0,1	3,94	7,75	0,226	0,81	1,02	-3,13	-3,10
0,2	3,53	5,16	0,304	0,72	0,90	-2,81	-2,86
0,3	3,04	3,68	0,366	0,61	0,74	-2,43	-2,51
0,4	2,53	2,74	0,409	0,48	0,56	-2,05	-2,09
0,5	2,03	2,24	0,403	0,35	0,38	-1,68	-1,66
0,6	1,50	1,88	0,354	0,23	0,24	-1,27	-1,23
0,7	1,00	1,65	0,269	0,13	0,12	-0,87	-0,85
0,8	0,60	1,50	0,178	0,06	0,05	-0,54	-0,52
0,9	0,28	1,50	0,083	0,01	0,01	-0,27	-0,23
1,0	0	1,52	0	0	0	0	0

Приведенные в этой таблице значения Q , как видно, дают довольно хорошую сходимость опыта и теории. Значения P , полученные при помощи графического расчета, несколько ниже (хотя и не на большую величину), чем теоретические величины. Это расхождение объясняется влиянием способа приложения нагрузки, о котором мы уже упоминали.

Далее были вычислены значения P в точках вдоль линий главных напряжений, обозначенных буквами A, B, C, D на фиг. 4.38 (линия E выпущена потому, что полученные из наблюдения изоклинические линии в этом месте оказались слишком запутанными, чтобы их можно было аккуратно изобразить на чертеже). Интегрирование производилось, начиная с контура, и шло по направлению внутрь, причем пользовались [см. уравнение (2.297)] следующей формулой:

$$P = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (P-Q) \operatorname{ctg} \psi \, d\varphi, \quad (4.382)$$

где ψ представляет собой угол, образуемый линией главного напряжения, вдоль которой мы интегрируем, с изоклинической линией параметра φ .

Значения $P-Q$ получены по интерполяции между изохроматическими линиями, а значения ψ измерялись непосредственно. Величины P вычислены для точек последовательных пересечений изоклинических линий с линиями главных напряжений A, B, C, D : значения Q получались затем из величины $P-Q$. Результаты этих вычислений даны в таблице 4.382.

При сравнении их с теоретическими вычислениями для точек диаметра $x=0$ обнаруживаются расхождения: так например, значение P должно бы быть [см. уравнение (4.374)] постоянным, а оно непрерывно возрастает по мере движения по направлению к точке Y , как показывают числа в графе $\varphi=0^\circ$ таблицы 4.382.

Чтобы доказать, что эти расхождения не являются результатом допущенных при пользовании графическим методом ошибок, а представляют собою действительные расхождения измеренных величин напряжений с их теоретическими значе-

ниями, происходящие вероятно от того, что нагрузка не была, в действительности, строго говоря, сосредоточенной, приведенные выше результаты были подвергнуты дополнительной проверке. Эта проверка состояла в том, что вычисление было начато со значений Q в точках вдоль оси OX , данных в графе 7 таблицы 4.381, и велось для линий главных напряжений a, b, c, d, e, f при помощи формулы

$$Q = Q_0 - \int (P - Q) \operatorname{ctg} \psi \, d\varphi. \tag{4.383}$$

Таблица 4.382.

Вычисление P вдоль линий главных напряжений A, B, C, D .

φ	A		B		C		D	
	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
0°	0,93	-3,27	1,06	-3,29	1,25	-3,60	1,50	-4,90
5	0,56	-2,16	0,92	-2,99	1,18	-3,64	1,48	-4,82
10	0,18	-1,32	0,67	-2,60	1,02	-3,53	1,39	-4,76
15	0,02	-0,38	0,42	-2,08	0,80	-3,35	1,27	-4,63
20			0,21	-1,39	0,60	-3,00	1,12	-4,43
25			0,06	-0,82	0,42	-2,48	0,93	-4,22
30			0,01	-0,27	0,27	-1,74	0,74	-3,96
35					0,14	-1,30	0,57	-3,68
40					0,06	-0,77	0,42	-3,48
45					0,01	-0,42	0,29	-3,11
50							0,17	-2,68
55							0,08	-1,82
60							0,01	-0,74

Если мы проделаем это вычисление с линией, обозначенной буквой c на фиг. 4.38, которая начинается у точки $\frac{x}{c} = 0,462$, для которой Q_0 по интерполяции равно $-1,845$, то получим значения главных напряжений в точках пересечения c с последовательными изоклиническими линиями, приведенные в таблице 4.383.

Таблица 4.383.

Значения P и Q в точках вдоль линии главных напряжений c .

φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
P	0,40	0,44	0,38	0,36	0,29	0,52	0,67	0,61	0,22
Q	-1,85	-1,89	-2,00	-2,17	-2,41	-2,78	-3,33	-4,09	-5,28

Определив наконец значения φ для всех четырех пересечений Ac, Bc, Cc, Dc и сравнивая для этих точек значения P и Q , полученные посредством интерполяции из таблиц 4.382 и 4.383, из каждой в отдельности, получаем следующие результаты:

Таблица 4.384.

Перекрестная проверка величин напряжений.

φ	Точка	Из таблицы 4.382		Из таблицы 4.383	
		P	Q	P	Q
6,5°	Ac	0,45	-1,91	0,43	-1,92
15,0	Bc	0,42	-2,08	0,36	-2,17
23,5	Cc	0,47	-2,64	0,45	-2,66
33,0	Dc	0,64	-3,79	0,63	-3,79

Небольшая разница замечается в значениях $P-Q$ и зависит от того, что P и Q найдены приближенно.

Рассмотрев эти величины, мы находим тем не менее исключительно хорошую сходимость, что может считаться замечательно удачным подтверждением точности примененного метода.

Мы можем следовательно считать, что таблицы 4.381 и 4.382 дают с удовлетворительной точностью действительные средние напряжения в подобном цилиндрическом катке. Однако, для представления этих напряжений в функции действительной нагрузки F' (на единицу толщины) и радиуса c цилиндра, нам надо помнить, что здесь $F' = 10,84$ (2,54 см \times на принятую единицу напряжений), и что радиус цилиндра или, более точно, радиус того контура, для которого строились кривые, был равен 8,26 см. Таким образом принятое за единицу напряжение оканчивается приблизительно равным $\frac{8,26}{10,84} \frac{F'}{c}$ или $0,8 \times \frac{F'}{c}$. Если, следовательно, мы захотим выразить напряжения, данные в таблицах 4.381 и 4.382 через $\frac{F'}{c}$, то нам придется все числа этих таблиц умножить на 0,8.

Ясно, что увеличение сжимающей нагрузки приведет к дальнейшему сплющиванию цилиндра и к увеличению расхождения опыта и теории. Поэтому не следует выражать полученных результатов в этой более общей форме, это приведет нас только к недоразумениям, так как при заданном материале и размерах диска или цилиндра приведенные в таблице числа окажутся вполне подходящими только для одного частного значения нагрузки, а именно для такой нагрузки, которая производит тоже сплющивание цилиндра, как в описываемом выше опыте.

§ 4.39. Другие виды контурных условий.

В этой главе мы рассматривали исключительно случаи, когда на контуре были заданы условия для напряжений, то есть мы считали, что напряжения во всех точках контура известны. Важное значение таких условий на контуре для наших целей заключается в том, что получаемое при решении задачи распределение напряжений оказывается или независимым от упругих постоянных, или же нам без труда удастся выделить из общего выражения для напряжений в теле те слагаемые, которое заключают в себе упругие постоянные.

В этих случаях мы можем пользоваться оптическим методом исследования напряжений в модели, скажем из нитроцеллюлозы, и применить затем с уверенностью полученные этим путем результаты к конструкциям из обычных строительных материалов.

Совсем иначе обстоит дело при наличии контурных условий, заключающих в себе, целиком или частично, перемещения. В этом случае даже для пластинок с односвязным контуром в решение необходимо должны войти обе упругие постоянные, причем обычно не представляется возможности определить каким-либо

простым способом, какие изменения произойдут в полученном решении вследствие изменения величины этих упругих постоянных.

В некоторых случаях условия, включающие перемещения, могут быть заменены условиями для напряжений на контуре. Подобный случай бывает, например, при сжатии образца между двумя гладкими жесткими плоскостями на определенную величину, причем число точек соприкосновения таково, что реакции во всех точках могут быть выражены только через одну неизвестную реакцию.

При соответствующих условиях эта реакция может быть определена путем оптических наблюдений над напряжениями, так как распределение напряжений, но не величина их, независимы от материала. Мы можем также исследовать и некоторые другие задачи, обладающие свойствами симметрии, например задачу о деформации кругового кольца, внутренний контур которого увеличивается на определенную величину.¹

Но в указанном случае зависимость между напряжениями в любой точке и заданными перемещениями на контуре включает в себе множитель, зависящий от отношения упругих постоянных, и если форма и величина этого множителя заранее неизвестны а priori, то бывает трудно найти его; во всяком случае это требует наблюдений не над каким-либо единичным материалом.

Из других случаев, где распределение напряжений оказывается независимым от отношения упругих постоянных, можно указать на такие, где условия на контуре приводят к решению, в котором кубическое расширение $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$ во всех точках равно нулю. В этом случае средние по толщине значения перемещений удовлетворяют уравнениям $\nabla^2 U = 0$, $\nabla^2 V = 0$ и могут быть определены однозначно из условий для перемещений на контуре, независимо от упругих постоянных. В этом случае напряжения для различных материалов пропорциональны модулю упругости при сдвиге μ , так что переход от одного материала к другому не представляет никаких затруднений. Но такие случаи встречаются как исключение и редко когда отвечают практическим задачам.

По этой причине изучение задач, заключающих в себе условия для перемещений или смешанные условия на контуре, ушло при помощи оптического метода недалеко вперед.

Тем не менее, в виду того, что отношение Пуассона для большинства упругих материалов меняется мало, оптические исследования, хотя применимые, строго говоря, только к тому материалу, из которого сделана опытная модель, дают массу ценных указаний и для целого ряда других материалов.

¹ *Coker and Levi, Contact Pressures and Stress Distributions in Cams, Rollers and Wheels, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1930, 708—13.*

ГЛАВА V.

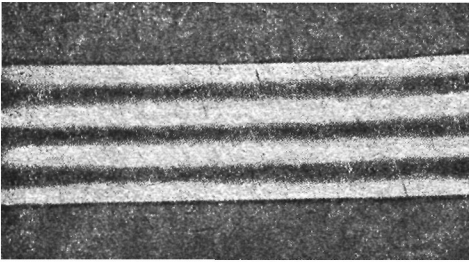
ИЗГИБ БАЛОК.

§ 5.01. Введение.

Распределение напряжений в кривом стержне с прямоугольным поперечным сечением, находящемся под действием постоянного изгибающего момента M , разобрано в §§ 4.12 и далее; найденное при этом на опыте распределение напряжений совпадает в основном с тем, которое найдено аналитическим путем. В частном случае прямой балки распределение напряжений, как увидим из § 5.03, оказывается линейным и определяется по формуле

$$\widehat{xx} = \frac{M}{I} y, \quad (5.01)$$

где \widehat{xx} означает растягивающее напряжение, относящееся к сечению, перпендикулярному к оси балки и действующее в точке этого сечения на расстоянии y от нейтрального слоя балки, а I является моментом инерции площади этого поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба и проходящей через центр тяжести сечения.



Фиг. 5.011. Балка при чистом изгибе.

Линии главных нормальных напряжений идут параллельно и перпендикулярно к контуру балки, причем наименьшее главное нормальное напряжение равно всюду нулю.

Такое напряженное состояние было одним из первых объектов исследования при помощи оптического метода и демонстрировано оптически наблюдениями Брюстера, Френеля и

Нейманна (см. §§ 3.01, 3.02, 3.04 и 3.09). Из более недавних наблюдений можно указать на опыты, описанные в статье Кокепа „The Determination, by Photo-Elastic Methods, of the Distribution of Stress in Plates of Variable Section, with some Applications to Ship's Plating“ (Trans. Inst. of Naval Architects, 1911).

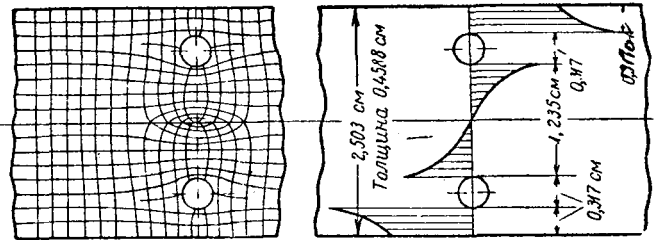
Как указано в § 3.02, изохроматические линии являются равноотстоящими одна от другой линиями, параллельными оси балки. На фиг. 5.011 (которую следует сравнить с изображением тех же линий на фиг. 3.021) воспроизведен подлинный снимок таких линий.

Если же кривизна балки, вызванная нагрузкой, оказывается значительной, то распределение напряжений может не совпадать с тем, которое получается из теории упругости, основанной на гипотезе, согласно которой можно пренебречь квадратами и произведениями перемещений. В подобном случае мы можем встретиться с несимметричным распределением напряжений (если только они в то же время не превзошли предела упругости); нейтральная линия (нейтральная изохроматическая линия) смещается по направлению к более напряженной стороне балки.

В действительности по разным причинам такие простые случаи распределения напряжений встречаются редко; прежде чем приступить к подробному исследо-

ванию данного явления, следует разобрать некоторые из этих причин, которыми часто пренебрегают и пользуются, вследствие этого, простой формулой (5.01) в таких случаях, когда она совершенно неприменима.

Стенка клепаной балки, например, обычно состоит из нескольких прямоугольных листов, соединенных между собою вертикальными рядами заклепок. Распределение напряжений в стыке и около него весьма сложно и не представляет собой ничего похожего на то, что дает приведенная выше формула. Иллюстрацией подобного, но более простого распределения напряжений может служить балка с двумя отверстиями, изображенная на фиг. 5.012, где влияние каждого из отверстий оказывается настолько значительным, что максимальное напряжение по-

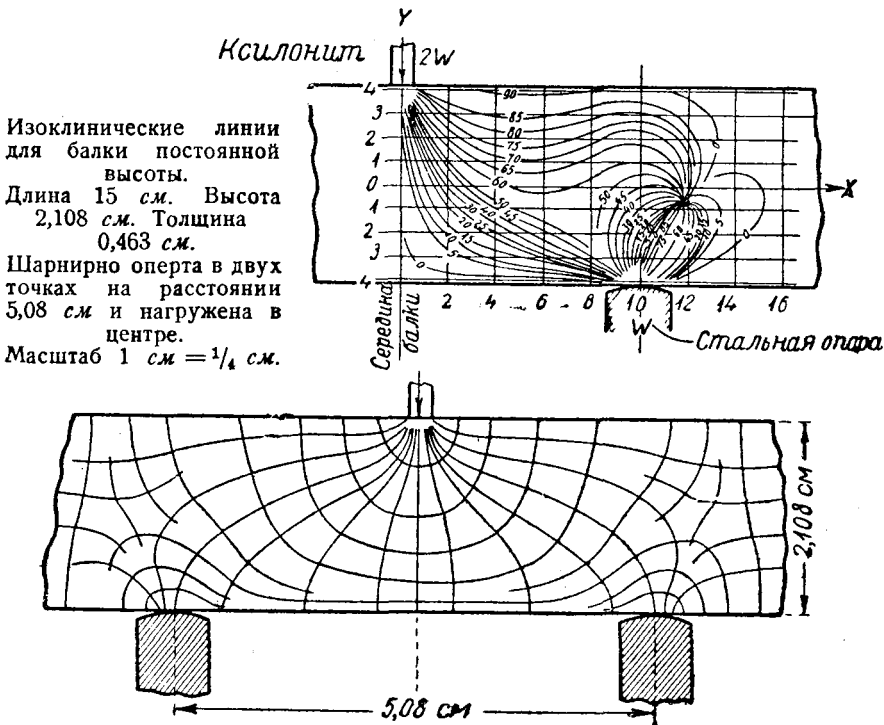


(a) Линии главных напряжений.

(b) Распределение напряжений в сечении через заклепочное отверстие.

Фиг. 5.012. Балка при чистом изгибе.

балка с двумя отверстиями, изображенная на фиг. 5.012, где влияние каждого из отверстий оказывается настолько значительным, что максимальное напряжение по-

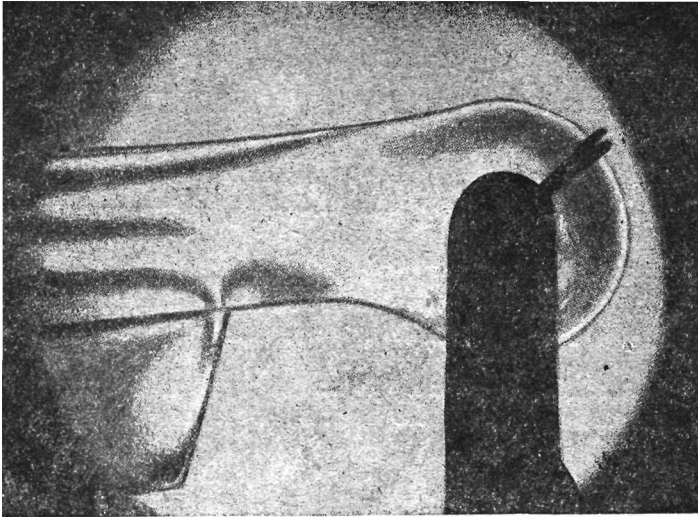


Фиг. 5.013. Изоклинические линии и линии главных напряжений в короткой, шарнирно опертой в двух точках балке, при нагрузке по середине пролета.

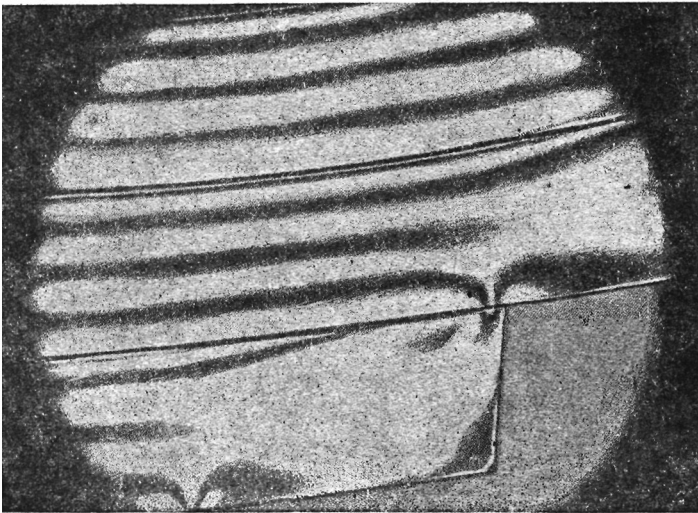
лучается не в верхнем и нижнем волокнах балки, а у краев отверстия. В клепаной балке это максимальное напряжение может быть еще больше благодаря действию заклепок. Прямоугольная сетка линий главных нормальных напряжений оказывается очень сильно искаженной в окрестности этих отверстий, как показано

на той же фигуре; она становится снова прямоугольной на известном расстоянии от отверстий; значительный участок по обе стороны отверстий отличается довольно-таки сложным распределением напряжений.

В коротких балках, опертых по концам и нагруженных в пролете, распределение напряжений



a



b

Фиг. 5. 014 a и 5. 014 b. Распределение напряжений в листах рессор железнодорожных вагонов.

бывает также сложным вследствие местных напряжений, возникающих у обеих опор и в точках приложения нагрузки, а также и вследствие срезающих усилий от сосредоточенных сил, как показано на простом случае прямой балки с пролетом L и высотой $0,415 L$, нагруженной в середине пролета (фиг. 5.013).¹

В этом случае нейтральная ось совершенно исчезает, а расположение изоклинических линий и линий главных нормальных напряжений снова оказывается довольно сложным, хотя исследование распределения напряжений и не встречает особых затруднений.

Другой иллюстрацией одного из важных случаев, встречающихся на практике, является рессора, где несколько предварительно искривленных тонких пластинок постепенно убывающей длины скреплены вместе посредством хомута, причем самая длинная полоса нагружается на каждом

конце, а середина, скрепленная хомутом, оперта, или наоборот. Случай этот чрезвычайно интересен потому, что подобные плоские рессоры широко применяются для подвижного состава железных и шоссейных дорог; он обратил на себя большое внимание, как теоретическая задача и как задача эксперимента; оптический метод не дал еще особенно ценных данных, несмотря на то, что многое можно было бы выяснить этим путем. Здесь мы встречаемся с слабо искривленными пластинками, находящимися под действием сил, приложенных по обоим граням,

¹ Показано впервые *Carus Wilson*, Phil. Mag., 1891.

за исключением крайних пластинок; распределение этих усилий не известно, неодинаково на каждой из граней и изменяется, очевидно, в продольном направлении, как это было найдено для пластинок, искривленных таким образом, что поверхности их плотно прилегают одна к другой; приложение нагрузки вызывает резко выраженные контактные напряжения у концов пластинок. На фиг. 5.014a показаны эти местные напряжения на нижней грани верхнего листа в рессоре этого типа, а также и на обеих поверхностях промежуточного листа на фиг. 5.014b.

Изображенные там изохроматические полосы указывают на то, что распределение напряжений в средних частях каждой пластинки рессоры мало чем отличается от распределения напряжений, обнаруженного в балках большой кривизны, находящихся под действием постоянного изгибающего момента, что подтверждается и числовыми измерениями. Влияние местных напряжений на каждой грани пластинки точно не выяснено. Интересно отметить, да оно ясно видно и на фотографии, что каждый конец пластинки имеет разный тип распределения напряжений, вызванный давлением соседнего листа. В самом нижнем, коротком листе рессоры распределение напряжений имеет характер, указываемый линиями главных нормальных напряжений (фиг. 5.014c); по этой фигуре видно, что этот лист напряжен несколько иным образом, чем другие.

Можно бы привести много других примеров, встречающихся на практике, но и разобранных нами случаев достаточно, чтобы обратить внимание на крайнюю ограниченность области применения обычной формулы изгиба.



Фиг. 5.014c.

Перейдем теперь к исследованию более точной теории изгиба прямой балки, при изложении которой нет необходимости прибегать к обычным упрощениям, применяемым при элементарном выводе формулы изгиба, годной для ограниченного числа случаев. Позднее будет приведено описание некоторых экспериментов, произведенных оптическим методом и касающихся этой теории.

§ 5.02. Изгиб прямого стержня с прямоугольным поперечным сечением.

Рассмотрим пластинку, ограниченную двумя параллельными гранями $y = b$ и $y = -b$, простирающуюся в бесконечность в обе стороны в направлении оси Ox . В этой задаче мы попробуем искать решение для χ в форме произведения двух функций

$$F_1(x) \times F_2(y).$$

Легко найти, что типичными решениями этого вида уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$ оказываются произведения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ch} \\ \text{sh} \end{array} \right\} m y \times \left. \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} m x,$$

где m является произвольной постоянной. Тогда на основании § 4.01, типичные решения для функции χ , соответственно четные и нечетные по отношению к y и

¹ E. G. Coker, The Determination of the Stresses in Springs and other Bodies by Optical and Electrical Means. British Association, Dundee Meeting, 1912. См. также Engineering, 20 сентября 1912.

чисто периодические по отношению к x , представляются формулами

$$\chi = (Ay \operatorname{sh} my + B \operatorname{ch} my) \cos (mx + \gamma), \quad (5.021)$$

$$\chi = (Ay \operatorname{ch} my + B \operatorname{sh} my) \cos (mx + \gamma). \quad (5.022)$$

Для нашей цели используем последнее решение (5.022), являющееся нечетным по отношению к y .

Для средних величин напряжений \overline{yy} , \overline{xy} получаем выражения:

$$\overline{yy} = -m^2 (Ay \operatorname{ch} my + B \operatorname{sh} my) \cos (mx + \gamma),$$

$$\overline{xy} = m (A \{ \operatorname{ch} my + my \operatorname{sh} my \} + mB \operatorname{ch} my) \sin (mx + \gamma).$$

Предположим, что грани $y = \pm b$ пластинки свободны от касательных напряжений.

Тогда $\overline{xy} = 0$, при $y = \pm b$, что требует, чтобы

$$A \{ \operatorname{ch} mb + mb \operatorname{sh} mb \} + mB \operatorname{ch} mb = 0.$$

Таким образом

$$A = mC \operatorname{ch} mb,$$

$$B = -C (\operatorname{ch} mb + mb \operatorname{sh} mb),$$

где C — некоторая постоянная.

Тогда мы имеем

$$\overline{yy} = -m^2 C \{ my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my \} \cos (mx + \gamma).$$

Если далее нам нужно удовлетворить и условию $\overline{yy} = 0$ по граням $y = \pm b$, то из этого следует, что

$$m^2 C \{ mb - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} mb \} \cos (mx + \gamma) = 0. \quad (5.023)$$

Мы не можем положить $C = 0$, так как тогда решение тождественно равно нулю. Поэтому условию (5.023) можно удовлетворить единственным способом, положив

$$m^2 \{ mb - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} mb \} = 0,$$

т. е.

$$m^2 \{ 2mb - \operatorname{sh} 2mb \} = 0. \quad (5.024)$$

Можно показать, что уравнение

$$\zeta - \operatorname{sh} \zeta = 0$$

имеет бесконечное количество комплексных корней, в дополнение к *трехкратному* корню $\zeta = 0$. Комплексное значение для m вводит в наше чисто периодическое (относительно x) решение множители вида e^{kx} ; подобные решения соответствуют тем видам деформации, которые очень быстро затухают или возрастают по мере удаления от точки $x = 0$. Решения такого вида соответствуют чисто местным деформациям, и мы ими будем совершенно пренебрегать в настоящем исследовании.

Переходя теперь к единственному вещественному корню $m = 0$, отметим, что разложение выражения $2mb - \operatorname{sh} 2mb$ в ряд по степеням m начинается с члена, содержащего m в третьей степени. Таким образом условие (5.023) равенства нулю \overline{yy} на верхней и нижней гранях принимает вид:

$$m^3 C (1 + \text{члены, включающие в себя степени } m) \times \cos (mx + \gamma) = 0.$$

Взяв сначала решение, соответствующее $\gamma = 0$, мы удовлетворим условию на контуре, приближая m к нулю таким образом, что $m^3 C$ стремится к нулю. Поэтому в данном случае условие на контуре все-таки оказывается удовлетворенным в том случае, если мы будем стремить $m^3 C$ к конечному пределу G .

Возьмем далее $\gamma = -\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos(mx + \gamma) = \sin mx$; тогда, приняв в расчет множитель $\sin mx$, условием на контуре мы снова удовлетворим, если будем стремиться $m^4 C$ к конечной величине H .

Таким образом получаются два решения для функции χ :

$$\chi_1 = G \lim_{m \rightarrow 0} L \left\{ my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my \right\} \frac{\cos mx}{m^3},$$

$$\chi_2 = H \lim_{m \rightarrow 0} L \left\{ my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my \right\} \frac{\sin mx}{m^4}.$$

Выражение, стоящее под знаком предела, разложим затем по возрастающим степеням m , отбрасывая члены с положительными степенями m . Сразу же оказывается, что все гиперболические функции в вышестоящем выражении дают только два первых члена своего разложения, а круговые — только первый член.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my = \\ & = my \left(1 + \frac{1}{2} m^2 b^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} m^2 y^2 \right) - m^3 b^2 y \left(1 + \frac{m^2 b^2}{6} \right) \left(1 + \frac{m^2 y^2}{6} \right) - \\ & - \left(1 + \frac{1}{2} m^2 b^2 \right) my \left(1 + \frac{m^2 y^2}{6} \right) = \frac{m^3 y^3}{3} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 b^2 \right) - \\ & - m^3 b^2 y \left(1 + \frac{m^2 b^2}{6} \right) \left(1 + \frac{m^2 y^2}{6} \right) = m^3 \left(\frac{y^3}{3} - b^2 y \right), \end{aligned}$$

пренебрегая членами, содержащими множитель m^5 , которые стремятся к нулю после деления на m^3 .

Таким образом

$$\chi_1 = G \left(\frac{y^3}{3} - b^2 y \right), \tag{5.025}$$

$$\chi_2 = Hx \left(\frac{y^3}{3} - b^2 y \right). \tag{5.026}$$

Решение (5.025) приводит к следующей системе напряжений и перемещений:

$$\tilde{x}x_1 = 2Gu, \quad \tilde{y}y_1 = 0, \quad \tilde{x}y_1 = 0, \quad \nabla^2 \chi_1 = 2Gu.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = 2Gu,$$

что приводит к

$$\psi_1 = G \left(y^2 x - \frac{x^3}{3} \right),$$

где ψ_1 — соответствующая функция перемещений (§ 2.25). Это дает

$$2\mu U_1 = 2(1 - \sigma) Gxy,$$

$$2\mu V_1 = -G(y^2 - b^2) + G(1 - \sigma)(y^2 - x^2).$$

Опустив в выражении для V_1 постоянный член, который соответствует перемещению тела, как целого, и пользуясь далее зависимостями для упругих постоянных

$$1 - \sigma = \frac{1}{1 + \eta}, \quad E = 2\mu(1 + \eta),$$

имеем для перемещений следующие формулы:

$$U_1 = \frac{2G}{E} xy, \quad V_1 = -\frac{G}{E} (x^2 + \eta y^2). \quad (5.027)$$

Мы видим, что при $y=0$, что соответствует оси пластинки,

$$U_1 = 0, \quad V_1 = -\frac{G}{E} x^2.$$

Решение следовательно соответствует изгибу полосы в ее собственной плоскости; кривизна же изогнутой оси равна

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -\frac{2G}{E},$$

пренебрегая как обычно малыми второго порядка.

Это выражение отрицательно при положительном G , что соответствует изгибу в сторону отрицательной оси Oy . Обозначим через R радиус кривизны (считая его положительным книзу).

$$R = \frac{E}{2G}.$$

Сумма нормальных напряжений по сечению, перпендикулярному оси Ox , равна

$$2c \int_{-b}^b \overset{\sim}{xx}_1 dy = 0.$$

Изгибающий момент равен

$$M = 2c \int_{-b}^b y \overset{\sim}{xx}_1 dy = \frac{8Gcb^3}{3} = (4bc) \times \frac{b^2}{3} \times 2G = \frac{EI}{R}, \quad (5.028)$$

где I является моментом инерции поперечного сечения относительно линии, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно плоскости изгиба. Среднее (по толщине пластинки) напряжение

$$\overset{\sim}{xx}_1 = \frac{Ey}{R} = \frac{My}{I}. \quad (5.029)$$

Заметим, что, как напряжения, так и изгибающий момент не зависят от x , т. е. изгиб происходит под влиянием постоянного изгибающего момента.

Касательные напряжения в любом сечении отсутствуют. Мы имеем следовательно дело с случаем, известным под названием „чистый“ изгиб или изгиб Бернулли-Эйлера, по имени тех двух математиков, которые впервые разработали полное решение для этого случая изгиба.

§ 5.03. Чистый изгиб балки любого поперечного сечения.

Для случая обобщенного плоского напряженного состояния, о котором шла речь в последнем параграфе, особое значение имеет точное решение, удовлетворяющее условию $\widehat{zz} = 0$, которое рассматривалось в § 2.26.

В этом случае, пользуясь уравнениями (2.2681) и (2.2682), имеем

$$u_1 = \frac{2G}{E} xy,$$

$$v_1 = -\frac{G}{E} (x^2 + \eta y^2) + \frac{\eta G}{E} (z^2 - c^2/3) = -\frac{G}{E} (x^2 + \eta \{y^2 - z^2\}),$$

опуская постоянную $-\frac{\eta G c^2}{3E}$,

$$w_1 = -\frac{2\eta G}{E} yz,$$

$$\widehat{xx}_1 = 2Gy, \quad \widehat{yy}_1 = \widehat{xy}_1 = \widehat{zz}_1 = \widehat{xz}_1 = \widehat{yz}_1 = 0.$$

Отсюда следует, что напряжения по любому сечению, параллельному оси Ox , равны нулю.

Если мы обозначим через q нормаль к такому сечению, а l, m, n — направляющие косинусы этой нормали, тогда $l=0$, и мы имеем

$$\widehat{qx} = m\widehat{xy} + n\widehat{xz} = 0,$$

$$\widehat{qy} = m\widehat{yy} + n\widehat{yz} = 0,$$

$$\widehat{qz} = m\widehat{zy} + n\widehat{zz} = 0.$$

Такие сечения, следовательно, свободны от напряжений, и мы можем в этом случае отбросить обычное предположение, что тело ограничивается плоскостями, параллельными плоскости деформации, и считать, что тело имеет форму цилиндра или балки особого поперечного сечения, образующие которой параллельны оси Ox .

Если предположить, что плоскость $y=0$ проходит через центры тяжести поперечных сечений, то мы получим, что сумма напряжений по сечению равна

$$\int \int \widehat{xx}_1 dy dz = 2G \int \int y dy dz = 0,$$

а изгибающий момент, как и раньше,

$$M = \int \int y \widehat{xx}_1 dy dz = 2Gl.$$

сдвига всюду равны нулю, а три удлинения в направлении осей имеют вид:

$$s_x = \frac{2Gy}{E}, \quad s_y = s_z = -\frac{2G\eta y}{E}.$$

Волокна в плоскости $y=0$ не напряжены. Эта плоскость называется *нейтральной плоскостью*, а линия ее пересечения с поперечным сечением называется *нейтральной осью* этого сечения.

Все линии, параллельные оси Ox , имеют, как и прежде, одинаковую кривизну

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2G}{E} = -\frac{1}{R}.$$

Таким образом остаются в силе уравнения (5.028) и (5.029) предыдущего параграфа. Сделанный вывод подтверждает обычные формулы, применяемые при изучении изгиба балок.

Координаты x', y', z' любой точки после деформации будут

$$x' = x + u_1 = x + \frac{xy}{R},$$

$$y' = y + v_1 = y - \frac{1}{2R} \{ x^2 + \eta (y^2 - z^2) \},$$

$$z' = z + w_1 = z - \frac{\eta}{R} yz.$$

Пренебрегая квадратами $\frac{1}{R}$, приводим первое уравнение к следующему виду:

$$x' = x + \frac{xy'}{R};$$

оно при постоянном x представляет плоскость.

Таким образом поперечное сечение $x = \text{const}$ остается плоским и после деформации.

Далее, так как $\sigma_{xy} = 0$, то поперечное сечение будет и после деформации перпендикулярно к изогнутой оси. Подобно этому плоскости $z = \text{const}$ преобразуются в плоскости

$$z' = z \left(1 - \frac{\eta}{R} y' \right),$$

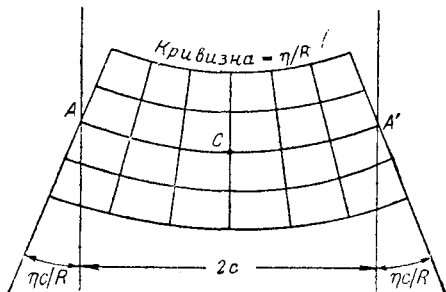
так что в том частном случае, когда сечение прямоугольно, тело после деформации оказывается клинообразным, и плоскости $z = \pm c$ наклоненными одна к

другой под углом $\frac{2\eta c}{R}$. Плоскости $y = \text{const}$ искривляются; их приближенное уравнение будет

$$y' = y - \frac{1}{2R} (x'^2 - \eta z'^2 + \eta y'^2).$$

Поперечная кривизна такой плоскости будет

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial z'^2} = \frac{\eta}{R}.$$



Фиг. 5.03.

Таким образом верхняя и нижняя поверхности прямоугольной балки имеют в плоскости поперечного сечения кривизну $\frac{\eta}{R}$, с радиусом кривизны, направленным вверх, тогда как в плоскости деформации кривизна $\frac{1}{R}$ и радиус R направлен вниз. Это явление известно под названием *антикластической* кривизны изогнутой балки. На фиг. 5.03 в преувеличенном виде изображено деформированное поперечное сечение такой балки; ACA' представляет собой горизонтальную ось сечения после деформации

§ 5.04. Изгиб балки прямоугольного сечения при наличии срезающих напряжений.

Если мы обратимся к решению χ_2 § 5.02, то увидим, что оно приводит к следующим формулам для напряжений и перемещений:

$$\widetilde{\chi\chi}_2 = 2Hxy, \quad \widetilde{y\chi}_2 = 0, \quad \widetilde{x\chi}_2 = H(b^2 - y^2),$$

$$\nabla^2 \chi_2 = 2Hxy = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y},$$

откуда

$$\psi_2 = -\frac{H}{12} (x^4 + y^4 - 6x^2y^2),$$

и

$$U_2 = \frac{H}{E} \left\{ x^2 y - \frac{(2 + \eta)}{3} y^3 \right\} + \frac{H(1 + \eta)}{E} b^2 y,$$

$$V_2 = \frac{H}{E} \left\{ -\eta x y^2 - \frac{x^3}{3} \right\} + \frac{H(1 + \eta)}{E} b^2 x.$$

Ось балки изогнута здесь выпуклостью кверху с кривизной

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = -\frac{2H}{E} x = -\frac{1}{R},$$

причем здесь важно помнить, что R не является уже постоянной величиной.

Как и раньше, сумма напряжений по всему поперечному сечению балки равна нулю; изгибающий момент будет равен

$$M = 2Hx \times 2c \int_{-b}^b y dy = 2Hx \times 4bc \times \frac{b^2}{3} = 2Hx \cdot I = \frac{EI}{R}.$$

Поэтому формула, связывающая изгибающий момент с кривизной, будет та же, что для чистого изгиба. Также $\bar{x}x_2 = 2Hx \cdot y = \frac{My}{I}$, что опять-таки совпадает с формулой, выведенной для чистого изгиба.

Мы имеем снова нейтральную плоскость и нейтральную ось, для которых среднее удлинение = 0; напряжение $\bar{x}x$ пропорционально расстоянию от нейтральной оси в каждом поперечном сечении.

Однако, элементарные площадки в нейтральной плоскости уже будут напряженными, так как среднее касательное напряжение $\bar{x}y_2$ для этих площадок достигнет максимума, равного Hb^2 . Среднее касательное напряжение по сечению распределяется по параболическому закону, обращаясь в нуль при $y = \pm b$. Касательные напряжения одинаковы во всех поперечных сечениях.

Сумма их L по сечению будет

$$2c \int_{-b}^b \bar{x}y_2 dy = 2cH \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = + 2cH \left(2b^3 - \frac{2b^3}{3} \right) = \frac{8b^3cH}{3} =$$

$$= (4bc) \frac{2}{3} b^2 \cdot H = 2IH = \frac{EI}{Rx},$$

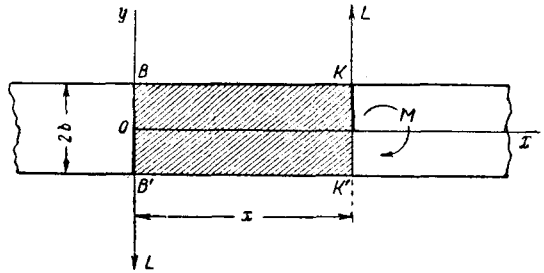
так что

$$Lx = \frac{EI}{R} = M.$$

Отношение $\bar{x}y_2$ к сумме касательных напряжений равно

$$\bar{x}y_2 = \frac{L}{4bc} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right). \tag{5.041}$$

Рассмотрим теперь (фиг. 5.04) сумму сил, действующих на часть балки между поперечными сечениями BB' и KK' , соответствующими $x = 0$ и $x = x$.



Фиг. 5.04.

Так как верхняя и нижняя поверхности свободны от напряжений, то эти силы представляют собой суммы напряжений, передающихся от незаштрихованной на чертеже части материала на заштрихованную. Эти силы статически эквивалентны, как мы только-что видели: по сечению KK' — вертикальной касательной силе L , направленной кверху, и паре сил с моментом M , направленным по часовой стрелке; в сечении BB' — вертикальной касательной силе L , направленной вниз, при отсутствии изгибающего момента, так как $M = 2HxI = 0$, если $x = 0$.

Равенство $Lx = M$ выражает условие равновесия для касательных сил и изгибающих моментов, действующих по обоим сечениям.

Изгиб половины балки, расположенной справа от оси Oy ($x > 0$), может быть в таком случае рассматриваем как вызванный только силой L , приложенной в сечении $x = 0$.

Вторую половину балки можно представить себе отрезанной, если только силу L надлежащим образом приложить к сечению $x = 0$ в виде касательных напряжений, распределенных по закону (5.041).

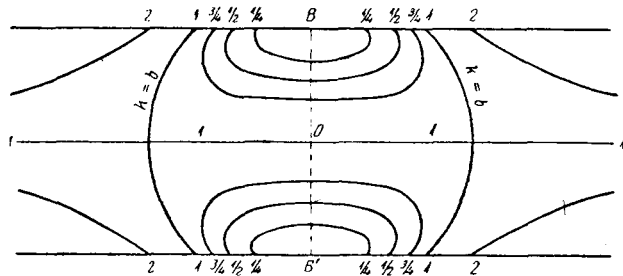
Балка в этом случае работает как консоль, нагруженная на одном конце.

Случай, о котором идет речь, осуществляется в незагруженном пролете неразрезной балки, если в этом пролете находится точка перегиба, где $M = 0$. В этом случае, отсчитывая x от сечения в точке перегиба, мы получаем приведенное выше решение.

Решение для этого вида изгиба было впервые дано (для балок любого поперечного сечения) французским инженером и математиком Сен-Венаном, почему этот тип изгиба может быть коротко назван „изгиб Сен-Венана“.

§ 5.05. *Линии средних главных нормальных напряжений, изоклины и изохромы при чистом изгибе и при „изгибе Сен-Венана“.*

В случае чистого изгиба линии главных нормальных напряжений сразу же становятся очевидными: они образуют прямоугольную сетку, параллельную осям



Фиг. 5.05.

Ox, Oy , так как $P = xx = My/I$ и $Q = 0$. Отсюда $P - Q = My/I$, и изохроматические линии параллельны оси балки и распределяются на равных расстояниях при равных разностях их параметров (ср. §§ 3.02, 5.01).

Изоклинические линии исчезают для всех параметров, за исключением $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, когда в том и в

другом случае геометрическим местом точек этих линий является вся боковая поверхность пластинки.

В случае изгиба Сен-Венана точное решение дифференциального уравнения для линий главных нормальных напряжений представляет некоторые затруднения.

Уравнение для изохроматических линий будет

$$4H^2 [(y^2 - b^2)^2 + x^2 y^2] = (P - Q)^2,$$

или

$$y^2 (x^2 + y^2) - 2b^2 y^2 = k^4 - b^4, \quad (5.051)$$

где

$$k^2 = \frac{P - Q}{2H}.$$

Эти кривые изображены на фиг. 5.05. Если $k = 0$, то они превращаются в два бесконечно малых овала около точек B, B' . По мере возрастания k^2 овалы

эти увеличиваются и приближаются один к другому; максимальное в каждом овале значение для x получается из уравнения

$$x^2 = 2b^2 - 2\sqrt{b^4 - k^4},$$

а ординаты точек пересечения овала с осью $x = 0$ даются формулой $y^2 = b^2 - y^2$.

Когда $k^2 = b^2$, то оба овала переходят в прямую $y = 0$ и круг $x^2 + y^2 = 2b^2$. Когда $k > b^2$, характер кривых резко изменяется. Они состоят из симметричных ветвей с общей асимптотой $y = 0$. Таким образом, на некотором расстоянии от точки перегиба эти линии становятся приблизительно параллельными оси балки, как и в случае чистого изгиба. Изоклинические линии для этой же задачи представлены следующим уравнением:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b^2 - y^2}{xy}$$

или

$$y(y + x \operatorname{tg} 2\varphi) = b^2.$$

Эти линии образуют ряд гипербол, с центром в начале координат; асимптотами их являются линии $y = 0$, $y + x \operatorname{tg} 2\varphi = 0$; все гиперболы проходят через точки $x = 0$, $y = \pm b$.

§ 5.06. *Оптическая проверка чистого изгиба и изгиба с касательными напряжениями.*

Проверка формул для чистого изгиба путем оптического метода проста и уже разбиралась в § 5.01.

Таблица 5.06.

ν	$b^2 - y^2$	$\overline{\frac{xy}{K}}$	$\frac{\overline{xy}}{K - (b^2 - y^2)}$	Разница в процентах
1,6	0,68	0,75	+ 0,07	10
1,4	1,28	1,33	+ 0,05	4
1,2	1,80	1,85	+ 0,05	3
0,0	2,24	2,19	- 0,05	2
1,8	2,60	2,68	+ 0,08	3
0,6	2,88	2,85	- 0,03	1
0,4	3,08	2,83	- 0,25	8
- 0,4	3,08	2,88	- 0,20	7
- 0,6	2,88	2,84	- 0,04	1
- 0,8	2,60	2,49	- 0,11	4
- 1,0	2,24	2,20	- 0,04	2
- 1,2	1,80	1,79	- 0,01	1
- 1,4	1,28	1,25	- 0,03	3
- 1,6	0,68	0,59	- 0,11	16

Формулы для изгиба с касательными напряжениями (тип изгиба Сен-Венана, разобранный в § 5.04) подвергались проверке при помощи оптического метода Файлоном,¹ который изучал напряжения в стеклянной балке с высотой $2b$, равной 3,60 см. Средние из целого ряда определений даны в таблице 5.06, где проводится сравнение между величиной $b^2 - y^2$ и средним касательным напряжением \overline{xy} , определяемым из уравнения

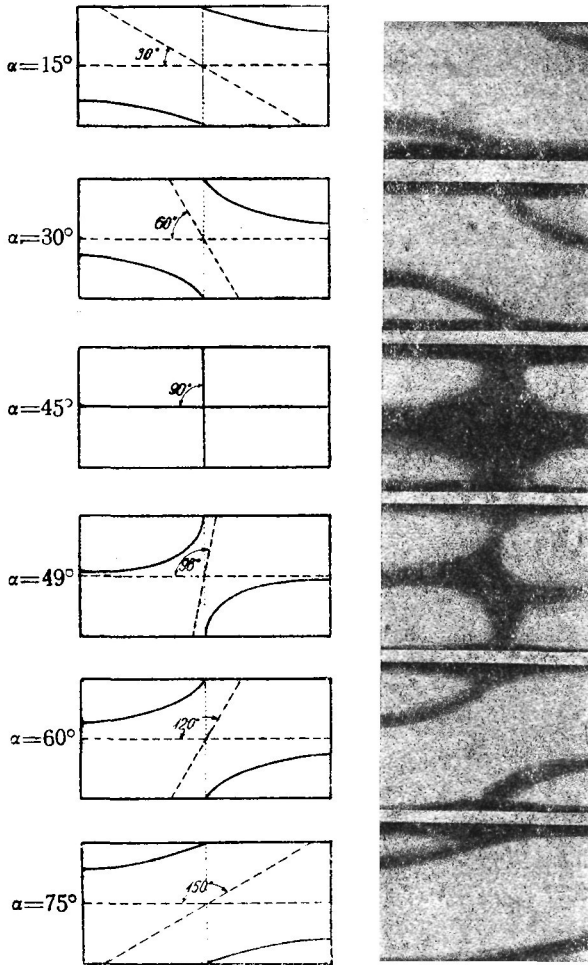
$$2\overline{xy} = \overline{xx} \operatorname{tg} 2\alpha, \quad (5.06)$$

где \overline{xx} вычисляется по формуле

$$\overline{xx} = \frac{My}{I},$$

¹ *Filon*, Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by means of Polarised Light, Phil. Mag. 23, Jan. 1912, 1—25.

а α является параметром изоклинических линий в данной точке; величина K представляет собою $\frac{3L}{8b^2c}$ [см. формулу (5.041)], так что величины второго и третьего столбцов должны совпадать. Большие ошибки получаются для численно малых значений u и для таких случаев измерения не являются надежными для определения



Фиг. 5.06. Изоклинические линии в балке при изгибе с перерезывающей силой около сечения, где изгибающий момент переходит через нуль.

ствием пары сил. Полученные данные подтверждают результаты других экспериментов.

§ 5.07. Бесконечно длинная прямая балка, находящаяся под действием двух равных вертикальных, одинаково направленных сил, приложенных в соответствующих точках обеих граней.¹

¹ Решение задач, разбирающихся в §§ 5.07 и дальше, можно найти в статье L. N. G. Filon, On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-section under any System of Load, Phil. Trans. A, 206, 1903, 63 — 165. В тексте этот вопрос разбирается с несколько другой точки зрения.

u . Но этого и следовало ожидать, так как, при малом u , $\operatorname{tg} 2\alpha$ оказывается очень большим, и формула (5.06) ведет к большим ошибкам при малых абсолютных ошибках в u . Большие относительные погрешности обнаруживаются у граней балки, причем эти погрешности в основном являются следствием малости измеряемой величины. Интересно то обстоятельство, что погрешности оказываются обычно разного знака по обе стороны нейтральной оси. Зависит это часто от какой-либо ничтожной неточности, допущенной при определении нейтральной оси. Впрочем, если все время иметь в виду те трудности, которые сопряжены с точным измерением распределения полос такого рода, то опытные результаты в общем вполне подтверждают общепринятую теорию.

Подвергая балку влиянию дополнительного постоянного отрицательного изгибающего момента соответствующей величины, в полярископ можно было увидеть сечение, в котором изгибающий момент равен нулю; таким образом было проверено наличие гиперболы формы изоклинических линий в области, где ось балки имеет точку перегиба (фиг. 5.06).

В этой же самой статье дана числовая проверка результатов изучения изохроматических линий для балки, находящейся под дей-

Обратимся снова к § 5.02: там формулой $\chi = \varphi_1(m, y) \cos mx$ представлена функция напряжений, нечетная по отношению к y и дающая для средних напряжений χ значение нуль на грядях $\lambda = \pm b$; в этой формуле:

$$\varphi_1(m, y) = my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{sh} mb \sin my - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my. \quad (5.071)$$

Среднее нормальное напряжение, отнесенное к площадке, параллельной плоскости xz , равно:

$$\overline{y} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = -m^2 \varphi_1(m, y) \cos mx.$$

Так как вышеприведенное выражение будет решением задачи при любом значении m , то, складывая любое число таких решений, заключающих в себе произвольные множители, можно получить сложное решение, тоже удовлетворяющее условию равенства нулю касательного напряжения на контуре. Если значения m будут настолько близки одно к другому, что процесс сложения может быть заменен интегрированием, то мы получим функцию напряжений следующей формы:

$$\chi = \int_0^\infty \varphi_1(m, y) f(m) \cos mx \, dm, \quad (5.072)$$

где $f(m)$ есть некоторая функция от m , определяемая условиями на контуре.

Мы имеем

$$\overline{y} = - \int_0^\infty \varphi_1(m, y) f(m) m^2 \cos mx \, dm \quad (5.073)$$

и

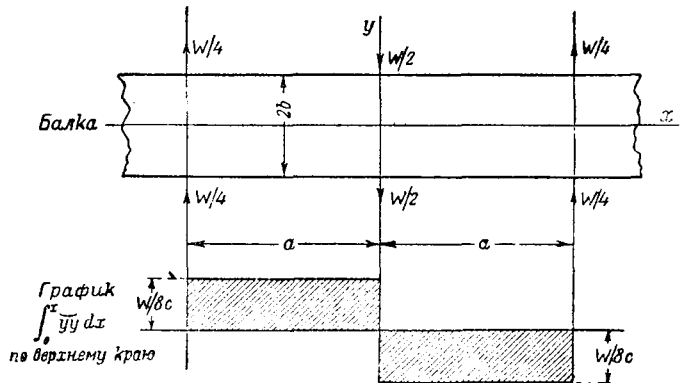
$$(\overline{y})_{y=\pm b} = \mp \int_0^\infty \varphi_1(m, b) f(m) m^2 \cos mx \, dm, \quad (5.074)$$

где знаки берутся либо оба верхние, либо оба нижние.

Рассмотрим теперь бесконечно длинную прямую балку высотой $2b$ и толщиной $2c$, находящуюся под действием сосредоточенных сил, показанных на фиг. 5.07.

Ясно, что \overline{y} должно быть бесконечно большим в точках приложения сосредоточенных сил, но сумма вертикальных усилий (на единицу толщины) остается конечной на длине от начала координат до какого-либо сечения. Эта сумма на каждой грани выражается формулой

$$\int_0^x (\overline{y})_{\pm b} dx;$$



Фиг. 5.07.

она равна нулю, если x лежит за пределами $\pm a$, равна $+\frac{W}{8c}$, если x лежит между $-a$ и 0 , и равна $-\frac{W}{8c}$, если x лежит между 0 и $+a$.

Из интегрального исчисления известно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{m} dm = +\frac{\pi}{2},$$

если x положительно, и $-\frac{\pi}{2}$, если x отрицательно.

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \frac{W}{8\pi c} \int_0^{\infty} \frac{\sin m(x+a) + \sin m(x-a) - 2\sin mx}{m} dm. \quad (5.075)$$

Если $x < -a$, то $(x+a)$, $(x-a)$, x отрицательны, и мы находим

$$I(x) = \frac{W}{8\pi c} \left\{ -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi \right\} = 0.$$

Если

$$-a < x < 0; \quad x+a > 0, \quad x < 0, \quad x-a < 0,$$

то

$$I(x) = \frac{W}{8\pi c} \left\{ +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi \right\} = \frac{W}{8c}.$$

Если

$$0 < x < a; \quad x+a > 0, \quad x > 0, \quad x-a < 0,$$

то

$$I(x) = \frac{W}{8\pi c} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi \right\} = -\frac{W}{8c}.$$

Если

$$x > a; \quad x+a > 0, \quad x > 0, \quad x-a > 0,$$

то

$$I(x) = \frac{W}{8\pi c} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi \right\} = 0.$$

Таким образом $I(x)$ тождественно равен интегралу $\int_0^x (\overline{yy})_b dx$, как это показывает фиг. 5.07.

Отсюда

$$\int_0^x (\overline{yy})_b dx = \frac{W}{4\pi c} \int_0^{\infty} \frac{\sin mx (\cos ma - 1)}{m} dm. \quad (5.076)$$

Но из (5.074)

$$\int_0^x (\overline{yy})_b dx = - \int_0^{\infty} \varphi_1(m, b) f(m) m \sin mx dm. \quad (5.077)$$

Для отождествления этих двух выражений для $\int_0^x (\overline{yy})_b dx$ мы должны по-

ложить:

$$\frac{W \cos ma - 1}{4\pi c m} = -\varphi_1(m, b) f(m) m,$$

где

$$\varphi_1(m, b) = mb (\operatorname{ch}^2 mb - \operatorname{sh}^2 mb) - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} mb = \frac{1}{2} (2mb - \operatorname{sh} 2mb).$$

Таким образом

$$f(m) = \frac{W}{2\pi c} \frac{1 - \cos ma}{m^2 (2mb - \text{sh } 2mb)}, \quad (5.078)$$

а соответствующая функция напряжений будет

$$\gamma = \frac{W}{2\pi c} \int_0^\infty \frac{(1 - \cos ma) \{ my \text{ ch } mb \text{ ch } my - mb \text{ sh } mb \text{ sh } my - \text{ch } mb \text{ sh } my \}}{m^2 (2mb - \text{sh } 2mb)} \cos mx \, dm. \quad (5.079)$$

§ 5.08. Местные напряжения от сосредоточенного груза.

Рассматривая предыдущее выражение, видим, что при приближении m к нулю подинтегральная функция в (5.079) остается конечной; когда же m велико, подинтегральная функция близка к величине $e^{-m(b-|y|)}$, так что интеграл будет безусловно сходящимся для точек внутри балки.

Исследуем теперь, во что превратится выражение (5.079) при увеличении пролета $2a$.

Хорошо известно, что интеграл $\int_a^{\beta} \cos ma \psi(m) \, dm$ в пределе при приближении a к бесконечности стремится к нулю вследствие быстрого изменения с переменной знака функции $\cos ma$, если только $\psi(m)$ есть непрерывная функция с конечным числом максимумов и минимумов. Благодаря равномерной сходимости нашего интеграла на бесконечности мы можем прежде всего выбрать величину верхнего предела так, чтобы остаточный член был меньше любой величины. Тогда множитель при $\cos ma$ в (5.079) будет удовлетворять условиям, поставленным для $\psi(m)$, за исключением того случая, когда $m = 0$, где он обращается в бесконечность.

Разлагая этот множитель

$$\frac{\varphi_1(m, y) \cos mx}{m^2 (2mb - \text{sh } 2mb)}$$

по возрастающим степеням m , получаем следующий ряд:

$$\frac{\varphi_1(m, y) \cos mx}{m^2 (2mb - \text{sh } 2mb)} = \frac{g_{-2}(x, y)}{m^2} + g_0(x, y) + m^2 g_2(x, y) + \dots, \quad (5.081)$$

где

$$g_{-2}(x, y) = \frac{1}{4} \left[\frac{3y}{b} - \frac{y^3}{b^3} \right]. \quad (5.082)$$

Тогда мы можем переписать выражение (5.079) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{W}{2\pi c} g_{-2}(x, y) \int_0^\infty \frac{1 - \cos ma}{m^2} \, dm + \\ & + \frac{W}{2\pi c} \int_0^\infty (1 - \cos ma) \left[\frac{\varphi_1(m, y) \cos mx}{m^2 (2mb - \text{sh } 2mb)} - \frac{g_{-2}(x - y)}{m^2} \right] \, dm. \end{aligned} \quad (5.083)$$

Множитель при $\cos ma$ во втором интеграле удовлетворяет теперь указанным выше условиям непрерывности, так что можно отбросить в этом интеграле $\cos ma$, при a очень большом.

Первый интеграл хорошо известен; он легко вычисляется при помощи интегрирования по a равенства

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ma}{m} dm = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0),$$

при нижнем пределе $a = 0$, откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ma}{m^2} dm = \frac{\pi a}{2}.$$

Далее отсюда, при большом a

$$\chi = \frac{Wa}{4c} g_{-2}(x, y) + \frac{W}{2\pi c} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varphi_1(m, y) \cos mx}{m^2(2mb - \text{sh} 2mb)} - \frac{g_{-2}(x, y)}{m^2} \right] dm. \quad (5.084)$$

Из (5.082), получаем для первой части выражение

$$\frac{Wa}{16c} \left[\frac{3y}{b} - \frac{y^3}{b^3} \right].$$

Уравнения (5.025), (5.028) показывают, что это выражение соответствует решению Бернулли — Эйлера при изгибающем моменте величиной $\frac{Wa}{2}$, который равен изгибающему моменту в сечении $x = 0$ от приложенных к балке нагрузок.

Остальная часть функции χ выражает следовательно деформацию, которую надо добавить к деформации типа Бернулли — Эйлера, соответствующей изгибающему моменту по середине пролета, чтобы получить полную деформацию. Таким образом эта часть функции χ представляет собой *местные напряжения* от силы, приложенной в середине балки.

§ 5.09. *Бесконечно длинная прямая балка под действием двух равных прямо противоположных сил, приложенных в соответствующих точках верхней и нижней граней, перпендикулярно к ним.*

Если мы возьмем решение для χ четное по отношению к y , представленное формулой (5.021), и поставим условие, что χy будет тождественно равно нулю на гранях $y = \pm b$, то получим так же, как и в § 5.02, типичную функцию напряжений

$$\chi = \varphi_2(m, y) \cos mx, \quad (5.091)$$

где

$$\varphi_2(m, y) = mb \text{ ch } mb \text{ ch } my - my \text{ sh } mb \text{ sh } my + \text{sh } mb \text{ ch } my. \quad (5.092)$$

Переходя к интегральной форме функции напряжений, получим:

$$\chi = \int_0^{\infty} \varphi_2(m, y) f(m) \cos mx dm, \quad (5.093)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{y} &= - \int_0^{\infty} m^2 \varphi_2(m, y) f(m) \cos mx dm, \\ \int_0^x \overline{(y)}_b dx &= - \int_0^{\infty} m \varphi_2(m, b) f(m) \sin mx dm. \end{aligned} \quad (5.094)$$

Благодаря тому, что χ будет функция четная по отношению к y , это решение соответствует случаю пластинки высотой $2b$, деформированной нормальными

усилиями, приложенными к ее граням симметрично относительно продольной оси.

Если эти силы сводятся к двум равным и прямо противоположным силам W в точках C и D (фиг. 5.09), тогда, как и раньше,

$$\int_0^x (\ddot{y}y)_b dx = -\frac{W}{4c}, \text{ если } x > 0, \text{ и } +\frac{W}{4c}, \text{ если } x < 0,$$

так что можно написать

$$\int_0^x (\ddot{y}y)_b dx = -\frac{W}{2\pi c} \int_0^\infty \frac{\sin mx}{m} dm; \tag{5.095}$$

сравнивая это выражение с (5.094), получаем

$$f(m) = \frac{W}{\pi c} \frac{1}{m^2(2mb + \text{sh } 2mb)}$$

учитывая, что

$$\varphi_2(m, b) = \frac{1}{2} (2mb + \text{sh } 2mb).$$

Отсюда получаем

$$\chi = \frac{W}{\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{mb \text{ch } mb \text{ ch } my - my \text{ sh } my \text{ sh } mb + \text{sh } mb \text{ ch } my}{2mb + \text{sh } 2mb} \right] \times \frac{\cos mx}{m^2} dm. \tag{5.096}$$

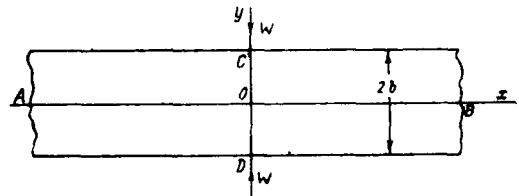
Этот интеграл для χ , однако, не будет сходящимся при нижнем пределе, так как разложение его по возрастающим степеням m начинается с члена, содержащего $\frac{1}{m^2}$. Если однако мы вычтем из подинтегральной функции член $\frac{1}{2m^2}$, что, понятно, не отразится на производных от χ по x и по y , то новый интеграл для χ будет сходящимся, а условия на контуре не изменятся. В таком случае, для нашей функции напряжений мы имеем выражение:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{W}{\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{mb \text{ch } mb \text{ ch } my - my \text{ sh } my \text{ sh } mb + \text{sh } mb \text{ ch } my}{2mb + \text{sh } 2mb} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\cos mx}{m^2} - \frac{1}{2m^2} \right] dm. \end{aligned} \tag{5.097}$$

§ 5.10. Передача сосредоточенных нагрузок через упругую прокладку.

Решенная в предыдущем параграфе задача имеет следующее важное применение. Так как χ четная функция по отношению к y , то, $\chi y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ есть нечетная, и поэтому обратится в нуль при $y = 0$. Далее, симметрия системы напряжений показывает, что и перемещения также симметричны относительно линии $y = 0$, следовательно перемещение V равно нулю в точках продольной оси.

Наша последняя проблема идентична таким образом с двухмерной задачей определения распределения напряжений в упругой прокладке толщиной b , которая все время соприкасается с жесткой плоскостью AB (фиг. 5.09) и на которую в C действует сосредоточенный груз W .



Фиг. 5.09.

Большой интерес представляет собой распределение средних нормальных давлений по жесткой плоскости. Это распределение выражается формулой:

$$(\ddot{y}y)_0 = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{W}{\pi c} \int_0^{\infty} \frac{mb \operatorname{ch} mb + \operatorname{sh} mb}{2mb + \operatorname{sh} 2mb} \cos mx \, dm.$$

Обозначим $mb = u$, $x = b\xi$; тогда

$$(\ddot{y}y)_0 = -\frac{W}{\pi bc} \zeta(\xi), \quad (5.101)$$

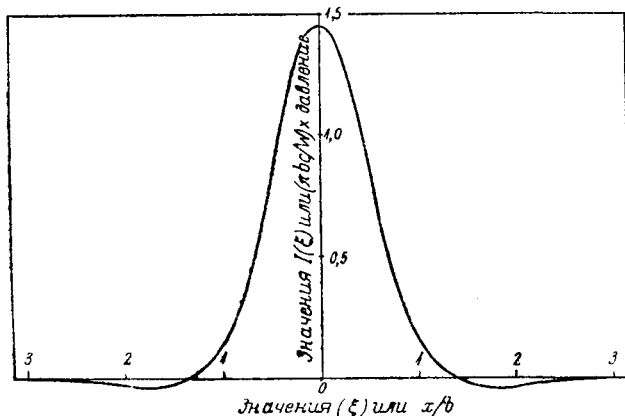
где

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u}{2u + \operatorname{sh} 2u} \cos u \, du. \quad (5.102)$$

Значения $I(\xi)$ даны в следующей таблице:

ξ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$I(\xi)$	1,4444	0,7412	0,1125	0,0300	0,0252	0,0036.

На фиг. 5.10 приведен график для $I(\xi)$, а, следовательно (в известном масштабе) и график распределения нормальных давлений по жесткой плоскости.



Фиг. 5.10.

При значении ξ , равном приблизительно 1,35, давление обращается в нуль и заменяется *растяжением*. Этот замечательный результат показывает, что упругая балка, находящаяся под действием сосредоточенной нагрузки, распределенной по линии поперек верхней поверхности, не может соприкоснуться целиком всем своим основанием с жесткой плоскостью, на которой она покоится, если ее длина в 2,7 раза превышает высоту. За этим пределом балка приподнимается с плоскости.

Конечно, в действительности, в случае балки ограниченных размеров настоящее решение не будет в числовом отношении точным, оно дает только указания на размеры той площади, которая обычно сохраняет соприкосновение с плоскостью.

Кроме того, даже и в том случае, когда балка безгранична, отсутствие необходимых растяжений, естественно, изменит решение; но фиг. 5.10 показывает, что эти растяжения малы, и потому это нарушение не может иметь серьезного значения, и положительная часть кривой будет все-таки достаточно точно изображать распределение напряжений по плоскости основания.

Максимальное давление непосредственно под грузом будет равно $0,920 \frac{W}{2bc}$, т. е. меньше давления от груза W , равномерно распределенного по половине площади вертикального поперечного сечения балки.

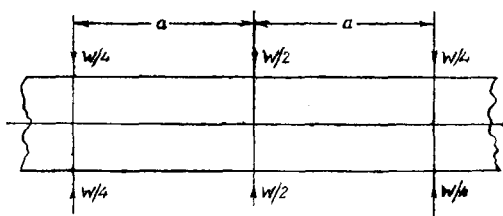
Связь этих результатов с напряжениями в балке, находящейся под действием сосредоточенной силы, приложенной к ее верхней поверхности, и опирающейся на жесткое основание, рассматривалась в главе IV §§ 4.23, 4.24.

§ 5.11. Длинная балка, опертая по концам и нагруженная в середине пролета.

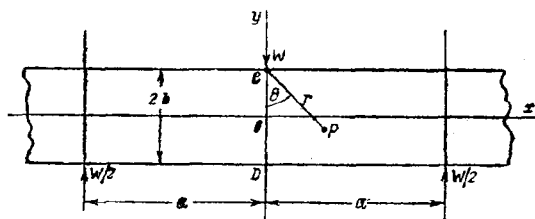
При рассмотрении длинной балки, находящейся под влиянием системы симметричных сил, как показано на фиг. 5.111, получается „четный“ тип решения, вполне соответствующий „нечетному“ типу фиг. 5.07. Точно так же как в § 5.07, в этом случае можно показать, что

$$\int_0^{\infty} (\bar{y}y)_b dx = -\frac{W}{8\pi c} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin mx + \sin m(x+a) + \sin m(x-a)}{m} dm$$

$$= -\frac{W}{4\pi c} \int_0^{\infty} \frac{\sin mx (1 + \cos ma)}{m} dm.$$



Фиг. 5.111.



Фиг. 5.112.

Отсюда

$$f(m) = \frac{W}{2\pi c} \frac{(1 + \cos ma)}{(2mb + \text{sh } 2mb)} \left(\frac{1}{m^2} \right); \tag{5.111}$$

и введя, как и раньше, в подынтегральную функцию постоянный член с целью превращения интеграла для χ в сходящийся, получаем

$$\chi = \frac{W}{2\pi c} \int_0^{\infty} \left(\frac{\varphi_2(m, y) (1 + \cos ma) \cos mx}{m^2 (2mb + \text{sh } 2mb)} - \frac{1}{m^2} \right) dm. \tag{5.112}$$

Если мы теперь наложим это решение на решение § 5.07, то получим решение для опертой на двух концах балки с пролетом $2a$, в середине которой приложен груз W , как показано на фиг. 5.112.

Суммарная функция напряжений принимает следующий вид:

$$\chi = \frac{W}{2\pi c} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{\varphi_1(m, y) (1 - \cos ma)}{2mb - \text{sh } 2mb} + \frac{\varphi_2(m, y) (1 + \cos ma)}{2mb + \text{sh } 2mb} \right] \cos mx - 1 \right\} \frac{dm}{m^2}. \tag{5.113}$$

Выражение это упростится еще больше, если мы раздвинем опоры на очень большое расстояние, как и в § 5.08. Тогда мы определим местную деформацию, вызванную грузом W , приложенным нормально к одному краю балки. В § 5.08 было уже указано, как поступать в подобных случаях с членом, заключающим в

себе φ_1 в подынтегральной функции (5.113). Что касается остальных членов, то их переписываем в следующем виде:

$$\frac{\varphi_2(m, y) (1 + \cos ma) (\cos mx - 1)}{m^2 (2mb + \operatorname{sh} 2mb)} + \left(\frac{\varphi_2(m, y)}{m^2 (2mb + \operatorname{sh} 2mb)} - \frac{1}{2m^2} \right) (1 + \cos ma) - \frac{1 - \cos ma}{2m^2}. \quad (5.114)$$

Оказывается, что множители при $1 + \cos ma$ в (5.114) остаются конечными и непрерывными, когда m приближается к нулю; поэтому интеграл будет сходящимся. Интеграл от последнего слагаемого может быть вычислен, как в § 5.08, и даст в функции χ постоянный член $-\frac{Wa}{8c}$, который может быть отброшен.

Тогда для функции напряжений, определяющей местные напряжения, получим следующее выражение:

$$\chi = \frac{W}{2\pi c} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\varphi_1(m, y)}{2mb - \operatorname{sh} 2mb} + \frac{\varphi_2(m, y)}{2mb + \operatorname{sh} 2mb} \right) \cos mx - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{y}{b} + \frac{y^3}{4b^3} \right\} \frac{dm}{m^2}. \quad (5.115)$$

К этому выражению должна быть прибавлена функция напряжений для постоянного изгибающего момента, и их сумма даст тогда полную функцию напряжений.

§ 5.12. Разложение в окрестности точки приложения силы.

Несмотря на то, что интегралы (5.113) и (5.115) дают полное решение разбираемой задачи, они не позволяют нам получить уравнения для теоретических изоклинических и изохроматических линий. Эти линии могут быть построены только лишь при помощи вычисления значений $x\dot{x} - y\dot{y}$ и $x\dot{y}$ для большого количества точек, что потребовало бы составления целых таблиц, заключающих в себе значения этих интегралов, что весьма затруднительно по объему работы.

Однако легко могут быть получены разложения этих интегралов по возрастающим степеням расстояния r от точки S , где приложена сосредоточенная сила; эти формулы легче поддаются интерпретации.

Если положить $y = b - y'$, то легко проверить, что φ_1 и φ_2 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(m, y) = & (1 + my') e^{-my'} (mb - \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} mb) + \\ & + (\operatorname{sh} my' - my' \operatorname{ch} my') (mb + \operatorname{ch} mb e^{-mb}) + \\ & + m^2 by' \operatorname{sh} my'. \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(m, y) = & (1 + my') e^{-my} (mb + \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} mb) + \\ & + (\operatorname{sh} my' - my' \operatorname{ch} my') (mb + \operatorname{sh} mb e^{-mb}) + \\ & + m^2 by' \operatorname{sh} my'. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Подставляя эти величины в (5.115) и полагая, как раньше, $mb = u$, получим следующую формулу для χ :

$$\chi = \frac{W}{2\pi c} \int_0^\infty \left[e^{-my'} (1 + my') \cos mx - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{y}{b} + \frac{y^3}{4b^3} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4u^2 + 2u + \operatorname{sh} 2u \cdot e^{-2u}}{4u^2 - \operatorname{sh}^2 2u} (\operatorname{sh} my' - my' \operatorname{ch} my') \cos mx + \\
 & + \left. \frac{m^2 by' \operatorname{sh} my' \cos mx \cdot 4u}{4u^2 - \operatorname{sh}^2 2u} \right] \frac{dm}{m^2}. \tag{5.123}
 \end{aligned}$$

Теперь, если $x = r \sin \theta$, $y' = r \cos \theta$, так что r, θ являются полярными координатами точки P балки (фиг. 5.112), отнесенными к точке C , как началу, и к DC , как начальному радиусу, то получим:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch} my' \cos mx &= \text{вещ. части } \operatorname{ch} m(y' + ix) = \\
 &= 1 + \frac{m^2}{2!} r^2 \cos 2\theta + \frac{m^4}{4!} r^4 \cos 4\theta + \dots \\
 &+ \frac{m^{2n}}{(2n)!} r^{2n} \cos 2n\theta + \dots \tag{5.124}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sh} my' \cos mx &= \text{вещ. части } \operatorname{sh} m(y' + ix) \\
 &= mr \cos \theta + \frac{m^3}{3!} r^3 \cos 3\theta + \dots \\
 &+ \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} r^{2n+1} \cos \overline{2n+1} + \dots \tag{5.125}
 \end{aligned}$$

Подставляя эти ряды в (5.123), находим

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{Wb}{2\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{1}{u^2} \left\{ e^{-\frac{uy'}{b}} \left(1 + \frac{uy'}{b} \right) \cos \frac{ux}{b} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{y'}{b} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y'}{b} \right)^3 \right\} - \right. \\
 &- \frac{4u^2 + 2u + \operatorname{sh} 2u \cdot e^{-2u}}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} \sum_{n=0}^\infty u^{2n+1} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n+3} \left(\frac{\cos \overline{2n+3\theta}}{(2n+3)!} - \frac{\cos \theta \cos \overline{2n+2\theta}}{(2n+2)!} \right) - \\
 &\left. - \frac{4u}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} \left(\frac{y'}{b} \right) \sum_{n=0}^\infty \times \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n+1} \cos \overline{2n+1\theta} \right] du. \tag{5.126}
 \end{aligned}$$

Теперь

$$\int_0^\infty \frac{4u^{2n+2}}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} du$$

будет сходящимся интегралом, так как подинтегральная функция является конечной на нижнем пределе при условии, что $n \geq 1$. Если $n=0$, то так как разложение $4u^2/(\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2)$ по возрастающим степеням u начинается с члена $\frac{3}{4}u^2$, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{4u^2}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} du$$

не будет сходящимся, зато этим свойством будет обладать интеграл

$$\int_0^\infty \left(\frac{4u^2}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} - \frac{3}{4u^2} \right) du.$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{4u^2}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} - \frac{3}{4u^2} \right) du = 4H_0 \\ & \int_0^{\infty} \frac{4u^{2n+2}}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} du = 4H_{2n} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.1271)$$

Обозначим подобным же образом (сходящиеся) интегралы

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{4u^2 + 2u + \operatorname{sh} 2u \cdot e^{-2u}}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} \cdot u - \frac{3}{4u^2} du = 4H_1 \\ & \int_0^{\infty} \frac{4u^2 + 2u + \operatorname{sh} 2u \cdot e^{-2u}}{\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2} \cdot u^{2n+1} du = 4H_{2n+1} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.1272)$$

и тогда, после разложения интеграла в (5.126) на ряд сходящихся интегралов, мы получаем:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{4Wy'}{2\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n (-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{n+1} \cos(n+1)\theta - \\ & - \frac{4Wb}{2\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+3)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n+3} \cos(2n+3)\theta + \\ & + \frac{Wb}{2\pi c} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{u^2} \left\{ e^{-\frac{uy'}{b}} \left(1 + \frac{uy'}{b} \right) \cos \frac{ux}{b} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{y'}{b} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y'}{b} \right)^3 \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4u^2} \left(\frac{r}{b} \right)^3 \left\{ \frac{\cos 3\theta}{6} - \frac{\cos \theta \cos 2\theta}{2} \right\} - \frac{3}{4u^2} \frac{y'}{b} \left(\frac{r}{b} \cos \theta \right) \right] du. \end{aligned}$$

Далее легко находим, что

$$\left(\frac{r}{b} \right)^3 \left(\frac{\cos 3\theta}{6} - \frac{\cos \theta \cos 2\theta}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{y'}{b} \right)^3,$$

и, учитывая равенство $\frac{r}{b} \cos \theta = \frac{y'}{b}$, получаем для последнего члена в χ выражение

$$\frac{Wb}{2\pi c} \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2} \left\{ e^{-\frac{uy'}{b}} \left(1 + \frac{uy'}{b} \right) \cos \frac{ux}{b} - 1 \right\} du. \quad (5.128)$$

Обозначим

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2} \left\{ e^{-\frac{uy'}{b}} \left(1 + \frac{uy'}{b} \right) \cos \frac{ux}{b} - 1 \right\} du$$

через $I(x, y')$.

Тогда

$$\frac{\partial I}{\partial y'} = -\frac{y'}{b^2} \int_0^\infty e^{-\frac{uy'}{b}} \cos \frac{ux}{b} du.$$

Последний интеграл хорошо известен и его величина равна (by'/r^2) . Таким образом

$$\frac{\partial I}{\partial y'} = -\frac{(y')^2}{br^2} = \frac{1}{b} \left(\frac{x^2}{x^2 + y'^2} - 1 \right).$$

Интегрируя по y' , получаем

$$I = -\frac{1}{b} (x\theta + y') + F(x),$$

где $F(x)$ — произвольная функция; θ равно $\text{arctg} \left(\frac{x}{y'} \right)$ и имеет прежнее значение.

Положим $y' = 0$; тогда, если x — величина положительная, то $\theta = +\pi/2$. Но

$$I(x, 0) = \int_0^\infty \left(\cos \frac{ux}{b} - 1 \right) \frac{du}{u^2} = -\frac{\pi x}{2b},$$

если $x > 0$, на основании результатов § 5.08.

Отсюда

$$-\frac{\pi x}{2b} = -\frac{1}{b} \left(\frac{x\pi}{2} \right) + F(x),$$

и $F(x) = 0$; тот же результат получается, если $x < 0$. Имеем таким образом

$$I = -\frac{1}{b} (x\theta + y'),$$

а так как из функции напряжений всегда можно выбросить линейные функции от y' , то в конце концов получим

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{Wx\theta}{2\pi c_3} + \frac{2Wy'}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{n+1} \cos(n+1)\theta - \\ & - \frac{2Wb}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+3)!} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n+3} \cos(2n+3)\theta. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Легко проверить [см. формулу (4.171)], что первый член представляет собою функцию напряжений, соответствующую нагрузке W , когда нижняя грань балки удалена на бесконечность.

Остальные члены, следовательно вносят поправку, являющуюся следствием того факта, что высота балки конечна. Значения нескольких первых коэффициентов оказываются следующими:

$$H_0 = -0,2417,$$

$$H_1 = -0,0598,$$

$$H_2 = +0,2291,$$

$$H_3 = +0,3370.$$

§ 5.13. Опыты Вильсона.

Первое оптическое исследование влияния местной сосредоточенной силы, приложенной к грани прямой балки указанным способом, произведено Вильсоном.¹

Он измерил относительное запаздывание (разность хода) в точках, расположенных по вертикали под нагрузкой, приложенной к стеклянной плите, расположенной на плоскости (фиг. 5.131).

При жестком и гладком основании случай этот будет повторением задачи § 5.10. На самом же деле ни одно из этих условий не соблюдалось в действительности, а решение § 5.10 не было известно в то время.

Если однако высота b плиты достаточно велика, то решение § 4.17 окажется подходящим для того специального случая, когда сила F , отнесенная к единице толщины, приложена нормально к грани балки.

Принимая направление оси Ox по горизонтали, а оси Oy вертикально вниз, получим на основании решения § 4.17, переименовав надлежащим образом обозначения, для напряжений в точках, лежащих на оси Oy , величину $2F/\pi y$.

Теоретические изохроматические линии будут кругами (фиг. 5.131), касающимися верхней грани балки в точке приложения груза.

Карус Вильсон проверил наличие круговой формы изохроматических линий для этого случая. На основании полученных данных, однако, он вывел заключение, что напряжение было прямо пропорциональным не $\frac{1}{y}$, а скорее $\frac{1}{y+e}$, где e являлось сравнительно небольшой постоянной поправочной величиной. Это расхождение повидимому было вызвано частично тем, что высота балки конечна, а частично является следствием того факта, что груз, передававшийся через цилиндрический ролик, неизбежно распределялся по некоторой площади соприкасания, так что давление имело конечную величину даже при y равном нулю.

Затем он приступил к изучению того же путем стеклянной балки, опертой на концах и нагруженной в середине пролета. В этом случае условия передачи нагрузки были более точно известны. Сравнивая опытные данные с теорией, он предположил, что местное влияние груза было таким же, как и для балки, лежащей на плоском основании, далее он наложил на это решение обычное распределение напряжений для изгиба Эйлера — Бернулли, вызванное изгибающим моментом, приложенным в сечении непосредственно под грузом.

При этих предположениях, если W является величиной полной нагрузки, то разность средних главных нормальных напряжений на глубине y представляется следующим выражением:

Затем он приступил к изучению того же путем стеклянной балки, опертой на концах и нагруженной в середине пролета. В этом случае условия передачи нагрузки были более точно известны. Сравнивая опытные данные с теорией, он предположил, что местное влияние груза было таким же, как и для балки, лежащей на плоском основании, далее он наложил на это решение обычное распределение напряжений для изгиба Эйлера — Бернулли, вызванное изгибающим моментом, приложенным в сечении непосредственно под грузом.

При этих предположениях, если W является величиной полной нагрузки, то разность средних главных нормальных напряжений на глубине y представляется следующим выражением:

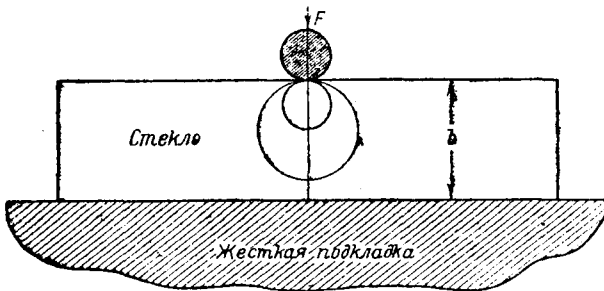
$$\bar{x}x - \bar{y}y = \frac{W}{\pi c (y + e)} - \frac{3}{8} \frac{W a}{b^3 c} (b - y), \quad (5.131)$$

где $2a$ пролет балки, а $2b$ — высота ее.

Особенные точки появляются там, где

$$(b - y)(y + e) = \frac{8b^3}{3\pi a}, \quad (5.132)$$

¹ Carus Wilson, On the Influence of Surface Loading on the Flexure of Beams, Phil. Mag., 32, 1891, 481 — 503.



Фиг. 5.131.

Когда $2a$ велико, то ясно, что уравнение (5.132) имеет два вещественных корня, приближенно равных $y = -e + 8b^2/3\pi a$ и $y = b - 8b^2/3\pi a$. Мы имеем таким образом две изолированных особенных точки A, B (фиг. 5.132), лежащих на двух темных (но не совсем черных) линиях a и a' с минимумом разности главных напряжений; линия a' переходит на некотором расстоянии от груза в нейтральную линию балки.

В области A, B не может быть никаких других особенных точек, так как по всем сечениям, проведенным не под грузом, действуют вертикальные касательные напряжения; для особенной же точки надо, чтобы $(xx - yy)^2 + 4xy^2$ было равно нулю, этого никогда не может быть, пока xy и $xx - yy$ не будут порознь равны нулю.

С уменьшением пролета $2a$ точки A и B сдвигаются по направлению одна к другой и соединяются в C , если уравнение (5.132) имеет равные корни; это бывает, когда

$$a = 32b^3/3\pi (b + e)^2. \quad (5.133)$$

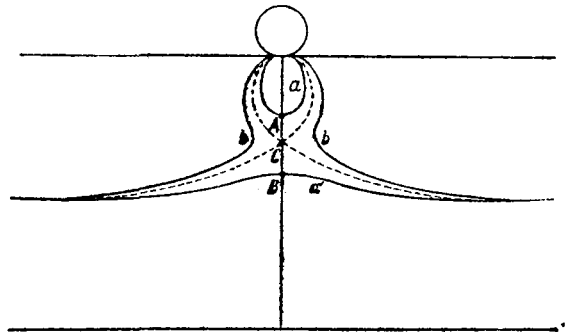
В этот момент петли a, a' темной кривой (которая кстати не изохрома) соединяются и образуют одну кривую, изображенную на фиг. 5.132 пунктиром с узлом в C . Затем черная кривая снова разделяется на две ветви, на правую и на левую, b, b' .

Вильсон подтвердил, что явления происходили в общем в таком именно духе. Но он,

как будто, не отметил точного соотношения между пролетом и высотой балки, при которых имело место совпадение темных линий. По его данным получается, однако, что такое совпадение наблюдается при отношении в пределах между 4,21 и 4,63.

Формула (5.133) показывает, что при $e = 0$ отношение, о котором идет речь, будет $\frac{32}{3\pi}$, т. е. 3,39. Так как e положительно, то критическое отношение будет еще меньшим.

Здесь имеется некоторое расхождение с опытом, которое Вильсон объясняет тем, что „местное“ напряжение, вызванное грузом, будет не $W/\pi c (y + e)$, а $kW/\pi c (y + e)$, где k — постоянная величина, несколько большая единицы.



Фиг. 5.132.

§ 5.14. Теория Стокса, объясняющая опыты Вильсона.

Гораздо более удовлетворительное объяснение этому расхождению дает Г. Стокс в письме, напечатанном в виде приложения к статье Карус Вильсона.

Стокс следующим образом получил приближенное решение этой задачи. Он сохранил правильную теоретическую величину для напряжений сжатия в точках по оси Oy в балке с бесконечной высотой, т. е. $W/\pi c y$, но вычел из этой величины линейную функцию, подобранную так, что напряжение обращается в нуль на глубине $2b$.

Это дало

$$yy = \frac{W}{\pi c} \left(\frac{y}{4b^2} - \frac{1}{y} \right). \quad (5.141)$$

В добавление к этому Стокс указывает, что в точках оси Oy должно существовать еще и нормальное напряжение xx , которое, по его мнению, изменяется по линейному закону относительно y , так что $xx = A + By$.

Для определения постоянных A и B Стокс рассматривает равновесие половины балки $ACDE$ (фиг. 5.14).

Решение для балки бесконечной высоты дает (как видно из текста §§ 2.09 и 4.17) для значения среднего напряжения в точке P , по горизонтальной площадке ED величину $4Wb^2/\pi cr^3$; это напряжение γy является сжимающим и направленным по CP .

Для того чтобы освободить плоскость ED от этих напряжений, мы должны наложить на нее „веер“ растяжений (все они проходят через точку c) той же величины.

Этот „веер“ растяжений вместе с реакциями опор представляет собою ту совокупность поверхностных усилий, которые следует приложить к ED , чтобы внести поправку, вызванную тем, что высота балки конечна и что балка определенным образом опирается на обоих концах.

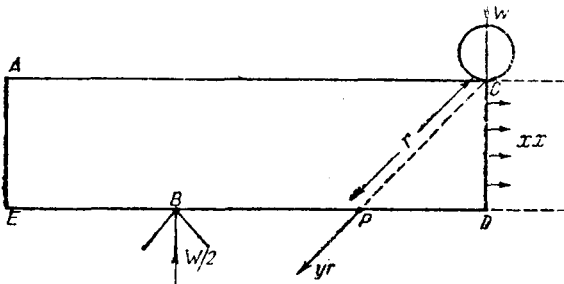
Влиянием грани AE , находящейся на конечном расстоянии, пренебрегаем; эта грань может следовательно считаться удаленной в бесконечность.

Наложенная система напряжений должна находиться в равновесии с остальными силами, приложенными к половине балки, следовательно и с горизонтальными растягивающими напряжениями

xx , действующими по плоскости CD .

Эти напряжения должны статически уравниваться „полувеером“ косых растяжений по плоскости EBD и реакцией опоры $\frac{W}{2}$ в точке B .

Проектируя эти силы на направление BD , получаем



Фиг. 5.14.

$$\int_0^{2b} (A + By) dy = \int_0^{\infty} \frac{4Wb^2x}{\pi cr^4} dx,$$

где

$$PD = x$$

$$r = CP = \sqrt{4b^2 + x^2}.$$

Произведя интегрирование, находим

$$2bA + 2b^2B = W/2\pi c,$$

или

$$A + Bb = W/4\pi bc. \quad (5.142)$$

Составляя сумму моментов относительно C , получаем

$$\int_0^{2b} (A + By) y dy = \frac{Wa}{4c},$$

откуда

$$A + \frac{4}{3} Bb = Wa/8b^2c. \quad (5.143)$$

Решив уравнения (5.142) и (5.143) относительно A и B , мы получим

$$A = \frac{W}{\pi bc} \left(1 - \frac{3\pi a}{8} \frac{a}{b} \right),$$

$$B = -\frac{3W}{4\pi b^2 c} \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{a}{b} \right).$$

Особенные точки будут там, где

$$\overline{xx} = \overline{yy}$$

или

$$A + By = \frac{W}{\pi c} \left(\frac{y}{4b^2} - \frac{1}{y} \right),$$

т. е.

$$1 - \frac{3\pi a}{8b} - \frac{3y}{4b} \left(1 - \frac{\pi a}{2b} \right) = \frac{y}{4b} - \frac{b}{y},$$

или

$$\left(1 - \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{3\pi a}{8b} \right) = -\frac{b}{y},$$

и

$$\left(1 - \frac{y}{b} \right) \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{3}{8} \frac{a\pi}{b} - 1}. \tag{5.144}$$

Корни уравнения (5.144) будут равны между собой, если

$$\frac{3}{8} \frac{a\pi}{b} - 1 = 4,$$

т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{40}{3\pi} = 4,24;$$

результат этот вполне совпадает с опытами Каруса Вильсона.

Следует заметить, что по теории Стокса особенные точки совпадают при $y = \frac{1}{2}b$, т. е. на четверти высоты балки.

Далее неправильность теории Вильсона заключается в предположении о достаточности наложения на напряжения при чистом изгибе системы напряжений, возникающих в полуплоскости.

§ 5.15. Изоклинические линии при действии сосредоточенной силы.

Оптическое исследование напряжений в балке в окрестности точки приложения сосредоточенной силы было выполнено Файлоном¹ и опубликовано в статье, упоминавшейся в § 5.06.

К концам стеклянной балки были прикреплены добавочные (выступающие) деревянные стержни, к которым можно было подвесить грузы, или наоборот, при помощи системы рычагов, передать силы, направленные снизу вверх. Таким способом можно было к напряжениям от сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета, добавлять напряжения от действия положительного или отрицательного изгибающего момента, изменяющегося в широких пределах.

¹ *Filon*, The Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by means of Polarised Light, *Phil. Mag.*, ser. VI, 23, 1912, 1—25.

Были получены такие соотношения величин изгибающего момента и сосредоточенной силы, которые не осуществлялись Карус Вильсоном и которые представляют большой интерес в отношении наблюдаемых оптических явлений.

Результаты опытов были сравнены с величинами средних напряжений, полученных из функции напряжений, представленной формулой (5.129).

Применяя принятые в (5.129) обозначения $y' = r \cos \theta$, $x = r \sin \theta$ и используя формулы для частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (r^n \cos n\theta) &= -nr^{n-1} \sin(n-1)\theta = -\frac{\partial}{\partial y'} (r^n \sin n\theta), \\ \frac{\partial}{\partial x} (r^n \sin n\theta) &= nr^{n-1} \cos(n-1)\theta = \frac{\partial}{\partial y'} (r^n \cos n\theta), \end{aligned} \right\} \quad (5.151)$$

получаем после сокращений

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{xx} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y'^2} = -\frac{W}{\pi c} \frac{x^2 y'}{r^4} + \frac{2W}{\pi c b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+1} H_n}{n!} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n\theta - \\ &- \frac{2W}{\pi c b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \cos 2n\theta + \frac{2W y'}{\pi b^2 c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n H_{n+1}}{n!} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n\theta, \end{aligned} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{yy} &= -\frac{W y'^3}{\pi c r^4} - \frac{2W y'}{\pi c b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n H_{n+1}}{n!} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n\theta + \\ &+ \frac{2W}{\pi c b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n+1} \cos(2n+1)\theta, \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{xy} &= \frac{W x y'^2}{\pi c r^4} + \frac{2W}{\pi c b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \sin 2n\theta - \\ &- \frac{2W y'}{\pi c b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n H_{n+1}}{n!} \left(\frac{r}{b}\right)^n \sin n\theta. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Эти формулы дают картину распределения напряжений под точкой приложения сосредоточенной силы при условии удаления изгибающего момента, возникающего под действием самой силы и реакций опор (если они достаточно удалены).

Если на эту систему наложить напряжения от постоянного изгибающего момента M_0 (считая его положительным при изгибе балки выпуклостью вниз), то мы получим для полных напряжений следующие приближенные формулы, считая, что отношение r/b достаточно мало для того, чтобы мы могли пренебречь членами в (5.152) — (5.154), содержащими его во второй и высших степенях:

$$\overset{\sim}{xx} = -\frac{W}{\pi c} \frac{x^2 y'}{r^4} - \frac{4W}{\pi c b} H_0 + \frac{4W y'}{\pi c b^2} H_1 + \frac{3M_0}{4b^3 c} (y' - b), \quad (5.1551)$$

$$\overset{\sim}{yy} = -\frac{W}{\pi c} \frac{y'^3}{r^4}, \quad (5.1552)$$

$$\overset{\sim}{xy} = \frac{W}{\pi c} \frac{x y'^2}{r^4}. \quad (5.1553)$$

В этих формулах

$$H_0 = -0,2417, \quad H_1 = -0,0578.$$

Кроме того $M_0 =$ изгибающему моменту, передающемуся через добавочные плечи $+\frac{Wa}{2}$, а следовательно заключает в себе изгибающий момент, вызванный самой сосредоточенной силой, приложенной по середине пролета. Для изоклинической линии с параметром φ имеем уравнение:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2xy}{xx - yy} = \frac{\cos \theta \sin 2\theta}{\cos \theta \cos 2\theta - \frac{ar}{b} + \frac{\beta r^2}{b^2} \cos \theta}, \quad (5.156)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 4H_0 + \frac{3}{4} \frac{M_0}{W} \frac{\pi}{b}, \\ \beta &= 4H_1 + \frac{3}{4} \frac{M_0}{W} \frac{\pi}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (5.157)$$

Так как при изменении угла φ на 90° изоклины остаются неизменными, то мы можем ограничиться изучением тех величин φ , которые лежат между 0 и 90° , так что $\sin 2\varphi$ будет всегда положительным.

§ 5.16. Построение изоклинических линий.

Правую часть уравнения для изоклин, данного формулой (5.156), удобнее выразить через переменные y' и θ , чем через r , θ .

Формула (5.156) может быть тогда написана в виде

$$\frac{(y')^2}{b^2} - \frac{\alpha y'}{\beta b} = \frac{\cos^2 \theta \sin 2(\theta - \varphi)}{\beta \sin 2\varphi}. \quad (5.161)$$

Обозначив через K величину $\frac{\cos^2 \theta \sin 2(\theta - \varphi)}{\beta \sin 2\varphi}$, видим, что, если

$$\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + K > 0,$$

то на радиусе-векторе, соответствующем направлению θ , находятся вещественные точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (5.161). Далее, если точка должна находиться внутри балки, то $\frac{y'}{b}$ должно быть положительным.

Если $K > 0$, то корни для $\frac{y'}{b}$ будут иметь противоположные знаки; таким образом внутри балки будет находиться только одна точка.

Если $K < 0$, то оба корня будут положительными и внутри балки будут находиться две или ни одной точки, в зависимости от того, будет ли $\frac{\alpha}{\beta}$ больше или меньше нуля.

Значение $K = 0$ соответствует прохождению одной ветви кривой через начало координат. Это имеет место при

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \varphi, \quad \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Области

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi\right), \quad \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$$

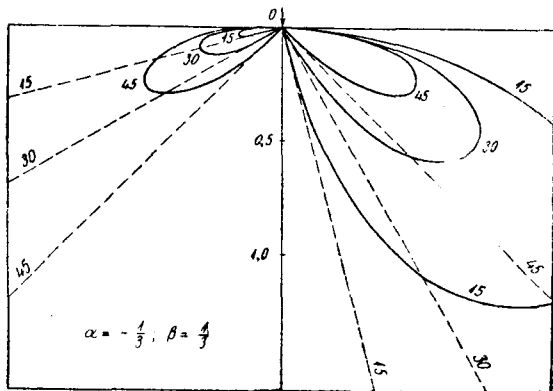
мы будем называть соответственно левым, центральным и правым секторами. Если

$\beta > 0$, то и $K > 0$ как в правом, так и в левом секторах; $K < 0$ в центральном секторе; результаты будут обратными, если $\beta < 0$. Таким образом получаем несколько случаев, указанных в нижеследующей таблице.

Количество точек, находящихся на радиусе-векторе внутри балки.

		Левая сторона	Центр	Правая сторона
I	$\alpha +$ $\beta +$	одна	две или ни одной в зависимости от того $K \geq -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}$	одна
II	$\alpha -$ $\beta +$	одна	ни одной	одна
III	$\alpha +$ $\beta -$	ни одной	одна	ни одной
IV	$\alpha -$ $\beta -$	две или ни одной в зависимости от того $K \geq -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}$	одна	две или ни одной в зависимости от того $K \geq -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}$

Два средних случая, где α и β имеют противоположные знаки, могут быть очень просто интерпретированы. В этих случаях ветвь кривой, находящаяся

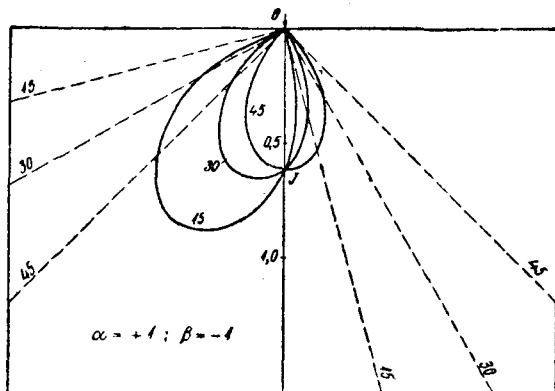


Фиг. 5.161.

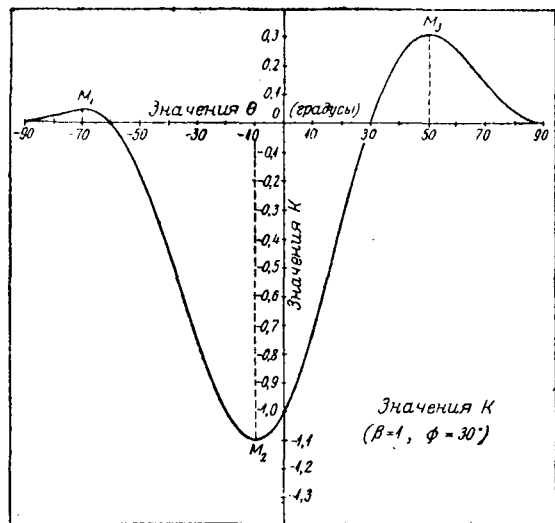
внутри балки в каждом из секторов за исключением того, где в таблице помечено „ни одной“, представляет собой простую петлю, начинающуюся от точки приложения силы и возвращающуюся туда же. Ряд изоклин этого типа показан на фиг. 5.161 и 5.162, при $\alpha = -\frac{1}{3}$,

$\beta = +\frac{1}{3}$ и при $\alpha = 1, \beta = -1$ соответственно. Более тщательного рассмотрения требуют те случаи, где α, β имеют одинаковые знаки. Прежде всего отметим, что, когда $K = 0, \frac{y'}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ является корнем,

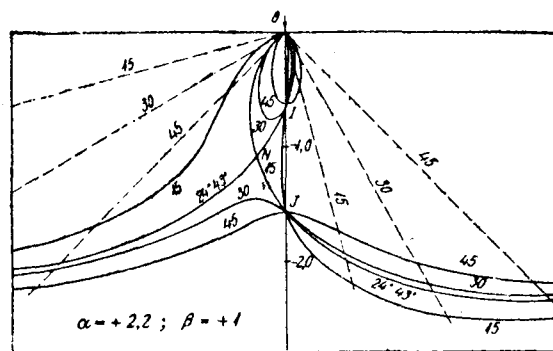
соответствующим точке, находящейся внутри балки. В соответствии с этим в случае I изоклиническая линия в наружных секторах состоит из единственной ветви, начинающейся и оканчивающейся при $\frac{y'}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$; то же самое относится и к центральному сектору в случае IV. Это иллюстрировано фиг. 5.164 (вычерчено для $\alpha = 2,2, \beta = 1$) и 5.165 (вычерчено для $\alpha = -1, \beta = -0,75$); наружные концы ветвей на фиг. 5.164 асимптотически приближаются к прямой $\frac{y'}{b} = 2,2$ и пересекают соответствующие пунктирные линии $\left(\theta = \varphi, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ на одинаковом



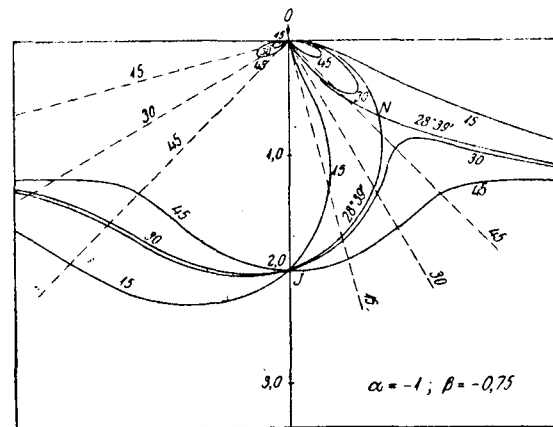
Фиг. 5.162.



Фиг. 5.163.



Фиг. 5.164.



Фиг. 5.165.

уровне. Подобным же образом на фиг. 5.165 изоклинические линии пересекают соответствующие пунктирные в точках на уровне

$$\frac{y'}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{3}.$$

Для того чтобы узнать, что происходит в секторах, обозначенных в таблице „две или ни одной“, мы должны рассмотреть изменение K .

После простых преобразований получаем

$$\frac{dK}{d\theta} = \frac{2\cos(3\theta - 2\varphi)\cos\theta}{\beta\sin 2\varphi},$$

так что максимум и минимум для K в промежутке $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ получается при

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\varphi}{3}, \quad \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6}, \quad \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}.$$

Второе, третье и четвертое решения дают

$$2\varphi = 3\theta - \frac{\pi}{2}, \quad 3\theta + \frac{\pi}{2}, \quad 3\theta + \frac{3\pi}{2},$$

так что в каждом из этих трех случаев $\operatorname{ctg} 2\varphi = -\operatorname{tg} 3\theta$ и соответствующее значение K получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\cos^2 \theta}{\beta} (\sin 2\theta \operatorname{ctg} 2\varphi - \cos 2\theta) \\ &= -\frac{\cos^2 \theta}{\beta} (\sin 2\theta \operatorname{tg} 3\theta + \cos 2\theta) \\ &= -\frac{\cos^3 \theta}{\beta \cos 3\theta} = \frac{1}{\beta(3 \sec^2 \theta - 4)}. \end{aligned}$$

При первом и пятом решениях получается $K = 0$.

Если $\beta > 0$, то при третьем решении получается (отрицательный) минимум; если $\beta < 0$, то при втором и четвертом решениях имеем также (отрицательные) минимумы. Фиг. 5.163 показывает закон изменения K для $\beta = 1$, $\varphi = 30^\circ$.

Случай I. В центральном секторе значения K заключаются между 0 и отрицательным минимумом:

$$\frac{1}{\left[\beta \left\{ 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \right\} \right]}.$$

Если теперь

$$\frac{\alpha^2}{4\beta^2} < \frac{1}{\beta \left\{ 4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right\}},$$

то мы переходим от двух точек, находящихся внутри балки, к одной при двух значениях θ , лежащих по обе стороны от $\theta = \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6}$. Это имеет место для изоклины с параметром 15° на фиг. 5.164, где внешние ветви поворачиваются по направлению к O , образуя вилку с пустой областью между двумя „зубьями“ вилки.

Если

$$\frac{\alpha^2}{4\beta^2} > \frac{1}{\beta \left\{ 4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right\}},$$

то на каждом из радиусов-векторов центрального сектора будут две находящиеся внутри балки точки; этот случай иллюстрируется изоклинами с параметрами 30° и 45° на фиг. 5.164, где внешние ветви каждой из этих изоклин соединяются, а в среднем секторе существует отдельная петля.

Переход от вилки к петле происходит тогда, когда

$$\frac{4\beta}{\alpha^2} = 4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Но $\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6}$ лежит между $\pm \frac{\pi}{6}$, так как $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\frac{4\beta}{\alpha^2}$ должно лежать между 0 и 1, или $\beta > 0$ и $\beta < \frac{\alpha^2}{4}$, если упомянутый переход возможен.

При $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$ изоклина с любым параметром представляет кривую типа „вилки“.

Случай IV. В левом секторе K лежит между 0 и (отрицательным) минимумом

$$\frac{1}{\beta \left\{ 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) - 4 \right\}}.$$

Здесь $\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{2}$ лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{6}$; таким образом отрицательный минимум, о котором идет речь, лежит между 0 и $-\infty$ в зависимости от значения φ . Значение φ , соответствующее переходу изоклины от „вилки“ к петле, нужно вычислять из выражения

$$\frac{1}{\beta \left\{ 4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right\}} = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}.$$

Для меньших значений φ в левом секторе имеются петля и ответвление, для больших значений — вилка.

В правом секторе точно так же всегда имеется величина параметра, соответствующая этому переходу, которая получается из выражения

$$\frac{1}{\beta \left\{ 4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right\}} = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}.$$

Для меньших значений φ получаем вилку, для больших — петлю и ответвление. Это видно из фиг. 5.165, где при $\varphi = 15^\circ$ в правом секторе получается вилка, а при $\varphi = 30^\circ$ и 45° получается петля и ответвление. Заметим, что изоклины с параметрами 60° и 75° симметричны относительно вертикали, проходящей через начало координат с изоклинами, имеющими параметры 30° и 15° ; изоклины с параметрами 60° и 75° на фигуре не нанесены, но из симметрии легко заключить, что при значениях φ , лежащих между 60° и 75° , в левом секторе появится вилка. Положения узлов для кривых, соответствующих переходу от вилки к петле, определяются очень просто. Они во всех случаях соответствуют

$$\frac{y'}{b} = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \cos^2 \theta = \frac{3}{4 \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right)};$$

на фиг. 5.164 и 5.165 они изображены точкой M .

Следует еще отметить, что при $\theta = 0$ уравнение (5.161) принимает вид:

$$\left(\frac{y'}{b} \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{y'}{b} \right) = -\frac{1}{\beta},$$

что приводит к значениям $\frac{y'}{b}$, независимым от φ . Полученные таким образом точки лежат, следовательно, на каждой из изоклин и значит являются особыми точками. Они будут действительными точками, если выполнено условие $\alpha^2 > 4\beta$, которое равносильно условию возможности перехода кривой от вилки к петле.

Из таблицы на стр. 388 сразу видно, что обе эти точки в случае, если они вещественны, будут находиться внутри балки. В случае II они отсутствуют. В случаях III и IV существует только одна точка J на фиг. 5.162 и 5.165.

§ 5.17. Анализ полученных результатов.

Мы теперь выясним характер изменения вида кривых в случае, когда M_0 меняется от $+\infty$ до $-\infty$, а W остается постоянным.

Рассмотрим сначала случай, разобранный Файлоном,¹ где H_0 и H_1 вычисляются теоретически путем разложения в ряд функции χ .

Так как

$$\alpha = -0,9668 + \zeta,$$

$$\beta = -0,2392 + \zeta,$$

где $\zeta = \frac{3}{4} \frac{M_0}{W} \frac{\pi}{b}$, то α, β вначале оказываются большими и положительными, причем

$\frac{\alpha}{\beta}$ почти = 1. При уменьшении ζ , α уменьшается по отношению к β до тех пор,

пока не получится равенства $\beta = \frac{\alpha^2}{4}$. Это будет, когда $\zeta = 5,596$. Между $\zeta = 0,9668$ и $\zeta = 0,2392$ $\alpha < 0$, $\beta > 0$, и мы имеем случай II. Если $\zeta < 0,2392$, то имеем случай IV.

Случая же III не бывает.

Поэтому вначале можно ожидать появления петель с ответвлением $\left(\beta < \frac{\alpha^2}{4}\right)$ в центральном секторе. Вилка далее переходит в двойную петлю во внешних секторах. При переходе β через нуль и дальнейшем его уменьшении снизу появляется ветвь изоклины, продвигающаяся кверху во всех секторах. Но эта ветвь не всегда переходит в ту или другую из петель внешних секторов, образуя при этом переходе узел. Объясняется это тем, что величина β/α^2 , которая определяется критическим (переходным) значением φ , не может принимать любые значения. Она уменьшается (отрицательно), возрастая по абсолютной величине до максимума $-1/2,91$, после чего снова возрастает до нуля, так что критические значения φ повторяются в обратном порядке.

Так как значение φ , при котором происходит переход для правого сектора, определяется из выражения

$$\sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right),$$

то следовательно φ не должно превышать величины φ_1 , определяемой из

$$\sec^2 \left(\frac{2\varphi_1}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{2,91} \right).$$

Из этого уравнения получаем, что $\varphi_1 = 17^\circ$ (приближенно).

¹ Filon, Phil. Mag., 1912, loc. cit.

Подобно этому находим, что для возможности перехода от петли к вилке в левом секторе φ должно быть больше φ_2 , для которого

$$\sec^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\varphi_2}{3} \right) = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{2,91} \right);$$

отсюда $\varphi_2 = 73^\circ$ (приближенно).

В соответствии с этим, если $17^\circ < \varphi < 73^\circ$, то при уменьшении β ($\beta < 0$) никаких точек перехода ожидать нельзя. Если же $\varphi < 17^\circ$ или $> 73^\circ$, то в соответствующем секторе будет сначала наблюдаться переход от петли к вилке, а затем обратно, от вилки к петле.

При опытах Файлона балка подвергалась исследованию при помощи полярископа, закрепленного в определенном положении; изгибающий же момент M_0 в каждом случае принимал последовательно целый ряд значений. Для параметра φ были выбраны величины $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 75° , в добавление к 0° и 90° , при которых получается вертикальная изоклина, чего и следовало ожидать, благодаря симметрии.

Были отмечены значения M_0 , при которых наблюдался первый переход от петли к вилке, и получены соответствующие значения α^2/β . Эти значения приведены в третьем столбце таблицы 5.171, озаглавленном „из опыта“.

Значения

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{4}{4 - 3 \sec^2 \left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)},$$

вычисленные на основании изложенной выше теории, приведены в четвертом столбце той же таблицы под названием „из теории“.

Таблица 5.171.

φ	$\frac{M_0}{W}$ (см)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из опыта)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из теории)
15°	6,43	6,79	6,64
30°	4,44	4,21	4,41
45°	4,26	3,98	4,00
60°	4,83	4,71	4,41
75°	6,64	7,06	6,64

Файлону не удалось наблюдать для $\varphi = 15^\circ$ или 75° вторичный переход от петли к вилке по той причине, что при малом β узел находился на таком далеком расстоянии r от начала координат, что принятая степень приближения оказалась совершенно недостаточной.

Ему удалось, однако, наблюдать третий переход от вилки к петле, причем наблюдение это дало следующие результаты:

Таблица 5.172.

φ	$\frac{M_0}{W}$ см	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из опыта)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из теории)
15°	— 2,04	— 4,55	— 3,60
75°	— 2,40	— 4,99	— 3,60

Совпадение опыта и теории для первого перехода оказалось удовлетворительным, для третьего недостаточным. Несомненно однако, что так как ряды сходятся недостаточно быстро, то нельзя пренебречь членами второго и высших порядков относительно r в тех точках, в которых наблюдался переход, а при этих условиях и следовало ожидать лишь качественного подтверждения теории.

§ 5.18. Сравнение с формулой Стокса.

Интересно однако исследовать, не дает ли формула Стокса лучшего совпадения с опытом.

Формула эта (считая, что введенные в нее поправки не меняются в зависимости от x в области среднего сечения балки и во всяком случае благодаря симметрии изменение этих поправок должно быть малым) приводит к следующим значениям для напряжений (y' этого параграфа есть y § 5.14):

$$\overline{xx} = -\frac{W}{\pi c} \frac{x^2 y'}{r^4} + \frac{W}{\pi bc} \left(1 - \frac{3\pi a}{8b}\right) - \frac{3Wy'}{4\pi b^2 c} \left(1 - \frac{\pi a}{2b}\right) + \frac{3M_1}{4b^3 c} (y' - b),$$

$$\overline{yy} = \frac{Wy'}{4\pi cb^2} - \frac{W}{\pi c} \frac{y'^3}{r^4},$$

$$\overline{xy} = \frac{W}{\pi c} \frac{xy'^2}{r^4},$$

причем M_1 — постоянный изгибающий момент, возникающий от одних только грузов, действующих на консоли, так что $M_0 = M_1 + \frac{Wa}{2}$.

Отсюда получим:

$$\overline{xx} = -\frac{W}{\pi c} \frac{x^2 y'}{r^4} + \frac{W}{\pi bc} - \frac{3Wy'}{4\pi b^2 c} + \frac{3M_0}{4b^3 c} (y' - b),$$

$$\overline{yy} = \frac{Wy'}{4\pi cb^2} - \frac{W}{\pi c} \frac{y'^3}{r^4},$$

$$\overline{xy} = \frac{W}{\pi c} \frac{xy'^2}{r^4}.$$

Итак, вместо разности $\overline{xx} - \overline{yy}$, на основании (5.1551) и (5.1552) имеющей вид

$$\frac{W}{\pi cr} \cos \theta \cos 2\theta - \frac{4W}{\pi bc} H_0 + \frac{4Wy'}{\pi b^2 c} H_1 + \frac{3M_0}{4b^3 c} (y' - b),$$

мы получим

$$\overline{xx} - \overline{yy} = \frac{W}{\pi cr} \cos \theta \cos 2\theta + \frac{W}{\pi bc} - \frac{Wy'}{\pi b^2 c} + \frac{3M_0}{4b^3 c} (y' - b).$$

Это приводит к точно такому же уравнению для изоклин, как и раньше, с той только разницей, что постоянные α, β представляются теперь формулами:

$$\alpha = -1 + \frac{3}{4} \frac{M_0}{W} \frac{\pi}{b} = -1 + \zeta,$$

$$\beta = -1 + \frac{3}{4} \frac{M_0}{W} \frac{\pi}{b} = -1 + \zeta,$$

вместо выражения (5.157). Разница в α в общем получается незаметная; разница же в β значительна. Следовательно, так как α здесь равно β , то случаи II и III совершенно отпадают, а $\frac{\alpha^2}{\beta} = \zeta - 1$ и изменяется непрерывно в промежутке от $+\infty$ до $-\infty$.

Для первого перехода от петли к вилке в центральном секторе получаются величины

$\varphi =$	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из опыта)	7,42	4,82	4,58	5,32	7,69
$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (из теории)	6,64	4,41	4,00	4,41	6,64

Сходимость явно хуже прежней.

Далее (для отрицательных α, β) наблюдается всюду переход от вилки к петле при любом значении φ .

Вычисленные значения α^2/β для этого перехода, равно как и величины, полученные из опыта, даны ниже:

φ	Левый сектор		Правый сектор	
	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (теория)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (опыт)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (теория)	$\frac{\alpha^2}{\beta}$ (опыт)
15°	0,042	—	—3,60	—3,67
30	0,185	—	—1,23	—
45	0,500	—	—0,500	—
60	—1,23	—	—0,185	—
75	—3,60	—4,14	—0,042	—

Приближенная формула Стокса в этом случае без сомнения дает более близкое совпадение значения $\frac{\alpha^2}{\beta}$ с значением, найденным из опыта для $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, что можно считать решающим для оценки этого приближения. Те значения $\frac{\alpha^2}{\beta}$, при которых могли бы происходить эти переходы, целиком лежат в области, которая наблюдалась Файлоном, а узлы, сверх того, располагались бы на линии $\frac{y'}{b} = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{1}{2}$ и были бы ясно видны. Тот факт, что эти явления не наблюдались и что числовые величины показали плохую сходимость между опытом и теорией для первого перехода, показывает, что приближенное решение, данное Стоксом, не является исправлением первых членов тех рядов, которыми пользовался Файлон.

5.19. Изгиб коротких балок.

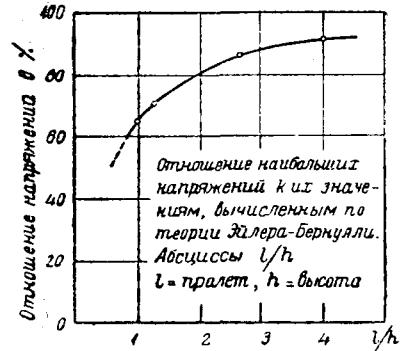
Случай короткой балки, опертой на концах и нагруженной по середине пролета, разбирался Фукухара, профессором Технологического колледжа в Хамаматсу (Япония).¹ Разберем два его исследования напряжений в балках с пролетом в 80 мм и 30 мм и высотой по 4,82 мм каждая; балки эти были сделаны из нитроцеллюлозы толщиной по 4,82 мм с модулем Юнга в $2,33 \times 10 \text{ кг/см}^2$, с коэффициентом Пуассона = 0,4. В более длинной балке линии главных нормальных напряжений похожи на те линии, которые изображены на фиг. 5.013; величины же напряжений, найденные с помощью обычного комбинированного способа, путем оптических и механических измерений, выражены через xx, xy, yy , причем начало координат

¹ T. Fukuhara, Investigation by Photo-Elastic Methods on Stress Distribution in Simple Beams of Short Spans.

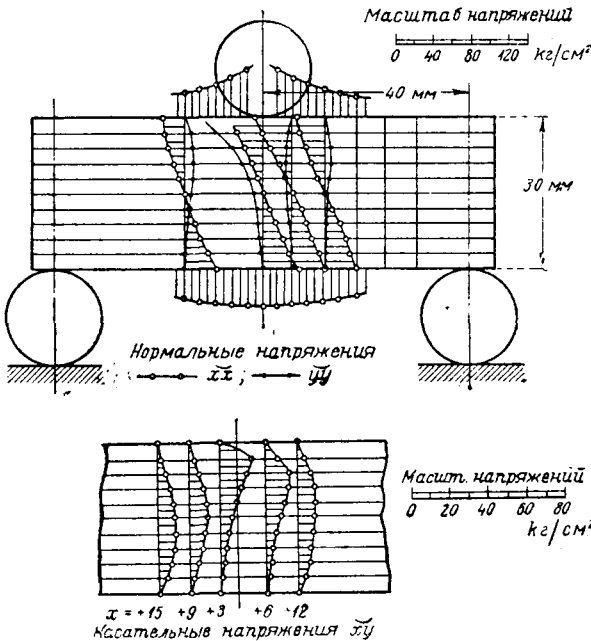
взято в центре тяжести поперечного сечения балки, ось Ox направлена параллельно длинным сторонам балки и ось Oy вертикально вниз. Для предупреждения местных повреждений материала, нагрузка передавалась через стальной цилиндр радиусом в 9 мм, на такие же цилиндры опиралась по концам сама балка.

Найденное распределение напряжений показано на фиг. 5.191; из нее видно, что нормальное напряжение σ_x в любом поперечном сечении не является линейной функцией от y : оно сопровождается напряжением σ_y , очень большим под точкой приложения силы и быстро убывающим до очень незначительной величины при удалении от этой точки.

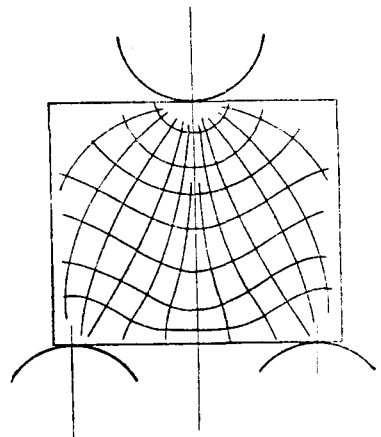
Напряжения σ_x в верхних и нижних волокнах не пропорциональны изгибающему моменту и не следуют линейному закону по длине балки. Особый интерес представляют собою значения максимального растягивающего напряжения.



Фиг. 5.192.



Фиг. 5.191.



Фиг. 5.193.

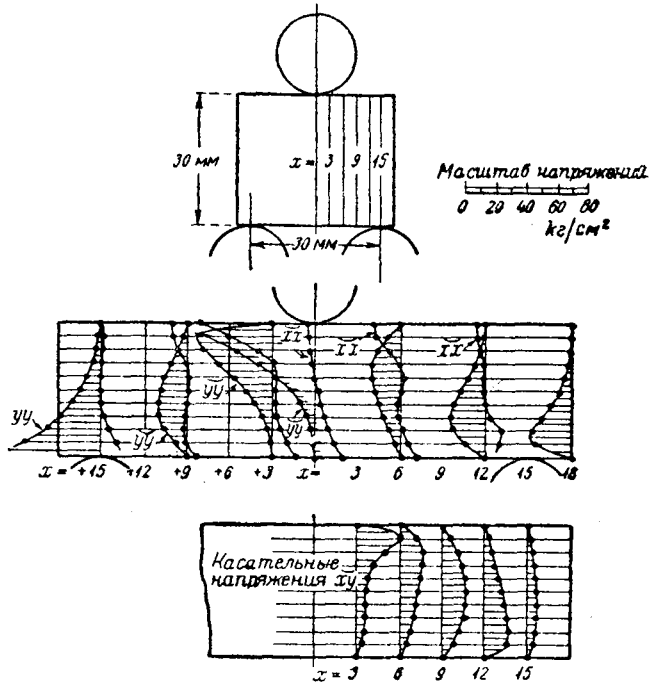
При отношении пролета к высоте в пределах от 0 до 5, отношение максимального растягивающего напряжения, найденного с помощью оптического метода в среднем сечении к напряжениям, вычисленным по формуле Эйлера — Бернулли, показано на фиг. 5.192; это отношение равно 65%, когда $\frac{\text{пролет}}{\text{высота}} = 1$ и возрастает приблизительно до 95%, когда $\frac{\text{пролет}}{\text{высота}} = 5$.

В первом из упомянутых выше случаев, где соотношение между пролетом и высотой равно единице, траектории главных нормальных напряжений, показанные на фиг. 5.193, заставляют предполагать, что система напряжений σ_y имеет большое значение, что, впрочем, очевидно и так, ввиду того, что действие изгибающего

момента в этом случае очень невелико. Это предположение подтверждается и измерениями, результаты которых нанесены на фиг. 5.194, где график напряжений yy для ясности заштрихован; отсюда видно, что эти напряжения всегда более значительны, чем напряжения xx . Благодаря ничтожности этих последних они вероятно определены недостаточно точно. Нанесенные на нижней чертеже касательные напряжения не следуют параболическому закону, за исключением сечения $x = 9$, в котором график распределения этих напряжений достаточно близок к параболе.

§ 5.20. Изгиб клина.

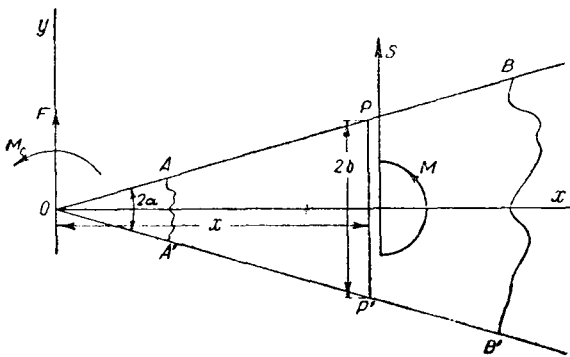
В тех случаях, когда балка одинаково суживается по всей своей длине, результаты §§ 4.15 и 4.26 приводят к решениям, аналогичным решениям Бернулли—Эйлера и Сен-Венана для прямых балок с постоянным сечением. Если мы скомбинируем решение (4.264) с решением (4.152), то получим



Фиг. 5.194.

$$\chi = \frac{M_0 (\sin \theta \cos \theta - \theta \cos 2\alpha)}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha} + \frac{Fr \theta \cos \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \tag{5.201}$$

Эта функция напряжений соответствует поперечной силе F , приложенной в точке O (фиг. 5.201) и паре M_0 (обе величины отнесены к единице толщины), причем грани $AB, A'B'$ не нагружены; точке O соответствуют линии пересечения граней AB и $A'B'$ или их продолжения.



Фиг. 5.201.

В рассматриваемой части балки, грани AB, AB' свободны от внешних усилий; считая, что длина балки достаточно велика по сравнению с поперечными размерами, мы можем применить принцип Сен-Венана; напряжение внутри рассматриваемой части балки будет определяться функцией (5.201), независимо от величины или характера нагрузок, действующих на другие части балки,

лишь бы эти силы были статически эквивалентны силе F , приложенной в точке O , и моменту M_0 .

Если мы возьмем ось балки за ось Ox и O за начало координат, то приве-

денное выше выражение для χ , отнесенное к прямоугольным координатам, примет следующий вид:

$$\chi = \frac{M_0 \left\{ (xy/(x^2 + y^2) - \cos 2\alpha \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right\}}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha} + \frac{Fx \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \quad (5.202)$$

Применив обычные формулы, найдем выражения для средних напряжений

$$\overline{xx} = \frac{2M_0 xy \{ (x^2 + y^2) \cos 2\alpha - 3x^2 + y^2 \}}{(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^3} - \frac{2Fx^2 y}{(2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2}. \quad (5.2031)$$

$$\overline{yy} = \frac{2M_0 xy \{ x^2 - 3y^2 - (x^2 + y^2) \cos 2\alpha \}}{(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^3} - \frac{2Fy^3}{(2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2}, \quad (5.2032)$$

$$\overline{xy} = -\frac{M_0 \{ (x^4 - y^4) \cos 2\alpha - x^4 - y^4 + 6x^2 y^2 \}}{(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^3} - \frac{2Fxy^2}{(2\alpha - \sin 2\alpha) (x^2 + y^2)^2}. \quad (5.2033)$$

Рассмотрим поперечное сечение PP' (фиг. 5.201) с высотой $2b$, для которого $x = b \operatorname{ctg} \alpha$, и разложим полученные формулы по возрастающим степеням α или $\operatorname{tg} \alpha$. Эту величину будем считать теперь малой, так что будем иметь дело с балкой, высота которой изменяется незначительно. Мы будем отбрасывать все члены, содержащие множителем M_0 и заключающие в себе α во второй и более высоких степенях, и все члены, содержащие F и заключающие в себе α в первой или более высоких степенях. Так как $Fb \operatorname{ctg} \alpha$ имеет такой же порядок малости как M_0 , то мы должны считать порядок F на единицу меньше, чем M_0 . Величина $\frac{y}{x}$ должна считаться того же порядка, как α .

Поступая таким образом, получаем следующие приближенные выражения:

$$\overline{xx} = \frac{3y}{2b^3} (M_0 - Fb \operatorname{ctg} \alpha) \quad (5.2041)$$

$$\overline{yy} = 0 \quad (5.2042)$$

$$\overline{xy} = \frac{3}{4} \frac{M_0 \operatorname{tg} \alpha}{b^4} (3y^2 - b^2) - \frac{3}{2} \frac{Fy^2}{b^3}. \quad (5.2043)$$

Если через S и M обозначим перерезывающую силу и изгибающий момент в сечении PP' , то для балки толщиной $2c$ имеем очевидно

$$F = -\frac{S}{2c}; \quad M_0 = -\frac{M}{2c} - \frac{Sb \operatorname{ctg} \alpha}{2c}, \quad (5.205)$$

так что средние напряжения в сечении PP' в зависимости от изгибающего момента и перерезывающей силы выразятся формулами:

$$\overline{xx} = -\frac{3}{4} \frac{yM}{4b^3c} = -\frac{My}{I}, \quad (5.2061)$$

$$\overline{xy} = \frac{3S}{8b^3c} (b^2 - y^2) - \frac{3}{8} \frac{M \operatorname{tg} \alpha}{b^4c} (3y^2 - b^2), \quad (5.2062)$$

$$\overline{yy} = 0, \quad (5.2063)$$

где I имеет обычное значение.

Уравнение (5.2061) показывает, что при этом приближении нормальные напряжения совпадают с напряжениями, получающимися по обычной теории изгиба

прямых балок, но (5.20^с) указывает на значительное отличие распределения касательных напряжений от обычного, если (что часто встречается на практике) изгибающий момент настолько велик, что величина $\frac{Mtg\alpha}{b}$ окажется одного порядка с S .

Касательные напряжения распределяются по параболическому закону; но на обычную параболу Сен-Венана (зависящую от S), принятую при обычных инженерных расчетах, налагается другая парабола, иной формы, зависящая только от изгибающего момента; полное касательное напряжение является суммой этих двух парабол.

Следует отметить следующие особые случаи.

1) В точке перегиба $M=0$ и обычный закон распределения касательных напряжений по Сен-Венану не изменяется от наличия клинообразной формы балки.

2) Если $M = -Sbctg\alpha$, т. е., если нагрузка влево от сечения PP' (фиг. 5.201) статически эквивалентна сосредоточенной силе, проходящей через точку O пересечения сходящихся граней балки, то

$$\tau_y = \frac{3}{4} \frac{Sy^2}{b^2c}. \quad (5.207)$$

Касательные напряжения равны нулю в центре и достигают максимума у наружных граней.

3) Если $M = -\frac{1}{3}Sbctg\alpha$, т. е. если „эквивалентный“ груз приложен на одной трети расстояния от вершины клина (это будет иметь место в случае, когда консоль с равномерно убывающей высотой изгибается от действия собственного веса), тогда

$$\tau_y = -\frac{S}{4bc}, \quad (5.208)$$

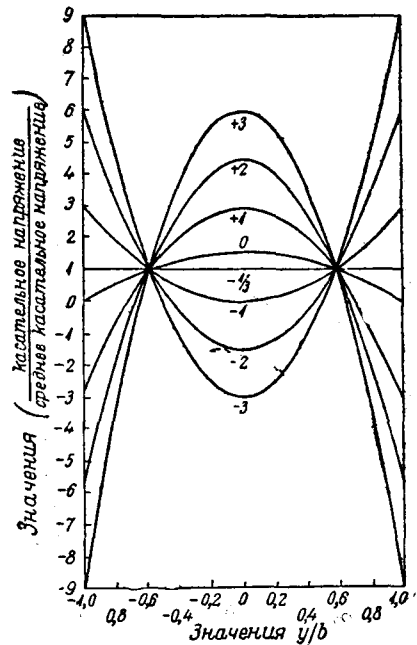
т. е., мы имеем случай равномерного распределения касательных напряжений по поперечному сечению.

4) Если „эквивалентный“ груз находится на очень далеком расстоянии от точки O пересечения граней, то $Mtg\alpha$ может быть весьма большим по сравнению с S . В пределе мы имеем случай клина, находящегося под действием постоянного изгибающего момента (например опертая балка с симметрично действующими силами на консолях). В таком случае касательное напряжение равно

$$-\frac{3}{8} \frac{Mtg\alpha}{b^2c} (3y^2 - b^2), \quad (5.209)$$

величина, всецело зависящая от наличия клинообразной формы балки.

На фиг. 5.202 изображены различные виды распределения касательных напряжений по сечению; эти напряжения выражены в долях среднего касательного напряжения, а отношение $\frac{Mtg\alpha}{bS}$ изменяется в пределах от -3 до $+3$. Все кривые проходят через точки $y = \pm b/\sqrt{3}$, для которых отношение (касательное напря-



Фиг. 5.202.

жение среднее касательное напряжение) = 1. Значения $\frac{M \operatorname{tg} \alpha}{bS}$ показаны на соответствующих кривых.

На первый взгляд кажется странным, что максимальное касательное напряжение во многих случаях получается у верхней и нижней грани, где эти напряжения должны бы, казалось, исчезнуть.

Однако легко видеть, что при учете клинообразной формы балки граничные условия для напряжений не требуют уже больше равенства $x_x = y_y = 0$; граничные условия для напряжений в точках грани $y = b$ будут

$$\overline{x_y} = \overline{x_x} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\overline{y_y} = \overline{x_y} \operatorname{tg} \alpha,$$

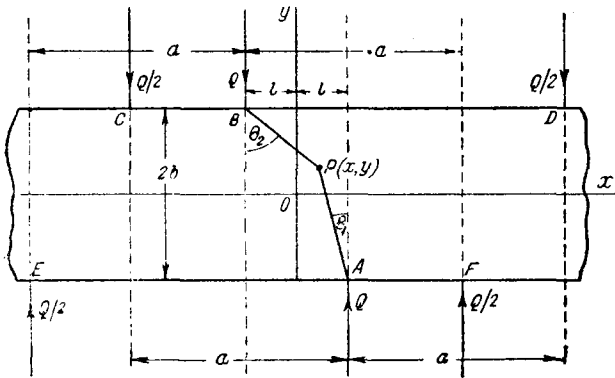
причем первое из них, после подстановки в (5.2061) $y = +b$, дает

$$\overline{x_y} = -\frac{Mb \operatorname{tg} \alpha}{I} = -3 \frac{M \operatorname{tg} \alpha}{4b^2c},$$

что совпадает со значением (5.2062), полученным для касательного напряжения у этой грани.

Приведенные результаты показывают, что наличие клинообразной формы балки, даже слабо выраженной, может серьезно видоизменить параболический закон Сен-Венана для распределения касательных напряжений по сечению, в то время как формула Эйлера — Бернулли для нормальных напряжений попрежнему оказывается

достаточно верной. Формула (5.2062) дает однако простую и удобную поправку к обычной формуле для касательных напряжений для любого сечения балки с равномерно убывающей высотой.



Фиг. 5.211.

§ 5.21. Касательные напряжения, возникающие от двух почти противоположных сил.

Формулами § 5.11 для опертой балки с пролетом $2a$, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета,

можно пользоваться также и для получения решений в более сложных случаях.

Рассмотрим, в частности, случай очень длинной балки высотой $2b$, находящейся под действием силы Q (отнесенной к единице толщины балки), направленной сверху вниз и приложенной к верхней грани балки в точке $x = -l$, и другой силы той же величины, действующей на нижнюю грань снизу вверх в точке $x = +l$.

Так как эти силы сами себя не уравнивают, но приводятся к паре $2Ql$ (на единицу толщины), то необходимо ввести уравнивающие их реакции, приложенные к концам балки. Это можно получить, комбинируя две группы сил, каждая из которых состоит из сосредоточенной силы и равностоящих от нее реакций опор; обе группы сил действуют в противоположных направлениях и смещены по горизонтали одна по отношению к другой на длину $2l$.

Расположение нагрузок показано на фиг. 5.211, где сила Q в точке A уравнивается силами $Q/2$ в точках C и D , а сила Q в точке B — силами $Q/2$

в точках E и F . Расстояния CD , EF имеют длину по $2a$, причем a может быть обращено в бесконечность, как в § 5.11.

Функции напряжений представлены выражением (5.113). Для сил, приложенных в точках B , E , F , имеем

$$\chi = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left\{ \frac{\varphi_1(m, y)(1 - \cos ma)}{2mb - \text{sh } 2mb} + \frac{\varphi_2(m, y)(1 + \cos ma)}{2mb + \text{sh } 2mb} \right\} \cos m(x + l) - 1 \right] \frac{dm}{m^2},$$

а для сил, приложенных в точках A , C , D , в силу симметрии:

$$\chi = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left\{ -\frac{\varphi_1(m, y)(1 - \cos ma)}{2mb - \text{sh } 2mb} + \frac{\varphi_2(m, y)(1 + \cos ma)}{2mb + \text{sh } 2mb} \right\} \cos m(x - l) - 1 \right] \frac{dm}{m^2}.$$

Складывая эти выражения, получаем полную функцию напряжений в следующем виде:

$$\chi = \frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varphi_2(m, y)(1 + \cos ma)}{2mb + \text{sh } 2mb} \cos mx \cos ml - \frac{\varphi_1(m, y)(1 - \cos ma)}{2mb - \text{sh } 2mb} \sin mx \sin ml - 1 \right] \frac{dm}{m^2}; \quad (5.211)$$

φ_1 и φ_2 имеют прежнее значение, а именно:

$$\varphi_1(m, y) = my \text{ ch } mb \text{ ch } my - mb \text{ sh } mb \text{ sh } my - \text{ch } mb \text{ sh } my,$$

$$\varphi_2(m, y) = mb \text{ ch } mb \text{ ch } my - my \text{ sh } mb \text{ sh } my + \text{sh } mb \text{ ch } my.$$

Для упрощения полученного решения, будем считать a очень большим. Коэффициент при $\cos ma$ в подынтегральной функции (5.211) равен:

$$\frac{\varphi_1(m, y) \sin mx \sin ml}{m^2(2mb - \text{sh } 2mb)} + \frac{\varphi_2(m, y) \cos mx \cos ml}{m^2(2mb + \text{sh } 2mb)}. \quad (5.212)$$

Легко видеть, что первый член этого коэффициента будет функцией конечной и непрерывной при всех значениях m , в том числе и при $m = 0$, благодаря наличию множителей $\sin mx$, $\sin ml$. Второй член также функция конечная и непрерывная при всех значениях m , кроме $m = 0$, где она становится бесконечной, типа $\frac{1}{2m^2}$ + конечная функция.

После вычитания $\frac{1}{2m^2}$ из выражения (5.212) получим функцию, которая будет всюду непрерывной, а интеграл от произведения этой функции на $\cos ma$ будет в пределе обращаться в нуль, если a будет стремиться к бесконечности.

Остается разобрать выражение

$$\frac{\cos ma}{2m^2},$$

которое можно объединить с $-\frac{1}{2m^2}$, взяв половину от $-\frac{1}{m^2}$, представляющего собой последний член подынтегральной функции в (5.211). Получаем таким образом интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ma - 1}{2m^2} dm,$$

который хорошо известен, и значение его может, в случае надобности, быть вычислено. Нам оно не нужно, так как ясно, что оно вводит в функцию χ только член, не зависящий ни от x ни от y , и может быть опущено.

Для функции напряжений, дающей решение нашей задачи, имеем в итоге выражение:

$$\chi = \frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varphi_2(m, y) \cos mx \cos ml}{2mb + \operatorname{sh} 2mb} - \frac{\varphi_1(m, y) \sin mx \sin ml}{2mb - \operatorname{sh} 2mb} - \frac{1}{2} \right] \frac{dm}{m^2}. \quad (5.213)$$

Очень важное практическое значение имеет распределение касательных напряжений по среднему сечению, на половине расстояния между направленными в противоположные стороны силами Q .

Формулу для этих напряжений получаем обычным путем

$$\begin{aligned} \overline{\chi}_y &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \sin mx \cos ml}{2mb + \operatorname{sh} 2mb} + \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos mx \sin ml}{2mb - \operatorname{sh} 2mb} \right) \frac{dm}{m}; \end{aligned} \quad (5.214)$$

но

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = m^2 [y \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - b \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my],$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = m^2 [b \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - y \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my].$$

Подставив $x = 0$ в (5.214), получаем следующее выражение для касательных напряжений $\overline{\chi}_y$ в среднем сечении:

$$\overline{\chi}_y = \frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m \sin ml (y \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - b \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my)}{2mb - \operatorname{sh} 2mb} dm. \quad (5.215)$$

Значения $\overline{\chi}_y$, полученные из (5.215) и разделенные на среднее касательное напряжение $Q/2b$, даны в таблице 5.21, для отношений $l/b = \pi/18; \pi/9; \pi/6; \pi/3; \pi/2, \infty$, т. е. $l/b = 0,1745; 0,3491; 0,5236; 1,0472; 1,5708, \infty$.

Таблица 5.21.

Отношение величин касательного напряжения в точках среднего сечения к средней величине касательного напряжения.

y/b	l/b					
	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	∞
1,0	0	0	0	0	0	0
0,8	0,903	0,895	0,576	0,510	0,535	0,540
0,6	1,175	1,270	1,094	0,945	0,957	0,960
0,4	0,785	1,187	1,292	1,272	1,264	1,260
0,2	0,638	1,094	1,337	1,468	1,451	1,440
0,0	0,599	1,062	1,343	1,533	1,514	1,500

Эти результаты изображены на фиг. 5.212, где кривые для $\frac{l}{b} = \frac{\pi}{2}, \infty$ для ясности пропущены, в виду того, что они лежат очень близко от кривой для $\frac{l}{b} = \frac{\pi}{3}$.

Следует заметить, что параболическое распределение касательных напряжений, характерное для изгиба типа Сен-Венана, появляется (приблизительно) только после того, как отношение $\frac{l}{b}$ станет больше единицы. Уже при $l = 0,52b$ кривая распре-

деления касательных напряжений заметно приплюснута сверху. С уменьшением $\frac{l}{b}$ около точки $y = 0$ (у так называемой „нейтральной оси“) образуется впадина; U-образный характер кривой становится все более и более определенным, пока не получается два резких выступа у верхней и у нижней граней, между которыми касательное напряжение падает до весьма низких значений.

С первого взгляда подобный результат кажется довольно неожиданным. Но после небольшого рассмотрения выясняется, что такое явление можно было предсказать даже и без вычисления интеграла (5.215).

В первом приближении выражение для напряжений, возникающих в окрестности точек А или В (фиг. 5.211), очевидно получается в результате применения решений того типа, который рассматривался в § 4.17 для случая сосредоточенной силы, приложенной нормально к грани полуплоскости.

Итак мы имеем вблизи А

$$\gamma_1 = - Q\theta_1 (l - x)/\pi$$

и вблизи В

$$\gamma_2 = - Q\theta_2 (l + x)/\pi,$$

где $\theta_1 = \text{arctg} \{(l - x)/(y + b)\}$, $\theta_2 = \text{arctg} \{(x + l)/(b - y)\}$.

Отсюда, путем дифференцирования получаем

$$\bar{x}y_1 = \frac{2Q}{\pi} \frac{(l - x)(y + b)^2}{[(y + b)^2 + (l - x)^2]^2},$$

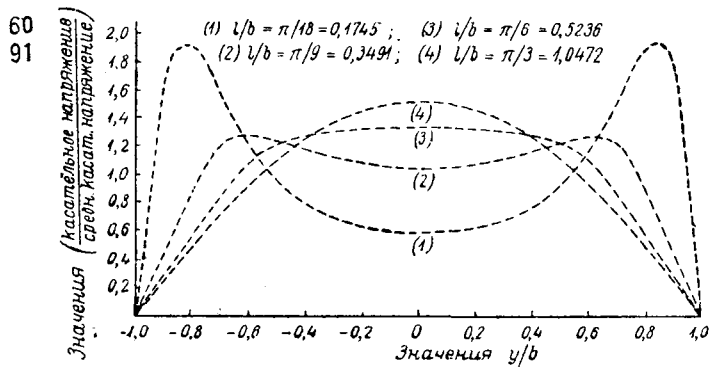
$$\bar{x}y_2 = \frac{2Q}{\pi} \frac{(l + x)(b - y)^2}{[(b - y)^2 + (l + x)^2]^2},$$

и для $x = 0$

$$(\bar{x}y_1)_{x=0} = \frac{2Ql}{\pi} \frac{(y + b)^2}{[(y + b)^2 + l^2]^2},$$

$$(\bar{x}y_2)_{x=0} = \frac{2Ql}{\pi} \frac{(b - y)^2}{[(b - y)^2 + l^2]^2}.$$

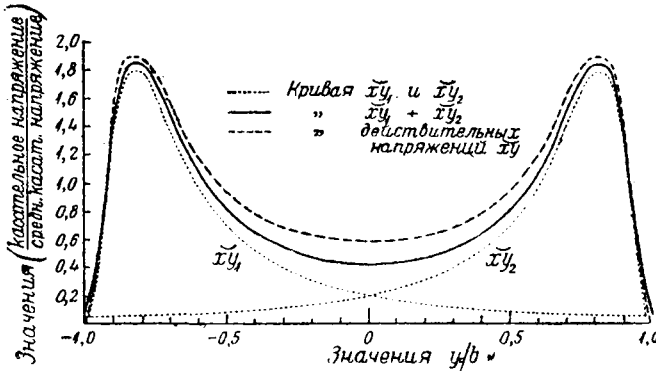
На фиг. 5.213 дано графическое изображение $(\bar{x}y_1)_{x=0}$ и $(\bar{x}y_2)_{x=0}$ для $l/b = 0,1745$.



Фиг. 5.212.

Графики напряжений начинаются от нуля в точках $y = -b$ и $y = +b$, затем круто поднимаются до максимального значения $Q/2\pi l$ в точках $y + b = l$ или $b - y = l$ и падают затем постепенно по мере приближения к противоположной грани. При условии пренебрежения в каждом из случаев поправкой, вызванной тем, что высота балки конечна, распределение касательных напряжений получается сложением обеих кривых $\bar{x}u_1$ и $\bar{x}u_2$.

Результат этого сложения показан на фиг. 5.213 жирной кривой, все ординаты которой выражены в долях среднего касательного напряжения. Соответствующая кривая фиг. 5.212, дающая точное значение для величины касательного напряжения,



Фиг. 5.213.

воспроизведена на фиг. 5.213 пунктирной кривой. Очертание как жирной, так и пунктирной кривой имеет одинаковый характер, т. е. два выступа со впадиной между ними.

В деталях, однако, кривые, о которых идет речь, не совсем совпадают, сплошная кривая в средней своей части проходит значительно ниже пунктирной, но несколько выше у концов, где пунктирная кривая почти совсем сливается

с точечной кривой, изображающей напряжения $\bar{x}u_1$ или $\bar{x}u_2$, в зависимости от того, который из концов мы берем. Следует также отметить, что касательное напряжение, изображенное сплошной кривой, не обращается в нуль в точках $y = \pm b$, как следовало бы ожидать. Это расхождение объясняется тем, что мы в приближенном решении пренебрегали поправкой, вызванной конечными размерами балки. Однако, как мы увидим дальше, этот метод дает очень точное приближение в отношении величины максимальных напряжений, при условии достаточно малого l/b .

§ 5.22. Влияние отверстия на распределение напряжений в балке, находящейся под действием постоянного изгибающего момента.

Влияние круглого отверстия с центром на нейтральной оси балки, находящейся под действием постоянного изгибающего момента, оптически исследовано Тузи¹, который провел сравнение между опытными данными и теми результатами, которые получаются из теории распределения напряжений в балке такой высоты, что ее верхняя и нижняя грани могут считаться отстоящими на бесконечное расстояние. Это распределение напряжений получается следующим образом.

В балке прямоугольного сечения шириною $2c$ и высотой $2b$, находящейся под действием постоянного изгибающего момента M , система напряжений определяется функцией

$$\chi = \frac{A}{6} y^3 = \frac{A}{6} r^3 \sin^3 \theta = A \left\{ \frac{r^3}{8} \sin^3 \theta - \frac{r^3}{24} \sin 3\theta \right\},$$

из которой $\bar{x}x = Ay$, $\bar{x}y = \bar{y}y = 0$, где $A = \frac{3M}{4b^3c}$. В точках любого из кругов

¹ Z. Tuzi, Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research, № 156, 1928.

радиуса a с центром в начале координат эта функция дает следующие выражения напряжений \overline{rr} и $\overline{r\theta}$:

$$\overline{rr}_{r=a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right)_{r=a} = -\frac{1}{4} Aa (\sin \theta + \sin 3\theta),$$

$$\overline{r\theta}_{r=a} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right\}_{r=a} = \frac{1}{4} Aa (\cos \theta - \cos 3\theta).$$

Если круг будет контуром отверстия, то оба эти напряжения должны обратиться в нуль для всех значений θ ; для уничтожения этих напряжений необходимо сделать некоторое добавление к функции χ . Функция χ_1 , которая удовлетворит этому требованию и которая обращается в нуль на бесконечности, имеет вид:

$$\chi_1 = Aa^3 \left\{ \frac{a}{8r} (\sin \theta + \sin 3\theta) - \frac{a^3}{12r^3} \sin 3\theta \right\},$$

напряжения же будут тогда

$$\overline{rr} = \frac{Aa^3}{4} \left[\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r^3} \right) \sin \theta + \left(\frac{4a^3}{r^5} - \frac{5a}{r^3} + \frac{r}{a^3} \right) \sin 3\theta \right],$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{Aa^3}{4} \left[\left(\frac{3r}{a^3} + \frac{a}{r^3} \right) \sin \theta - \left(\frac{4a^3}{r^5} - \frac{a}{r^3} + \frac{r}{a^3} \right) \sin 3\theta \right],$$

$$\overline{r\theta} = \frac{Aa^3}{4} \left[\left(\frac{a}{r^3} - \frac{r}{a^3} \right) \cos \theta + \left(\frac{r}{a^3} + \frac{3a}{r^3} - \frac{4a^3}{r^5} \right) \cos 3\theta \right],$$

что дает

$$\overline{rr} = \overline{r\theta} = 0 \text{ при } r = a, \text{ и } \overline{\theta\theta} = Aa (\sin \theta - \sin 3\theta) = 2Aa \sin \theta (2 \sin^2 \theta - 1)$$

с максимальной величиной напряжения $\pm 2Aa$ при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, вместо $\pm Aa$ для балки без отверстия. Напряжение $\overline{\theta\theta}$ обращается в нуль в точках $\theta = 0, \pi, \pm \frac{\pi}{4}$ и $\pm \frac{3\pi}{4}$.

Эти результаты приближенно проверены при помощи оптических измерений. Анализ более общего случая для небольшого эллиптического отверстия с осями $2a$ и $2b$ проведен Вольфом,¹ который показал, что напряжения у концов малой оси представлены выражением

$$\overline{\eta\eta} = \pm Ab \left(1 + \frac{b}{a} \right),$$

если большая ось $2a$ совпадает с осью балки; эта формула принимает вид:

$$\overline{\eta\eta} = \pm Aa \left(1 + \frac{a}{b} \right)$$

в тех случаях, когда оси повернуты на 90° .

§ 5.23. Балки с резкими изменениями внешних контуров.

В практике бывает очень редко, чтобы балка какой-либо формы и размеров имела постоянное сечение по всей своей длине; всякий скачок в очертании балки, являющийся следствием резкого изменения площади поперечного сечения, вызовет в этом месте увеличение напряжений, которое может быть настолько большим, что

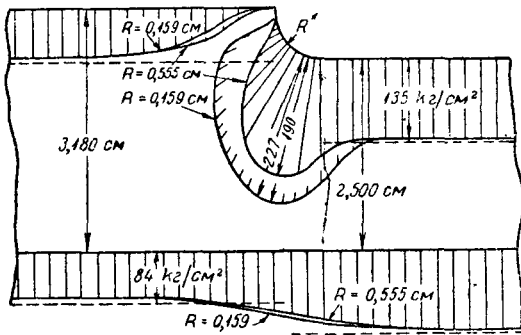
¹ K. Wolf, Zeitschrift für Technische Physik, № 8, 1921.

балка делается ненадежной, если к ней приложить добавочный груз, который не был предусмотрен.

Такой случай наблюдается обычно в корпусе судна непосредственно перед капитанским мостиком, где обшивка главной палубы оказывается на несколько футов ниже остальной части, и где это нарушение сплошности контура сглаживается переходом по дуге круга.

В некоторых грузовых пароходах встречаются подобные изменения сечения.

В добавление к весу груза и механизмов корпус корабля подвержен действию волн, которые вызывают в корпусе корабля изгибающий и скручивающий моменты; в случае посадки корабля на мель, один конец его может оказаться более или менее закрепленным, что также вызывает добавочные напряжения в обшивке корпуса. Подобный случай произошел в 1927 г. с теплоходом длиной около 152 м, севшим на мель с значительным грузом на борту; разрушение произошло в месте резкого изменения сечения корпуса; образовалась глубокая вертикальная трещина¹ с острым углом.



Фиг. 5.23.

Очень сложным бывает в таких случаях вопрос величины и характера нагрузки; однако, если корпус остается свободным от приложения внешних нагрузок в месте резкого изменения сечения и поблизости от него, тогда касательное напряжение у краев поперечного сечения будет равно нулю, и представление о размере увеличения напряжений можно получить в первом приближении при помощи экспериментальных данных.

С этой целью были сравнены² две балки прямоугольного поперечного сечения обе балки имели ширину 0,5 см и высоту 3,18 см по одну сторону от резкого изменения сечения и 2,502 см по другую; нижний контур балки прямая линия, а верхний контур в месте резкого изменения сечения образуется из четверти окружности радиуса R , продолжающейся в виде вертикальной прямой до пересечения с горизонтальной прямой контура, как показано на фиг. 5.23. Обе балки были подвергнуты чистому изгибу с моментом $M = 71,9$ кг. см. При радиусе $R = 0,555$ см, распределение напряжений по контуру, изображенное на фиг. 5.23, обладает некоторыми интересными особенностями. На нижней грани, в точках, достаточно удаленных от места резкого изменения поперечного сечения, величина напряжения оказывается приблизительно такой, какая получается из обычной формулы $p = \frac{M}{I} y$; она изображена на фигуре пунктирными линиями с ступенчатым переходом. Уменьшение радиуса R до 0,159 см мало влияет на эти напряжения. На верхней же грани под влиянием резкого изменения сечения в области, где переходная дуга соединяется с пониженной горизонтальной гранью балки, напряжения сильно повышаются, возрастая приблизительно от 135 до 190 кг/см², то есть на 41%, с последующим падением до нуля по мере приближения к пересечению горизонтальной повышенной грани с вертикалью. Вдоль повышенной части верхней грани равномерно распределенное напряжение постепенно падает до нуля по мере приближения к месту резкого изменения сечения; влияние

¹ The Times, December 3-rd, 1927.

² E. G. Coker, Stresses in the Hulls of Stranded Vessels, Transactions of the Institution of Naval Architects, 1928.

изменения радиуса R и здесь мало. В месте же резкого изменения сечения при $R = 0,159$ см максимум напряжения достигает 227 кг/см² или повышается на 69% .

Это распределение напряжений также изображено на фигуре с целью показать повышение интенсивности напряжения при изменении радиуса. Полярные кривые напряжений оказываются поэтому наложенными друг на друга, но это не имеет большого значения при сравнении максимальных напряжений; этот метод изображения зато имеет преимущество в том отношении, что указывает на наличие в обоих случаях максимума напряжений в точках радиуса, лежащего приблизительно под одним и тем же углом к горизонтали.

На основании этих результатов не трудно понять, почему севший на мель корабль рискует отломить свою кормовую часть вследствие разрушения в сечении, проходящем через точку с максимальным напряжением, если только в этом месте судно не будет усилено добавочной обшивкой.

Результаты опытов показывают также, что это место, при любых условиях нагрузки, будет всегда опасным.

§ 5.24. Влияние надрезов или вырезов на изогнутую балку.

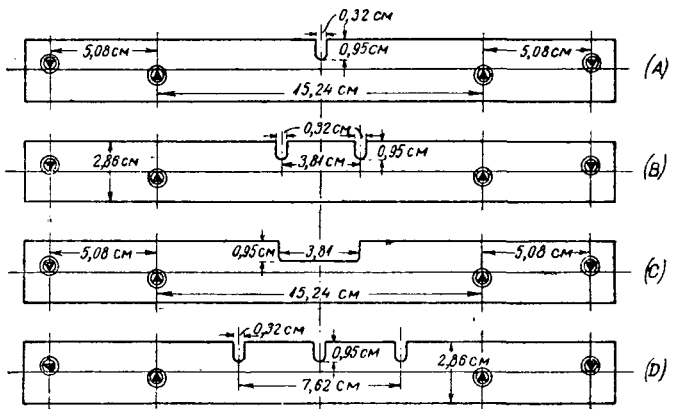
Другой пример из области кораблестроения, представляющий собою балку с резким изменением сечения, встречается в конструкции корпуса корабля, где в верхней части корпуса устраивают много температурных швов в виде поперечных и довольно глубоких прорезов поперек судна. В больших кораблях нередко встречаются температурные швы глубиной до $7,6$ м, считая от верхней палубы, расположенные на расстоянии $30,5$ м друг от друга.

Эти резкие изменения сечения оказывают сильное влияние на распределение напряжений в корпусе судна и очень затрудняют, если совсем не исключают, возможность вычисления этих напряжений.

Некоторое приближенное представление о тех изменениях в распределении напряжений, которые возникают вследствие швов расширения, можно получить при сравнении явлений, которые возникают в простой балке прямоугольного сечения при чистом изгибе с явлениями, возникающими в балке при наличии в ней поперечных надрезов.¹

Несколько образцов балок, применявшихся для опыта, показано на фиг. 5.241; в верхней из этих балок имеется посередине надрез с полуцилиндрическим дном, похожий на надрез от реза.

Следующая к низу фигура изображает балку такой же величины с двумя подобными же и одинаковыми надрезами, отстоящими один от другого на $3,81$ см; подобный же случай был еще раз исследован на другой балке, где средняя часть между надрезами была удалена, причем образовался длинный прямоугольный вырез длиной $3,81$ см такой же глубины, как предыдущие надрезы; закругления



Фиг. 5.241.

¹ E. G. Coker and G. P. Coleman, Stress Distributions in Notched Beams and their Application, Transactions of the Institution of Naval Architects, Spring Meeting, 1930.

имели радиус 0,159 см, как показано на третьей фигуре. На самой нижней фигуре изображена балка с тремя одинаковыми надрезами, отстоящими один от другого на 3,81 см.

Как видно на фигуре, размеры каждого из надрезов представляют собою одну треть высоты D балки, а расстояние между ними $1\frac{1}{3}D$.

Все эти балки просверлены, и в отверстия вставлены стальные кольца, служащие опорами для призм, через которые передаются силы; эти кольца устроены таким образом, что все их точки касания с призмами лежат на оси балки. Постоянный изгибающий момент передается на балку при помощи аппарата, описанного в § 3.02.

Расстояние от опор до надрезов довольно значительно для балок с одним или двумя центрально расположенными надрезами; поэтому опоры при таких расстояниях не оказывают, вероятно, большого влияния на распределение напряжений у надреза и неподалеку от него; другое наблюдается в случае балки с тремя надрезами, поэтому-то в опытах измерения производились лишь на трех первых балках.

Прекрасное представление о характере распределения напряжений можно получить при качественном исследовании этих балок при помощи полярископа. В обыкновенной балке без надрезов обнаруживается по середине высоты, как видно из фиг. 5.011, прямая черная полоса, изображающая нейтральный слой и параллельные ей изохроматические линии, расположенные таким образом, что из них следует прямая пропорциональность между напряжениями в любой точке и расстоянием этой точки до нейтральной оси. Такой вид распределения напряжений может быть принят за основу для сравнения, так как в этом случае напряжения в любой точке балки легко поддаются вычислению, если пренебречь тем влиянием, которое оказывает искривление балки при нагружении.

Если в середине балки сделан надрез таких размеров, какие указаны на фиг. 5.241 (A), то, как показано на фиг. 5.242 (A), в напряжениях происходит очень большое изменение, особенно отражающееся на пучке изохром около низа надреза; эти изохромы указывают на наличие значительных растягивающих напряжений около надрезов. Наблюдается также заметное искривление изохром непосредственно против надреза около нижней сжатой грани балки.

Особенно интересным является факт разрыва черной полосы, простирающейся вдоль фигуры и изображающей, как мы увидим дальше, истинную нейтральную ось с каждой стороны надреза, в то время как среднее темное пятно указывает только на наличие двух равных одинаковых главных напряжений P и Q в этой точке.

В остальных частях балки, на большом расстоянии от надреза, изохроматические линии указывают на наличие обычного линейного распределения напряжений. Как можно заметить, верхние углы надреза почти не отличаются от темного фона фотографии, так что эти части или очень мало или совсем не напряжены. Влияние такого рода надреза было исследовано Марисом¹ для случая балки, заделанной одним концом, опертой как раз под надрезом и нагруженной на другом свободном конце.

На фиг. 5.242 (B) изображено влияние двух надрезов в балке, показанных на фиг. 5.241 (B), причем не принято было никаких мер к тому, чтобы получился точно такой же изгибающий момент, как в первом случае.

Самое интересное из всего, что следует отметить, это — значительная величина напряжений в верхней части балки между двумя надрезами; эта часть таким образом принимает участие в восприятии внешнего изгибающего момента; распре-

¹ H. B. Maris, Photo-elastic investigations of the tensile test specimen, the notched bar, the ship propeller strut, and the roller path ring, Journal of the Optical Society of America, 15, № 4, 1927.

деление напряжений у закругленных концов надрезов остается прежним. В нижней сжатой грани обнаруживается значительное повышение напряжений в поперечных сечениях под срединами надрезов, в то время как черные полосы между надрезами и опорами балки остаются в прежнем состоянии; кроме этих полос существует короткая, проходящая по середине между надрезами, черная полоса, указывающая на то, что в точках вдоль нее разность $P - Q$ равна нулю.

Если теперь удалить верхнюю часть балки между двумя надрезами, то распределение напряжений в средней части будет соответствовать случаю обычного изгиба; это распределение будет несколько видоизменено у краев выреза балки, благодаря резкому изменению высоты, как это изображено на фиг. 5.242 (А); на этой же фигуре видно, что у краев выреза нейтральная ось загибается вверх.

Наибольшие напряжения наблюдаются в обоих внутренних углах, а области у внешних углов остаются почти совершенно ненапряженными.

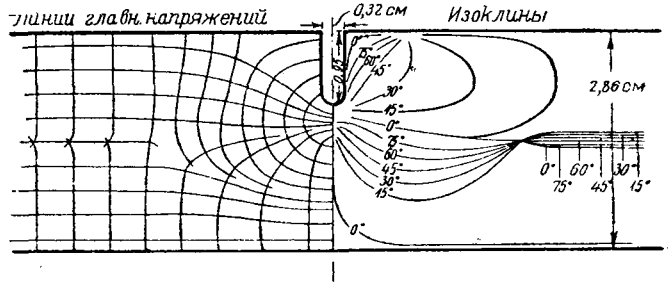
Напряжения на концах балки аналогичны тем, которые возникают в ней под действием постоянного изгибающего момента; но они несколько видоизменяются при приближении к опорам.

Влияние трех надрезов, как показано на фиг. 5.242 (D), очень похоже,

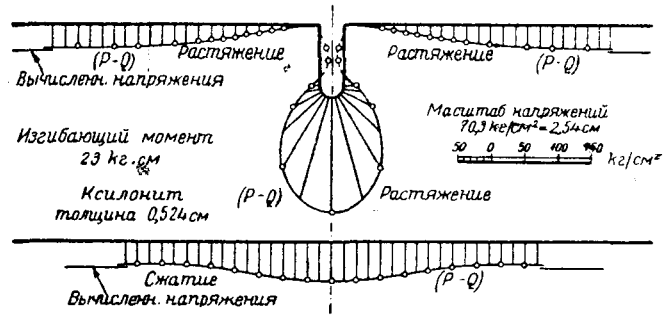
конечно, на то, о котором говорилось выше; как и прежде, важно отметить, что количество надрезов такого рода, хотя и ослабляющих прочность балки, не уничтожает в промежутках между надрезами напряжений, и они также участвуют в уравнивании внешнего изгибающего момента. Отсюда можно вынести заключение, что если в корпусе корабля будут иметься подобные надрезы, то надстройки все же должны будут взять на себя некоторую долю изгибающего момента.

Рассмотрев определение напряжений со стороны качественной, перейдем к определению их величины и направлений. Линии главных нормальных напряжений в балке без надрезов представляют собой прямые линии, параллельные нейтральной оси; влияние одного надреза на эти напряжения изображено слева на фиг. 5.243; линии главных напряжений состоят из двух пучков взаимно ортогональных кривых, которые указывают на наличие главных нормальных напряжений P и Q , возникающих вследствие резкого изменения контура.

В результате, влияние надреза сказывается в большом изменении направления линий главных нормальных напряжений, так что они обходят вокруг места надреза, причем у основания надреза возникают очень высокие напряжения; это показано на фиг. 5.244, где величина напряжений в точках низа надреза отложена на перпендикуляре к его контуру при изгибающем моменте $M = 23 \text{ кг. см.}$ Этот изгибающий момент должен вызвать в сплошной балке этой же высоты максималь-

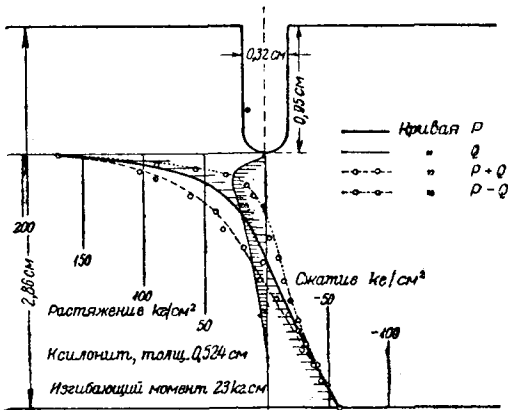


Фиг. 5.243.



Фиг. 5.244.

ное напряжение величиной $32,3 \text{ кг/см}^2$; в балке высотой $1,9 \text{ см}$ он вызовет напряжение в $72,8 \text{ кг/см}^2$, в то время как действительное максимальное напряжение у самой нижней точки надреза равно $168,7 \text{ кг/см}^2$; таким образом повышение напряжения составляет 422% по отношению к основной балке, 132% по отношению к балке пониженной высоты. Небольшие сжимающие напряжения наблюдались в прямых частях контура надреза; на фигуре напряжения эти обозначены пунктиром с целью показать сомнительность приведенного утверждения, так как такие сжимающие напряжения могли быть результатом начальных напряжений, возникших при обработке и получении надреза.

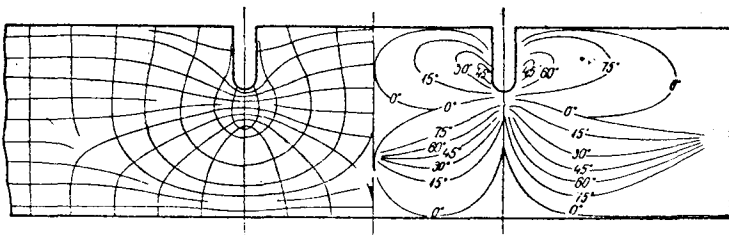


Фиг. 5.245.

Вдоль верхней растянутой грани балки напряжения у надреза равно нулю, а затем оно постепенно повышается по мере того, как вступает вновь в силу влияние изгибающего момента.

На нижней стороне у сечения под надрезом максимальное напряжение доходит до $57,3 \text{ кг/см}^2$; затем оно медленно и симметрично относительно этого сечения падает, приближаясь к постоянной величине — $31,3 \text{ кг/см}^2$ в тех сечениях, которые находятся в условиях чистого изгиба.

Анализ напряжений в поперечном сечении под серединой надреза показывает наличие переменного по величине напряжения P , нормального к этому сечению, и напряжения Q , относящегося к горизонтальному сечению. Эти значения были получены обычным способом на основании измерений величин $(P \pm Q)$, которые и изображены на фиг. 5.245 вместе с кривой напряжений P , лежащей посередине между ними. Напряжения Q для каждой точки также указаны на фигуре, они тоже отложены на перпендикулярах к среднему сечению.



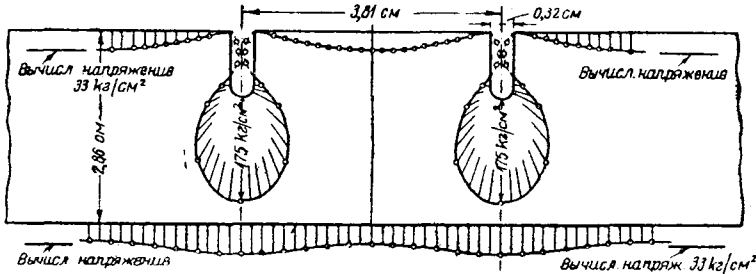
Фиг. 5.246.

Кривые P и Q пересекаются в той точке, где $P = Q = 20,4 \text{ кг/см}^2$; эта точка изображена на фиг. 5.242 (А) черным пятном. Напряжение Q , при этом роде нагрузки, является всегда растягивающим; оно доходит до максимума $28,1 \text{ кг/см}^2$ вблизи от дна надреза и представляет собою относительно малую величину по сравнению с напряжением P , достигающим $168,7 \text{ кг/см}^2$.

Для проверки точности полученных результатов была вычислена для этого сечения сумма сил на единицу толщины. Если p — нормальное напряжение в центре элементарной полоски шириной δu , то эта сумма сил будет равна $\sum p \delta u = 0$, т. е. площадь, ограниченная кривой P , поперечным сечением и крайними ординатами, должна быть равна нулю.

При масштабе длин 1 к 8 и масштабе напряжений $17,85 \text{ кг/см}^2 = 1 \text{ см}$, получаем, что верхняя площадь равна $17,74 \text{ см}^2$, а нижняя $17,48 \text{ см}^2$; разность их равна $0,26 \text{ см}^2$, что подтверждает достаточную для практических целей точность.

Далее изгибающий момент на единицу толщины будет $M = \sum p u \delta u$. Графическое интегрирование диаграммы напряжений дает для этой величины значение $22,0 \text{ кг} \cdot \text{см}$, вместо $23 \text{ кг} \cdot \text{см}$, измеренных непосредственно при условии пренебрежения трением.



Фиг. 5.247.

Отсюда ясно, что ошибка, допущенная при измерениях напряжений, будет не больше $4,5\%$.

Разберем теперь влияние, оказываемое двумя надрезами, показанными на фиг. 5.241 (В). Рассматривая их в поляризованном свете, получаем изоклинические линии, изображенные в правой половине фиг. 5.246, указывающие, как и раньше, на то, что обычное распределение напряжений, вызванное чистым изгибом, быстро восстанавливается уже на небольшом расстоянии от надреза, тогда как между надрезами распределение напряжений оказывается довольно сложным.

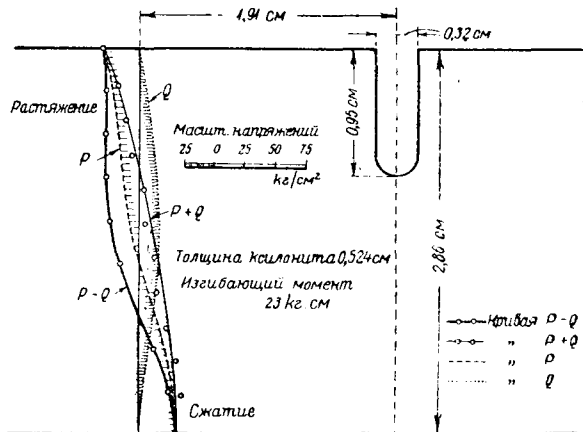
С помощью этих изоклин начерчены траектории главных нормальных напряжений, показанные на левой стороне фиг. 5.246.

Они оказываются такими же, как на фиг. 5.243 для части балки, удаленной от надреза; расположение этих линий, конечно, несколько иное в части балки между двумя надрезами.

Тот факт, что изоклинические линии появляются в верхней части этой балки, между надрезами, доказывает наличие там напряжений и подтверждает таким образом качественную сторону исследования явления.

Вследствие симметрии среднее поперечное сечение должно испытывать нормальные напряжения, как указывает фиг. 5.246, в добавление к этим напряжениям, имеются и нормальные напряжения в сечении, перпендикулярном поперечному.

На фиг. 5.247 дано распределение напряжений в точках контура балки и надрезам; оно замечательно, главным образом, тем небольшим влиянием, которое оказывают друг на друга надрезы. В распределении напряжений у самых надрезам



Фиг. 5.248.

изменение очень невелико по сравнению с распределением, вызванным одним надрезом и описанным в тексте, относящемся к фиг. 5.244.

Распределение напряжений по среднему поперечному сечению интересно в том отношении, что все точки этого сечения оказываются напряженными.

Это распределение напряжений было подробно изучено и полученные величины $P \pm Q$ изображены на фиг. 5.248. Нормальное напряжение P распределяется по сечению здесь нелинейно; оно достигает максимальной величины $29,9 \text{ кг/см}^2$ у верхней грани и $31,6 \text{ кг/см}^2$ внизу. Это распределение напряжений определено с большой точностью, так как это подтверждается равенством нулю полученной при помощи графического интегрирования площади, ограниченной кривой P , крайними ординатами и поперечным сечением; действующий же изгибающий момент, определенный из этого графика, совпадает с действительным с погрешностью не больше $2,65\%$.

Эти результаты показывают, следовательно, что верхняя часть корпуса корабля, имеющая температурные швы этого типа, не совсем свободна от напряжений в промежутках между этими швами; кроме того распределение их довольно сложно, так как в добавление к нормальному напряжению P в точках среднего сечения балки имеется еще другое нормальное напряжение Q ; оно доходит до максимума $16,2 \text{ кг/см}^2$ около середины сечения и представляет собою во всех точках сжимающее напряжение. Этим объясняется наличие на фотографии фиг. 5.242 (B) центрального черного пятна в самом низу, указывающего на то, что разность $P - Q$ в этой точке равна нулю.

На основании фотографии фиг. 5.242 (D) очевидно, что при трех надрезах, расположенных на равных расстояниях друг от друга, можно без большой ошибки принимать то же распределение напряжений, что и в предыдущих случаях. Экспериментальную работу этого рода можно вероятно развить дальше применительно к более сложным случаям; например можно пробовать исследовать влияние, которое оказывают отверстия для окон и дверей в палубных конструкциях, а также влияние, производимое палубными надстройками корабля и т. п. конструкций из легкого сравнительно материала, расположенных в различных местах корпуса.

В заключение интересно заметить, что характер распределения напряжений в корпусе корабля имеет важное значение в связи с видом вибраций корабля под влиянием механизмов; эта тема рассматривалась недавно Муллэном и Броуном.¹

¹ E. B. Moullin and A. D. Browne, On the Periods of a Free-Free Bar Immersed in Water, Proc. Camb. Phil. Soc., July 1928; E. B. Moullin, The Lateral Vibration of Nonuniform Bars with Application to Ships, Proc. Camb. Phil. Soc., October 1928; E. B. Moullin, Some Vibration Problems in Naval Architecture, Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics, Stockholm Meeting, 1930.

ГЛАВА VI.

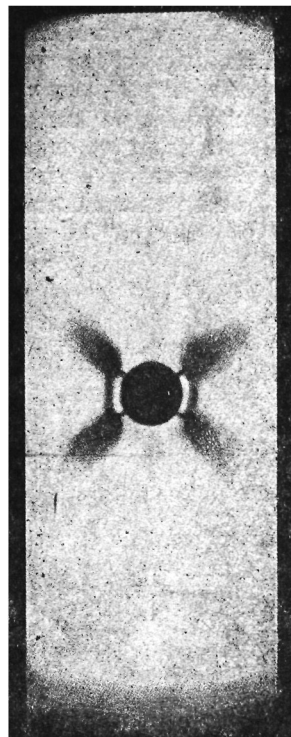
ОТВЕРСТИЯ И ТРЕЩИНЫ.

§ 6.01. *Круглые отверстия.*

Изучение влияния одного или нескольких отверстий на распределение напряжений в какой-нибудь части конструкции или в элементе какой-нибудь машины, находящийся под действием нагрузок, имеет большое значение, потому что при большинстве строительных операций приходится просверливать или пробивать отверстия для болтов и заклепок, служащих для соединения отдельных частей конструкции, с целью придания этим соединениям надлежащей жесткости, или же, наоборот, для сообщения подвижности в плоскости, перпендикулярной к оси поставленного болта или шарнира. Существует, как известно, бесконечное множество комбинаций швов и креплений с применением одних только круглых отверстий, но каково бы ни было это устройство, наличие отверстий заметно изменяет распределение напряжений около них самих и почти всегда значительно повышает величину этих напряжений.

Следует обратить особое внимание на то, что в инженерной практике круглое отверстие часто рассматривают только как уменьшение площади поперечного сечения; на самом деле оно имеет гораздо большее значение, что видно на прилагаемой фотографии (фиг. 6.01) растягиваемой пластинки шириною в 2,54 см с круглым отверстием по середине, диаметром 0,64 см. Изохроматические полосы указывают, что материал сильно напряжен у контура отверстия, в особенности же там, где линии напряжений — изохромы — сближены при прохождении через узкое пространство, образуемое между внешним и внутренним контурами.

Особое значение имеют средние нормальные напряжения σ_{θ} в точках контура отверстия; величины σ_{θ} даны в таблице 6.01 при растягивающей силе, вызывающей напряжение $T = 40 \text{ кг/см}^2$ при отсутствии в пластинке отверстия; угол θ отсчитывается от линии действия силы, а за начало координат принят центр отверстия. Растягивающие напряжения считаются положительными. Наблюдения показывают, что при внешнем усилии любой интенсивности, лишь бы напряженное состояние было в пределах упругости, в точках пересечения контура отверстия с линией действия растягивающей нагрузки появляется сжимающее напряжение, величина которого приблизительно равна интенсивности внешних усилий. По мере удаления от этих точек вдоль контура напряжение уменьшается и переходит через нуль в четырех точках,



Фиг. 6.01.

радиусы которых составляют угол 30° с линией действия силы. Каждая из этих четырех точек из фотографии пластинки видна в виде маленького черного пятна.

При переходе в такие точки контура, радиус которых составляет с линией действия силы угол, больший 30° , напряжения меняют знак, быстро растут по своей величине до тех пор, пока не достигнут максимума величиной около $3T$ в точках контура, для которых угол $\theta = 90^\circ$ и 270° .

Таблица 6.01.

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\bar{\theta\theta}$	-38,0	-28,1	-1,41	40,8	84,4	107,6	120,9
$T(1 - 2 \cos 2\theta)$	-40,1	-29,5	0	40,1	80,1	109,3	120,0

Полученные из опыта значения $\bar{\theta\theta}$ очень точно подчиняются закону $\bar{\theta\theta} = T(1 - 2 \cos 2\theta)$; это выражение, как будет показано в § 6.02, дает точную величину напряжения по контуру отверстия в том случае, если растягиваемая пластинка настолько широка и длинна, что можно пренебрегать влиянием параллельных сторон и закреплениями на концах. Этот простой результат может быть применен к ряду практических задач, где встречаются отдельные отверстия, в точках контура которых главные напряжения P и Q можно узнать иным образом, как, например, в тонком вращающемся диске.

В таких случаях величина напряжений, возникающих на контуре небольшого отверстия, может быть определена посредством наложения, причем получается

$$\begin{aligned} \bar{\theta\theta} &= P(1 - 2 \cos 2\theta) + Q \left\{ 1 - 2 \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \\ &= P(1 - 2 \cos 2\theta) + Q(1 + 2 \cos 2\theta). \end{aligned}$$

Например, если

$$Q = P,$$

то

$$\bar{\theta\theta} = 2P,$$

т. е. напряжение будет постоянным.

Если

$$Q = -P,$$

то имеем

$$\bar{\theta\theta} = -4P \cos 2\theta,$$

с максимумами $\pm 4P$.

В других случаях, каковы, например, круговые туннели в скале, значения P и Q приходится определять приблизительно.

§ 6.02. Распределение напряжений в широкой растянутой пластинке с одним отверстием.

Для напряжений в растянутой пластинке любой конечной ширины и длины при любом положении кругового отверстия по отношению к прямоугольному контуру пластинки до сих пор не получено точного общего решения, основанного на уравнениях теории упругости.

Джеффри¹ разбирал тот случай, когда и длина и ширина пластинки очень велики, а отверстие расположено на конечном расстоянии от одного из краев; он показал, как получить решение в полярных координатах.

Совсем недавно Хоулэнду² удалось получить, по способу последовательных приближений, основанных на решениях вида, данного в главе VI, точное решение для того случая, когда длина пластинки очень велика и отверстие расположено симметрично относительно прямолинейного контура пластинки.

Однако, в том случае, где оба прямых боковых края удалены в бесконечность, так что нам приходится иметь дело с маленьким отверстием в широкой растягиваемой пластинке, решение легко получается в простой форме.

Пусть T будет среднее растягивающее напряжение в пластинке при отсутствии в ней отверстия, а θ — угол, отсчитываемый, как и раньше, от линии действия растягивающей силы; эту линию мы принимаем за ось x в прямоугольной системе координат.

Таким образом функция напряжений для пластинки без отверстия выражается уравнением

$$\chi_0 = \frac{1}{2} T y^2 = \frac{1}{2} T r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\theta)$$

Напряжения на контуре $r = a$ отверстия, соответствующие этой функции имеют вид (см. § 2.42):

$$\overline{rr}_0 = \frac{1}{2} T (1 + \cos 2\theta),$$

$$\overline{r\theta}_0 = -\frac{1}{2} T \sin 2\theta,$$

$$\overline{\theta\theta}_0 = \frac{1}{2} T (1 - \cos 2\theta).$$

Для решения задачи следует ввести дополнительную функцию напряжений χ_1 , соответствующую напряжениям, уничтожающим напряжения на контуре $r = a$ и в то же время обращающимся в нуль на бесконечности.

Рассматривая теперь найденное в § 4.31 (формула 4.313) решение для χ в полярных координатах, приводящее, как оказалось при проверке, к однозначным значениям для перемещений, мы видим при изучении выражений (4.3141, 2, 3) для напряжений, что члены с коэффициентами $A_0, A_1, A_1', A_n, A_n', C_n, C_n'$ ($n \geq 2$) приводят к конечным или бесконечным напряжениям на бесконечности, и должны быть поэтому отброшены. При дальнейшем изучении выражений (4.3141, 2, 3) мы приходим к заключению, что необходимо в них оставить лишь члены с коэффициентами B_0, B_2 и D_2 , если мы хотим получить в \overline{rr} лишь члены, не зависящие от θ или заключающие в себе множитель $\cos 2\theta$, а в $\overline{r\theta}$ — лишь члены с множителем $\sin 2\theta$, которые необходимы для уничтожения напряжений \overline{rr}_0 и $\overline{r\theta}_0$.

Наша функция напряжений следовательно имеет вид:

$$\chi_1 = B_0 \lg r + B_2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + D_2 \cos 2\theta, \quad (6.021)$$

с соответствующими напряжениями

$$\overline{rr}_1 = \frac{B_0}{r^2} - 6B_2 \frac{\cos 2\theta}{r^4} - 4D_2 \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \quad (6.022)$$

¹ G. A. Jeffery, Phil. Trans. A, 201, 288 и след.

² R. C. J. Howland, On the Stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, Phil. Trans. A, 209, 1930, 49 — 86.

$$\overline{r\theta}_1 = -6B_2 \frac{\sin 2\theta}{r^4} - 2D_2 \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \quad (6.023)$$

$$\overline{\theta\theta}_1 = -\frac{B_0}{r^2} + 6B_2 \frac{\cos 2\theta}{r^4}. \quad (6.024)$$

Составляя теперь $\chi = \chi_0 + \chi_1$, получаем:

$$\overline{rr} = \frac{1}{2} T(1 + \cos 2\theta) + \frac{B_0}{r^2} - \frac{6B_2 \cos 2\theta}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \cos 2\theta,$$

$$\overline{r\theta} = -\frac{1}{2} T \sin 2\theta - \frac{6B_2 \sin 2\theta}{r^4} - \frac{2D_2}{r^2} \sin 2\theta,$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{1}{2} T(1 - \cos 2\theta) - \frac{B_0}{r^2} + \frac{6B_2 \cos 2\theta}{r^4}.$$

Если положим теперь $\overline{rr} = 0$, $\overline{r\theta} = 0$, при $r = a$, и приравняем нулю свободные члены и коэффициенты при $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, то получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T + \frac{B_0}{a^2} &= 0, \\ \frac{1}{2} T - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} &= 0, \\ -\frac{1}{2} T - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{2D_2}{a^2} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$B_0 = -\frac{1}{2} a^2 T, \quad 6B_2 = -\frac{3}{2} a^4 T, \quad 2D_2 = a^2 T;$$

и для полной функции напряжений получается выражение

$$\chi = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\theta) - \frac{1}{2} a^2 T \lg r - \frac{1}{4} \frac{a^4 T}{r^2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} a^2 T \cos 2\theta \quad (6.025)$$

с средними напряжениями, равными:

$$\overline{rr} = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + \cos 2\theta \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \right\}, \quad (6.026)$$

$$\overline{r\theta} = -\frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta, \quad (6.027)$$

$$\overline{\theta\theta} = \frac{1}{2} T \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\}. \quad (6.028)$$

Для $\overline{\theta\theta}$ на контуре из 6.028 получаем выражение:

$$(\overline{\theta\theta})_{r=a} = T \{ 1 - 2 \cos 2\theta \}, \quad (6.029)$$

как указано в § 6.01.

Это решение впервые получено Киршем,¹ но оно им как будто не было выведено ни из какой общей теории.

Несмотря на ограниченное число случаев применения этого решения на практике, вследствие наличия дополнительных контурных условий, все же это решение очень полезно для приближенного вычисления распределения напряжений, особенно

¹ G. Kirsch, Die Theorie der Elasticität und die Bedürfnisse der Festigkeitlehre, Zt. d. V. D. Ingenieure, 32, 1898, 797—807.

их максимумов и минимумов в пределах, которые могут быть получены путем сравнения экспериментальных данных с точным решением. Возьмем для примера случай растянутой пластинки, о которой упоминалось раньше, с отверстием диаметром теперь уже 0,953 см; для этого случая требуется отыскать новое значение T , так как эксперимент производится в иных условиях по сравнению с теоретическим случаем, для которого равномерно распределенное напряжение T , соответствующее пластинке бесконечной ширины, не может быть осуществлено. Опыт показывает, что для нашей цели достаточно предположить, что величина $\bar{\theta\theta}$ в точках минимального поперечного сечения приближенно представлена уравнением (6.028). Если следовательно T_m будет средним напряжением по этому сечению, вычисляемым по заданной нагрузке, а края пластинки будут находиться на расстоянии ca от центра отверстия, то на основании (6.028), где $\theta = \pi/2$, получим

$$T_m a (c - 1) = \int_a^{ca} (\bar{\theta\theta})_{\theta = \pi/2} \cdot dr = \int_a^{ca} T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right) dr,$$

или

$$T_m = T \left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2c^3} \right); \tag{6.0291}$$

отсюда в этом случае $T = 42,0 \text{ кг/см}^2$. Сравнивая этот результат с полученными (таблица 6.02) экспериментальными данными, найдем, что они прекрасно согласуются, хотя вообще сходимость в этом случае будет меньшей, чем в предыдущем.

Таблица 6.02.

$\frac{\theta}{\theta\theta}$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$T(1 - 2 \cos 2\theta)$	-40,8	-31,6	-8,4	42,9	84,4	112,5	128,6
	-42,2	-30,9	0	42,2	84,0	114,9	126,2

Наибольшая погрешность оказывается при $\theta = 30^\circ$, где благодаря контурным условиям существует значительное отрицательное напряжение.

Для центрального отверстия с диаметром не больше, чем в четверть ширины пластинки, мы находим действительно удовлетворительное совпадение опытных и теоретических данных, что дает повод предполагать, что максимальное напряжение будет приблизительно $3T$, где T выражается через среднее напряжение по уравнению (6.0291), или в более удобной форме

$$(\bar{\theta\theta})_{\max} = \frac{6c^3 T_m}{2c^3 + 2c^2 + c + 1}. \tag{6.0292}$$

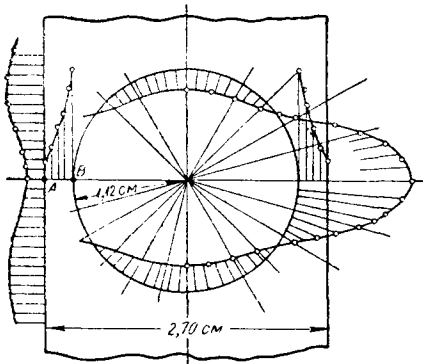
Если c велико по сравнению с единицей, то выражение это принимает более простую форму

$$(\bar{\theta\theta})_{\max} = \frac{3c T_m}{c + 1}. \tag{6.0293}$$

Так как нередко встречаются пластинки с отверстием больших размеров, то следует изучить этот случай для растягиваемой пластинки. Один такой случай изображен на фиг. 6.02, где круглое отверстие, 2,24 см в диаметре, просверлено в растягиваемой пластинке шириной 2,79 см симметрично относительно его прямолинейных граней. На этой фигуре изображено распределение напряжений в концах контура отверстия и по прямым граням; сразу бросается в глаза, насколько этот случай только в общих чертах напоминает предыдущие.

Часть контура с сжимающими напряжениями $\bar{\sigma}$ здесь гораздо больше, и напряжения эти переходят в растяжение лишь в точках, радиусы которых составляют с линией действия силы угол в 54° , достигая максимума, как и прежде, в точках при $\theta = 90^\circ$ и 270° .

Другую характерную особенность, которая очень ясно видна на фиг. 6.02, представляет собою изменение напряжений по прямолинейному контуру. Минимальная величина напряжений оказывается в точках пересечения этого контура с центральным поперечным сечением; по мере удаления в обе стороны от этой точки напряжение возрастает до максимума, а затем снова уменьшается, приближаясь к постоянной величине на некотором расстоянии от отверстия. Вдоль линии AB наблюдается значительное изменение напряжений; подобную же особенность, но менее ярко выраженную, можно наблюдать и при меньших по размеру отверстиях; иногда предполагали, что при очень большом отверстии напряжение по наименьшему сечению AB распределяется равномерно; этого иногда не бывает в пределах



Фиг. 6.02. Напряжения, вызванные большим отверстием в растянутом образце.

упругости; наоборот, изменение величины напряжений становится еще заметней. В пластинке шириною 13,2 см с центральным круглым отверстием диаметром 12,7 см напряжение по наименьшему поперечному сечению все-таки достигает своего максимума у контура отверстия и падает почти до нуля у наружных точек, изменяясь почти по линейному закону. В этом случае следовательно максимальное напряжение практически равно $2T_m$.

При дальнейшем увеличении отверстия напряжения у наружного края пластинки все больше приближаются к нулю, не переходя в сжатие. Этот результат подсказывает возможную форму для образцов при динамическом испытании на растяжение; для этой цели следует выбрать образец прямоугольного сечения с очень большим центральным отверстием круг-

лой или эллиптической формы. В хрупких материалах описанное выше распределение напряжений сохраняется до момента разрушения; в пластичных же материалах напряжения по наименьшему поперечному сечению перед разрушением стремятся к равномерному распределению. Таким образом величина напряжений при разрыве поддается более точному вычислению, чем при опытах на перелом надрезанных образцов, в которых распределение напряжений чрезвычайно сложно.

Если мы обратимся теперь к математическим исследованиям Хоуланда, относящимся к пластинке с отверстием, диаметр которого равен половине ширины пластинки, то найдем,¹ что его выводы, в общем, подтверждают ту картину распределения напряжений, которая получена оптическим методом. Однако, с увеличением диаметра отверстия, закон распределения напряжений $\bar{\sigma}$ по наименьшему поперечному сечению очень сильно расходится с (6.028); эпюра напряжений $\bar{\sigma}$ в функции от r имеет точку перегиба и указывает на резкое падение этого напряжения по мере приближения к прямому краю. Эта формула не дает даже приблизительно линейного распределения напряжения $\bar{\sigma}$, а его величина у прямолинейного контура оказывается значительно менее той, которая получена из эксперимента. В точках вдоль прямого края пластинки теоретические исследования подтверждают наличие минимума растягивающих напряжений у наименьшего поперечного сечения с увеличением до максимума по обе стороны от этого сечения:

¹ Loc. cit., стр. 83—85.

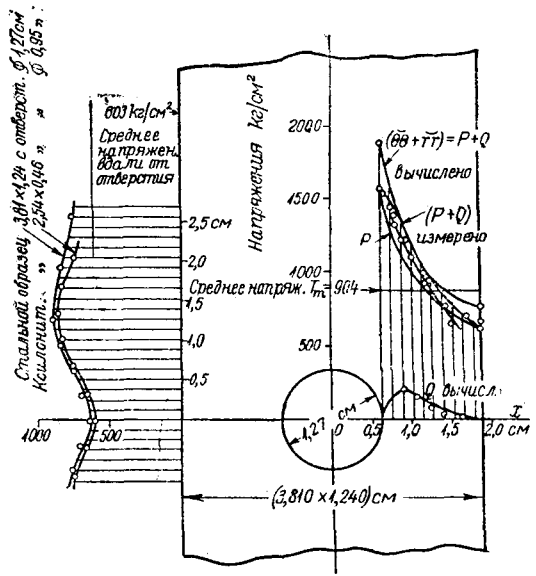
это явление в теории выражено даже более резко. Для кругового контура положение точек, в которых напряжение $\theta\theta$ меняет знак, совпадает с тем, которое получается оптически; однако, максимальное растяжение (в наименьшем поперечном сечении) и максимальное сжатие (в точках на оси пластинки) несколько превосходят те значения, которые получаются опытным путем. В общем же совпадение теоретических вычислений с наблюдением может считаться удовлетворительным, в особенности если принять во внимание, что в тонкой части пластинки AB (фиг. 6.02) расстояние всех точек от края всюду недостаточно велико по сравнению с ее толщиной; в таком же случае теряют силу основные положения обобщенного плоского напряженного состояния, лежащие в основе как математической теории, так и теории оптического исследования (см. уравнения 2.2691, 2, 3 и § 3.31).

§ 6.03. Распределение напряжений в стальной растянутой пластинке с центральным отверстием.

В § 6.14 будет математически доказано, что если контур отверстия будет свободным от напряжений, или же силы, приложенные к этому контуру, будут находиться в равновесии, то выражения для напряжений не будут заключать упругих постоянных. Таким образом, распределение напряжений в растягиваемой пластинке с отверстием будет точно таким же, как и в пластинке той же самой формы и при такой же нагрузке, но изготовленной из другого материала.

Интересно, все-таки, показать это независимо от теории, путем экспериментального исследования напряжений в образцах из двух различных материалов, в особенности же, если один из них будет прозрачным, а другой непрозрачным, как, например, сталь. В таком случае лучше всего сравнивать значения суммы $(P + Q)$ средних главных нормальных напряжений, полученные путем измерения поперечных изменений толщины пластинки, так как очень трудно производить какие-либо другие точные измерения напряжений в непрозрачном теле. Но даже и в таком случае изменения размеров стального образца настолько ничтожны, что выполнение опыта оказывается затруднительным. Что это действительно так, можно убедиться из соотношения между средней деформацией s_z и средними напряжениями P и Q , которые получаются из уравнения $Es_z = -\eta(P + Q) \dots (2.472)$ § 2.47; при $E = 0,21 \times 10^7 \text{ кг/см}^2$ и $\eta = 0,3$, поперечная деформация будет равна $1,27 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ для $P + Q = 7 \text{ кг/см}^2$ в растягиваемой пластинке, толщиной 1,3 см, что приблизительно лежит на границе возможности чисто механических измерений.

Интересные экспериментальные данные можно найти в исследованиях Сатаке, производившихся им недавно с целью изучения распределения напряжений около центрального отверстия с диаметром 1,3 см, в растянутой стальной пластинке, шириною 3,81 см и толщиной 1,24 см, находящейся под действием силы в 2,8 т. Это соответствует среднему напряжению $T_m = 903 \text{ кг/см}^2$, по наименьшему поперечному сечению и эквивалентному напряжению $642,5 \text{ кг/см}^2$, вычисленному по формуле (6.0291).



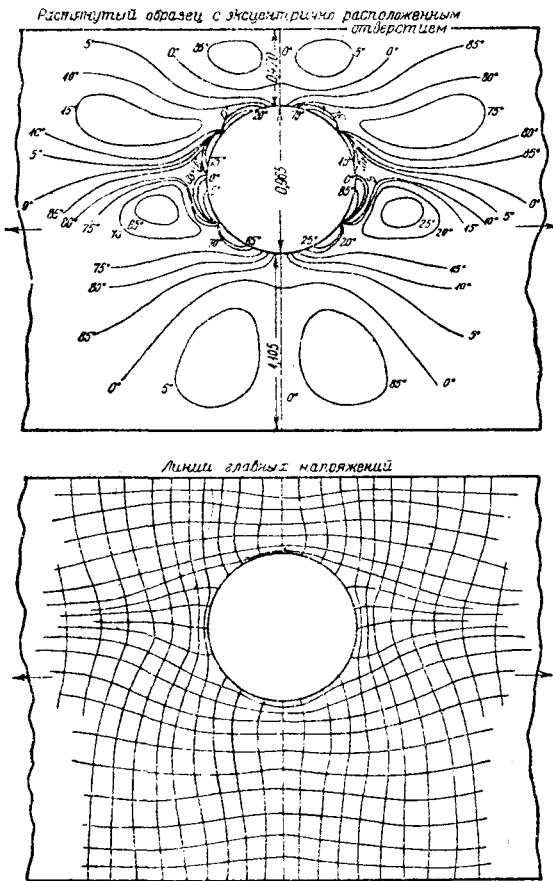
Фиг. 6.03.

Величина E для этой стали была равна $2,13 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и $\eta = 0,31$ в наименьшем сечении; измеренные величины деформаций и вычисленные значения напряжений даны в таблице 6.03.

Таблица 6.03.

Расстояние от центра отверстия (см)	0,650	0,676	0,813	0,955	1,209	1,463	1,717	1,803
Боковое сжатие в миллионных долях см	589	577	521	455	373	290	267	234
$(P + Q) \text{ кг/см}^2$	1603	1568	1417	1237	1016	0788	0725	0636

Это распределение напряжений было сравнено с распределением, полученным в прозрачной растянутой пластинке шириной 2,54 см с центральным отверстием



Фиг. 6.041.

в 0,953 см диаметром. Таким образом размеры прозрачной пластинки приблизительно пропорциональны размерам стальной. Сравнение сделано на фиг. 6.03 путем изменения линейных масштабов таким образом, чтобы отверстия соответствовали одно другому по величине; одновременно с этим напряжения в прозрачном образце изменены в отношении величин T для каждой пластинки. Проведав это, видим, что кривые $(P + Q)$ хорошо совпадают, за исключением части кривой, близкой к отверстию, где кривая распределения напряжений для стали проходит несколько ниже, чем кривая для прозрачного материала. Для оценки общей точности эксперимента величина нормальных напряжений Q по наименьшему сечению была вычислена для стали по экспериментальным данным, полученным для прозрачной пластинки, с изменением пропорционально средним напряжениям; далее была построена новая кривая нормальных напряжений P по этому сечению; из этой кривой путем графического интегрирования была получена величина растягивающей силы, оказавшаяся равной 2,9 т, что дает погрешность в сторону увеличения на 3,5%.

Таким образом экспериментальная проверка тождественности распределения напряжений оказывается удовлетворительной; однако возможна и другая проверка для точек на прямых сторонах пластинки, где оптические измерения дают такого рода напряжения, какие раньше не были измеряемы в стальной образце; когда же эти напряжения были изображены в масштабах, соответствующих эквивалентным напряжениям T , то оказывается, что предсказанное оптическими экспериментами распределение напряжений действительно имеет место и в стальной пластинке, как видно на фиг. 6.03.

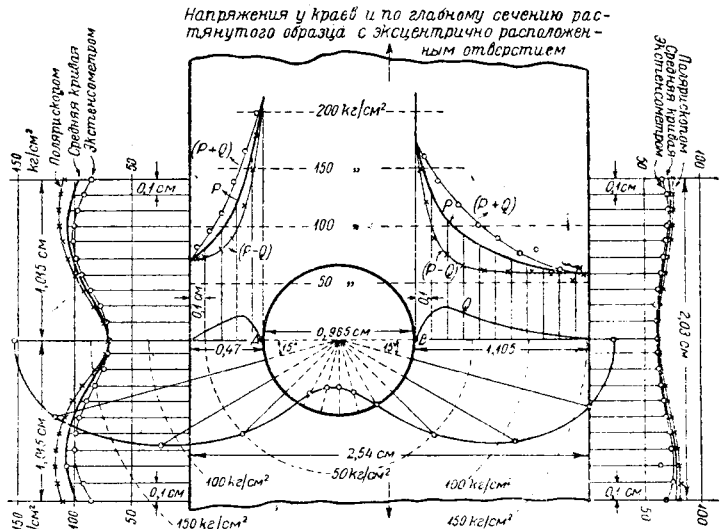
Этот последний пример распределения напряжений служит хорошей иллюстрацией преимущества оптических измерений, так как изучение изохроматических полос в поляризованном состоянии придает явлению наглядность, в то время как изучение напряженного состояния в металлических образцах поддается эксперименту с большими трудностями и требует чрезвычайной аккуратности.

§ 6.04. Растянутая пластинка с внецентренным отверстием.

Отверстие, центр которого лежит не на оси растягиваемой пластинки, оказывает большое влияние на распределение напряжений даже при небольших смещениях центра отверстия, как видно из случая, исследованного Фукуда.

Он измерял напряжения в растянутой пластинке шириною 2,54 см, с отверстием 0,953 см диаметром, центр которого находился на расстоянии 0,318 см от оси пластинки.

Несимметричность изоклин и линий главных нормальных напряжений на фиг. 6.041 соответствует этому расположению отверстия; исследование же величины напряжений указывает на то, что при сохранении общего характера явления, уже описанного раньше, для случая центрально расположенного отверстия, меньшая величина площади сечения по одну сторону отверстия служит причиной возникновения вообще более высоких напряжений в



Фиг. 6.042.

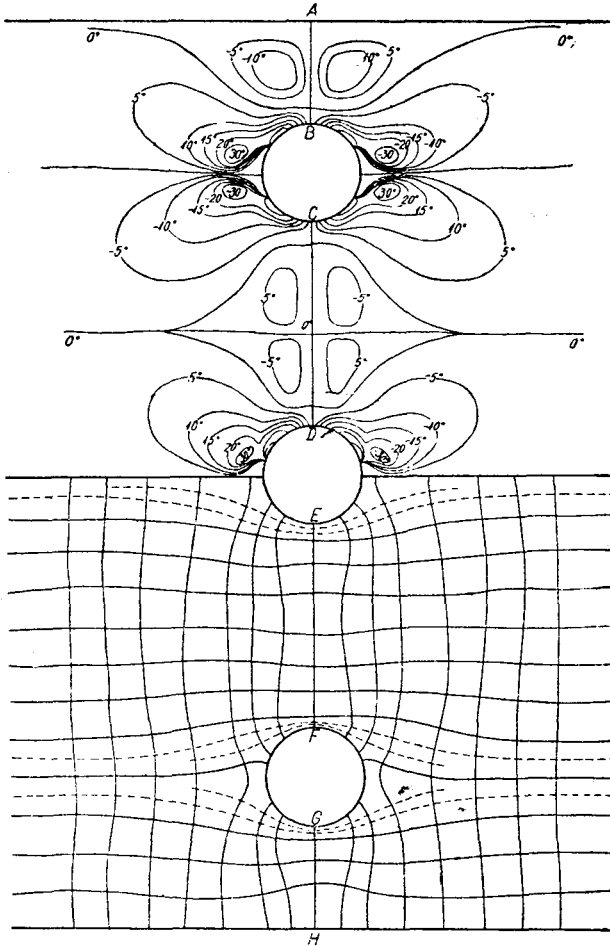
точках этой области. В этом случае, при общей нагрузке на пластинку 45,4 кг, максимальные напряжения будут в точке А; они достигают здесь 217,9 кг/см²; второй максимум напряжений оказывается в точке В, где он равен 175,0 кг/см², как показано на графике (фиг. 6.042); этот график показывает характер распределения напряжений в точках контура и наименьшего поперечного сечения.

Как и раньше, существуют две несимметричные дуги кругового контура, в точках которых оказываются сжимающие напряжения; характер изменения напряжений вдоль прямых сторон сохраняется в прежнем виде, что получено из оптических и механических исследований, независимых одно от другого; хотя результаты этих исследований и не совсем точно совпадают, особенно с одной стороны, но все-таки они не оставляют никаких сомнений относительно характера распределения напряжений. Некоторая доля полученной здесь разницы зависит от того, что в то время как оптические измерения могут производиться в точках, начиная от самого контура, механические измерения могут начинаться только с точек линии, отстоящей от края не менее чем на 0,03 см, иначе измерительная игла может соскользнуть. В данном случае та параллельная линия, от которой начато механическое исследование, отстоит на 0,05 см от края. Следует заметить, что напряжение Q достигает своего максимума на наименее напряженной стороне наименьшего поперечного сечения, благодаря большей ширине этой части, представляющей большую свободу развитию этого напряжения. За исключением отсутствия симметрии напря-

жения P в этом сечении не обнаруживают никаких изменений в своем характере; величина их определена достаточно точно, так как их сумма, вычисленная графически, дает для растягивающей силы, величину в 45,3 кг.

§. 6.05. Группы отверстий.

В инженерной практике отверстия круглой или иной формы встречаются чаще всего группами, а близость их друг к другу



Фиг. 6.051. Изоклины и линии главных напряжений в растянутом образце с тремя отверстиями.

или иной формы встречаются чаще всего группами, а близость их друг к другу значительно осложняет распределение напряжений. Примеры такого рода встречаются в конструкциях палуб судов, например миноносцев-истребителей; для подобных случаев производились измерения разности напряжений $P-Q^1$ с целью отыскания максимальных напряжений, возникающих по контурам, имеющих в настиле палубы отверстий для труб и для люков; влияние групп круглых отверстий было недавно изучено Коппером. Он рассматривал три отверстия диаметром d , расположенных в ряд поперек растягиваемой пластинки шириною $9d$, с промежутками между отверстиями по $2d$, с расстоянием d между крайним отверстием и краем пластинки. На фиг. 6.051 изображены полученные для этого случая изоклины, указывающие на то, что напряжение в точках контура среднего отверстия симметрично относительно оси образца; не так обстоит дело с двумя другими отверстиями по отношению к линии, параллельной оси, которая проходит через их центры; разница объясняется близостью внешнего контура и влиянием одного отверстия на другое. Эта разница проявляется в несколько несимметрич-

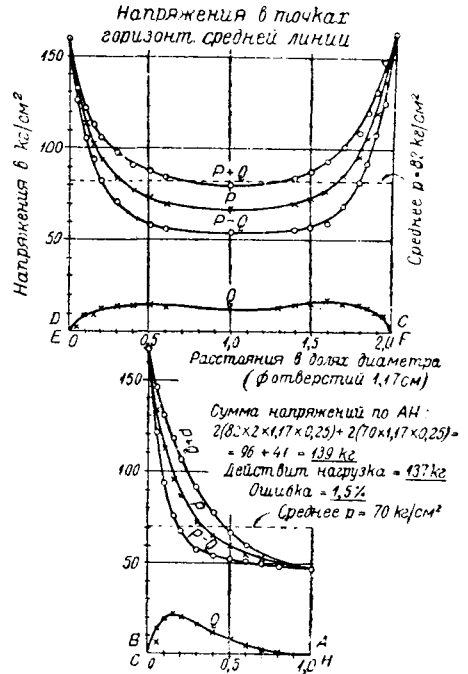
ном характере изображенных на той же фигуре линий главных нормальных напряжений, полученных из изоклинических линий. Довольно интересно распределение напряжений по наименьшему поперечному сечению (фиг. 6.052), где максимум и минимум нормальных напряжений соответствует точкам B и A , несмотря на то, что части сечения AB приходится испытывать меньшую нагрузку, чем внутренней части CD . При нагрузке 539,3 кг на

¹ E. G. Coker, The determination by photo-elastic methods of the distribution of stress in plates of variable section, with some applications to ships' plating, Trans. Inst. Naval Architects, 1911.

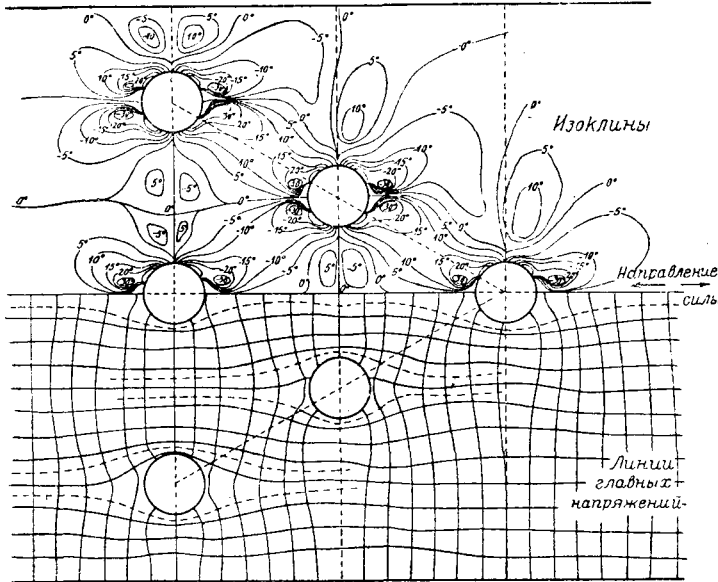
1 см толщины пластинки, шириною в 10,478 см, величина нормального напряжения в точке В достигает 165,2 кг/см², а в точке С 158,2 кг/см². В самой крайней точке А напряжение падает до 45,7 кг/см² по сравнению с 53,4 кг/см² на средней линии; при графическом интегрирования напряжений *P*, направленных по оси пластинки, оказывается, что внутренняя часть сечения *CD* воспринимает в среднем напряжение 82,6 кг/см², а для наружной части *AB* напряжение в среднем равно 69,6 кг/см². Среднее напряжение по поперечному сечению netto (учитывая три отверстия диаметром по 1,17 см) будет равняться 77,3 кг/см²; полученная же при помощи измерений общая сумма напряжений будет на 1,70% больше приложенного в действительности груза.

Напряжение *Q* тоже слегка несимметрично между точками *C*, *D* с двумя максимумами, один из которых, ближайший к *D*, имеет величину в 15,1 кг/см², а ближайший же к *C* в 17,6 кг/см²; минимум напряжения равен 12,7 кг/см² в точке посередине пластинки. По сечению *AB* максимальное напряжение *Q* повышается до 21,1 кг/см².

В точках прямых наружных сторон контура напряжение также распределяется неравномерно. Эта неравномерность является следствием влияния отверстий, минимум



Фиг. 6.052.



Фиг. 6.053.

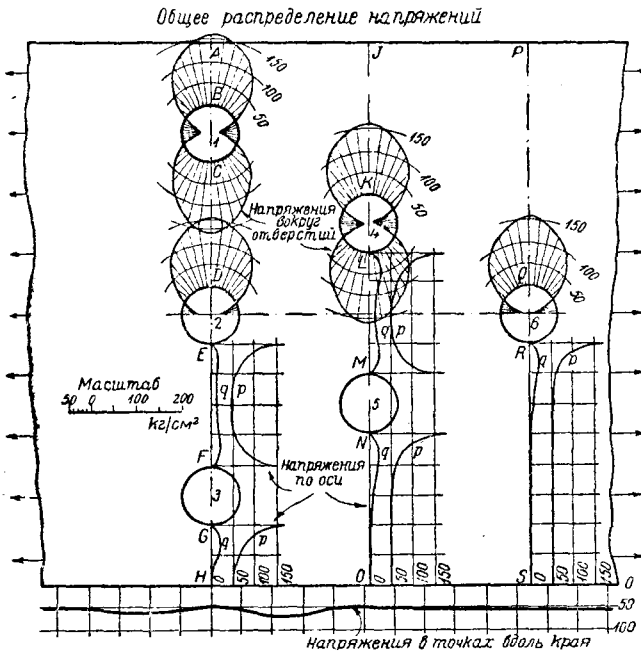
расположения отверстий является часто встречающаяся на концах стыковых накладок в клепаных конструкциях группа шести отверстий, расположенных по

минимум напряжения находится в пересечении прямых сторон пластинки с поперечным сечением, проходящим через центры отверстий; по обе стороны от этого пересечения напряжения возрастают, достигая максимума на некотором расстоянии от него; при дальнейшем удалении напряжения приближаются к постоянной величине; таким образом и здесь сохраняются все характерные особенности, отмеченные в случае растянутой пластинки с одним отверстием.

Дальнейшим усложнением этого типа

равностороннему треугольнику с центрами в вершинах и серединах каждой из его сторон, как это показано на фиг. 6.053; на этой фигуре изображено расположение изоклин и полученных из них линий главных нормальных напряжений; единственной осью симметрии является средняя линия пластинки.

В этом примере пластинка имеет ширину 11,4 см и толщину 0,467 см; отверстия диаметром 1,27 см расположены по наименьшему поперечному сечению так же, как и в предыдущем случае. Несмотря на то, что распределение напряжений по этому сечению имеет тот же характер, как и в предыдущем случае, все же недалеко расположенные три других отверстия и особенно два ближайших из них оказывают влияние на это распределение.



Фиг. 6.054.

Наибольшее напряжение (фиг. 6.054) поперечному получается в точке у наружного отверстия; величина этого напряжения доходит до $163,8 \text{ кг/см}^2$ в точке G при напряжении в $155,4 \text{ кг/см}^2$ в точке F; среднее напряжение по части сечения AB будет теперь $75,6 \text{ кг/см}^2$, по части же сечения CD — $72,1 \text{ кг/см}^2$, так что в этом случае на внешние части сечения приходится большая часть груза, а на внутренние — меньшая, в сравнении с соотношением площадей этих частей сечения. Путем графического вычисления полной нагрузки по сечению находим, что она на $4,5\%$ меньше действительной нагрузки; таким образом пра-

вильность указанного изменения и распределения напряжений не вполне достоверна. По поперечному сечению, проходящему через центры следующего ряда отверстий, максимумы напряжений меняются местами, но разница в максимальных напряжениях в противоположных точках на контуре каждого отверстия этого сечения очень ничтожна.

Средняя ошибка, допущенная при измерении, вычисленная путем графического суммирования по этому поперечному сечению, равняется $0,7\%$. Исследование напряжений по сечению, проходящему через единственное отверстие, показывает, что влияние имеющихся рядом с ним отверстий очень невелико. Нормальное напряжение достигает в точке R максимума в $160,3 \text{ кг/см}^2$ при среднем нормальном напряжении $56,3 \text{ кг/см}^2$. Суммирование нормальных напряжений по всему сечению дает $97,5\%$ действительной нагрузки, равной $584,0 \text{ кг}$ на 1 см толщины пластинки.

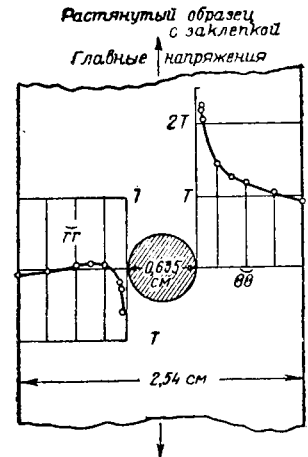
Следует отметить несколько интересных особенностей в кривых распределения напряжений по контурам крайних отверстий; эти кривые расположены теперь не вполне симметрично по отношению к поперечному сечению, на что указывает расположение изоклин на фиг. 6.053 и что подтверждается измерениями напряжений. Это особенно заметно в тех частях контуров отверстий, которые имеют сжимающие напряжения. В точках вдоль прямых краев расположение отверстий и расстояния между ними вызывают описанные выше характерные для таких

случаев особенности в распределении напряжений; напряжения в этих точках меняются, достигая минимальных величин в точках пересечения прямого контура с поперечным сечением, проходящим через центр одного отверстия, и минимум напряжения едва заметен, благодаря большому расстоянию этой точки от отверстия.

§ 6.06. Влияние заклепки, плотно заполняющей центральное отверстие в растянутой пластинке

Часть задачи о распределении напряжений в клепаных соединениях заключается в определении влияния заклепки, заполняющей отверстие, независимо от какой-либо нагрузки, приложенной к соединению. При опытах, поставленных для изучения этого вопроса, в отверстие в растянутой пластинке вставлялся прозрачный диск; при отсутствии нагрузки на пластинку диск по всему своему контуру плотно соприкасался с контуром отверстия, без какого-либо давления между ними.

При нагружении пластинки соприкосновение между контурами диска и отверстия прекращается, за исключением двух небольших дуговых участков на концах поперечного диаметра заклепки; давление по этим участкам распределено неравномерно, но симметрично по отношению к наименьшему поперечному сечению пластинки. Поверхность отверстия в этих частях контура испытывает таким образом местное нормальное давление, вызывающее в пластинке добавочную систему напряжений, причем в точках у наименьшего поперечного сечения возникают при этом средние сжимающие напряжения \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$, достигающие значительной величины на внутренней грани отверстия и затем быстро убывающие. Это явление изучалось экспериментально, и напряжения \overline{rr} , $\overline{\theta\theta}$ определены в точках поперечного сечения, для полосы шириною в 2,54 см с центральным отверстием в 0,64 см диаметром



Фиг. 6.061. Напряжения в растянутом образце от нажатия стержня заклепки на края центрально расположенного отверстия.

(фиг. 6.061); из этих наблюдений видно, что в этом случае напряжения \overline{rr} в точках контура $= \frac{1}{2} T$, вместо нуля, и напряжения $\overline{\theta\theta} = 2T$, вместо $3T$. При металли-

ческом диске значения \overline{rr} бывают больше. На основании теоретических исследований Суехиро¹ для очень широкой растянутой пластины получены следующие формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{1}{2} T - \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \overline{r\theta} &= - \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\}$$

Вывод формул основан на предположениях, что заклепка изготовлена из того же материала как и сама пластинка, что она все время находится во всестороннем

¹ Dr K. Suehiro, The distribution of stress in a tension strap having a circular hole filled with a plug, The Society of Mechanical Engineers, Japan, 1914.

соприкасании с контуром отверстия при действии нагрузки и что между соприкасающимися поверхностями нет трения.

При таких условиях $\overline{rr} = -\frac{1}{4}T$ и $\overline{\theta\theta} = 1\frac{3}{4}T$ во внутренних точках наименьшего поперечного сечения. Вследствие принятых предположений, не соответствующих действительности, полученное в результате вычислений изменение в величине напряжений будет меньше, чем найденное экспериментальным путем. Распределение напряжений в самой заклепке близко подходит к распределению для нагруженного цилиндра, находящегося между двумя параллельными плоскостями (см. § 4.37; 4.38).

Результаты, полученные Суэхиро, могут быть, однако, развиты дальше применительно к очень важному практически случаю, когда первоначальный диаметр болта или заклепки оказывается больше диаметра отверстия, и их приходится с усилием вгонять в отверстие пластинки. В этом случае, если считать, что к пластинке на бесконечности приложено растягивающее напряжение T , задача может быть решена при следующих предположениях:

1) Пренебрегают трением между заклепкой и пластинкой.

2) Соприкасание между заклепкой и пластинкой не прекращается по всему контуру отверстия.

Тогда условия на контуре $r = a$ будут

$$\overline{rr}_1 = \overline{rr}_2, \quad (6.0611)$$

$$\overline{r\theta}_1 = \overline{r\theta}_2 = 0, \quad (6.0612)$$

$$(U_r)_2 = (U_r)_1 + c; \quad (6.0613)$$

причем значки 1 и 2 относятся к заклепке и к пластинке, соответственно; c обозначает разницу между первоначальными радиусами заклепки и отверстия.

Тогда оказывается, что функции напряжений типа

$$\gamma_1 = Ar^2 + Br^2 \cos 2\theta + Cr^4 \cos 2\theta, \quad (6.0621)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4}T(1 - \cos 2\theta)r^2 + D \cos 2\theta + (E \cos 2\theta)/r^2 + F \operatorname{lg} r; \quad (6.0622)$$

дают решение задачи и приводят к правильному выражению для напряжений на большом расстоянии от отверстия.

Напряжения и перемещения, необходимые для подстановки в условия на контуре (6.0611, 2, 3); представляются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr}_1 &= 2A - 2B \cos 2\theta, \\ \overline{r\theta}_1 &= (2B + 6Cr^2) \sin 2\theta, \\ \overline{rr}_2 &= \frac{1}{2}T(1 + \cos 2\theta) - \left(\frac{4D}{r^2} + \frac{6E}{r^4} \right) \cos 2\theta + \frac{F}{r^2}, \\ \overline{r\theta}_2 &= - \left(\frac{1}{2}T + \frac{2D}{r^2} + \frac{6E}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.063)$$

$$2\mu_1(U_r)_1 = 2A(1 - 2\sigma_1)r - (2Br + 4\sigma_1Cr^3) \cos 2\theta,$$

$$2\mu_2(U_r)_2 = \frac{1}{2}rT(1 - 2\sigma_2) - \frac{F}{r} + \left\{ \frac{1}{2}rT + \frac{4D(1 - \sigma_2)}{r} + \right. \\ \left. + 2\frac{E}{r^3} \right\} \cos 2\theta. \quad (6.064)$$

Из условий на контуре отверстия ($r = a$) получаем шесть уравнений:

$$2A = \frac{1}{2} T + \frac{F}{a^2}, \quad (6.0651)$$

$$2B = -\frac{1}{2} T + \frac{4D}{a^2} + \frac{6E}{a^4}, \quad (6.0652)$$

$$2B + 6Ca^2 = 0, \quad (6.0653)$$

$$\frac{1}{2} T + \frac{2D}{a^2} + \frac{6E}{a^4} = 0, \quad (6.0654)$$

$$\frac{2Aa(1-2\sigma_1)}{2\mu_1} + c = \frac{1}{2} \frac{aT(1-2\sigma_2)}{2\mu_2} - \frac{F}{2\mu_2 a}, \quad (6.0655)$$

$$\frac{(2Ba + 4\sigma_1 Ca^3)}{2\mu_1} + \left\{ \frac{1}{2} aT + 4D(1-\sigma_2)/a + 2F/a^3 \right\} / 2\mu_2 = \quad (6.0656)$$

Два из этих уравнений (6.0651) и (6.0655) дают величины A и F ; остальные легко решаются относительно B , C , D , E .

Значения этих постоянных равны:

$$\left. \begin{aligned} A &= k \left\{ T \frac{(1-\sigma_2)}{4\mu_2} - \frac{c}{2a} \right\} \\ B &= -jT \frac{1-\sigma_2}{\mu_2}, \\ Ca^2 &= \frac{1}{3} jT \frac{1-\sigma_2}{\mu_2} \\ \frac{D}{a^2} &= -\frac{1}{6} jT \left\{ \frac{7-6\sigma_2}{\mu_2} + \frac{2\sigma_1-3}{\mu_1} \right\} \\ \frac{E}{a^4} &= -\frac{1}{12} jT \left\{ \frac{3-2\sigma_1}{\mu_1} + \frac{1-2\sigma_2}{\mu_2} \right\} \\ \frac{F}{a^2} &= k \left\{ \frac{1}{2} T \left[\frac{1-2\sigma_2}{2\mu_2} - \frac{1-2\sigma_1}{2\mu_1} \right] - \frac{c}{a} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.066)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{1-2\sigma_1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2}, \\ \frac{1}{j} &= \frac{3-2\sigma_1}{3\mu_1} + \frac{5-6\sigma_2}{3\mu_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.067)$$

Радиальное напряжение \overline{rr} на поверхности $r = a$ равно

$$\overline{(rr)}_a = -k \left\{ c/a - T(1-\sigma_2)/2\mu_2 \right\} + 2jT \left\{ (1-\sigma_2)/\mu_2 \right\} \cos 2\theta,$$

а для того, чтобы соприкосновение между заклепкой и контуром отверстия постоянно имело место (без чего это решение было бы неприменимым) напряжение $\overline{(rr)}_a$ необходимо должно быть по всему контуру отрицательным, т. е. сжатием

Из этого условия следует, что $\frac{c}{a} - T \frac{1 - \sigma_2}{2\mu_2}$ величина положительная и большая, чем $\frac{2jT(1 - \sigma_2)}{\mu_2 k}$, или

$$\frac{c}{a} > \frac{T(1 - \sigma_2)}{2\mu_2} \left(1 + \frac{4j}{k} \right),$$

т. е.

$$\frac{c}{a} > \frac{T(1 - \sigma_2)}{2\mu_2} \frac{\left\{ \frac{11 - 6\sigma_2}{3\mu_2} + \frac{9 - 14\sigma_1}{3\mu_1} \right\}}{\left\{ \frac{5 - 6\sigma_2}{3\mu_2} + \frac{3 - 2\sigma_1}{3\mu_1} \right\}}. \quad (6.068)$$

В разобранным выше случае, когда заклепка и пластинка сделаны из одинакового материала $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Формулы (6.066), (6.067) значительно упрощаются и принимают следующий вид:

$$A = \frac{1}{4} T - \frac{\mu c}{2a(1 - \sigma)},$$

$$B = -\frac{3}{8} T,$$

$$Ca^2 = \frac{1}{8} T,$$

$$\frac{D}{a^2} = -\frac{1}{4} T,$$

$$\frac{E}{a^4} = -\frac{1}{8} T,$$

$$\frac{F}{a^2} = -\frac{\mu c}{1 - \sigma}$$

и

$$k = \frac{8j}{3} = \mu(1 - \sigma).$$

Условие поддержания контакта примет вид:

$$\frac{c}{a} > \frac{5}{4} \frac{T(1 - \sigma)}{\mu},$$

т. е.

$$\frac{c}{a} > \frac{5}{2} \frac{T}{E_0},$$

где E_0 — модуль Юнга.

Если T будет превышать $\frac{2cE_0}{5a}$, то между заклепкой и контуром отверстия

образуется зазор в местах, где диаметр, параллельный линии растяжения, пересекает круговое отверстие. Некоторое значение будет иметь в данном случае выяснение характера оптических явлений, наблюдаемых при различных материалах пластинки и заклепки. Из (6.0621) находим в силу (6.0653):

$$(\overline{\theta\theta}_1 - \overline{rr}_1)_a = (4B + 12Ca^2) \cos 2\theta = 0.$$

Таким образом для заклепки контур будет оптически нейтральной линией или геометрическим местом особых точек. Для пластинки же, на основании (6.0622) и (6.0654), найдем:

$$(\overline{rr}_2 - \overline{\theta\theta}_2)_a = 2 \frac{F}{a^2} + \left(T - \frac{4D}{a^2} - \frac{12E}{a^4} \right) \cos 2\theta = 2 \frac{F}{a^2} + 2T \cos 2\theta;$$

значение F может быть заменено выражением из (6.066). В том специальном случае, когда заклепка и пластинка сделаны из одного и того же материала, $2 \frac{F}{a^2}$ превращается в $-E_0 \frac{c}{a}$ и $(\overline{rr}_2 - \overline{\theta\theta}_2)_a = -E_0 \frac{c}{a} + 2T \cos 2\theta$. Так как в этом случае $2T$ должно быть меньше, чем $\frac{4}{5} E_0 \frac{c}{a}$, то $(\overline{rr}_2 - \overline{\theta\theta}_2)_a$ никогда не обращается в нуль и особых точек не будет ни на контуре отверстия, ни в самой пластинке. Таким образом при переходе через контур световые явления испытывают резкое изменение.

§ 6.07. Распределение напряжений при действии неуравновешенных сил, приложенных к контуру отверстия в пластинке.

Все до сих пор рассматривавшиеся задачи вычисления напряжений в пластинках с отверстиями принадлежали к тому типу, когда равнодействующая сил, приложенных к контуру каждого отверстия, равнялась нулю. В действительности лишь в последнем случае к такому контуру были приложены некоторые силы (уравновешивающиеся) (§ 6.06). В общем же случае на контуры отверстий передаются от болтов и заклепок силы, которые в зависимости от внешних нагрузок на болты и заклепки могут на каждом отверстии иметь равнодействующую, не равную нулю.

В § 4.14 было уже показано, что сосредоточенная сила, приложенная в точке, лежащей внутри бесконечной пластинки, вызывает систему напряжений, зависящую от коэффициента Пуассона η . Это обуславливается необходимостью комбинировать функции напряжений типа $r \lg r \cos \theta$ и $r \theta \sin \theta$ таким образом, чтобы обеспечить однозначность перемещений. Таким образом получается типичное решение вида (4.1481), заключающее в себе коэффициент Пуассона. Каждая из двух функций напряжений $r \cos \theta \lg r$ и $r \theta \sin \theta$ в отдельности приводит к перемещениям, содержащим в себе множитель θ . В выражениях для этих перемещений множитель, о котором идет речь, после полного поворота вокруг начала координат возрастает на 2π , а не возвращается к прежнему значению. Но путем соответствующего сочетания этих двух функций напряжений можно, как было показано, уничтожить многозначность перемещений.

Благодаря этому комбинированию в теоретическое решение входит коэффициент Пуассона η ; своим присутствием в этом решении он показывает, что при данных условиях распределение напряжений, полученное экспериментальным путем для одного упругого материала, не всегда бывает таким же в другом материале при этих же самых условиях.

Ниже в этой главе будет дана полная теория для подобных случаев и будет показано, что изменения в величине η в общем не оказывают большого влияния на распределение напряжений.

Это обстоятельство здесь будет показано на простом примере, указанном Биклеем;¹ в этом примере неуравновешенного распределения давлений по контуру отверстия легко показать влияние коэффициента Пуассона. Возьмем

$$\chi = A \left\{ r \theta \sin \theta - \frac{1}{2} (1 - \eta) r \lg r \cos \theta \right\} + B \frac{a^2}{r} \cos \theta, \quad (6.071)$$

где a — радиус отверстия.

Это выражение удовлетворяет уравнению $\nabla^4 \chi = 0$ и дает однозначные перемещения.

¹ W. G. Bickley, Phil. Trans., Ser. A, 227, 1928.

Напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{\cos \theta}{r} \left\{ \frac{1}{2} (3 + \eta) A - 2B \frac{a^2}{r^2} \right\} \\ \overline{\theta\theta} &= -\frac{\cos \theta}{r} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \eta) A - 2B \frac{a^2}{r^2} \right\} \\ \overline{r\theta} &= -\frac{\sin \theta}{r} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \eta) A + 2B \frac{a^2}{r^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.072)$$

и обращаются в нуль на бесконечности.

Если выбрать постоянные таким образом, чтобы получить неуравновешенную систему напряжений вида $\overline{rr} = -p \cos \theta$, и $\overline{r\theta} = 0$, то величины их должны быть:

$$A = -\frac{1}{2} pa, \quad B = \frac{1}{8} (1 - \eta) pa;$$

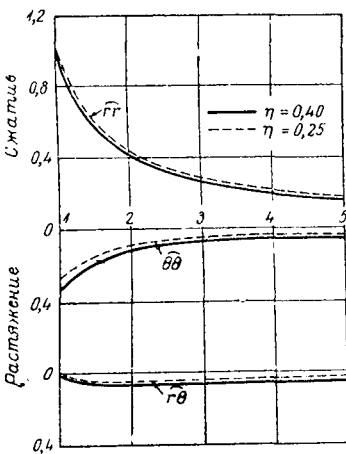
равнодействующая напряжений равна

$$R = \int_0^{2\pi} p \cos^2 \theta \cdot a d\theta = \pi pa,$$

и формулы для напряжений получатся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -\frac{R}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (1 - \eta) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right\} \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{R(1 - \eta)}{4\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \overline{r\theta} &= \frac{R(1 - \eta)}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.073)$$

Отсюда легко получить напряжения при любом значении η ; нормальные напряжения \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$ по контуру отверстия пропорциональны в этом случае $\cos \theta$.



Фиг. 6.07.

Для η были выбраны нами значения $\eta = 0,25$ для стали и $\eta = 0,4$ для нитроцеллюлозы. Соответствующие значения средних напряжений графически представлены на фиг. 6.07, в долях $\frac{R}{\pi a}$;

для удобства значения \overline{rr} и $\overline{\theta\theta}$ разделены на $\cos \theta$, а значение $\overline{r\theta}$ — на $\sin \theta$.

Оказывается, что наибольшая разница между значениями \overline{rr} или $\overline{r\theta}$ в любой точке для вышеуказанных величин η достигает только 1,4% от максимального напряжения \overline{rr} . Для напряжения $\overline{\theta\theta}$ она равна 7,5% от того же максимума напряжения \overline{rr} ; следует отметить, что изменения в самих $\overline{r\theta}$ и $\overline{\theta\theta}$ доходят до 20% от этих напряжений в каждом отдельном случае, но их численная величина мала.

В более сложных случаях инженерной практики в формулы входят обычно еще другие члены, не содержащие в себе η , так что влияние изменений этой величины будет зависеть от соотношения между двумя указанными группами членов.

Интересно заметить, что в данном случае возрастание η будет вызывать уменьшение максимальных напряжений.

§ 6.08. Общая теория многосвязных пластинок.

От этого простого примера можно перейти теперь к более общему изложению теории многосвязных пластинок.

Задача упругого равновесия для круговых контуров уже была рассмотрена в главе IV по двум причинам: 1) диски или цилиндры (т. е. заклепки и катки) и кольца имеют большое значение в инженерном деле, так что полезно точное решение вопроса об их деформации; 2) решение этой задачи ценно, поскольку оно дает возможность читателю проверить на конкретном примере те основные результаты, которые мы распространим теперь на все пластинки с отверстиями любой формы.

Самыми важными из этих результатов являются следующие.

1) В многосвязной пластинке (т. е. в пластинке с одним или несколькими отверстиями) дифференциальное уравнение $\nabla^2 \chi = 0$ вместе с условиями для напряжений на контуре определяет не однозначно функцию напряжений, даже учитывая те условия, что напряжения должны остаться непрерывными и однозначными.

Простым примером этого служит круговой цилиндр, находящийся под внутренним и внешним давлением, случай, разобранный в § 4.03. Не отбрасывая теперь решения $\chi = r^2 \log r$, которое приводит к однозначным напряжениям (но не к однозначным перемещениям), можно составить функцию напряжений вида

$$\chi = A_0 r^2 + B_0 \lg r + C_0 r^2 \lg r,$$

и условия для напряжений на контуре

$$\widehat{rr} = -p_0, \quad \text{когда } r = a,$$

$$\widehat{rr} = -p_1, \quad \text{когда } r = b,$$

приводят тогда к уравнениям

$$2A_0 + \frac{B_0}{a^2} + C_0(2 \lg a + 1) = -p_0, \quad (6.0801)$$

$$2A_0 + \frac{B_0}{b^2} + C_0(2 \lg b + 1) = -p_1. \quad (6.0802)$$

Их недостаточно для определения трех постоянных A , B и C , так что полученная таким образом функция напряжений остается неопределенной.

2) В общем функция напряжений соответствует в подобном случае многозначным перемещениям, даже если напряжения остаются однозначными.

Это видно из последнего приведенного примера, так как если C_0 не нуль, то из § 4.02 видно, что соответствующие члену $C_0 r^2 \log r$ перемещения не однозначны.

Для случая кругового полого цилиндра можно также рассмотреть следующие контурные условия:

$$\widehat{rr} = +q_0 \cos \theta, \quad \widehat{r\theta} = 0, \quad \text{при } r = a,$$

$$\widehat{rr} = +q_1 \cos \theta, \quad \widehat{r\theta} = 0, \quad \text{при } r = b.$$

Можно принять, вводя опять ограничение, что напряжения однозначны, что

$$\chi = A_1 r^3 \cos \theta + \frac{B_1 \cos \theta}{r} + C_1 r \theta \sin \theta + D_1 r \lg r \cdot \cos \theta,$$

и мы имеем тогда четыре уравнения:

$$2A_1a - \frac{2B_1}{a^3} + \frac{2C_1 + D_1}{a} = q_0, \quad (6.0811)$$

$$2A_1a - \frac{2B_1}{a^3} + \frac{D_1}{a} = 0, \quad (6.0812)$$

$$2A_1b - \frac{2B_1}{b^3} + \frac{2C_1 + D_1}{b} = q_1, \quad (6.0813)$$

$$2A_1b - \frac{2B_1}{b^3} + \frac{D_1}{b} = 0, \quad (6.0814)$$

откуда $2C_1 = aq_0 = bq_1$, что является необходимым условием статического равновесия. Это выражение определяет C_1 однозначно; но у нас осталось еще только два уравнения (6.0812) и (6.0814) для определения трех неизвестных A_1 , B_1 , D_1 . Функция напряжений таким образом снова остается неопределенной. Величина D_1 может иметь любое значение, а в § 4.14 показано, что соответствующий член функции напряжений приводит к многозначным перемещениям. К таким же перемещениям приводит член с коэффициентом C_1 ; если D_1 остается произвольным, то член с этим коэффициентом обычно не может уничтожить многозначности перемещений, возникающей от члена с коэффициентом C_1 , который в этом случае будет величиной определенной.

Подобные же замечания относятся и к функции напряжений

$$\chi = A_1' r^3 \sin \theta + B_1' \frac{\sin \theta}{r} + C_1' r \theta \cos \theta + D_1' r \lg r \cdot \sin \theta,$$

при условиях на контуре

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= q_0' \sin \theta, & \widehat{r\theta} &= 0, & \text{когда } r &= a, \\ \widehat{rr} &= q_1' \sin \theta, & \widehat{r\theta} &= 0, & \text{когда } r &= b. \end{aligned}$$

3) Существует только единственное решение, для которого перемещения будут однозначными; но при этом решении функция напряжений и сами напряжения оказываются зависимыми от отношения упругих постоянных материала, за исключением того случая, когда равнодействующая сил на каждом из контуров в отдельности равна нулю (теорема Митчелля).

Этот результат опять-таки можно иллюстрировать примером с круговым кольцом. Действительно, если в вышеприведенном примере примем $C_0 = 0$, то решение становится определенным, перемещения однозначными и очевидно, что отношение упругих постоянных не войдет в решение; при этом всестороннее давление на края отверстия является самоуравновешивающейся системой сил.

В примере (2) формула (4.1481) показывает, что если

$$D_1 = -\frac{1}{2}(1 - \eta)C_1,$$

то перемещения становятся однозначными, а решение будет определенным и единственным. Но в этом случае отношение упругих постоянных обязательно входит в формулы для напряжений (через η), так как C_1 здесь не нуль. Равнодействующая сил на каждом из контуров в отдельности равна $2C_1\pi$, т. е. не обращается в нуль.

4) В соответствии с каждым отверстием можно осуществить особый тип деформации, вызывающей напряжения, известный под именем дислокации; теория для таких деформаций была разработана впервые Митчеллем,¹ Вейнгартером²

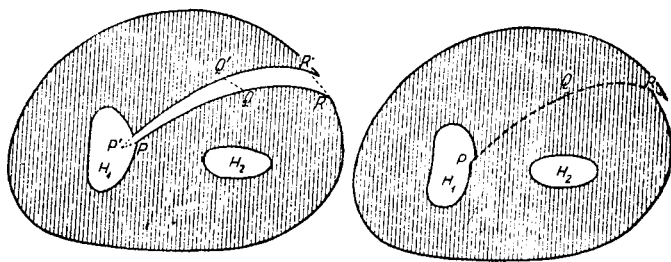
¹ J. H. Michell, On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid with Application to the Theory of Plates, London Math. Soc. Proc. **31**, 1899, 100—124.

² G. Weingarten, Rend. Acc. dei Lincei, Sér. V, **10** (1st Sem.) 1901, 57.

и Вольтерра¹. В случае двух измерений (т. е. в пластинке) дислокация получается путем прорезывания узкой щели, идущей от отверстия к наружной грани, причем края разреза представляют собою конгруэнтные кривые, полученные одна из другой путем небольшого плоского перемещения всей кривой, как целого. Края разреза затем склеиваются, но при этой склейке можно дать этим краям легкое тангенциальное перемещение, так что каждая из точек одного края перемещается вдоль него по отношению к соответствующей точке противоположного края на одну и ту же постоянную величину.

На фиг. 6.08 изображен общий, описанный здесь тип дислокации. Подобная склейка влечет за собой следовательно относительное перемещение обоих краев разреза, состоящее из вращения и двух параллельных переносов (параллельных двум неподвижным осям); это перемещение таким образом представляет собой наиболее общий вид перемещения твердого тела в двух измерениях.

Каждая из составляющих перемещения, перенос и вращение, может быть осуществлена отдельно. Так, в случае кругового кольца, находящегося в состоянии чистого изгиба (§ 4.12), имеем дислокацию, зависящую от простого вращения одного края разреза вокруг начала координат. В случае же дислокаций порядка единицы, рассмотренных в § 4.29, края разреза (т. е. линии BA , PQ фиг. 4.292) приводятся к совпадению путем параллельного переноса без вращения. В случае фиг. 4.292 перенос направлен перпендикулярно к краям разреза; в случае же, полученном из этого путем поворота на 90° , показанном на фиг. 4.291, оба края разреза совпадают, но оказываются передвинутыми один относительно другого тангенциально вдоль разреза.



(а) Ненапряженная пластинка после разреза. (б) Та же пластинка после склейки.

Фиг. 6.08. Пластинка под действием чистого смещения.

Рассматривая оба эти случая как различные в математическом отношении решения, мы имеем для пластинки с одним отверстием три типа напряжений при дислокации. Они получаются при свободных от нагрузок как внешних контурах, так и контурах отверстий; напряжения однозначны, но перемещения многозначны, когда мы обходим вокруг отверстия.

Нет необходимости в том, чтобы разрез, соответствующий дислокации, имел прямые края, что бывает часто физически невозможным при известном виде расположения и размерах отверстий. Достаточно, чтобы разрез был сделан по двум конгруэнтным кривым PQR и $P'Q'R'$, т. е. таким кривым, которые совмещаются друг с другом путем вращения и поступательного движения одной относительно другой; при этом они сами не деформируются.

Мы увидим таким образом, что каждому отверстию соответствуют три основные дислокации, для каждой из которых отсутствует нагрузка на контурах. При h отверстий имеем $3h$ основных дислокаций, причем из них $2h$ будут называться дислокациями переноса, так как они вызваны перемещениями краев разреза, как целого (параллельно осям x и y).

Существование этих дислокаций как будто противоречит известной теореме о существовании единственного решения задачи теории упругости, доказывающей, что существует только одно напряженное состояние (при малых деформациях) упругого твердого тела, находящегося под действием данных нагрузок на контуре. При

¹ V. Volterra, Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, Ann. de l'École Normale, Sér. III, 24, 1907, 401—517.

ненагруженном контуре, твердое тело должно бы было находиться в ненапряженном состоянии. Противоречие это только кажущееся, так как при доказательстве теоремы о единственности решения предполагается наличие однозначных перемещений, что не соблюдено в случае дислокации.

5) Зная распределение напряжений для пластинки без разрезов из материала A , находящейся под действием любой нагрузки на контуре, а также зная распределение напряжений для каждой из $2h$ основных дислокаций переноса, мы можем получить распределение напряжений для подобной пластинки из какого-нибудь другого материала B , таким же образом нагруженной на контуре, при условии, если известны: 1) коэффициент Пуассона для каждого материала, 2) равнодействующие сил, приложенных к каждому контуру; ¹ этот переход можно осуществить без аналитического решения задач, т. е. без определения функции напряжений или перемещений, так что экспериментальное исследование напряжений на модели, сделанной из какого-либо материала, может дать полное представление о работе подобной конструкции из другого материала; это будет доказано в § 6.15.

В последующих параграфах мы предполагаем развить эту общую теорию, имеющую важное значение для целого ряда задач, решаемых путем оптического метода.

§ 6.09. Функция напряжений и равнодействующие сила и пара сил по дуге.

Обозначим через s — дугу кривой, проведенной в теле: она может в некоторых частных случаях быть частью контура. Обозначим далее через n нормаль к этой кривой, причем ее направление будем считать положительным, если при вращении нормали против часовой стрелки на 90° ее направление совпадает с положительным направлением s . При этом выборе положительного направления нормали под n нужно понимать внешнюю нормаль, если мы двигаемся в положительном направлении s и так, что рассматриваемое тело остается слева.

Пусть направляющие косинусы углов для n будут (l, m) . Тогда по обычной формуле преобразования (см. §§ 2.27, 2.41)

$$\begin{aligned} \widetilde{nx} &= l \widetilde{xx} + m \widetilde{xy} \\ &= \left(l \frac{\partial}{\partial y} - m \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (6.091)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{ny} &= l \widetilde{xy} + m \widetilde{yy} \\ &= \left(-l \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.092)$$

Обозначим через X, Y проекции на оси Ox и Oy усилий, отнесенных к единице длины s и передающихся от материала, находящегося справа от s , на материал слева от s , или проекции на оси Ox и Oy усилий, приложенных к контуру, если s совпадает с контуром. Тогда, считая толщину пластинки за единицу, получаем

$$X = \widetilde{nx}, \quad Y = \widetilde{ny},$$

а интегрируя по дуге s от начальной точки P_0 до произвольной точки P , имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = A - \int_0^s Y ds, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = B + \int_0^s X ds, \quad (6.093)$$

где A, B — значения величин $\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}$ в точке P_0 .

¹ L. N. G. Filon, B. A. Report, 1921, 305—316.

Если теперь дуга s возвратится к начальной точке P_0 , то после обхода полной петли, имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = A - \oint Y ds, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = B + \oint X ds,$$

где символ \oint обозначает интегрирование по полному замкнутому контуру.

Таким образом необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ возвратились к тем же самым значениям после обхода замкнутой кривой, является

$$\oint X ds = 0, \quad \oint Y ds = 0, \quad (6.094)$$

т. е. силы, приложенные к замкнутому контуру обхода, должны приводиться к равнодействующей, равной нулю.

Эта теорема является основной для всего последующего.

Возвратимся теперь к (6.093) и введем функцию $\chi' = \chi - Ax - By$.

Тогда

$$\frac{\partial \chi'}{\partial x} = - \int_0^s Y ds, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial y} = + \int_0^s X ds,$$

что приводит к

$$\frac{\partial \chi'}{\partial n} = l \frac{\partial \chi'}{\partial x} + m \frac{\partial \chi'}{\partial y} = m \int_0^s X ds - l \int_0^s Y ds,$$

$$\frac{\partial \chi'}{\partial s} = -m \frac{\partial \chi'}{\partial x} + l \frac{\partial \chi'}{\partial y} = l \int_0^s X dx + m \int_0^s Y ds,$$

Интегрируя последнее уравнение от P_0 до P , получаем

$$\chi' = C + \int_0^s \left\{ l \int_0^s X ds + m \int_0^s Y ds \right\} ds, \quad (6.095)$$

где C есть значение χ' в точке P_0 .

Положив теперь $\chi'' = \chi - Ax - By - C$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi''}{\partial n} &= m \int_0^s X ds - l \int_0^s Y ds, \\ \chi'' &= \int_0^s \left\{ l \int_0^s X ds + m \int_0^s Y ds \right\} ds, \end{aligned} \right\} \quad (6.096)$$

так что, если X, Y даны для каждой точки кривой s , то χ'' , $\frac{\partial \chi''}{\partial n}$ определяются однозначно в каждой точке кривой.

В том случае, когда s является контуром, величины X и Y получаются из заданных условий для напряжений на контуре.

Итак χ'' , $\frac{\partial \chi''}{\partial n}$ известны в каждой точке контура. Но это не равносильно тому, чтобы иметь χ , $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ известными в каждой точке контура, так как вдоль контура

$$\chi = \chi'' + Ax + By + C,$$

а A , B , C как мы видели, зависят от выбора начальной точки P_0 на кривой s . Они не будут поэтому, вообще говоря, одинаковыми для всех контуров пластинки.

Если имеется только один контур, т. е. если пластинка односвязна (т. е. не имеет отверстий), то мы можем для всех точек вычесть $Ax + By + C$ из χ и так как линейные члены в функции напряжений не влияют на напряжения, то χ может быть заменено χ'' . Затем нам надо решить уравнение $\nabla^4 \chi = 0$, при данных значениях χ и $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ на контуре; для этой задачи, как показал Матье,¹ может быть только единственное решение, если только функция χ и ее производные до 4-го порядка включительно непрерывны и однозначны в области, ограниченной данным контуром.

Если же имеется одно или несколько отверстий, то значения A , B , C для каждого отверстия будут другими, чем значения на контуре, и предыдущие рассуждения делаются неприменимыми.

Выражение (6.096) для χ'' может быть представлено в другой форме, которая бывает иногда очень полезна.

Принимая во внимание, что $l = \frac{dy}{ds}$, $m = -\frac{dx}{ds}$, и интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned} \chi'' &= y \int_0^s X ds - x \int_0^s Y ds + \int_0^s (xY - yX) ds = \\ &= y \int_0^s X ds - x \int_0^s Y ds + \int_0^s M ds, \end{aligned} \quad (6.097)$$

где $M ds$ является моментом относительно начала координат сил, приложенных к элементу ds рассматриваемой дуги.

§ 6.10. Совместимые и сократимые замкнутые пути.

Рассмотрим два пути P_0QP , P_0RP (фиг. 6.10) на пластинке.

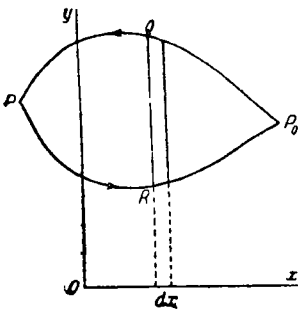
Два пути назовем *совместимыми*, если их можно заставить перейти один в другой при помощи непрерывной их деформации, причем так, чтобы ни одна точка деформируемого пути во время всей деформации не была за пределами тела и чтобы этот путь не пересекал при деформации точек или областей, в которых приложены внешние силы или в которых напряжения и перемещения становятся бесконечно большими или терпят разрыв непрерывности.

Если же подобное превращение одного пути в другой невозможно (например, если в области P_0QPRP_0 в пластинке имеется отверстие), то эти пути называются *несовместимыми*.

Путь, у которого конец совпадает с началом, называется *замкнутым* путем. Замкнутый путь, который можно сжать в точку, не выходя при этом за пределы тела и не входя в пределы области или места с отсутствием непрерывности или с точками приложения внешних сил, называется *сократимым*.

Два совместимых пути, начерченные один за другим, образуют сократимый замкнутый путь.

С другой стороны несократимым замкнутым путем является такой, который окружает отверстие или область с нарушенной непрерывностью (как, например, точка приложения сосредоточенной силы внутри тела).



Фиг. 6.10.

¹ Mathieu, Liouville's, Journal de Mathématiques, Sér. II, 14, 1869, 392.

Так как к сократимому замкнутому пути P_0QPRP_0 (фиг. 6.10) не приложено никаких внешних сил, то очевидно, что для этого замкнутого пути

$$\oint X ds = 0; \quad \oint Y ds = 0; \quad \oint M ds = 0.$$

Равенства (6.093) и (6.097) доказывают (так как x и y , возвращаясь в P_0 , очевидно принимают прежние значения), что не только $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, но также и χ принимают свои первоначальные значения после обхода сократимого замкнутого пути.

Далее, обозначив через s' дугу P_0RP , и вследствие того, что усилия, действующие по дуге s , должны быть статически эквивалентны усилиям, действующим по дуге s' , мы очевидно получаем

$$\int_0^s X ds = \int_0^{s'} X' ds', \quad \int_0^s Y ds = \int_0^{s'} Y' ds', \quad \int_0^s M ds = \int_0^{s'} M' ds',$$

и значения χ , $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ в точке P , полученные из (6.093) и (6.097), где путь интегрирования начинается в точке P_0 , будут одни и те же, независимо от пути интегрирования, лишь бы этот путь проходил по совместимым дугам P_0QP , P_0RP .

Отсюда непосредственно следует очень важный вывод. Если в пластинке нет отверстий, то все дуги, проведенные внутри, будут непременно совместимыми. Если, следовательно, составить χ и $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$, исходя из напряжений (которые на основании гипотезы должны быть всюду однозначны), начиная от любой произвольной точки P_0 , то полученные таким образом значения χ , $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ непременно будут однозначными, и условия теоремы Матье (§ 6.09) поэтому окажутся по необходимости выполненными.

Все замкнутые пути (или траектории), которые оказываются взаимно совместимыми, образуют группу, и обычно говорят, что все они имеют одну и ту же *связность*. Связность в данном смысле обозначает специальный вид расположения путей, которые проходят между отверстиями или областями с разрывом непрерывности. В том смысле, в каком употребляется приведенное здесь слово *связность*, оно никоим образом не имеет смысла числа и не может им измеряться.

§ 6.11. Циклические функции.

Рассмотрим теперь такие функции, производные которых с некоторого порядка однозначны, в то время как сами функции и производные высших порядков многозначны.

Пусть φ будет функцией x , y и пусть $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ будут однозначно определены во всех точках области, ограниченной сократимым замкнутым путем P_0QPRP_0 (фиг. 6.10).

Пусть φ_1 будет значением φ в точке P_0 при начале обхода замкнутого пути, а φ_2 — значением φ в той же точке P_0 после обхода этого замкнутого пути; тогда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) ds.$$

Рассмотрим полосу QR шириной dx , параллельную оси Oy . Тогда при положительном направлении замкнутого пути, указанном стрелками, имеем:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)_Q < 0, \quad \left(\frac{dx}{ds} \right)_R > 0.$$

Таким образом

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right)_Q ds_Q + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right)_R ds_R = dx \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_R - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_Q \right\},$$

а так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ однозначны во всех точках рассматриваемой нами области, то таковыми же будут и их производные; поэтому мы можем написать:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_R - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_Q = - \int_R^Q \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dy.$$

Отсюда, производя суммирование для полосок, пересекающих контур, получаем:

$$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} ds = - \int \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx dy;$$

двойной интеграл распространен на всю площадь, ограниченную замкнутым путем.

Рассмотрев таким же образом полосу, параллельную оси Ox , получим

$$\oint \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} ds = \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dx dy,$$

так что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \right\} dx dy$$

и последний интеграл будет равен нулю, если только функция $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ будет существовать внутри замкнутого пути и будет однозначной. Если функция $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ существует внутри замкнутого пути, то однозначность производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ обеспечивает однозначность и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$.

Тогда имеем

$$\int_{P_0Q_0P} \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds + \int_{P_0RP} \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds = 0,$$

или, меняя направление и знак при втором интегрировании:

$$\int_{P_0Q_0P} \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds = \int_{P_0RP} \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds,$$

так что $\varphi_P - \varphi_{P_0}$ вдоль $P_0Q_0P = \varphi_P - \varphi_{P_0}$ вдоль P_0RP ; т. е. мы получаем одно и то же значение для φ в точке P при условии, если оба пути будут совместимы и будут охватывать область, внутри которой $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ будут однозначно определенными.

Таким образом мы получаем вполне определенное значение для φ в точке P , если определена связность пути, т. е. известно его расположение между точками и областями с разрывом непрерывности (в нашем случае отверстиями в пластинке).

Мы можем таким образом вычислить значения φ , исходя из ее первых произ-

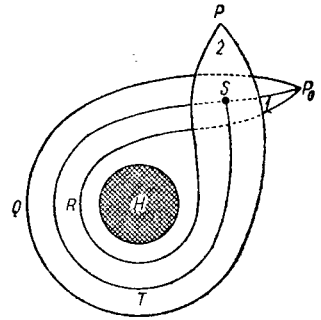
водных, если только $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ существуют и могут быть однозначно определены в пределах рассматриваемой области.

Если же мы проделаем это вычисление функции φ вдоль несократимого замкнутого пути, то получим в общем по возвращении снова в точку P_0 значение φ_2 , отличное от φ_1 . Мы получим то же самое значение φ_2 для любого другого несократимого замкнутого пути, совместимого с первым, так что φ_2 является определенной функцией координат x , y точки P_0 для данной связности несократимых замкнутых путей. Мы будем называть $\varphi_2 - \varphi_1$ циклической функцией от φ для этой связности и обозначать через $Cy(\varphi)$.

Обычно для краткости обозначение замкнутого пути, характеризующего связность, отбрасывается; в случае надобности этот путь может быть обозначен посредством значка при Cy .

Рассмотрим теперь тот случай, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ сами имеют циклические функции. В этом случае они определяются однозначно не только координатами той точки, к которой они относятся, но также и связностью того пути по которому мы подходим к этой точке.

В связи с этим точка S (фиг. 6.11) будет иметь разные значения в зависимости от того, подойдем ли мы к ней от точки P_0 по дуге P_0S , или же по дуге P_0STS , окружающей отверстие H . Мы можем теперь представить себе наш замкнутый путь P_0QPRP_0 самопересекающимся, как показано на фиг. 6.11, при условии, что его площадь представляет собой полосу, частично перекрывающую саму себя; на фиг. 6.11 мы попадаем в верхнюю часть этой полосы, обойдя вокруг отверстия H . При этом ограничении (аналогичном хорошо известной поверхности Риманна) функции $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ попрежнему определяются однозначно, и доказанная выше общая теорема остается в силе, т. е. φ будет определяться однозначно при условии указания того слоя полосы, которому она принадлежит. Разность значений φ в обоих слоях для любой точки S будет циклической функцией от φ в точке S .



Фиг. 6.11. Самопересекающийся круговой путь с первым и вторым слоями.

Соответственно этому, если $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ имеют определенную циклическую функцию или ацикличны, то для данной связности φ имеет определенную циклическую функцию (или может быть в отдельных специальных случаях ацикличной) для той же самой связности.

Обратная теорема может быть доказана немедленно следующим образом.

Если на фиг. 6.11 значок 1 относится к нижнему слою, а значок 2—к верхнему, то

$$\varphi_2 = \varphi_1 + Cy(\varphi).$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} Cy(\varphi),$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \cdot Cy(\varphi),$$

или $\frac{\partial}{\partial x} C_y(\varphi)$ будет циклической функцией от $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = C_y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$, и подобным же образом

$$\frac{\partial}{\partial y} C_y(\varphi) = C_y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

так что C_y и $\frac{\partial}{\partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial y}$ являются взаимозаменяемыми символами.

Отсюда следует, что если функция φ имеет для данной связности циклическую функцию, то и ее производные также имеют определенные циклические функции, получаемые путем дифференцирования циклической функции от φ .

В частности, если φ есть однозначная или ациклическая функция, то $C_y(\varphi) = 0$ и все производные от φ будут ациклическими, так что при циклических производных от φ само φ должно иметь циклическую функцию, отличающуюся от нуля.

§ 6.12. Циклические функции от χ и ψ и от их производных.

В дальнейшем исследовании мы будем предполагать, что напряжения (а следовательно, и деформации) будут существенно однозначны, так что мы не будем вводить никаких ограничений для функций, определяющих напряжения, для того чтобы сделать эти функции однозначными в точках всей рассматриваемой области, независимо от количества связностей (т. е. от числа отверстий) в этой области.

Каждая изучаемая нами функция напряжений должна во всех случаях удовлетворять указанным выше условиям, в противном случае должна быть отброшена, как это и делалось в предыдущих главах.

Из этого следует, что все $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ ациклически. Следовательно, на основании изложенного в конце предыдущего параграфа производные от χ третьего порядка тоже ациклически для всех замкнутых путей независимо от их связности.

Так как $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ ациклически, следовательно, на основании результатов § 6.11, и $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ ациклично для всякого сократимого замкнутого пути и имеет определенную циклическую функцию для несократимого пути данной связности.

Так как $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y^2}$ ациклически, то этот результат остается в силе и для $\frac{\partial \chi}{\partial y}$.

Так как $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ имеют определенные циклические функции, а $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$ ациклично, то следует на основании теоремы § 6.11, что χ имеет определенную циклическую функцию для данной связности и ациклично для сократимых замкнутых путей, что было уже доказано в § 6.10.

Циклические функции от χ , $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ для замкнутого пути, охватывающего отверстие или область, внутри которой имеется разрыв непрерывности, легко находятся из результатов §§ 6.09, 6.10.

При этом ясно, что

$$C_y\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) = -\oint Y ds, \quad C_y\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) = \oint X ds;$$

интегралы взяты по всему контуру отверстия.

Эти величины представляют собою суммы проекций на оси координат напряжений, возникающих в точках контура отверстия.

Если X_0 , Y_0 , M_0 будут составляющими силы и пары сил, приложенных к контуру отверстия (или к месту нарушения непрерывности в материале), то на основании условий равновесия имеем:

$$X_0 = - \oint X ds, \quad Y_0 = - \oint Y ds, \quad M_0 = - \oint M ds.$$

Следовательно

$$C_y \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = Y_0, \quad (6.121)$$

$$C_y \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = -X_0. \quad (6.122)$$

Далее из уравнения (6.097) получаем

$$C_y(\chi'') = C_y(\chi) = y \oint X ds - x \oint Y ds + \oint M ds,$$

или

$$C_y(\chi) = x Y_0 - y X_0 - M_0. \quad (6.123)$$

Рассмотрим теперь функцию перемещений ψ , введенную в § 2.25. Прежде всего имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nabla^2 \chi,$$

и эта функция обязательно ациклична, так как $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$ обе ацикличны. Отсюда путем дифференцирования получаем, что $\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}$ обе ацикличны.

Но ψ удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

так что

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}.$$

Таким образом все производные третьего порядка от ψ будут ацикличны и на основании последнего вывода § 6.11 все четвертые производные должны быть также ацикличны.

Проделав то же, что мы проделали для χ , можно на основании теоремы § 6.11 доказать, что $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ имеют определенные циклические функции при ацикличном $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$. Подобный же результат получится и для $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, а также наконец и для самого ψ .

Теперь ψ удовлетворяет уравнениям:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nabla^2 \chi;$$

поэтому и функция $\psi + C_y(\psi)$, которая будет одним из значений ψ , должна также удовлетворить двум приведенным выше уравнениям, и мы получим после вычитания, что

$$\nabla^2 C_y(\psi) = 0, \quad \frac{\partial^2 C_y(\psi)}{\partial x \partial y} = 0, \quad (6.124)$$

Решением этих уравнений, как легко доказать, будет

$$C_y(\psi) = \frac{1}{2} A' (x^2 - y^2) + B'x + C'y + D', \quad (6.125)$$

где A' , B' , C' , D' — постоянные интегрирования.

Посредством дифференцирования получаем

$$C_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = A'x + B', \quad C_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -A'y + C'. \quad (6.126)$$

§ 6.13. Циклические функции перемещений.

Применяя оператор C_y к уравнениям для перемещений, получаем

$$2\mu u = -\frac{\partial\chi}{\partial x} + (1-\eta)\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$2\mu v = -\frac{\partial\chi}{\partial y} + (1-\eta)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

(здесь η , u , v должны быть заменены через σ , U , V в случае обобщенного плоского напряженного состояния); на основании (6.121), (6.122) и (6.126) находим

$$2\mu C_y(u) = -Y_0 + (1-\eta)(C' - A'y), \quad (6.131)$$

$$2\mu C_y(v) = X_0 + (1-\eta)(B' + A'x). \quad (6.132)$$

Таким образом u , v имеют определенные циклические функции; далее, при данных однозначных напряжениях эти функции будут единственными возможными циклическими функциями для перемещений.

Теперь $C_y(u)$, $C_y(v)$ представляют собой перемещение твердого тела, состоящее из двух поступательных переносов

$$\frac{1}{2\mu} \{-Y_0 + (1-\eta)C'\}, \quad \frac{1}{2\mu} \{X_0 + (1-\eta)B'\}$$

в направлениях осей Ox и Oy и вращения $A'(1-\eta)/2\mu$ относительно начала координат.

Этот результат, впервые полученный Вейнгартеном, делается очевидным, как только учтем, что u , v имеют определенные циклические функции. Действительно, если u_1 , v_1 будут величинами перемещений до обхода замкнутого пути, о котором идет здесь речь, а u_2 , v_2 будут этими величинами после обхода, то как (u_1, v_1) , так и (u_2, v_2) будут решениями уравнений теории упругости. При линейности этих уравнений $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$ будут также их решениями. Таким образом, $C_y(u)$, $C_y(v)$ будут решениями уравнений теории упругости. Но так как напряжения приняты ациклическими, то (u_1, v_1) и (u_2, v_2) должны вызывать одни и те же напряжения, т. е. $C_y(u)$, $C_y(v)$ должны вызывать нулевые напряжения и соответствовать таким перемещениям тела, которые не вызывают напряжений, т. е. перемещениям тела как целого.

Наличие этих циклических перемещений может быть физически представлено как результат известной дислокации в общем случае так же, как это было показано в случае кругового кольца. Мы можем провести произвольную кривую PQR (фиг. 6.08), соединяющую отверстие H с внешним контуром. Пусть путем небольшого перемещения как целого переведем кривую PQR в положение $P'Q'R'$; при этом точка Q переходит благодаря этому перемещению в соответствующую точку Q' . Пусть первоначально ненапряженная пластинка будет разрезана по линиям PQR и $P'Q'P'$ и затем оба края разреза вновь склеены так, чтобы совпали соответствующие точки Q и Q' . Таким образом, имеем дислокацию, при которой все кон-

туры пластинки свободны от нагрузок; но, конечно, благодаря происшедшей вследствие дислокации деформации пластинки точки Q и Q' получают определенные перемещения. Но перемещение точки Q отличается от перемещения точки Q' на такую величину, которая необходима для того, чтобы совместить PQR и $P'Q'R'$, т. е. на указанное выше перемещение тела как целого.

Мы получаем таким образом дислокацию, соответствующую данному отверстию; перемещения при этой дислокации имеют циклические функции того вида, который дан формулами (6.131) и (6.132).

На эту чистую дислокацию, при которой контуры остаются ненагруженными, мы можем наложить систему напряжений, вызванную наличием напряжений по контурам, но при отсутствии дислокаций; в таком случае мы получим самое общее решение, включающее циклические функции, определяемые уравнениями (6.131) и (6.132).

§ 6.14. Характер зависимости решений уравнений теории упругости от упругих постоянных.

Этот вопрос чрезвычайно важен с точки зрения применения оптического метода, который состоит в исследовании напряжений в моделях, изготовленных из прозрачного материала (стекло, целлюлоид), и в применении этих результатов, например, к стальным конструкциям, в то время как коэффициенты Пуассона для стали или стекла и целлюлоида различны между собой.

Рассмотрим пластинку A любой величины и формы, сделанную из материала с модулем сдвига μ_0 и коэффициентом Пуассона η_0 . Пусть к контурам пластинки будут приложены известные усилия. Тогда по чисто физическим причинам¹ может существовать только единственное решение для пластинки A , которое приводит к ациклическим перемещениям u_0, v_0 , получаемым из функций напряжений и перемещений χ_0 и ψ_0 .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2\mu_0 u_0 &= -\frac{\partial \chi_0}{\partial x} + (1 - \eta_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ 2\mu_0 v_0 &= -\frac{\partial \chi_0}{\partial y} + (1 - \eta_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \end{aligned}$$

с подстановкой σ_0 вместо η_0 в случае обобщенного плоского напряженного состояния. Рассмотрим теперь пластинку B , идентичную по величине и по форме с пластинкой A и находящуюся под действием таких же контурных усилий, но сделанную из другого материала, имеющего модуль сдвига μ и коэффициент Пуассона η , а для плоского напряженного состояния коэффициент σ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial \chi}{\partial x} + (1 - \eta) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial \chi}{\partial y} + (1 - \eta) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

причем перемещения здесь должны быть ациклическими.

Условием, при котором перемещения оказываются ациклическими для пластинки A , будет

$$\left. \begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) &= (1 - \eta_0) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \\ Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) &= (1 - \eta_0) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.141)$$

¹ Или на основании общеизвестной теоремы об единственности для однозначных перемещений и напряжений (см. Love, Theory of Elasticity, § 118).

условием же, при котором перемещения в пластинке B оказываются ациклическими, будет

$$\left. \begin{aligned} C_y \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) &= (1 - \eta) C_y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ C_y \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) &= (1 - \eta) C_y \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.142)$$

Для того чтобы получить одинаковые напряжения в пластинках A и B , мы должны иметь $\chi = \chi_0$, а следовательно также и $\psi = \psi_0$.

Тогда уравнения (6.141) и (6.142) будут несовместными, если только не будет соблюдено условие:

$$C_y \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) = C_y \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) = C_y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) = C_y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.143)$$

так как η и η_0 имеют разные значения.

Два первых выражения требуют, чтобы

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0$$

для каждого несократимого замкнутого пути, заключающего в себе отверстие.

Из (6.141) ясно, что, если $C_y \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right)$ и $C_y \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right)$ оба обращаются в нуль, то это же происходит и с $C_y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)$ и $C_y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right)$, так что указанные условия (6.143) будут в этом случае все удовлетворены.

Перемещения для пластинки B могут быть получены, если принять $\chi = \chi_0$, $\psi = \psi_0$, и выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial \chi_0}{\partial x} + (1 - \eta) \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial \chi_0}{\partial y} + (1 - \eta) \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \end{aligned}$$

так что перемещения, как хорошо известно, зависят от упругих постоянных.

Напряжения же зависят только от χ , причем, если $\chi = \chi_0$, то напряжения в пластинке B будут одинаковы с напряжениями в пластинке A ; таким образом, приходим к следующей основной теореме, полученной первоначально Митчелом.

Напряжения в пластинке любой формы, имеющей любое количество отверстий и подверженной любым нагрузкам по контурам, не зависят от упругих постоянных только тогда, когда равнодействующая сил, приложенных к каждому из отверстий по отдельности, равна нулю.

Отметим, что это вовсе не значит, что напряжения, приложенные к каждому из отверстий, должны находиться в равновесии. Они могут приводиться к паре сил, а теорема все-таки останется правильной.

Частным случаем этой теоремы является пластинка без отверстий, к единственному контуру которой приложены уравновешивающиеся силы. Как хорошо известно, в случае односвязной пластинки, т. е. пластинки с единственным контуром (бесконечность считается за отдельный контур), напряжения не зависят от упругих постоянных.

§ 6.15. Получение решения для пластинки на основании наблюдений над другой пластинкой.

Вернемся к пластинке A и рассмотрим в ней единичную дислокацию в виде параллельного переноса по отношению к отверстию H_1 . Это может быть осуществлено на практике посредством двух параллельных разрезов, смещенных

друг относительно друга на единицу длины в направлении, например, оси X и затем склеенных. Действительная склейка должна была бы встретиться на практике большие затруднения, которые, впрочем, можно различными способами обойти, просверлив, например, ряд мелких отверстий по обеим сторонам разреза и стянув их проволокой или шшив каким-либо иным способом. Местное влияние этих отверстий далеко не распространяется, вдали от разреза можно получить систему напряжений, возникшую из дислокации. При необходимости дополнительных наблюдений в окрестности первого разреза, можно воспользоваться второй пластинкой, тождественной с A , разрез в которой сделан в другом месте. Этот разрез приводит однако к такой же дислокации. Напряжения в окрестности первого разреза можно таким образом исследовать при помощи оптического метода.

Единичное перемещение должно быть конечно незначительной длины, так чтобы было можно пренебрегать квадратами относительных деформаций, а перемещения были бы малыми.

Контуры пластинки должны быть свободными от усилий, так что мы будем иметь случай чистой дислокации.

Дислокация в стандартной пластинке влечет за собой появление в ней напряжений, определяемых функцией напряжений χ_1 , тогда как ψ_1 будет соответствующей функцией перемещений.

Перемещения (u_1, v_1) будут цикличны, и их циклические функции определяются условиями, определяющими тип дислокации. В данном случае

$$C_y(u_1) = 1, \quad C_y(v_1) = 0. \quad (6.151)$$

Следовательно, так как все контуры свободны от усилий, то

$$C_y\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right) = 0, \quad C_y\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y}\right) = 0.$$

Уравнения

$$2\mu_0 C_y(u_1) = -C_y\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x}\right) + (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right),$$

$$2\mu_0 C_y(v_1) = -C_y\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right) + (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)$$

поэтому приводят к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu_0 &= (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right), \\ 0 &= (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right), \end{aligned} \right\} \quad (6.152)$$

а для замкнутых путей, заключающих в себе какое-нибудь другое отверстие, величины (перемещения), указанные выше, оказываются ациклическими.

Подобным же образом, если индекс 2 относится к единичной дислокации в виде параллельного переноса, в направлении оси Oy , то получаем, что

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right), \\ 2\mu_0 &= (1 - \eta_0) C_y\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right), \end{aligned} \right\} \quad (6.153)$$

причем дислокация относится к тому же отверстию H_1 .

Если теперь пластинка будет иметь n отверстий H_1, H_2, \dots, H_n , то индексы $2r-1, 2r$ будут относиться к двум единичным дислокациям в виде параллельного переноса по отношению к отверстию H_r .

Посмотрим теперь, нельзя ли получить решение для пластинки B , находящейся под действием таких же усилий, приложенных по контуру, которые вызывают в пластинке A перемещения (u_0, v_0) , но при отсутствии дислокации, в следующем виде:

$$\chi = \chi_0 + \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \dots + \alpha_{2n-1} \chi_{2n-1} + \alpha_{2n} \chi_{2n}. \quad (6.154)$$

Отсюда следует, принимая во внимание уравнения, связывающие χ и ψ , что

$$\psi = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_{2n-1} \psi_{2n-1} + \alpha_{2n} \psi_{2n}. \quad (6.155)$$

В приведенном выше выражении $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ представляют собою постоянные, которые и следует определить.

В виду того, что решение для пластинки B должно быть здесь непременно вполне ацикличным по отношению к (u, v) , то мы должны для каждого несократимого замкнутого пути иметь

$$\left. \begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ Cy \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.156)$$

Рассмотрим несократимый замкнутый путь, заключающий в себе отверстие H_r . Для такого (или какого-либо иного) замкнутого пути

$$\begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right) &= Cy \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x} \right) = \dots = Cy \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) = 0, \\ Cy \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right) &= Cy \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial y} \right) = \dots = Cy \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

так что

$$Cy \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) = Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right)$$

и

$$Cy \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right).$$

Таким же образом из функций ψ , которые дают

$$Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \text{ и } Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

остаются кроме ψ_0 еще ψ_{2r-1} и ψ_{2r} .

Таким образом

$$\begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= \alpha_{2r-1} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r-1}}{\partial y} \right) + \alpha_{2r} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial y} \right) + Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ Cy \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= \alpha_{2r-1} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r-1}}{\partial x} \right) + \alpha_{2r} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial x} \right) + Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (6.156) превращаются в

$$\left. \begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) + (1 - \eta) \left[\alpha_{2r-1} Cy \left(\frac{\partial \psi_{12r-1}}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2r} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial y} \right) \right], \\ Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + (1 - \eta) \left[\alpha_{2r-1} Cy \left(\frac{\partial \psi_{12r-1}}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2r} Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (6.157)$$

Но из уравнений (6.152) и (6.153) для отверстия H_r получается

$$\begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \psi_{12r-1}}{\partial y} \right) &= \frac{2\mu_0}{1 - \eta_0}, & Cy \left(\frac{\partial \psi_{12r-1}}{\partial x} \right) &= 0, \\ Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial y} \right) &= 0, & Cy \left(\frac{\partial \psi_{2r}}{\partial x} \right) &= \frac{2\mu_0}{1 - \eta_0}, \end{aligned}$$

так что уравнения (6.157) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) + 2\mu_0 \frac{1 - \eta}{1 - \eta_0} \alpha_{2r-1} \\ Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) &= (1 - \eta) Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + 2\mu_0 \frac{1 - \eta}{1 - \eta_0} \alpha_{2r}. \end{aligned} \right\} (6.158)$$

Но χ_0 , ψ_0 удовлетворяют уравнениям (6.141), откуда путем подстановки в (6.158) вместо $Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)$ и $Cy \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right)$ их значений находим

$$\begin{aligned} (\eta - \eta_0) Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) &= 2\mu_0 (1 - \eta) \alpha_{2r-1}, \\ (\eta - \eta_0) Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) &= 2\mu_0 (1 - \eta) \alpha_{2r}. \end{aligned}$$

Если теперь X_r , Y_r будут проекциями равнодействующей сил, приложенных к отверстию H_r , то мы будем иметь на основании (6.121) и (6.122)

$$\begin{aligned} Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial x} \right) &= Y_r, \\ Cy \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial y} \right) &= -X_r, \end{aligned}$$

так что коэффициенты α_{2r-1} , α_{2r} определяются непосредственно из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2r-1} &= (\eta - \eta_0) Y_r / 2\mu_0 (1 - \eta), \\ \alpha_{2r} &= -(\eta - \eta_0) X_r / 2\mu_0 (1 - \eta), \end{aligned} \right\} (6.159)$$

и решение для пластинки B получено. Ясно, что это решение, свободное от дислокаций должно удовлетворять всем условиям для напряжений на контуре, так как χ_1 , $\chi_2 \dots \chi_{2n}$ соответствуют нулевым напряжениям на контурах, а χ_0 соответствует данным усилиям. Уравнения (6.154) и (6.159) представляют следовательно полное решение задачи.

Отметим здесь, как вопрос, имеющий большое значение, что коэффициенты α были получены без помощи математического вычисления напряжений. Все, что требуется знать для этого решения, это — величину равнодействующей сил, приложенных к каждому отверстию, и упругие постоянные материала.

Решение для пластинки B получается из основного решения для пластинки A с добавлением умноженных на соответствующие множители функций для $2n$ дислокаций.

Нам остается только определить напряжения сначала в неразрезанной пластинке A , а затем напряжения для каждой из $2n$ дислокаций в A ; затем прибавлять для каждой точки к напряжениям в неразрезанной пластинке A напряжения от дислокаций, умноженные на соответствующие α . В результате получим напряжение в соответствующей точке F пластинки B . Вычисление можно произвести очень легко при помощи обыкновенного арифмометра.

Единственное действительное затруднение представляет собою изготовление образцов для наблюдения над напряжениями при дислокациях.

Все вышесказанное относится к случаю плоской деформации; принцип остается конечно тем же самым и в случае обобщенного плоского напряженного состояния с той только разницей, что вместо η в формулы входит σ , так что вместо $(\eta - \eta_0)/(1 - \eta)$ в (6.159) нужно написать $(\sigma - \sigma_0)/(1 - \sigma)$ или, что то же самое [так как $\sigma = \eta/(1 + \eta)$], $(\eta - \eta_0)/(1 + \eta_0)$. А так как $1 + \eta_0 > 1 - \eta$, то можно отметить, что поправки при переходе от одного материала к другому будут всегда меньшими для обобщенного плоского напряженного состояния, чем для случая плоской деформации, т. е. они меньше для пластинки, чем для цилиндра.

§ 6.16. Поправки к напряжениям в круговом кольце для материалов разного сорта.

Очень интересно определить величину поправочных членов $\sum \alpha_r \chi_r$ в простом случае кругового кольца, где система напряжений, вызванная дислокациями переноса, уже получена (см. § 4.29). Это даст нам представление о величине этих поправок.

Для простоты мы ось Ox направим параллельно равнодействующей сил на внутреннем контуре. Мы имеем тогда $Y_1 = 0$, а следовательно и $\alpha_1 = 0$, так что остается только одна дислокация в виде переноса параллельно оси Oy . Решение для этого случая дано уравнениями (4.2951, 2, 3) и (4.2971, 2). Мы имеем

$$2\mu_0 C_y (V_2) = 4\pi (1 - \sigma_0) D_1,$$

рассматривая здесь для примера случай обобщенного плоского напряженного состояния как более распространенный.

Так как здесь $C_y (V_2) = 1$, то следовательно $D_1 = \mu_0 / 2\pi (1 - \sigma_0)$.

Теперь из (6.159), после замены η через σ , получаем

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\sigma - \sigma_0}{1 - \sigma} X_1 = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\eta - \eta_0}{1 + \eta_0} X_1.$$

Таким образом, так как $(1 - \sigma_0)(1 + \eta_0) = 1$,

$$\alpha_2 D_1 = -\frac{1}{4\pi} (\eta - \eta_0) X_1,$$

а поправочные члены для напряжений, которые ради краткости мы обозначим через $\Delta \overline{rr}$, $\Delta \overline{r\theta}$, $\Delta \overline{\theta\theta}$, будут

$$\Delta \overline{rr} = \alpha_2 \overline{rr}_2 = -\frac{(\eta - \eta_0) X_1}{4\pi (a^2 + b^2) r^3} (a^2 - r^2) (r^2 - b^2) \cos \theta, \quad (6.161)$$

$$\Delta \overline{r\theta} = \alpha_2 \overline{r\theta}_2 = -\frac{(\eta - \eta_0) X_1}{4\pi (a^2 + b^2) r^3} (a^2 - r^2) (r^2 - b^2) \sin \theta, \quad (6.162)$$

$$\Delta \overline{\theta\theta} = \alpha_2 \overline{\theta\theta}_2 = -\frac{(\eta - \eta_0) X_1}{4\pi (a^2 + b^2) r^3} [a^2 b^2 + r^2 (a^2 + b^2) - 3r^4] \cos \theta. \quad (6.163)$$

Необходимо отметить, что эти поправки зависят только от величины равнодействующей сил, приложенных к отверстию, а не от способа распределения этих сил; это примечание относится не только к круговому кольцу, но также и к общему случаю пластинки любой формы.

Найдем максимумы поправок для напряжений в точке, где эти максимумы имеют место: из вида правой части уравнений (6.161, 2, 3), представляющей произведение функций от r и θ , ясно, что максимум поправки для каждого напряжения будет при одном и том же значении r для каждого радиуса-вектора. Эти максимумы, в свою очередь, достигают наибольшего значения, при $\theta = 0$ или $\frac{1}{2}\pi$, т. е. на диаметре, параллельном направлению равнодействующей сил, приложенных к внутреннему контуру для $\Delta\overline{rr}$ и $\Delta\overline{\theta\theta}$ и при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ для $\Delta\overline{r\theta}$.

Рассмотрим сначала

$$\Delta\overline{\theta\theta} = -\frac{(\eta - \eta_0) X_1}{4\pi(a^2 + b^2)} \cdot \varphi \cos \theta,$$

где

$$\varphi = \frac{a^2 b^2}{r^3} + \frac{a^2 + b^2}{r} - 3r.$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3a^2 b^2}{r^4} - \frac{a^2 + b^2}{r^2} - 3 < 0$$

повсюду. Таким образом экстремальные значения φ получаются при граничных значениях r в данном кольце, именно

$$\varphi = \frac{2(a^2 - b^2)}{b}, \text{ если } r = b,$$

$$\varphi = -\frac{2(a^2 - b^2)}{a}, \text{ если } r = a;$$

если b будет меньше a , то первое выражение будет численно больше, так что

$$\Delta\overline{\theta\theta}_{\max} = \frac{(\eta - \eta_0)(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} \frac{X_1}{2\pi b} \quad (\text{численно}); \quad (6.164)$$

отсюда следует, что поправка бывает всегда малой, если $\frac{b}{a}$ близко к единице, т. е. если ширина кольца мала по сравнению с его радиусом. Если $\eta_0 = 0,2$, $\eta = 0,3$ и $\frac{a}{b}$ равно 1,25, то получится

$$\Delta\overline{\theta\theta}_{\max} = 0,022 \frac{X_1}{2\pi b},$$

т. е. около 2% равномерно распределенного давления по внутренней окружности кольца.

Сама по себе эта поправка будет в общем незначительна по сравнению с появляющимися в этом случае сильными напряжениями, так что ею в этом случае, даже около наиболее опасных мест, можно пренебречь.

Переходя теперь к $\Delta\overline{rr}$ и $\Delta\overline{r\theta}$, мы должны найти максимум $(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)/r^3$. Здесь, очевидно, нет перемены знака этого выражения внутри тела кольца и положительный максимум получается между $r = a$ и $r = b$.

Соответствующее этому максимуму значение r получается из выражения

$$r^2 = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 12a^2 b^2} - a^2 - b^2}{2}.$$

Это значение r^2 приводит к несколько неудобным алгебраическим выражениям для определения наибольших поправок, заключающим в себе радикалы; а так как мы главным образом заинтересованы в отыскании верхнего предела для величины поправок, то мы их увеличим, заменив r^3 в знаменателе его наименьшим значением b^3 ; наибольшее значение $(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)$ получится при $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, так что

$$\widetilde{\Delta rr}_{\max} = \widetilde{\Delta r\theta}_{\max} < \frac{(\eta - \eta_0) X_1}{16\pi b^3} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \text{ (численно);} \quad (6.165)$$

так как это выражение включает квадрат разности $a^2 - b^2$, то оно в общем дает даже еще меньшую поправку, чем для напряжений $\theta\theta$. Беря те же значения η , η_0 , a/b , как и раньше, находим, что

$$\widetilde{\Delta rr}_{\max} = \widetilde{\Delta r\theta}_{\max} < (0,00154) X_1 / 2\pi b,$$

чем обычно можно пренебречь.

Исследование кругового кольца подтверждает, следовательно, предварительное заключение § 6.07 относительно того, что поправки для напряжений, зависящие от изменения отношения упругих постоянных, в большинстве случаев будут вероятно ничтожными. Это конечно ни в коем случае не может считаться абсолютным доказательством для общего случая. Полученные выше общие теоремы дают возможность определить эти поправки там, где ими нельзя просто пренебречь или вычислить их величину аналитически; это определение может быть сделано путем специального исследования напряжений, вызванных соответствующими дислокациями.

Системы напряжений, соответствующие трем основным плоским дислокациям для кругового кольца (если рассматривать задачу в трех измерениях, то там окажутся возможными шесть дислокаций), были проверены с помощью оптического метода Ролла, ¹ Корбино, ² Трабаччи. ³

§ 6.17. Распределение напряжений, вызванное силой, передающейся через болт или заклепку.

Важную для инженерной практики задачу представляет собою изучение распределения напряжений около отверстия в растягиваемой пластинке при нагрузке, приложенной к болту или заклепке, плотно заполняющей это отверстие.

Некоторые из прежних опытов ⁴ показывают, что при ограниченной ширине растягиваемой пластинки нагрузка, передаваемая болтом или заклепкой, плотно заполняющими отверстие, вызывает в пластинке очень большое растягивающее напряжение (фиг. 6.171) в наименьшем поперечном сечении, которое затем быстро падает до величины, меньшей среднего растягивающего напряжения. Это явление сопровождается у самого отверстия поперечным сжимающим напряжением rr , которое также очень быстро падает и, перейдя через нуль, становится растяжением и затем обращается в нуль в крайних точках поперечного сечения.

Когда пластинка оканчивается недалеко от отверстия, как в этом примере, тогда напряжение в точках верхнего контура оказывается растяжением, достигающим наибольшего значения в средней точке A и около нее.

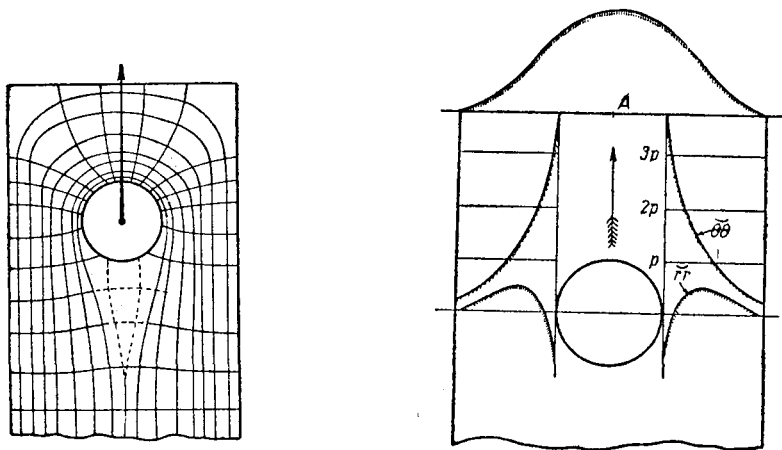
¹ Rolla, Rend. Acc. dei Lincei 16, 1 Sem. 1907.

² Corbino, Ibid., Ser. V, 18, 1909, 437—44; Nuovo Cimento, Ser. V, 17, 1909, 361—70.

³ Trabacchi, I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Voltèrra, Rend. Acc. dei Lincei, Ser. V, 18, 1909, 444—9; См. также Nuovo Cimento, Pisa, Ser. V, 17, 1909, 371—7.

⁴ G. Coker and W. A. Scoble, The distribution of stress due to a rivet in a plate (Trans. Inst. Naval Architects, 1913).

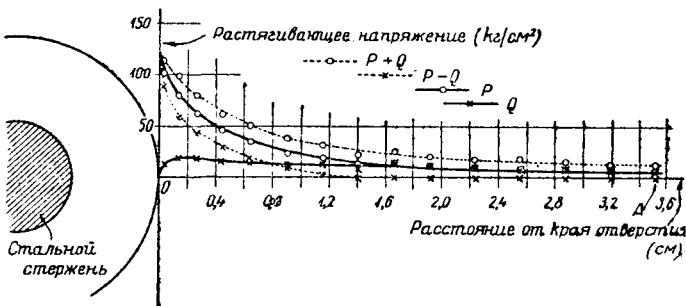
Эта задача была позднее исследована Кокером и Фукуда с целью получения точных данных о том, когда делается незаметным влияние близости контура. С этой целью в середине четырехугольной пластинки с размерами $45,7 \text{ см} \times 15,2 \text{ см} \times 0,399 \text{ см}$ было просверлено отверстие диаметром $1,946 \text{ см}$,



Фиг. 6.171. Линии главных напряжений и график распределения напряжений от давления болта на стенки центрального отверстия в растянутом образце.

в которое было вставлено кольцо, точно пригнанное к этому отверстию. Круглый стержень $0,792 \text{ см}$ диаметром был пропущен через это кольцо, а к стержню был приложен груз при помощи двух хомутов, прикрепленных к захвату испытательной машины. К другому концу элемента были прикреплены две пластинки посредством небольших болтов, а к центральному болту, проходящему через эти пластинки, был приложен груз.

Ближайшие грани пластинки оказались на таком значительном расстоянии в $6,647 \text{ см}$ от стержня, что наличие их вряд ли могло иметь большое влияние на напряжения около отверстия. Распределение напряжений определялось в точках поперечного сечения, проходящего через центр стержня, при среднем напряжении в $17,1 \text{ кг/см}^2$; на фиг. 6.172 показано это распределение напряжений;

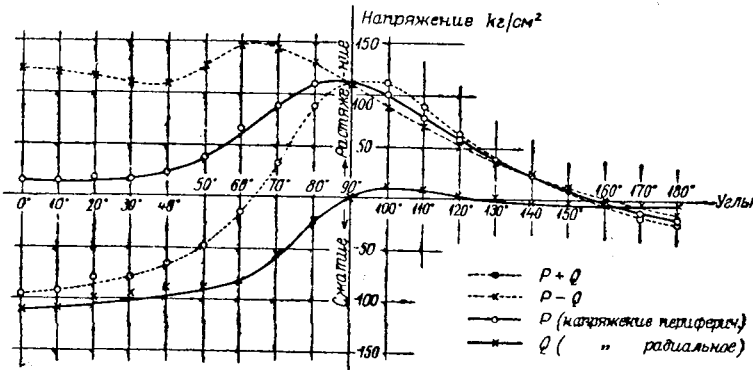


Фиг. 6.172. Распределение напряжений под действием давления стержня на стенки центрального отверстия в широком образце.

максимальное растягивающее напряжение $\sigma_{\theta} = P$ у контура отверстия, где оно доходит до $112,5 \text{ кг/см}^2$, как можно видеть на чертеже, будет в шесть раз больше среднего. Точное значение $\sigma_{\theta} + \sigma_r = P + Q$ в точках контура определить трудно, так как измерительные иглы, как уже упоминалось раньше, не могут быть поставлены точно в точках контура и не показывают в этом случае никакого следа поперечного сжимающего напряжения σ_r , как можно бы ожидать на основании предыдущего примера. Это повидимому есть следствие того, что стержень

оказался немного меньше отверстия. На внешних концах поперечного сечения напряжения становятся настолько ничтожными, что в точке A , лежащей приблизительно в середине между стержнем и продольной стороной пластинки, делаются недоступными для измерений (фиг. 6.172).

Если предположить, что весьма вероятно, что напряжения будут продолжать убывать линейно, начиная от точки A , и обратятся в нуль у концов сечения, то тогда сумма $\sum \theta \theta dx$, распространенная по всему сечению, даст величину всей приложенной к пластинке нагрузки в 90,7 кг; величина эта оказывается верной с точностью до 3%.
 Интересно проследить за распределением напряжений в точках соприкосновения стержня и пластинки, что до сих пор не исследовалось оптическим способом. Так как оптические измерения могут производиться вплоть до самого контура, тогда как механические измерения поперечных деформаций для определения $P+Q$ могли до сих пор быть производимы только на расстоянии 0,025 см от контура, то оба ряда измерений производились именно в этих пределах так, что они охватывают круг с радиусом на 0,025 см большим, чем радиус стержня.



Фиг. 6.173. Распределение напряжений в точках контура отверстия с диаметром, большим диаметра болта на 1/100 дюйма.

На фиг. 6.173 показаны результаты наблюдения над $P+Q$ и полученные из них графики распределения P и Q . Углы отсчитываются от направления приложенной силы.

Очевидная аномалия в распределении Q между 90° и 130° заключается в том, что оно является растягивающим, что было бы невозможным на контуре, но возможно в точках круга, находящегося внутри пластинки.

Отличительной чертой напряжений P является их малость на некотором расстоянии по обе стороны от линии действия силы. Величина их на стороне отверстия, лежащей над стержнем, на которую передается давление, немного превышает среднее напряжение в поперечном сечении, проходящем через точку контура, которая лежит на радиусе, составляющем угол в $\pm 30^\circ$ с линией действия силы, а затем оно постепенно увеличивается, достигая шестикратной величины по сравнению с этой величиной при угле 90°. Интересно также отметить, что значение $P-Q = \{(\overline{rr} + \overline{\theta\theta})^2 - 4\overline{r\theta^2}\}^{1/2}$ достигает абсолютного максимума, приблизительно, при угле $\pm 65^\circ$; этот максимум сопровождается характерными изохроматическими линиями с „павлиньими глазами“ по обе стороны линии действия силы. Причины этого явления будут указаны ниже. Как увидим дальше, точки части окружности, расположенной ниже болта, симметрично по отношению к действию силы, подвергаются небольшим сжимающим напряжениям.

Аналитическое исследование полученных здесь экспериментальных результатов

было произведено Биклеем, ¹ который предполагал, что пластинка простирается в бесконечность. Он взял функцию напряжений, представленную формулой (4.313), но отбросил все коэффициенты A_n и C_n (за исключением C_1), как не приводящие к нулевым напряжениям на бесконечности, а равно и все коэффициенты со штрихами, приводящие к нечетному решению относительно θ .

Тогда из уравнений (4.3141, 2, 3) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{B_0}{r^2} - \frac{1}{2} C_1 (3 + \eta) \frac{\cos \theta}{r} - 2 \frac{B_1}{r^3} \cos \theta - \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \{B_n n (n+1) \cdot r^{-n-2} + D_n (n+2) (n-1) r^{-n}\} \cos n\theta, \\ \overline{\theta\theta} &= -\frac{B_0}{r^2} + \frac{1}{2} C_1 (1 - \eta) \frac{\cos \theta}{r} + 2 \frac{B_1}{r^3} \cos \theta + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{B_n n (n+1) \cdot r^{-n-2} + D_n (n-2) (n-1) r^{-n}\} \cos n\theta, \\ \overline{r\theta} &= \frac{1}{2} C_1 (1 - \eta) \frac{\sin \theta}{r} - 2 \frac{B_1}{r^3} \sin \theta - \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \{B_n n (n+1) \cdot r^{-n-2} + D_n n (n-1) \cdot r^{-n}\} \sin n\theta, \end{aligned} \right\} (6.171)$$

в которых коэффициенты C_1 , B_n , D_n должны определяться из значений напряжений, полученных в точках круга $r = 0,998$ см.

Отсюда

$$\overline{rr} + \overline{\theta\theta} = -(1 + \eta) \frac{C_1}{r} \cos \theta - 4 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) D_n r^{-n} \cos n\theta, \quad (6.172)$$

$$\begin{aligned} \overline{rr} - \overline{\theta\theta} &= \frac{2B_0}{r^2} - \left(\frac{4B_1}{r^3} + \frac{2C_1}{r} \right) \cos \theta - \\ &\quad - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) B_n r^{-n-2} + n(n-1) D_n r^{-n}\} \cos n\theta. \end{aligned} \quad (6.173)$$

В действительности главные направления $P \pm Q$ измерялись в точках круга с радиусом $r = 0,998$ см или же на расстоянии $0,025$ см от контура. Пользуясь обычным методом гармонического анализа, получаем, что эти напряжения могут быть представлены формулами:

$$\left. \begin{aligned} P + Q &= 5,48 - 49,22 \cos \theta - 76,50 \cos 2\theta + 13,71 \cos 3\theta + 20,89 \cos 4\theta + \\ &\quad + 0,07 \cos 5\theta - 9,78 \cos 6\theta \\ P - Q &= 80,40 + 58,50 \cos \theta - 34,61 \cos 2\theta - 6,68 \cos 3\theta + 34,50 \cos 4\theta + \\ &\quad + 10,20 \cos 5\theta + 2,60 \cos 6\theta. \end{aligned} \right\} (6.174)$$

Теперь, хотя $P + Q = \overline{rr} + \overline{\theta\theta}$, но $P - Q$ не равно $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$, так как в этом случае направления главных нормальных напряжений не совпадают с радиальным и тангенциальным направлениями; при отсутствии же измерений направления главных нормальных напряжений необходимо отыскивать $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$ при помощи последовательных приближений следующим образом.

¹ W. G. Bickley, The Distribution of Stress round a Circular Hole in a Plate, Phil. Trans., Ser. A, 227.

Предположим прежде всего, что $\overline{r\theta}$ мало, и приравняем $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$ к $P - Q$. Отсюда получаются очень легко разрешаемые уравнения для определения C_1, B_n, D_n . Подставив их в формулу для $\overline{r\theta}$, получаем первое приближение для $\overline{r\theta}_1$. Подставив его в уравнение

$$\overline{rr} - \overline{\theta\theta} = \sqrt{(P - Q)^2 - 4r\theta^2},$$

находим второе приближение для $\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$. Это выражение опять-таки может быть разложено в ряд Фурье, а далее можно получить более точные значения коэффициентов. Процесс этот повторяют до тех пор, пока постоянство коэффициентов не укажет на совпадение их приближенных значений с действительными величинами.

Окончательный результат будет:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -35,51 - 55,38 \cos \theta - 24,48 \cos 2\theta + 7,52 \cos 3\theta + \\ &\quad + 7,03 \cos 4\theta - 5,02 \cos 5\theta - 5,34 \cos 6\theta, \\ \overline{\theta\theta} &= 41,00 + 6,15 \cos \theta - 52,00 \cos 2\theta + 6,19 \cos 3\theta + \\ &\quad + 13,85 \cos 4\theta + 5,10 \cos 5\theta - 4,43 \cos 6\theta, \\ \overline{r\theta} &= 16,0 \sin \theta + 13,78 \sin 2\theta + 0,67 \sin 3\theta - 3,41 \sin 4\theta - \\ &\quad - 5,06 \sin 5\theta - 0,46 \sin 6\theta. \end{aligned} \right\} (6.175)$$

Здесь наблюдаются два противоречия. Выражение для $\overline{r\theta}$ не обращается в нуль вместе с $P - Q$, как должно быть. Зависит это может быть: 1) от ошибки, допущенной при эксперименте; 2) от природы процесса приближенных вычислений; 3) от того факта, что в определение коэффициентов ряда Фурье для $P \pm Q$ входят все определенные из опыта числа и 4) кроме того отбрасывание гармоник более высокого порядка, хотя бы и с малыми коэффициентами, может оказать влияние.

Таким образом значение $\overline{r\theta}$ можно рассматривать как первое приближение к величине силы трения между соприкасающимися поверхностями.

Другое противоречие заключается в том, что численное значение $P + Q = \overline{rr} + \overline{\theta\theta}$ содержит в себе постоянный член 5,48, что противоречит уравнениям (6.172). Это можно учесть добавлением к χ члена, равного Jr^2 , который дает $\overline{rr} + \overline{\theta\theta} = 4J = 5,48$ по всей пластинке и поэтому приводит к малым конечным значениям для напряжений в бесконечности. Так как это слагаемое мало и находится в пределах ошибок опытов, то достаточно ввести соответствующую поправку в выражения для \overline{rr} , $\overline{\theta\theta}$ и $\overline{r\theta}$. Тогда получаем окончательные выражения для напряжений в точках круга с радиусом $r = 0,998$ см.

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -37,3 - 55,38 \cos \theta - 24,48 \cos 2\theta + 7,52 \cos 3\theta + \\ &\quad + 7,66 \cos 4\theta - 5,03 \cos 5\theta - 5,34 \cos 6\theta, \\ \overline{\theta\theta} &= 37,3 + 6,15 \cos \theta - 52,00 \cos 2\theta + 6,19 \cos 3\theta + \\ &\quad + 13,85 \cos 4\theta + 5,17 \cos 5\theta - 4,43 \cos 6\theta, \\ \overline{r\theta} &= 16,0 \sin \theta + 13,07 \sin 2\theta + 0,67 \sin 3\theta - \\ &\quad - 3,41 \sin 4\theta - 5,06 \sin 5\theta - 0,46 \sin 6\theta. \end{aligned} \right\} (6.176)$$

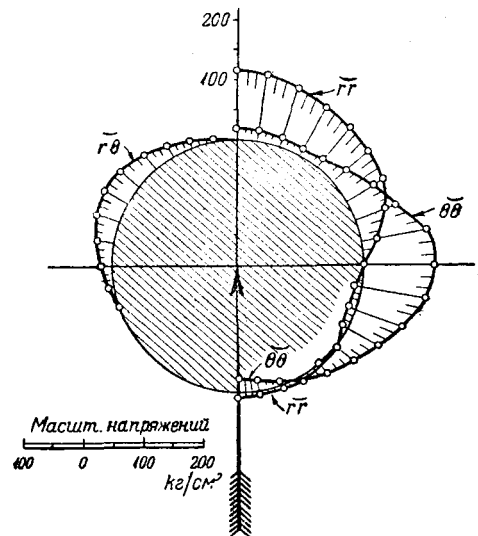
Частичную проверку этих цифр можно получить путем вычисления составляющей X усилий, которая оказывается равной 89,4 кг (приблизительно), что вполне соответствует действительно бывшей при опытах нагрузке в 90,7 кг. Из приведенных выше значений составляется следующая таблица напряжений в точках контура:

θ	\overline{rr}	$\overline{r\theta}$	$\overline{\theta\theta}$	θ	\overline{rr}	$\overline{r\theta}$	$\overline{\theta\theta}$
0°	-114,5	0	16,6	100°	9,8	2,7	109,7
10	-109,8	1,3	16,0	110°	8,0	-0,2	84,3
20	-101,8	6,2	14,1	120°	9,6	-0,07	57,9
30	-90,5	16,0	12,4	130°	-1,4	-0,4	38,5
40	-86,3	27,9	15,7	140°	-3,4	-2,1	25,0
50	-83,1	37,3	29,7	150°	-3,1	-4,9	12,4
60	-72,8	39,4	55,6	160°	-5,2	-6,3	-2,5
70	-55,7	33,4	87,9	170°	-3,8	-4,5	-16,2
80	-26,7	18,6	114,0	180°	-4,4	0	-21,9
90	-3,0	10,4	122,2				

Эти же значения изображены и на полярной диаграмме (фиг. 6.174). Особо внимания заслуживает при этом то обстоятельство, что максимальное значение напряжения \overline{rr} почти равно наибольшему напряжению $\overline{\theta\theta}$, притом, где одно из них будет максимальным, другое — минимальным, если только мы оставим без внимания небольшие изменения в величине $\overline{\theta\theta}$ возле осевой линии и небольшие значения \overline{rr} между 90° и 180°, причем последние без сомнения являются следствием допущенных при опытах ошибок.

Интересна также и кривая $\overline{r\theta}$, так как она показывает, что эти величины могут быть большими при отсутствии смазки между болтом и окружающим материалом.

В точках осевой линии и сечения, проведенного через центр болта перпендикулярно к ней, также получается очень хорошее совпадение опыта с изложенной выше теорией (фиг. 6.172).



Фиг. 6.174.

§ 6.18. Стержни и болты с проушинами.

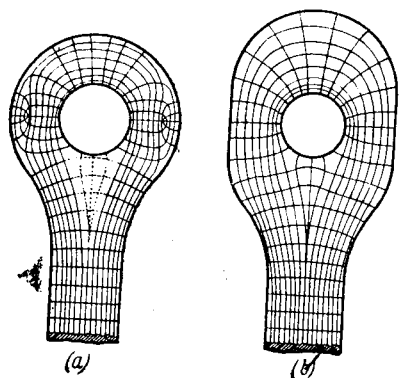
Элементы этого вида имеют широкое применение в конструкциях машин, как дающие соединение с двумя степенями свободы: благодаря этому они оказываются очень подходящими в качестве элементов, передающих определенное движение. Штатун машины прямого действия представляет обычный пример несколько сложного распределения напряжений в проушине, болты же с серьями и с нарезкой на другом конце употребляются для различных видов установочных креплений.

В конструкциях мостового типа стержень с проушиной имел прежде большое значение, как главный элемент цепи подвесных мостов; в настоящее же время его заменил проволочный кабель из стальных проволок с высоким временным сопротивлением, значительно превосходящий по прочности ковкую сталь и лишенный недостатка значительной концентрации напряжений у проушины, почти всегда свойственной элементам этого вида.

В больших американских мостовых фермах, где элементы с проушинами прежде почти исключительно употреблялись в качестве составных частей нижнего

пояса, в настоящее время применяются, где только можно, клепаные стержни, как более жесткие, особенно в боковом направлении, несмотря на большую стоимость их изготовления и монтажа.

Стержень с проушиной представляет собою тем не менее интересный пример часто применяемого элемента; для иллюстрации изображены на фиг. 6.181 два



Фиг. 6.181. Линии главных напряжений в двух стандартных типах проушин звеньев цепных мостов.

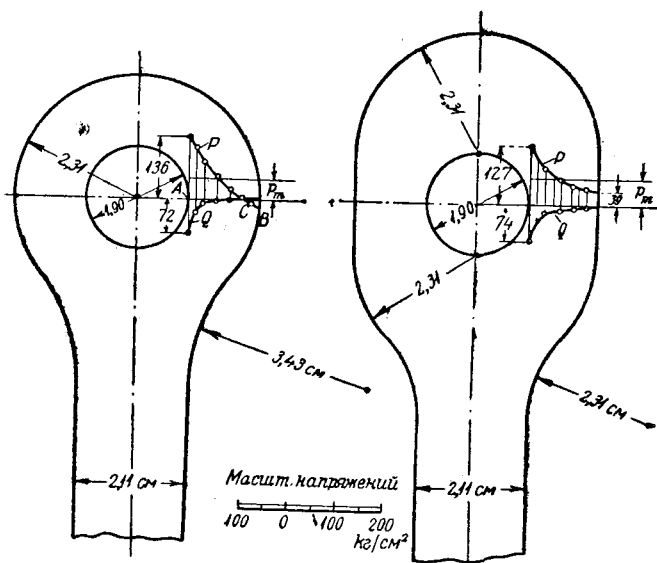
стандартных типа этих стержней, применяемых в мостостроении; в одном из этих типов верхняя часть внешнего контура головки концентрична с внутренним контуром, в другом же центры верхней и нижней круговых дуг контура находятся в самой верхней и самой нижней точках внутреннего контура: эти дуги соединены между собою прямыми линиями, касательными к ним.

Для большей точности размеры взяты из практики норм проектирования. Траектории главных нормальных напряжений, возникающие под действием нагрузки, показаны на фиг. 6.181; существенная разница этих траекторий в обоих типах проушин заключается в том, что в первом типе существуют две особенные точки, расположенные в поперечном сечении, проходящем через центр отверстия проушины.

Если пренебречь напряжением Q , то наличие этих двух особенных точек указывает на возможность перемены знака напряжения P .

Растягивающая сила уравнивается, следовательно, в этом поперечном сечении довольно невыгодно распределенными напряжениями, так как часть сечения находится под действием нормального сжимающего напряжения и таким образом нагрузка вызывает систему взаимно противоположных напряжений, что ведет к высокой концентрации напряжений. В другом типе нет точек изотропии, и очертание внешнего контура дает вероятно лучшее распределение напряжений по поперечному сечению.

Это доказывается измерениями напряжений для обоих типов проушин; результаты этих измерений изображены на фиг. 6.182. В первом типе при среднем напряжении $P_m = 49,2 \text{ кг/см}^2$, главное растягивающее напряжение P по поперечному сечению AB доходит до $136,4 \text{ кг/см}^2$ в точке на расстоянии $0,025 \text{ см}$ от болта; затем оно быстро падает до нуля в точке C и переходит у



Фиг. 6.182.

наружного контура в сжимающее напряжение небольшой величины. Напряжение Q является сжимающим с величиною в $71,7 \text{ кг/см}^2$ возле болта; оно быстро падает потом до нуля.

В другом типе, со средним напряжением $56,2 \text{ кг/см}^2$, растягивающее напря-

жение P доходит до $126,5 \text{ кг/см}^2$ в точке на расстоянии $0,025 \text{ см}$ от болта, падает гораздо медленнее и не меняет знака. Это напряжение имеет минимальное значение $39,4 \text{ кг/см}^2$ у внешнего контура. Напряжение Q — почти то же, что и в первом типе.

§ 6.19. Эллиптические отверстия.

Отверстия с эллиптическим очертанием — явление довольно редкое в инженерной практике. Они встречаются однако в лазах котлов, где принято устраивать крышки таким образом, чтобы давление пара способствовало поддержанию плотности шва. В стенке котла часто вырезывается отверстие, сконструированное так, чтобы образовать плоский люк, открывающийся внутрь с эллиптическим очертанием для того, чтобы можно было вставить в него крышку. Крышка снабжается выступающими шпильками, на наружных концах которых имеются детали, опирающиеся на балку, перекрывающую отверстие.

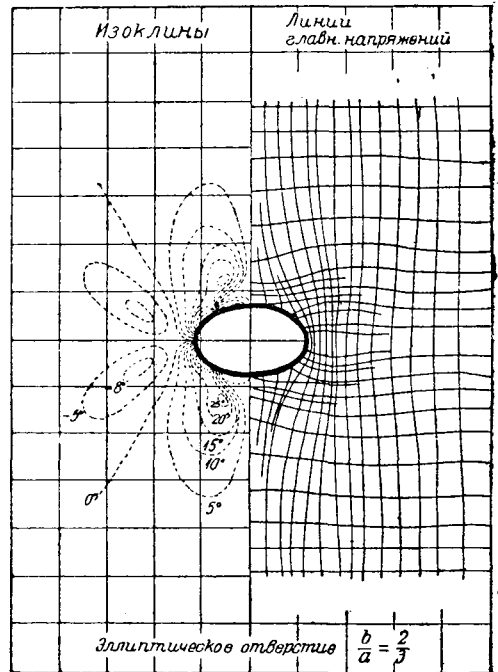
Эта форма отверстия имеет значение еще по той причине, что при приближении одной из осей к нулю, отверстие переходит в трещину. Представление о влиянии трещины на распределение напряжений может быть получено из изучения напряжений, возникающих около эллиптического отверстия.

Влияние эллиптического отверстия в любой точке пластинки с произвольным контуром, находящейся под действием каких-либо сил, приложенных в ее плоскости, определяется экспериментальным путем так же легко, как и в случае круглого отверстия для тех же условий. Трудность же определения напряжений аналитическим путем очень велика; аналитически получено только несколько решений для тех случаев, когда контур пластинки находится на достаточно далеком расстоянии от отверстия и не может оказывать влияния на распределение напряжений около отверстия, или же когда наружный контур представляет собою эллипс, софокусный с эллиптическим отверстием.

Для простоты удобнее начинать с экспериментального изучения такого случая, который ближе всего подходит к одному из этих аналитически решенных случаев.

Мы взяли поэтому случай небольшого эллиптического отверстия в очень большой растягиваемой пластинке; во взятом примере большая ось отверстия ¹ равнялась $a = 3,0 \text{ см}$ и была расположена перпендикулярно линии действия силы; центр отверстия был на этой линии. Малая ось длиной $2,0 \text{ см}$ направлена по этой линии; ширина самой пластинки равна $12,7 \text{ см}$ при толщине $0,394 \text{ см}$.

Для предупреждения влияния концевых закреплений растягиваемой пластинки, которые могли бы сказаться на напряжениях около отверстия, оба захвата удалены



Фиг. 6.191.

¹ E. G. Coker and A. L. Kimball, The effect of holes, cracks and other discontinuities in ship's plating, Trans. Inst. Naval Architects, 1920.

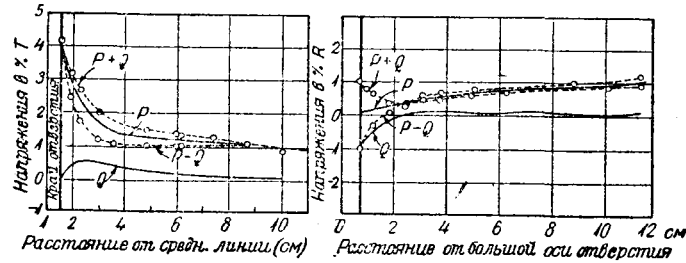
на значительное расстояние от него; они состоят из двух пар пластинок, прикрепленных к образцу посредством большого количества болтов с тем, чтобы возможно равномернее распределить на него нагрузку.

Нагрузка на эти пластинки передается с помощью надежных болтов, расположенных на оси образца. Эти болты входят в захваты небольшой разрывной машины типа Бактона.

Благодаря этому устройству получается равномерное распределение напряжений в образце уже на небольшом расстоянии от захватов. Приложив груз,

увидим, что возникает сильное напряжение в точках контура отверстия у концов большой оси; оно сходно по характеру с напряжениями, возникающими у кругового отверстия, но только более интенсивно.

Изоклины и траектории главных нормальных напряжений изображены на фиг. 6.191;

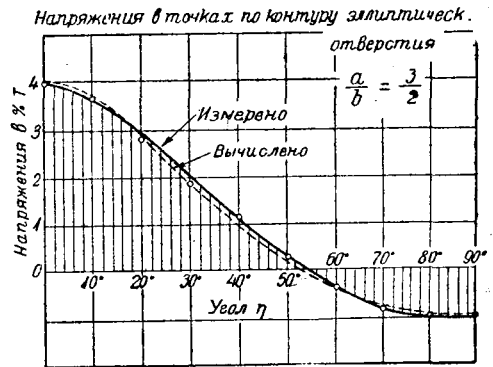


Фиг. 6.192.

Фиг. 6.193.

кроме тесного сближения между собой траекторий главных нормальных напряжений, стремящихся обогнуть отверстие, на этой же фигуре можно отметить перемену знака кривизны некоторых из них; это явление связано, очевидно, с переменной знака напряжений в точках соседних прямых краев пластинки, параллельных линии действия силы; подобное явление уже наблюдалось при исследовании напряжений в пластинке с круглым отверстием, когда прямолинейные контуры пластинки расположены недалеко от этого отверстия. В наименьшем поперечном сечении (фиг. 6.192) продольные напряжения P оказываются весьма большими около отверстия, но быстро падают до средней величины T , в то время как напряжение Q очень быстро возрастает от нуля в точке внутреннего контура до максимума на небольшом расстоянии от этой точки, после чего начинается обратное падение напряжения до нуля. В точках на линии действия силы напряжения на контуре оказываются сжимающими (фиг. 6.193); они также быстро падают до нуля и переходят в небольшое растяжение, а затем вновь обращаются в нуль; напряжение P равно нулю около отверстия, затем повышается до величины среднего напряжения для пластинки без отверстия.

Напряжения в точках контура эллиптического отверстия изображены на фиг. 6.194, где координаты каждой из точек представляют собою эксцентричный угол η и напряжение $\theta\theta$, выраженное в долях напряжения T , соответствующего случаю пластинки без отверстия. Как указано в § 6.02, вследствие конечной ширины пластинки, это напряжение не вполне равно среднему растягивающему напряжению по наименьшему сечению. Вычисления, которыми определяется эта величина, приведены в § 6.24 в связи с теоретическим решением задачи; приняв полученное значение и в данном случае, не трудно сделать существенные выводы. На фиг. 6.194 показано, например, что экстремальные значения напряжения равны $4T$ при $\eta = 0$ и $-T$ при



Фиг. 6.194.

Напряжения в точках контура эллиптического отверстия изображены на фиг. 6.194, где координаты каждой из

точек представляют собою эксцентричный угол η и напряжение $\theta\theta$, выраженное в долях напряжения T , соответствующего случаю пластинки без отверстия. Как указано в § 6.02, вследствие конечной ширины пластинки, это напряжение не вполне равно среднему растягивающему напряжению по наименьшему сечению. Вычисления, которыми определяется эта величина, приведены в § 6.24 в связи с теоретическим решением задачи; приняв полученное значение и в данном случае, не трудно сделать существенные выводы. На фиг. 6.194 показано, например, что экстремальные значения напряжения равны $4T$ при $\eta = 0$ и $-T$ при

$\eta = 90^\circ$; эти значения можно связать с формой отверстия посредством простой формулы

$$p_{\max} = T \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad p_{\min} = -T,$$

выражающей результаты этого специального опыта, но справедливой, как будет доказано в § 6.25, для всех случаев этого рода. Когда $a = b$, мы имеем ранее разобранный случай круглого отверстия.

Прежде чем перейти к какому-либо иному случаю, изученному экспериментально, приведем теоретическое исследование для отверстий этого типа, пользуясь общей теорией криволинейных координат, изложенной в главе II.

§ 6.20. Решение уравнения $\nabla^4 \chi = 0$ в эллиптических координатах.

Будем пользоваться обозначениями главы II, § 2.40 и примем, что η меняется в пределах от 0 до 2π (или от $-\pi$ до $+\pi$, что в данном случае почти одно и то же), в то время как ξ возрастает от 0 до ∞ , так что каждому значению ξ соответствует весь контур одного эллипса из семейства софокусных эллиптических кривых, причем η представляет собой эксцентричный угол для этого эллипса и каждое значение η относится только к одной четверти соответствующей полной софокусной гиперболы. При этих условиях мы не встретим нигде особенных точек при наличии отверстия, ограниченного эллипсом $\xi = a$.

Приступим прежде всего к получению типичных решений для функции напряжения.

Так как $\nabla^2 \varphi = 0$ преобразуется при помощи уравнения (2.431) в

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0,$$

то получаются типичные значения φ вида

$$e^{\pm n\xi \pm ni\eta},$$

т. е. вида

$$e^{\pm n\xi} \cdot \cos n\eta \quad \text{и} \quad e^{\pm n\xi} \cdot \sin n\eta,$$

где n есть постоянная величина.

Но формулы (4.013) и (4.014) показывают, что $\chi = x\varphi$ и $\chi = y\varphi$ будут решениями $\nabla^4 \chi = 0$.

Отсюда

$$2e^{\pm n\xi} \operatorname{ch} \xi \cdot \cos \eta \cos n\eta,$$

и

$$2e^{\pm n\xi} \operatorname{sh} \xi \cdot \sin \eta \sin n\eta$$

могут быть функциями напряжения. Эти выражения дают

$$e^{\pm n\xi} \operatorname{ch} \xi (\overline{\cos n-1\eta} + \overline{\cos n+1\eta}),$$

$$e^{\pm n\xi} \operatorname{sh} \xi (\overline{\cos n-1\eta} - \overline{\cos n+1\eta}),$$

откуда после сложения и вычитания получаются типичные решения

$$e^{\pm n\xi + \xi} \overline{\cos n-1\eta} + e^{\pm n\xi - \xi} \overline{\cos n+1\eta},$$

$$e^{\pm n\xi - \xi} \overline{\cos n-1\eta} + e^{\pm n\xi + \xi} \overline{\cos n+1\eta}.$$

Решение, соответствующее нижним знакам в первом из них, и решение, соответствующее верхним знакам во втором, имеют вид

$$e^{\pm m\xi} \cos m\eta$$

и будут решениями уравнения $\nabla^2 \chi = 0$, равно как $\nabla^4 \chi = 0$. Типичными решениями для уравнения $\nabla^4 \chi = 0$ будут следовательно

$$\chi = e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta \quad (6.201)$$

$$\chi = e^{-(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + e^{-(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta. \quad (6.202)$$

Подобным же образом получаем

$$\chi = e^{(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta + e^{(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta, \quad (6.203)$$

$$\chi = e^{-(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta + e^{-(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta. \quad (6.204)$$

К этим выражениям нам придется присоединить четыре гармонических решения:

$$\chi = e^{\pm n\xi} \cos n\eta, \quad (6.205)$$

$$\chi = e^{\pm n\xi} \sin n\eta, \quad (6.206)$$

что дает в общей сложности восемь решений, которые мы можем назвать решениями порядка n .

Так же как в случае полярных координат, выражения, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$, требуют специального изучения и дополнения новыми решениями; но для нашей цели в рассматриваемом случае этого не требуется. Единственными специальными решениями такого порядка, необходимыми для последующего, будут гармонические решения

$$\chi = \xi, \quad (6.207)$$

$$\chi = \eta. \quad (6.208)$$

§ 6.21. Однозначность перемещений.

Для определения пригодности решений, перечисленных в § 6.20, применительно к области, окружающей эллиптическое отверстие, необходимо проверить, приводят ли они к перемещениям, ациклическим для замкнутого пути, заключающего в себе отверстие. Для вычисления перемещений применяем способ § 2.44.

Если χ представлено формулами (6.205, 6, 7, 8), то $\nabla^2 \chi = 0$. Отсюда, так как при отсутствии объемных сил, $\Omega = 0$, $R = 0$, то α' , β' могут быть приравнены нулю. Для данного случая $\partial\chi/\partial\xi$, $\partial\chi/\partial\eta$ будут всегда ациклическими, так что и перемещения, представленные формулами (2.44б), также будут ациклическими.

Если χ выражено формулой (6.201), то мы находим, что

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= \frac{8n}{c^2} \frac{e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta - e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} = \\ &= \frac{8n}{c^2} \left\{ \frac{e^{n(\xi+i\eta)} \operatorname{sh}(\xi - i\eta) + e^{n(\xi-i\eta)} \operatorname{sh}(\xi + i\eta)}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \right\}, \end{aligned}$$

и, пользуясь соотношением

$$\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta = 2 \operatorname{sh}(\xi - i\eta) \operatorname{sh}(\xi + i\eta),$$

получаем

$$\begin{aligned}\nabla^2 \chi &= \frac{4n}{c^2} \left\{ \frac{e^{n(\xi+i\eta)}}{\operatorname{sh}(\xi+i\eta)} + \frac{e^{n(\xi-i\eta)}}{\operatorname{sh}(\xi-i\eta)} \right\} = \\ &= \text{вещ. части } \frac{8n}{c^2} \frac{e^{n\zeta}}{\operatorname{sh} \zeta},\end{aligned}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, как в § 2.36; так что (Ω здесь будет нулем) величина $\nabla^2 \chi + iR$ в формуле (2.447) будет $\frac{8n}{c^2} e^{n\zeta} \operatorname{cosech} \zeta$.

Пользуясь теперь уравнениями (2.401) и (2.447), мы легко находим, что

$$\begin{aligned}\alpha' + i\beta' &= \frac{8}{J} \operatorname{sh}(\xi - i\eta) \int n e^{n\zeta} d\zeta \\ &= \frac{8}{J} e^{n(\xi+i\eta)} \operatorname{sh}(\xi - i\eta) \\ &= \frac{8}{J} e^{n\xi} (\cos n\eta + i \sin n\eta \operatorname{sh} \xi \cos \eta - i \operatorname{ch} \xi \sin \eta),\end{aligned}\quad (6.211)$$

так что

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{8}{J} e^{n\xi} (\operatorname{sh} \xi \cos n\eta \cos \eta + \operatorname{ch} \xi \sin n\eta \sin \eta) \\ &= \frac{4}{J} e^{n\xi} \{ \cos(n-1)\eta \cdot e^\xi - \cos(n+1)\eta \cdot e^{-\xi} \} \\ &= \frac{4}{J} \{ e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta - e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta \};\end{aligned}\quad (6.212)$$

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{8}{J} e^{n\xi} (\operatorname{sh} \xi \cos \eta \sin n\eta - \operatorname{ch} \xi \sin \eta \cos n\eta) \\ &= \frac{4}{J} \{ e^{(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta - e^{(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta \},\end{aligned}\quad (6.213)$$

и полное выражение для перемещений принимает следующий вид:

$$2\mu Ju_\xi = (3-n-4\sigma) e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta - (3+n-4\sigma) e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta, \quad (6.214)$$

$$2\mu Ju_\eta = (3+n-4\sigma) e^{(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta - (3-n-4\sigma) e^{(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta. \quad (6.215)$$

Подобным же образом из значения χ , данного формулой (6.203), получаем

$$2\mu Ju_\xi = (3-n-4\sigma) e^{(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta - (3+n-4\sigma) e^{(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta, \quad (6.216)$$

$$2\mu Ju_\eta = -(3+n-4\sigma) e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + (3-n-4\sigma) e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta, \quad (6.217)$$

и перемещения, соответствующие (6.202), получаются из (6.214), (6.215) путем перемены знака у n , в то время как перемещения, соответствующие (6.203), получаются из (6.216) и (6.217) путем перемены знака у n и одновременно у всего выражения.

Ясно, что поскольку n целое число, приведенные выше выражения для перемещений будут периодическими и по отношению η с периодом 2π . Рядом рассмотренных здесь решений можно следовательно пользоваться в таком виде, как они есть, не прибегая к добавлению многозначных перемещений. Эти решения сами по себе недостаточны для удовлетворения произвольному распределению нагрузки по контурам $\xi = \operatorname{const}$, но они оказываются удовлетворяющими условиям тех задач, которые рассматриваются нами в данной главе.

§ 6.22. Напряжения в эллиптических координатах.

Если мы обратимся к уравнениям (2.4171, 2, 3) и применим их к случаю эллиптических координат, то сможем написать

$$J^4 \overline{\xi\xi} = J^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial J^2}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial J^2}{\partial \eta} \right),$$

или

$$\left. \begin{aligned} (2J^2)^2 \overline{\xi\xi} &= (2J^2)^2 \left[2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \eta} \right], \\ (2J^2)^2 \overline{\eta\eta} &= (2J^2)^2 \left[2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \xi} \right], \\ (2J^2)^2 \overline{\xi\eta} &= -(2J^2)^2 \left[2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \eta} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial (2J^2)}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.221)$$

Возьмем χ в форме (6.201).

$$\begin{aligned} (2J^2)^2 \overline{\xi\xi} &= c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \{ -2(n-1)^2 e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta - \\ &\quad - 2(n+1)^2 e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta \} + \\ &+ 2c^2 \operatorname{sh} 2\xi \{ (n+1) e^{(n+1)\xi} \cos(n-1)\eta + (n-1) e^{(n-1)\xi} \cos(n+1)\eta \} + \\ &+ 2c^2 \sin 2\eta \{ (n-1) e^{(n+1)\xi} \sin(n-1)\eta + (n+1) e^{(n-1)\xi} \sin(n+1)\eta \} = \\ &= c^2 \cos(n-1)\eta \{ -2(n-1)^2 e^{(n+1)\xi} \operatorname{ch} 2\xi + 2(n+1) e^{(n+1)\xi} \operatorname{sh} 2\xi + \\ &\quad + (n+1)^2 e^{(n-1)\xi} + (n+1) e^{(n-1)\xi} \} + \\ &+ c^2 \cos(n+1)\eta \{ -2(n+1)^2 e^{(n-1)\xi} \operatorname{ch} 2\xi + 2(n-1) e^{(n-1)\xi} \operatorname{sh} 2\xi + \\ &\quad + (n-1)^2 e^{(n+1)\xi} - (n-1) e^{(n+1)\xi} \} + \\ &+ c^2 \cos(n+3)\eta \{ (n+1)^2 e^{(n-1)\xi} - (n+1) e^{(n-1)\xi} \} + \\ &+ c^2 \cos(n-3)\eta \{ (n-1)^2 e^{(n+1)\xi} + (n-1) e^{(n+1)\xi} \} = \\ &= c^2 \cos(n-1)\eta \{ 4ne^{(n-1)\xi} - n(n-3) e^{(n+3)\xi} \} + \\ &+ c^2 \cos(n+1)\eta \{ -4ne^{(n+1)\xi} - n(n+3) e^{(n-3)\xi} \} + \\ &+ c^2 \cos(n+3)\eta \{ n(n+1) \} e^{(n-1)\xi} + \\ &+ c^2 \cos(n-3)\eta \{ n(n-1) \} e^{(n+1)\xi}, \end{aligned}$$

и, применяя подобные же преобразования и в других случаях, легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{n} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi} &= \cos(n+3)\eta \cdot (n+1) e^{(n-1)\xi} - \\ &\quad - \cos(n+1)\eta \cdot \{ 4e^{(n+1)\xi} + (n+3) e^{(n-3)\xi} \} + \\ &\quad + \cos(n-1)\eta \cdot \{ 4e^{(n-1)\xi} - (n-3) e^{(n+3)\xi} \} + \\ &\quad + \cos(n-3)\eta \cdot (n-1) e^{(n+1)\xi}, \end{aligned} \quad (6.222)$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{n} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\eta\eta} &= -\cos(n+3)\eta \cdot (n-3) e^{(n-1)\xi} - \\ &\quad - \cos(n+1)\eta \cdot \{ 4e^{(n+1)\xi} - (n-1) e^{(n-3)\xi} \} + \\ &\quad + \cos(n-1)\eta \cdot \{ 4e^{(n-1)\xi} + (n+1) e^{(n+3)\xi} \} - \\ &\quad - \cos(n-3)\eta \cdot (n+3) e^{(n+1)\xi}, \end{aligned} \quad (6.223)$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{n} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\eta} = & -\sin(n+3)\eta \cdot (n-1)e^{(n-1)\xi} + \\ & + \sin(n+1)\eta \cdot (n+1)e^{(n-3)\xi} + \\ & + \sin(n-1)\eta \cdot (n-1)e^{(n+3)\xi} - \\ & - \sin(n-3)\eta \cdot (n+1)e^{(n+1)\xi}. \end{aligned} \quad (6.224)$$

Напряжения, соответствующие значению χ из формулы (6.202), получаются непосредственно из предыдущего путем перемены знака у ξ и одновременно с этим у $\xi\eta$ в вышеприведенных формулах.

Напряжения, соответствующие значениям χ , представленным формулами (6.203) и (6.204), получаются из напряжений, соответствующих (6.201) и (6.202) путем перемены $\cos(n+r)\eta$, $\sin(n+r)\eta$ соответственно на $\sin(n+r)\eta$, $-\cos(n+r)\eta$, там, где эти величины встречаются в правых частях формул.

Нам предстоит еще разобрать напряжения, соответствующие членам χ , данным формулами (6.205) и (6.206).

Принимая $\chi = e^{n\xi} \cos n\eta$, получаем непосредственно

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{n} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi} = & \cos(n+2)\eta \cdot (n-1)e^{n\xi} - \\ & - \cos n\eta [(n-1)e^{(n+2)\xi} + (n+1)e^{(n-2)\xi}] + \\ & + \cos(n-2)\eta \cdot (n+1)e^{n\xi}, \end{aligned} \quad (6.225)$$

$$\overline{\eta\eta} = -\overline{\xi\xi}, \quad (6.226)$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{n} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\eta} = & -\sin(n+2)\eta \cdot (n-1)e^{n\xi} + \\ & + \sin n\eta \cdot [(n-1)e^{(n+2)\xi} + (n+1)e^{(n-2)\xi}] - \\ & - \sin(n-2)\eta \cdot (n+1)e^{n\xi}. \end{aligned} \quad (6.227)$$

Переход от $\chi = e^{n\xi} \cos n\eta$ к $\chi = e^{-n\xi} \cos n\eta$ совершается или путем перемены знака n , или посредством перемены его у ξ и у $\xi\eta$. Переход от одного из этих значений к $\chi = e^{\pm n\xi} \sin n\eta$ совершается посредством перестановки синусов и косинусов, как уже было указано выше.

Напряжения, полученные на основании двух специальных решений (6.207) и (6.208), могут быть также легко получены. Они выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi} &= 2 \operatorname{sh} 2\xi, \\ c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\eta\eta} &= -2 \operatorname{sh} 2\xi, \\ c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\eta} &= 2 \sin 2\eta \end{aligned} \right\} \quad (6.228)$$

для $\chi = \xi$, и

$$\left. \begin{aligned} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi} &= -2 \sin 2\eta, \\ c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\eta\eta} &= +2 \sin 2\eta, \\ c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\eta} &= 2 \operatorname{sh} 2\xi \end{aligned} \right\} \quad (6.229)$$

для $\chi = \eta$.

Заметим, что как напряжения, так и перемещения в последнем случае однозначны, несмотря на то, что сама χ не такова.

§ 6.23. *Бесконечная всесторонне растягиваемая пластинка с эллиптическим отверстием.*

В этой задаче за уравнение контура отверстия примем $\xi = \alpha$.

Рассмотрим теперь условие на бесконечности. Там функция напряжений χ должна сводиться к $\chi = \frac{1}{2} T (x^2 + y^2)$, где T является величиной заданного всестороннего растягивающего напряжения. Выразив это через ξ и η , получим

$$\chi = \frac{1}{4} c^2 T (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta) \quad (6.231)$$

$$= \frac{1}{8} c^2 T (e^{2\xi} + 2 \cos 2\eta), \quad (6.232)$$

приближенно для случая, когда ξ велико.

Решения, заключающие в себе $\cos \eta$ и $\cos 2\eta$, даны выражением (6.201, 2), при $n = 1$ или при $n = -1$, и (6.205) при $n = 2$, и точно так же выражением (6.207).

Эти решения дают

$$\chi_1 = e^{2\xi} + \cos 2\eta,$$

$$\chi_2 = e^{-2\xi} + \cos 2\eta,$$

$$\chi_3 = e^{-2\xi} \cos 2\eta,$$

$$\chi_4 = \xi,$$

$e^{2\xi} \cos 2\eta$ должно быть отброшено, как приводящее к неподходящему выражению при $\xi = +\infty$.

Соответствующие напряжения выражаются формулами:

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\xi}_1 = 2 \cos 4\eta - 8 \cos 2\eta \operatorname{ch} 2\xi + 4 + 2e^{4\xi}, \quad (6.2331)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\eta\eta}_1 = 2 \cos 4\eta - 8 \cos 2\eta e^{2\xi} + 4 + 2e^{4\xi}, \quad (6.2332)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\eta}_1 = 4 \sin 2\eta \operatorname{ch} 2\xi, \quad (6.2333)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\xi}_2 = 2 \cos 4\eta - 8 \cos 2\eta \operatorname{ch} 2\xi + 4 + 2e^{-4\xi}, \quad (6.2341)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\eta\eta}_2 = 2 \cos 4\eta - 8 \cos 2\eta e^{-2\xi} + 4 + 2e^{-4\xi}, \quad (6.2342)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\eta}_2 = -4 \sin 2\eta \operatorname{ch} 2\xi, \quad (6.2343)$$

$$\frac{c^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\xi}_3 = \cos 4\eta \cdot e^{-2\xi} - \cos 2\eta (e^{-4\xi} + 3) + 3e^{-2\xi}, \quad (6.2351)$$

$$\frac{c^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\eta\eta}_3 = -\cos 4\eta \cdot e^{-2\xi} - 3e^{-2\xi} + \cos 2\eta (e^{-4\xi} + 3), \quad (6.2352)$$

$$\frac{c^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\eta}_3 = \sin 4\eta \cdot e^{-2\xi} - \sin 2\eta (e^{-4\xi} + 3), \quad (6.2353)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\xi}_4 = 2 \operatorname{sh} 2\xi, \quad (6.2361)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\eta\eta}_4 = -2 \operatorname{sh} 2\xi, \quad (6.2362)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overset{\sim}{\xi\eta}_4 = 2 \operatorname{sh} 2\eta. \quad (6.2363)$$

Мы должны скомбинировать эти выражения таким образом, чтобы как $\xi\xi$, так и $\xi\eta$ обратились в нуль на контуре, т. е. при $\xi = \alpha$.

Из (6.2333), (6.2343), (6.2353) и (6.2363) теперь ясно видно, что χ_3 будет единственным решением, вводящим в $\xi\eta$ слагаемое, содержащее $\sin 4\eta$; это слагаемое не может обратиться в нуль, если коэффициент при χ_3 не равен нулю. Поэтому χ_3 может быть опущено из наших решений.

Предположим затем, что $\chi = A\chi_1 + B\chi_2 + C\chi_4$.

Условия для обращения в нуль $\xi\xi$, $\xi\eta$ при $\xi = \alpha$ принимают следующую форму:

$$2A + 2B = 0, \quad (6.2371)$$

$$-8A \operatorname{ch} 2\alpha - 8B \operatorname{ch} 2\alpha = 0, \quad (6.2372)$$

$$A(4 + 2e^{4\alpha}) + B(4 + 2e^{-4\alpha}) + 2C \operatorname{sh} 2\alpha = 0, \quad (6.2373)$$

$$4A \operatorname{ch} 2\alpha - 4B \operatorname{ch} 2\alpha + 2C = 0. \quad (6.2374)$$

В этих выражениях (6.2371) и (6.2372) оказываются одинаковыми. Подставив $B = -A$ в (6.2373) и (6.2374), превратим эти два уравнения в

$$4A \operatorname{sh} 4\alpha + 2C \operatorname{sh} 2\alpha = 0,$$

$$8A \operatorname{ch} 2\alpha + 2C = 0,$$

которые опять являются тождественными, дающими для C значение $C = -4A \operatorname{ch} 2\alpha$. Таким образом, мы имеем

$$\chi = A(\chi_1 - \chi_2 - 4\chi_4 \operatorname{ch} 2\alpha),$$

т. е.

$$\chi = 2A(\operatorname{sh} 2\xi - 2\xi \operatorname{ch} 2\alpha). \quad (6.238)$$

Если $A = \frac{1}{8}c^2T$, то (6.238) и (6.232) приводят к одинаковым напряжениям на бесконечности, так как напряжения, соответствующие членам $\cos 2\eta$ и ξ , как легко видеть, исчезают при достаточно большом ξ .

Полные выражения для напряжений будут

$$(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \xi\xi = T \operatorname{sh} 2\xi (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\alpha), \quad (6.2391)$$

$$(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \eta\eta = T \operatorname{sh} 2\xi (\operatorname{ch} 2\xi + \operatorname{ch} 2\alpha - 2 \cos 2\eta), \quad (6.2392)$$

$$(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \xi\eta = T \sin 2\eta (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\alpha). \quad (6.2393)$$

Нормальное напряжение $\eta\eta$ в точках контура отверстия выражается формулой:

$$(\eta\eta)_\alpha = \frac{2T \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta}.$$

Оно достигает наибольшей величины у концов большой оси и минимума у концов малой оси. Оно никогда не меняет знака и остается все время растяжением.

Наибольшее и наименьшие напряжения будут, соответственно, равны

$$2T \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad 2T \frac{b}{a},$$

где

$$a = c \operatorname{ch} \alpha, \quad b = c \operatorname{sh} \alpha$$

будут полуосями эллиптического отверстия.

Эллиптичность отверстия вводит, как видим, очень высокие напряжения на контуре, которые могут бесконечно возрастать по мере того, как эллипс становится более вытянутым.

§ 6.24. *Пластика с эллиптическим отверстием, растягиваемая в направлении одной из осей координат.*

Предположим прежде всего, что на некотором расстоянии от отверстия приложено растягивающее напряжение T , направленное по оси Oy .

Таким образом на бесконечности

$$\chi = \frac{Tx^2}{2} = \frac{Tc^2}{8} e^{2\xi} \cos^2 \eta = \frac{Tc^2}{16} e^{2\xi} + \frac{Tc^2}{16} e^{2\xi} \cos 2\eta \quad (6.241)$$

(приближенно).

В этом случае мы должны в дополнение к уже рассмотренным функциям напряжений ввести еще

$$\chi_5 = e^{2\xi} \cos 2\eta, \quad (6.242)$$

с соответствующими напряжениями

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_6 = 2 \cos 4\eta \cdot e^{2\xi} - \cos 2\eta (2e^{4\xi} + 6) + 6e^{2\xi}, \quad (6.2421)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\eta\eta}_6 = -2 \cos 4\eta \cdot e^{2\xi} + \cos 2\eta (2e^{4\xi} + 6) - 6e^{2\xi}, \quad (6.2422)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\eta}_6 = -2 \sin 4\eta \cdot e^{2\xi} + \sin 2\eta (2e^{4\xi} + 6). \quad (6.2423)$$

Принимая во внимание наличие члена $\sin 4\eta$ в $\overline{\xi\eta}_6$, теперь обязательно следует включить и χ_3 и предположить, что

$$\chi = A\chi_1 + B\chi_2 + C\chi_3 + D\chi_4 + E\chi_5. \quad (6.243)$$

Условия равенства нулю $\overline{\xi\xi}$, $\overline{\xi\eta}$ при $\xi = a$ принимают теперь следующую форму:

$$A + B + Ce^{-2a} + Ee^{2a} = 0, \quad (6.2441)$$

$$4A \operatorname{ch} 2a + 4B \operatorname{ch} 2a + C(3 + e^{-4a}) + E(3 + e^{4a}) = 0, \quad (6.2442)$$

$$A(2 + e^{4a}) + B(2 + e^{-4a}) + 3Ce^{2a} + 3Ee^{2a} + D \operatorname{sh} 2a = 0, \quad (6.2443)$$

$$Ce^{-2a} - Ee^{2a} = 0, \quad (6.2444)$$

$$2A \operatorname{ch} 2a - 2B \operatorname{ch} 2a - C(3 + e^{-4a}) + E(3 + e^{4a}) + D = 0. \quad (6.2445)$$

Из (6.2444) мы имеем

$$C = Fe^{2a}, \quad E = Fe^{-2a}, \quad (6.245)$$

а после подстановки в (6.2441), (6.2442) оба эти уравнения сводятся к

$$A + B + 2F = 0. \quad (6.2461)$$

Уравнения (6.2443) и (6.2445) приводят тогда к

$$A(2 + e^{4a}) + B(2 + e^{-4a}) + 6F + D \operatorname{sh} 2a = 0, \quad (6.2462)$$

$$2A \operatorname{ch} 2a - 2B \operatorname{ch} 2a - 4F \operatorname{sh} 2a + D = 0. \quad (6.2463)$$

Если мы подставим теперь значение F , найденное из (6.2461), в (6.2462) и (6.2463), то оба последних уравнения превратятся в одно, а именно

$$2Ae^{2a} - 2Be^{-2a} + D = 0. \quad (6.247)$$

Таким образом оказывается, что две постоянные остаются произвольными. Они определяются из условий на бесконечности, так как из сравнения (6.241) и (6.243) оказывается, что

$$A = \frac{1}{16} Tc^2, \quad E = \frac{1}{16} Tc^2, \quad (6.2481)$$

а остальные постоянные получаются из (6.245), (6.2461) и (6.247):

$$B = -\frac{1}{16} Tc^2 (1 + 2e^{2\alpha}), \quad (6.2482)$$

$$C = \frac{1}{16} Tc^2 \cdot e^{4\alpha}, \quad (6.2483)$$

$$D = -\frac{1}{4} Tc^2 (\operatorname{ch} 2\alpha + 1). \quad (6.2484)$$

Таким образом

$$\chi = \frac{1}{16} Tc^2 \{ \chi_1 - (1 + 2e^{2\alpha}) \chi_2 + e^{4\alpha} \cdot \chi_3 - 4(\operatorname{ch} 2\alpha + 1) \chi_4 + \chi_5 \}.$$

Выражение же для нормального напряжения $\overset{\sim}{\eta\eta}$ в точках контура отверстия после некоторых сокращений оказывается равным:

$$\overset{\sim}{(\eta\eta)}_a = T \left(\frac{e^{2\alpha} \cos 2\eta + \operatorname{sh} 2\alpha - 1}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} \right) \quad (6.2491)$$

$$= Te^{2\alpha} \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2\alpha (1 + e^{-2\alpha})}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} - 1 \right\}; \quad (6.2492)$$

$\overset{\sim}{\eta\eta}$ изменяет знак между $\eta = 0$ и $\eta = \frac{\pi}{2}$.

При $\eta = 0$, $\overset{\sim}{\eta\eta}$ достигает своего наибольшего положительного значения, равного

$$\overset{\sim}{(\eta\eta)}_M = T \left(\frac{\operatorname{ch} 2\alpha - 1 + 2 \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - 1} \right) = T (1 + 2 \operatorname{ctgh} \alpha) = T \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right).$$

При $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\overset{\sim}{\eta\eta}$ достигает своего наибольшего отрицательного значения, равного

$$\overset{\sim}{(\eta\eta)}_m = (-T).$$

Здесь опять наибольшее напряжение будет растяжением в точках у концов большой оси; оно может превысить любое заданное значение, если a/b станет достаточно большим.

Случай, при котором пластинка находится под действием растяжения T , направленного по оси Ox , получается очень легко. На бесконечности мы имеем

$$\chi = \frac{1}{2} T y^2 = \frac{1}{16} Tc^2 e^{2\xi} - \frac{1}{16} Tc^2 e^{2\xi} \cos 2\eta. \quad (6.2493)$$

Решение будет точно такого же типа, как раньше, с той только разницей, что в уравнении (6.2481) мы имеем

$$E = -\frac{1}{16} Tc^2, \quad (6.2494)$$

и соответственно

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{16} Tc^2 (2e^{2\alpha} - 1) \\ C &= -\frac{1}{16} Tc^2 e^{4\alpha} \\ D &= \frac{1}{4} Tc^2 [1 - \operatorname{ch} 2\alpha], \end{aligned} \right\} \quad (6.2495)$$

так что

$$\chi = \frac{1}{16} Tc^2 \{ \chi_1 + (2e^{2\alpha} - 1) \chi_2 - e^{4\alpha} \cdot \chi_3 + 4(1 - \operatorname{ch} 2\alpha) \chi_4 - \chi_5 \}; \quad (6.2496)$$

это выражение приводит к

$$(\overline{\eta\eta})_\alpha = T \frac{\operatorname{sh} 2\alpha + 1 - e^{2\alpha} \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} = T \left\{ e^{2\alpha} + \frac{(1 - e^{2\alpha}) \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} \right\}. \quad (6.2497)$$

Следовательно, положительный максимум будет равен $T(1 + 2 \operatorname{tgh} \alpha) = T(1 + 2b/a)$ при $\eta = \pm \pi/2$, и отрицательный максимум $-T$ при $\eta = 0$ или π .

§ 6.25. *Приближенный метод учета влияния конечной ширины растягиваемой пластинки с эллиптическим отверстием.*

Влияние того факта, что пластинка имеет конечную ширину, можно определить тем же способом, который применялся в § 6.02 для пластинки с круглым отверстием, предположив, что напряжение $\overline{\eta\eta}$ по наименьшему сечению выражается той же формулой, как если бы пластинка простиралась в бесконечность.

В этом случае требуется определить полное выражение для $\overline{\eta\eta}$, а не только то значение, которое оно имеет в точках на контуре отверстия $\xi = \alpha$.

Без всякого затруднения, но после довольно длительных вычислений находим, что

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2}{T} \overline{\eta\eta} &= -\cos 4\eta \left\{ \frac{1}{8} e^{2\xi} + \frac{1}{4} e^{2\alpha} + \frac{1}{8} e^{4\alpha - 2\xi} \right\} + \\ &+ \cos 2\eta \left\{ \frac{1}{8} e^{4\xi} - \frac{1}{2} e^{2\xi} + \frac{3}{8} (1 + e^{4\alpha}) + e^{-2\xi} \left(\frac{1}{2} + e^{2\alpha} \right) + \frac{1}{8} e^{4\alpha - 4\xi} \right\} + \\ &+ \frac{1}{8} e^{4\xi} + \frac{1}{8} e^{2\xi} (e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 1) - \frac{1}{2} e^{2\alpha} - \\ &- \frac{1}{8} e^{-2\xi} (3e^{4\alpha} + e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2) - \frac{1}{8} e^{-4\xi} (1 + 2e^{2\alpha}). \end{aligned} \quad (6.251)$$

Если положить $\eta = 0$, то мы получаем выражение для растягивающего напряжения по наименьшему сечению в форме:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\eta\eta}}{T} &= (1 - e^{-2\xi})^{-4} \left\{ 1 + e^{-2\xi} (\operatorname{ch} 2\alpha - 3) + \frac{3}{2} e^{-4\xi} (e^{2\alpha} - 1)^2 + \right. \\ &+ \left. e^{-6\xi} \left(1 + \frac{7}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} - 2e^{4\alpha} \right) + e^{-8\xi} \left(\frac{e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha} - 1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.252)$$

Разложив это выражение по возрастающим степеням $e^{-2\xi}$, легко найдем, что

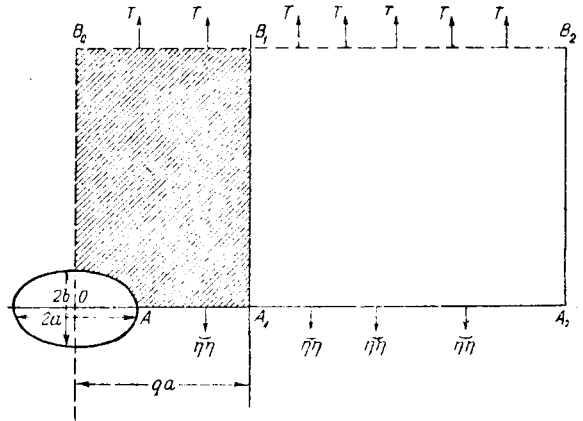
$$\begin{aligned} \overline{\eta\eta} = 1 + e^{-2\xi} \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2}{2} + e^{-4\xi} \left\{ \frac{3}{2} e^{4\alpha} - e^{2\alpha} - \frac{1}{2} + 2e^{-2\alpha} \right\} + \\ + e^{-6\xi} \left\{ 4e^{4\alpha} - \frac{7}{2} e^{2\alpha} - 3 + \frac{9}{2} e^{-2\alpha} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.253)$$

Для того чтобы отыскать всю величину растягивающей силы, передаваемой через наименьшее сечение от $x = a$ (т. е. $\xi = \alpha$) до $x = qa$ (причем q больше чем единица и достаточно велико), допустим, что координате $x = qa$ соответствует $\xi = \alpha_1$.

Пусть AA_1 (фиг. 6.25) будет частью наименьшего сечения, и пусть AA_1 продолжается на очень большое расстояние по направлению к A_2 . Ясно, что в пределе мы должны получить

$$\int_{AA_1} \overline{\eta\eta} dx = T \times OA_2,$$

так как полное усилие по AA_2 должно уравновешивать в бесконечности равномерно распределенное напряжение по B_0B_2 (фиг. 6.25).



Фиг. 6.25.

Пусть $\overline{\eta\eta} = T + T'$, где T' представляет собой члены, следующие за единицей в уравнении (6.253). Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{AA_1} \overline{\eta\eta} dx + \int_{A_1A_2} (T + T') dx = T \times OA_2, \\ \int_{AA_1} \overline{\eta\eta} dx = T \cdot OA_2 - T \cdot A_1A_2 - \int_{A_1A_2} T' dx = \\ = T \cdot OA_1 - \int_{A_1A_2} T' dx; \end{aligned}$$

в пределе, отодвигая A_2 в бесконечность

$$\int_{AA_1} \overline{\eta\eta} dx = T \cdot OA_1 - \int_{qa}^{\infty} T' dx;$$

нам теперь придется вычислить этот последний интеграл. Для этого воспользуемся зависимостью:

$$\frac{dx}{d\xi} = J = \sqrt{\frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - 1)} = c \operatorname{sh} \xi.$$

Таким образом

$$\int_{qa}^{\infty} T' dx = c \int_{\alpha_1}^{\infty} T' \operatorname{sh} \xi d\xi,$$

откуда, после замены T' его значением (6.253), получаем

$$\begin{aligned} \int_{qa}^{\infty} T' dx &= cT \int_{\alpha_1}^{\infty} (e^{-\xi} \operatorname{ch}^2 \alpha + 3e^{-3\xi+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + \\ &\quad + 5e^{-5\xi+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + \dots) d\xi = \\ &= cT [e^{-\alpha_1} \operatorname{ch}^2 \alpha + e^{-3\alpha_1+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + e^{-5\alpha_1+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha] + \dots, \end{aligned}$$

так что

$$\int_{AA_1} \widetilde{\eta\eta} dx = cT [\operatorname{ch} \alpha_1 - e^{-\alpha_1} \operatorname{ch}^2 \alpha - e^{-3\alpha_1+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha - e^{-5\alpha_1+\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + \dots].$$

Теперь

$$\begin{aligned} c \operatorname{ch} \alpha_1 &= qa, \\ c \operatorname{ch} \alpha &= a, \\ c \operatorname{sh} \alpha &= b. \end{aligned}$$

Мы можем разложить $e^{-\alpha_1}$, $e^{-3\alpha_1}$ и т. д. по возрастающим степеням $\frac{1}{q}$ следующим образом:

$$c(e^{\alpha_1} + e^{-\alpha_1}) = 2qa,$$

так что

$$e^{-\alpha_1} = \frac{qa}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{q^2 a^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{c}{qa} + \frac{1}{8} \frac{c^3}{q^3 a^3} + \frac{c^5}{16q^5 a^5} + \dots;$$

и мы получим, пренебрегая членами, включающими $1/q$ в степени выше, чем пятая:

$$\begin{aligned} \int_{AA_1} \widetilde{\eta\eta} dx &= qaT - Tc^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \left(\frac{1}{2qa} + \frac{c^2}{8q^3 a^3} + \frac{c^4}{16q^5 a^5} + \dots \right) - \\ &\quad - cTe^{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha \left\{ \frac{c^3}{8q^3 a^3} + \frac{3c^5}{32q^5 a^5} + \dots \right\} = \\ &= qaT - T \left(\frac{a}{2q} + \frac{c^2}{8q^3 a} + \frac{c^4}{16q^5 a^3} + \dots \right) - \\ &\quad - T(a+b) \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{ch} \alpha \left\{ \frac{c^3}{q^3 a^3} + \frac{c^5}{q^5 a^5} + \dots \right\} = \\ &= qaT - T \left(\frac{a}{2q} + \frac{a^2 - b^2}{8q^3 a} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{16q^5 a^3} + \dots \right) - \\ &\quad - T(a+b) \frac{b^2 a}{4} \left(\frac{1}{q^3 a^3} + \frac{(a^2 - b^2)}{q^5 a^5} + \dots \right) = \\ &= T \left[aq - \frac{a}{2q} - \frac{(a+b)(a^2 + 2b^2 - ab)}{8q^3 a^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(a+b)(a^2 - b^2)(a^2 - ab + 4b^2)}{16q^5 a^4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Обозначив через T_m величину среднего напряжения по сечению, получим

$$\int_{AA_1} \widetilde{\eta\eta} dx = a(q-1)T_m.$$

Таким образом

$$T_m = \frac{T \left[1 - \frac{1}{2q^2} - \frac{(a+b)(a^2+2b^2-ab)}{8q^4a^3} - \frac{(a+b)(a^2-b^2)(a^2-ab+4b^2)}{16q^6a^5} \right]}{1 - \frac{1}{q}}$$

т. е.

$$T_m = T \left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2q^3} + \frac{(a-b)(3a^2+3ab+2b^2)}{8a^3} \left\{ \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} \right\} + \dots \right]. \quad (6.254)$$

Отсюда получается довольно интересный результат, что если мы учтем члены с $1/q$ не выше, чем в третьей степени, то значение T_m , полученное таким образом, не зависит от формы эллиптического отверстия, что ясно видно при сравнении этого выражения с формулой (6.0291), где c имеет то же значение, что q в полученной формуле. Форма отверстия начинает оказывать влияние на результат с того только момента, когда вводятся в расчет члены с $1/q^4$, $1/q^5$.

Сравнивать с T нам следует не T_m , но T_0 , растягивающее напряжение в пластинке, вычисленное путем деления величины всей растягивающей силы на площадь поперечного сечения при отсутствии отверстия. Ясно, что

$$aqT_0 = a(q-1)T_m,$$

или

$$T_0 = T_m \left(1 - \frac{1}{q} \right),$$

так что

$$T_0 = T \left[1 - \frac{1}{2q^2} - \frac{(a+b)(a^2+2b^2-ab)}{8q^4a^3} - \frac{(a+b)(a^2-b^2)(a^2-ab+4b^2)}{16q^6a^5} \right] \quad (6.255)$$

в большинстве случаев достаточно бывает принять

$$T_0 = T \left(1 - \frac{1}{2q^2} \right), \quad (6.256)$$

как в случае пластинки с круглым отверстием.

В том случае, когда a было равно 1,5 см и $qa = 6,4$ см, разность между T и T_0 , как показал опыт, была около 3,5%.

Вычисления на основании последней формулы дают для этой разности величину $\frac{36}{1250}$, т. е. около 2,88%. Зависящая от „формы“ поправка в более точной формуле (6.255) слегка повысит это процентное отношение. Однако расхождение не выходит за пределы допустимой при таких наблюдениях ошибки.

§ 6. 26. Пластинка с эллиптическим отверстием, находящаяся под действием чистого сдвига.

Прежде чем заняться пластинкой с эллиптическим отверстием, оси которого ориентированы любым образом по отношению к направлению растяжения, мы должны решить еще задачу для подобной пластинки, подвергнутой равномерно распределенному касательному напряжению S , в направлениях x , y .

Тогда на бесконечности приближенно

$$\chi = -Sxy = -\frac{Sc^2}{8} e^{2\xi} \sin 2\eta. \quad (6.261)$$

В этом случае нам потребуются следующие функции:

$$\begin{aligned}\chi_6 &= e^{2\xi} \sin 2\eta, \\ \chi_7 &= e^{-2\xi} \sin 2\eta, \\ \chi_8 &= \sin 2\eta\end{aligned}$$

[положив $n=1$ в (6.203) или (6.204)].

Это приводит к следующим формулам для напряжений:

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_6 = 2 \sin 4\eta \cdot e^{2\xi} - \sin 2\eta (2e^{4\xi} + 6), \quad (6.2621)$$

$$\overline{\eta\eta}_6 = -\overline{\xi\xi}_6, \quad (6.2622)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_6 = 2 \cos 4\eta \cdot e^{2\xi} - \cos 2\eta (2e^{4\xi} + 6) + 6e^{2\xi}, \quad (6.2623)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_7 = 2 \sin 4\eta \cdot e^{-2\xi} - \sin 2\eta (2e^{-4\xi} + 6), \quad (6.2631)$$

$$\overline{\eta\eta}_7 = -\overline{\xi\xi}_7, \quad (6.2632)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_7 = -2 \cos 4\eta \cdot e^{-2\xi} + \cos 2\eta (2e^{-4\xi} + 6) - 6e^{-2\xi}, \quad (6.2633)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_8 = 2 \sin 4\eta - \sin 2\eta (4e^{2\xi} + 4e^{-2\xi}), \quad (6.2641)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\eta\eta}_8 = 2 \sin 4\eta, \quad (6.2642)$$

$$c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 \overline{\xi\xi}_8 = 2 \cos 2\eta (e^{2\xi} - e^{-2\xi}). \quad (6.2643)$$

Принимая функцию напряжений в виде

$$\chi = A\chi_6 + B\chi_7 + C\chi_8,$$

из условия равенства нулю напряжений на контуре отверстия, мы получаем следующие уравнения для определения постоянных:

$$Ae^{2\alpha} + Be^{-2\alpha} + C = 0, \quad (6.2651)$$

$$(3 + e^{4\alpha})A + (3 + e^{-4\alpha})B + 4 \operatorname{ch} 2\alpha \cdot C = 0, \quad (6.2652)$$

$$Ae^{2\alpha} - Be^{-2\alpha} = 0, \quad (6.2653)$$

$$-(3 + e^{4\alpha})A + (3 + e^{-4\alpha})B + 2 \operatorname{sh} 2\alpha \cdot C = 0, \quad (6.2654)$$

$$Ae^{2\alpha} - Be^{-2\alpha} = 0. \quad (6.2655)$$

Уравнения (6.2653) и (6.2655), выражающие условие, что коэффициент при $\cos 4\eta$ и член, независимый от η в $(\xi\xi)_\alpha$, обращаются в нуль, оказываются одинаковыми.

Из любого из них

$$A = De^{-2\alpha}, \quad B = De^{2\alpha} \quad (6.2656)$$

и формула (6.2241) дает

$$2D + C = 0. \quad (6.2657)$$

Подставляя в (6.2652) и в (6.2654) выражения A и B из (6.2656), получаем:

$$8D \operatorname{ch} 2\alpha + 4 \operatorname{ch} 2\alpha \cdot C = 0, \quad (6.2658)$$

$$4D \operatorname{sh} 2\alpha + 2 \operatorname{sh} 2\alpha \cdot C = 0. \quad (6.2659)$$

Последние три уравнения тождественны. Далее, отождествление χ с (6.261) при $\xi = \infty$, дает

$$A = -\frac{Sc^2}{8}, \quad (6.2661)$$

так что

$$B = -\frac{Sc^2 e^{4\alpha}}{8}, \quad (6.2662)$$

$$C = \frac{Sc^2 e^{2\alpha}}{4} \quad (6.2663)$$

и

$$\chi = -\frac{1}{8} Sc^2 \{ \chi_6 + e^{4\alpha} \chi_7 - 2e^{2\alpha} \chi_8 \}. \quad (6.267)$$

Это приводит к следующей формуле для нормального напряжения $\overline{\eta\eta}$ на контуре:

$$\overline{\eta\eta} = -\frac{2Se^{2\alpha} \sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta}. \quad (6.268)$$

Это выражение обращается в нуль при $\eta = 0$ или $\pi/2$, т. е. на концах обеих осей; оно достигает числового максимума в тех точках, для которых эксцентричный угол η определяется из уравнения

$$\cos 2\eta = \operatorname{sech} 2\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{th} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Его значение будет тогда

$$\pm \frac{2Se^{2\alpha}}{\operatorname{sh} 2\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \pm \frac{S(a+b)^2}{ab}. \quad (6.269)$$

§ 6.27. *Пластика с эллиптическим отверстием, подверженная простому растяжению в любом направлении.*

Теперь мы уже можем приступить к разбору задачи для пластинки с эллиптическим отверстием, подверженной растягивающему напряжению T , приложенному в любом направлении, под углом хотя бы φ к оси Ox .

Подобное растяжение можно разложить обычным способом на:

- 1) растяжение $T \cos^2 \varphi$, в направлении оси Ox ;
- 2) растяжение $T \sin^2 \varphi$, в направлении оси Oy ;
- 3) касательное напряжение $T \cos \varphi \sin \varphi$ в направлениях x, y .

Требуемое решение получаем таким образом путем комбинирования трех уже полученных, умножив их на соответствующие коэффициенты.

Напряжение $\overline{\eta\eta}$ в точках контура отверстия вычисляется в таком случае без всяких затруднений. Оно будет выражаться формулой:

$$\begin{aligned} (\overline{\eta\eta})_\alpha = T \sin^2 \varphi e^{2\alpha} \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2\alpha (1 + e^{-2\alpha})}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} - 1 \right\} + T \cos^2 \varphi e^{2\alpha} \left\{ 1 - \frac{(1 - e^{-2\alpha}) \operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta} \right\} - \\ - \frac{2T \sin \varphi \cos \varphi e^{2\alpha} \sin 2\eta}{\operatorname{cosh} 2\alpha - \cos 2\eta}, \quad (6.271) \end{aligned}$$

что приводится к

$$\overline{(\eta\eta)}_\alpha = \frac{T \{ \operatorname{sh} 2\alpha + \cos 2\varphi - e^{2\alpha} \cos 2(\varphi - \eta) \}}{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta}. \quad (6.272)$$

С целью отыскания точек с максимумом и минимумом этого напряжения дифференцируем его по η и находим, после некоторых сокращений

$$\frac{d \overline{(\eta\eta)}_\alpha}{d\eta} = \frac{2Te^{2\alpha} [\sin 2\eta \operatorname{sh} 2\alpha (\cos 2\varphi - e^{-2\alpha}) - \cos 2\eta \operatorname{ch} 2\alpha \sin 2\varphi + \sin 2\varphi]}{(\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\eta)^2},$$

так что эксцентрический угол η , соответствующий точкам максимума и минимума напряжения на контуре отверстия, получается из уравнения

$$\sin 2\eta \operatorname{sh} 2\alpha (\cos 2\varphi - e^{-2\alpha}) - \cos 2\eta \operatorname{ch} 2\alpha \sin 2\varphi + \sin 2\varphi = 0.$$

Это выражение может быть преобразовано путем введения квадрата $\operatorname{tg} \eta$

$$\operatorname{tg}^2 \eta - \operatorname{th}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \eta \operatorname{th} \alpha \left(\frac{\cos 2\varphi - e^{-2\alpha}}{\sin 2\varphi} \right) = 0, \quad (6.273)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{th} \alpha \frac{e^{-2\alpha} - \cos 2\varphi \pm \sqrt{1 - 2e^{-2\alpha} \cos 2\varphi + e^{-4\alpha}}}{\sin 2\varphi}. \quad (6.274)$$

Отсюда следует, что значения для $\operatorname{tg} \eta$ всегда действительны, чего, впрочем, и следовало ожидать.

Числовое значение максимального напряжения включает в себе несколько сложное выражение, которое, если нужно, легко вычисляется.

Отметим, тем не менее, что $\frac{d \overline{(\eta\eta)}_\alpha}{d\eta}$ имеет тот же знак, что и левая половина (6.273). Отсюда следует, что *меньшее* значение $\operatorname{tg} \eta$ соответствует *максимуму*, а *большее* значение — *минимуму*, причем ясно, что знаки $\frac{d \overline{(\eta\eta)}_\alpha}{d\eta}$ будут меняться следующим образом: $+$, $-$, $+$. Будут ли максимум и минимум напряжения $\overline{(\eta\eta)}$ иметь противоположные знаки, зависит от того, будут ли корни уравнения $\overline{(\eta\eta)}_\alpha = 0$ вещественными, т. е. будет ли числовое значение $\operatorname{sh} 2\alpha + \cos 2\varphi < e^{2\alpha}$. Но $e^{2\alpha} = \operatorname{ch} 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha$, так что $e^{2\alpha}$ численно всегда больше, чем $\operatorname{sh} 2\alpha + 1$, и заведомо, следовательно, больше, чем $\operatorname{sh} 2\alpha + \cos 2\varphi$.

Отсюда уравнение, о котором идет речь, будет *всегда* иметь вещественные корни. Таким образом значение

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{th} \alpha \frac{\{ e^{-2\alpha} - \cos 2\varphi - \sqrt{1 - 2e^{-2\alpha} \cos 2\varphi + e^{-4\alpha}} \}}{\sin 2\varphi}$$

соответствует точкам с максимальным растяжением, а значение

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{th} \alpha \frac{\{ e^{-2\alpha} - \cos 2\varphi + \sqrt{1 - 2e^{-2\alpha} \cos 2\varphi + e^{-4\alpha}} \}}{\sin 2\varphi}$$

— точкам с максимальным сжатием.

Обе пары точек с наибольшими напряжениями оказываются связанными интересным геометрическим соотношением. Если приведенные выше значения η назовем через η_1 , и η_2 соответственно, то тогда форма уравнения (6.273) показывает, что

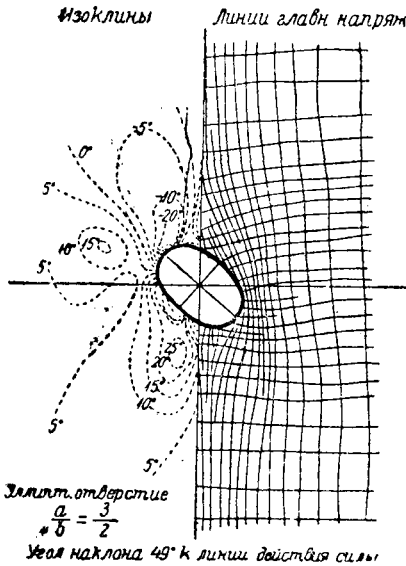
$$\operatorname{tg} \eta_1 \operatorname{tg} \eta_2 = -\operatorname{th}^2 \alpha = -b^2/a^2, \quad (6.275)$$

но это условие выражает, что касательные к эллипсу в этих точках взаимно перпендикулярны.

Решения §§ 6.23, 6.24, 6.26 и 6.27 получены проф. Инглисом¹. Полное же решение для перемещений порядка $n (n > 1)$ в эллиптических координатах было дано Ловэ² в 1892 г.

Точность этих вычислений была проверена для точек контура эллиптического отверстия с осями $a = 3,0$ см и $b = 2,0$ см; отверстие было расположено центрально в растягиваемой пластинке шириною 12,7 см; большая ось с направлением растяжения составляла угол 49° .

Изоклины и линии главных нормальных напряжений показаны на фиг. 6.271, а распределение напряжений в точках контура отверстия показано также и на фиг. 6.272, где экспериментальные величины сравнены с теоретическими, полученными из выражения (6.272), принимая для T значение, найденное раньше для того случая, когда эллиптическое отверстие расположено не наклонно. Примененное здесь значение T не совсем точно, но результаты § 6.25 заставляют предполагать, что оно достаточно близко к действительности и может быть использовано при общей проверке теоретических вычислений. Как видно из чертежа,



Фиг. 6.271.



Фиг. 6.272.

сходимость вполне удовлетворительна повсюду, за исключением только наиболее напряженной части контура.

Выраженное формулой (6.275) геометрическое свойство также приблизительно подтверждается этими измерениями.

§ 6.28. Трещины.

В предельном случае, когда малая ось эллиптического отверстия стремится к нулю, оно переходит в трещину или щель. Если направление этой трещины не совпадает с линией действия силы, то по концам ее возникают очень высокие напряжения, даже при очень малой нагрузке превышающие величину временного сопротивления материала. Благодаря чрезвычайной концентрации напряжений по концам трещины, она поэтому имеет стремление к увеличению своей длины, и следствием этого является полное разрушение материала.

Тенденцию эту можно все же ограничить путем увеличения радиуса кривизны по концам трещины; такой способ прекращения роста длины трещины применяется как к стальным поковкам, так и к фарфору. Обычно это делается путем просверливания круглых отверстий у концов трещины, благодаря чему максималь-

¹ C. E. Inglis, Some Special Cases of Two-Dimensional Stress or Strain, Trans. Inst. Naval Architects, 1922.

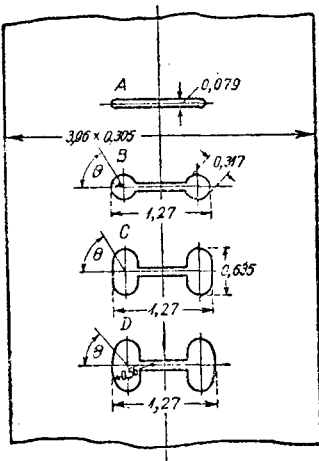
² Theory of Elasticity (1-st ed.), 1, 340 и дальше.

ное напряжение снижается иногда до тех пределов, которые данный материал способен выдержать. В этом случае максимальное напряжение поблизости от трещины будет в три раза больше, чем при отсутствии трещин.

Результаты описанных выше опытов с эллиптическими отверстиями дают повод предполагать, что дальнейшее понижение величины напряжения может быть достигнуто при помощи высверливания у концов трещины эллиптических отверстий, расположенных таким образом, чтобы максимальное напряжение оказалось у малой оси.

В таком случае у нас будет напряжение $T(1 + 2\frac{b}{a})$, где $b < a$, вместо $3T$, для круглого отверстия.

Для того чтобы определить степень уменьшения концентрации напряжений в результате этих мер, были сделаны в растянутой пластинке шириною 4,0 см и толщиной 0,30 см тонкие прорезы (трещины) длиной 1,27 см на достаточном расстоянии один от другого, чтобы они не оказывали влияния друг на друга. Первая из этих трещин А (фиг. 6.281) была оставлена без изменения и по концам второй — В были просверлены отверстия диаметром 0,318 см.



Фиг. 6.281.



Фиг. 6.282.

На каждом конце третьей трещины С были просверлены два отверстия диаметром 0,318 см, которые затем были превращены в одно, шириною в 0,318 см и длиной 0,635 см с закругленными концами и с большой осью, совпадающей с направлением линии действия силы. Четвертая трещина D была обработана подобным же образом, затем наружный контур отверстия был обработан по радиусу 0,56 см, и таким образом были получены приблизительно эллиптические отверстия у концов трещины. Окончательная длина всех этих трещин была сделана одинаковой и все они были расположены симметрично и перпендикулярно по отношению к линии действия силы, что дает возможность непосредственно сравнивать их работу при одинаковой нагрузке.

Нагрузка в 45,4 кг вызывает среднее напряжение 55,5 кг на см² по сечению пластинки netto; величина напряжения на контуре каждого отверстия изображена графически на фиг. 6.282.

Как видим, наибольшее напряжение в 203,9 кг/см² получилось в трещине без отверстий по ее концам; оно уменьшается до 158,8 кг/см² в трещине с круглым отверстием и падает до 117,5 кг/см² в трещине С; это напряжение слегка повышается до 119,5 кг/см² в трещине с приблизительно эллиптическим отверстием по концам. Большой разницы между двумя последними формами отверстия не наблюдается, и потому применение той или другой из них обуславливается только вопросом практического осуществления; во всяком случае опыт доказывает значительные практические выгоды высверливания по концам трещины отверстий, почти эллиптической формы; направление большой оси должно совпадать с направлением растяжения.

ГЛАВА VII.

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ.

§ 7.01. Введение.

Важную область исследований, относящихся к распределению напряжений, представляет собой определение физических свойств материалов, и особенно определение механических свойств, на которых основано применение материалов в разных конструкциях и машинах.

В начале прошлого столетия, до начала применения усовершенствованных способов испытания материалов, излом балки, положенной на две опоры и нагруженной посередине, был главным способом определения свойств двух основных видов строительных материалов: чугуна и дерева. В последующую эпоху определение временного сопротивления материалов растяжению и сжатию приобрело первостепенное значение, что привело к проектированию различных испытательных машин, достаточно мощных для того, чтобы разрушить образец путем непосредственного растяжения или сжатия до раздробления или выпучивания.

Оба последних испытания родственны прежним испытаниям на изгиб, однако в этих последних материал в каждом сечении подвергается и растяжению и сжатию, вместе с касательными и местными напряжениями; поэтому очень трудно установить на основании этих опытов свойства материалов. Это было бы возможно лишь в том случае, если сложное напряженное состояние при деформации изгиба будет освещено или математическим исследованием, изложенным в главе V, или экспериментами при помощи оптического метода.

Так называемые простые испытания (растяжение и сжатие) даже и в наше время составляют основу лабораторной работы по испытанию материалов; к этим опытам следовало бы, пожалуй, добавить изучение сопротивления кручению в валах круглого поперечного сечения; однако, все перечисленные методы испытаний не удовлетворяют уже больше потребности современной инженерной практики; теперь необходимо производить исследование работы материала при действии сил иными более сложными способами. Новые способы испытаний, несмотря на все возрастающие трудности удовлетворительного истолкования и согласования их результатов, оказали большую пользу инженерам-проектировщикам. И до сих пор остается открытой для исследования обширная область изучения научных основ почти всех современных методов испытания материалов, так как почти всегда мы имеем дело с сложным распределением напряжений; примером может служить напряженное состояние материала при различных испытаниях на твердость, а также в надрезанных образцах для ударной пробы. Эти и другие вопросы, такие, как влияние на напряжения повторных нагрузок, изменения в микроскопическом и атомном строении, вызванное действием нагрузок, и многие другие составляют характерные черты современных исследований.

До сих пор применение оптического метода в деле испытания материалов было довольно примитивным, и оставляет до сих пор желать большего; но все же стоит указать на распространенность этого способа исследования в наше время и на возможности его дальнейшего развития в разъяснении задач испытания материалов.

Характер напряжений, возникающих около расширенных концов растягиваемых образцов прямоугольного поперечного сечения, является примером элементарной, но практически важной задачи, поскольку известно, что такие изменения поперечного сечения оказывают большое влияние на распределение напряжений в образце.

Разбор этой задачи удобнее начать с исследования случая очень широкой пластинки, к концам которой приложено равномерно распределенное растягивающее напряжение, и рассмотреть, как изменится распределение напряжений под влиянием полукруглых выкружек (надрезов) на боковых гранях, центры которых расположены в одном поперечном сечении. Элементы этого типа с выкружками (надрезами), расположенными близко друг к другу, употреблялись иногда для испытания на растяжение, несмотря на то, что они, как увидим дальше, не дают в этом отношении точных результатов. Если пластинка достаточно широка, так что мы можем пренебречь влиянием одного надреза на другой, то не трудно составить

себе представление о распределении напряжений (если они не превосходят предела упругости) у каждого из надрезов из рассмотрения распределения напряжений, возникающих под влиянием цилиндрического отверстия, расположенного по середине широкой растягиваемой пластинки. Из исследования, изложенного в главе VI и подтверждаемого опытом, известно, что напряжение по поперечному сечению, проходящему через центр отверстия, возрастает до величины $3T$, где T представляет собою величину напряжений, приложенных к концам очень широкой пластинки. Вообразим, что такой образец разрезан вдоль его средней продольной линии, а чтобы пластинка осталась в том же самом напряженном состоянии, как и перед разрезом ее на две части, к проведенному сечению необходимо приложить усилия, равные напряжениям, которые действуют в точках этого сечения, как показано

фиг. 7.011. По этому сечению будут действовать нормальные напряжения $\theta\theta$ величины

$$\theta\theta = \frac{1}{2} T \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right)$$

Фиг. 7.011. Распределение напряжений в точках оси растянутого стержня с центральным отверстием.

и напряжения

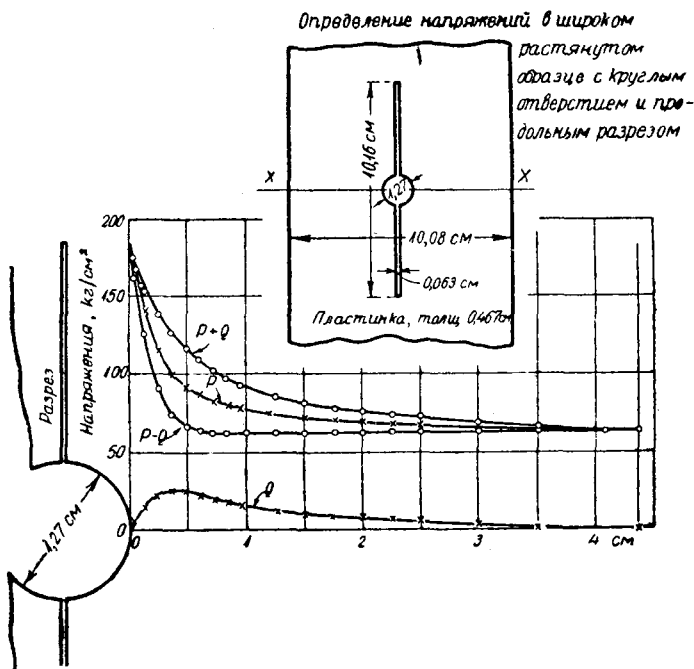
$$rr = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(2 - \frac{3a^2}{r^2} \right).$$

Первые напряжения принимают в точке B значение T (сжатие); затем они быстро падают до нуля в точке $r = a\sqrt{3}$, а затем возрастают до незначительной величины (растяжение) и, наконец, обращаются в нуль на очень большом расстоянии от отверстия.

Радиальное напряжение rr в точках этого сечения всюду является растяжением, обращается в нуль в точке B и вместе с возрастанием r медленно возрастает затем до значения T .

Распределение напряжений rr в растягиваемой пластинке с полукруглой выкружкой оказывается на основании исследований оптическим методом одинаковым для точек контура BC с тем распределением, которое было получено для широкой пластинки с круглым отверстием; поэтому, если бы удалось обратить в нуль напряжение $\theta\theta$ в точках грани BC , то окончательное распределение напря-

жений у полукруглой выкружки и в точках вблизи от нее могло бы быть получено почти точно. Однако этот и другие аналитические способы решения задачи оказались неподходящими для определения влияния подобных надрезов на распределение напряжений в растянутой пластинке; поэтому можно лишь составить общее представление о результатах удаления нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ главным образом в точках, лежащих между $r=a$ и $r=a\sqrt{3}$. Это устранение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ как будто понижает интенсивность напряжений по поперечному сечению, проходящему через A ; это подтверждается исследованиями оптическим методом, показывающими, что в подобном случае напряжение в точке A будет несколько выше $2T$, вместо того чтобы быть равным $3T$, как в случае пластинки с круглым отверстием. Во всех точках контура за исключением точки B , где оно равно нулю, напряжение будет растягивающим. Несколько опытов, демонстрирующих этот результат, было произведено Каппером над растягиваемой пластинкой шириною $0,26$ см, имеющей центральное отверстие диаметром $1,27$ см и разрезанной по оси, как показано на фиг. 7.012.



Фиг. 7.012.

Внешние стороны удалены от отверстия настолько, что их влияние на распределение напряжений у самого отверстия и вблизи от него, вероятно, не велико. Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ по сечению xx дает для растягивающей силы значение $313,9$ кг вместо $317,5$ кг, приложенных действительно к пластинке, а на расстоянии $0,025$ см от края выреза напряжение достигает $168,7$ кг/см² при среднем напряжении T_m в $77,3$ кг/см², так что коэффициент концентрации напряжений будет, вероятно, выше $2T$ и ниже $3T$.

Точное значение T для сравнения будет однако не T_m , а величина, вычисленная с помощью его; она может быть найдена только приближенно из-за отсутствия точного знания закона распределения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$.

Приближенное решение задачи о распределении напряжений, вызванных небольшой полукруглой выкружкой на боковой стороне растягиваемой пластинки бесконечной ширины было получено ¹ в предположении, что радиальные и тангенциальные средние перемещения U_r, U_{θ} по отношению к центру выкружки выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} U_r &= f_1(r) + f_2(r) \sin^2 \theta \\ U_{\theta} &= f_3(r) \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (7.011)$$

где r, θ будут координатами любой точки по отношению линии действия силы.

¹ Dr A. Leon, Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst. Wien, February 29, 1908, P. 9.

Эти выражения правильны для случая небольшого круглого отверстия в очень широкой растянутой пластинке; Леон же принял, что они правильны также и для данного случая.

Вычисления при решении этой задачи не трудны, но несколько длинны; достаточно привести только окончательные результаты, полученные для величины радиального напряжения \overline{rr} , напряжения $\overline{\theta\theta}$ и касательного напряжения $\overline{r\theta}$, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{T}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right) + T \left(\frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin^2 \theta \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{T}{2} \left(\frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} + 2 \right) - T \left(\frac{a^4}{r^4} + 1 \right) \sin^2 \theta \\ \overline{r\theta} &= \frac{T}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (7.012)$$

где T представляет собою напряжение в точках вдали от надреза, а a — радиус выкружки. Эти выражения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия, но не удовлетворяют всем условиям на поверхности. Напряжение \overline{rr} обращается в нуль в точках полукруглой выкружки (фиг. 7.013), как и следовало ожидать, но $\overline{r\theta}$ достигает значения $T/2$ в точках при $\theta = 45^\circ$ и 135° . Напряжение $\overline{\theta\theta}$ в точках вдоль прямой стороны достигает максимальной величины $0,123T$ вместо того, чтобы быть равным нулю в этих точках.

По наименьшему сечению мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{T}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right) \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{T}{2} \left(\frac{a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} + 2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.013)$$

причем максимальное значение \overline{rr} получается при $r = \sqrt{2}a$ и равно $T/8$, максимальное же значение $\overline{\theta\theta}$ при $r = a$ равно $2T$.

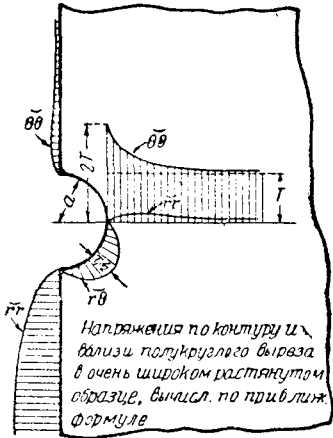
Для правильного сравнения этих вычислений с опытными данными необходимо вычислить величину эквивалентного растягивающего напряжения при наличии выкружки. Эту величину можно найти приближенно в предположении, что приведенная выше формула для $\overline{\theta\theta}$ правильна. Тогда, если ca — половина ширины пластинки, а T_m — среднее напряжение по наименьшему сечению, то

$$T_m a (c - 1) = \int_a^{ca} \overline{\theta\theta} \cdot dr = \frac{T}{2} \int_a^{ca} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} \right) dr,$$

откуда

$$T_m = T \left(1 + \frac{2}{3c} + \frac{1}{6c^2} + \frac{1}{6c^3} \right); \quad (7.014)$$

это уравнение дает T в функции T_m . Эта формула в предыдущем опыте на растяжение дает для T величину 71 кг/см^2 , а концентрация напряжений у дна выкружки получается несколько меньше чем 2,4. Вероятная величина этого коэффициента в точках контура, полученная посредством экстраполяции опытной кривой (фиг. 7.012), оказывается равной 2,5.



Фиг. 7.013.

§ 7.02. Испытание материалов на растяжение.

Среди тех многочисленных испытаний, которые производятся инженерами с целью определения свойств металлов, применяемых в конструкциях, самым распространенным является испытание материалов на растяжение до разрушения, так как только таким путем возможно составить себе ясное представление о пригодности материала.

При надлежащей тщательности постановки испытания на растяжение его результаты не зависят от вида разрывной машины; легкость же выполнения этого испытания делает его чрезвычайно пригодным для сравнения свойств различных материалов.

Однако существуют обстоятельства, которые делают этот вид испытаний не таким простым, как это могло бы казаться на первый взгляд; к таким обстоятельствам относится возможность возникновения неравномерного распределения напряжений, иногда по не совсем понятным причинам.

Приложение нагрузки к плоскому или цилиндрическому образцу при помощи обычного вида захватов почти всегда сопровождается неравномерным распределением напряжений в сечении около концов образца; для предотвращения разрушения образца в этих местах обычно увеличивают поперечное сечение; в технических условиях на испытания обычно устанавливается очертание перехода от средней части образца к расширенным концам с тем расчетом, чтобы обеспечить равномерность распределения напряжений на протяжении расчетной длины образца.

Однако указания технических условий бывают не вполне определенными; поэтому иногда образцы оказываются изготовленными так, что наблюдается неравномерность распределения напряжений и по сечениям в пределах расчетной длины.

Ставились специальные опыты для определения влияния этих обстоятельств; вначале испытаниям подвергался стандартный образец простейшей формы, представляющий собой полосу постоянной толщины с двумя полукруглыми выкружками, расположенными симметрично по отношению к оси. Подобного вида образцы применялись для испытаний, несмотря на то, что у таких выкружек не могло быть равномерного распределения напряжений; материал находился в очень сложном напряженном состоянии, которое приближалось к чистому растяжению только в том случае, если выкружки были незначительных размеров.

Характер распределения напряжений может быть изучен при рассмотрении в поляризованном свете растягиваемой пластинки шириною, вчетверо большей радиуса симметрично расположенных полукруглых вырезов.

Изохроматические линии показывают, что напряжения по наименьшему сечению сильно меняются по величине, на основании же данных, полученных путем опытов с пластинкой с одной выкружкой, можно заключить, что напряжение в точках у края выреза велико по сравнению с напряжением в средней части сечения. Изоклины и линии главных нормальных напряжений (фиг. 7.022) указывают на неравномерность распределения напряжений; расположение нулевых изоклин дает нам действительные пределы, в которых наблюдается неравномерность распределения напряжений, являющаяся следствием выкружки указанной на чертеже формы. Приблизительно равномерное распределение напряжений наблюдается в действительности, как видно по изоклинам, только на расстоянии от места выреза, считая по оси, вчетверо превышающем радиус выреза.

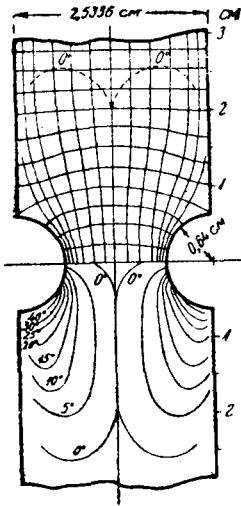
При исследовании распределений напряжений по наименьшему сечению в растягиваемой пластинке этой формы, шириною 2,54 см, с выкружками радиусом 0,635 см, при среднем напряжении 76,8 кг/см², напряжение P по наименьшему сечению в точках по концам этого сечения оказалось равным 111,1 кг/см²; это напряжение падает почти до половины в середине этого сечения (фиг. 7.023) и сопровождается поперечным напряжением Q , возрастающим с каждой стороны от нуля до максимальной величины 17,6 кг/см², затем несколько убывающим к сере-

дине сечения. Неравномерность распределения напряжений в точках контура полукруглой выкружки еще больше, так как материал в точках у прямых углов на краях выкружки остается ненапряженным при любой нагрузке. Отсутствие напряжений в этой точке само собой вытекает из условий на контуре, так как в вершине этого угла оба нормальных и касательные напряжения обращаются в нуль.

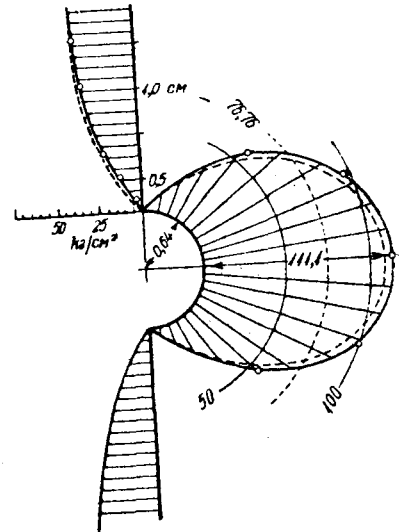
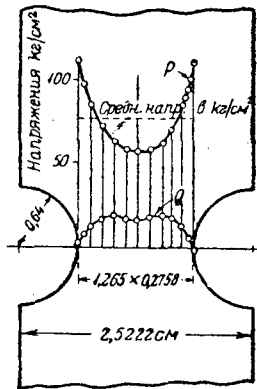
Распределение напряжений в точках по окружности выкружки показано при помощи полярной диаграммы на правой половине фиг. 7.023; кроме того на этом же чертеже изображено и распределение напряжений в точках прямых частей контура.

Тем же пунктиром нанесены результаты приближенных вычислений по уравнению (7.012), причем величина напряжения T была вычислена из уравнения (7.014). Значение вычисленных напряжений несколько ниже значений, полученных экспериментальным путем.

Выкружки с радиусом 0,476 см и 0,318 см, сделанные в одной и той же растягиваемой пластинке, дают приблизительно одинаковые результаты; по мере же



Фиг. 7.022.



Фиг. 7.023.

уменьшения размеров этих выкружек напряжения выравниваются по наименьшему поперечному сечению, за исключением участка, близкого к выкружке, где не наблюдается никакой перемены; это указывает на то, что даже небольшой надрез, вроде царапины, служит причиной местных напряжений, которые могут иметь серьезные последствия в особенности если материал перенапряжен.

Случаи подобного распределения напряжений изучались одним из первых английских студентов-исследователей Сатаке, который показал, что в стальном образце с выкружками, размеры которых лежат между указанными выше размерами, кривая напряжений $P+Q$ в точках минимального поперечного сечения лежит между соответствующими кривыми, полученными на прозрачной модели, если принять в расчет действительно приложенный груз.

Здесь необходимо сравнивать именно сумму главных напряжений, так как разделение P от Q для металлического образца представляется затруднительным. Для стального образца измеренные величины деформаций умножались на E/η с целью получить среднее напряжение $(P+Q)$ в рассматриваемой точке; полученные таким образом кривые распределения напряжений изображены на фиг. 7.024 вместе с формой испытанного образца.

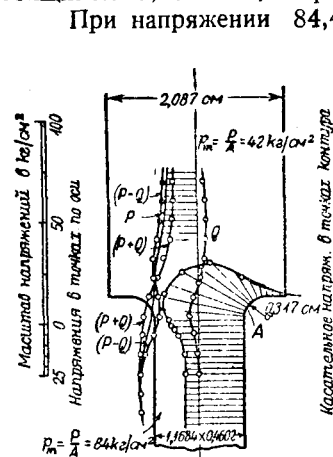
Эти результаты показывают очень хорошее совпадение, особенно числа

те затруднения, которые могут встретиться при точном измерении поперечных деформаций; наибольшая величина их достигает только $301,0 \times 10^{-6}$ см в точках на краях поперечного сечения, и еще меньшей величины — $175,3 \times 10^{-6}$ см в центре. Результаты этих опытов могут считаться экспериментальным подтверждением достаточной точности оптических измерений для изучения распределения напряжений в действительных материалах. Эти образцы с выкружками интересны главным образом как первоначальная форма обычных образцов, получающихся из них путем добавления участка с прямыми параллельными сторонами.

Этот участок соединяется с расширенными концами образца отрезками дуги круга; на фиг. 7.025 изображен подобный короткий растянутый образец, рассматриваемый в поляризованном по кругу свете.

По изохромам сразу можно определить, что в состоянии равномерного растяжения находится только часть среднего прямолинейного участка; максимальные напряжения получаются в точках контура, расположенных непосредственно у сопряжения прямых сторон с переходными кривыми; это явление выступает особенно ярко при большой кривизне соединительной дуги; графически это изображено на фиг. 7.026 для плоского образца, толщиной 0,4602 см, шириной 1,168 см в прямой части и 2,3663 см в головке.

При напряжении $84,4 \text{ кг/см}^2$ в узкой части образца в точке А на соединительной кривой, непосредственно за местом сопряжения этой кривой с прямой частью, получается максимальное напряжение в $121,3 \text{ кг/см}^2$. По мере уменьшения радиуса соединительной кривой максимальное напряжение возрастает и приближается к тому пределу, за которым даже небольшая нагрузка вызывает остаточную деформацию в этой точке, что легко можно наблюдать на образце с очень резким (острым) переходом от широкой части к узкой. Зависимость величины напряжений от радиуса переходной кривой дана в нижеследующей таблице, где приведены в функции лишь радиуса R результаты измерений напряжения в растянутом образце указанных выше размеров.



Фиг. 7.026.

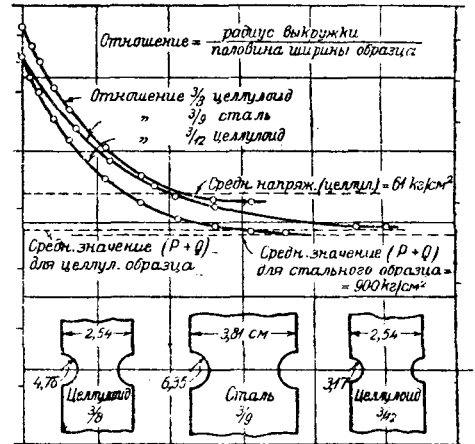
При напряжении $84,4 \text{ кг/см}^2$ в узкой части образца в точке А на соединительной кривой, непосредственно за местом сопряжения этой кривой с прямой частью, получается максимальное напряжение в $121,3 \text{ кг/см}^2$. По мере уменьшения радиуса соединительной кривой максимальное напряжение возрастает и приближается к тому пределу, за которым даже небольшая нагрузка вызывает остаточную деформацию в этой точке, что легко можно наблюдать на образце с очень резким (острым) переходом от широкой части к узкой. Зависимость величины напряжений от радиуса переходной кривой дана в нижеследующей таблице, где приведены в функции лишь радиуса R результаты измерений напряжения в растянутом образце указанных выше размеров.

Когда R уменьшается, максимум напряжений быстро увеличивается и стремится к бесконечности при $R \rightarrow 0$, что подтверждается тем обстоятельством,

что при переходе под прямым углом материал в вершине внутреннего угла получает остаточные деформации уже при очень малом грузе.

R (см)	0,64	0,32	0,16
Максимальное напряжение в кг/см^2	104,0	121,3	132,9
Концентрация напряжений в процентах	23,4	43,8	57,5

Как известно, хрупкие материалы, например чугун, часто разрушаются при испытаниях на разрыв у головок; это разрушение приписывается часто эксцентриситету нагрузки, но, как показывают опыты, оно вероятнее всего является



Фиг. 7.024.

следствием больших местных напряжений в этих местах. При плохом центрировании образца в испытательной машине такая местная концентрация напряжений еще увеличится на одной стороне образца, что неизбежно приводит к разрушению у головок образца. В пластичном материале, например мягкой стали, перед окончательным разрушением наступают изменения в распределении напряжений; происходит выравнивание их в критическом сечении, что уменьшает шансы на разрушение в этом месте.

Распределение напряжений в точках вдоль оси растягиваемых образцов представляет некоторые интересные особенности в тех случаях, когда головки и средняя часть образца достаточно длинны для возможности полного развития этих характерных особенностей. На достаточном расстоянии от головок по средним поперечным сечениям действует лишь равномерно распределенное напряжение P ; по мере же приближения к головкам начинает развиваться растягивающее напряжение Q , которое достигает максимума раньше, чем начнется изменение сечения. Затем оно уменьшается и переходит в сжимающее с максимумом в сечении за переходом от средней части к головке; затем падает до нуля. Типичным примером такого распределения напряжений служат представленные на фиг. 7.026 результаты измерения в точках вдоль оси напряжения P и перпендикулярного по отношению к нему напряжения Q .

Эти изменения в напряжениях Q являются следствием наклона линий главных нормальных напряжений и объясняются с физической точки зрения тем, что эти линии можно рассматривать как оси силовых трубок, подверженных растяжению на концах. Для сохранения изогнутых очертаний этих линий требуется наличие поперечных сил, которые в точках оси проявляют тенденцию к сжатию материала в тех случаях, когда силовые трубки направлены вогнутостью к оси, и к растяжению, когда они обращены выпуклостью к этой оси образца. На основании этой гипотезы в точках перегиба Q должно бы иметь нулевое значение, но так как эти точки расположены в разных местах многочисленных силовых трубок, окружающих ось, то в результате получается сложение напряжений, и точка с нулевым напряжением Q будет занимать, как оказывается, некоторое среднее положение.

Точки перехода через нуль меньшего главного напряжения (Q) лежат не в одном и том же поперечном сечении, и по обе стороны оси остается широкое поле, охваченное напряжениями Q . Область неравномерного распределения напряжений удобнее всего выявляется при помещении напряженного образца в полярископ так, чтобы ось образца располагалась параллельно главной оси поляризатора или анализатора. Черные участки в поле зрения указывают на те части образца, где линии напряжений параллельны или перпендикулярны к оси (образца), что бывает¹ только в тех случаях, когда напряжение распределяется равномерно.

¹ *Примечание относительно линий нормальных главных напряжений, прямых и параллельных осям x , y .*

Здесь $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 0$ и $\chi = f(x) + F(y)$, причем $\nabla^4 \chi = 0$.

Поэтому

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{d^4 F}{dy^4} = 0,$$

и

$$f = -Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

$$F = Ay^4 + B'y^3 + C'y^2.$$

Отсюда

$$\chi = A(y^4 - x^4) + Bx^3 + B'y^3 + Cx^2 + C'y^2,$$

$$\overline{xx} = P = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 12Ay^2 + 6B'y + 2C',$$

$$\overline{yy} = Q = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = -12Ax^2 + 6Bx + 2C.$$

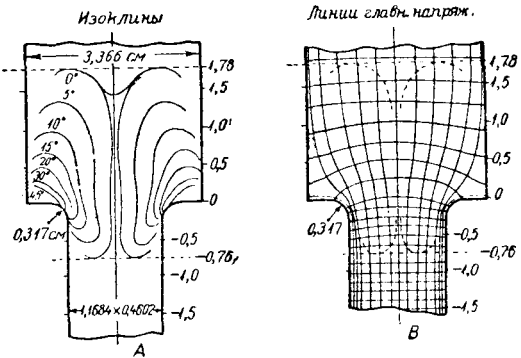
Таким образом кривые, ограничивающие эти черные участки (для краткости, мы будем называть эти кривые «нулевыми изоклинами», хотя, строго говоря, термин этот относится ко всей черной площади целиком) определяют, как на фиг. 7.027 А, область сложного распределения напряжений, возникающих вследствие изменений поперечных сечений, если только другой расширенный конец достаточно удален и не влияет на распределение напряжений.

При близости же другого расширенного конца образца могут создаваться такие условия, при которых внутренние нулевые изоклины окажутся разделенными только небольшим положительным промежутком c . Если $c = 0$, то сложное напряженное состояние будет наблюдаться по всей длине образца, за исключением небольших площадей между внутренними изоклинами и боковыми сторонами образца. При отрицательных значениях c не может быть перекрытия нулевых изоклин, и распределение напряжений меняется в этом случае таким образом, что при достаточной близости головок образца нулевые изоклины представляют собою крест, одна ветвь которого направлена вдоль оси образца, а другая — по среднему поперечному сечению.

С практической точки зрения важно установить, что распределение напряжений по обе стороны от среднего сечения остается неизменным и при предельном значении $c = 0$. Это обстоятельство установлено при помощи подробного исследования распределения напряжений в головках прозрачных образцов при приближении их (головок) одна к другой.

Таким образом мы имеем простой способ отыскания длины участка с равномерным распределением растягивающих напряжений в плоском образце с расширенными концами при помощи нулевых изоклин. Экспериментальные данные действительно определяют эту величину для всяких образцов с такими концами, если только средняя часть их достаточно длинна для того, чтобы можно было наблюдать появление изоклин по обе стороны среднего поперечного сечения.

Для практических целей удобно выразить эту длину в функции расстояния D между заплечиками образца; D_1 в этой формуле представляет собою соответствующее расстояние в случае соприкосновения внутренних нулевых изоклин, а b обо-



Фиг. 7.027.

Следовательно

$$\frac{\partial \overline{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \overline{yy}}{\partial y} = 0,$$

как должно было быть.

Если же $\overline{xx} = 0$ на контуре, то $A = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$.
Далее

$$\overline{xx} = 0 \text{ или } Q = 0$$

и таким образом

$$\overline{yy} = 6Bx + 2C.$$

Поэтому мы можем иметь: 1) чистое растяжение, или 2) чистый изгиб, или 3) комбинацию того и другого в точках черных участков.

При симметрии относительно оси y ,

$$B = 0 \text{ и } \overline{yy} = 2C.$$

Таким образом, черные участки, если они простираются до краев образца, будут обязательно соответствовать равномерно распределенным растягивающим напряжениям.

значает наименьшую ширину образца. В приведенном выше примере D_1 равно $1,30b$ и длина k участка с равномерно распределенными растягивающими напряжениями, выраженная в процентах от длины D , представляется формулой

$$k = (D - D_1)/D = (D - 1,30b)/D,$$

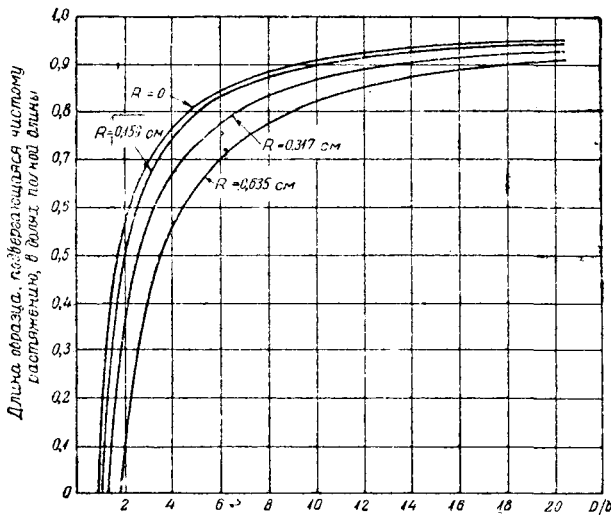
или

$$(D/b)(1 - k) = 1,30.$$

Откладывая k и D/b как координаты, получаем кривую гиперболической формы с асимптотой $k=1$. Эта кривая определяет длину участка с равномерным растягивающим напряжением при любой величине D . Если радиус R у заплечиков изменится, а остальные размеры останутся прежними, то получается новая гиперболическая кривая. Опыты показывают, что D_1 имеет следующие значения при указанной выше ширине, а именно.

R см	0,64	0,32	0,16	0
D_1 см	$2,08 = 1,78b$	$1,52 = 1,30b$	$1,17 = 1,00b$	$1,07 = 0,915b$

Соответствующие этим четырем случаям кривые изображены на фиг. 7.028, причем интересно отметить, что длина участка с равномерным растяжением будет



Фиг. 7.028.

тем больше, чем меньше R , однако это явление сопровождается очень неблагоприятным соответствующим повышением максимальных местных напряжений у заплечиков.

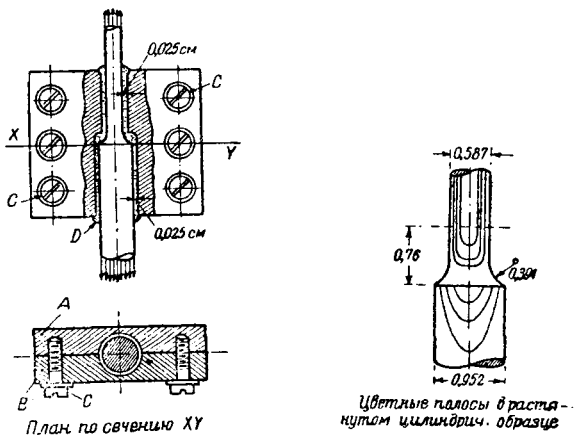
§ 7.03. Образцы для испытаний на растяжение с круглым поперечным сечением.

Предыдущие экспериментальные данные указывают на то, что расширенные концы тонких плоских образцов для испытаний на растяжение являются причиной появления сложного напряженного состояния в соседних с ними узких частях образца с параллельными сторонами; желательно поэтому выяснить, как изменится это влияние для образца цилиндрической формы. Если развитие сложного напряженного состояния зависит от изменения поперечного сечения, то это явление должно проявиться резко в этом последнем случае, так как в тонком плоском образце площадь меняется пропорционально ширине, в то время как в круглом образце переменного сечения она пропорциональна квадрату диаметра.

При постановке опытов в поляризованном свете с цилиндрическими стержнями встречаются некоторые трудности, возникающие благодаря переменной толщине, через которую проходит луч, а также и благодаря тому, что образец играет роль линзы, не имеющей определенного фокуса. Действие образца как линзы нейтрализуется путем помещения его в стеклянный сосуд с параллельными стенками, заполненный жидкостью с таким же показателем преломления, как и сам стержень. В образце, взятом для этих опытов, показатель преломления был определен профессором Портером при помощи рефрактометра Пульфриха; этот показатель оказался равным 1,5011. Тот же самый показатель имела и смесь из глицерина и кедрового масла, приготовленная для опыта.

Для опыта был изготовлен цилиндрический стержень из нитроцеллюлозы с размерами, указанными на фиг. 7.031. Он был помещен в зажим, состоящий из двух плоских прозрачных пластинок *A, B*, соединенных одна с другой и расверленных на 0,025 см шире, чем образец; узкое кольцевое пространство было заполнено смесью глицерина и кедрового масла. При рассмотрении в полярископе напряженного образца замечались цветные полосы, которые благодаря переменной толщине напряженного образца оказывались параллельными его оси на протяжении узкой цилиндрической части; по мере приближения к головке они начали приближаться к оси, что указывало на наступление сложного напряженного состояния. В этом случае отклонение полос начиналось на расстоянии 1,3 *d* от места соединения с цилиндрическими головками, тогда как в соответствующем случае тонкого плоского образца с тем же очертанием перехода к головке равномерность распределения напряжений прекращалась на расстоянии 1,06 *d*.

Изменение сечения в образце цилиндрической формы, следовательно, вызывает большую область с неравномерным напряжением, чем в тонком плоском образце с тем же профилем переходов к головкам.



Фиг. 7.031.

7.04. Теоретическое исследование напряжений в о.м. цилиндре.

Теоретическая оценка того предела, до которого простирается в „свободную длину образца“ нарушение равномерного распределения напряжений вследствие местных концентраций растягивающих усилий, приложенных к круглому цилиндру, получена путем решения уравнений теории упругости при симметрии по отношению к оси. Файлон¹ считает длину цилиндра конечной, предполагая, что средняя треть и крайние шестые части ее остаются свободными от напряжений, в то время как к двум поясам на поверхности цилиндра, охватывающим каждый по одной шестой его длины, по середине обеих его половин приложены равномерно распределенные продольные касательные усилия. Торцы цилиндра свободны от нормальных усилий, но подвергаются касательным усилиям, направленным по радиусу цилиндра.

Продольные касательные усилия, приложенные в противоположном направлении к двум выше упомянутым поясам поверхности цилиндра, являлись таким образом системами сил, растягивающими его среднюю часть.

Вычисления показали, что имеет место очень большое нарушение равномерности распределения напряжений в средней части цилиндра; радиальные напряжения r_r меняются в среднем сечении от $(0,230) P$, в центре, до нуля — у поверхности, где P — величина среднего растягивающего напряжения, вызванного внешними силами (по сечению, перпендикулярному оси). Существует также нормальное напряжение $\hat{\varphi\varphi}$, изменяющееся в среднем сечении от $(0,230) P$ до $(0,124) P$. Нормальное напряжение $\hat{z z}$ в центре значительно ниже среднего значения P ,

¹ L. N. G. Filon, On the equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load, Phil. Trans. A, 198, 1902, стр. 147—233.

будучи там равным $(0,689)P$, у контура оно превосходит P , достигая величины $(1,117)P$.

При удалении от среднего сечения $z=0$ возникают значительные касательные напряжения \widehat{zz} , доходящие до $(0,155)P$ в точках на расстоянии от среднего сечения, равном трем десятым ненагруженной длины (в средней части цилиндра) и на расстоянии трех пятых радиуса от оси. Были также вычислены и удлинения для точек на поверхности цилиндра; эти вычисления важны, так как полученные величины можно сравнить с соответствующими показаниями зеркального прибора.

Отношения между действительными удлинениями на поверхности и теми, которые должны бы появиться, если бы напряжения были распределены равномерно по всему сечению при той же растягивающей силе, имеют следующие значения:

при	измеряемой	длине,	равной	0,3	свободной	длины,	1,10
"	"	"	"	0,6	"	"	1,15
"	"	"	"	0,9	"	"	1,28

Здесь обнаруживается, таким образом, новый источник ошибок, возникающих при испытаниях материалов при помощи экстензометра; ошибки эти отражаются здесь не только на величине напряжений, но и на измеряемых действительных удлинениях. Метод Файлона, описываемый в упомянутой нами статье, из-за того, что он рассматривал длину цилиндра конечной, приводит к результатам, выраженным рядами с отдельными членами; вычисления по этим формулам были громоздки.

Задачу эту можно решать и в более компактной и более общей форме, отодвигая торцы цилиндра в бесконечность и пользуясь вместо рядов Фурье интегралами Фурье. Этот способ решения задачи имеет то дополнительное преимущество, что влиянием самоуравновешивающихся касательных напряжений по торцам, отодвинутым теперь в бесконечность, можно на основании принципа Сен-Венана пренебречь.

В курсе математической теории упругости Ловэ (Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4-е издание, § 188) показано, что в случае деформации, симметричной относительно оси Oz :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \eta \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right\}, & \widehat{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \eta \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right\}, \\ \widehat{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\eta) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\}, & \widehat{\quad} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\eta) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.041)$$

а радиальные и осевые перемещения u_r , u_z выражаются формулами:

$$u_r = -\frac{(1+\eta)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \frac{(1+\eta)}{E} \left\{ (1-2\eta) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right\} \quad (7.042)$$

где χ — функция от r , z , и играет ту же приблизительно, роль, что и функция напряжений в плоской задаче; она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4 \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \chi = 0. \quad (7.043)$$

Решение его имеет форму

$$\chi = \{ A_1 I_0(\rho) + A_2 \rho I_1(\rho) \} \sin kz,$$

где $\rho = kr$ и k некоторая постоянная; A_1 , A_2 — произвольные коэффициенты.¹

Если мы обозначим теперь $ka = u$, то из условия $\widehat{rr} = 0$, при $r = a$, получается

$$A_1 \{ I_0(u) - I_1(u)/u \} + A_2 \{ I_0(u) \cdot (1-2\eta) + u I_1(u) \} = 0,$$

¹ $I_n(\rho)$ обозначает функцию Бесселя от чисто мнимого аргумента. См. G. N. Watson *Bessel Functions*, § 3. 7.

так что

$$\begin{aligned} A_1 &= A \{ I_0(u) \cdot (1 - 2\eta) + uI_1(u) \}, \\ A_2 &= A \{ I_1(u)/u - I_0(u) \}, \end{aligned}$$

что приводит к

$$(\widehat{rz})_{r=a} = Ak^3 [u \{ I_1^2(u) - I_0^2(u) \} + 2(1 - \eta) I_1^2(u)/u] \sin kz.$$

Складывая бесчисленное множество подобных решений, получаем

$$\begin{aligned} \chi &= \int_0^\infty \left[I_0 \left(\frac{ur}{a} \right) \{ (1 - 2\eta) I_0(u) + uI_1(u) \} + \right. \\ &\quad \left. + u \frac{r}{a} I_1 \left(\frac{ur}{a} \right) \{ I_1(u)/u - I_0(u) \} \right] f(u) \sin \frac{uz}{a} du. \quad (7.044) \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\widehat{rz})_{r=a} = \frac{1}{a^3} \int_0^\infty u^3 f(u) [u \{ I_1^2(u) - I_0^2(u) \} + 2(1 - \eta) I_1^2(u)/u] \sin \frac{uz}{a} du.$$

Предположим теперь, что касательные условия, приложенные к поверхности стержня, сконцентрированы на двух узких поясах, отстоящих друг от друга на расстояние $2c$; величину касательного усилия на единицу длины пояса обозначим через S ; тогда

$$2\pi aS = \pi a^2 \cdot P, \quad \text{или} \quad S = aP/2,$$

где P — средняя величина растягивающего напряжения в образце.

Подобное распределение касательных усилий на поверхности выражается через интеграл Фурье

$$(\widehat{rz})_{r=a} = \frac{P}{\pi_1} \int_0^\infty \sin \frac{uc}{a} \sin \frac{uz}{a} du.$$

Сравнивая эти две величины \widehat{rz} при $r = a$, получаем

$$f(u) = \frac{Pa^3}{\pi} \frac{\sin(uc/a)}{u^3 [u \{ I_1^2(u) - I_0^2(u) \} + 2(1 - \eta) I_1^2(u)/u]}, \quad (7.045)$$

откуда можно выразить функцию в виде интеграла и получить полное решение для напряжений и перемещений.

Рассматривая интеграл, выражающий функцию χ , видим, что, хотя при $r < a$ он будет сходящимся на верхнем пределе, когда u мало, все же подинтегральная функция будет приближенно равна

$$\begin{aligned} & - \frac{2Pa^3}{\pi} \frac{1 - 2\eta}{1 + \eta} \sin(uc/a) \sin(uz/a) \left\{ \frac{1}{u^4} + \right. \\ & \quad \left. + \text{члены вида } \frac{1}{u^2}, 1, u^2 \text{ и т. д.} \right\} \end{aligned}$$

Для того чтобы подинтегральная функция оставалась конечной и в начале координат, следует добавить к ней слагаемое

$$\frac{2Pa}{\pi} \frac{1 - 2\eta}{(1 + \eta)} \frac{cz}{u^2}.$$

Легко видеть, что: 1) член такого вида попрежнему оставляет интеграл сходящимся при верхнем пределе; 2) добавление его не влияет на величину перемещений и напряжений.

Функция χ , следовательно, имеет вид

$$\chi = \frac{Pa^3}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{I_0\left(\frac{ur}{a}\right) \left\{ (1-2\eta)I_0 + uI_1 \right\} + \frac{ur}{a} I_1\left(\frac{ur}{a}\right) \left\{ \frac{I_1}{u} - I_0 \right\}}{u^4 \left\{ I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2 \right\}} \right. \\ \left. \times \sin \frac{uz}{a} \sin \frac{uc}{a} + \frac{2cz}{a^2} \frac{1-2\eta}{1+\eta} \cdot \frac{1}{u^2} \right] du, \quad (7.046)$$

где, для краткости, в $I_0(u)$, $I_1(u)$ пропущен аргумент.

Полученные из предыдущего выражения формулы для напряжений таковы:

$$\widehat{rr} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\left\{ \frac{I_1(\rho)}{\rho} - I_0(\rho) \right\} \left\{ (1-2\eta)I_0 + uI_1 \right\} - \left\{ (1-2\eta)I_0(\rho) + \rho I_1(\rho) \right\} \left\{ \frac{I_1}{u} - I_0 \right\}}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right. \\ \left. \times \frac{\cos \frac{uz}{a} \sin \frac{uc}{a}}{u} \right] du, \quad (7.0471)$$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{-\frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ (1-2\eta)I_0 + uI_1 \right\} - (1-2\eta)I_0(\rho) \left\{ \frac{I_1}{u} - I_0 \right\}}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right. \\ \left. \times \frac{\cos \frac{uz}{a} \sin \frac{uc}{a}}{u} \right] du, \quad (7.0472)$$

$$\widehat{z\theta} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{I_0(\rho) \left\{ (1-2\eta)I_0 + uI_1 \right\} + \left\{ 2(2-\eta)I_0(\rho) + \rho I_1(\rho) \right\} \left\{ \frac{I_1}{u} - I_0 \right\}}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right. \\ \left. \times \frac{\cos \frac{uz}{a} \sin \frac{uc}{a}}{u} \right] du, \quad (7.0473)$$

$$\widehat{rz} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{I_1(\rho) \left\{ (1-2\eta)I_0 + uI_1 \right\} + \left\{ \rho I_0(\rho) + 2(1-\eta)I_1(\rho) \right\} \left\{ \frac{I_1}{u} - I_0 \right\}}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right. \\ \left. \times \frac{\sin \frac{uz}{a} \sin \frac{uc}{a}}{u} \right] du. \quad (7.0474)$$

В этих выражениях для краткости буква ρ введена вместо $\frac{ur}{a}$ и там, где не написан аргумент, подразумевается u .

Значения продольного и поперечного нормальных напряжений в центре цилиндра ($r=0$, $z=0$) выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} = \widehat{\theta\theta} &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\frac{(1-2\eta)}{2} \left(I_0 - \frac{2I_1}{u} \right) - \frac{1}{2} u I_1}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right] \frac{\sin \frac{uc}{a}}{u} du, \\ \widehat{z\theta} &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{(1-2\eta) \frac{I_1}{u} + 3 \left(\frac{I_1}{u} - I_0 \right) + u I_1}{I_1^2 - I_0^2 + 2(1-\eta)I_1^2/u^2} \right] \frac{\sin \frac{uc}{a}}{u} du. \end{aligned} \right\} \quad (7.048)$$

После вычисления этих интегралов, принимая коэффициент Пуассона равным $\frac{1}{4}$, получаем следующие величины для этих напряжений.

Таблица 7.04.

Напряжения в центре цилиндра.

c/a	\widehat{zz}/P	$\widehat{rr}/P = \widehat{\varphi\varphi}/P$
$\pi/18 = 0,1745$	0,066	0,201
$\pi/9 = 0,3491$	0,204	0,315
$\pi/6 = 0,5236$	0,406	0,325
$2\pi/9 = 0,6981$	0,612	0,269
$5\pi/18 = 0,8727$	0,778	0,195
$\pi/3 = 1,0472$	0,891	0,127
$7\pi/18 = 1,2217$	0,957	0,077
$4\pi/9 = 1,3963$	0,992	0,043
$\pi/2 = 1,5708$	1,007	0,022

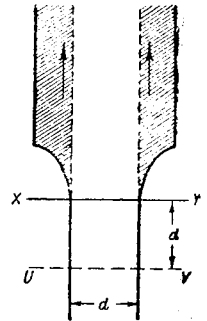
Из этих данных видно, что продольное напряжение \widehat{zz} оказывается равномерно распределенным (с точностью до 1%), когда расстояние сечения достигает примерно $1,5a$ или $\frac{3}{4}$ диаметра от „поясов“, причем попереч-

ное напряжение \widehat{rr} все еще достаточно велико. Если мы проследим закон его уменьшения, то окажется, что оно падает до величины, равной одному проценту от продольного напряжения, при $c = 2a$ или иначе при расстоянии от поясов — большем диаметра.

Ясно, что приложение к криволинейной поверхности такого очень узкого кольца касательных напряжений представляет собою крайнюю форму сосредоточенной нагрузки. Практически мы можем рассматривать влияние изменения поперечного сечения, как приложение касательных напряжений к поверхности среднего цилиндра, мысленно продолженного внутрь головок образца (фиг. 7.04). Заштрихованная часть материала передает на поверхность этого внутреннего цилиндра (указанного пунктиром) напряжения, которые очень похожи на продольные касательные, как показано стрелками. Если сечение изменяется постепенно, то распределение касательных напряжений непрерывно меняется и, во всяком случае, они появляются не раньше, чем в сечении xu . Математические результаты указывают, что практически можно считать распределение напряжений равномерным уже в сечении UV , на расстоянии от AB , равном диаметру средней части. В виду неизбежной разницы между теоретической и действительной задачами, сходимость между теорией и наблюдением можно считать для данного случая удовлетворительной.

Очевидно, измерения на таком образце должны, для надежности, производиться лишь на той его части, которая находится не ближе, чем на расстоянии диаметра от начала расширения сечения. Не будет вероятно большой ошибкой считать это расстояние равным трем четвертям диаметра.

Как известно из практики, опыты по испытанию материала на растяжение производятся обычно над цилиндрическими образцами с короткой средней частью, соединяющейся с уширенными головками посредством кривых кругового очертания. Исследование¹ некоторых из этих форм образцов на плоских элементах такого же очертания показывает, что в некоторых случаях эти образцы не отвечают предъявляемым требованиям наличия равномерного растягивающего напряжения во всех сечениях образца. Этот результат подтверждается изучением результатов не-



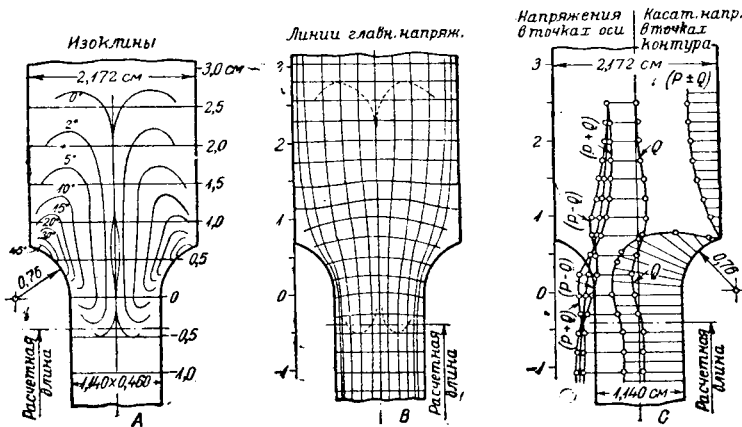
Фиг. 7.04.

¹ E. G. Coker, Photo-elastic measurements of the stress-distribution in tension members used in the testing of materials, Min. Proc. Inst. Civil Engineers, 208 (1918—19), ч. II.

скольких тысяч испытаний образцов из твердой латуни, изготовленных согласно техническим условиям; оказалось, что только треть образцов разрывалась посредине длины или около этого места, остальные же две трети разрывов наблюдались или непосредственно за окончанием средней части или в сечении между началом перепада и серединой образца.

§ 7.05. Английские (британские) стандартные испытания на растяжение.

Спецификации комитета стандартов имеют такое широкое распространение, что интересно дать насколько возможно подробное описание исследования оптическим методом одного типичного вида из этих образцов. Несколько стандартных образцов на растяжение были изучено Кокером;¹ один из таких образцов (изготовленный по английским стандартным техническим условиям) избран для последующего описания; это образец для испытания стали, применяемой в кораблестроении; он имеет стандартную расчетную длину 20,3 см с прямой средней частью, длиной 22,9 см; она соединяется круговыми дугами радиусом 2,54 см с головками, шири-



Фиг. 7.051.

ною не менее $W + 1,27$ см, где W — ширина средней части. Последний размер (W) определяется условием, чтобы площадь сечения не превышала $6,45$ см², с тем, чтобы все испытания можно вести до разрыва на машине силой 50 т.

Ширина головок образца может быть различной, в зависимости от разных обстоятельств. Модель плоского образца с средней частью шириной 3,8 см была изготовлена в масштабе три десятых натуральной величины из материала толщиной 0,460 см; точные размеры этого образца даны на фиг. 7.051 А, где изображены и изоклины. Эти экспериментальные кривые сразу же указывают, что в пределах расчетной длины существует сложное напряженное состояние, так как нулевые изоклины заходят на 0,127 см в расчетную длину; следствием этого должно быть некоторое нарушение параллельности в направлениях главных нормальных напряжений, внутри этой части расчетной длины, чего однако почти незаметно на фиг. 7.051 В.

Исследование напряжений в точках контура у головок и поблизости от них, судя по фиг. 7.051 С, показывает, что при равномерно-распределенном напряжении $86,5$ кг/см² в сечениях расчетной длины максимум напряжений в $103,3$ кг/см², т. е. на 19,5% выше средней величины, оказывается в том месте, где касательная к контуру образует с осью угол приблизительно в 8°. Выше места перехода в точках вдоль прямых сторон головок, напряжения возрастают до величины $45,7$ кг/см² на расстоянии 2,3 см от сечения, пересекающего центры соединительных дуг

¹ Loc. cit., стр. 573.

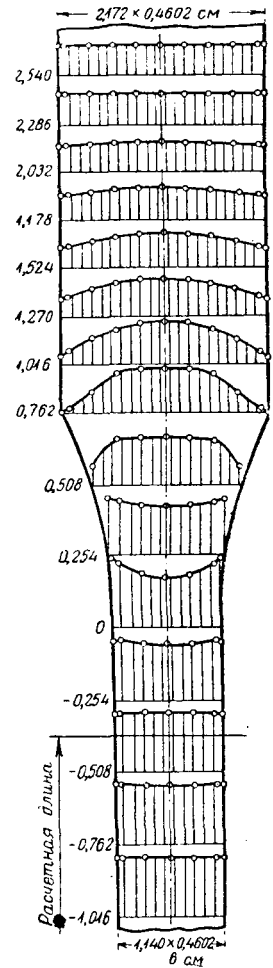
вдоль оси на этом же участке в пределах от $-1,5$ см до $+2,8$ см наблюдается напряжение Q небольшой величины и переменное по знаку, как показано на фиг. 7.051 С.

При уменьшении ширины головок до $1,9$ см глубина проникновения сложного напряженного состояния в расчетную длину уменьшается до величины в $0,08$ см; это указывает на влияние, которое имеет этот размер образца на распределение напряжений. Дальнейшее уменьшение ширины до $1,5$ см уменьшает глубину проникновения до $0,0457$ см. Таким образом в образце нормальных размеров сложное напряженное состояние распространяется в расчетную длину на каждом из концов на $0,43$, $0,25$ и $0,15$ см в соответствии с шириной головки; расчетная длина будет целиком находиться в состоянии равномерного растяжения только в том случае, когда отношение между шириной головки и образца будет приблизительно $1,13$ или меньше. Опыты показывают, значит, что при увеличении длины прямолинейной части на $0,86$ см расчетная длина будет во всех вышеупомянутых случаях подвергаться только чистому растяжению. Увеличение длины на $1,27$ см будет, вероятно, достаточным для большинства других случаев, при испытаниях по этим техническим условиям.

Уменьшение ширины головок не снижает однако максимальных напряжений в точках переходной части контура за пределами расчетной длины.

Весьма полная серия измерений распределения напряжений в этом стержне была произведена по сечениям, отстоящим друг от друга на $0,25$ см; на основании этих измерений были получены графики распределения нормальных напряжений в каждом сечении, показанные на фиг. 7.052; следует отметить, что линейный продольный масштаб не только сильно увеличен, чтобы диаграммы напряжений в отдельных сечениях не перекрывались, но принят из тех же соображений большим для участка ниже головки, чем для сечений в области самой головки. Результаты измерения напряжений приведены в упомянутой выше статье, поэтому, не повторяя их снова, укажем только, что в большинстве случаев эти измерения расходились с вычислениями в различных поперечных сечениях в пределах 2% .

Для сечений, расположенных в переходной части и головке, начиная с конца расчетной длины, наиболее интересным фактом является неравномерность распределения напряжений; до того поперечного сечения, где напряжение достигает максимума, повышенные значения напряжений наблюдаются в точках контура; затем эта картина изменяется и по сечению на расстоянии $+0,76$ см от конца расчетной длины, проходящему через углы головки, напряжение в этих углах обращается в нуль, максимальное же напряжение оказывается в центре сечения; такой тип распределения напряжений сохраняется до наступления равномерного распределения напряжений, что происходит в сечении, отстоящем на $2,54$ см от сечения, проведенного через начало переходных кривых; в действительном образце этому соответствует длина $8,38$ см. Для других типов плоских образцов были получены результаты, подобные описанным и отличающиеся лишь по числовым значениям, как например для исследованного Марисом¹ образца с переходными кривыми, очерченными по цепной линии.



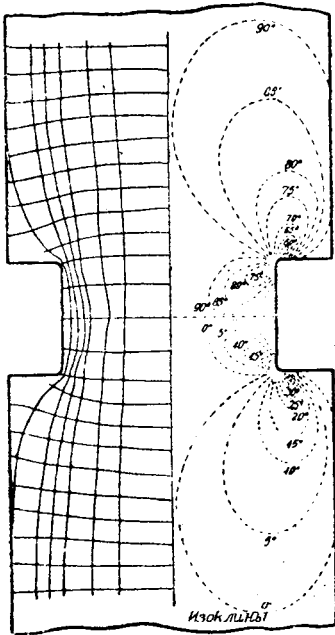
Фиг. 7.052.

¹ Loc. cit., стр. 398.

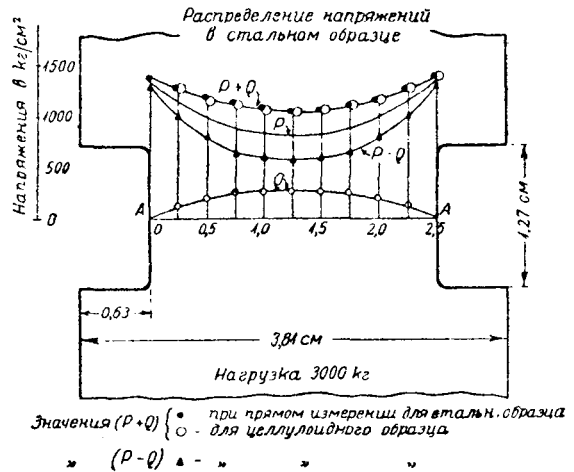
Для цилиндрического образца иной стандартной формы, широко применяемой на континенте, расширенные головки соединяются с расчетной длиной коническими участками; этот переход имеет прямолинейный контур, а сопряжение его с контуром средней части происходит под очень тупым углом. Оптические наблюдения обнаруживают в этих местах для плоского образца небольшое увеличение напряжений при хорошо округленном угле; это увеличение не превышает величину напряжений в сечениях расчетной длины более чем на 10% и имеет весьма местный характер.

Распределение напряжений в клинообразной части этого плоского образца уже разбиралось в § 4.21.

Распределение напряжений в очень коротком образце плоской формы исследовано др. Дэдсвеллом; он изучал это распределение для стального и целлюлоидного образцов. Стальной образец имел $3,81$ см ширины, $1,237$ см толщины при модуле $E = 0,213 \times 10^7$ и коэффициенте Пуассона $\eta = 0,31$; в образце были сделаны симметрично расположенные прямоугольные вырезы глубиной $1,27$ см и шириной в $0,64$ см с очень резкими углами; прозрачный образец был вырезан из листа



Фиг. 7.053А.



Фиг. 7.053В.

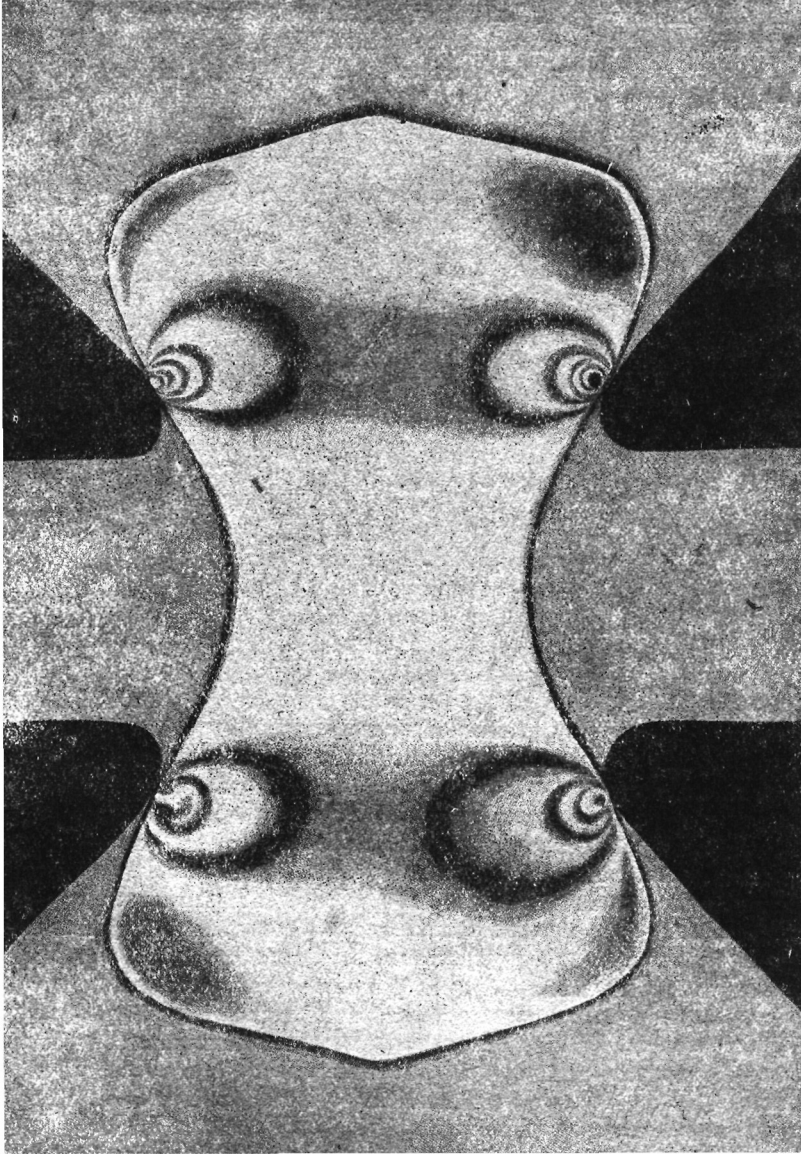
толщиною $0,460$ см и имел точно такую же форму и размеры, что и стальной, за исключением округления внутренних углов радиусом $0,8$ см для предупреждения перенапряжений. Изоклины и линии главных нормальных напряжений изображены на фиг. 7.053 А, причем следует обратить внимание на то, что в среднем поперечном сечении имеются две совпадающие изоклины с параметрами 0° и 90° , что указывает на параллельность и перпендикулярность главных нормальных напряжений к оси образца. В углах и вблизи от них изменения направлений главных нормальных напряжений особенно заметны по перегибам кривых.

Для каждого сечения можно сравнить распределение напряжений ($P+Q$); это было сделано путем деления этих величин в обоих образцах на среднее напряжение, как видно из фиг. 7.053 В, кривые распределения напряжений для среднего поперечного сечения практически совпадают. Распределение разности напряжений ($P-Q$), полученное из наблюдений над прозрачным образцом, дает возможность найти напряжение Q ; оно достигает значительной величины, как видно из кривой. При сравнении других случаев распределения напряжений ($P+Q$) наблюдается подобная же сходимость, которая подтверждает для этого частного

случая идентичность распределения напряжений при одинаковой нагрузке в образцах с односвязным контуром, одинаковых по форме, но различных по материалу.

§ 7.06. *Цементные восьмерки.*

Другим важным видом испытаний на растяжение является испытание цемента: форма образца устанавливается различными техническими условиями на основании

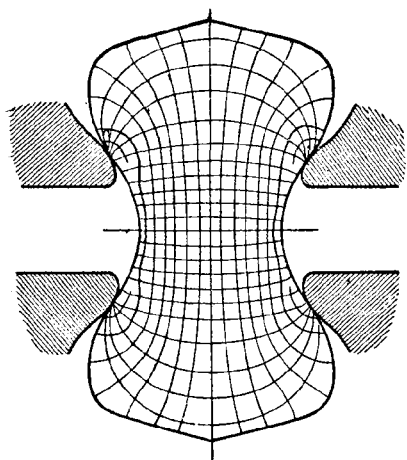


Фиг. 7.061.

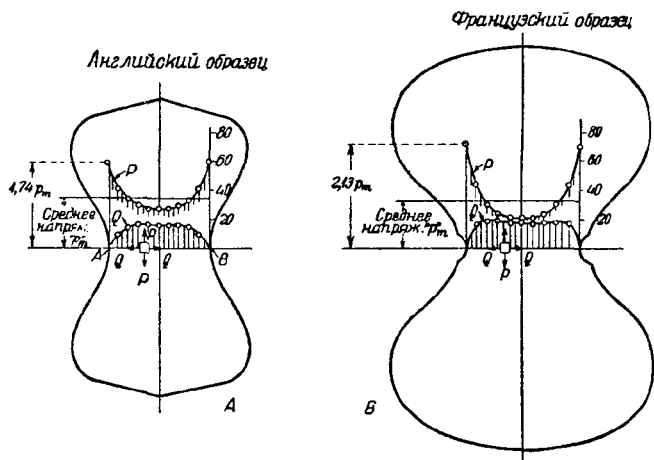
как-будто произвольных правил, различных в различных странах; применяемая форма как это будет видно, исключает возможность испытания цемента при равномерном распределении напряжений по сечению, а также возможность получения сравнимых данных относительно сопротивления этого материала растяжению. Все это может

быть установлено на основании предыдущего обсуждения влияния головок в стальных образцах, так как восьмерки похожи по форме на две одинаковые головки образца, соединенных более узкой промежуточной частью.

Под действием захватов возникает очень значительное местное сжимающее напряжение на том небольшом участке, который находится около места соприкосновения с захватами, как показано на фиг. 7.061; дугообразные линии главных сжимающих напряжений проходят пространство между захватами, как показано на фиг. 7.062, и пересекаются под прямым углом с пронизывающими тело восьмерки линиями растяжения. Не будем останавливаться на исследовании полной системы напряжений в восьмерках этого типа, изученной Кокером в лаборатории испытания материалов в университетском колледже, а ограничимся изучением напряжений только по среднему сечению AB (фиг. 7.063 А).



Фиг. 7.062.



Фиг. 7.063.

Основной особенностью распределения напряжений в этом месте является чрезвычайная неравномерность растягивающего напряжения P и наличие также переменного напряжения Q значительной величины. В образце английского типа, например, с средним растягивающим напряжением в $35,2 \text{ кг/см}^2$, наивысшее значение P в точках у наружного контура достигает величины $61,2 \text{ кг/см}^2$, т. е. в 1,74 раза больше среднего напряжения; растягивающее напряжение падает до $28,5 \text{ кг/см}^2$ в центре сечения, т. е. немного более 80% от среднего напряжения. Кроме этого напряжения наблюдается еще напряжение Q , быстро возрастающее от нуля на контуре до $16,5 \text{ кг/см}^2$ для средней части, занимающей шесть десятых поперечного сечения; таким образом, способ приложения нагрузки и форма образца вызывают поперечное напряжение, равное 47% от среднего растягивающего напряжения.

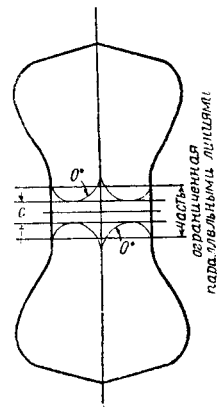
Образцы такой формы, конечно, не находятся в состоянии равномерного растяжения, на что ясно указывает появление изохроматических полос в модели. Эти результаты относятся также к американским и канадским стандартным образцам, так как формы их восьмерок одинаковы с английскими.

Стандартные образцы французского типа (фиг. 7.063В) имеют почти такое же распределение напряжений в среднем сечении, но с более выраженной неравномерностью, что зависит от их несколько иных очертаний, в особенности же от полукруглых вырезов посредине образца. В опыте, результаты которого изображены на фигуре, при среднем напряжении $33,0 \text{ кг/см}^2$ максимальное растягивающее напряжение P достигает приблизительно $70,3 \text{ кг/см}^2$, или в 2,13 раза больше средней величины; минимум напряжения, равный $21,1 \text{ кг/см}^2$, имеет место в центре сечения и составляет 64% от среднего напряжения. При других опытах отношение макси-

мального напряжения P к средней величине оказалось 2,05, 2,06 и 2,14, так что можно считать это отношение в среднем близким к 2,10. Описанная выше система нормальных напряжений P сопровождается также растягивающим напряжением Q , возрастающим до наибольшего значения вблизи краев поперечного сечения и имеющим несколько меньшую величину в центре, равную, приблизительно, 18,3 кг/см², или 55% от среднего растягивающего напряжения, и оказывается лишь немного меньше, чем растягивающее напряжение в центре сечения. Таким образом в том поперечном сечении, где предполагается разрыв образца, имеется в высшей степени сложная система напряжений, и если что-либо подобное этой системе имеет место в действительном образце, то невозможно установить что-либо определенное относительно сопротивления цемента чистому растяжению. Здесь следует заметить, что в английских технических условиях исключены теперь испытания восьмерок из чистого цемента в возрасте до одного месяца, но сохранили для образцов из раствора цемента с песком. Интересно также отметить и то, что в настоящее время на практике имеют широкое применение быстро твердеющие цементы. Французские инженеры уже долгое время придерживались того мнения, что распределение напряжений по среднему сечению далеко неравномерно, и еще Дюран Клей¹ предложил остроумное приближенное решение, основанное на некоторых элементарных положениях, при помощи которых он получил кривую распределения с ярко выраженными максимальными значениями напряжений у краев сечения.

Таково в главных чертах распределение напряжений в узкой части английских и французских стандартных образцов. Предстоит однако еще много работы прежде, чем можно будет сделать какое-нибудь практическое предложение в международном масштабе для установления единообразия при испытаниях цемента. В частности предстоит еще доказать, что распределение напряжений в действительном цементном образце подобно такому же распределению в прозрачной модели.

Опыты показывают, что распределение напряжений в цементном образце известного возраста имеет тот же характер, какой наблюдается в прозрачных моделях, чего впрочем и следовало ожидать, принимая во внимание прекрасные упругие свойства цемента в значительном возрасте. Это свойство цемента подтверждается тем фактом, что звуковые вибрации легко передаются через цементные перегородки и перекрытия; доказано также, что подобный цемент обладает прекрасными термоупругими свойствами;² но этими свойствами не обладает или, если и обладает, то в очень небольшой степени, только-что затворенный цемент; на основании этого можно заключить, что восьмерки, подвергаемые испытанию через неделю и через месяц после изготовления, как это обычно практикуется по техническим условиям, будут находиться далеко не в таком напряженном состоянии, как прозрачные модели. Они обладают большей частью неполной упругостью, и в силу этого распределение напряжений в них не отличается такой резкой неравномерностью, как в материалах, находящихся в вполне упругом состоянии; поэтому все меры, которые окажутся необходимыми для понижения этой неравномерности на основании опытов над упругими материалами, будут более чем достаточны. Чем старше образцы, тем ближе подходит распределение напряжений в них к условиям, которые имеются в прозрачной модели. Главным препятствием к равномерности распределения напряжений служит изменение поперечного сечения образцов; однако воз-



Фиг. 7.064. Английская стандартная восьмерка с удлиненной средней частью. Длина c подвергается лишь растяжению.

¹ Durand Claye, Annales des Ponts et Chaussées, t. IX, série 7, June 1895.

² E. G. Coker and C. M. McKergow, The Relation of Thermal Change to Tension and Compression Stress, Transactions, Royal Society of Canada, 1904.

можно, вероятно, придумать какой-либо простой способ устранения этого обстоятельства, без коренной переделки существующих испытательных приспособлений. Короче говоря, необходимо исследовать, какой степени единообразия в испытаниях можно достигнуть при сохранении во всех случаях существующих форм концов образцов при возможно меньшей длине средней части с параллельными сторонами, но такой, чтобы были созданы условия, при которых распределение напряжений в этой части образца будет равномерным растяжением. Таким образом, если взять английский стандартный образец, в котором длина среднего участка с параллельными сторонами равна s , как показано на фиг. 7.064, то часть образца, находящаяся в состоянии чистого растяжения, тотчас же определится нулевыми изоглинями, как указано там же. Установив экспериментальным путем длину s , уже не трудно выбрать длину участка, подвергающегося чистому растяжению любой величины, причем эта длина может составлять лишь долю дюйма. Путем дальнейших экспериментов необходимо будет найти распределение напряжений в узкой части цементных образцов различных возрастов, а также отыскать такие очертания для криволинейных частей образца, чтобы избежать концентрации напряжений. Весьма вероятно, что если удастся установить путем измерений постоянство поперечного сжатия в узком сечении под действием нагрузки для каждого вида (по возрасту) удлиненного таким образом образца, то из этого можно будет заключить о наличии равномерного растяжения в этих средних поперечных сечениях.

Это и было получено для удлиненной модели английского стандартного образца. Таким образом достаточно только изменить форму употребляемых теперь восьмерок, чтобы достигнуть не только единообразия при сравнении результатов, но также и действительного испытания цемента на растяжение, что, как видно из описанных опытов при существующих условиях, никогда еще не удавалось из-за неравномерного распределения напряжений в тонкой части восьмерки и из-за несоответствия степеней неравномерности в образцах разных видов.

Интересно отметить, что во всех формах употребляемых в настоящее время цементных образцов среднее напряжение при разрыве меньше, чем максимальное растягивающее напряжение. Мнение ряда инженеров, что возможно и желательно повышать напряжение на растяжение цемента, подтверждается этими результатами.

§ 7.07 Испытание образцов на сжатие.

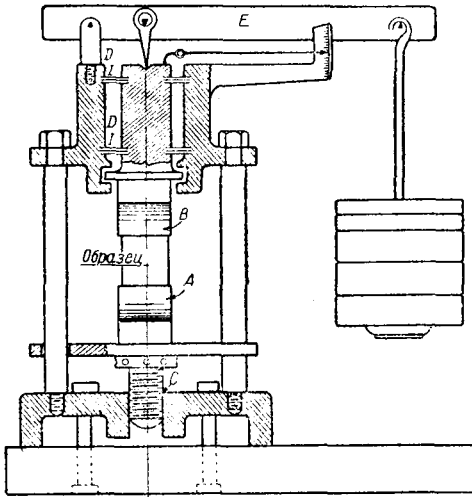
Определение распределения напряжений в прямоугольном образце, подвергающемся сжатию, представляет собою задачу, очень важную для практических целей. При испытании материалов такой случай встречается при нагрузке равными и противоположными усилиями двух параллельных и противоположащих граней короткого прямоугольного образца из какого-нибудь материала вроде камня, кирпича или бетона, причем эта нагрузка приложена так, чтобы получить в образце равномерно распределенное (насколько возможно) сжимающее напряжение.

Способ приложения нагрузки к торцовым поверхностям такого прямоугольного образца оказывает, как известно, влияние на распределение напряжений и деформаций; для достижения сравнимых результатов торцы небольших образцов шлифуются, чтобы обеспечить равномерность передачи давления. В больших образцах, шлифовка которых затруднительна для выравнивания опорной площади, применяют гипс и в дополнение иногда прокладку из листов картона, чтобы обеспечить равномерность передачи давления от подушек испытательной машины на образец. В коротких образцах распределение напряжений с трудом может быть определено опытным путем; употребление же для опытов прозрачных моделей значительно упрощает задачу, как видно из описания в § 7.09.

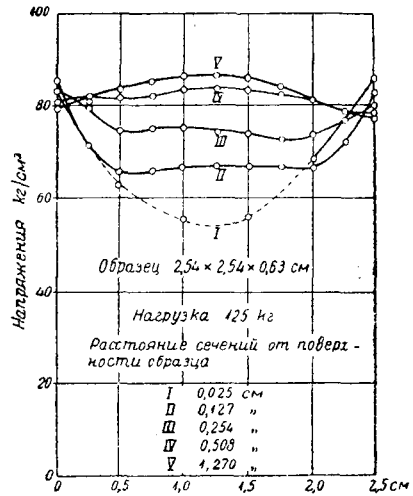
Для образцов таких размеров, которые при испытании требуют значительной нагрузки, обычно пользуются машиной, изображенной в разрезе на фиг. 7.071; для передачи сжимающих усилий на хорошо отделанные и параллельные торцы образца; здесь A и B представляют собой две отливки с правильно отделанными плоскими

и параллельными друг другу поверхностями. Одна из этих отливок *A* может быть закреплена или же может иметь небольшие перемещения по нормали к рабочей поверхности; это движение осуществляется при помощи винта *C*. Другая отливка *B* прикреплена к третьей отливке, поддерживаемой двумя упругими диафрагмами *DD*, расположенными на значительном расстоянии друг от друга; наружные концы этих диафрагм закреплены в станине машины таким образом, что движение сжимающей плиты имеет лишь одну степень свободы и ограничено упругими деформациями диафрагм. Приложенный груз измеряется при помощи системы рычагов *E*, а диафрагмы при своей упругой деформации стремятся привести при нагрузке всю систему обратно в ее первоначальное положение.

Эксперименты с короткими прямоугольными образцами, при помощи хорошо сконструированной машины, показывают, что линии главных нормальных напряже-



Фиг. 7.071.



Фиг. 7.072.

ний образуют ортогональную систему линий, имеющих направление, очень близкое к линии действия нагрузки и перпендикулярное к ней.

Для облегчения измерений оказалось удобным подвешивать поперечный экстенсометр к треножнику, поддерживаемому отливкой, скользящей по вертикальным стойкам испытательной машины.

В образце квадратного поперечного сечения, подвергающемся сжатию между латунными листами картина распределения напряжений в поляризованном свете показывает, что у торцов образца напряжения распределены далеко не равномерно даже в том случае, когда приняты все возможные предосторожности для обеспечения совершенно равномерной передачи давления. Измерения подтверждают это предположение¹ и указывают на наличие значительного влияния торцовых прокладок; сжимающие напряжения понижаются для точек, расположенных у центра торцовых поверхностей; это влияние исчезает только на некотором расстоянии от концов образца.

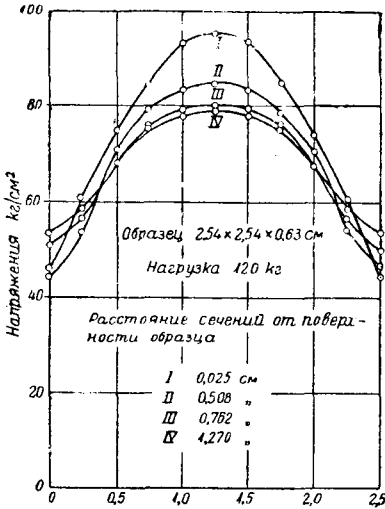
На прилагаемой здесь фиг. 7.072 указан общий характер распределения напряжений; кривые на этом чертеже указывают характер распределения вертикальных сжимающих напряжений на различных расстояниях от торцовых поверхностей.

Неравномерность распределения напряжений зависит очевидно от способа приложения давления к образцу; в данном примере латунные прокладки не допу-

¹ E. G. Coker, *Polarised Light and its Applications to Engineering*, Royal Institution, London, 1916.

скают свободного бокового перемещения материала поблизости от них и препятствуют таким образом точному измерению развивающихся здесь напряжений ($P+Q$); вследствие этого, измерения, производимые вблизи торцовых сечений, не соответствуют величине приложенной нагрузки. При передаче нагрузки на образец посредством более деформируемого материала можно ожидать появления наибольших напряжений в центре торцевых сечений, что и оказывается в действительности.

Подходящим материалом для демонстрирования такого эффекта служит тонкий слой резины, вызывающий появление касательных напряжений по торцовым поверхностям. Наибольшими оказываются теперь напряжения в центре, эти напряжения оказываются искусственно повышенными процентов на 20 или около того, при том же самом грузе под влиянием прокладок из резины, как видно из результатов измерений, приведенных на прилагаемой фиг. 7.073. Влияние этих прокладок не ограничивается участками материала у торцов, а распространяется на большую часть образца.



Фиг. 7.073.

Вредное действие свинцовой прокладки, применяемой иногда для передачи давления на образец из хрупкого материала при сжатии, подтверждается этими опытами; полученные величины дают возможность числовым образом оценить повышение величины напряжения, вследствие указанной ошибочной постановки опыта. В следующем разделе (§ 7.08) этот вопрос будет разобран с теоретической точки зрения.

Результаты опытов приводят к заключению, что для обеспечения равномерности передачи давления следовало бы прикладывать нагрузку непосредственно, а через промежуточную прокладку из того же самого материала; однако при пробных испытаниях удовлетворительные результаты получились лишь в одном частном случае. Если, например, груз передается на образец

через прокладки из того же материала, но более широкие, чем сам образец, то приложенная нагрузка распределяется, как оказывается, все же неравномерно. Наблюдаются чрезвычайно сильные местные напряжения на ребрах образца, что сопровождается подобными же явлениями и в прокладках у линии соприкосновения. Если же прокладки имеют те же размеры по площади и достаточно толсты для того, чтобы неравномерность распределения напряжений могла затухнуть внутри них самих, то тогда получается приблизительно чистое сжатие образца. Эти соображения можно иллюстрировать примером испытания квадратного образца, который имеет размеры $2,54 \times 2,54$ см в плане и 0,645 см в толщину; образец сжимается нагрузкой 117 кг, передаваемой через прокладку из того же материала, толщиной 1,016 см и таких же размеров, что и образец в плане. В прокладках замечена весьма большая неравномерность распределения напряжений у мест соприкосновения с металлическими плитами машины; сам же образец находится в состоянии чистого сжатия, на что указывает почти однородная окраска. Но такого результата можно добиться только в том случае, когда все соприкасающиеся поверхности пригнаны очень точно.

Распределение напряжений, полученное на различных расстояниях от торцовых поверхностей, показано на фиг. 7.074; как можно видеть, оно не вполне равномерно, кроме того обнаруживается небольшое растягивающее напряжение Q , как это изображено в нижней части фигуры. Измерения напряжений в этом образце у торцов дают для сжимающей силы величину, отличающуюся на 1,2% от приложенной нагрузки.

Испытания на сжатие между прокладками из того же самого материала,

вообще говоря, трудно осуществимы, в особенности если приходится доводить материал до разрушения; однако можно добиться очень большой однородности результатов подобных опытов, если прокладки имеют такое же поперечное сечение, как и образцы, и сделаны приблизительно из того же материала, только обладающего более высокой прочностью. Это получило недавно подтверждение при испытаниях на сжатие образцов дерева, между прокладками тикового дерева того же поперечного сечения; опыты производились Чаплиным в лаборатории испытания дерева в отделе научных и технических исследований.

§ 7.08. Теоретическое исследование распределения напряжений в круговом цилиндре при сжатии.

Способ, указанный в § 7.04, может быть применен также и для решения задачи о распределении напряжений в круговом цилиндре при сжатии.¹

В этом случае решение получается в виде ряда

$$\chi = \sum \{ A_1 I_0(\rho) + A_2 I_1(\rho) \} \sin kz,$$

где $k = n\pi/c$, а величина $2c =$ длине цилиндра.

К этому выражению добавим еще решение для χ в виде полиномов от (r, z) следующего вида:

$$\chi_3 + \chi_5 + \chi_7;$$

здесь χ_n полином порядка n от r, z . Такие решения в виде полиномов легко получаются посредством разложения по возрастающим степеням k выражений

$$I_0(kr) \sin kz \text{ и } r I_1(kr) \sin kz.$$

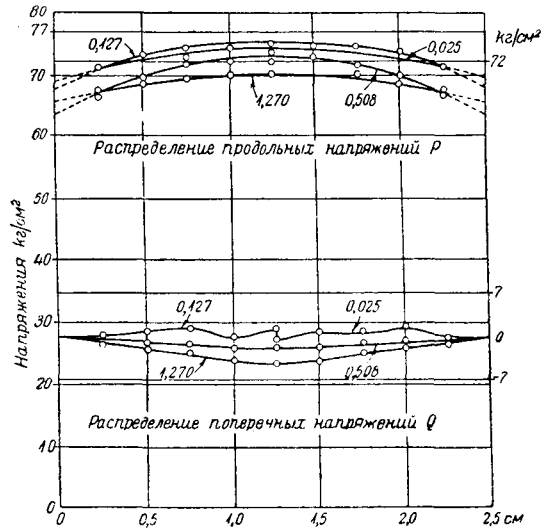
Коэффициент при каждой из степеней k дает по одному решению дифференциального уравнения для χ . Выбираем решения, четные по отношению к r и нечетные по отношению к z .

Есть возможность таким образом подобрать решение, которое удовлетворило бы следующим условиям:

- 1) торцы $z = \pm c$ остаются плоскими, так что $u_z =$ постоянной, при $z = \pm c$;
- 2) периметр торцов не растягивается, так что $u_r = 0$, при $r = a, z = \pm c$;
- 3) боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, так что $\widehat{rr} = 0, \widehat{rz} = 0$, при $r = a, -c < z < +c$;
- 4) средняя величина продольного напряжения имеет заданную величину Q ; распределение же этих напряжений по торцам неизвестно; отыскание этого напряжения и составляет одну из задач нашего исследования;

5) чтобы выбранные ряды сохранили непрерывность при $r = a$, и $z = \pm c$, необходимо, чтобы члены в выражении для касательного напряжения \widehat{rz} , зависящие от рядов и полиномов, обращались в нуль при $r = a$ и $z = \pm c$.

Числовые подсчеты для цилиндра, длина которого приблизительно равна его



Фиг. 7.074. Распределение напряжений в образце размерами $2,54 \times 2,54 \times 0,645$ см с добавочными прокладками толщиной 1,016 см. Нагрузка 117 кг.

¹ Filon, loc. cit. стр. 569.

ТАБЛИЦА 7.08.

r/a	\widehat{zz}/Q	\widehat{rr}'/Q	$\widehat{\varphi\varphi}'/Q$	\widehat{rz}/Q	
$\frac{z}{c} = 0$	0	-1,134	-0,003	-0,003	0,000
	$\frac{1}{3}$	-1,100	-0,002	+0,003	0,000
	$\frac{2}{3}$	-1,007	-0,001	+0,017	0,000
	1	-0,894	0,000	+0,033	0,000
$\frac{z}{c} = \frac{1}{6}$	0	-1,134	-0,014	-0,014	0,000
	$\frac{1}{3}$	-1,101	-0,011	-0,007	+0,007
	$\frac{2}{3}$	-1,009	-0,005	+0,010	+0,004
	1	-0,888	0,000	+0,030	0,000
$\frac{z}{c} = \frac{1}{3}$	0	-1,133	-0,051	-0,051	0,000
	$\frac{1}{3}$	-1,100	-0,042	-0,041	-0,004
	$\frac{2}{3}$	-1,013	-0,018	-0,015	-0,002
	1	-0,872	0,000	+0,020	0,000
$\frac{z}{c} = \frac{1}{2}$	0	-1,121	-0,124	-0,124	0,000
	$\frac{1}{3}$	-1,090	-0,102	-0,107	-0,020
	$\frac{2}{3}$	-1,016	-0,045	-0,065	-0,027
	1	-0,858	0,000	-0,005	0,000
$\frac{z}{c} = \frac{2}{3}$	0	-1,080	-0,253	-0,253	0,000
	$\frac{1}{3}$	-1,054	-0,205	-0,223	-0,059
	$\frac{2}{3}$	-1,006	-0,092	-0,152	-0,086
	1	-0,882	0,000	-0,063	0,000
$\frac{z}{c} = \frac{5}{6}$	0	-1,034	-0,482	-0,482	0,000
	$\frac{1}{3}$	-0,964	-0,372	-0,421	-0,148
	$\frac{2}{3}$	-0,971	-0,143	-0,286	-0,198
	1	-1,041	0,000	-0,187	0,000
$\frac{z}{c} = 1$	0	-0,686	-0,897	-0,897	0,000
	$\frac{1}{3}$	-0,750	-0,659	-0,777	-0,354
	$\frac{2}{3}$	-0,928	-0,100	-0,482	-0,442
	1	-1,686	0,000	-0,438	0,000

диаметру ($\pi a = 3c$) и для материала с коэффициентом Пуассона, равным $\frac{1}{4}$, дали результаты, приведенные в табл. 7.08.

Из этой таблицы видно, что напряжения достигают максимума в точках на периферии торцовых плоскостей, второй максимум имеет место в точках у центра образца. Можно поэтому ожидать, что трещины начнутся от периметра и будут направляться внутрь по направлению к центру. Такое явление действительно обнаруживается в цементных образцах, где остаются нетронутыми части приблизительно конической формы, прилегающие к торцам. Эти части, как говорят, „вырезаны“, хотя такое объяснение кажется сомнительным по отношению к хрупкому материалу.

Из вышеприведенного решения можно получить решение для случая, когда поперечные деформации торцов не равны нулю, а имеют любую заданную величину. Все, что требуется сделать, это наложить на полученные уже напряжения те, которые вызываются равномерно распределенным давлением P , производящим такую заданную поперечную деформацию. В таком случае имеем для среднего напряже-
величину R , равную

$$R = P + Q,$$

так что, если $\widehat{zz}_1, \widehat{rr}_1, \widehat{\varphi\varphi}_1, \widehat{rz}$, будут величины напряжений для случая нерасширяющихся торцов при $Q=1$, то действительные напряжения при поперечной деформации торцов, равной естественной деформации от давления P , выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\widehat{zz} &= -P + Q\widehat{zz}_1 = -P(1 + \widehat{zz}_1) + R\widehat{zz}_1, \\ \widehat{rr} &= Q\widehat{rr}_1 = (R - P)\widehat{rr}_1, \\ \widehat{\varphi\varphi} &= Q\widehat{\varphi\varphi}_1 = (R - P)\widehat{\varphi\varphi}_1, \\ \widehat{rz} &= Q\widehat{rz}_1 = (R - P)\widehat{rz}_1.\end{aligned}$$

Пользуясь таблицей 7.08, мы видим, что напряжение \widehat{zz} в центре и по периметру торцов представлено выражениями:

$$\begin{aligned}-P(0,314) - R(0,686) \\ + P(0,686) - R(1,686).\end{aligned}$$

Разность напряжений в центре торца:

$$\widehat{zz} - \widehat{rr} = R(0,211) - P(1,211).$$

Разности же в точках периметра

$$\begin{aligned}\widehat{zz} - \widehat{rr} &= P(0,686) - R(1,686), \\ \widehat{\varphi\varphi} - \widehat{rr} &= P(0,438) - R(0,438), \\ \widehat{zz} - \widehat{\varphi\varphi} &= P(0,248) - R(1,248).\end{aligned}$$

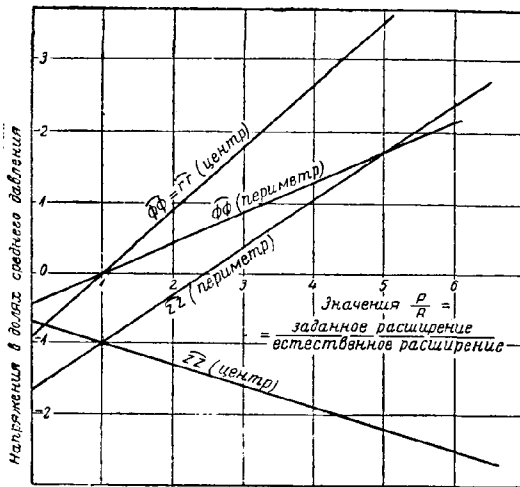
Графики изменения действительных напряжений в центре и в точках периметра торцов при изменении величины заданной поперечной деформации показаны на фиг. 7.081; графики же соответствующих разностей напряжений — на фиг. 7.082.

Как увидим дальше, пока заданная деформация будет меньше естественной, соответствующей давлению по торцам, до тех пор и наибольшее напряжение и наибольшая разность напряжений оказываются в точках периметра.

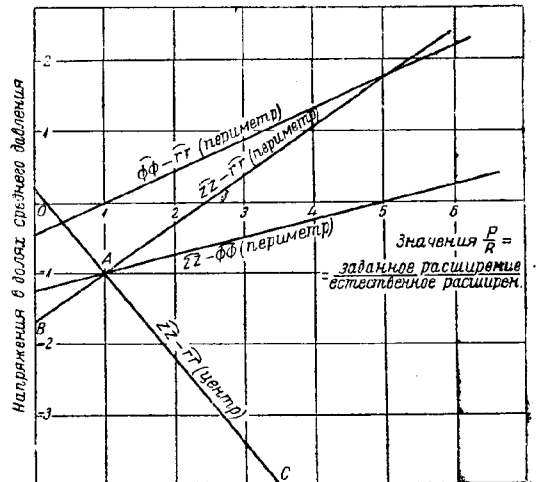
Напряжением с наибольшим алгебраическим значением (растяжение считаем положительным) будет \widehat{rr} (оно в данном случае равно нулю), так что для хрупких материалов можно ожидать, что трещины будут начинаться в плоскостях, приблизи-

тельно касательных к цилиндрической поверхности. Это и происходит, причем первым симптомом разрушения является отслаивание материала.

Если же, с другой стороны, P/R будет больше единицы, тогда поперечное растяжение торцов будет больше своего естественного значения; такое явление наблюдается в цементных образцах, раздавливаемых между свинцовыми прокладками или в целлюлоидных образцах, между прокладками из резины. В этом случае наибольшая разность напряжений $\widehat{zz} - \widehat{rr}$ будет наблюдаться в центре торцов, соответствующее же алгебраически наибольшее напряжение будет \widehat{rr} (или $\widehat{\varphi\varphi}$), так что можно ожидать появление осевых трещин, начинающихся от этих центров; такое явление подтверждалось наблюдениями.



Фиг. 7.081. Напряжения в центре и по периметру плоских концов подвергающегося сжатию цилиндра.



Фиг. 7.082. Разности напряжений в центре и по периметру плоских концов сжатого цилиндра с заданной поперечной деформацией на концах.

К сожалению, подобные вычисления не применимы для плоской задачи, а потому точное сравнение экспериментальных результатов § 7.07 с теорией не может быть проведено без новых исследований. Можно впрочем предвидеть, что характерные черты распределения напряжений будут напоминать разобранные нами два случая. Это предположение вполне подтверждается фиг. 7.072, где показано значительное увеличение напряжений у краев и понижение их в центре; фигура эта относится к случаю сжатия квадратной пластинки из целлюлоида между латунными прокладками, что практически исключает возможность естественного поперечного расширения торцов. Продольное напряжение в центре доходит приблизительно до $0,61 Q$, а у краев до $1,08 Q$; такая величина Q наблюдается на таком близком расстоянии от краев, какое дает возможность точного измерения. С другой стороны, на фиг. 7.073 показано распределение напряжений при дополнительном растяжении торцов; в этом случае наибольшее напряжение будет в центре.

Таким образом оптические измерения достаточно удовлетворительно сходятся с теоретическими вычислениями.

Следует отметить, что опасными с точки зрения разрушения являются величины разности напряжений, представленные на фиг. 7.082 линиями BA, AC. Следовательно во всех случаях, разрушение произойдет раньше, чем это следовало бы

по теории наибольших нормальных напряжений (при их равномерном распределении). Единственным исключением является случай (точка *A*), когда естественная поперечная деформация равна заданной. Во всех же других случаях прочность материалов будет меньше его действительной прочности при равномерном сжатии.

Кажающаяся прочность составляет $\frac{1}{1,686}$ действительной, если поперечная деформация торцов невозможна, и неограниченно падает в том случае, если поперечная деформация торцов будет искусственно увеличена. Поэтому нельзя удивляться, что испытания цементных образцов на сжатие дают сильно расходящиеся результаты в зависимости от способа приложения груза.

Сравнимые же результаты могут быть получены при условии, что торцы образца не могут деформироваться в поперечном направлении. Тогда достаточно помножить полученный числовой результат на соответствующий множитель, который в случае образцов, длина которых приблизительно равна их диаметру, может быть принят приблизительно равным 1,6, что даст известный запас на случай неполного отсутствия поперечных деформаций торцов образца.

§ 7.09. Центрировка образцов при сжатии.

Оптические исследования, в особенности же связанные с точным определением оптических коэффициентов напряжения для стекла, описанные в главе III, достаточно ясно указывают как на трудность, так и на важность точной центрировки груза при сжатии образцов.

В настоящее время для таких исследований сжатие обычно производится на приборе, подобном показанному схематически на фиг. 7.09.

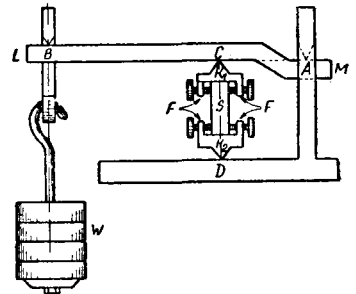
Образец *S* помещается между двумя опорными частями K_1 , K_2 показанной на фигуре формы: нижняя призма опирается на неподвижную горизонтальную металлическую плиту, в то время как верхняя призма *CD* воспринимает давление от нижней поверхности горизонтального рычага *LM*, правый конец которого опирается на неподвижную призму *A*; к левому же концу приложен груз *W*, передающийся через призму *B*.

Рычаг, как видно на фигуре, изогнут так, что острия призм *A* и *C* находятся на одном уровне. Это искривление служит для предупреждения большого горизонтального перемещения *C*: поэтому линия *CD* остается почти точно вертикальной в то время, когда рычаг при сжатии образца немного опускается.

Для уверенности в том, что напряжение, по крайней мере в средней части образца, распределяется равномерно по всему поперечному сечению, теоретически необходимо, чтобы линия давления *CD* проходила точно по оси образца. Иначе точка приложения груза в данном сечении не будет совпадать с его центром тяжести, что, как известно, влечет за собою появление изгиба с линейным распределением напряжений по всему сечению.

Как оказалось, установка образца для испытания требует чрезвычайной осторожности и сопряжена с большими затруднениями. В упоминаемых нами исследованиях образец в ненапряженном состоянии путем ряда попыток и поправок постепенно центрировался до тех пор, пока наконец при нагрузке, достаточной для получения „чувствительной окраски“ между скрещенными николями, весь образец за исключением частей, очень близких к призмам, не оказывался однородно окрашенным.

Этот способ оказался очень сложным, а успешность опыта—делом случая. Кроме этого, в тех случаях, когда удавалось увеличить нагрузку настолько, чтобы получить нейтральное потемнение второго порядка, оказывалось, что центрировка



Фиг. 7.09.

образца до известной степени нарушалась при приложении добавочного груза, причем наблюдалось значительное отклонение от равномерности распределения напряжений. Причина этого явления заключается вероятно в увеличивающемся боковым смещении опорных тел. Это смещение является источником неравномерности распределения напряжений, и хотя оно может быть учтено путем оптического метода, все же его следует избегать при производстве испытаний. Наличие этого явления кроме того объясняет, почему центрирование образца до нагрузки так редко дает удовлетворительные результаты.

Более удачный метод, применяемый лабораторией прикладной математики лондонского университета, состоит в добавлении к опорным телам небольших выступов *F*. Эти выступы снабжены винтами, концы которых касаются образца. Вращением этих винтов можно оказывать на образец настолько большое давление, чтобы сдвинуть его в сторону относительно призмы, не нагружая сам образец и одновременно наблюдая над изменением его окраски. Таким путем можно достигнуть чрезвычайно тонкой и практически совершенной центрировки, которую обычно удается сохранить и при значительных нагрузках. Боковое давление винтов может быть совершенно ослаблено, как только закончится центрировка.

Следует заметить, что такая же установка необходима и при растягиваемых образцах. Недавно, исследуя оптические коэффициенты напряжения стеклянных пластинок, растягиваемых зажимами, Сэвур¹ нашел, что такие боковые установочные винты необходимы для получения равномерности распределения напряжений; отсутствие их может быть служит источником неточностей при проведении обычных технических испытаний на растяжение.

В тех случаях, когда испытанию подвергаются такие материалы, как сталь или цемент, проверить таким способом равномерность распределения напряжений не представляется возможным. Тем большее значение следует придавать правильному центрированию, насколько это только возможно; в этой связи следует указать, что идеальная испытательная машина должна бы удовлетворять следующим условиям:

1) На обоих концах образца должны быть определенные точки, через которые проходит линия действия силы; совершенно бесполезно слишком тщательно центрировать нагрузку в верхнем захвате, если невозможно обеспечить центрировку в нижнем захвате. Если же заданы и обеспечены и точка и направление нагрузки, то центрировка необходима только на одном конце образца.

2) Машина должна быть устроена таким образом, чтобы наблюдатель мог в любой момент опыта проверить совпадение линии действия силы с осью образца.

3) Машина должна иметь приспособления для исправления всяких отклонений от правильной центрировки, если возможно, в самом процессе испытания.

Следует заметить, что если даже торцевые стороны образца и плит, сжимающих образец, будут совершенно плоскими и параллельными, то этого одного еще недостаточно для обеспечения равномерности распределения напряжений по среднему поперечному сечению образца. Кроме того, попытка заставить поверхности сжимающих образец плит сохранять (например) точно горизонтальное положение, в то время когда они естественным образом к этому не стремятся, неизбежно приводит к приложению к образцу пары сил, чем нарушается центрировка нагрузки.

С другой же стороны, вполне равномерное распределение напряжений очень легко получалось в средней части стеклянного образца прямоугольного сечения 1×3 см, длиной 4 см, даже в тех случаях, когда поверхности сжимающих плит на целый 1° отклонялись от параллельности, если только точно соблюдалась центрировка нагрузки.

Приведенные выше замечания относятся, конечно, к испытаниям материалов при простом равномерно распределенном напряжении, а не к испытаниям сложных

¹ S. R. Savur, On the Stress-optical Coefficients for Direct Tension and Pressure measured in the case of Glass, Phil. Mag. (1925), стр. 458.

конструкций, при которых желательно воспроизвести действительные условия работы конструкции. Задача центрировки становится значительно труднее в машинах, предназначенных для очень высоких нагрузок, так как в этих случаях силы по необходимости, где бы они ни были приложены, в месте приложения распределяются по некоторой поверхности, так что становится невозможным говорить о точке приложения силы.

Поятно, что приведенные выше три требования к машинам являются лишь максимальными пожеланиями и вряд ли можно рассчитывать, по практическим соображениям, что они могут быть полностью осуществлены в какой-либо из испытательных машин значительной мощности.

§ 7.10. Влияние надрезов в образцах для ударной пробы.

Применение надрезов при испытании материалов объясняется практической необходимостью установить способность материала оказывать сопротивление внезапно приложенным нагрузкам. Это привело к употреблению различного рода ударных испытаний, которые обычно производятся с таким расчетом, чтобы разрушение образца произошло от одного удара падающего груза или качающегося маятника. Эти испытания существенно отличаются от статических исследований и, вообще говоря, характеризуют материал иначе; вполне возможно, что материалы, имеющие одинаковые показатели при статической нагрузке, будут вести себя совершенно различным образом при ударных испытаниях.

Несмотря на то, что никто не сомневается в важности ударных испытаний, как дающих очень ценные показатели для определения способности материала противостоять напряжениям, существует однако значительное расхождение в мнениях относительно точной природы получаемых данных, чему едва ли можно удивляться, принимая во внимание то количество переменных, которые входят в данную задачу.

Различные машины, предназначенные для ударных проб, сильно отличаются одна от другой способом и скоростью приложения груза, а также степенью жесткости опор для образца; различна также и форма самого образца в особенности в отношении надреза, определяющего собою место излома. Эти и другие обстоятельства дают некоторое объяснение затруднениям в настоящее время в получении удовлетворительных и полных сопоставлений имеющихся результатов.

Серьезному изучению подлежит возникающее под влияние нагрузки распределение напряжений при различных стандартных типах надрезов; этот вопрос вскользь уже затрагивался¹ нами при рассмотрении надреза, сделанного в растянутой пластинке. Во всех этих опытах надрезы значительных размеров делались в очень широких пластинках из прозрачного материала; пластинки эти подвергались равномерному растяжению в испытательной машине с тем, чтобы определить распределение напряжений в точках контура надреза и в поперечном сечении, являющемся линией симметрии.

Для получения симметрии в распределении напряжений по отношению к линии действия силы на противоположной стороне пластинки делается второй надрез.

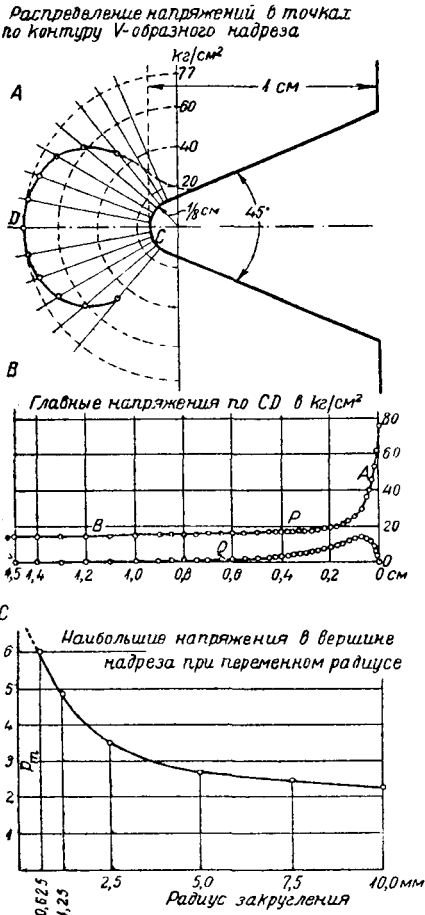
Некоторые стандартные формы надреза, применяемые при ударных пробах, имеют V-образную форму с наклоном сторон надреза под углом 45° одна к другой и с определенным радиусом кривизны в вершине угла.

На фиг. 7.101А изображен такой надрез глубиной в 1 см с радиусом в вершине $\frac{1}{8}$ см, сделанный в пластинке шириною 13 см. При нагружении образца определение напряжений в любой точке пластинки таких размеров не представляет большого затруднения; когда напряжения определены по минимальному сечению, перпендикулярному линии действия сил, то величина $\int yu dx$ по этому

¹ E. G. Coker and P. Heymans, Stress Concentrations due to Notches and like Discontinuities, B. A. Report, 1921

сечению, поскольку она должна давать груз, который отмечается испытательной машиной, указывает степень точности измерений.

Значения напряжения P и напряжения Q для этого случая показаны на прилагаемой диаграмме (фиг. 7.101 В), из которой видно, что напряжение P поднимается до максимума $77,3 \text{ кг/см}^2$, сопровождается напряжением Q , очень незначи-



Фиг. 7.101.

тельных результатах. В твердых и хрупких материалах однако величина радиуса дна надреза оказывается основным фактором, так как наблюдаемое здесь распределение напряжений не испытывает изменений в своем характере, и хотя подобный материал может оказаться достаточно прочным при статическом растяжении, он все же будет иметь низкую ударную величину вследствие высокой концентрации напряжений.

Ударные испытания, служащие как средство распознавания качества материала, могут оказаться иногда слишком строгими и ведущими к браковке хорошего материала, так как изменение радиуса кривизны надреза оказывает большее или меньшее влияние в зависимости от пластичности материала. При оценке качества очень твердых материалов на основании ударных проб имеет смысл учитывать этот фактор.

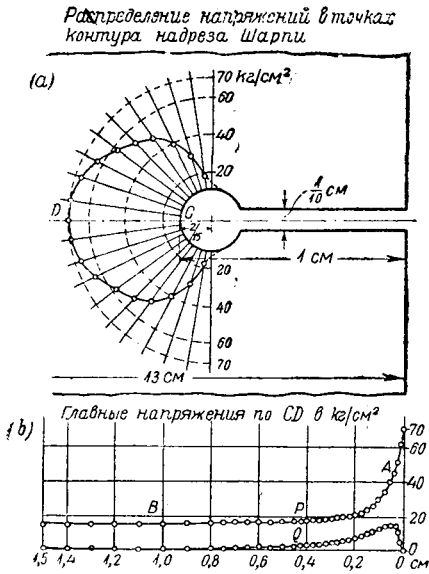
Значение радиуса кривизны надреза особенно существенно в тех случаях, когда сравниваются результаты испытаний, производившихся при различных усло-

тельными повсюду, за исключением краев, где оно достигает максимальной величины около $14,1 \text{ кг/см}^2$ на расстояние от $0,3 \text{ см}$ до $0,4 \text{ см}$ от края надреза. Определяемое по показаниям испытательной машины среднее напряжение равняется $16,2 \text{ кг/см}^2$, в то время как интегрирование кривой распределения напряжения дает для этой величины значение $16,9 \text{ кг/см}^2$, или примерно на $4,8\%$ больше. Концентрация напряжения у надреза оказывается таким образом в $4,78$ раза больше среднего напряжения по поперечному сечению; до углового расстояния приблизительно в 30% по обе стороны от надреза напряжение в точках контура не опускается ниже $4,40$ этого среднего напряжения; дальше же вдоль контура выемки напряжение быстро падает до нуля.

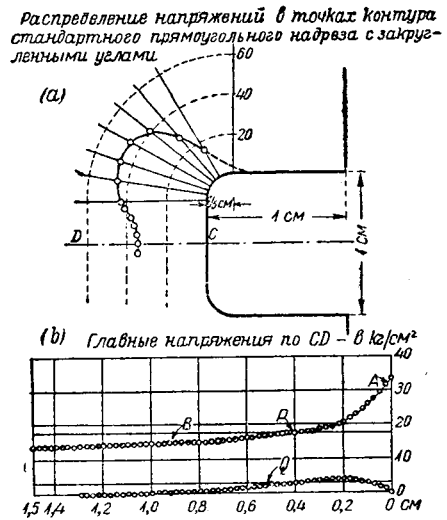
Если же радиус надреза уменьшить до $1/16 \text{ см}$, то максимум напряжения возрастает приблизительно до 6-кратной величины среднего напряжения, как показано на фиг. 7.101 С, тогда как при очень большом радиусе, например 10 мм , максимум напряжения будет приблизительно в $2,2$ раза больше среднего.

Из этих опытов, так же как и из других, описанных ниже, видно, что ударные испытания образца с надрезами служат прекрасным средством для выявления разницы между вязким и хрупким материалами, так как, каков бы ни был радиус кривизны в вершине надреза в вязком материале, он (надрез) в начале опыта определяет место, где должно начаться разрушение; но как только начинаются пластические деформации, влияние его на концентрацию напряжений в этом месте уменьшается, хотя быть может форма надреза все же сказывается на окон-

виях, в отношении формы надреза; например, в одном случае надреза типа Шарпи при сохранении прежних (описанных выше) условий опыта вырез был взят глубиной 1 см и закруглен в вершине по дуге радиусом $\frac{2}{15}$ см (фиг. 7.102a). Проверяя точность опыта путем сравнения величины среднего напряжения, равного $19,8 \text{ кг/см}^2$, по показаниям испытательной машины, с средним напряжением, полученным интегрированием кривой напряжений АВ (фиг. 7.102b), получаем для последнего величину $20,3 \text{ кг/см}^2$, или на $2,48\%$ больше действительного; максимум напряжения равен $70,3 \text{ кг/см}^2$ в точке на контуре надреза; таким образом коэффициент концентрации напряжений равен 3,54, т. е. он значительно меньше коэффициента, полученного при стандартном, описанном выше надрезе формы, применяемой в машинах типа Izod.



Фиг. 7.102.



Фиг. 7.103.

Разница в концентрации напряжений бывает еще более заметной, когда надрез глубиной в 1 см имеет прямоугольное очертание (фиг. 7.103a) с углами, закругленными по дуге с радиусом 0,2 см. В этом случае среднее напряжение $16,2 \text{ кг/см}^2$, вычисленное по показанию испытательной машины, очень хорошо совпадает с средней величиной в $16,1 \text{ кг/см}^2$, полученной по кривой АВ распределения напряжений по главному поперечному сечению (фиг. 7.103b); максимум напряжения получается в тех точках контура, где касательная слегка наклонена к линии действия растягивающей силы. Величина его равна 45 кг/см^2 и соответствует небольшому коэффициенту концентрации напряжений, равному 2,78.

Полученные результаты показывают, что не только форма надреза отражается на результатах ударной пробы, но что надрез любого типа может оказать различное влияние в зависимости от испытываемого материала.

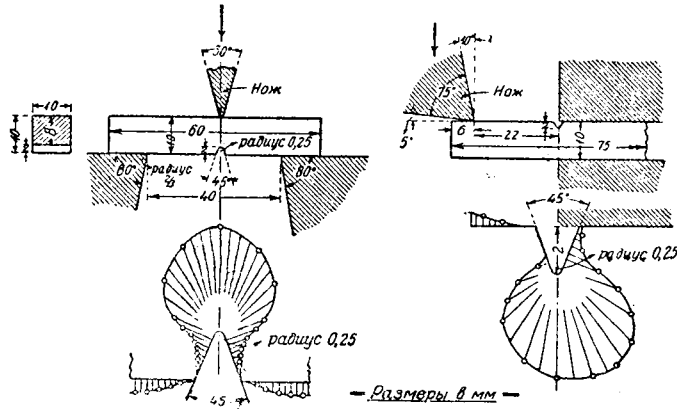
Английская техническая ассоциация стандартов выработала четыре стандартных типа образцов для ударных проб, два из которых изображены на фиг. 7.104. Первый тип образца представляет собою балку квадратного поперечного сечения с надрезом на одной стороне, расположенную на опорах со свободным пролетом 40 мм. Клинообразный нож маятника ударяет в середине пролета образца.

Второй тип образца представляет собою консольную балку с таким же поперечным сечением и с такого же вида надрезом. По этой балке ударяет маятник с ножом, имеющим другой вид и с углом в 75° при вершине.

Два остальных типа образцов являются второстепенными; их размеры вдвое меньше, чем у основных типов, за исключением толщины, которая остается 10-миллиметровой; надрезы имеют те же размеры и форму, как у основных типов образцов.

Все эти формы образцов изучались при помощи оптического метода Кокером и Мильднером; было получено распределение напряжений у надрезов; для двух основных типов образцов это распределение изображено на фиг. 7.104. Главный интерес представляет различие характера распределения напряжений и несимметричность их у надреза в образце консольного типа.

Обнаружено также, что давление зажима, в который зажат образец консольного типа, вызывает своеобразное распределение напряжений около надреза, меняющееся в зависимости от величины нажатия зажима.



Фиг. 7.104.

В двух второстепенных типах образцов надрезы относительно вдвое больше надрезов в основных типах, распределение напряжений опять-таки различно для каждого из этих двух типов и отличается от распределения напряжений, полученного для обоих основных типов; таким образом все четыре образца дают различные типы распределения напряжений.

Распределение напряжений по среднему поперечному сечению, проходящему через надрез, также различно для каждого типа образца, а иногда имеет довольно сложный характер.

Результаты ударных испытаний могут быть сравнимы поэтому только в том случае, когда при всех испытаниях применялись образцы одного и того же вида.

Все это показывает, что испытания на удар образцов с надрезами не только очень сложны, но требуют еще дальнейшего изучения. Упрощение их было бы очень желательно.

Стоило бы, например, изучить возможности постановки испытаний на разрыв ударом образцов, имеющих форму пластинки с большим отверстием в ее середине, так как при этом виде ослабления сечения имеется, как было указано раньше, приблизительно линейное распределение напряжений (§ 6.02) по минимальному сечению с максимумом напряжений в точках у внутреннего контура и с минимумом, почти равным нулю, у внешнего. В твердых материалах, где упругое распределение напряжений остается почти неизменным вплоть до разрушения, максимум напряжений в таком образце очень близко подходит к удвоенному среднему напряжению, в то время как в пластичных материалах, как показывают наблюдения в поляризованном свете, распределение напряжений становится почти равномерным в момент разрушения.

§ 7.11. Испытания на сдвиг.

Обычный метод, применяемый в лабораториях при испытаниях металлов на сдвиг, заключается в том, что каждый конец короткой балки прямоугольного поперечного сечения закрепляется между двумя параллельными стальными пластин-

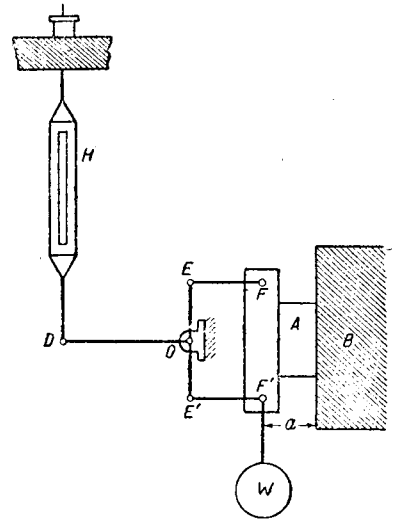
ками, расположенными с некоторым промежутком; на свободный пролет образца давит третья прямоугольная пластинка, которая в точности заполняет весь промежуток между парами опорных пластинок. Сечения образца, примыкающие к закрепленным концам, подвергаются тогда срезающим усилиям, это срезывание сопровождается, обычно, изгибом, благодаря небольшим зазорам между средней и опорными пластинками, а также благодаря чрезвычайной трудности достаточно прочного закрепления концов образца, так, чтобы они могли оказать сопротивление выворачивающему действию разрушающей нагрузки. В другом типе прибора образец представляет собой стержень с круглым поперечным сечением, пропущенный сквозь раздвоенные концы захвата, нагрузка же передается на образец при помощи захвата, конец которого пропущен в середине между раздвоенными концами первого захвата. Для того чтобы разрушение произошло по наметченному поперечному сечению, принято протачивать образец или же уменьшать размеры его прямоугольного поперечного сечения в тех местах, которые предназначены для разрушения. Эти изменения сечения усложняют испытание, и образцы разрушаются обычно при довольно сложном распределении напряжений.

Довольно большое значение имеет влияние высоты образца при действии касательных напряжений. Это влияние изучалось Файлоном,¹ который показал, что общепринятое мнение, согласно которому касательные напряжения по сечениям, не совпадающим с местом непосредственного приложения нагрузки, распределяются по параболическому закону, может быть правильным только по отношению к очень низким образцам, что имеет существенное значение для многих практических случаев.

Разбор этих случаев полностью приведен в § 5.21, а фиг. 5.212 дает распределение напряжений по среднему сечению между двумя равными и противоположными силами, расположенными не на одной и той же прямой. Числовые величины напряжений даны в таблице 5.21, к которой и следует обратиться.

Предварительное оптическое исследование этого случая Кокером производилось путем нагрузки нитроцеллюлозной пластинки *A* грузом *W* (фиг. 7.111); пластинка *A* закреплялась в зажиме *B*, причем изгибающий момент полностью нейтрализовался силами, приложенными к образцу через шарнирный механизм, как показано на фиг. 7.111; таким образом пластинка *A* подвергается почти чистому сдвигу. Обнаружилось, что распределение касательных напряжений по среднему вертикальному сечению этой пластинки имело максимум у верхней и нижней граней в тех случаях, когда высота пластинки была значительно больше ширины; когда же высота достаточно уменьшалась, эти оба максимума в конце концов сливались в центре пластинки; однако во всех случаях величина напряжений в углах была наибольшей. Внешний вид образца для данного случая в белом свете, поляризованном по кругу, дан на фиг. 7.112, где на пластинке $5,08 \text{ см} \times 3,81 \text{ см}$ ясно видны два максимума.

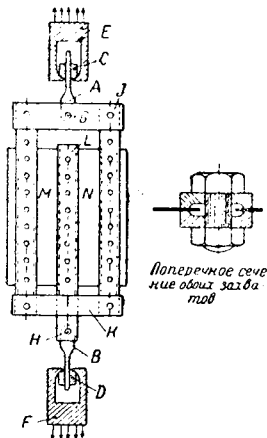
В случае, когда высота пластинки уменьшена вдвое, а перерезывающая сила, приложенная к ней, остается той же самой, максимумы напряжения сливаются в центре. Концентрация напряжений по углам хорошо видна на приводимых иллю-



Фиг. 7.111.

¹ L. N. G. Filon, On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, Phil. Trans. 201, стр. 117—29.

страциях; при более близком рассмотрении их мы видим в углах цветные полосы высших порядков, расположенные очень близко одна от другой и указывающие на высокую концентрацию напряжений. Этот примитивный прибор, хотя и дает в общих чертах представление о распределении напряжений, оказывается не совсем подходящим для точных измерений в более широких границах нагрузок; для этой цели была сконструирована испытательная машина стандартного типа Бактона с максимальной силой до 2721,6 кг. Для получения касательных напряжений в машине устроена стальная рама, передающая пластинке из прозрачного материала симметрично расположенные срезающие силы. Устройство этого прибора показано на фиг. 7.113, где A, B — болты с ушком на одном конце и гайками C, D на другом, опирающимися через сферические поверхности на захваты E, F испытательной машины. Когда эти захваты под действием машины раздвигаются, то линия действия растягивающей силы проходит через центры болтов G, H , к которым прикреплена указанная выше рама.



Фиг. 7.113.

Рама состоит из трех пар вертикальных полированных стальных стержней прямоугольного поперечного сечения $5,08 \times 1,43$ см; крайние пары присоединяются болтами сверху к паре поперечных стержней J прямоугольного сечения $7,62 \times 1,59$ см, а снизу к такой же, но более легкой паре полос K .

Каждый из обхватывающих образец стержней слегка вырезывается на большей части своей ширины, причем с каждой стороны остаются нетронутыми только узкие полоски; так что, когда испытываемая пластинка ставится на место и болты вставляются в соответствующие отверстия, то стержни зажимают пластинку с каждой стороны вдоль всей ее длины. Размеры зажимающих поверхностей показаны на фиг. 7.113 пунктиром и изображены в поперечном разрезе. Средняя пара стержней L сконструирована таким

образом, и при приложении растягивающей силы с помощью испытательной машины, части M, N образца оказываются в состоянии почти чистого сдвига. Максимальная высота пластинки, которая может войти в аппарат, не должна превышать 35,6 см, горизонтальные же поперечные стержни допускают свободную ширину пластинки 1,27 см, 2,54 см, 5,08 см.

Для описанных выше предварительных опытов пользовались никелевыми призмами, для последующих же оказалось более удобным освещать все поле напряженной пластинки поляризованным светом, отраженным от зеркала из черного стекла; когда же требовалась круговая поляризация света, то пользовались слюдяными пластинками в четверть волны, с размерами $30,5 \times 30,5$ см, приготовленными специально для этой цели проф. Томсоном (см. § 1.39).

Напряженный образец исследовался при помощи небольшой призмы Николя, играющей роль анализатора, которая давала возможность, правда на близком расстоянии, подробно исследовать любую точку образца, вся же пластинка в целом могла быть рассмотрена только с более далекого расстояния. Весь измерительный прибор устанавливался на подъемном столике, так что его легко можно было установить против любой точки образца, напряжения в которой исследовались.

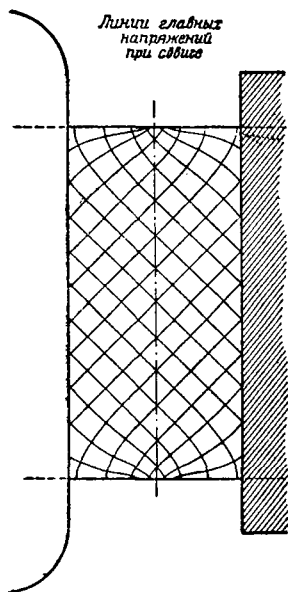
В данных опытах применялся компенсационный метод, описанный в § 3.30.

Если P, Q будут главными нормальными напряжениями, направления которых составляют угол φ с осями координат, то при помощи формулы § 2.10 получаем:

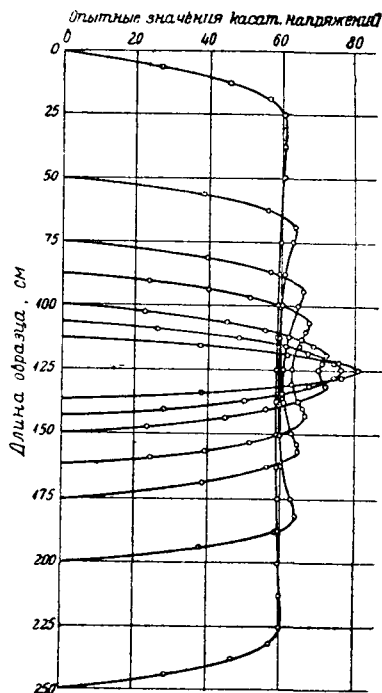
$$\begin{aligned} \overline{xx} &= P \cos^2 \varphi + Q \sin^2 \varphi, \\ \overline{yy} &= P \sin^2 \varphi + Q \cos^2 \varphi, \\ \overline{xy} &= (P - Q) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Соответственно этому для направления $\varphi = 45^\circ$ мы имеем касательное напряжение $S = (P - Q)/2$, наложенное на всестороннее равномерно распределенное напряжение $(P + Q)/2$.

Если, следовательно, компенсатор поставлен в направлении алгебраически меньшего главного напряжения и подвергается растяжению T , то при $P + Q = 0$, что в данном случае приблизительно имеет место, и при $T = Q - P$ получим оптическое компенсирование, если пренебрежем изменением толщины компенсатора, так как изменение толщины образца обращается в нуль одновременно с $P + Q$.



Фиг. 7.114.



Фиг. 7.115.

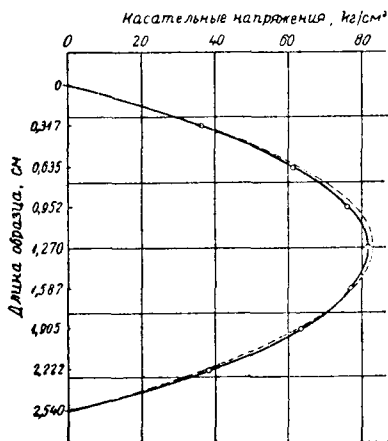
Если t толщина компенсатора, изготовленного из той же пластинки, как и образец, то уменьшение толщины компенсатора равно $\frac{\eta t T}{E}$.

При значении $P + Q$, не равном нулю, уменьшение толщины образца равно $\frac{\eta t (P + Q)}{E}$. Эта величина при почти чистом сдвиге бывает обычно незначительной по сравнению с первой.

Опыты показывают, что величина модуля Юнга для этого материала приблизительно равна 21090 кг/см^2 , и что $\eta = 0,39$. Изменение толщины на каждые $70,3 \text{ кг/см}^2$ напряжения будет следовательно — $0,0013$. В большинстве опытов величины напряжения редко превышали $140,6 \text{ кг/см}^2$, и полная поправка для компенсатора и образца настолько незначительна, что не выходит за пределы допустимых при определениях ошибок. Исследование напряженной пластинки показывает, что главные нормальные напряжения повсюду наклонены под углом в 45° к линии действия силы, за исключением граней образца, где их направление довольно резко меняется. Результаты наблюдений над этими отклонениями у одного конца образца длиной $10,16 \text{ см}$ и шириной $2,54 \text{ см}$ изображены графически на фиг. 7.114, из которой видно, что для точек на оси образца все эти изменения распространяются на протяжении $0,318 \text{ см}$ от торца образца. Поэтому в том случае, когда

измерения ведутся в точках на оси образца, растягиваемый эталон (компенсатор) должен устанавливаться под углом в 45° к направлению растяжения для всех точек за исключением тех, которые очень близки к концам образца. Ширина пластинки влияет на распределение напряжений у свободных концов, и это влияние на расположение линий главных нормальных напряжений оказывается почти пропорциональным ширине.

Целый ряд определений касательных напряжений ¹ в пластинках длиной до 25,4 см при переменной ширине от 1,27 см до 5,08 см дал очень близкие между собою результаты (фиг. 7.115); не считая небольших и несущественных изменений, распределение касательных напряжений в точках средней линии подобных пластинок, работающих на перерезывание, может быть иллюстрировано результатами измерений для одной из пластинок шириной 2,54 см и длиной, постепенно уменьшающейся, начиная от 25,4 см до 2,54 см.



Фиг. 7.116.

Для всех этих случаев приложенная нагрузка соответствовала среднему касательному напряжению $56,1 \text{ кг/см}^2$, действительное же распределение касательных напряжений, наблюдавшееся в точках по оси, изображено на фиг. 7.115.

Измерения доказали, что за исключением случая короткой длины напряжения достигали максимума на расстоянии около 1,91 см от свободных концов пластинки и падали до минимальной величины в центре. Уменьшение высоты пластинки сказывается на увеличении максимальных величин напряжений в центре, так что в концевых частях напряжения достигают при малых длинах максимальной величины в центре. Распределение напряжений меняет таким образом свой характер почти, но не полностью, уже при 5,08 см длины.

и полностью при длине 3,81 см; при меньших соотношениях между длиной и шириной напряжения распределяются примерно по параболе.

Общая точность измерений хорошо определяется сравнением приложенного среднего касательного напряжения с средней величиной этих напряжений, полученной экспериментально в точках по оси образца, как показано в таблице 7.11; из нее видно, что ошибка не превышает 2% , но обычно меньше.

Таблица 7.11

Длина образца в см	Среднее приложенное касательное напряжение на кг/см^2	Среднее измеренное касательное напряжение на кг/см^2	Отношение
25,40	56,1	55,5	0,99
15,24	56,1	56,3	1,00
10,16	56,1	55,5	0,99
7,62	56,1	55,5	0,99
5,08	56,1	55,2	0,98
3,81	56,1	55,3	0,98
2,54	56,1	55,5	0,99

¹ E. G. Coker, An optical determination of the variation of stress in a thin rectangular plate subjected to shear, Proc. R. S. A., 86, 1912.

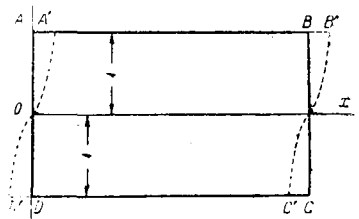
Другими опытами доказано, что напряжения достигают максимума на расстоянии, меньшем, чем ширина пластинки, и что приблизительно параболическое распределение напряжений возникает в тех случаях, когда отношение длины к ширине бывает меньше, чем 2, и больше, чем 1,5.

Точно параболическое распределение напряжений, как оказывается, наступает при уменьшении отношения высоты к ширине до единицы, если при этом пластинка остается плоской и не выпучивается. На фиг. 7.116 изображено приближающееся к этой форме распределение напряжений в подобной пластинке: пунктиром изображена настоящая парабола, причем ясно видно почти полное совпадение обеих кривых.

§ 7.12. Напряжения в материале, подвергающемся сдвигу между двумя параллельными плоскостями.

Подобные случаи, исследованные экспериментально, были затем изучены теоретически проф. Инглисом.¹ Он рассматривал их как плоскую задачу (плоское напряженное состояние), предполагая при этом, что срезаемая пластинка имеет малую толщину. Полученные им результаты применимы также и к довольно толстым пластинкам, при условии введения в расчет средних напряжений и перемещений.

Он рассматривал два случая: 1) когда грани AB и CD пластинки $ABCD$ (фиг. 7.121) жестко закреплены, в то время как другие две грани AD и BC находятся под действием равномерно распределенного касательного напряжения, и 2) когда пластинка $ABCD$ находится под действием касательных напряжений, равномерно распределенных по всем четырем граням.



Фиг. 7.121.

При наложении этих двух случаев грани AD и BC могут быть освобождены от касательных напряжений и мы получаем условия, близкие к эксперименту.

Рассмотрим функцию

$$\chi_A = - \frac{A}{n} x e^{-nx} \sin ny,$$

удовлетворяющую уравнению $\nabla^4 \chi_A = 0$ и дающую следующую систему средних напряжений:

$$\begin{aligned} \overline{xx} &= Anx e^{-nx} \sin ny, \\ \overline{yy} &= A(2 - nx) e^{-nx} \sin ny, \\ \overline{xy} &= (1 - nx) e^{-nx} \cos ny. \end{aligned}$$

Средние перемещения U и V получаются по способу § 2.25 и имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} U &= - \frac{1 + \eta}{E} \cdot A \left\{ \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \cdot \frac{1}{n} + x \right\} e^{-nx} \sin ny, \\ V &= \frac{1 + \eta}{E} \cdot A \left\{ x - \frac{2}{1 + \eta} \cdot \frac{1}{n} \right\} e^{-nx} \cos ny. \end{aligned}$$

¹ C. E. Inglis, Stress Distribution in a Rectangular Plate having two opposing Edges Sheared in Opposite Directions, Proc. R. S., Series A, 103.

Если мы приложим подобную систему напряжений (которую назовем системой „А“) к прямоугольной пластинке $ABCD$ (фиг. 7.121), приняв начало координат O в середине стороны AD , имеющей длину, равную двум единицам, и направив ось Ox параллельно сторонам AB и CD , длиной каждая по четыре единицы, то в точках стороны AD , т. е. при $x = 0$, напряжения выразятся формулами

$$\widehat{xx} = 0, \quad \widehat{xy} = A \cos ny \quad \text{и} \quad \widehat{yy} = 2A \sin ny.$$

Если, следовательно, необходимо приложить равномерно распределенное касательное напряжение, равное единице, к стороне AD , то получить это можно, складывая ряд составляющих вида $\widehat{xy} = A \cos ny$. Равномерное распределение касательных напряжений, равных единице, можно получить для грани AD , положив $n = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ и т. д., и придавая соответствующим постоянным значения:

$$\frac{4}{\pi}, \quad -\frac{4}{3\pi}, \quad \frac{4}{5\pi} \quad \text{и т. д.}$$

Десять гармонических составляющих дают довольно близкое приближение к равномерному распределению касательных напряжений по этим граням, а благодаря множителю e^{-nx} напряжения очевидно должны быстро падать по мере увеличения x .

Перемещения V по граням $y = \pm 1$ оказываются всюду равными нулю, так как $\cos ny$ будет нуль для всех значений n , следовательно по отношению к этой составляющей перемещений на гранях AB и CD пластинки условия закрепления могут считаться выполненными, чего нельзя сказать по отношению к составляющей перемещений U , которую удобно выразить, как увидим дальше, в виде ряда Фурье:

$$U_A = c_0 + c_1 \cos \frac{\pi x}{4} + c_2 \cos \frac{2\pi x}{4} + c_3 \cos \frac{3\pi x}{4} \quad \text{и т. д.}$$

по контуру между $x = 0$ и $x = 4$, где коэффициенты, как оказывается, очень быстро убывают по своей величине. Система напряжений, полученная таким образом, не удовлетворяет поставленным условиям; для уничтожения перемещений системы U_A необходимо наложить вторую систему напряжений „В“, которая дает возможность удовлетворить и этим условиям с большой степенью точности и соответствует функции напряжений

$$\chi_B = -\frac{B}{n^2} \sin nx \left[\left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \operatorname{ch} n - n \operatorname{sh} n \right) \operatorname{sh} ny + ny \operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} ny \right];$$

отсюда получается система напряжений:

$$\widetilde{xx} = B \sin nx \left[\left(n \operatorname{sh} n - \frac{3+\eta}{1+\eta} \operatorname{ch} n \right) \operatorname{sh} ny - ny \cdot \operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} ny \right],$$

$$\widetilde{yy} = B \sin nx \left[\left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \operatorname{ch} n - n \operatorname{sh} n \right) \operatorname{sh} ny + ny \operatorname{ch} n \operatorname{ch} ny \right],$$

$$\widetilde{xy} = B \cos nx \left[\left(\frac{2}{1+\eta} \operatorname{ch} n - n \operatorname{sh} n \right) \operatorname{ch} ny + ny \operatorname{ch} n \operatorname{sh} ny \right]$$

и средние перемещения

$$U = \frac{1 + \eta}{E} B \cos nx \left[\left(\frac{3 - \eta}{1 + \eta} \frac{\operatorname{ch} n}{n} - \operatorname{sh} n \right) \operatorname{sh} ny + y \operatorname{ch} n \operatorname{ch} ny \right],$$

$$V = \frac{1 + \eta}{E} B \sin nx \left[y \operatorname{ch} n \operatorname{sh} ny - \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{ch} ny \right].$$

Для этого последнего случая $\bar{x} = 0$ в точках контуров AD и BC рассматриваемой пластинки, при $n = \frac{1}{4}k\pi$, где k целое число; в то время как вдоль граней AB и CD , где $y = \pm 1$, V равно нулю, а U_B имеет вид

$$U_B = \zeta \cos \frac{p\pi}{4} x,$$

и таким образом может быть использовано для уничтожения перемещений U_A , которые выражены в подобной же форме тригонометрического ряда в решении (А). Оказывается, что одиннадцать гармонических слагаемых дают почти полную нейтрализацию во всех точках пластинки, за исключением углов A и D (фиг. 7.121); эти оставшиеся перемещения не имеют значения, так как они слишком малы для того, чтобы оказывать влияние на распределение напряжений в точках вдоль оси пластинки. При наложении второй системы напряжений на первую оказываются закрепленными верхние и нижние грани пластинки при сохранении условия $\bar{x} = 0$ на контурах AD и BC . Эта система вызывает незначительные касательные напряжения по грани BC , чего однако нельзя сказать относительно грани AD , где получается далеко не ничтожное касательное напряжение $\bar{x}y$; это напряжение может быть разложено 1) на равномерно распределенное и 2) синусоидально распределенное; последнее из них может быть достаточно точно представлено для точек грани AD формулой

$$\bar{x}y = -\frac{2}{3\pi} \cos \frac{\pi y}{2}.$$

Если для нейтрализации этого неравномерно распределенного вдоль грани AD напряжения будет наложена система напряжений первого типа, а именно

$$\bar{x}y = \frac{2}{3\pi} \cos \frac{\pi y}{2}$$

в точках грани $x = 0$, то это вызовет в свою очередь неравномерное распределение перемещений типа U_A вдоль верхней и нижней граней; это поведет к необходимости наложения новой системы второго типа, что в свою очередь вызовет появление по грани AD новых касательных напряжений; однако они оказываются настолько малыми и равномерно распределенными, что дальнейший процесс последовательных приближений можно прекратить.

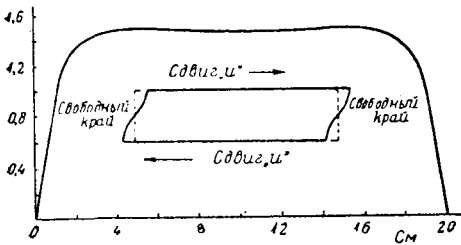
В результате такого наложения систем напряжений получается равномерное распределение касательных напряжений по грани AD со средним значением около 1,43; контуры $y = \pm 1$ оказываются закрепленными, и единственным неизвестным элементом являются напряжения в точках в углах пластинки. Благодаря влиянию полного закрепления верхней и нижней граней приложенные касательные напряжения распространяются внутрь пластинки только лишь на сравнительно небольшое расстояние.

Это влияние, заставляя касательное напряжение в точках оси пластинки постепенно затухать, не сразу „попадает в цель“, и этот „промах“, обнаруженный

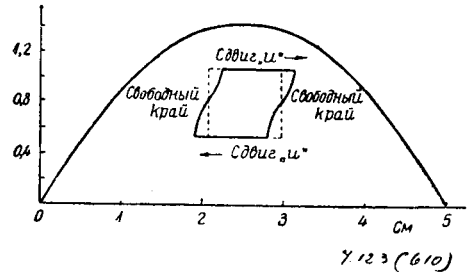
при подсчетах проф. Инглисом, является причиной волнообразного распределения напряжений вдоль оси, обнаруженного при оптическом исследовании.¹

Вычисления показали также, что для пластинки данной ширины точка с наибольшими касательными напряжениями будет находиться на расстоянии 1,5 единиц от напряженной грани независимо от длины пластинки, если эта длина достаточно велика. Распределение нормальных напряжений по верхней и нижней граням, т. е. при $y = \pm 1$, как оказывается, также быстро затухает по мере удаления от концов и обращается практически в нуль при $x = 2$; оно быстро возрастает по мере приближения к концам и достигает там значения, вчетверо большего той величины равномерно распределенного касательного напряжения, которое приложено к грани AD ; значение этого нормального напряжения вычисляется не вполне точно. Однако ошибка вероятно невелика, что подтверждается видимому и оптическими исследованиями, которые показали также, что если такого типа распределение напряжений будет расти по величине вплоть до разрушения пластинки, то разрушение начнется с угла, как и указывают наблюдаемые оптические явления.

Полученные до сих пор результаты не могли быть сопоставлены с экспериментальными кривыми, определенными оптическим методом; однако это сравнение



Фиг. 7.122. Распределение касательных напряжений в 20×5 см пластинке. Боковые края пластинки свободны, а нижний и верхний сдвигаются в противоположных направлениях.



Фиг. 7.123. Касательные напряжения в точках оси квадратной пластинки. Боковые края свободны, а верхний и нижний движутся в противоположных направлениях.

может быть произведено путем приложения к грани BC касательного напряжения того же вида, как и по грани AD , и наложения равномерно распределенного касательного напряжения величиною 1,43 по всем четырем граням пластинки. Благодаря этому вертикальные стороны пластинки (фиг. 7.121) остаются свободными от касательных напряжений за исключением участков, примыкающих к углам, а горизонтальные грани несколько сдвигаются в продольном направлении. Такой случай показан на фиг. 7.122, где теоретические результаты дают такое распределение касательных напряжений в пластинке $20,3 \times 5,1$ см, какое получено было ранее экспериментальным путем. В более точно исследованном случае квадратной пластинки с такой длиной между свободными гранями, что приложенные к ним касательные напряжения не успевают затухнуть, доходя до противоположной грани, теория довольно точно дает параболический закон распределения напряжений (фиг. 7.123), подтверждая этим точность оптических измерений.

Распределение касательных напряжений с максимумами у концов также было обнаружено при оптических исследованиях, поставленных подобно обычным опытам на перерезывание, когда образец достаточно высок по сравнению с его толщиной.

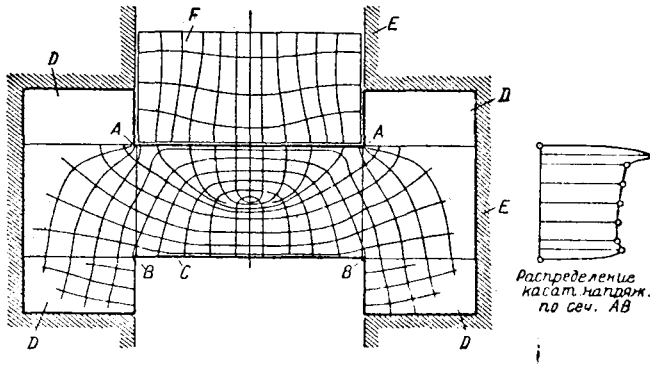
¹ Автор хотел указать, что при заданных условиях закрепления длинных сторон пластинки касательные напряжения, приложенные по грани AD , вызывают лишь местный эффект; при удалении от этой грани напряжения быстро затухают, но не равномерно, а волнообразно. (Прим. ред.)

Один из таких случаев исследован проф. Фукуда и результаты изображены на фиг. 7.124; прозрачный образец C прямоугольного поперечного сечения с размерами $1,91 \times 0,25$ см закреплен с помощью вкладышей D из того же самого материала в жесткой раме E таким образом, чтобы осуществить обычные при практических испытаниях условия закрепления, при которых закрепленные концы остаются в неизменном горизонтальном положении в течение всего опыта, что однако редко удается вполне. Нагрузка передается через балку F , к верхней грани которой приложена система равномерно распределенных сил; как видно, балка F несколько уже пролета образца, а непосредственно над сечениями AB не приложено никакой нагрузки. Изображенные здесь линии главных нормальных напряжений указывают, что напряжения по сечениям AB не являются чисто касательными, так как эти линии никогда не пересекают указанные сечения под углом 45° .

В результате определения напряжений в различных точках этих сечений получены кривые распределения касательных напряжений с неравными между собою максимумами у концов сечения; верхний максимум, как показано на фигуре, оказывается гораздо более значительным. Эти результаты вероятно близки к тем, которые получаются в подобных же случаях для металлических образцов.

§ 7.13. Распределение напряжений в шиповых соединениях.

На лабораториях по испытанию материалов, принадлежащих заводам, лежит ответственная задача, состоящая в исследовании распределения напряжений



Фиг. 7.124. Линии главных напряжений в образце на перерезывание.

в стыках и закреплениях довольно сложной формы и в определении их прочности; эти соединения постоянно применяются в конструкциях, по множеству практических причин, и чрезвычайно трудно поддаются расчету.

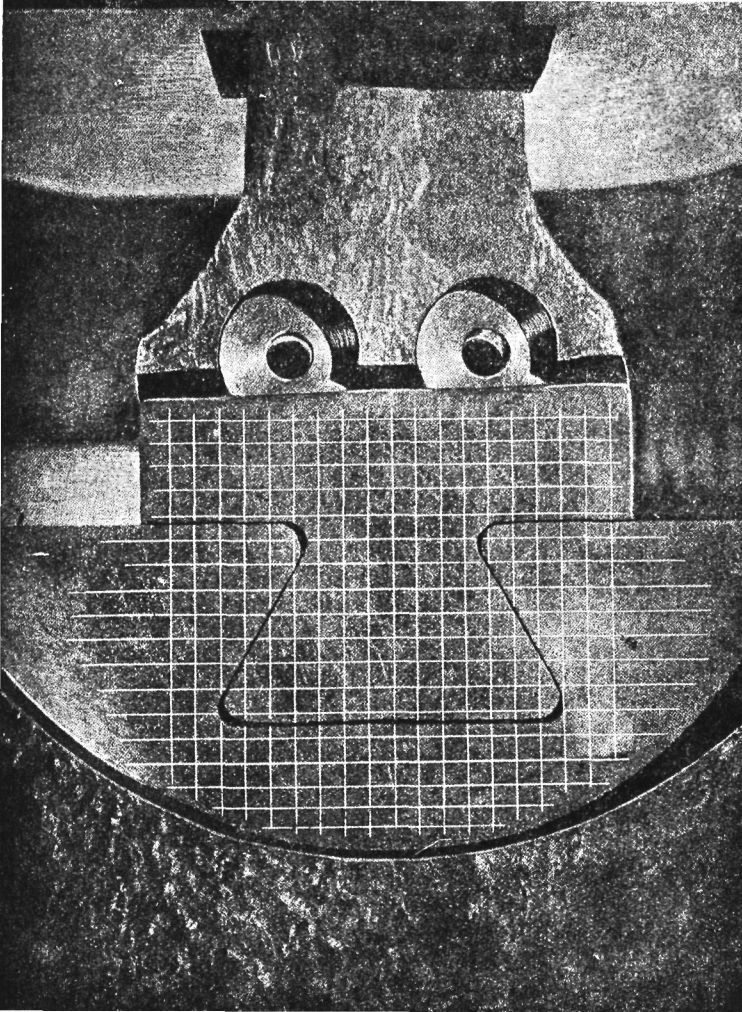
За последние годы было изобретено большое количество новых видов жестких соединений отдельных конструктивных элементов, таких, например, как присоединения турбинных лопаток к их барабанам и электрических проводников к арматуре.

Поэтому полезно изучить некоторые из этих видов соединений с тем, чтобы получить общее представление о пользе оптического метода для решения этих задач.

Для иллюстрации мы остановили свой выбор на простой форме шипового соединения, исследованного Кокером; фотография этого соединения дана на фиг. 7.131. Эта фотография изображает деталь генератора гидроэлектрической установки, приготовленную для испытания; ее поверхность разделена на квадраты со сторонами по $0,635$ см; эта сетка дает понятие о размерах детали, правда не существенных для данной цели. В данном случае верхняя часть шипового соединения вставляется под давлением в соответствующий вырез нижней части, благодаря чему возникают между этими частями значительные усилия, передающиеся через

наклонные грани сопряжения, а также плоскости стыка; однако у закругленных углов и у основания соединения соприкосновение отсутствует.

Обычное испытание на растяжение до разрушения дает некоторое представление относительно прочности стыка по отношению к нагрузке, вызванной центробежными и другими силами; подробные же данные о распределении напряжений



Фиг. 7.131. Закрепление ласточкиным хвостом (деталь турбо-генератора).

в соединениях такого вида могут быть получены для действительного элемента с большим трудом, как это очевидно из исследований, производившихся над другими более простыми видами надрезов, описанных в §§ 7.01 и 7.10.

Значительно легче произвести исследование подобного соединения, изготовленного из прозрачного материала, при помощи оптического метода; так как в данном случае важно пригнать обе части одна к другой очень тщательно, то сделать это без точной обработки затруднительно; поэтому необходимо изготовить модели частей стыка в большом масштабе, а затем перечертить отдельные части в уменьшенном масштабе, в данном случае в одну четверть первоначальной величины, при помощи особой копировальной машины.

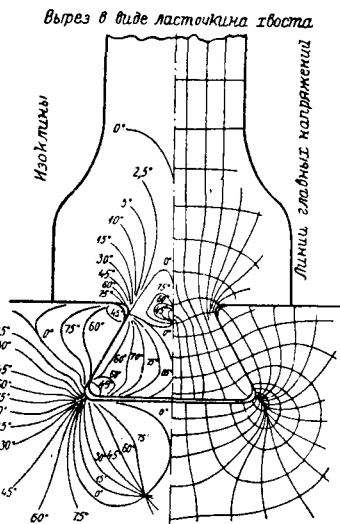
В нашем примере отверстия в верхней части стыка для простоты не воспроизведены на модели; не осуществлено также давление, возникающее между обеими частями при вгонке одной части соединения в другую, хотя влияние этих воздействий легко поддается измерению и никаких затруднений не может возникнуть при учете эффекта различных контурных воздействий.

Таблица 7.13.

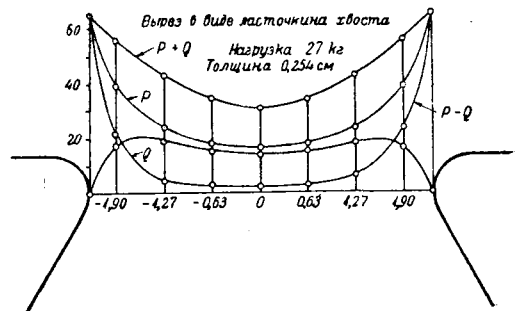
Напряжения по наименьшему сечению шипового соединения.

Нагрузка 27,2 кг						Толщина 0,254		
y	x	$P+Q$	$P-Q$	P	Q	σ	\bar{y}	Ошибка
0,51	-2,203	65,4	64,4	64,9	0,5	0	64,4	4,5%
	-1,90	55,5	22,2	24,8	16,7	0,4	38,6	
	-1,27	42,7	4,4	23,6	19,2	1,5	23,1	
	-0,63	34,2	2,2	18,3	16,0	3,5	16,9	
	0	20,2	2,1	16,2	14,1	6,3	14,1	
	0,63	34,2	2,2	18,3	16,0	3,5	16,9	
	1,27	42,7	5,6	23,5	18,6	1,5	22,8	
	1,90	55,5	23,3	39,4	16,1	0,4	39,2	
	2,20	65,4	65,4	65,4	0	0	65,4	

Пользуясь линейно поляризованным светом для определения изоклин и линий главных нормальных напряжений в растягиваемом соединении, как показано на фиг. 7.132, можно сразу же видеть, что даже при упрощенных условиях нагрузки, распределение напряжений оказывается очень сложным и что наибольшие напряжения могут возникнуть у входящих углов. Измерения напряжений в точках наименьшего поперечного сечения (фиг. 7.133) и таблица 7.13 подтверждают это и показывают,



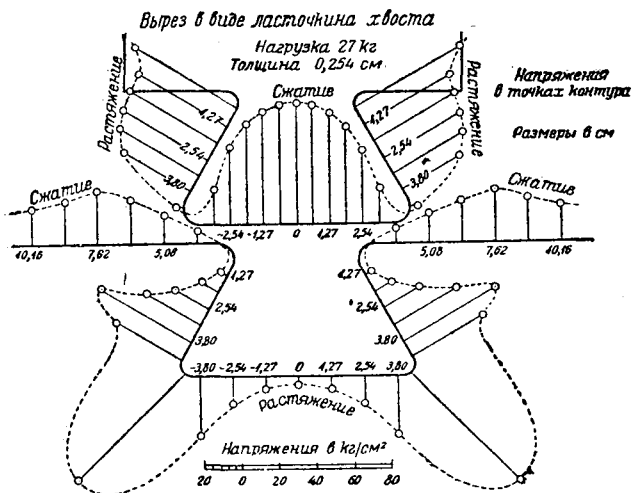
Фиг. 7.132. Изоклины и линии главных напряжений в сопряжении ласточкиным хвостом.



Фиг. 7.133. Распределение напряжений по наименьшему сечению ласточкина хвоста.

что главное растягивающее напряжение P в общем не перпендикулярно к сечению и сопровождается меньшим главным напряжением Q , того же знака и почти такой же величины на значительной части поперечного сечения, благодаря чему не обнаруживается при рассмотрении стыка в поляризованном свете цветных полос, так как значения $P-Q$ малы, несмотря на то что сумма $P+Q$ имеет повсюду большую величину.

Значения напряжений в точках контура шипового соединения (фиг. 7.134) очень велики у входящих углов нижней части соединения; распределение напряжений вдоль соответствующих частей наклонных сторон оказывается очень неравномерным.



Фиг. 7.134. Напряжения в точках контура ласточкина хвоста.

Значительное сжимающее напряжение имеется также и у основания верхней части соединения. Полученные результаты заставили перепроектировать стык, как описано в Engineering, Dec. 7, 1928; новый вид стыка оказался обладающим гораздо большей прочностью.

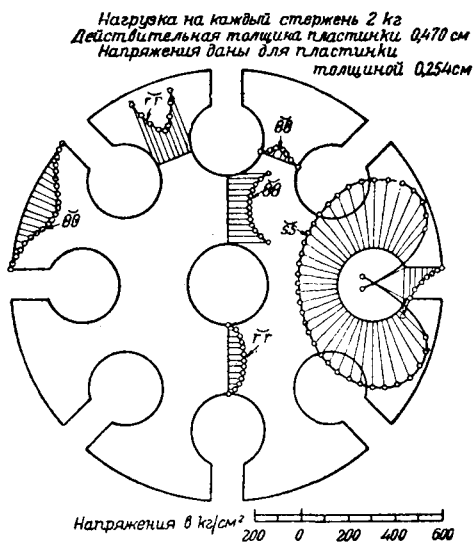
Подробный отчет о напряжениях, обнаруженных как в этом стыке, так и в другом с Т-образной головкой шипа дан в Journal of the Franklin Institute, March, 1925.

В большинстве случаев соединения такого вида встречаются не в одиночку, а обычно их располагают по окружности для присоединения не-

которого количества одинаковых деталей к центральному барабану или диску; обычно эти крепления устраиваются настолько близко одно от другого, что влияние соседних частей друг на друга оказывается значительным. Дальнейшей иллюстрацией этого по следнего типа соединений может служить, например, деталь, состоящая из восьми элементов, прикрепленных к круговому диску при помощи шиповых соединений закругленной формы, как показано на фиг. 2.281a и 2.281b. При помощи винтовых соединений ко всем вырезам были приложены равные нагрузки, за исключением только одного случая, когда пользовались точно градуированными пружинными весами; радиально направленные грузы были выравнены путем получения симметрично расположенных изохроматических полос и в особенности с учетом симметричности расположения точек изотропии, показанных на фиг. 2.281a.

Результаты исследования напряжений, проделанного Харрисом в точках на различных контурах и вдоль различных линий в пластинке, нагруженной описанным образом, показаны на фиг. 7.135; из них следует, что точки изотропии в этом случае есть следствие всестороннего напряжения $P = Q$. Найдено высокое значение

радиального напряжения σ_r по наименьшему поперечному сечению; напряжение σ_θ в этом сечении очень мало, благодаря наличию круговой формы диска и незна-

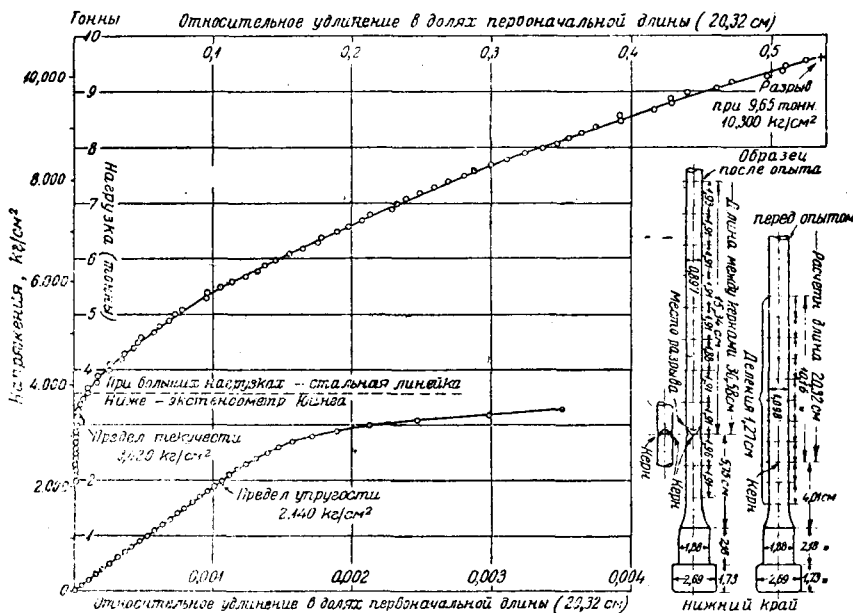


Фиг. 7.135. Распределение напряжений в круглой пластинке при радиальной нагрузке.

чительной ширине этого поперечного сечения. Контурные напряжения σ_s по отверстиям оказались почти всюду значительными. Под влиянием радиальной растягивающей силы, действующей на закрепленный в диске стержень, его круглая головка опирается только на самые края отверстия около прореза, через который проходит стержень, так что за исключением этих небольших площадок нет других точек соприкосновения между стержнем и отверстием. Вследствие этого по большей части контура отверстия имеется только одно напряжение, которое изображено на фиг. 7.135 в правой части; оно получено при помощи эталонной пластинки (компаратора). Значения измеренных напряжений в крайних точках будут представлять собой лишь разность $P - Q$. Вдоль параллельных сторон прореза также не наблюдается никакого контакта между стержнем и диском, и измерения при помощи эталона (компаратора) дают полное распределение напряжений в точках вдоль этих частей контура.

§ 7.14. Влияние царапин и зазубрин при испытании материалов.

Хорошо известно, что при растяжении металлические образцы, в особенности изготовленные из твердых сортов металла, разрушаются по надрезам, являю-

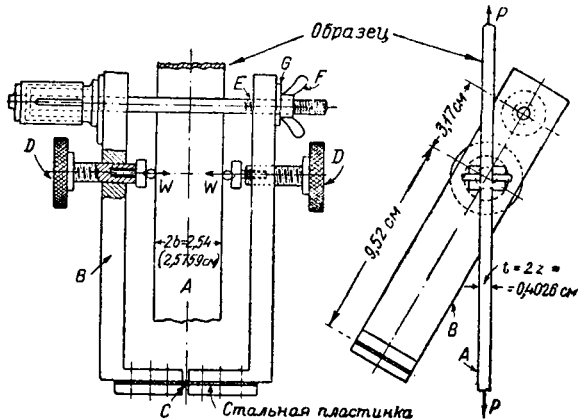


Фиг. 7.141. Образец из стали Гадфильда, А 8725. Поверхность обработана наждачным кругом.

щимся границей расчетной длины при очень небольшом удлинении. Это во многих случаях является следствием большой концентрации напряжений, вызванной царапиной, отмечающей границы расчетной длины, или же небольшими острыми углублениями, получающимися от вдавливания острия винта, которым прикреплялся экстенсометр. Разрушение чаще всего происходит в подобных местах в материале, который в последующих стадиях испытания не дает пластических деформаций, так как в этих случаях продолжается относительный рост напряжений у царапины или острого углубления. Однако, случаи разрушения у такого рода повреждений на поверхности происходят даже и тогда, когда материал оказывается весьма пластичным; хорошим примером такого случая может служить образец марганцевой

стали Гадфильда, содержащей в себе 12,64% марганца и 1,27% углерода. Этот образец вследствие большой твердости материала был изготовлен при помощи обработки наждачным кругом; он имел форму стержня с круглым поперечным сечением с утолщенными концами, соответствующими форме захватов испытательной машины.

Наиболее интересные результаты испытания образца 20,32 см длины показаны на фиг. 7.141, из которой видно, что наибольшее напряжение, превышающее $15,5 \text{ т/см}^2$, получилось при разрыве по наименьшему сечению при относительном удлинении 51% и относительном сужении поперечного сечения — 43%. Действительное же временное сопротивление материала не было получено в данном случае, так как разрушение произошло у очень незначительного повреждения поверхности образца острием винта экстенсометра; хотя общий характер концентрации напряжений у этого места повреждения не совсем одинаков в начале и



Фиг. 7.142.

на токарном станке, причем результаты серии подобных испытаний оказываются в первом случае более однородными.

Эту разницу приписывали обычно более совершенной отделке поверхности при помощи наждачного круга и отсутствию царапин, хотя возможно, что она зависит и от самого характера работы инструментов, которыми пользовались при изготовлении образцов.

Приведенный выше пример типичен в смысле тех затруднений, которые встречаются при такого рода испытаниях; эти обстоятельства привели к изобретению различных приспособлений, благодаря которым можно избежать вдавливания и царапин на образцах. Перед нами была задача, имеющая большое практическое значение, — изучить случаи местной концентрации напряжений в точках у поверхности образцов; эти случаи были исследованы при помощи оптического метода с целью определения изменений в распределении напряжений, вызванных применением различных способов определения временного сопротивления и упругих свойств материала. С этой целью было сконструировано особого рода зажимное приспособление, которое должно было воспроизводить действие захватов, зажимающих образец в точке или по линии; приложенное к образцу боковое давление в этом примере могло быть измерено.

Прибор состоит из U-образной рамы, изображенной в фасаде и боковом виде (фиг. 7.142), служащей для зажима растягиваемого образца A. Рама B состоит из двух частей, соединенных тонкой стальной пластинкой, являющейся как бы шарниром для точки C; на некотором расстоянии от этой точки имеются два подвижных винта D, на внутренних концах которых высверлены углубления для помещения разного рода нажимающих приспособлений.

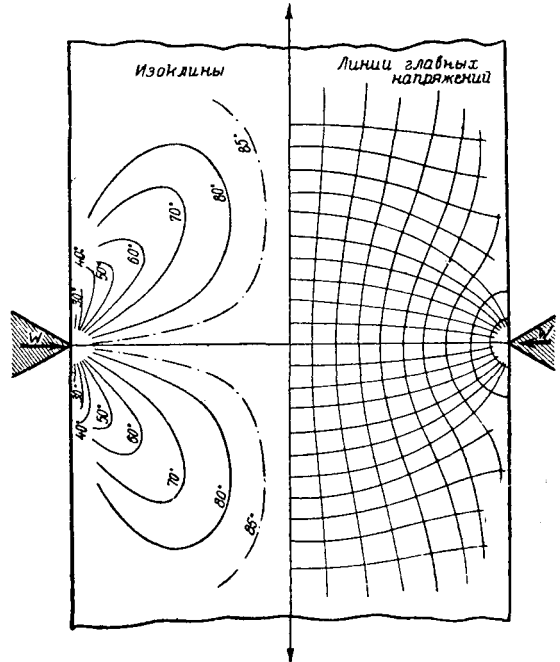
конец испытания, когда напряжения уже переходят за предел упругости, все же имеются другие данные, доказывающие наличие такого вида концентрации напряжений.

Подобные же явления наблюдались и при испытании других материалов, например бронзовых образцов высокого сопротивления растяжению; кроме того оказалось, что образцы на разрыв, изготовленные при помощи обработки наждачным кругом, дают более высокое временное сопротивление и больший процент относительного удлинения, чем такие же образцы, изготовленные

Изображенные на фигуре приспособления представляют собой небольшие стальные цилиндрики, но были исследованы и другого вида зажимы, как, например, призма с острыми ребрами, цилиндры и плоские пластинки различной ширины. Измеряемая нагрузка передается на зажимы посредством стержня E , имеющего нарезку на одном конце с передвигной гайкой F , опирающейся на шайбу G , чем обеспечивается осевая передача нагрузки. На противоположном конце стержень E прикрепляется к градуированной пружине, величина сжатия которой измеряет приложенный груз; при помощи микрометрической шкалы, не показанной на фигуре, проверяют точную параллельность длинных плеч рамы B , что обеспечивает правильность передачи противоположно направленных давлений винтов D . Для удобства, отверстия в раме B устраиваются таким образом, что винты D и приспособления E , F , G , служащие для измерения нагрузки, могут меняться местами, что расширяет пределы применения этого прибора. Вес зажимного приспособления уравнивается грузами, прикрепленными к винтам D .

Боковые нагрузки, возникающие под влиянием винтов, зажимающих образцы, не только повреждают образец и определяют место разрушения, но могут также изменить и распределение напряжений; это прекрасно видно на фиг. 7.143, где боковые давления величиной 6,8 кг, приложенные к образцу при помощи призм с углом 60° , вызывают вместо простых растягивающих напряжений от действия силы в 20,4 кг, значительно более сложное распределение напряжений. Определенные для этого случая экспериментальным путем изоклины показаны в левой части фигуры, так же как и взаимно ортогональные кривые главных нормальных напряжений. При испытании на растяжение линии эти должны бы быть всюду параллельны и перпендикулярны прямым сторонам образца; в действительности же, как оказывается, происходит очень большое изменение в характере распределения напряжений, вызванное боковым давлением; опыт показывает, что в данном случае простые растягивающие напряжения появляются снова только на расстоянии по оси образца, в большей половине его ширины от места приложения боковой нагрузки.

При испытании очень тонких полосок стали, царапины или зазубрины могут совершенно исказить результаты опытов; в университетской лаборатории при испытании тонких полосок стали пользовались цилиндрическими роликовыми зажимами. Подобные сорта материала очень трудно испытывать на растяжение, так как всякая царапина или зазубрина обычно определяет место разрыва. Поэтому для определения удлинений таких материалов пользуются особыми зажимами, на внутренних сторонах которых имеются вырезы с заложенными в них цилиндрическими стержнями, слегка выдающимися над внутренними поверхностями каждого зажима; эти стержни придавливаются к образцу посредством стягивания зажимов небольшими установочными винтами. Такое устройство обеспечивает достаточный захват материала зажимами, поддерживающими экстенсометр, без всякого вреда для



Фиг. 7.143. Изоклины и линии главных напряжений в растянутом образце.

образцов, которые при этом на практике обычно рвутся в пределах расчетной длины. При испытаниях нитроцеллюлозы с большим успехом пользовались небольшими кусочками, приклеенными к концам полосы; эти кусочки заменяли собою специальные зажимы.

Таким образом исследование наиболее существенных особенностей распределения напряжений в подобных случаях является очень желательным; за основу подобного теоретического исследования можно взять вычисления, помещенные в главе V, § 5.09, где получено распределение напряжений, возникающих под влиянием противоположно направленных, сосредоточенных сил W , приложенных перпендикулярно к сторонам прямоугольной полосы шириною $2b$ и толщиной $2c$. Распределение напряжений для этого случая в прямоугольных координатах с осью Ox , направленной по оси образца, и Oy по линии действия боковых сил, представляется формулами:

$$\begin{aligned} \overline{xx} &= -\frac{2w}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u - u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{ch} \frac{uy}{b} \cdot du - \\ &\quad - \frac{2wy}{\pi b^2} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{sh} \frac{uy}{b} du, \\ \overline{yy} &= -\frac{2w}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u + u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{ch} \frac{uy}{b} du + \\ &\quad + \frac{2wy}{\pi b^2} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{sh} \frac{uy}{b} du, \\ \overline{xy} &= \frac{2w}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \sin \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{sh} \frac{uy}{b} du - \\ &\quad - \frac{2wy}{\pi b^2} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \sin \frac{ux}{b} \cdot \operatorname{ch} \frac{uy}{b} du, \end{aligned}$$

где $w = \frac{W}{2c}$ и $u = mb$ в обозначениях § 5.09.

Для удобства сравнения с некоторыми приведенными дальше опытными данными были вычислены величины суммы и разности главных нормальных напряжений для точек вдоль осей координат по формулам, полученным из вышеприведенных после некоторых упрощений.

Таким образом для точек оси Ox получаем:

$$\begin{aligned} \overline{xx} + \overline{yy} &= P + Q = -\frac{4w}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot du. \\ \overline{xx} - \overline{yy} &= P - Q = \frac{4w}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \cdot \cos \frac{ux}{b} \cdot du. \end{aligned}$$

Подобные же выражения получаются и для точек оси Oy , считая P и Q направленными соответственно по оси Ox и перпендикулярно к ней.

Таблица 7.14.

Условия опыта

Ширина образца $2b = 5,08 \text{ см}$
 Толщина $2c = 0,25 \text{ см}$
 Продольная сила $= 0$
 Боковые нагрузки $W = 45,5 \text{ кг}$

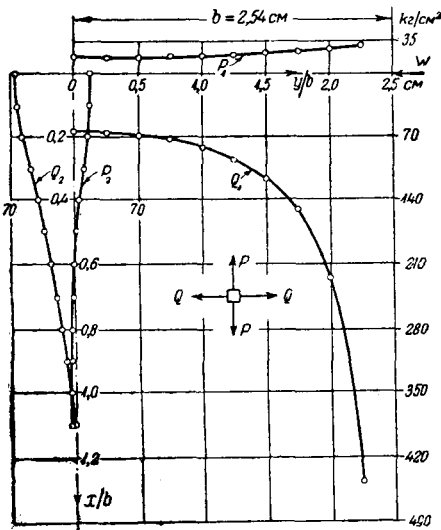
Напряжения вдоль оси Oy

y/b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
P_1	17,5	17,7	18,1	18,6	19,6	20,5	22,4	24,4	27,3	30,3
Q_1	-64,7	-65,6	-68,3	-73,5	-82,0	-94,3	-115,8	-151,1	-225,0	-447,8

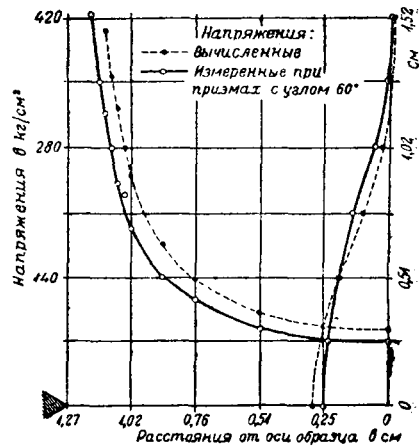
Напряжения в точках вдоль оси Ox

x/b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
P_2	17,5	16,6	14,2	10,8	4,6	3,2	-0,3	-2,6	-4,4	-5,2	-5,7	-5,8
Q_2	-64,7	-62,9	-58,3	-47,1	-41,2	-35,2	-27,3	-20,3	-14,4	-10,0	-6,5	-3,9

Приведенные в таблице 7.14 величины нанесены для сравнения и на фиг. 7.145, причем следует заметить, что значение P в общем сравнительно невелико в точках



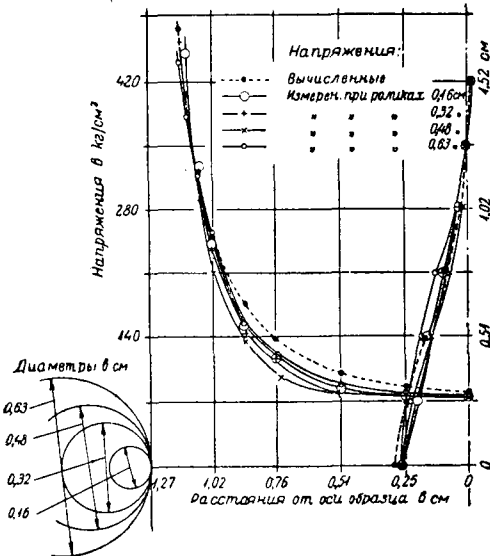
Фиг. 7.145. Теоретические данные.



Фиг. 7.146. Напряжения ($P - Q$), вызванные боковыми призмами.

по любой из осей, так что не стоит отделять P от Q ; для сравнения же с опытными (полученными при помощи оптического метода) данными, достаточно использовать величины разности ($P - Q$). Величина площади, на которую в плоском образце распространяется влияние бокового давления пары призм с углом в 60° , далеко не безразличны, так как местные напряжения в точках давления острий призм и недалеко от них могут быть очень большими в связи с получением остаточных деформаций материала. Значения напряжений ($P - Q$), наблюдавшиеся при применении призм или цилиндров, изображены графически, чтобы дать возможность произвести сравнение. Распределение напряжений при действии призм оказывается может быть наиболее интересным с точки зрения теории, так как для этого случая (как показывает фиг. 7.146) наблюдается хорошая сходимость

опытных и теоретических данных для точек по оси образца, где напряжения невелики и довольно трудно измеримы. В точках по направлению действия боковой нагрузки сходимость менее удовлетворительна, так как все измеренные значения

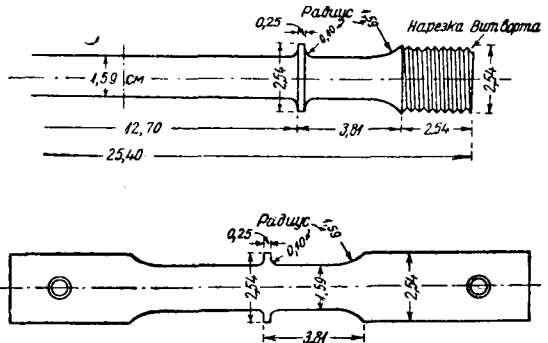


Фиг. 7.147. Напряжения ($P-Q$), вызванные роликами.

площадь такой прокладки значительна, то получается заметное расхождение между опытными и теоретическими данными.

§ 7.15. Влияние кольцевых выступов на растяжение образцов.

Определение действительной прочности материала при растяжении сопряжено, как показали описанные опыты, с неизбежными трудностями, так как оказывается необходимым сделать на поверхности образца царапину или углубление, как бы незначительны они ни были. Это вызвало ряд попыток избежать этого источника ошибок, и проф. Дальби, изобретший самопишущую испытательную машину весьма совершенного типа, отбросил обычный метод укрепления экстенсометра на образце. По его методу на образце при изготовлении его на токарном станке из более толстого стержня оставляются кольцевые выступы, отстоящие на соответствующем расстоянии один от другого; изменение расстояния между этими выступами и измеряется при помощи соответствующего экстенсометра, слегка прижимающегося к кольцевым выступам. Точное определение влияния такого кольцевого выступа представляет собою трудную задачу, но для плоского образца с подобным утолщением эта задача относительно упрощается, хотя возможно несколько и отличается от случая круглого образца.



Фиг. 7.151. Стандартная форма образца Дальби. Размеры плоской целлюлоидной модели толщиной 0,307 см.

Действительно, ранее в § 7.03 было показано, что изменение сечения вызывает гораздо большую область с сложно распределенными напряжениями в круглых образцах, по сравнению с плоскими образцами такого же очертания.

Однако, результаты, полученные в случае плоской задачи, дают некоторые указания на то, что будет происходить в цилиндрическом образце.

На фиг. 7.151 дана стандартная форма образца, которую пользовался проф. Дальби; она представляет собою 1,59-сантиметровый круглый стержень с кольцевыми выступами диаметром 2,54 см, толщиной 0,25 см, отстоящими друг от друга на 12,7 см; концы образца утолщены и снабжены винтовой нарезкой для закрепления в захватах испытательной машины; длина этих концов достаточно велика, чтобы обеспечить равномерное распределение напряжений в месте измерений, не зависящее от влияния этих концов.

Сопряжение цилиндрических выступов со стержнем имеет радиус 0,10 см, а сопряжения уширенных концов имеют радиус 1,59 см. Влияние последних переходных кривых уже описано для случая цилиндрических уширенных концов. Если же концы эти имеют винтовую нарезку, тогда задача отыскания распределения напряжений в них представляет непреодоленные до сего времени трудности.

Модель образца в натуральную величину, над которым производились описываемые ниже опыты, имела форму, изображенную в нижней половине фиг. 7.151; полное совпадение очертаний модели и действительного образца обеспечено на

всем протяжении между уширенными концами; нагрузка, передающаяся через специальные болты, приложена на достаточном расстоянии от перехода к более узкой части образца, чем обеспечивается получение равномерного распределения напряжений в уширенных концах до места изменения сечения.

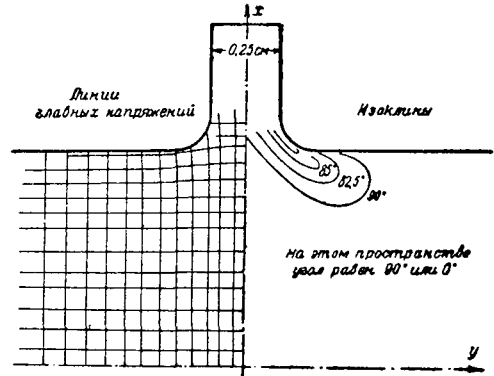
Рассматривание этого стержня в полярископе при сравнительно небольшой нагрузке обнаруживает цветные полосы, указывающие на существование местных напряжений у кольцевых выступов и в точках переходной кривой; основное влияние уширения сечения заключается в понижении величины напряжений вдоль контуров усеченных четырехугольников, причем некоторая неравномерность распределения напряжений наблюдается и по среднему сечению.

Наружные части кольцевых выступов остаются ненапряженными, а внутренние их части находятся в очень сложном напряженном состоянии, которое дает повышенное растягивающее напряжение возле соединения переходной кривой с параллельными частями контура; напряжения падают до средней величины, соответствующей приложенному грузу уже на небольшом расстоянии от места изменения сечения.

Исследование распределения напряжений доказывает, что под влиянием кольцевых выступов линии главных нормальных напряжений довольно резко выгибаются у этих выступов (фиг. 7.153), что сопровождается некоторым расхождением ортогональных линий.

Площадь, охваченная этими искажениями в распределении напряжений, однако невелика, о чем можно судить по ограниченности распространения изоклинических линий.

Произведено довольно много измерений величины суммы и разности главных нормальных напряжений; некоторые из полученных результатов нанесены на фиг. 7.154 с целью дать понятие об общем характере распределения напряжений.

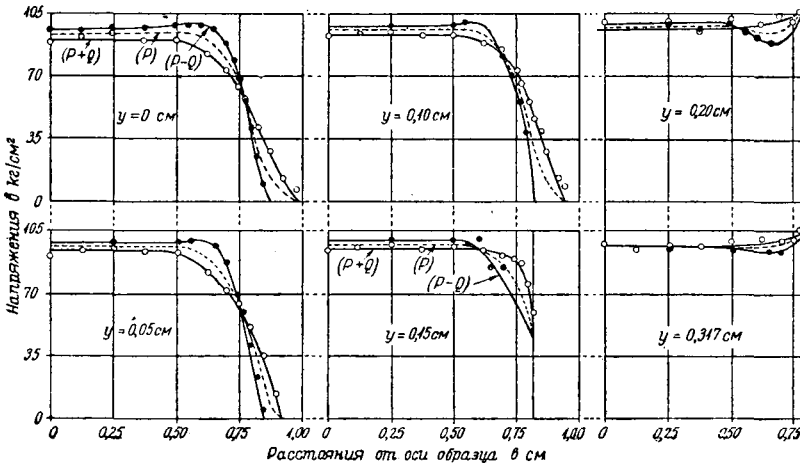


Фиг. 7.153. Линии главных напряжений. Изоклины. Направления главных напряжений.

В среднем сечении кривая $(P - Q)$ на протяжении большей части этого сечения лежит над соответствующей кривой $(P + Q)$ и медленно поднимается по мере удаления от оси образца; она достигает максимума на расстоянии около $0,58 \text{ см}$ от оси. Затем кривая быстро падает до нуля.

Измерения показывают, что растягивающее напряжение по этим поперечным сечениям распределено почти равномерно на протяжении $0,51 \text{ см}$ по обе стороны от оси образца, затем оказывается небольшой подъем, за которым следует быстрое снижение напряжения до нуля. Это напряжение сопровождается сжимающим, перпендикулярным ему напряжением небольшой величины, которое достигает максимума при $x = 0,58 \text{ см}$ и меняет знак приблизительно при $x = 0,8 \text{ см}$; ось Ox расположена так, как показано на фиг. 7.153.

Такое распределение напряжений характерно в различной степени для всех сечений, вплоть до сечения с $y = 0,15 \text{ см}$, где кончается основное уширение



Фиг. 7.154.

сечения и ширина оказывается увеличенной только за счет закругления углов. За пределами расстояния $y = 0,20 \text{ см}$ линии $(P \pm Q)$ все еще пересекаются, но вместо того, чтобы падать до нуля, они достигают на криволинейном контуре своего максимума.

Интересно отметить, что измерения обнаруживают такое же точно изменение напряжений и в том случае, когда уширенные части образца будут гораздо длиннее, и некоторое повышение напряжений оказывается неизбежным в пределах упругости при всяком симметричном расширении сечения, соединенном с основным контуром стержня по какой-либо кривой.

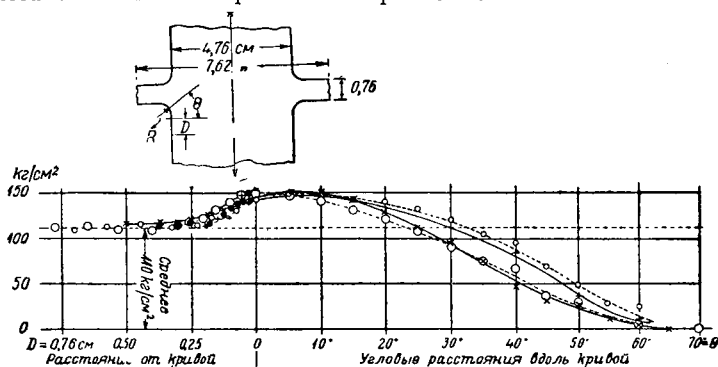
В этом случае, следовательно, увеличение площади сечения стержня влечет за собою увеличение концентрации напряжений, что наблюдается и в других случаях. Пример будет рассматриваться в § 8.08. Некоторое представление о точности этих измерений можно получить путем интегрирования напряжений yy по каждому сечению и сравнения полученных таким образом величин с действительной нагрузкой. Следует однако заметить, что одно из главных напряжений Q невелико и меняет знак, так что пренебрежение им поведет лишь к ничтожной ошибке.

Другое же главное напряжение P повсюду почти нормально к поперечному сечению, так что, обозначая толщину образца через $2c$, получаем $W = 2c \int yy \cdot dx = 2c \int P dx$, достаточно точно; этим последним значением можно пользоваться без ощутительного уменьшения точности результатов. Приближенная проверка общей

точности измерений при этих обстоятельствах дает вместо действительно приложенного груза 45,4 кг несколько большую величину, за исключением одного только сечения, где ошибка будет немного в сторону уменьшения.

Во всех приведенных сечениях, кроме двух, ошибка не превышает 5%, в среднем же она будет $\pm 2,53\%$, что могло бы быть еще снижено, если бы принимались в расчет Q и наклон обоих главных напряжений по отношению к поперечным сечениям.

Интересную особенность этой формы образца представляет собой то, что изменение радиуса сопрягающей кривой как будто не оказывает большого влияния на распределение напряжений. Это изменение ширины вызывает местную концентрацию напряжений, но полученный при этом эффект мало изменяется с изменением кривизны, в то время как максимальное напряжение во входящих углах быстро возрастает вместе с возрастанием кривизны.



Фиг. 7.155. Напряжения в точках контура образца Дальби. Нагрузка 135 кг. Полная ширина 7,62 см; ширина нетто 4,76 см. Толщина 0,254 см.

Для исследования этого явления производились измерения напряжений в точках по контуру уширенного образца; при этих измерениях все условия, за исключением радиуса перехода, оставались постоянными. В точках такого контура меньшее главное напряжение обращается в нуль и для определения напряжений достаточно либо оптического, либо механического метода; первый способ предпочтительнее благодаря легкости его применения в точках по контуру. Некоторые из результатов этих измерений изображены на фиг. 7.155 для образца, увеличенного в три раза против его натуральной величины, при растяжении под грузом 136,1 кг, вызывающим среднее напряжение $110,0 \text{ кг/см}^2$. В каждом случае максимум напряжения оказывается больше $146,9 \text{ кг/см}^2$, но следует отметить, что для крайних случаев получается очень небольшая разница; так, при радиусе 0,64 см напряжение поднимается до $151,1 \text{ кг/см}^2$; при наименьшем же радиусе, какой только можно себе представить, соответствующее напряжение повышается только слегка. Опыты действительно показывают, что хотя кольцевые выступы вызывают местное повышение напряжений, все же форма кривой, по которой они сопрягаются с основной частью образца, не имеет большого значения, если только она не подрежет контура образца.

§ 7.16. Испытание дерева на раскалывание.

Дерево до сих пор представляет собой один из наиболее ценных строительных материалов, почему его свойства всегда изучались с особой тщательностью как с экспериментальной, так и с аналитической точки зрения.

Большинство прежних опытных данных о дереве характеризует его прочность в крупных элементах, применяемых обычно в инженерных сооружениях, где вес

не играет большой роли; когда же дерево стало применяться в конструкции аэропланов, где вес имеет главное значение, тогда пришлось приступить к подробному пересмотру сведений о его механических и других свойствах с точки зрения авиации.

Сведения о некоторых из этих исследований, производившихся во время войны, приводит Дженкин;¹ в этих исследованиях были установлены для различных сортов авиационного леса девять основных физических постоянных, требуемых теорией Сен-Венана.²

Другая теория с двенадцатью основными постоянными предложена Прайсом³ с целью достижения более точного совпадения теории с экспериментальными данными, которые не совсем согласовались с более старой теорией.

Механические свойства дерева определяются обычно испытаниями на сжатие, изгиб и скалывание, но анизотропный характер дерева требует еще специальных испытаний его свойств, кроме тех испытаний, которые обычны для материалов приблизительно изотропного строения; одним из таких специальных испытаний является определение его сопротивления раскалыванию.

Это свойство определяется посредством испытания до разрушения образца, изготовленного таким образом, что нормальные напряжения по наиболее ослабленному сечению направлены перпендикулярно волокнам.

Нагрузка представляет собой две равных и прямопротивоположных силы, направленные по диаметру высверленного в образце отверстия с неполным круговым очертанием. Подобные испытания производятся во многих лабораториях, работающих над испытанием дерева; они позволяют сравнивать качества различных сортов дерева, но не дают точного представления о величине напряжений, при которых материал начинает раскалываться.

По предложению Юинга⁴ вопрос этот был изучен с помощью оптического метода на изотропном материале; поэтому здесь полезно указать на преимущества и недостатки этого способа изучения в применении к подобного типа задачам. Очевидным недостатком этого способа является то, что распределение напряжений в изотропном материале не может быть таким же, как и в анизотропном материале. Но несмотря на это, испытания эти объяснили некоторые до сих пор неясные особенности поведения дерева во время испытаний на раскалывание, как это увидим далее.

Преимуществом этого метода является то обстоятельство, что в испытаниях, которые мы будем разбирать, образцы представляли собою пластинки с односвязным контуром, а в § 6.08 было доказано, что распределение напряжений в случае плоского напряженного состояния в изотропных телах при одинаковых условиях нагружения и форме образца — независимо от физических постоянных материалов.

Нужно однако заметить, что для обычных испытаний дерева на раскалывание применяются образцы значительной толщины, так что условия плоского напряженного состояния или обобщенной плоской задачи осуществляются, вероятно, только приближенно.

Другим интересным вопросом является то обстоятельство, что в хорошо выдержанных лесных материалах напряжения до момента разрушения являются упругими, а следовательно, если распределение напряжений известно для какой-либо нагрузки, то можно отыскать напряжения при любой другой нагрузке путем простого пересчета. Поэтому с приведенными выше ограничениями можно использовать найденное в модели распределение напряжений для представления о работе деревянного прототипа этой модели при любой нагрузке.

¹ C. F. Jenkin, Report on the Materials of Construction used in Aircraft and Aircraft Engines, H. M. Stationery office.

² Todhunter and Pearson, History of Elasticity, §§ (198), (282), (308—13), 2, ч. I.

³ A. T. Price, A Mathematical Discussion on the Structure of Wood in Relation to its Elastic Properties, Phil. Trans. A, 228, 1928—9.

⁴ E. G. Coker and G. P. Cleman, Cleavage Tests of Timber, Proc. R. S. A, 128, 1930.

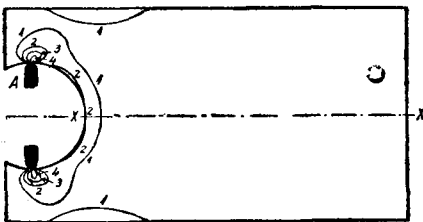
§ 7.17. Распределение напряжений в образце на раскалывание при одностороннем вырезе.

Для простоты разберем сначала характер распределения напряжений при испытании на раскалывание в образце британской стандартной формы, имеющем только односторонний вырез, к краям которого приложена нагрузка, так как более сложный случай с двумя такими же вырезами представляет собою дальнейшее развитие этой первоначальной формы.

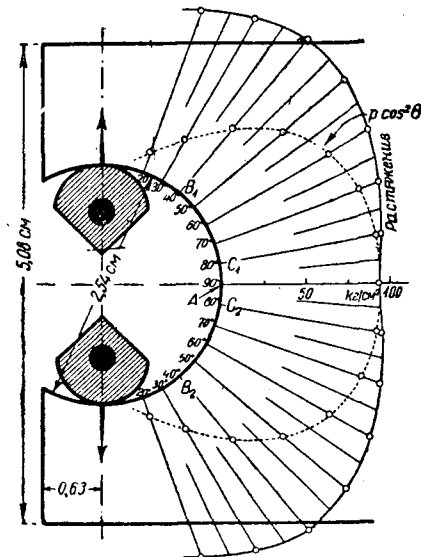
Такой образец изображен на фиг. 7.171; он представляет собою модель в натуральную величину действительного образца, длиной 9,52 см, высотой 5,08 см и толщиной 0,467 см; наша модель отличалась от действительного образца только толщиной, которая была равна здесь 0,467 см.

Эта плоская модель имела неполный круговой вырез диаметром 2,54 см с центром, лежащим на горизонтальной оси на расстоянии 0,63 см от левого конца пластинки.

Модель эта изображена при нагрузке закругленными краями диска А, вста-



Фиг. 7.171. Изохроматические линии в образце на раскалывание.



Фиг. 7.172. Напряжения в точках контура отверстия.

вленного в нее в поперечном направлении. На этой фигуре изображено расположение красных изохроматических полос при рассмотрении в поляризованном по кругу свете; порядок каждой полосы отмечен соответствующим номером. Главный интерес представляет здесь расположение полос 2-го порядка относительно кругового контура.

Расположение этих полос указывает, что за исключением точек приложения грузов максимальные напряжения по этому контуру находятся в точках на значительном (угловом) расстоянии от оси образца.

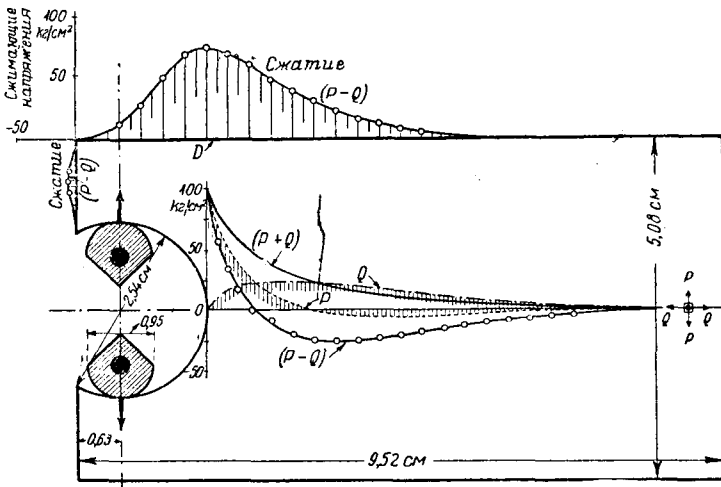
Местные напряжения на круговом контуре, вызванные приложением грузов, не имеют здесь никакого практического значения, почему они и не измерялись. На остальной части кругового контура величина напряжений имеет значение, так как от них зависит характер разрушения образца.

Как видно из фиг. 7.172, груз 15,9 кг вызывает напряжение 92,5 кг на см² в точке А на конце оси образца; во всех точках вдоль кругового контура до самых точек приложения нагрузки напряжения будут больше указанного. Максимумы напряжений возникают в точках В₁ и В₂ при угловом расстоянии 50°, считая от оси симметрии; их величина равна 117,4 кг/см² или на 26,9% больше, чем в точке А. Однако направление этих максимальных напряжений составляет известный угол с направлением волокон дерева, которые в данных образцах были расположены параллельно оси. Нормальные напряжения, действующие перпенди-

кулярно волокнам в точках B_1 и B_2 , будут поэтому равны $p \cos^2 \theta$, где $p = 117,4 \text{ кг/см}^2$, а $\theta = 50^\circ$. Вычисленные таким образом для каждой точки нормальные напряжения изображены пунктирной линией на данной фигуре; отсюда видно, что максимальная величина этой нормальной составляющей получается при угловом расстоянии в 10° от оси и равна $93,4 \text{ кг/см}^2$.

Если материал разрушается, вследствие нормального напряжения, действующего перпендикулярно к волокнам, то при изотропных условиях трещины должны появиться в точках C_1 и C_2 , вместо A . Такого рода трещины и образуются иногда в образцах, причем, принимая во внимание характер распределения напряжений в точках этого контура, не трудно понять причину разрушения материала не по среднему сечению, а в других местах.

Разрушение материала зависит, очевидно, также и от его неоднородности, и если дерево окажется слабым в точке A и более крепким в точках C_1 и C_2 , то в таком случае трещина может начаться с A даже и тогда, когда перпендикуляр-



Фиг. 7.173. Толщина целлюлоида 0,468 см; нагрузка 15,8 кг.

ное к волокнам нормальное напряжение ниже в A , чем в C_1 и C_2 ; между тем при равенстве физических условий она должна начаться в этих последних местах, если только величина нормального, перпендикулярного к волокнам напряжения будет критерием разрушения.

Это замечание иллюстрирует также трудности получения точных данных относительно сопротивления дерева раскалыванию, которых можно избежать, если удастся поставить опыт так, чтобы обеспечить в тех сечениях, где начинается разрушение, одинаковые условия для всех сравниваемых в этом опыте сортах дерева.

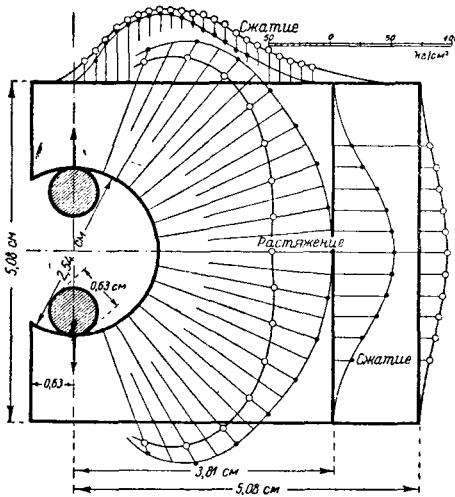
Характер распределения напряжений по среднему сечению представляет также интерес, так как дает основание предполагать, что форма образца не имеет значения. Как видно из фиг. 7.173, вертикальное главное напряжение P в точках средней линии очень быстро падает при движении слева направо.

Наконец, оно меняет знак, переходит в небольшое сжимающее напряжение и затем обращается в нуль на некотором расстоянии от правого конца пластинки. Это напряжение сопровождается незначительным главным напряжением Q , направленным вдоль оси, всегда растягивающим, с максимальным значением, равным $23,9 \text{ кг/см}^2$ на расстоянии $1,27 \text{ см}$ от криволинейного контура.

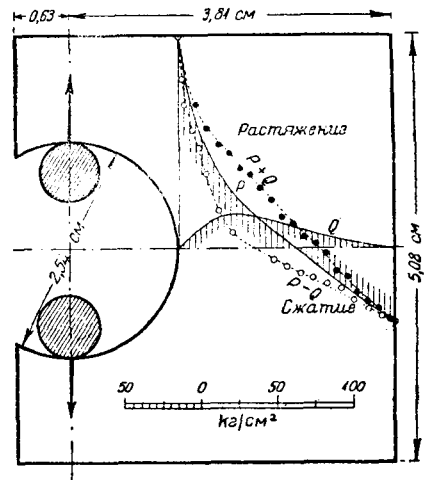
Эти и прочие напряжения были найдены при помощи определения суммы и разности главных нормальных напряжений в различных точках, как указано на диаграмме.

Из изложенных результатов ясно, что правый конец образца не испытывает напряжений до самого момента разрушения; поэтому желательно выяснить, какое влияние окажет уменьшение его размеров. Это было исследовано путем последовательного отрезывания от правого конца прямоугольных отрезков шириною по 1,27 см каждый, до тех пор, пока на другом конце образца не начинало обнаруживаться некоторое заметное изменение в распределении напряжений. Влияние последовательного удаления материала проще всего изучать для точек оси образца, а также верхней и нижней сторон; последние в первоначальном образце (фиг. 7.173) испытывают высокое сжимающее напряжение вблизи кругового контура с максимумом $73,8 \text{ кг/см}^2$ в точке D , на расстоянии 1,90 см от левого конца образца.

На основании кривых распределения P и Q , показанных на фиг. 7.173, можно предполагать, что эффект от последовательного срезывания двух или трех



Фиг. 7.174. Толщина образца 0,513 см; нагрузка 13,5 кг.



Фиг. 7.175. Толщина образца 0,513 см; нагрузка 13,5 кг.

прямоугольников настолько мал, что едва ли производит какое-либо изменение в распределении напряжений в оставшейся части образца; влияние это становится значительным только после четвертого срезывания, когда расстояние нового вертикального края от линии действия нагрузки будет равно 5,08 см.

Напряжение в точках вдоль вновь образовавшегося контура оказалось сжимающим и переменным по величине. В виду симметрии оно должно достигать максимума на оси, как показано на фиг. 7.174; распределение напряжений в точках других частей контура образца испытывает сравнительно небольшие изменения.

Дальнейшее удаление прямоугольников шириною в 1,27 см сильно изменяет распределение напряжений и, как видно на фиг. 7.174, максимум напряжений в точках вдоль нового вертикального края повышается до $48,2 \text{ кг/см}^2$; заметное изменение претерпевает также и характер распределения напряжений в точках кругового контура, так как если в первоначальном образце максимум напряжения в $117,4 \text{ кг/см}^2$ обнаруживался в точках с угловым расстоянием 50° , причем последовательные срезывания оказывали на него очень небольшое влияние, то теперь максимумы напряжения $139,2 \text{ кг/см}^2$ оказываются в точке на оси; напряжения на контуре выреза уменьшаются по мере удаления от оси настолько медленно, что при угле 50° они только на $3,4 \text{ кг/см}^2$ меньше значения напряжения в точке на оси. Под влиянием последнего изменения распределения максимумов напряжений, опасным становится среднее сечение, и закон пропорциональности $\cos^2 \theta$

нормальных напряжений по контуру при удалении от оси обеспечивает появление трещины в середине образца, если только неоднородность материала не окажется особенно неблагоприятной.

Довольно интересно распределение напряжений в точках вдоль оси образца после этого изменения его формы; это распределение изображено на фиг. 7.175, из которой видно, что при нагрузке в 13,6 кг и толщине модели 0,513 см, напряжение P от максимального растягивающего значения 139,2 кг/см² на контуре быстро падает, переходит через нуль несколько правее от центра сечения и достигает окончательной величины 48,2 кг/см² сжатия у внешнего края.

Оно сопровождается напряжением Q , всюду растягивающим, с максимумом 23,6 кг/см² на расстоянии 0,64 см от левого конца. Подробные результаты измерений даны в таблице 7.171, а графическое интегрирование площади, ограниченной

Таблица 7.171.

Распределение напряжений в точках вдоль среднего сечения (фиг. 7.175).

Расстояние от левого конца (см)	0	0,318	0,635	0,953	1,270	1,588	1,905	2,223	2,540
Напряжение P в кг на см ²	139,2	63,3	35,2	18,3	4,0	-9,5	-23,4	-35,9	-48,2
Напряжение Q в кг на см ²	0	15,1	23,6	20,7	15,7	10,5	5,6	2,5	0

кривой напряжений P , поперечным сечением и конечными ординатами, показывает, что величина груза, так полученная, примерно на 4,3% больше действительного груза, вероятно вследствие небольших ошибок, допущенных при измерениях ($P + Q$), так как кривая для этой величины, как видно на фиг. 7.181, дает легкий выгиб неподалеку от середины, появление которого иначе трудно себе объяснить. Так как особенность распределения напряжений была достаточно ясна, то было признано излишним делать измерения еще раз для более точного построения кривой этих напряжений. Главный эффект уменьшения длины образца заключается в более удовлетворительном распределении напряжений в точках вдоль по круговому контуру, где желательно иметь начало разрушения.

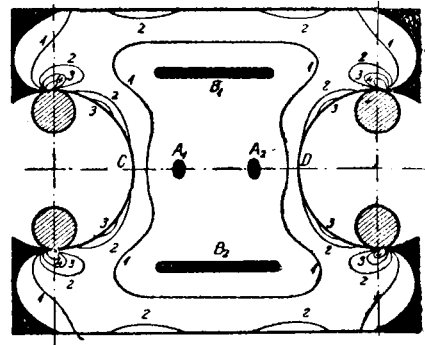
Такого же рода изменение напряженного состояния можно получить и иным способом, например увеличением высоты образца. Все контурные напряжения, оказывается, уменьшаются с увеличением этого размера. Особенно важное значение имеют изменения в полярных кривых для напряжений в точках по круговому контуру; эти напряжения уменьшаются по величине, а максимум напряжений стремится приблизиться к центру; на практике это изменение обнаружено для высоты в 8,89 см и больше, хотя при такой высоте образца уменьшение напряжений по контуру по мере удаления от оси изменяется очень незначительно; уменьшение равно только 1,5 кг/см² в точках при угловом расстоянии 30° с каждой стороны оси. Есть еще способ получения желательного изменения распределения напряжений в точках кругового контура, а именно путем уменьшения радиуса этого контура, но это изменение конечно дает очень ограниченные возможности применения из-за необходимости расположения приспособлений для нагрузки внутри этого контура.

§ 7.18. Распределение напряжений в образце для испытания на раскалывание с двумя неполными круговыми вырезами.

Исследование первой формы образца на раскалывание и изменения в распределении напряжений в зависимости от изменений в размерах образца позволяет

нам до известной степени предвидеть общий характер того эффекта, который появится вследствие нагрузки с двух сторон на измененный соответствующим способом образец. Стандартный образец типа, применяемого в настоящее время для испытаний дерева в лабораториях, имеет два просверленных отверстия-выреза диаметром 2,54 см; центры их отстоят один от другого на 5,08 см; сам он представляет собою прямоугольный кусок дерева длиной в 6,35 см, высотой 5,08 см и толщиной 5,08 см, так что посредине получается симметрично расположенное между вырезами среднее поперечное сечение шириною в 2,54 см, как показано на фиг. 7.181.

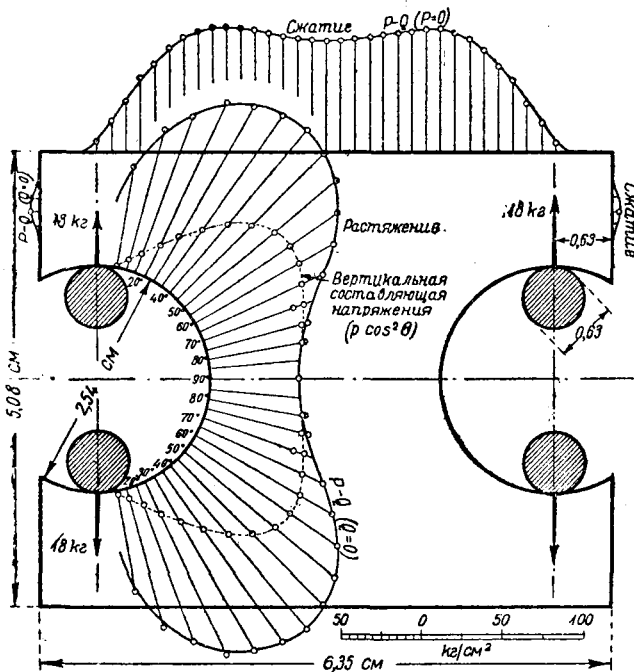
Как и раньше, волокна дерева идут параллельно этому поперечному сечению, а вдоль вертикальных диаметров боковых вырезов прикладываются равные и прямо противоположные грузы в направлении, перпендикулярном этому поперечному сечению. При исследовании образца такой формы в поляризованном по кругу свете обнаруживается интересное распределение напряжений, несколько более сложное, чем для предыдущего образца, но тем не



Фиг. 7.181. Распределение изохроматических линий в образце на раскалывание.

менее имеющее много общего с ним, но еще с некоторыми дополнительными осложнениями, вызванными наличием второго выреза.

Некоторые из этих особенностей становятся сразу же очевидными при изучении изохроматических линий, изображенных на фиг. 7.181; близкое расположение полос второго и третьего порядков указывает на ярко выраженные максимумы напряжений в точках круговых контуров, расположенных на значительных угловых расстояниях от среднего поперечного сечения. Эти напряжения сопровождаются неравномерно распределенными напряжениями, с максимумом значительной величины, в точках вдоль горизонтальных сторон образца и небольшими напряжениями в точках вдоль его вертикальных граней. Новой



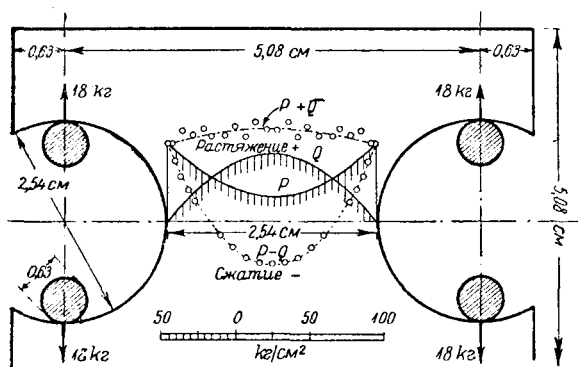
Фиг. 7.182.

особенностью этого распределения напряжений является наличие точек A_1 и A_2 с нулевыми значениями разности напряжений, расположенными симметрично на средней линии, и прямых полос B_1 и B_2 того же типа, параллельных среднему сечению. Эти последние полосы заставляют предполагать, что образец можно рассматривать как две балки с консолями несколько особой формы, соединенных между собою по среднему опорному сечению CD и нагруженных по наружным концам. Это наблюдение

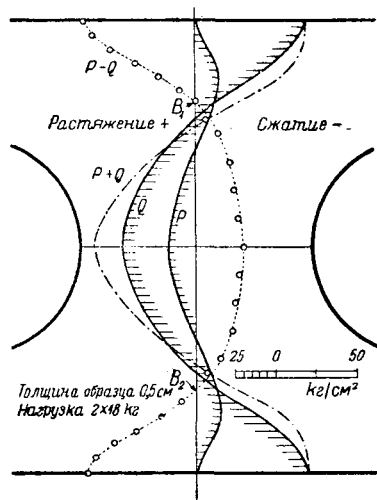
дает на практике приближенное представление о том характере распределения напряжений, который обнаруживается затем при дальнейшем оптическом исследовании.

Напряжения в точках круговых контуров (фиг. 7.182) достигают максимальной величины $131,9 \text{ кг/см}^2$ в точках на угловых расстояниях 50° от оси образца, в точке пересечения оси с круговым контуром напряжение доходит только до $53,8 \text{ кг/см}^2$ при полной нагрузке в $36,0 \text{ кг}$ и толщине образца $0,500 \text{ см}$.

При этом распределении напряжений максимальное нормальное напряжение, действующее перпендикулярно волокнам, достигает величины $74,5 \text{ кг/см}^2$ для точек с угловым расстоянием 45° , так что такой формы образец не разрушается по среднему поперечному сечению. Этот эффект может увеличиться при передаче нагрузки на круговой контур посредством цилиндров такой же кривизны, так как при этом, вообще говоря, получаются наибольшие местные напряжения у крайних точек соприкасающихся дуг. Некоторые из образцов на раскалывание действительно разламываются у внутренней крайней точки касания. Сжимающие



Фиг. 7.183.



Фиг. 7.184.

напряжения в точках вдоль верхнего и нижнего краев образца тоже значительны; максимум их доходит до $76,1 \text{ кг/см}^2$ в двух симметричных точках, разделенных средней с минимальным напряжением $68,3 \text{ кг/см}^2$. Наличие двух точек с нулевыми разностями напряжений на фиг. 7.181 по среднему поперечному сечению, расположенных не очень далеко от соответствующих круговых контуров, указывает на то, что можно ожидать значительного по величине поперечного напряжения Q ; к такому же заключению приводит изображение распределения напряжений вдоль этой линии; полученные результаты изображены на фиг. 7.183, где Q является растяжением и достигает в центре величины $46,4 \text{ кг/см}^2$, в то время как нормальное напряжение P в том же месте достигает небольшой величины в $17,6 \text{ кг/см}^2$; по концам сечения P достигает максимума — $53,8 \text{ кг/см}^2$, т. е. немного больше максимального значения Q . Распределение напряжений в точках того сечения, по которому образец должен был бы разрушиться, сильно поэтому отличается от первого случая, в то время как напряжения в точках по круговым контурам вырезов очень неблагоприятны для достижения намеченного способа разрушения, о чем уже говорилось раньше. Таким образом, нет настоящего основания для сравнения результатов испытаний, полученных для этих двух форм образцов. Интегрирование площади, ограниченной кривой распределения напряжения P , показывает, что вычисленная таким образом нагрузка превышает действительную на $2,25\%$.

Интересно разобрать здесь предположение, состоящее в рассмотрении этого образца как соединения двух двойных консольных балок; все несовершенство этой аналогии тотчас же обнаруживается при рассмотрении системы напряжений на

фиг. 7.184, где нормальное к вертикальному поперечному сечению напряжение Q изменяется всюду не по линейному закону, в то время как и главное напряжение P , перпендикулярное к Q , тоже не линейно. Кривые для P и Q пересекаются в двух точках B_1 и B_2 , соответствующих нулевым значениям разности главных напряжений; это указывает, что B_1 и B_2 не являются нейтральными осями балок. При интегрировании по сечению обе системы напряжений не дают равнодействующую, равную нулю.

Подвергались исследованию варианты этой стандартной формы образца с уменьшенными радиусами вырезов и измененной шириной настолько, чтобы среднее поперечное сечение сохраняло свои прежние размеры. Здесь будет, вероятно, достаточно привести лишь в общих чертах полученные результаты. Оказалось, что первое изменение радиуса мало улучшает распределение напряжений в точках по круговым контурам, хотя напряжение Q вдоль среднего горизонтального поперечного сечения уменьшается по сравнению с нормальным напряжением P .

При дальнейшем изменении этой новой формы образца путем увеличения высоты обнаруживается заметное улучшение в распределении напряжений по круговым контурам за счет относительного увеличения в точках среднего поперечного сечения напряжений Q по сравнению с нормальными напряжениями P .

Каждая форма образца из изотропного материала приводит, следовательно, к своеобразному распределению повышенных напряжений, а если принимать во внимание анизотропность дерева, то можно предположить, что она вносит дополнительное усложнение в распределение напряжений в изотропном образце.

Можно, следовательно, вывести заключение, что сравнимые результаты испытаний на раскалывание при этих типах образца могут быть получены в том только случае, когда применяется одна какая-нибудь форма образца; числовое значение сопротивления раскалыванию, вычисленное по разрушающему грузу в предположении о распределении напряжений таком же, как в модели из изотропного материала, может дать только приближенную характеристику этого сопротивления, связанную с той или другой из двух стандартных форм образцов или же их вариантов, в зависимости от относительных изменений их размеров.

Благодаря сложному характеру распределения напряжений, обнаруженному при опытах, будет может быть лучше определять сопротивление раскалыванию дерева на основании обычного испытания на растяжение, при расположении волокон перпендикулярно действию нагрузки. При таком испытании на протяжении небольшой длины нормальные напряжения будут передаваться через большое количество клеток, и их различная прочность обеспечит разрушение в самом слабом месте. Образцы такого типа круглого поперечного сечения с небольшим диаметром в средней части рвались, как это оказалось,¹ поперек волокон. Численное значение напряжения, требующегося для этого разрушения, и представляет собой при этом способе испытания наименьшее значение сопротивления дерева раскалыванию.

¹ C. F. Jenkin, loc. cit., стр. 629.

ГЛАВА VIII

КОНСТРУКЦИИ И МАШИНЫ

§ 8.01. Общие соображения.

Приведенные в предыдущих главах многочисленные случаи исследования напряжений и деформаций при помощи оптического метода иллюстрируют успехи развития теории упругости, причем во многих случаях опытным путем достигнуто больше, чем путем анализа. В данной главе приведены сведения о некоторых исследованиях оптическим методом распределения напряжений в конструкциях и машинах, где точное вычисление их или затруднительно или просто невозможно. За несколько последних лет инженерами были проделаны большие и подробные исследования оптическим методом характера распределения напряжений в конструкциях и машинах и их элементах; целью этих изысканий было получение данных для дальнейшего проектирования, в особенности же в тех случаях, в которых проектирование до сих пор за недостатком точных данных зависело только от собственных соображений и опытности инженера.

Полного описания проделанных исследований дать невозможно из-за их объема; приведенные же здесь, представляющие практический интерес примеры типичны главным образом как по примененным методам, так и по полученным результатам.

§ 8.02. Принцип динамического подобия (аналогии).

Опыты по определению напряжений в конструкциях, при помощи оптического метода на моделях или другими способами, могут быть значительно упрощены при применении принципа динамического подобия;¹ поэтому ниже этот вопрос разобран подробно.

1. *Общий случай конструкции конечной толщины.* Рассмотрим любую могущую деформироваться конструкцию при действии нагрузки. Изготовим модель такой конструкции с соблюдением масштаба, но из другого материала. Исследуем теперь условия, которые должны быть удовлетворены для упругих постоянных и действующих нагрузок, чтобы деформации основной системы и модели были геометрически подобны. Пусть k будет коэффициент подобия между моделью и оригиналом, так что если l — какая-либо длина в оригинале, то kl будет соответствующей ей длиной в модели.

Если x, y, z будут координатами какой-либо точки в оригинальной конструкции, то (kx, ky, kz) будут координатами соответствующей точки модели.

Если (u, v, w) будут перемещениями точки с координатами x, y, z , то (ku, kv, kw) будут перемещениями точки (kx, ky, kz) .

¹ *N. G. Filon, Note on the Principle of Dynamical Similarity applied to Deformable Elastic Structures, Report of the British Association Committee on Stress Distribution in Engineering Materials, 1919.*

Составляющие деформации

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

одинаковы в модели и в оригинальной конструкции.

Напряжения представляются формулами:

$$\widehat{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

и двумя подобными ей;

$$\widehat{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

и двумя другими подобными; λ и μ — упругие постоянные Ламэ.

Таким образом, вообще говоря, для динамического подобия при изменении упругих постоянных в какой-либо пропорции необходимо в том же отношении изменить и приложенные напряжения.

2. *Стержневая система.* Для случая плоской системы, составленной из тонких стержней, под нагрузкой, действующей в ее плоскости, если обозначим через T растягивающее усилие и M — изгибающий момент в какой-либо точке стержня, а T' , M' соответствующие величины в модели, тогда:

$$T = E\Delta s,$$

$$T' = E'\Delta' s',$$

где s , s' являются продольными деформациями стержней в действительной конструкции и в модели; E , E' — модули Юнга, Δ , Δ' — площади поперечных сечений стержней.

Теперь $s = s'$ по геометрическому подобию, отсюда

$$T: T' = E\Delta: E'\Delta'. \quad (8.021)$$

Далее

$$M = EI/R,$$

где I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси и R — радиус кривизны стержня.

Подобно этому $M' = E'I'/R'$; ясно, что $R' = kR$, по геометрическому подобию. Пусть p будет отношением величины сил (не напряжений) в модели и в оригинале. Тогда

$$M' = Mpk$$

или

$$E'I'/R' = pk(EI/R)$$

и

$$E'I'/EI = pk^2. \quad (8.022)$$

Но на основании (8.021), так как $T' = pT$,

$$E'\Delta'/E\Delta = p. \quad (8.023)$$

Из (8.022) и (8.023) делением получаем

$$(I'/\Delta')/(I/\Delta) = k^2 \quad (8.024)$$

Пусть K будет радиусом инерции поперечного сечения какого-либо стержня действительной конструкции, а K' — в модели

Тогда

$$I = \Delta K^2, \quad I' = \Delta' (K')^2;$$

из (8.024) получаем тогда

$$(K')^2 / (K)^2 = k^2,$$

или

$$K' = k.K. \quad (8.025)$$

Таким образом, хотя поперечные сечения не должны быть обязательно геометрически подобными (при тонких стержнях), отношение радиусов инерции их поперечных сечений должно равняться отношению геометрического подобия k .

Удовлетворив этому условию, мы видим из уравнения (8.023), что отношению жесткостей $E\Delta/E'\Delta'$ для стержня, как целого, должно быть таким же, как коэффициент динамического подобия p , т. е. как отношение между приложенными нагрузками.

Коэффициент k задается обычно заранее; по известному k определяется и радиус инерции K для стержневой модели. Выбор материала для модели оказывается обычно не вполне произвольным. Таким образом E' тоже задано. Зато можно изменять Δ' в широких пределах, не меняя k . Простым примером является случай модели с стержнями прямоугольного сечения.

Высота сечения будет $K'\sqrt{12}$, следовательно она задана. Зато ширина $2b$ находится в нашем распоряжении и может быть изменена с таким расчетом, чтобы Δ' удовлетворяло уравнению (8.023). В частном случае некоторые стержни или балки в конструкции оказываются нерастяжимыми или несгибаемыми по сравнению с другими. В этом случае E будет бесконечно большим, а следовательно и E' должно быть также бесконечно большим. В таких случаях необходимо и соответствующие стержни модели делать также нерастяжимыми и не гнущимися по сравнению с прочими элементами. Если это сделано, нам остается только позаботиться о тождестве условий для наступления пластических деформаций в деформируемых частях модели и оригинала.

Если модель и оригинал сделаны только из двух видов материала — пластичного и хрупкого, то уравнению (8.023) удобнее всего бывает удовлетворить, подобрав соответствующим образом коэффициент динамического подобия, т. е. приложив к модели соответствующие грузы вместо изменения в нужной пропорции поперечных сечений.

3. *Условия прочности для модели.* Важное значение имеет вопрос о величине разрушающих напряжений в модели. Нагружая модель так, чтобы вызвать в ней напряжения, удовлетворяющие условиям подобия, надо не довести ее до разрушения.

Если u и u' будут расстояния от нейтральных осей до крайних волокон в действительной конструкции и модели, то наибольшие напряжения будут выражаться следующими формулами:

$$E_s + E_y/R \quad (\text{оригинал})$$

$$E's' + E'y'/R' \quad (\text{модель})$$

(для каждой величины в формулу вводится числовое ее значение с положительным знаком). Пусть $s' = s$, $R' = kR$, но u' , вообще говоря, не равно ku .

Так как $K' = kK$, то в случае прямоугольного стержня $u' = ku$; поэтому возможно считать, что u' будет по величине порядка ku (Отметим, что $u' = ku$ и для подобных сечений.)

Таким образом случай прямоугольных стержней можно рассматривать как типичный.

Мы имеем, следовательно, $u/R = u'/R'$ и отношение наибольших напряжений в модели и в оригинале $= E' : E$. Таким образом наибольшая относительная дефор-

мация в модели равна наибольшей относительной деформации в действительной конструкции.

Отсюда следует, что наибольшая относительная деформация, которая получается в действительной конструкции, при рассмотренных условиях не вызывает опасности для материала модели.

Если же модель сделана из более деформируемого материала, чем оригинал, то модель обычно выдерживает гораздо большие деформации, чем те, при которых произошло бы разрушение материала оригинала. Так, например, нитроцеллюлоза гораздо более деформируемый материал, чем дерево; поэтому, если в действительности какая-либо часть аэроплана сделана из дерева, а в модели — из нитроцеллюлозы, то полученное нами в предыдущем абзаце заключение будет правильно. Нагрузка на целлюлоидную модель будет оставаться в безопасных пределах даже и тогда, когда соответствующие нагрузки на деревянный элемент оригинала уже выйдут за допускаемые пределы; это обстоятельство важно при исследовании возможности появления опасных напряжений.

§ 8.03. Статически неопределимые конструкции.

Во многих случаях мы встречаемся с статически неопределимыми конструкциями как с жесткими узлами, так и имеющими лишние стержни; в этих случаях необходимо использовать дополнительные условия для получения достаточного количества уравнений, позволяющих разрешить задачу определения усилий в этой конструкции.

Обычный путь решения задачи заключается в предположении, что нагрузка возрастает постепенно и что потенциальная энергия, накопленная в конструкции, имеет минимальное значение.

Любой элемент конструкции длиной l с продольным усилием P , изгибающим моментом M и перерезывающей силой S накапливает в себе запас энергии U , выраженный формулой:

$$2U = \int_0^l \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{P^2}{E\Delta} + \frac{k}{\mu} \cdot \frac{S^2}{\Delta} \right] dl, \quad (1)$$

где k множитель, зависящий по величине от формы сечения.

Если наша система имеет n лишних неизвестных $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$, то для каждой из них мы имеем уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \sum \left(\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F_k} dl + \int \frac{P}{E\Delta} \cdot \frac{\partial P}{\partial F_k} dl + k \int \frac{S}{\mu\Delta} \cdot \frac{\partial S}{\partial F_k} dl \right) = 0,$$

где суммирование распространяется на все элементы конструкции; в результате мы получаем n добавочных уравнений для определения неизвестных усилий, что разрешает статическую неопределимость задачи.

В большинстве практических случаев уравнения, которые необходимо решить, оказываются очень громоздкими даже в том случае, когда отбрасываются, по их малости, малые слагаемые, зависящие от осевых усилий P и перерезывающих сил S .

Дальнейшие затруднения возникают при применении полученных таким образом результатов расчета к оценке напряжений в действительной конструкции, в которой встречаются резкие изменения очертаний, вызванные устройством стыков и изменениями сечения; между тем эти обстоятельства сильно отзываются на проектировании статически неопределимых конструкций. В большей или

¹ Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, 1899. См также ссылку в работе E. S. Andrews, Elastic Stresses in Structures.

меньшей степени с подобными затруднениями приходится встречаться и при так называемых статически определимых конструкциях, имеющих обычно жесткие узлы вместо шарнирных, как это предполагается в расчетах.

Интересно отметить, что преимущества применения оптического метода к исследованию подобных случаев были ясны уже Брюстеру при открытии им появления двойного лучепреломления при наличии напряжений; в статье,¹ написанной им для Royal Society в 1816 г., он отмечает, что напряжения в арках могут без сомнения быть определены при помощи стеклянных моделей. Несмотря на то, что это предложение в то время не привело очевидно ни к чему определенному, однако время от времени стали делаться попытки использовать предложение Брюстера, хотя и без особых практических результатов. Это зависело вероятно от того, что модели изготовлялись из стекла, материала, трудно обрабатываемого и обладающего кроме того низким оптическим коэффициентом напряжения, вследствие чего трудно определять распределение напряжений; хрупкость же материала делает его чрезвычайно склонным к появлению трещин при резких изменениях в распределении напряжений, что часто встречается в арках и других статически неопределимых конструкциях.

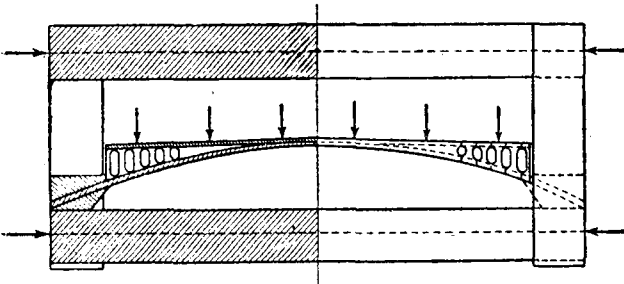
Самой удачной попыткой из всех, которые производились на основе предложения, высказанного Брюстером, были опыты Менаже;² последний сконструировал около 1913 г. стеклянную модель железобетонного моста через Рону с пролетом 95 м для того, чтобы проверить расчеты проектировщиков; расчеты эти, казалось, повидимому, вызвали некоторые сомнения, и было признано желательным измерить напряжения каким-нибудь иным, совершенно независимым от этих расчетов, способом. Модель эта, сделанная целиком из стекла, изображена на фиг. 8.031; ребро арки-модели соединено с стеклянными массивами у каждого конца стеклянной рамы. Ездовое полотно соединяется с аркой посредством стеклянных пластинок, которым придана соответствующая форма. Показанные на чертеже стрелками нагрузки прикладывались к модели посредством пружинных весов; кроме вертикальных сил можно было приложить и горизонтальное сжатие при помощи стальных стержней, напрягающих горизонтальные элементы рамы; при помощи этих болтов можно было приложить по указанным на чертеже горизонтальным линиям заданные нагрузки или деформации.

Особенностью этого исследования было применение компенсатора Бабинэ типа, описанного в § 1.36; он был применен для измерения двойного лучепреломления, возникающего в напряженных элементах.

Несмотря на то, что измерения при помощи этого инструмента дают лишь длину волны, что требует для большинства практических случаев перехода к величине напряжений, он все же имеет большие практические преимущества при исследовании целого ряда статически неопределимых конструкций, в особенности для тех сечений прямых или кривых стержней, которые достаточно удалены от точек приложения нагрузки и мест стыков; распределение напряжений в этих сечениях оказывается зачастую линейным. Пользуясь компенсатором

¹ Brewster, On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances by mechanical compression and dilatation, Transactions of the Royal Society, 1816.

² M. Mesnager, Détermination complète sur un Modèle réduit des Tensions qui se produiront dans un ouvrage, Annales des Ponts et Chaussées, ч. IV, 1913.

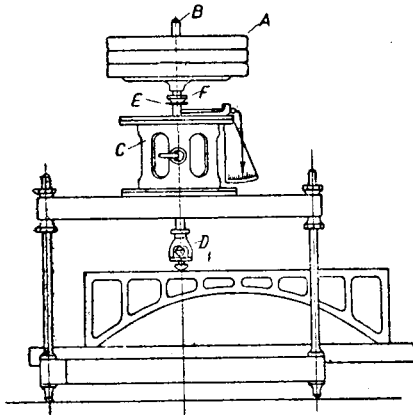


Фиг. 8.031.

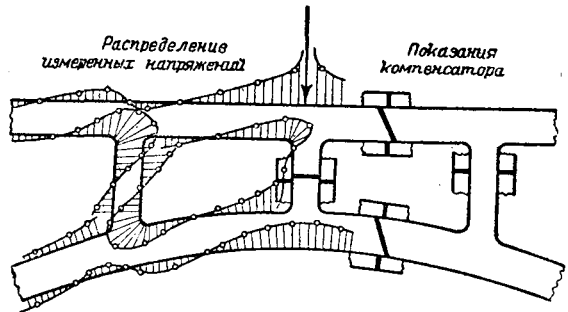
Бабинэ, можно обнаружить этот характер распределения напряжений, вызывая перемещение черной полосы пропорционально осевому напряжению; при возникновении же изгиба добавляется еще угловое перемещение, пропорциональное изгибающему моменту.

Употребление нитроцеллюлозы для моделей конструкций оказывается особенно удобным при многих видах испытаний, так как этот материал легко обрабатывается, не получая остаточных напряжений; из него был изготовлен ряд моделей разных конструкций, склепанных из листов и уголков.

Однако во многих случаях, в особенности же при рассмотрении в поляризованном свете клепаных стыков при соединении двух или больше листов или элементов других форм, получается картина очень сложной системы напряжений, разобраться в которой бывает очень трудно; наблюдаемая картина распределения напряжений состоит, вообще говоря, из двух разных плоских систем, наложенных одна на другую при разных осях поляризации.



Фиг. 8.032.



Фиг. 8.033.

Эти затруднения иногда возможно избежать, сконструировав элемент такой формы, что картина напряжений для него не переплетается с изображением напряженного состояния в том элементе, с которым он соединен; однако проще проектировать модель по принципам динамического подобия (§ 8.02) и изготовить ее из одного листа. В качестве подобного примера на фиг. 8.032 изображена двухшарнирная арка, помещенная в специально устроенный пресс. В таких случаях максимальные напряжения появляются в точках контура; обычно определяют систему напряжений для каждого груза в отдельности и затем складывают их вместе в зависимости от группировки грузов. На фиг. 8.033 изображены результаты таких измерений для панели, расположенной непосредственно влево от среднего сечения на фиг. 8.032 при центральной нагрузке; на этом же чертеже изображены также и соответствующие показания компенсатора Бабинэ для различных точек, для проверки измерений, полученных при помощи обычного метода сравнения с эталоном.

В случае приложения одновременно системы грузов, удобно пользоваться небольшими пружинными весами, описанными в следующем параграфе; они занимают мало места; для единичных же грузов, где требуется большая точность, лучше пользоваться непосредственной нагрузкой. Нагрузка, необходимая для испытания моделей, обычно невелика, однако затруднительно приложить непосредственную нагрузку к краю тонкой пластинки таким образом, чтобы он все же остался доступным для всестороннего наблюдения. Это можно осуществить при помощи несколько видоизмененной машины с диафрагмами, описанной в § 7.07 и показанной на фиг. 8.032,

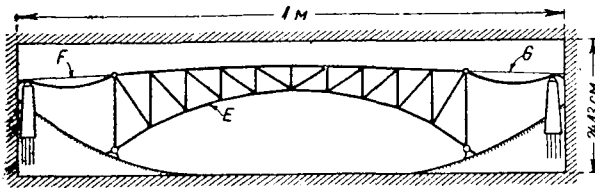
В этой машине грузы А располагаются на стержне В, проходящем через две тонких кольцевых диафрагмы, прикрепленных к кольцевой раме С; диафрагмы

возвращаются в первоначальное положение после приложения груза при помощи винта D ; действуя этим винтом, одновременно приводим к нулю показание стрелки, изображенной в правой части рисунка.

При этом устройстве в нагрузку входит и вес плунжера; желательнее уравновесить и этот груз. Этого можно добиться при помощи вспомогательной плоской пружины E , опертой по концам; она нажимает на плунжер посредством гайки F ; ее вращают до тех пор, пока стрелка до приложения непосредственной нагрузки не покажет нуль, и потом закрепляют. Приводя стрелку к нулю вторым винтом D , обеспечивают передачу на модель только непосредственной нагрузки.

В текущей литературе имеется ряд описаний определения распределения напряжений в различных простейших статически не определяемых конструкциях¹.

Для исследования очень больших моделей мостов устраивались полярископы, описанные в § 1.39. Подобные конструкции требуют обычно сравнительно длинного поля зрения, но не очень широкого; на фиг. 8.034 представлен схематический чертеж модели



Фиг. 8.034. Модель моста из целлюлоида.

и береговых пролетов, вырезанных из отдельных листов нитроцеллюлозы и соединенных между собою не показанными на чертеже поперечными стержнями. Для того чтобы изучать напряжения сразу по всей модели, был устроен особого вида полярископ, изображенный в поперечном разрезе на фиг. 8.035.

Источником света является набор обычных ламп, укрепленных в раме A ; к ней же прикреплены трубчатые лампы A' , для уничтожения по возможности тени, отбрасываемой рамой.

Свет, получаемый при таком расположении ламп, далеко не однороден, но, пройдя через стеклянный экран B , он становится таковым в достаточной степени, хотя сила его при этом значительно уменьшается. Она уменьшается еще больше после отражения от листа марблита C размерами около 100 см на 64 см, помещенного под углом поляризации.

Отраженный луч проходит затем через пластинки D и E , в четверть волны одиноковых размеров 99 см на 24 см, как показано на фиг. 8.034. Модель моста E занимает пространство между этими пластинками и может быть рассматриваема через анализатор, состоящий из тонких стеклянных пластинок G , перекрывающих под соответствующим углом все поле зрения.

При мощном источнике света и чистых от пыли поверхностях, полярископ этого вида оказывается очень подходящим для получения картины распределения напряжений в модели очень большого моста или иной подобной конструкции. Его можно было бы еще улучшить, заменив набор ламп специальным прожектором.

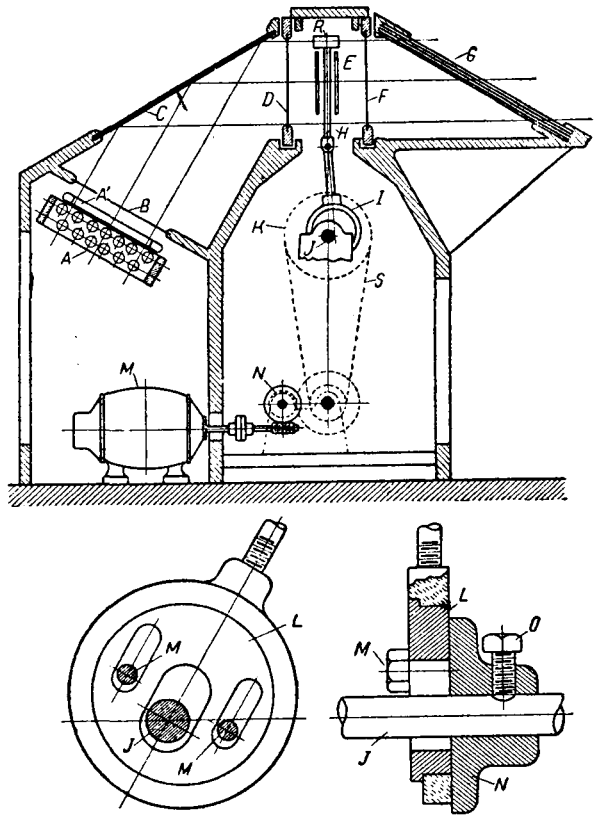
Расположение нагрузок на модели моста может быть произвольным; при том виде нагрузки, которая показана на чертеже, модель прогибается при нажатии на нее роликов R , перемещающихся при помощи ползуна H и эксцентрика I , прикрепленного к валу J , вращающемуся при помощи зубчатого колеса K и

¹ E. G. Coker, Photo-Elastic Methods of Measuring Stress, The Institution of Aeronautical Engineers, Minutes of Proceedings, № 17, February 1924. Some Engineering Problems of Stress Distribution, Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924. Some Experimental Methods and Apparatus for determining the Stresses in Bridges and Framed Structures, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 229, Session 1929—1950, ч. I.

цепной передачи S от электрического мотора M , движущего червячную передачу N . Каждый из эксцентриков I имеет переменный эксцентриситет, как показано на нижней части рис. 8.035; они состоят из диска N , прикрепляемого в любом положении к валу J при помощи зажимного винта O . К диску N прикрепляется эксцентрично шкив L , имеющий параллельные прорезы, благодаря которым можно изменять эксцентриситет шкива по отношению к валу J ; шкив может быть закреплен в любом положении посредством болтов M , прикрепляющих шкив к диску N .

Таким образом можно в широком масштабе регулировать величину прогибов и их распределение, а прикрепленные к модели пружинные весы могут в это же время передавать на модель определенные схемы нагрузки.

В полярископе такого вида получается сильный нагрев от рамы с лампами; при действии этой температуры стеклянные пластинки могут изогнуться и испортить таким образом поле зрения. Поэтому необходимо устроить хорошую вентиляцию, сделав соответствующие отверстия и поставив электрический вентилятор для того, чтобы получалась циркуляция воздуха внутри полярископа.



Фиг. 8.035.

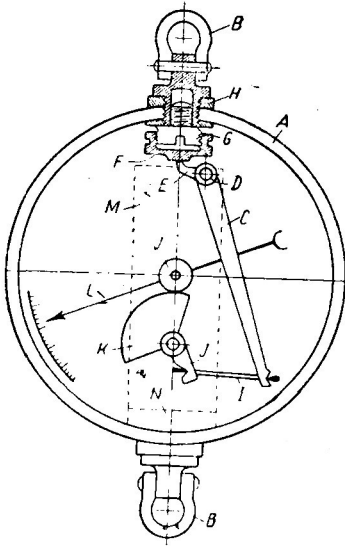
§ 8.04. Пружинные весы, применяемые при исследованиях оптическим методом.

При исследовании прозрачных моделей, конструкций и частей машин часто оказывается необходимым прикладывать грузы так близко один от другого, что неудобно пользоваться гирями или обыкновенными пружинными весами, занимающими много места; приходится поэтому прибегать к другим, менее громоздким способам, при помощи которых можно прикладывать и измерять растягивающие и сжимающие грузы значительных величин.

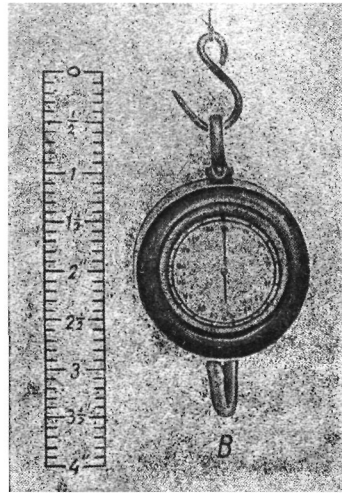
Упругость стального кольца, заменяющего собою спиральные пружины, дает возможность уменьшить размеры громоздких пружинных весов до размера небольших карманных часов; это удается, так как изменения длины диаметра кольца пропорциональны нагрузке; увеличивая их при помощи рычажного механизма, можно по шкале измерять величину этих изменений в соответствующих единицах.

Распределение напряжений в кольцах различной формы рассматривалось уже в главах IV и VI; очевидно, что неравномерность напряжений в кольцах и их вес могут быть уменьшены на основании исследований кольца переменной ширины, но постоянной толщины, при помощи оптического метода. Некоторые данные о таких экспериментах приводит The Journal of the Franklin Institut, 1923; в описанных там опытах для изготовления пружинных весов первоначальной конструкции применялись кольца, у которых толщина возрастала при приближении к линии действия силы.

В весах последних конструкций механизм упрощен. Типичным примером таких пружинных весов, употребляемых при опытах на растяжение, служат весы, изображенные на фиг. 8.041а, в поперечном разрезе, на фотографии же 8.041b изображен их внешний вид. Прибор весит около



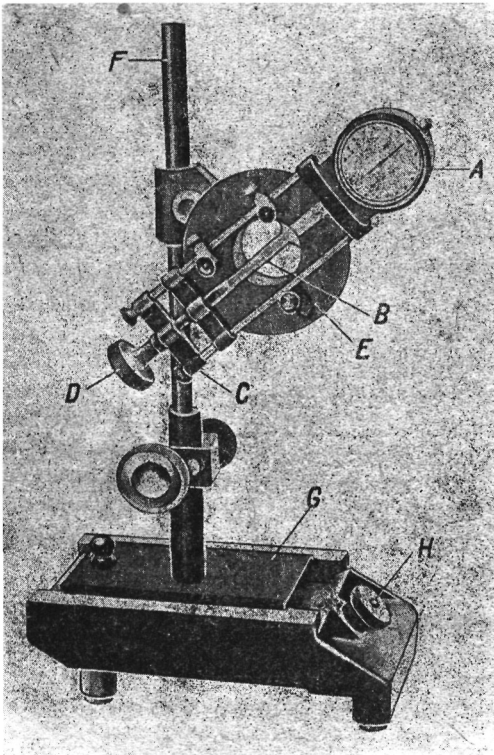
а



b

Фиг. 8.041. Пружинные весы. Грузоподъемность 72,6 кг; вес 0,05 кг.

0,057 кг, а поднимает груз до 72,6 кг; этот тип весов оказывается подходящим для многих опытов. Кольцо А диаметром в 4,1 см переменной толщины, симметрично по отношению к линии действия груза; оно снабжается двумя концевыми захватами В для закрепления в любом положении. Растяжение кольца по его диаметру измеряется при помощи механизма, состоящего из коленчатого рычага С с точкой опоры в D; более короткое плечо Е соприкасается с поверхностью детали F, прикрепленной к головке винта G, проходящего через H, к которому прикрепляется и верхний захват.



Фиг. 8.042.

Нижнее более длинное плечо рычага соединяется посредством петли I с новым коленчатым рычагом J, связанным с зубчатым сектором K, соединенным с шестерней J, к которой прикреплена стрелка L, движущаяся по градуированной шкале, на которой деления прямо показывают на грузку в фунтах. Масштаб шкалы не одинаков; в зависимости от соотношений частей передающего механизма он может быть большим в начале или в середине или в конце шкалы, смотря по желанию.

Установка на нуль производится посредством навинчивания гайки F на нарезную головку болта G . Весь механизм закреплен в съемной раме M , прикрепленной к нижнему зажиму N . В пружинных весах другого типа применялся более сложный механизм для получения равномерных отсчетов по шкале, наибольшая нагрузка колебалась в пределах от 1,4 до 680 кг, в зависимости от условий и целей опыта.

Весы больших размеров весят около 0,34 кг.

Пружинные весы такого типа весьма употребительны для измерения сил в компенсаторе, применяемом обычно для определения разности напряжений ($P—Q$) в любой точке прозрачного предмета.

Обычно весы и компенсатор устанавливаются в одну раму друг за другом и нагрузка осуществляется при помощи винта. Такое устройство показано на фиг. 8.042, где пружинные весы A установлены на одном конце прямоугольной рамы, а компенсатор B помещен в захватах, один из которых прикрепляется к кольцу пружинных весов A , а другой — к ползунку C , передвигаемому винтом D , запящички которого опираются на шариковый подшипник, так что можно легко приложить груз 130—180 кг вручную. Для удобства отсчетов по компенсатору в любом месте просвечиваемой модели рама, несущая компенсатор, соединена в кинематическую пару с кольцевым диском E , вращающимся в подшипнике, прикрепленном к колонке F . Сама колонка прикреплена к поперечным салазкам G в отливке H , двигающейся по суппорту, на котором помещается оптический прибор.

Это устройство обеспечивает возможность всех необходимых перемещений компенсатора для установки его в любом нужном для измерений положении.

§ 8.05. Распределение напряжений в частях зданий.

История проектирования и сооружения зданий представляет собой историю развития строительного искусства от примитивных форм, присущих эпохе начала цивилизации, до современного разнообразия архитектурных стилей, на которых при непрерывной эволюции отразились климатические, социальные и другие исторические причины.

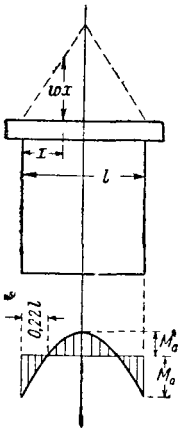
Вплоть до самого последнего времени сомнительно, чтобы при сооружении зданий сколько-нибудь заметную роль играли научные соображения или эксперименты. Архитектора античного мира и средневековья находили вероятно свои пути к решению крупных строительных задач при помощи интуиции, сопряженной с большими ошибками. Недостаток знаний о распределении напряжений в сложных постройках средних веков, как в надземных сооружениях, так и в фундаментах, вполне соответствует эпохе, почти совершенно незнакомой с научными и экспериментальными методами исследования.

Даже и в наши дни в практике большинства архитекторов вероятно не редки случаи, когда при проектировании нового сооружения или при перестройке старого, возникают такого рода строительные задачи, для которых не существует готовых способов решения, или же таких, которые могли бы быть легко получены из основных принципов расчета; приходится полагаться на практику существующих сооружений, и на этом основании приступать к решению задач нового типа. Подобные затруднения будут встречаться, вероятно, и в будущем, благодаря непрекращающейся тенденции усложнять сооружения, в особенности же в городах, где приходится сосредоточивать деловые операции в одном месте, на небольшой сравнительно площади, где необходимо удовлетворять потребностям большого числа людей, нуждающихся в определенных удобствах для быстрого выполнения своих дел.

Особенно остро стоял этот вопрос в деловом квартале Нью-Йорка, в приморской части острова Мангаттан, где научно обоснованная проектировка и выполнение очень больших зданий, до 40 и больше этажей, достигли высокого совершенства; успех этого строительства отразился на строительстве и в других странах. Что касается обыкновенных архитектурных работ, то все сведения о них дают мало точных данных относительно возникающих в связи с этим строительных за-

дач, а если и приводятся решения, то обычно только в виде краткой ссылки на применение какого-либо способа, основу которого затруднительно или просто невозможно отыскать; или же правило это настолько просто, что вряд ли оно основано на чем-либо серьезном.

Примером таких примитивных решений может служить расчет кирпичной стены, в которой необходимо вырезать прямоугольное отверстие для окна. В некоторых руководствах говорится, что нагрузка на перемычки окна составляет вес треугольной части стены, как указано на фиг. 8.051 пунктиром; описанные же ниже опыты указывают на то, что напряжения здесь более сложны и не могут зависеть от такой простой формы нагрузки.



Если предположить, что такая нагрузка воспринимается балкой постоянного поперечного сечения с заделанными концами, то легко вычислить напряжения в перемычке пролетом l , рассматривая ее как балку с шарнирными концами, на которую действуют опорные моменты M_0 . Мы получаем, что изгибающий момент в шарнирно-опертой балке M_x в сечении на расстоянии x от опоры, будет равен $M_x = \omega \left(\frac{1}{8} l^2 x - \frac{1}{6} x^3 \right)$ при $x \leq l/2$; отсюда

$$M_0 = - \int_0^{l/2} (M_x dx) \cdot \frac{1}{2} l = - \frac{5}{192} \omega l^3 \text{ для опорных сечений, а для}$$

средины пролета изгибающий момент равен $M_e = \frac{3}{192} \omega l^3$.

На расстояниях, приблизительно, $0,22l$ от концов изгибающий момент будет равен нулю. При этих предположениях распределение напряжений в верхних и нижних волокнах перемычки соответствует

Фиг. 8.051.

в ином масштабе ординатам эпюры изгибающих моментов (фиг. 8.051).

Этот случай не был нами непосредственно исследован, но более трудный аналитически случай монолитного сооружения был разобран при помощи оптического метода; оказалось, что горизонтальные контуры оконных отверстий испытывали несколько более сложное распределение напряжений того же вида; эти напряжения зависели в некоторой степени от общей нагрузки, помещающейся над оконными проемами.

Другой подходящей как будто для исследования проблемой, о которой имеется, очевидно, мало сведений, является задача, связанная с вопросом о распределении нагрузки в фундаментах.

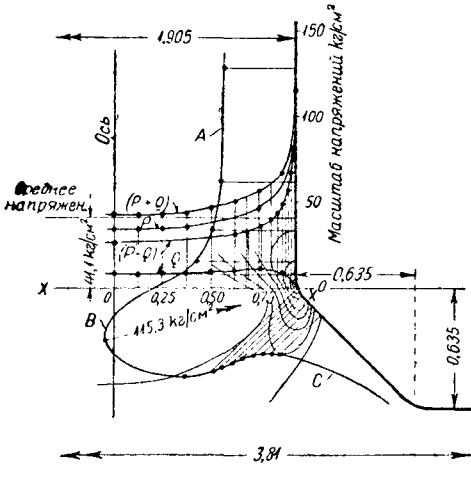
Непосредственные опыты над основаниями из каменной или кирпичной кладки и бетона обходятся дорого; результаты же не всегда поддаются точной интерпретации, так как распределение напряжений заранее не известно, наблюдения же над ними во время опытов чрезвычайно затруднительны. Все данные, которые можно получить из этих опытов, ограничиваются результатами наблюдений над характером разрушения конструкций. Не трудно, однако, произвести опыты над прозрачными моделями стен перекрытий, колонн и тому подобных элементов зданий; при этих опытах возможно изучать распределение напряжений, вызванных нагрузкой почти вплоть до разрушения.

Рассмотрим прежде всего распределение напряжений в сплошном монолитном основании под стену толщиной в $45,8 \text{ см}$, уширяющемся до $91,4 \text{ см}$ уступами размером по $11,43 \text{ см}$, как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях. Маленькая модель этой стены, сделанная из листа ксилонита, изображена на фиг. 8.052.

При нагрузке модели на прессе, описанном в § 7.07, обнаруживается местная концентрация напряжений по площадкам касания; равномерное распределение напряжений возможно только на небольшом уже расстоянии от досок пресса, если только они не сделаны из того же материала и тех же размеров,

которые были бы неизбежны, если бы были строго выполнены действительные условия. Изменение интенсивности напряжения по всему контуру изображено ординатами, перпендикулярными к поверхности стены; эти ординаты дают кривую распределения напряжений ABC (фиг. 8.054), пересекающую основание в точке C , где напряжение равно нулю. Оно равно нулю также и в точках треугольной (приблизительно) площади, лежащей поблизости от точки C .

Способ измерения напряжений показан на чертеже путем изображения нескольких из упоминавшихся выше малиново-синих изохроматических полос D ; при помощи этих полос получено несколько точек кривой распределения напряжений, как указано на рисунке.



Фиг. 8.055. Распределение напряжений по контуру и по сечению XX видоизмененного фундамента.

Мы повсюду имеем пару главных напряжений; сумма их вертикальных составляющих равняется общей нагрузке.

Сумма эта будет

$$W = \Sigma \int y y dS = \Sigma (P \cos^2 \theta + Q \sin^2 \theta) dS,$$

где θ — угол наклона напряжения P к вертикали, dS — элемент площади поперечного сечения, а $y y$ есть вертикальное нормальное напряжение по этой площади.

Среднее измерение значения $y y$ находится путем графического интегрирования и составляет $40,4 \text{ кг/см}^2$ в $2,2\%$ (с недостатком), что для практических целей достаточно точно.

Если срезать ступенчатую часть фундамента плоскостями под углом 45° , проходящими через внутренние входящие углы, то получится другой тип основания, который нередко применяется для фундаментов и для опор концов бетонных колонн.

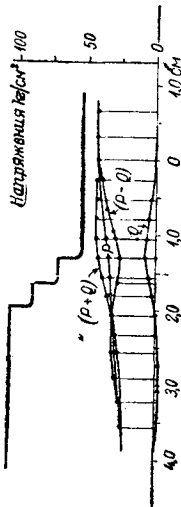
Даже в таком резко-измененном по форме фундаменте происходят только едва заметные изменения направлений линий главных напряжений.

Несколько странным на первый взгляд кажется только то влияние, которое оказывает на распределение напряжений срезывание части фундамента: в месте соединения фундамента со стеной напряжение уменьшается; опыт показывает, что при несколько меньшем среднем напряжении в $41,1 \text{ кг/см}^2$ максимальное молекулярное значение напряжения падает с $125,4 \text{ кг/см}^2$ до $115,3 \text{ кг/см}^2$, как показано на фиг. 8.055. Для того чтобы в этом убедиться, делали модели другого вида, но все опыты показали, что срезывание таким образом фундамента понижает напряжения в месте соединения фундамента со стеной.

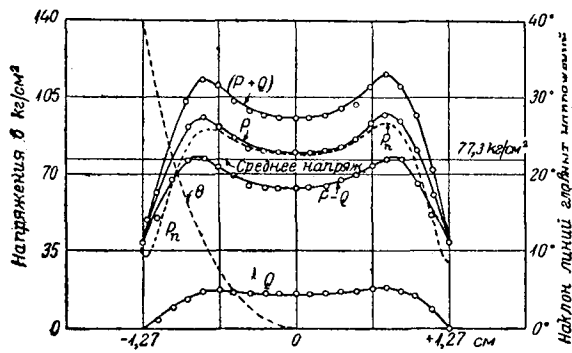
Это понижение напряжений сопровождается изменением их распределения по контуру ниже соединения, как видно из новой кривой распределения ABC ; ниже

сопряжения наблюдается очень быстрое уменьшение интенсивности напряжения, которое становится очень малым, когда контур снова делается горизонтальным. Как можно было ожидать, распределение напряжений по сечению XX оказывается мало изменившимся и только более равномерным за счет понижения конечных максимумов. В этом опыте общая точность измерений $P \pm Q$ повысилась, так как величина нагрузки по измерениям оказалась 99% действительной. Хотя главный интерес этих двух задач сосредоточивается на изучении наибольших напряжений, но есть и другие детали, которые должны привлечь наше внимание; одной из них является распределение напряжений по среднему продольному сечению фундамента стены.

Влияние внешнего контура на это распределение, вероятно, не очень велико, но несмотря на это с ним приходится считаться, так как более или менее резкое изменение сечения может вызвать поперечное напряжение. Проверить же точность измерений можно только исходя из общих соображений, что при одном и том же грузе можно ожидать почти одинакового распределения напряжений; различие может обнаружиться только в отно-



Фиг. 8.056. Распределение напряжений в точках вдоль оси ступенчатого фундамента.



Фиг. 8.057. Распределение напряжений по сечению YY ступенчатого фундамента фиг. 8.052.

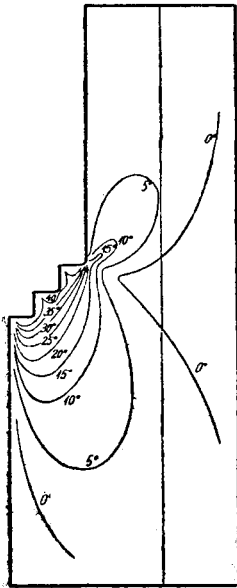
шению наименьших значений напряжения в зависимости от размеров модели и очертаний контура, как это в данном случае и оказалось. Сжимающее поперечное напряжение Q при ступенчатом фундаменте появляется в точках оси стены довольно далеко под фундаментом; оно достигает максимальной величины на уровне подошвы стены и около этого места (фиг. 8.056); затем убывает и обращается наконец в нуль в точке, лежащей почти под соединением фундамента с подошвой стены. Главное продольное напряжение P убывает постепенно в точках ниже области перехода; оно падает с $41,3 \text{ кг/см}^2$ до величин, которые зависят от местных давлений по подошве фундамента. В случае измененного фундамента распределение напряжений оказывается почти такими же, что подтверждает приведенные выше соображения.

Распределение напряжений по другим горизонтальным сечением ступенчатого фундамента не имеет значения, так как наибольшие величины напряжений сравнительно малы. Интересно, однако, отметить, что напряжения по сечению YY фиг. 8.052 находятся под таким сильным влиянием распределения напряжений в сечении, расположенном непосредственно выше, что максимальные значения их получаются не в крайних точках, как показано на фиг. 8.057. В данном случае наблюдения производились при повышенной нагрузке, вызывающей среднее напряжение $77,3 \text{ кг/см}^2$. Вообще же говоря, наибольшие напряжения возникают в точках контура, и исключения бывают редко.

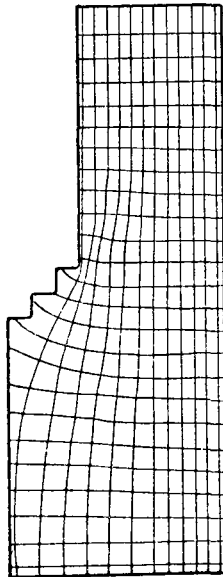
Такого же рода явления наблюдаются, но в меньшей степени, и по сечению ZZ (фиг. 8.052). У подошвы симметричного фундамента так же, как и в других сооружениях этого типа, наблюдается стремление к концентрации напряжений в точках около оси. Подобные же результаты получались и в уширенных концах образцов на растяжение, о которых говорилось в главе VII.

§ 8.06. Распределение напряжений в несимметричном фундаменте.

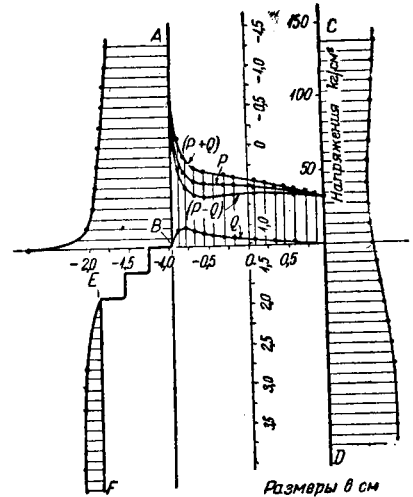
В некоторых случаях бывает необходимо увеличить площадь подошвы стены посредством подведения фундамента только с одной стороны; поэтому получается фундамент с несимметричным сечением; исследование его имеет важное



Фиг. 8.061. Изоклины в измененном ступенчатом фундаменте.



Фиг. 8.062. Линии главных напряжений в измененном ступенчатом фундаменте.



Фиг. 8.063. Распределение напряжений в измененном ступенчатом фундаменте.

практическое значение. Очевидно, что в подобном случае равномерно распределенная нагрузка одного торца модели вызовет неравномерные напряжения соприкосновения на другом торце и общее несимметричное распределение напряжений.

Была использована одна из моделей типа фиг. 8.052, у которой срезали одну сторону ступенчатого фундамента и получили модель, изображенную на фиг. 8.061, с плоскими и параллельными торцами; в испытательной машине ее подвергли нагрузке, передаваемой на торцы металлическими параллельными прокладками. При этих условиях передачи нагрузки мы не получаем равномерно распределенного давления на каждом из торцов; скорее при этом возникают продольные деформации, которые, складываясь в вертикальном направлении, укорачивают модель одинаково по всем вертикальным сечениям, при условии плотного прилегания прокладок к торцам. При такой нагрузке длина модели и положение уширяемого сечения по отношению к торцам влияют на получаемые результаты; поэтому применимость их к решению практических задач подобного рода требует оговорок; несмотря на это, полученные результаты полезны, так как дают общее представление о работе подобной конструкции. При такой системе заданных усилий или, вернее,

деформаций, линии главных напряжений значительно отличаются от симметричного случая, как показано на фиг. 8.062. Наибольшая интенсивность напряжений обнаруживается у соединения стены с фундаментом, где происходит резкое изменение сечения. Это поперечное сечение является, конечно, наиболее опасным; распределение напряжений в нем изучалось при нагрузке, вызывающей среднее напряжение $41,3 \text{ кг/см}^2$, с целью сравнения этого случая с теми, которые разбирались нами раньше. У одного края сечения максимальное напряжение доходит до $101,9 \text{ кг/см}^2$, на другом же крае оно падает до $32,3 \text{ кг/см}^2$, как указано на фиг. 8.063; это падение происходит очень быстро вблизи максимума и почти заканчивается на расстоянии $0,51 \text{ см}$ в горизонтальном направлении вдоль поперечного сечения модели. Поперечные напряжения, как показывают измерения, не имеют большого значения, так как они достигают максимальной величины $11,2 \text{ кг/см}^2$ на расстоянии $0,13 \text{ см}$ от левого края сечения. Суммирование продольных напряжений по сечению показывает, что при этих измерениях учтена вся нагрузка на модель. Следует отметить, что напряжения в точках контура, идя от A и B , повышаются непрерывно, тогда как в точках контура CD напряжения достигают минимума в месте изменения поперечного сечения и постепенно увеличиваются в обе стороны от этой точки, достигая наибольшей величины у основания. На грани EF напряжения, конечно, очень незначительны.

§ 8.07. *Распределение напряжений, вызванных резкими изменениями поперечных сечений стен за счет окон и дверей.*

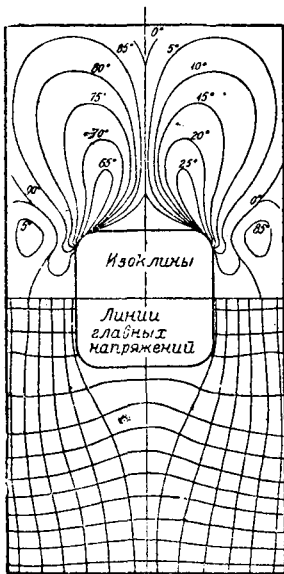
Внутренняя планировка сооружений, имеющая целью дать доступ свету и обеспечить удобное сообщение между помещениями, требует образования в стенах проемов, вызывающих местные повышения напряжений. Эти напряжения воспринимают различные виды перекрытий проемов — балки, арочные перемычки и другие конструкции. Многолетний опыт обычных построек дает строителю уверенность в безопасности и устойчивости запроектированного им сооружения, что в большинстве случаев и оправдывается, несмотря на неточность знаний о тех напряжениях, с которыми приходится иметь дело, и которые в большинстве случаев даже невозможно бывает точно определить. Материал поэтому расходуетс далеко не так экономно, как могло бы быть при более полных знаниях относительно действительного распределения напряжений.

Нет возможности разобрать этот вопрос достаточно подробно благодаря разнообразию и объему возникающих вопросов; небольшая часть этих задач будет разобрана как иллюстрация применения оптического метода. Одной из таких задач является изучение влияния наличия в стене прямоугольных отверстий с закругленными определенным радиусом углами; это закругление позволяет избегать возникновения местных напряжений, могущих вызвать разрушение материала, а также отчасти упрощает решение задачи. На этой задаче возможно рассмотреть влияние балок, прочных перемычек и подобных элементов, перекрывающих проемы; дальше будут приведены и некоторые практические предложения, относящиеся к этим случаям.

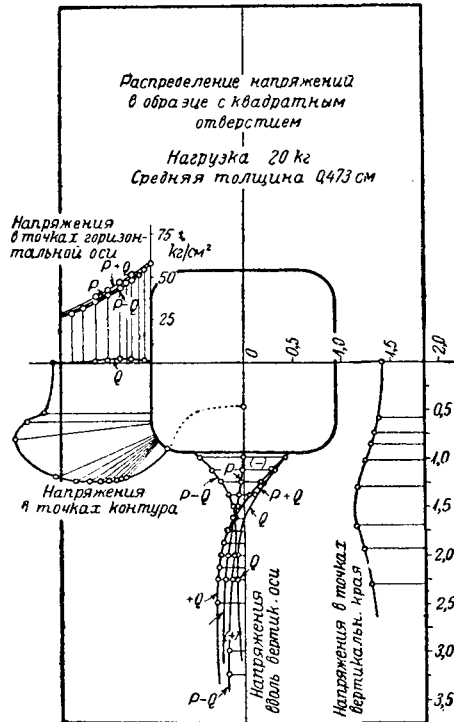
Начнем наше исследование с простейшего случая квадратного отверстия в центре стены, уменьшающего на половину ее ширину, с углами, закругленными радиусом в одну двенадцатую этой ширины, чтобы избежать чрезмерных напряжений. Но даже и в этом случае, под влиянием сжимающей нагрузки, равномерно распределенной по торцовым поверхностям, получаются большие местные напряжения по углам такого отверстия, так как линии главных напряжений должны обогнуть отверстие и сгущаются у его углов.

Линии главных напряжений для этого примера указаны на прилагаемой фигуре 8.071 вместе с изоклиническими линиями, из которых они получены. Исследование напряжений в точках внутреннего контура (фиг. 8.072) показывает, что вдоль вертикальных сторон напряжение повсюду значительно выше средней вели-

чины $41,3 \text{ кг/см}^2$; оно повышается до максимума около $77,3 \text{ кг/см}^2$ в том месте, где касательная к контуру образует угол около 6° с вертикалью; напряжение затем очень быстро уменьшается и переходит в растяжение вдоль горизонтального контура с максимальным значением $27,1 \text{ кг/см}^2$ в центре этой стороны. Продольное напряжение σ_y по среднему горизонтальному сечению меняется почти по линейному закону, поперечное же напряжение весьма мало. Подсчеты по произведенным измерениям дают для растягивающего груза $97,4\%$ от действительного. Следует также заметить, что напряжения в точках внешних контуров достигают минимума по концам среднего горизонтального поперечного сечения и поднимаются до мак-



Фиг. 8.071. Изоклины и линии главных напряжений в модели стены с квадратным отверстием.



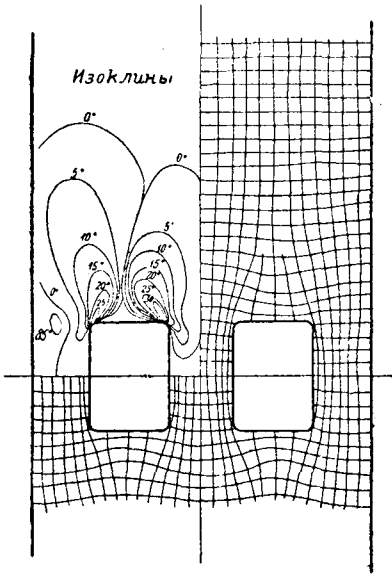
Фиг. 8.072. Распределение напряжений в модели фиг. 8.071.

симальной величины несколько ниже края отверстия. Этот результат получался и в других случаях, например, при круглом отверстии в пластинках конечной ширины (глава VI).

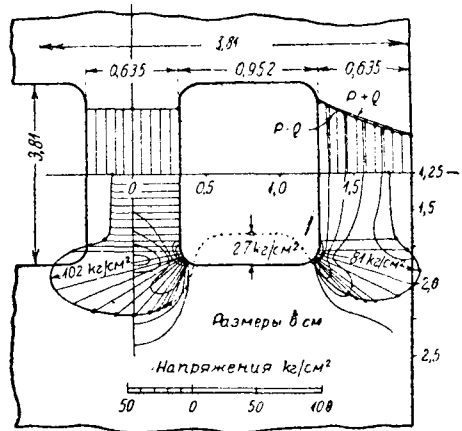
Если в подобной же пластинке сделать два прямоугольных отверстия, то распределение напряжений может быть получено, как и в предыдущем случае. На фиг. 8.073 изображены линии главных напряжений для данного случая; средняя часть между оконными проемами подвергается чистому сжатию на большей части своей длины, а боковые части испытывают переменные напряжения, как в изученном нами ранее случае; наблюдается большая местная концентрация напряжений около углов.

Подробности полученных результатов даны на фиг. 8.074; из них видно, что по среднему поперечному сечению при среднем напряжении $41,3 \text{ кг/см}^2$ распределения напряжений будет совершенно равномерным между отверстиями; их величина достигает $50,6 \text{ кг/см}^2$, в то время как в боковых частях стены напряжения меняются почти по линейному закону от $53,4 \text{ кг/см}^2$ в точках внутреннего кон-

тура до $28,1 \text{ кг/см}^2$, на внешнем. В этом случае поперечное главное напряжение $\chi\chi$ незначительно. Средняя точность измерений, определенная при суммировании напряжений, составляет излишек в $2,2\%$ (с избытком). Из сказанного следует, что при длинном ряде окон, расположенных на равных расстояниях, каменная кладка простенков между ними испытывает равномерно распределенное напряжение; напряжения же в крайних частях стен меняются по линейному закону, как было показано в разобранных случаях. Следует также отметить, что контурные напряжения для оконного проема больше у внутреннего округленного угла, где они доходят до $102,0 \text{ кг/см}^2$, чем у соответствующего внешнего, где они достигают $80,8 \text{ кг/см}^2$.



Фиг. 8.073. Изоклины и линии главных напряжений в стене с двумя прямоугольными отверстиями.



Фиг. 8.074. Распределение напряжений в стене с двумя прямоугольными отверстиями.

Напряжения в точках вдоль верхнего и нижнего контуров этих отверстий являются главным образом растягивающими, как видно из кривой распределения, и распределены весьма равномерно вблизи середины, где максимальная величина их доходит до $27,0 \text{ кг/см}^2$.

§ 8.08. Карнизы.

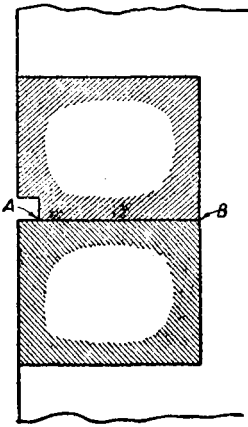
Много интересных примеров распределения напряжений можно найти в тех случаях, когда, по чисто архитектурным соображениям или же в силу только практической необходимости, каменная кладка оказывается подрезанной, как показано на фиг. 8.081; в этом случае только часть поверхности одного из соприкасающихся кусков камня или кирпича во всю свою ширину опирается на следующий кусок. В подобном случае большие сравнительно интенсивности напряжений наблюдаются у точки А и поблизости от нее, а также во внутреннем угле. Распределение давления в этом случае по всей плоскости АВ неравномерно.

В § 4.23 уже указывалось на то, что при неравных прямоугольных массивах из одного и того же материала, прижатых один к другому, можно вообще ожидать такого распределения, и что на основании опытов, описываемых в § 7.07, равномерное распределение напряжений может получиться только в том случае, когда обе соприкасающиеся плоскости будут одинаковы по величине, форме и материалу и когда будут приняты все меры к равномерному распределению на-

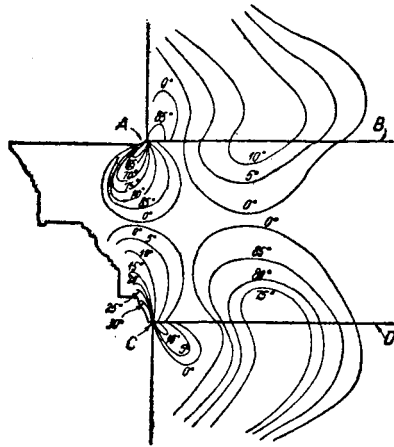
груки по торцевым поверхностям. Можно, следовательно, предполагать, что в том случае, когда один массив выступает из-под другого, на поверхностях касания будет иметься неравномерное распределение напряжений даже и в том случае, когда приняты все меры к равномерному приложению нагрузки к торцевым поверхностям.

Примеры такого рода часто встречаются в зданиях. Одним из них является распределение напряжений, связанное с устройством карнизов зданий и других сооружений; был исследован случай карниза специального типа, так называемого „Wren“.

Полученные при этом исследовании изоклинические линии изображены на фиг. 8.082; их расположение не оставляет никаких сомнений в том, что при равномерно распределенной нагрузке в швах выше карниза распределение напряжений по обоим сечениям, ограничивающим карниз, далеко не равномерно, что подтверждается также и линиями главных напряжений, показанными на фиг. 8.083. Рас-



Фиг. 8.081.



Фиг. 8.082. Изоклины в карнизе.

положение цветных полос также указывает на существование сильной концентрации напряжений по концам этих сечений, в особенности же в той точке, где начинается выступ карниза.

При подробном изучении распределения напряжений по верхнему сечению AB обнаружено, что при среднем значении напряжения $112,5 \text{ кг/см}^2$, от груза $90,7 \text{ кг}$ в точке A интенсивность напряжения доходит до $190,5 \text{ кг/см}^2$; это напряжение очень быстро падает до $72,4 \text{ кг/см}^2$, а затем снова постепенно возрастает до $144,8 \text{ кг/см}^2$ в точке B , как показано на фиг. 8.084. Напряжения эти направлены не перпендикулярно к сечению. Кроме них появляются вторые главные напряжения в точках сечения; по его плоскости действует касательное напряжение, достигающее значительной величины, так как меньшее главное напряжение Q доходит до максимума $26,9 \text{ кг/см}^2$. Проверкой точности работы может служить сравнение суммы вертикальных напряжений с действительной нагрузкой; при измерениях была получена величина груза 88 кг , что дает разницу в 3% (с недостатком).

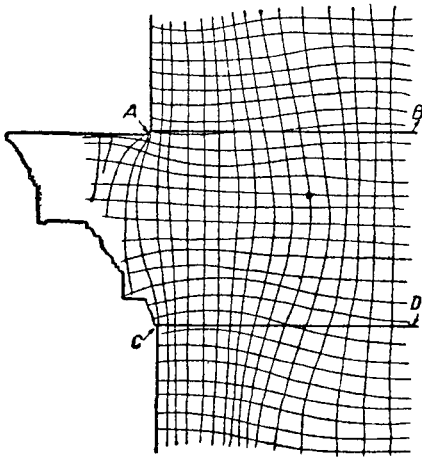
Почти такие же результаты получаются и при исследовании напряжений по нижней поверхности карниза, как показано на фиг. 8.084.

Распределение напряжений по верхнему и нижнему сечениям стены, ограничивающим карниз, оказываются такими, какие можно было бы ожидать при карнизе, симметричном по отношению к его средней горизонтальной плоскости; на основании этого можно заключить, что в разного типа карнизах имеются, по всей вероятности, почти одинаковые неравномерно-распределенные напряжения по сечениям стены, ограничивающим карниз; эти заключения требуют еще однако подтверждения путем дальнейших опытов над моделями карнизов другого вида.

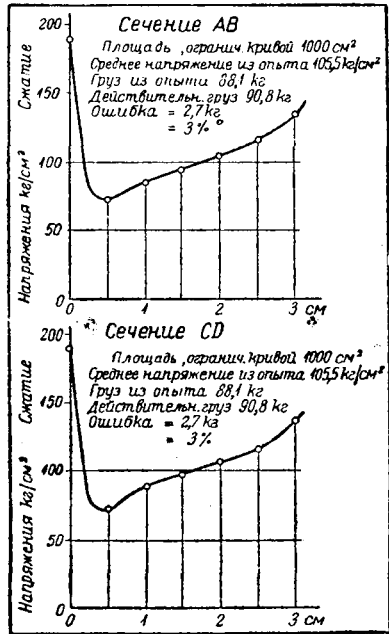
Может показаться странным, что простой боковой выступ в стене может оказать также огромное влияние на распределение напряжений в переходных сечениях, особенно если принять во внимание, что из предыдущих опытов, описанных в главе VII, известно, что равные прямоугольные массивы, нажимаемые один на другой равномерно распределенными по торцам силами, имеют тоже равномерное распределение напряжений по плоскости соприкосновения.

Не надо однако забывать, что в последнем случае деформации в направлении нагрузки во всех точках одинаковы, в то время как в случае работы карниза, выступающая часть, свободная от непосредственной нагрузки, подвергается по обеим плоскостям действию усилий, которые сжимают часть карниза, входящую в стену; в свободной части возникает переменное напряжение; это напряжение, конечно, больше всего в местах соединения карниза со стеной, но оно делается незначительным на некотором расстоянии от лицевой поверхности стены.

Таким образом возникают напряжения и в выступающей части самого карниза,



Фиг. 8.083. Линии главных напряжений в карнизе.



Фиг. 8.084. Распределение нормальных напряжений по верхней и нижней плоскостям карниза.

что, впрочем, сразу обнаруживается при опытах, так как приложение нагрузки сразу вызывает появление цветных полос в указанной части. Направления этих напряжений показаны на рис. 8.083; этот чертеж указывает, что только самая крайняя часть карниза совершенно не напряжена, так как в ней отсутствуют линии главных напряжений.

Сопrotивление деформации выступающей части карниза вызывает возникновение сильной концентрации напряжений в местах его соединения со стеной; оно изменяет и распределение напряжений по поперечным сечениям стены в зависимости от ширины стены у карниза. По мере движения вдоль шва в сторону от карниза, напряжения очень быстро падают и доходят до минимума, затем резко повышаются до второго максимума на другой лицевой поверхности стены.

Эта концентрация напряжений по концам шва, в особенности у наружной лицевой поверхности стены, может быть при неблагоприятных обстоятельствах опасной и привести к местным обрушениям самого карниза, вследствие неравномерной осадки фундамента здания или по другим причинам, когда на какую-нибудь часть стены начинают внезапно действовать непредвиденные нагрузки. При уширении

швов, ограничивающих карниз, максимальные напряжения отодвигаются в те точки шва, где кончается уширение; концентрация напряжений в этих точках даже увеличивается, благодаря уменьшению площади передачи нагрузки и увеличению ее эксцентриситета. Вертикальные неглубокие надрезы карниза вдоль лицевой поверхности стены понижают концентрацию напряжений по краям горизонтальных швов, но вводят в точках в глубине надрезов новые местные напряжения, не меньшей интенсивности, даже при закругленном очертании надрезов. Оценивая эти наблюдения с конструктивной точки зрения, видим, что основным недостатком устройства карниза является добавление материала таким образом, что возникают повышенные местные напряжения, которых иначе не было бы. Значительное понижение напряжений может быть достигнуто в том случае, если карниз является частью массива более значительной высоты, чем сам карниз; предварительные опыты показывают, что в этом случае концентрация напряжений несколько уменьшается.

Описанных нами примеров, вероятно, достаточно для того, чтобы показать, насколько использование моделей облегчает исследование распределения напряжений в зданиях; примененный нами метод имеет возможность самого широкого развития в связи с разнообразием конструктивных задач, стоящих изучения в этом отношении.

Интересно поэтому наметить план дальнейшей работы в этом направлении. Не было еще попыток изучать на модели работу конструкции, состоящей из связанных между собой кирпичей или камней; не трудно сконструировать подобную модель из отдельных склеенных элементов; благодаря тому, что мы располагаем целым рядом подходящих прозрачных материалов, возможно было бы сделать модели также более сложных конструкций, которые дали бы представление о возможностях современного применения в разных комбинациях таких материалов, как кирпич, камень, бетон и сталь.

В частности, вопрос о распределении напряжений в железо-бетоне представляет собою широкое поле для исследования, что видно из производимых в этом направлении опытов над моделями, состоящими из прозрачных материалов и тонких стержней органических материалов с высокой упругостью или проволоки.

С другой стороны, оказалось вполне возможным изготовлять из прозрачных материалов модели стержней, применяемых в стальных конструкциях, а также и модели заклепочных соединений; подобные модели уже конструировались для демонстрации. Можно поэтому надеяться, что дальнейшие исследования такого рода на моделях зданий могут оказать большую помощь архитекторам и инженерам-строителям в их стремлении к проектированию наиболее экономичных конструкций, отвечающих современным потребностям.

§ 8.09. Проектирование частей конструкций и машин.

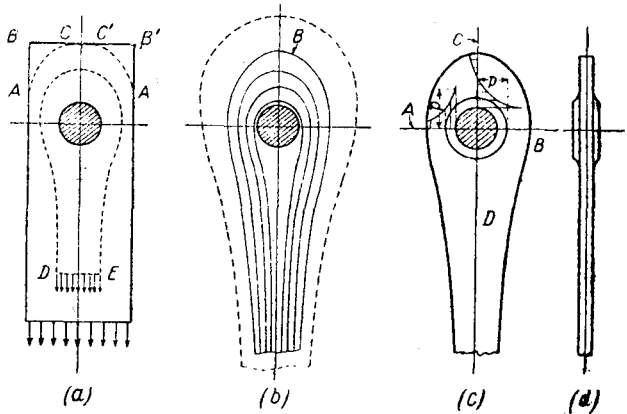
Обстоятельства, определяющие форму какого-нибудь элемента конструкции или машины, обычно очень сложны и не всегда поддаются учету. Проектировщику приходится обращать должное внимание на различные факторы, чтобы добиться таких результатов, которые удовлетворяли бы всем возможным возникнуть случаям, поскольку их можно предвидеть, хотя они иногда бывают и очень неопределенны. При проектировании машин трудно заранее учесть влияние сил инерции в быстро движущихся частях, трение и случайные нагрузки. В инженерных конструкциях, например мостах, задача определения напряжений тоже оказывается несколько неопределенной, благодаря динамическому действию неуравновешенных сил инерции локомотивов, торможению, давлению ветра и возможным комбинациям тех и других воздействий. Во всяком случае, каковы бы ни были затруднения, инженер обязан проектировать и конструировать машины и постройки с расчетом на безопасность и экономичность при всевозможных колебаниях нагрузок; помочь ему могут в этом отношении только научные исследования.

Некоторое облегчение в эту работу внесут, конечно, систематические изы-

скания наиболее подходящей и экономичной формы проектируемого элемента вместо случайного их выбора. В данном отношении мы можем исходить из любых соображений, которые могут привести нас ближе всего к желаемой цели, хотя полученные схемы приходится потом несколько видоизменять в связи с требованиями при их осуществлении.

Рассмотрим, например, проектирование плоского растягиваемого элемента, к которому приложены через болты на каждом из концов растягивающие усилия. Ясно, что простое прямоугольное очертание, как изображено на фиг. 8.091а, не экономично в отношении использования материала, так как в большей части элемента напряжения будут меньше, чем около болта; гораздо лучшее распределение материала получается при видоизмененной форме звена; размеры основной части его определяются способностью материала принять на себя растягивающий груз без перенапряжения; очер-

тания же конца звена таковы, что напряжения нигде не превышают допусковых. Установить очертания и размеры поперечного сечения главной части этого звена, вдали от проушины, не составляет никаких затруднений, так как, если линия действия груза проходит через центры тяжести каждого из поперечных сечений, то распределение напряжений в данном случае будет равномерным. Труднее, однако, решить, какая форма концов будет самой лучшей, так как у нас для этого слиш-



Фиг. 8.091.

ком мало данных; однако ясно, что всякий ненапряженный материал вблизи контура является лишним и может быть снят. В данном случае можно снять ненапряженный материал между кривыми ABC , $A'B'C'$, не нарушая распределения напряжений; это будет первым шагом к отысканию наилучших очертаний концов стержня, симметричных по отношению к линии действия силы и замыкающих собой концы средней части контура с параллельными сторонами шириною DE ; эта ширина определяется величиной допускового напряжения при равномерном распределении по сечению, как показано стрелками. Эти стрелки можно рассматривать как концы линий главных напряжений; некоторые из этих линий образуют петли вокруг болта, остальные обрываются у него.

Отсюда вытекает единственно возможный вид контура, а именно: очертание его должно соответствовать очертанию линии главного напряжения, образующей петлю вокруг болта. Поэтому необходимо задаться предварительно каким-либо контуром; выбор этот можно сделать не вполне произвольно, так как в этой области имеются уже некоторые руководящие указания, основанные на опыте относительно распределения напряжений при тех или иных формах элемента; имеются и результаты испытаний до разрушения, качественное же изучение прозрачных моделей дает полезные указания на то, как избежать ряда ошибок, например, резких изменений кривизны контура, ненапряженных частей материала и т. д. Оптические исследования § 6.18 действительно, указывают желательность подбора таких очертаний, при которых напряжения по среднему поперечному сечению не могли бы переходить через нуль, так как в этом случае в сечении появятся сжимающие напряжения, увеличивающие максимум напряжений у болта; этого перехода через нуль можно избежать прежде всего, выбирая более полный контур без чрезмерных где-либо закруглений, с достаточным запасом материала за болтом, что дает возможность свободного раз-

вития там линий главных напряжений, изгибающихся вокруг болта. Ясно, что форма первоначального контура не останется без влияния на последующие видоизменения его очертаний; поэтому желательно не ограничивать попыток одной только формой, но составлять варианты и выбирать лучшую форму, отбрасывая те, которые дают неблагоприятное распределение напряжений при одном и том же количестве материала. Исследуя, например, изоклинические линии на фиг. 8.091 *b*, получаем затем линии главных напряжений, охватывающие болт, показанные на этой же фигуре; одну из них можно выбрать за новый контур *B* и изучить напряжения в модели этого видоизмененного очертания, чтобы убедиться, насколько распределение напряжений приближается к равномерному во всех точках модели. Для этого не нужно даже изучать полностью распределение напряжений, так как видимые в поляризованном по кругу свете изохроматические полосы достаточно ясно характеризуют положение даже при беглом рассмотрении изображения на экране. Весьма возможно, что это первое приближение дает далеко не идеальную форму проушины, и нам придется подыскать второй и третий контуры, пока не получим наилучших для данных условий очертаний.

Картины распределения напряжений сразу же показывают все, что происходит в модели при каждом видоизменении ее очертания; наблюдения производятся быстро при незначительной затрате труда и при небольших расходах лишь на изготовление моделей.

Предлагаемый способ имеет тот явный недостаток, что всякое срезывание материала по очертанию какой-либо из линий главных напряжений, с целью получения новых очертаний модели, изменяет распределение напряжений по этому контуру, если только поперечные напряжения не будут равны нулю, чего, обычно не бывает. Нет также и уверенности в том, что описанная процедура даст абсолютно лучшую форму. Рекомендуются поэтому приближаться к пределу, исходя из двух или больше первоначальных форм очертания контура.

Предположим, что при помощи описанных оптических исследований мы получим контур [фиг. 8.091 (*c*)] с наилучшим из всех исследованных раньше распределений напряжений. При более подробном изучении и измерении полученных напряжений по опасным сечениям находим, что высокие напряжения будут иметь место в точках проушины возле болта, в особенности же в тех точках, где поперечное сечение *AB* и продольное *CD* пересекают этот болт. Для первого это будут растягивающие напряжения высокой интенсивности, для второго же — значительное сжимающее напряжение, как видно на рисунке; какова бы ни была форма контура, этих высоких напряжений избежать невозможно, если проушина будет одинаковой толщины, что обычно делается для удобства изготовления.

Если же этому удобству придавать меньшее значение, чем вопросу о приближении к наилучшей форме, то дело может быть легко исправлено путем утолщения проушины около болта. Если мы хотим снизить напряжение у болта до той же величины, что и в основной части звена, надо нанести это напряжение *p* на диаграмме распределения напряжений, как показано на чертеже, и утолстить проушину на этом протяжении пропорционально отношению максимального напряжения к *p*. Наибольшая из этих величин дает требуемую толщину цилиндрического утолщения, которое образуется около болта; оно будет занимать такое протяжение, сколько потребуется для удержания величины напряжений в определенных границах. Можно возразить на то, что подобная форма проушины трудна для выполнения, но с другой стороны на это стоит пойти в случае сооружения больших конструкций, как, например, звеньев висячего моста больших размеров, или же при многочисленных небольших соединениях стержней в конструкции аэроплана или дирижабля, где вес должен быть доведен до минимума.

Возьмем другой пример простейшего рычага, представляющего собой прямоугольную пластинку, вращающуюся на среднем стержне *A* [фиг. 8.092 (*a*)]; силы приложены на равных расстояниях от этого стержня посредством двух других стержней *B* и *C*. При указанном расположении сил легко подыскать ряд кривых

главных напряжений, изображенных жирными линиями; эти линии очерчивают на пластинке контур простейшего рычага. В добавление к этим кривым на чертеже пунктиром изображена еще вторая серия кривых, которые очевидно не играют роли при отыскании подходящей формы для подобного рычага.

Если взять силы обратного направления, что возможно на практике, то получим второй ряд кривых как зеркальное отражение первой серии, и рычаг примет форму, указанную на фиг. 8.092*b*, где добавлены еще переходные кривые, чтобы избежать образования входящих углов. Если такой рычаг вырезать, исследовать при помощи оптического метода, то оказывается, как и раньше, что возникают высокие напряжения около шарниров. Эти напряжения могут быть уменьшены при помощи соответствующих утолщений, как указано на фиг. 8.092*c*; таким образом легко получается такая форма рычага, которая очень близко подходит к очертаниям рычагов хорошо спроектированных машин, в которых она была получена совершенно другими способами.

Применение такого же процесса последовательных приближений к кривым элементам, как звенья цепей, указывает на то, что при необходимости исключения возможности перехода напряжений через нуль звено следует делать гораздо толще у главного поперечного сечения по сравнению с другими местами.

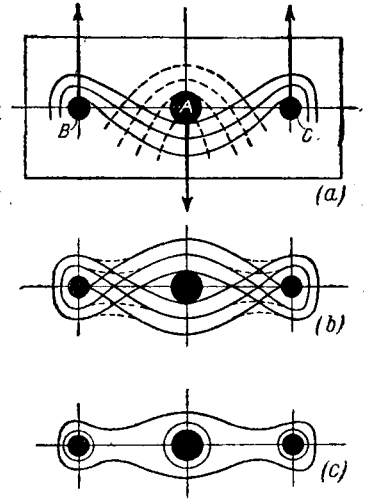
Эти простые примеры проектирования при помощи исследований с полярископом будут, вероятно, достаточны для иллюстрации описанных методов, несмотря на то, что принятый за основу критерий может оказаться не всегда наиболее правильным. Метод этот все-таки в большинстве случаев дает проектируемым элементам такие очертания, которые не противоречат опыту.

Проектирование элементов конструкций и машин при помощи оптического метода имеет за собой много преимуществ, даже если оно будет чисто эмпирическим, так как при небольшой практике легко можно расшифровать картину напряжений в модели, определяя точки с значительными местными напряжениями и видоизменяя проект с целью их понижения. Способ этот удобен также для определения возможных мест разрушения действительного элемента, так как за исключением случаев простого растяжения, прозрачные материалы, вроде нитроцеллюлозы, становятся непрозрачными к тому времени, когда напряжения могут разрушить внутреннее строение материала; места таких разрушений легко видны при проектировании модели на экран.

Для очертаний контуров, полученных из линий главных напряжений, характерно то обстоятельство, что в них в окончательном виде почти совершенно отсутствуют прямые линии и дуги окружностей. Очень возможно, что преобладание прямых линий и кругов в чертежах, изготавливаемых в чертежных залах, пользующихся обычным набором инструментов, объясняется сравнительной легкостью их вычерчивания по сравнению с разного рода кривыми; но этот способ проектирования приводит иногда к неправильным результатам. Здесь необходима весьма большая тщательность в проектировании, в особенности, если требуется получить наибольшую прочность при минимуме веса; к таким конструкциям относятся, например, аэропланы и машины.

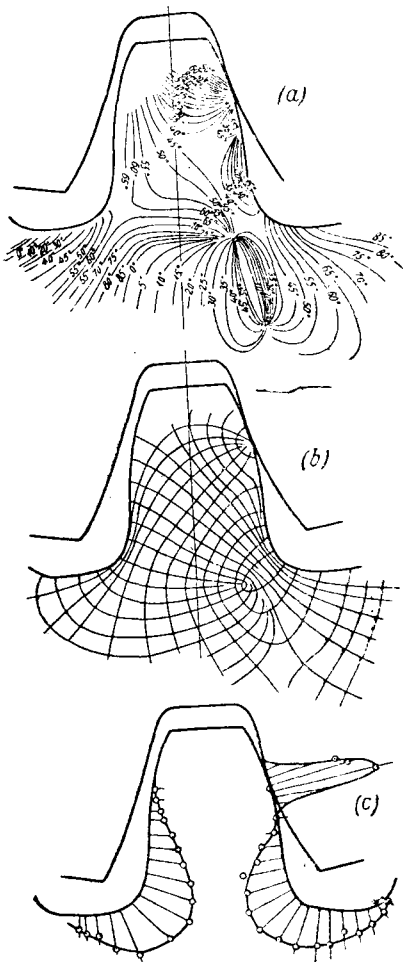
§ 8.10. Зубчатая передача.

При проектировании зубчатых колес в основном приходится подчиняться определенным кинематическим условиям; форма и расположение зубцов должны быть



Фиг. 8.092.

таковы, чтобы обеспечить качение начальных окружностей друг по другу; сами же зубья могут скользить один по другому, как это обычно и бывает. Хотя теоретически имеется неограниченное число путей получения форм зубьев, удовлетворяющих указанным условиям, однако в большинстве случаев зубья очерчиваются по кривым, списанным точками круга или прямой линии при качении по кругу.



Фиг. 8.10. (а) — изоклины, (б) — линии главных напряжений, (с) — напряжения в точках контура зубца.

Несколько интересных данных о распределении напряжений в эвольвентных зубцах были получены у Гейманса и Кимбалля,² которые обратили внимание также на изменения разности напряжений ($\overline{rr} - \overline{\theta\theta}$) в точках поверхности соприкосновения между шестерней и валом, на который она насажена с учетом близости зубьев.

Вообще говоря нагрузка вызывает трение между этими соприкасающимися поверхностями; влияние нагрузки осложняется наличием шпонок, входящих плотно в гнезда вала и ступицы колес; эти явления исследовались лишь качественно, числовых же измерений пока не производилось.

¹ Engineering problems solved by photo-elastic methods, Journal of the Franklin Institute, 1923.

² Stress distribution in electric railway motor pinions as determined by the Photo-elastic method, The American Society of Mechanical Engineers, December 1922.

Эвольвентное зацепление (качение прямой) предпочтительнее, так как некоторое изменение во взаимном расстоянии валов не отражается на работе трансмиссии, и так как образованные таким образом зубья имеют наибольшую ширину у своего основания в месте сопряжения с телом шестерни; это обстоятельство позволяет им хорошо сопротивляться действию усилий, передающихся при соприкосновении зубьев.

Несмотря на наличие подобных предопределяющих форму зубьев условий проектирования, с которыми приходится считаться на практике, распределение напряжений в зубьях и в самих шестернях представляет собой ряд задач большой практической важности, благодаря широкому применению зубчатых передач, часто при особо тяжелых условиях.

Можно из хорошо выдержанной нитроцеллюлозы, не снижая ее оптических свойств, изготовить прозрачные модели зубчатых колес, способные выдержать значительные нагрузки; ими можно воспользоваться для качественного изучения тех изменений, которые происходят в шестернях при изменении кинематических условий проектирования, но еще ценнее использование их для количественного определения распределения напряжений, возникающих в зубчатых колесах на практике. Пока исследовано только несколько подобных случаев, как например распределение напряжений, возникающих в зубцах колес при статическом нажатии; пример такого распределения напряжений приведен на фигуре 8.10,¹ где даны изоклинические линии и линии главных напряжений для одного положения зубцов в сопровождении кривой контурных напряжений и давлений соприкосновения.

Другим интересным вопросом является влияние скорости на максимальное напряжение в зубце колеса; это влияние изучалось при помощи освещения модели электрическими искрами, благодаря чему колесо кажется неподвижным, и является возможным наблюдать и измерять распределение напряжений.

В модели шестерни с диаметром круга качения 15,540 см, имеющей тринадцать зубьев эвольвентной формы максимальное напряжение при 1250 оборотах в минуту оказалось на 90% больше, чем в состоянии покоя при таком же скручивающем моменте; отсюда следует, что максимальные напряжения в подобных шестернях, встречающихся на практике в железнодорожном электрическом подвижном составе, возрастает с 2559 кг/см² при статической нагрузке до 4865 кг/см² при указанной скорости.¹

§ 8.11. Фланцы.

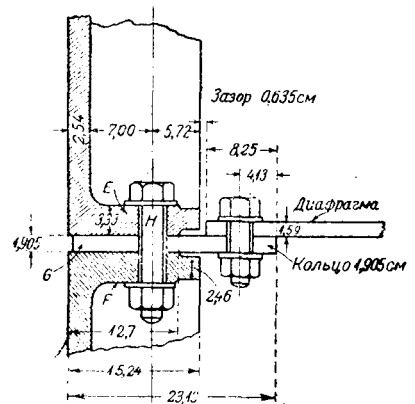
Соединение частей конструкций и машин, которые должны быть плотно скреплены, может быть выполнено множеством способов; с некоторыми из них мы уже встречались. Очень употребительным видом соединения является стык с фланцами, для прикрепления например крышек цилиндров и для соединения частей длинных трубопроводов.

Более сложные виды таких стыков имеются в кожухах турбин больших размеров, изготовляемых по частям, соединяемым затем по плоскостям, перпендикулярным и параллельным главному валу. Во всех подобных случаях, благодаря внутреннему давлению воды, пара или другой жидкости, фланцы и болты подвергаются сильным напряжениям, которые не легко вычислить или измерить.

В гражданском строительстве и в горном деле также часто встречаются случаи конструкций с фланцами при устройстве вертикальных или горизонтальных шахт с обшивкой из плоских или криволинейных плит; сболченные вместе, подобные плиты образуют внутреннюю одежду шахт подъемников, железнодорожных туннелей и других сооружений, где влияние кривизны невелико, а давление, передающееся на обшивку, является внешним, хотя в некоторых случаях действует и по обеим поверхностям.

Пример такого рода изображен на рис. 8. 111, где чугунные плиты с фланцами *E* прикрепляются одна к другой при помощи болтов и образуют внутреннюю одежду цилиндрической вертикальной шахты, опущенной в землю, с жесткой верхней диафрагмой, прикрепленной к круговому кольцу *G*, зажатому между фланцами *E*. В добавление к внешнему давлению окружающей земли эта одежда шахты и верхняя диафрагма должны выдерживать также давление воздуха на рабочую сторону с тем, чтобы задерживать проникновение туда воды во время опускания.²

Величина напряжений в фланцах, поддерживающих верхнюю диафрагму, бывает обычно в таких случаях очень значительной; такие же напряжения возникают и в фланцах крышек поршневых паровых машин и турбин. При большом



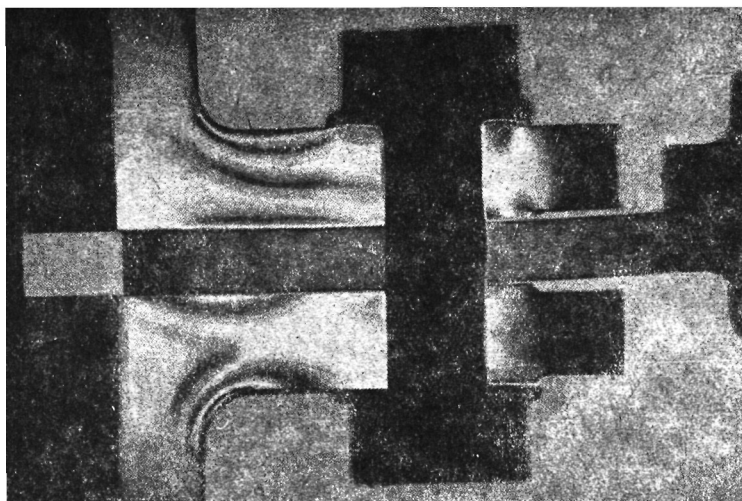
Фиг. 8.111.

¹ A. L. Kimball, Effect of rotation on stress distribution in electric railway motor pinions, General Electric Review, February 1924.

² E. G. Coker, The Stress Distribution in the Flange connections of Air-tight Decks for Land Shafts. Home Office Report, No. 1853 (1927) on a Compressed Air Explosion at Deptford Green.

диаметре цилиндра напряжения в осевой плоскости могут быть довольно точно изучены и на плоской модели.

Одна сторона плоской модели со стыком выше указанного типа изображена под нагрузкой на фиг. 8.112; эта фигура является, насколько возможно, копией фиг. 8.111, с той только разницей, что здесь каждый фланец снабжен тонкой диафрагмой, прикрепленной к жесткому каркасу и показанной на левой стороне фигуры в виде черного прямоугольника. Эти диафрагмы заменяют соседние изогнутые пластинки. Болт, стягивающий фланцы, имеет особую конструкцию, дающую возможность уменьшать его сечение насколько возможно, в соответствии с необходимостью соединить фланцы возможно плотнее; конструкция этого болта показана на фиг. 8.113; он представляет собой тонкий стержень *A* с нарезкой по обоим концам для гаек *B*, помещающихся в плоских головках *C*, опирающихся на фланцы. Тонкая диафрагма *D*, прикрепленная к стержню *A* той же ширины, как и болт — пропущена сквозь соответствующие вырезы в фланцах;



Фиг. 8.112. Картина напряжений при круговой поляризации прозрачной модели двух фланцев под действием сил, передающихся от диафрагмы.

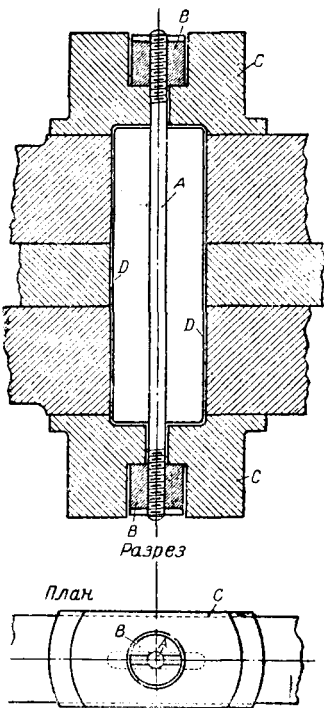
диафрагма усиливает болт и обеспечивает его работу при нагрузке давлением воздуха. В таком стыке при исследовании получают ярко выраженные изохроматические полосы, указывающие на наличие наибольших напряжений свободной кромки, что ясно видно на фотографии.

Эти данные свидетельствуют о том, что для практических целей оптические измерения совершенно достаточно производить в точках этих контуров, так как по краям фланцев появляется только одно напряжение, за исключением места приложения нормального давления, возникающего вследствие нажатия гаек. Но эти напряжения не имеют большого значения по сравнению с напряжениями у закругленных углов.

Результаты наблюдений приведены на фиг. 8.114 вместо с линиями главных напряжений. Пренебрегая довольно большими местными напряжениями в точке *A*, между верхним фланцем и диафрагмой, видим, что стык двух фланцев толщиной в 0,630 см, расположенных симметрично к полной нагрузке в 9,1 кг, испытывает максимальные напряжения у закругленных углов, причем верхний фланец испытывает сжатие, а нижний — растяжение.

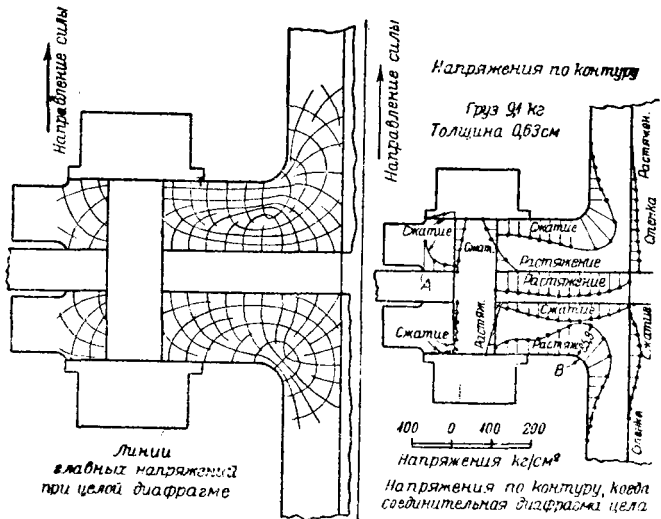
Сжимающее напряжение имеет ту же величину, как и растягивающее; первое из них не играет большой роли при металлических фланцах, так как они легко сопротивляется такого рода напряжениям; однако чугун, как известно, плохо воспринимает растяжение; поэтому эти напряжения необходимо держать как можно более низкими. В данном случае оказалось, что растяжение достигает максимальной величины в $85,8 \text{ кг/см}^2$ в точке нижнего закругленного контура, оно остается достаточно большим вдоль всей этой кроволинейной части фланца. Влияние стенки, соединяющей каждый стык с опорой, несколько снижает напряжения по сравнению с другим случаем, так как при срезывании стенки на значительном

протяжении и при закладке туда отдельного монолита, представляющего собою бетонную облицовку шахты, наблюдается дальнейшее повышение растягивающего напряжения до $105,5 \text{ кг/см}^2$; распределение напряжений несколько меняется, но остается все же довольно похожим на то, которое показано на фиг. 8.114. Цилиндрические листы и бетонная облицовка, применяемая для одежды шахты, добавляют некоторый



Фиг. 8.113.

Детали конструкции болта, соединяющего фланцы.



Фиг. 8.114.

запас прочности, который не отражен в этой плоской модели, что дает основание спокойно применять такую конструкцию на деле, не опасаясь, что напряжения при этой нагрузке окажутся чрезмерными; не будет также большой ошибкой считать, что в чугунных фланцах напряжения пропорциональны нагрузке почти до самого момента разрушения.

§ 8.12. Гайки и болты.

Во всех типах машин для прочного соединения двух или более частей, которые приходится разбирать, широко пользуются болтами с гайками. Размеры этих деталей были стандартизованы Витвортом в 1841 г.; предложенная им форма сделалась общепринятой, так как оказалась подходящей для практических целей, хотя для многих научных инструментов, труб и других специальных конструкций, пользуются стандартными нарезками иной формы.

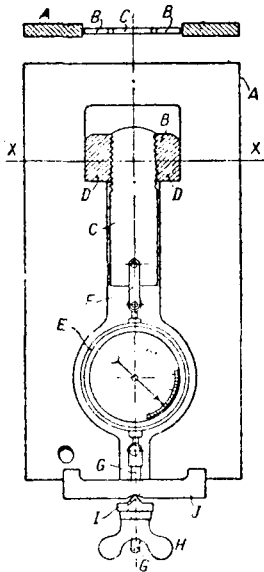
В то время, когда проводилась эта стандартизация, главным материалом для гаек и болтов было мягкое железо; в настоящее же время использование стали, более прочного материала, дало возможность уменьшить размеры шестигранных головок, как гаек, так и болтов, заменяя размеры, соответствующие диаметру стержня, более низкими по той же шкале стандарта. Такой способ не представляет никаких затруднений и дает экономию в материале и обработке.

При нагрузке в соединении обычной шестигранной гайки и болта возникает чрезвычайно сложное распределение напряжений в обеих деталях; распределение это представляет собою задачу трех измерений, почти не поддающуюся точному математическому анализу и почти что так же не доступную опытному исследованию.

Некоторые сведения относительно кривых распределения разности тангенциальных и радиальных напряжений в гайке можно получить только в том случае, если бы прозрачную модель гайки можно было наблюдать под нагрузкой, смотря в направлении оси болта; однако, поскольку нам известно, оптические наблюдения пока что производились только над плоскими моделями сечений, проходящих через ось болта.

Качественное изучение этой проблемы даже и в таком упрощенном виде, производившееся в 1917 г. Роулэндом в Институте гражданских инженеров, показало всю ее сложность. Некоторые из недавних работ Кокера в лаборатории Университета, по наблюдению над моделями однодюймовых гаек и болтов, были посвящены сравнению таким же способом поведения обыкновенной гайки и различных видов контр-гаек.

Недостаток опытов этого вида заключается в том, что распределение тангенциальных напряжений в гайке отпадает и заменяется давлениями окружающей модель рамы.



Фиг. 8.121.

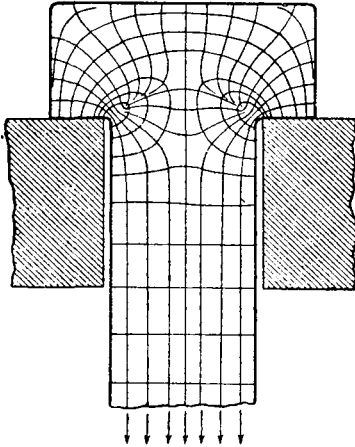
Несмотря на это затруднение, можно заметить в плоских сечениях гаек, напряженных, как показано на фиг. 8.121, много интересных явлений; буква А на фиг. 8.121 обозначена рама из толстого листа нитроцеллюлозы с центральным Т-образным вырезом в верхней ее части, куда вставляется гайка В и стержень С; гайка В опирается на горизонтальные плоскости D; вертикальные поверхности Т-образного выреза, в который плотно входят как стержень, так и гайка, удерживают ее от соскальзывания. Пружинные весы E соединены со стержнем петлей F, нагрузка осуществляется посредством стержня G с винтовой нарезкой и гайки H, вращаемой вручную. С целью получения насколько возможно более центральной нагрузки у стержня С имеется, в добавление к трем шарнирам, расположенным на линии действия нагрузки, шайба I, опирающаяся на соответствующий вырез V-образной формы в скобе J; эта скоба соединяет половины рамы А у ее разрезанного конца и не допускает, таким образом, расхождения этих сторон.

Модель осевого сечения обыкновенной однодюймовой гайки и болта, изготовленная из листов толщиной в 0,297 см, испытывает при нагрузке 70,3 кг (фиг. 8.122) сложное распределение напряжений у винтовой нарезки; распределение это не симметрично по отношению к оси болта в зависимости от расположения нарезки винта; обнаруживается, как увидим дальше, непрерывное повышение напряжений соприкосновения по мере продвижения от низа к верху болта с характерными цветными пятнами у внутренних закругленных углов нарезки. В точках по наружным краям гайки, за исключением мест передачи нагрузки через нижнюю поверхность гайки на раму, где нет больших напряжений; по верхнему же краю напряжения практически равны нулю; это оправдывает практикующуюся в настоя-

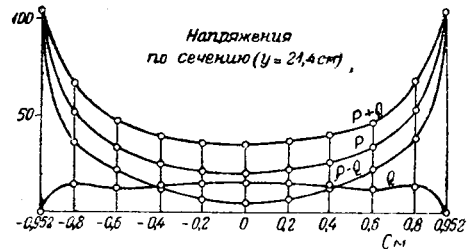
шее время уменьшение толщины гайки. Интересные вопросы представляет собою работа гайки, закрепленной контр-гайкой на том же болте. Контр-гайка в таких случаях обычно гораздо тоньше, чем главная гайка; ее настоящее место, как указано в большинстве руководств — под главной гайкой, ее назначением является не только закрепление основной гайки на месте, но также и передача ей части нагрузки.

Обычно же, вследствие трудности завинчивания тонкой гайки под другой гайкой, контр-гайку помещают сверху. Картина распределения напряжений в плоских сечениях гаек при любом их расположении показывает, что наибольшие напряжения будут в нижней гайке независимо от того, толстая она или тонкая, причем в ней сохраняется более или менее то же характерное распределение напряжений, как и в обыкновенной гайке, то есть напряжения возрастают по направлению кверху, а наружные части гайки остаются только слегка напряженными.

Существует много иных способов закрепления гаек на месте; все они вызваны тем обстоятельством, что гайки, вследствие наличия некоторого, хотя бы минимального зазора между нарезками, ослабевают от быстрой работы и вибраций машин.



Фиг. 8.124. Линии главных напряжений в головке болта.



Фиг. 8.125.

Для предупреждения этого явления применяют целый ряд разных приспособлений в виде шплинтов, упругих шайб и т. п.

Интересную форму гайки, не требующую специального закрепления, представляет собой гайка с V-образным вырезом внутри, имеющая внизу закругленное очертание. При такой форме гайки большая часть нагрузки передается на нижние витки нарезки, как показано на фиг. 8.123, что вызывает значительное снижение напряжений у внутреннего закругленного угла выреза, как это видно на чертеже. Выше этого выреза напряжения у нарезки малы, но повышаются в направлении кверху, в то время как свободные витки нарезки остаются, по существу, ненапряженными.

Напряжения в болте вблизи головки могут быть изучаемы подобным же образом на модели плоского сечения; несмотря на все указанные выше недостатки такого метода изучения, он все-таки позволяет несколько измерить величину напряжений, в особенности в месте сопряжения болта с головкой. В данном случае модель болта имела 1,905 см ширины и 0,25 см толщины; она заканчивалась головкой шириною в 4,128 см и высотой 1,588 см; углы сопряжения с болтом были закруглены радиусом 0,079 см. Линии главных напряжений, полученные при нагрузке, показаны на фиг. 8.124. В модели наблюдались очень высокие напряжения в месте изменения сечения и вблизи от него; однако равномерность распределения напряжений почти полностью восстанавливалась на расстоянии 1,905 см от головки, то есть на расстоянии, равном диаметру болта. Для точек поперечного сечения, проходящего через центры галтелей, соединяющих тело болта с головкой, были определены экспериментально значения $P \pm Q$, P и Q ; они показаны на фиг. 8.125; по величинам

этих напряжений и их направлениям были вычислены нормальные напряжения σ по этому сечению; значения их даны в таблице 8.12, где расстояние x отсчитывается в направлении, перпендикулярном оси винта.

Таблица 8.12.

x см . . .	-0,952	-0,794	-0,635	-0,476	-0,317	-0,159	0	0,159	0,317	0,476	0,635	0,794	0,952
σ кг/см ² .	105,5	38,0	22,6	17,3	15,4	15,2	1,60	15,7	16,1	17,7	21,6	37,8	106,2

Величина средних напряжений p_m ; при нагрузке 13,6 кг равны 28,1 кг/см²; максимальные же напряжения в точках у краев этого сечения достигают 106,2 кг/см² или 3,775 p_m . Графическое интегрирование по кривой напряжений дает для растягивающего груза величину на 4,5 процента меньше действительной; так как наиболее высокие напряжения развиваются в точках круговых галтелей, то весьма вероятно, что в данном болте наибольшие напряжения превзойдут величину 4 p_m . Минимальное значение напряжений в 0,56 p_m сказывается в центре сечения. Практика часто встречается со случаями отрыва головок болтов, если они сделаны из хрупкого материала; проф. Барр¹ приводит несколько интересных случаев поломок больших винтов этого типа. Такое неравномерное распределение напряжений быстро выравнивается по мере удаления от головки, и уже на расстоянии 0,64 см от нее напряжения заметно приближаются к равномерно распределенным, а на расстоянии 1,91 см трудно заметить какое-либо отступление от равномерности распределения растягивающих напряжений по поперечному сечению болта.

Описанные в § 7.03 опыты указывают однако на то, что в цилиндрическом болте равномерность распределения напряжений наступает не так быстро, как в плоской модели того же контура.

§ 8.13. Распределение напряжений в сварных швах.

За последние годы в практику вошло много новых способов образования швов в инженерных конструкциях и машинах, благодаря широкому применению электро-сварки, кислородно-ацетиленовой сварки и т. п. Относительные преимущества подобных швов перед заклепочными соединениями все еще продолжают быть предметом больших споров и исследований. Для газовых баллонов такие швы при хорошем выполнении имеют несомненные преимущества, так как они газонепроницаемы и не требуют подчеканки, но в большинстве случаев в швах той формы, которой можно было пользоваться до сих пор, максимальные напряжения достигают большой величины.

Типичным сечением шва для соединения листов является прямоугольный треугольник с двумя равными катетами, каждый из которых приваривается к одному из соединяемых элементов, а третья сторона остается свободной. Пример такого рода дан на фиг. 8.131а, где изображен стык с одиночной накладкой под действием растягивающих усилий; в этом стыке два листа, растягиваемые силой F , соединяются между собою стыковой накладкой $BCDE$ той же толщины, как и они сами; накладка приваривается к ним швами ABC и DEG треугольного поперечного сечения. Резкое изменение сечения этого и других подобных стыков чрезвычайно

¹ Archibald Barr, The application of the science of mechanics to engineering practice, The Institution of Civil Engineers, 1899.

растяжение в точках внутреннего контура LN и сжатие вдоль MJ (фиг. 8.132*b*) в точках внешнего контура; напряжения равны нулю в точках K , соответствующих черной полосе O фиг. 8.132 *a*.

Лучшим швом, но более дорогим, является стык внахлестку, изображенный на фиг. 8.133 *a*; под ним дан чертеж соответствующей модели с разрезом от B до E , как и в предыдущем случае.

Несмотря на то, что направления продольных напряжений пересекают изогнутую часть AB одного шва и плоскость EF другого под очень острыми углами, как показано на фиг. 8.134 *a*, вследствие чего возникает значительное касательное напряжение на этих швах, величина напряжений все же мала по сравнению с максимальными значениями напряжений в предыдущем случае; в особенности это касается плоскостей DE и EF , для которых главные напряжения P и Q (фиг. 8.134 *b*) малы при нагрузке примерно в семь раз большей, чем нагрузка для стыка с одиночной накладкой. Это зависит, очевидно, от того, что в последнем примере почти вся нагрузка передается через нижнюю часть стыка, как видно из распределения напряжений P , нормальных к поперечному сечению TU и RS , фиг. 8.134 *b*; эти графики показывают, насколько велика доля груза, передающаяся через нижнюю часть стыка. Максимальные величины напряжений всюду в этом случае не велики.

Эти два и другие примеры¹ дают метод исследования распределения напряжений в сварных швах, который может быть применен к самым разнообразным формам швов; этот метод может вероятно быть распространен и на тот случай, когда физические свойства швов будут отличаться от свойств листов, которые они соединяют; для этого необходимо применять для швов прозрачный материал, также отличающийся от материала листов, к которым эти швы будут приклеены.

§ 8.14. Колеса.

Изучение напряжений в колесах имеет большое практическое значение, и оптический метод дает очень простой способ измерения этих напряжений. Митчелл² исследовал теоретически случай диска, радиуса a , к центру которого C на единицу толщины приложена сила F , которая уравнивается другой равной и противоположной силой, приложенной в точке O на наружной поверхности и направленной к центру. Распределение напряжений, отнесенное к системе полярных координат с началом в центре C и начальным радиусом CO , представляется формулами:

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= -\frac{F}{4\pi} \left\{ \frac{3+\eta}{r} - (1+\eta) \frac{r}{a^2} \right\} \cos \theta + \frac{F}{2\pi a} \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{F}{4\pi} \left\{ \frac{1-\eta}{r} + 3(1+\eta) \frac{r}{a^2} \right\} \cos \theta + \frac{F}{2\pi a} \\ \overline{r\theta} &= \frac{F}{4\pi} \left\{ \frac{1-\eta}{r} + (1+\eta) \frac{r}{a^2} \right\} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (8.141)$$

К этим напряжениям добавляется система, отнесенная к началу координат O и начальному радиусу OC ,

$$\overline{rr} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \overline{r\theta} = \overline{\theta\theta} = 0. \quad (8.142)$$

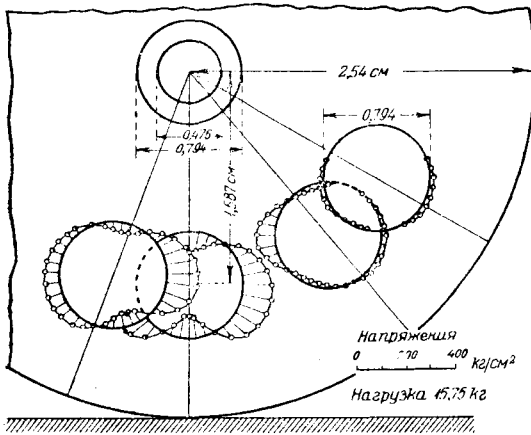
Эти формулы имеют, однако, ограниченный круг применения, так как редко случается, чтобы сосредоточенная сила была приложена строго в центре колеса; в большинстве практических случаев колесо или свободно вращается на неподвижной оси, так что нагрузка распределяется по части цилиндрической или слегка кони-

¹ E. G. Coker and R. Levi, The Stress Distributions in Fusion Joints. Proc. Inst. Mech. Eng., 1931.

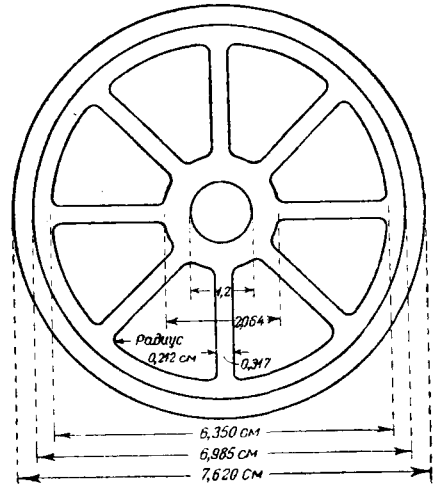
² J. H. Michell, Elementary Distributions of Plane Stress, Proc. L.M.S. 32, 1900.

ческой поверхности, как, например, в повозках обыкновенных дорог, или же оно плотно насажено на ось таким образом, что и колесо и ось вращаются вместе, как это бывает обычно в железнодорожной практике. Сверх того колесо редко представляет собой сплошной диск; в нем иногда просверлены круговые отверстия с целью облегчения его или, как чаще встречается, оно состоит из ступицы, соединяющейся посредством спиц с внешним ободом, на который надет бандаж. Последний обычно вызывает в колесе значительные напряжения.

Под влиянием отверстия в простом дисковом колесе напряжения сильно повышаются в точках по контуру отверстия, когда оно приходится между осью и местом соприкосновения колеса с полотном дороги; повышение напряжений особенно велико, когда отверстие приходится как раз под центром.



Фиг. 8.142. Распределение напряжений в точках контура отверстия в колесе при различных положениях отверстия.



Фиг. 8.143. Модель колеса железнодорожного вагона 1/12 натуральной величины.

Максимальные же напряжения на контуре отверстия получаются, однако в точке касания контура отверстия с вертикальной линией, проходящей через центр или очень близко от этой точки.

На фиг. 8.142 показано распределение напряжений по контурам отверстий модели этого колеса толщиной в 0,300 см, свободно вращающегося на оси: оказывается, что при нагрузке 15,9 кг сжимающее напряжение в точках по контуру отверстия растет от нуля, приблизительно, до 140,6 кг/см²; это явление повторяется при каждом повороте колеса. Это однако имеет меньшее значение, чем переменные растягивающие напряжения, которые достигают максимума в то время, когда отверстие оказывается непосредственно под осью; в этом случае напряжение в высшей точке отверстия доходит до 77,3 кг/см² и до 97,0 кг/см² в низшей его точке. При возникновении трещины у этих точек или неподалеку от них растягивающие напряжения могут стать опасными в связи с этими переменами их величины.

Колеса железнодорожных вагонов часто представляют собой центр с отверстием, в которое плотно вставляется ось; на колесо натягивается бандаж.

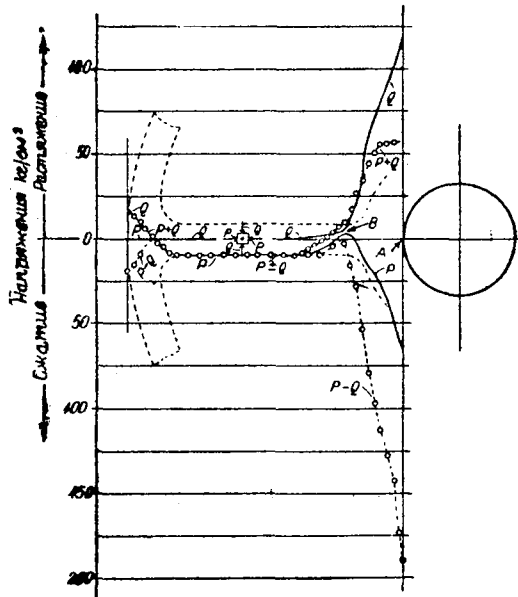
Гораздо более сложное распределение напряжений получается в колесе со спицами; на фиг. 8.143 изображена простейшая модель колеса железнодорожного вагона в масштабе $\frac{1}{12}$ натуральной величины, толщиной в 0,307 см; оно состоит из ступицы с отверстием несколько меньшего размера, чем ось, и соединяется при

помощи радиальных спиц с цилиндрическим ободом; все это вместе представляет так называемый колесный центр, на который натягивается бандаж.

Кокер и Леви¹ произвели исследование начальных напряжений, которые возникают в железнодорожных колесах, сконструированных обычным способом; дальше следует краткое описание этого исследования.

Разница между диаметром оси и отверстием ступицы бывает, обычно, равна $\frac{1}{1000}$ см на см диаметра оси, а необходимое для насадки на ось давление колеблется от 3 до 4 тонн на см диаметра. Оказалось, что напряжения в ступице велики, тогда как в других частях колесного центра они незначительны. Слабые намеки на нулевые значения разности главных напряжений обнаруживаются в ободе и около мест соединения спиц со ступицей и с ободом.

На фиг. 8.145 дано изображение результатов исследования напряжений по



Фиг. 8.145. Распределение напряжений в колесном центре, вызванное запрессовкой оси.

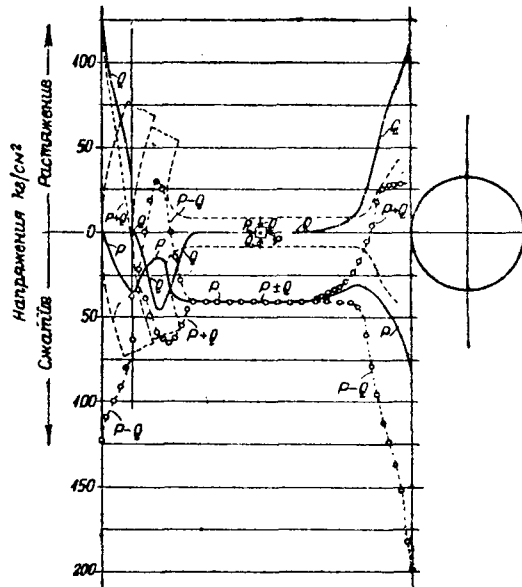
радиальной плоскости, проходящей через ось спицы, при увеличении радиуса отверстия ступицы этой целлюлоидной модели на 0,0064 см. В точке A на контуре отверстия радиальное сжимающее напряжение P достигает 63,3 кг на см²; с увеличением расстояния от центра оно быстро падает до нуля.

Далее оно сохраняет постоянное значение 9,1 кг на см² в точках в пределах спицы колеса; у обода же обращается в нуль. Поперечное по отношению к радиусу напряжение Q вблизи контура ступицы велико и быстро меняется по величине. В точке A оно равно 123,0 кг на см², но быстро падает до нулевого значения у начала спицы и вновь повышается до небольшой величины у обода.

Радиальное напряжение в точках вдоль контура отверстия достигает наибольшей величины на средней линии спицы; оно понижается до минимума на полпути между двумя подобными точками, так что ось испытывает от ступицы переменное радиальное давление. Поперечное к радиусу или периферическое напряжение принимает минимальное значение в точках против спиц, а наибольшее — между ними.

¹ Coker and Levi, Contact Pressures and Stress Distributions in Cams, Rollers and Wheels, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, May 1930.

Насадка на колесный центр бандажа значительно повышает радиальное напряжение в ступице, а также в остальной части колесного центра, самым же интересным явлением представляется характер изменения напряжений в самом бандаже. Напротив спицы максимальные напряжения имеют место в точках внешнего контура бандажа, а на полпути между спицами — в точке внутреннего контура. В ведущих колесах локомотива натяжения бандажа, надетого на колесный центр, оказывается часто недостаточным для того, чтобы удержать бандаж на месте и, предотвратив его скольжение по центру под действием силы тяги, развивающейся между колесом и рельсом. Прежде для предупреждения этого скольжения практиковалось притягивание бандажа посредством болтов, проходящих сквозь обод и расположенных между спицами. Этот прием повышал напряжения в бандаже в тех местах, где напряжение бывает и без того значительным, на что указывают случаи появления трещин во время эксплуатации.



Фиг. 8.147. Распределение напряжений, вызванное запрессовкой оси и натягом бандажа.

В более совершенной современной практике такой способ больше не применяется; вместо этого бандаж прикрепляется к колесному центру посредством одностороннего фланца; сквозь отверстия, просверленные как в ободе, так и в этом фланце, пропускаются болты; отверстия располагаются в точках, отмеченных на фиг. 8.146 черными изотропическими точками, в ободе колесного центра и неподалеку от наружных концов спиц, там, где мы имеем сравнительно низкую величину напряжений и где просверливание отверстия для болта не представляет большой опасности.¹

Количественная оценка этого явления получена благодаря дальнейшему исследованию напряжений в точках радиальной плоскости, проходящей по оси спицы; на рис. 8.147 показано влияние натягивания бандажа на колесный центр, надетый на ось. При этом опыте внешний диаметр модели бандажа был постепенно увеличен на 0,0396 см, что вызвало повышение радиального напряжения в ступице без особого изменения касательного напряжения; сжимающее напряжение P в спицах достигло почти 45,7 кг/см²; оно заметно уменьшается в местах соединения с ободом

¹ E. G. Coker, Stresses in Wheels, Nature, August 1-st 1931, pp. 174—175.

колесного центра, где поперечное по отношению к радиусу напряжение Q однако внезапно повышается от нулевого значения до величины $52,7 \text{ кг/см}^2$ с тем, чтобы снова затем упасть до нуля или почти до нуля у внешнего края обода. Отверстие для болта находится очень близко от точки с нулевой разностью напряжений, там, где оба напряжения становятся сжимающими; хотя напряжение в этом месте неминуемо повысится под влиянием плотно пригнанного к отверстию обода болта, все же это положение оказывается гораздо более благоприятным, чем раньше, на что указывает практика эксплуатации этого типа колес.

Интересно упомянуть здесь о том, что болты, о которых идет речь, заканчиваются часто конической головкой, пригнанной к соответствующему отверстию, имеющему форму усеченного конуса, другой же цилиндрический конец их расклепывается подобным же образом.

Распределение напряжений в изготовленной таким образом модели колеса зависит от деформаций, напряжения же в настоящем колесе не совсем точно совпадают с этими измеренными значениями, по причинам, изложенным в § 4.39.

Краткое описание этого случая и дальнейшие подробности опытов и полученных при испытаниях результатов можно найти в вышедшей недавно из печати статье.¹

¹ Loc. cit., p. 690.

ДОПОЛНЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДАННЫХ ОПТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Д. К. Кноль

Оптический метод изучения напряжений дает в каждой точке исследуемой модели численные значения разности главных нормальных напряжений $P-Q$ и угол наклона Φ главного напряжения P к оси Ox .

Наличие этих данных позволяет нам при помощи формулы (2.301) (см. главу II книги) вычислить главные нормальные напряжения P и Q в отдельности. Авторы применяют этот способ графического интегрирования при решении различного рода задач, рассматриваемых в книге. Однако, помимо этого способа графического интегрирования, существует ряд других способов, которые также дают возможность на основе данных эксперимента вычислить P и Q в отдельности. Больше того, можно привести некоторую общую теорию графического интегрирования уравнения равновесия плоской задачи теории упругости, при наличии данных оптического метода изучения напряжений, из которой формула (2.301) вытекает как частный случай.

Мы здесь изложим указанную общую теорию графического интегрирования уравнений равновесия и ряд других методов вычисления P и Q при наличии $P-Q$ и Φ .¹

§ 1. *Некоторый метод графического интегрирования уравнения равновесия плоской задачи теории упругости при наличии данных оптического метода изучения напряжений.*

а) Уравнения равновесия плоской задачи теории упругости принимают различную внешнюю форму, смотря по тому, к какой системе координат мы их относим. Для прямолинейных прямоугольных координат xoy имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= -\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} &= -\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В случае криволинейных координат, когда за координатные линии взяты траектории главных нормальных напряжений s_1 и s_2 , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s_1} &= -(P-Q) \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial s_2} &= -(P-Q) \frac{\partial \Phi}{\partial s_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ Рассматриваемые ниже методы появились в печати после выхода в свет книги Кокера и Файлона.

Когда за координатные линии взяты траектории главных скалывающих напряжений t_1 и t_2 , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t_1} &= \frac{\partial q}{\partial t_2} - 2q \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial p}{\partial t_2} &= \frac{\partial q}{\partial t_1} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial t_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где ради краткости положено:

$$p = P + Q \quad \text{и} \quad q = P - Q.$$

Первое уравнение системы (1) после интегрирования дает:

$$\widetilde{xx} = (\widetilde{xx})_0 - \int_{x_0}^x \frac{\partial xy}{\partial y} dx. \quad (4)$$

Мы ограничимся здесь выписыванием результатов интегрирования первых уравнений систем (1), (2) и (3). Все последующие рассуждения с таким же правом могут быть применимы и ко вторым уравнениям систем.

Первое уравнение системы (2) после интегрирования дает

$$P = P_0 - \int_{s_{10}}^{s_1} q \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} ds_1, \quad (5)$$

где $q = P - Q$ попережнему.

Таким же образом получаем для первого уравнения системы (3)

$$p = p_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial q}{\partial t_2} dt - \int_{t_0}^{t_1} 2q \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt_1. \quad (6)$$

За исключением последнего интеграла в правой части формулы (6), все интегралы в правых частях формул (4), (5) и (6), как это легко видно, одной и той же конструкции. Подинтегральная функция составляется следующим образом: некоторая, численно заданная в каждой точке области, функция умножается на производную по направлению, перпендикулярному к направлению интегрирования, от функции, также численно заданной в каждой точке области.

Таким образом совершенно очевидно, что и для самого общего случая криволинейных координат мы получаем формулу, содержащую интеграл вида:

$$\int_{u_0}^u g(u, v) \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} du; \quad (*)$$

для формулы (4) $g(u, v) = 1$, а

$$f(u, v) = \widetilde{xy} = \frac{P - Q}{2} \sin 2\Phi, \quad (7)$$

так что функция \widetilde{xy} численно задана в каждой точке рассматриваемой области.

Устанавливая общую теорию приближенного вычисления интеграла вида (*) мы получаем общий метод решения выше сформулированной задачи.

b) Теория приближенного вычисления интегралов вида

$$\int_{u_0}^u g(u, v) \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} du.^1$$

Пусть мы имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{du} = -h(u, v).$$

Пусть далее интегральные кривые этого дифференциального уравнения будут $F(u, v) = \text{const}$.

Переменные u и v мы рассматриваем как криволинейные координаты точки на плоскости, причем u_0 и u суть значения u в начальной и конечной точках пути интегрирования. Совершенно очевидно, что $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ может быть переписано в следующем виде

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \frac{d_v f(u, v)}{dv},$$

где d_v означает частный дифференциал функций f в направлении v . На основании такого представления производной исходный интеграл переписется следующим образом:

$$\int_{u_0}^u g(u, v) \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} du = \int_{u_0}^u g(u, v) d_v f(u, v) \frac{du}{dv},$$

или, заменяя интеграл приближенно суммой, получаем:

$$\int_{u_0}^u g(u, v) d_v f(u, v) \frac{du}{dv} \cong \sum_{i=0}^{n-1} g(u_i, v) [d_v f(u, v)]_i \frac{du_i}{dv}, \quad (8)$$

где u_i, v суть координаты i -ой точки деления.

Введем теперь в рассмотрение еще некоторое семейство кривых:

$$K(u, v) = \text{const}.$$

Остановим наше внимание на i -ой точке деления нашего промежутка интегрирования. Через эту точку проходят, помимо кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, кривые $F = \text{const}$ и $K = \text{const}$ (рис. 1). Слагаемое в сумме (8), соответствующее i -ой точке, будет $g(u_i, v) [d_v f(u, v)]_i \frac{du_i}{dv}$.

Величину $[d_v f(u, v)]_i$ мы получаем как разность значений $f(u, v)$ в точках $(u_i, v + dv_i)$ и (u_i, v) , причем, как это очевидно, точка $(u_i, v + dv_i)$ лежит на кривой $u = \text{const}$, проходящей через i -ую точку на расстоянии dv_i от последней.

Расстояние dv_i мы можем выбрать совершенно произвольно; возьмем его так, чтобы выполнялось следующее равенство $dv_i = dK_i$, т. е. мы движемся по кривой $u = \text{const}$ до пересечения этой кривой с кривой $K + dK_i$, и эту точку обозначим как точку $(u_i, v + dv_i)$.

¹ См. Труды II съезда математиков СССР 1934 г. Доклад Д. К. Кноль и А. М. Шнейдер, а также сборник „Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах“, работы лаборатории оптического метода изучения напряжений и лаборатории пластических деформаций Научно-исследовательского института математики и механики Ленинградского государственного университета им. А. С. Бубнова, выпуск II, статья названных авторов, ОНТИ, 1935 г.

Через эту же точку проходит одна из кривых семейства $F = \text{const}$, которую обозначим $F + dF_i$.

Следующий шаг состоит в выборе $(i + 1)$ -ой точки деления промежутка интегрирования. Возьмем $(i + 1)$ -ую точку деления промежутка интегрирования в точке пересечения кривой $F + dF_i$ с путем интегрирования. При таком выборе мы получаем, что $\frac{dv_i}{du_i} = h(u_i, v)$.

Таким образом формула (8) переписется в окончательном виде так:

$$\int_{u_0}^u g(u, v) d_i f(u, v) \frac{dv}{du} \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(u_i, v)}{h(u_i, v)} [d_i f(u, v)]_i \tag{9}$$

Основным в изложенной теории является своеобразный выбор точки деления промежутка интегрирования. Каждому определенному выбору семейств кривых

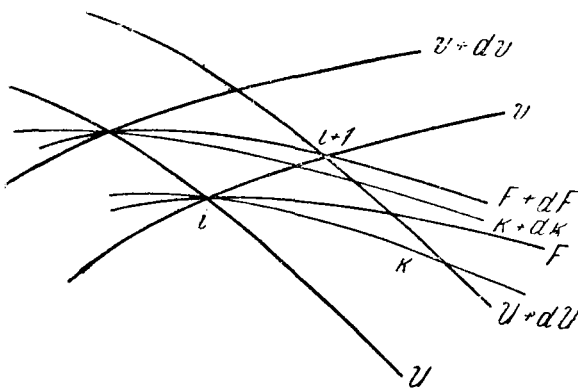


Рис. 1.

$K = \text{const}$ и $F = \text{const}$ соответствует частный случай формулы (9).

Частные случаи, кроме того, можно еще отличать по выбору системы координат u и v .

Таким образом формула (9) дает бесчисленное множество частных случаев.

Рассмотрим некоторые из них.

с) Частные случаи.

Рассмотрим сперва частные случаи, относящиеся к прямоугольной системе координат xoy , т. е. к формуле (4).

1 случай. Возьмем

$h(x, y) = -1$ и $K(x, y) = y$.

Формула (4) в этом случае, согласно формуле (9), переписется так:

$$\overline{xx} = \overline{xx}_0 - \sum_{i=0}^{n-1} (d_y \overline{xy})_i \tag{10}$$

причем суммирование ведется в положительном направлении оси x -ов. Точки деления промежутка суммирования в формуле (10) получаем на равных расстояниях. При вычислении суммы мы возьмем величину $d_y \overline{xy}$ (точнее величину $\Delta_y \overline{xy}$) как разность значений \overline{xy} в двух соседних точках по прямой, параллельной оси y -ов, согласно общей теории. Нужно помнить, что значения \overline{xy} в любой точке изучаемой области вычисляются по формуле (7) и, следовательно, никаких дополнительных данных, кроме данных оптического метода изучения напряжений, не потребуется.

Чтобы обеспечить вычисления по формуле (10), иногда выгодно предварительно построить кривые $\overline{xy} = \text{const}$.

Построение семейства названных кривых совершается чрезвычайно просто, если имеются семейства изоклин и изохром, причем при построении нужно пользоваться формулой (7). После того как кривые $\overline{xy} = \text{const}$ построены, вычисление значения \overline{xx} по формуле (10) сведется к простому сложению и вычитанию, при этом исходить нужно из точки, где значение \overline{xx} известно, чаще всего из точки контура.

На рис. 2 приведены кривые $\overline{xy} = \text{const}$ для диска, сжатого двумя силами по диаметру, для которого изоклины и изохромы даны на фиг. 4.38 (см. главы IV § 38 книги). Разделим радиус ox на десять равных частей. Одну десятую часть ox отложим по оси oy и через полученную точку проведем прямую, параллельную ox . Значение $d_y \overline{xy}$ в i -ой точке возьмем соответственно данному интервалу. В таблице 1 приведены значения $\overline{xx} = P$ в точках вдоль оси ox .

Таблица 1.

$\frac{x}{r}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
\overline{dxy}	0	0,04	0,07	0,10	0,13	0,14	0,15	0,14	0,13	0,11	0
P по ф-ле (10)	0	0,02	0,04	0,11	0,21	0,34	0,48	0,63	0,77	0,90	1,01
P по ф-ле (2.301)	0	0,01	0,06	0,13	0,23	0,35	0,48	0,61	0,72	0,81	0,84
P теор.	0	0,01	0,05	0,12	0,24	0,38	0,56	0,74	0,90	1,02	1,06

Если вместо ox взята какая-нибудь другая прямая за путь суммирования, параллельная ox , то нужно произвести те же самые операции, что и для случая ox .

Как видно из таблицы 1, значения P , вычисленные по формуле (10), не уступают в смысле точности тем же значениям P , вычисленным по формуле (2.301), причем в нашем случае графические операции менее сложны, чем когда мы пользуемся формулой (2.301).

Формула (10) имеет еще одно преимущество перед формулой (2.301).

Дело заключается в том, что когда путь суммирования проходит через особенную точку (для которой $P - Q = 0$), то формула (2.301) теряет силу, так как в этой точке $\frac{\partial \Phi}{\partial s_2}$ так же как и $\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}$ становятся неопределенными; формула же (10) в этом случае применима.

В случае, если по каким-либо обстоятельствам нам не удалось зачертить изохромы с достаточной степенью точности, а получаем разность главных напряжений $P - Q$ по соответствующим отсчетам оптической разности хода лучей по компенсатору, то, для того чтобы вычислить \overline{xx} по формуле (10), поступаем следующим образом. Измерения оптической разности хода лучей компенсатором

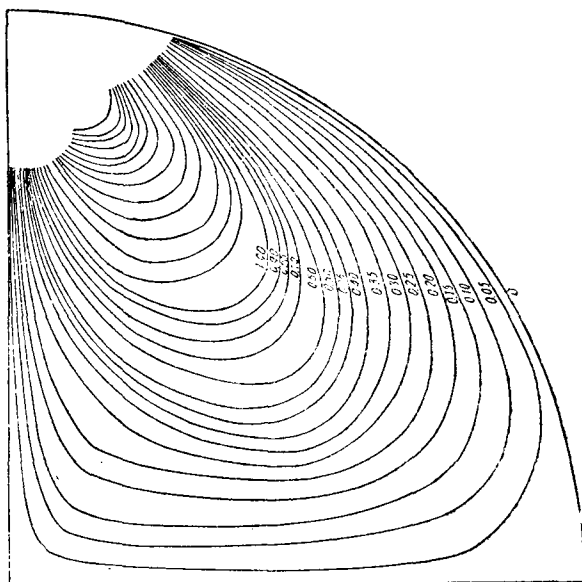


Рис. 2.

производим по двум параллельным сечениям, основному и вспомогательному, отстоящим друг от друга на $\frac{1}{n}$ часть деления промежутка суммирования.

Данные, полученные таким образом, и семейство изоклин достаточны для того, чтобы произвести вычисления по формуле (10).

2 случай. Переходим к рассмотрению второго частного случая. Для этого возьмем $h(x, y) = -1$, $K(x, y) = \overline{xy}(x, y)$. Семейство кривых $F(x, y) = c$ будет опять $y + x = c$. Кривые же $\overline{xy} = \text{const}$, как это уже было указано выше, получаем из уравнения (7). Полагая $d_y \overline{xy} = c$, получаем из формулы (4), согласно формуле (9),

$$\overline{xx} = \overline{xx}_0 - cn.$$

В этом случае промежуток суммирования делится на n неравных частей.

Остальные частные случаи, относящиеся к формуле (4), более сложного порядка, чем только-что рассмотренные нами.

Остановимся кратко еще на одном случае.

3 случай. Положим $F(x, y) = \overline{xy}(x, y)$ и $K(x, y) = \overline{xy}(x, y)$.

Тогда $h(x, y) = \text{tg } \psi$, где ψ угол между осью x -ов и линией $\overline{xy} = \text{const}$. Для вычисления \overline{xx} , согласно выше сказанного, получаем:

$$\overline{xx} = \overline{xx}_0 - \sum_{i=0}^{n-1} (d_y \overline{xy} \text{ctg } \psi)_i.$$

Переходим теперь к рассмотрению частных случаев, которые мы получаем из формулы (5), подходя к ней с точки зрения изложенной общей теории. В этой формуле $g = q = P - Q$.

4 случай. Возьмем $F = \Phi$ и $K = \Phi$. Тогда $h = \text{tg } \psi$, где ψ угол между линией s_1 и линией $\Phi = \text{const}$.

Формула (5), согласно формуле (9), переписывается так:

$$P = P_0 - \sum_{i=0}^{n-1} q_i (\text{ctg } \psi d_{s_1} \Phi)_i. \quad (11)$$

Суммирование ведется в направлении положительных s_1 . Формула (11) и является формулой (2.301) и впервые была получена Файлоном в его методе интегрирования по изостатам.¹ Таким образом и подтверждается сказанное ранее, что формула (2.301) получается как частный случай из более общей теории.

Остановимся на некоторых недостатках, которыми, по нашему взгляду, обладает формула (11) [или, что то же самое, формула (2.301)] по сравнению с формулой (10). Когда мы ведем вычисления по формуле (10), то графические операции сведутся: а) к построению семейства кривых $2\overline{xy} = q \sin 2\Phi = \text{const}$ ² (можно обойтись и без них) и б) к проведению прямых, параллельных осям координат. В случае вычисления P по формуле (11) графические операции сведутся: а) к построению двух семейств кривых траекторий главных напряжений и б) к измерению в каждой точке деления пути интегрирования угла ψ .

Не подлежит сомнению, что операции построения траекторий главных напряжений и измерение углов сложнее, чем операция построения кривых $\overline{xy} = \text{const}$ и прямых. Не нужно забывать, что ψ угол между двумя кривыми.

¹ L. N. G. Filon, On the graphical Determination of Stress from photoelastic Observations, Engineering, 1923.

² Во всех рассуждениях предполагается, что даны кривые $\Phi = \text{const}$ и $q = \text{const}$.

Вопрос о точности результатов (оценка погрешности) по той или другой формуле требует особого исследования, до сих пор еще нигде не приведенного. Произведенные вычисления (ср. таблицы 1 и 4.381) по обоим формулам показывают, что данные, полученные по формуле (10), не уступают в смысле точности данным, полученным по формуле (11).

Однако, производя вычисление величины P по той же формуле (5), мы можем избежать измерения величины ψ , выбирая другое семейство кривых $F = \text{const}$.

Это существенное обстоятельство не указано в выше цитированной работе Файлона, так же как и в настоящей книге.

5 случай. Возьмем $F = y$ и $K = \Phi$. Тогда $h = \text{tg } \Phi$ и формула (5), согласно формуле (9), переписывается так

$$P = P_0 - \sum_{i=0}^{n-1} (q \text{ctg } \Phi d_{s_i} \Phi)_i. \quad (12)$$

Вычисляя P по формуле (12), мы путем соответствующего деления на части промежутка интегрирования освобождаемся от измерения угла ψ .

6 случай. Берем $h = 1$ и $K = \Phi$, мы получаем третий случай вычисления по формуле (5)

$$P = P_0 - \sum_{i=0}^{n-1} q_i (d_{s_i} \Phi)_i.$$

Таким образом, исходя из общего метода численного интегрирования интеграла вида:

$$\int_{u_0}^u g(u, v) \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} du,$$

мы получаем самые разнообразные способы вычисления составляющих нормальных напряжений x_x , u_y или P и Q .

§ 2. Графический метод построения линий $P + Q = \text{const}$ (изопахики).

В 1933 г. вышла статья Найбера, которая дает, при наличии данных оптического метода, некоторый весьма простой по идее метод построения линий

$P + Q = x_x + u_y = \text{const}$.¹ Ясно, что, имея линии $P - Q = \text{const}$ и $\Phi = \text{const}$ и на основании их построив линии $P + Q = \text{const}$, мы получаем полное решение обобщенной плоской задачи теории упругости.

В этом параграфе мы коротко изложим названный метод построения изопахик (isopachic)

Пусть (см. рис. 3) 1, 3, 5 и 7 являются направлениями в точке O соответственно главного нормального напряжения, изопахики, изохромы и изоклины; напряжения же 2, 4, 6 и 8 ортогональны соответственно направлениям 1, 3, 5 и 7. Углы Φ , α , β

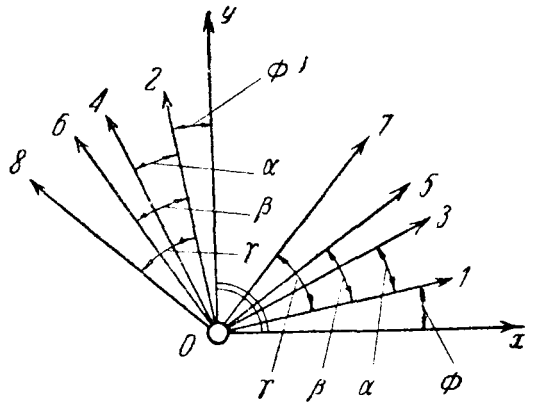


Рис. 3.

¹ H. Neuber, New Method of Douving Stresses Graphically from Photo-Elastic Observations, Proceedings of the Royal Society (A), 141, 844, 1933.

и γ являются соответственно углами между осью x -ов и главным напряжением P , изопахикой, изохромой и изоклиной. Направления 1, 3, 5 и 7, а также и 2, 4, 6 и 8 обозначим еще через s_1, s_2, s_3, s_4 и т. д.

Ясно, что

$$\frac{\partial p}{\partial s_3} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial s_5} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s_7} = 0.$$

Также совершенно ясно, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s_1} &= \frac{\partial p}{\partial s_4} \cdot \frac{\partial s_4}{\partial s_1} = -\sin \alpha \frac{\partial p}{\partial s_4}; & \frac{\partial p}{\partial s_2} &= \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial s_4}; \\ \frac{\partial q}{\partial s_2} &= -\sin \beta \frac{\partial q}{\partial s_6}; & \frac{\partial q}{\partial s_2} &= \cos \beta \frac{\partial q}{\partial s_6}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} &= -\sin \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial s_8}; & \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} &= \cos \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial s_8}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнения равновесия (2) можно переписать в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s_1} + \frac{\partial q}{\partial s_1} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial s_2} - \frac{\partial q}{\partial s_2} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

На основании уравнений (13), уравнения равновесия (14) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s_4} \sin \alpha &= -\frac{\partial q}{\partial s_6} \sin \beta + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_8} \cos \gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial s_4} \cos \alpha &= \frac{\partial q}{\partial s_6} \cos \beta + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_8} \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Посредством уравнений (15) мы можем получить направление и расстояние изопахик, зная направление и расстояние изохром и изоклин.

Для того чтобы построить изопахики, необходимо знать их направление в достаточном числе точек. Исходными точками при построении являются точки на контуре, в которых легко определить, при наличии данных оптического метода и контурных условий, значение p .

Допустим, что a, b и c соответственно расстояния между двумя соседними изопахиками, изохромами и изоклинами.

Уравнения (15) можно приближенно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{a} \sin \alpha &= -\frac{\Delta q}{b} \sin \beta + 2q \frac{\Delta \Phi}{c} \sin \gamma, \\ \frac{\Delta p}{a} \cos \alpha &= \frac{\Delta q}{b} \cos \beta + 2q \frac{\Delta \Phi}{c} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{2q}{\Delta q} \Delta \Phi \cdot b = b'; \quad \frac{b \cdot c}{a} = a' \quad \text{и} \quad \Delta p = \Delta q,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{b' \cos \gamma - b \sin \beta}{a'}, \\ \cos \alpha &= \frac{b' \sin \gamma + c \cos \beta}{a'}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Посредством этих уравнений может быть выполнено графическое построение следующим простым способом.

В какой-либо точке O (рис. 4), где изохрома пересекается с изоклиной, мы получаем измерением среднее расстояние между изоклиной, проходящей через

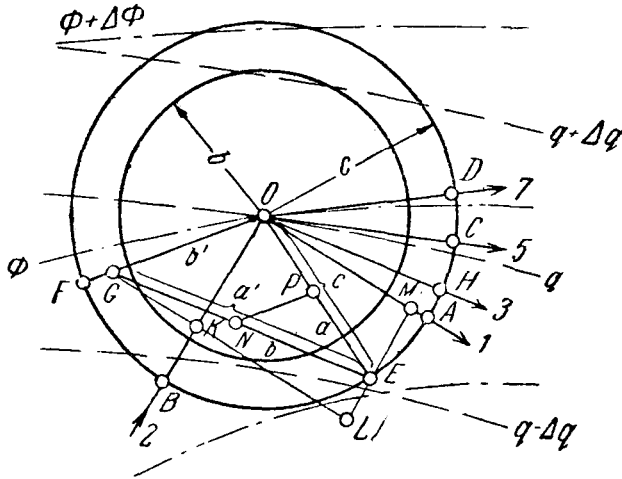


Рис. 4.

точку O с параметром Φ , и двумя близкими изоклинами $\Phi + \Delta\Phi$, с одной стороны, и $\Phi - \Delta\Phi$, с другой.

Соответствующим образом мы получим величину b .

Величину b мы получаем из номограммы рис. 5. Для любой абсциссы b номограмма дает нам b' как ординату, относящуюся к какому-либо параметру q .

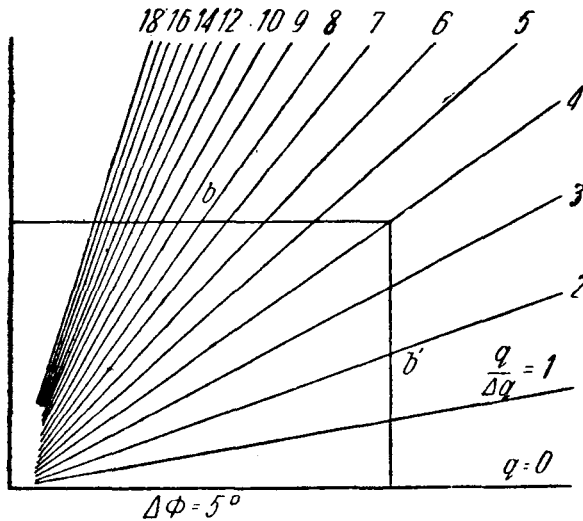


Рис. 5

На рис. 4 приведены направления 1, 5 и 7 в точке O , получаемые нами из эксперимента. На этой же фигуре приведены окружности с диаметрами $2b$, $2c$. Отложим дугу $AE = AC$ и дугу $BF = AD$. По прямой OF от точки O отложим отрезок $OG = b'$. Точки G и E соединим прямой. Линия, параллельная GF и про-

ходящая через O , дает направление \bar{z} в точке O . Что это действительно так, легко вывести из рис. 4.

Вот в основном графический метод построения изопахик, данный в выше-названной статье Нейбера.

Нужно, однако, заметить, что формулы, полученные Нейбером и положенные им в основу графического построения, могут быть получены более быстро из выражения для $\frac{dp}{ds}$, где s любое направление.

В самом деле, уравнения (1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial(\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y})}{\partial x} = - \frac{\partial(\bar{x}\bar{x} - \bar{y}\bar{y})}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{x}\bar{y}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial(\bar{x}\bar{x} - \bar{y}\bar{y})}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{x}\bar{y}}{\partial x}.$$

Умножая первое уравнение на $\cos \alpha$, а второе на $\sin \alpha$ и складывая, получаем:

$$\frac{d(\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y})}{ds} = - \frac{d(\bar{x}\bar{x} - \bar{y}\bar{y})}{dn} - \frac{d 2\bar{x}\bar{y}}{dn}, \quad (17)$$

где s , n и \bar{n} направления, указанные на рис. 6.

Заменяя в формуле (17)

$$\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y} = P + Q = p,$$

$$\bar{x}\bar{x} - \bar{y}\bar{y} = (P - Q) \cos 2\Phi = q \cos 2\Phi,$$

$$2\bar{x}\bar{y} = (P - Q) \sin 2\Phi = q \sin 2\Phi,$$

где опять ради краткости положено

$$P + Q = p \text{ и } P - Q = q,$$

Рис. 6.

мы получаем:

$$\frac{dp}{ds} = - \frac{dq}{dn} \cos 2\Phi + \frac{dq}{dn} \sin 2\Phi + 2q \sin 2\Phi \frac{d\Phi}{dn} + 2q \cos 2\Phi \frac{d\Phi}{dn}. \quad (18)$$

Если координатные оси совпадут с направлениями главных напряжений, то следовательно, $\Phi = 0$, и формула (18) переписется:

$$\frac{dp}{ds} = - \frac{dq}{dn} + 2q \frac{d\Phi}{dn}. \quad (19)$$

Выбирая s в направлении изопахики, мы имеем $\frac{dp}{ds} = 0$ и, следовательно, формула (19) переписется так:

$$\frac{dq}{dn} = 2q \frac{d\Phi}{dn}; \quad (20)$$

из формулы (20) мы получаем необходимые данные для графического построения изопахик.

Возвращаясь к формуле (19), мы замечаем, что, исходя из нее, мы можем получить еще один, довольно простой метод вычисления p , при наличии данных оптического метода.

В самом деле, если мы направление \bar{n} выберем совпадающим с направлением изоклины, то формула (19) переписывается так:

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{dq}{dn},$$

или приближенно

$$(\Delta p)_{\Delta s} = -(\Delta q)_{\Delta n} \frac{\Delta s}{\Delta n}.$$

Значки Δs и Δn у скобок показывают, что Δp и Δq являются приращениями в соответствующих направлениях.

Но

$$\frac{\Delta s}{\Delta n} = \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

и тогда окончательно

$$p_B = p_A - (\Delta q)_{\Delta n} \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

что и подтверждает вышесказанное.

§ 3. Метод сведения задачи о нахождении $P + Q$ к контурной задаче Дирихле.

В настоящем параграфе мы остановимся на одном способе нахождения суммы нормальных напряжений $p = P + Q$ при наличии данных оптического метода изучения напряжений, который в ряде задач довольно быстро может привести к цели.

Известно, что функция $P + Q = \Phi(x, y)$ при отсутствии объемных сил является функцией гармонической, т. е. она удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа, а именно:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta^2 \Phi = 0. \quad (21)$$

Следовательно, если мы имеем некоторую напряженную область, в которой функция Φ существует, непрерывна и однозначна, и мы знаем, допустим, значение Φ на контуре, то для определения значений Φ внутри области задача сведется к так называемой контурной задаче Дирихле. Значения для функции Φ в точках контура мы получаем из данных оптического метода и условия распределения внешних усилий по контуру. Из этих данных мы получаем только численные значения для функции в каждой отдельной точке контура и, следовательно, для получения аналитического выражения для Φ необходимо произвести интерполирование. После того как будет найдено аналитическое выражение для Φ на контуре напряженной области, мы, решая задачу Дирихле, находим выражение для Φ внутри области.

Для иллюстрации метода рассмотрим распределение напряжений в кольце, сжатом двумя сосредоточенными силами по внешнему диаметру кольца.¹

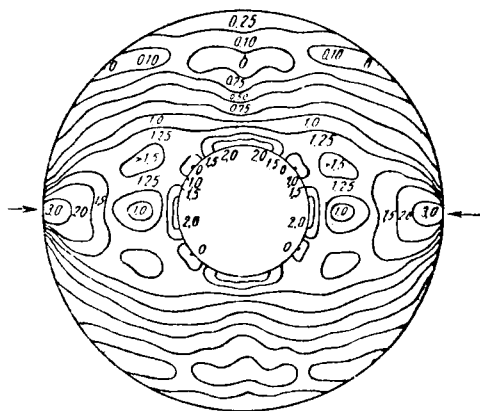


Рис. 7.

¹ См. статью Д. К. Кнолль, Об одном методе определения суммы главных нормальных напряжений из данных эксперимента, в сборнике „Оптический метод изучения напряжений в деталях машин“. ОНТИ, 1935.

На рис. 7 приведены изохромы для рассматриваемого случая кольца. Эти данные достаточны для определения в каждой точке как внутреннего, так и внешнего контуров численного значения Φ . В таблице 2 приведены эти значения в зависимости от центрального угла φ .

Таблица 2.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Значения Φ на внутреннем контуре . .	2,54	-2,26	-1,52	-0,55	-0,44	1,31	2,00	2,49	2,78	2,88
Значения Φ на внешнем контуре . .	∞	0,53	0,44	0,29	0,13	-0,04	-0,20	-0,32	-0,40	-0,42

Как видно из таблицы 2, функция Φ в точке приложения сосредоточенной силы на внешнем контуре принимает бесконечно большое значение. Это обстоятельство создает некоторую трудность, которую, однако, можно избежать, накладывая на наше решение некоторое другое решение, соответствующее сосредоточенной силе, приложенной к границе полуплоскости.

Напряжения для этого случая вычисляются по известным формулам, полагая, что начало координат помещено в точке приложения силы:

$$\widehat{rr} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho},$$

$$\widehat{\theta\theta} = 0; \quad \widehat{r\theta} = 0.$$

В нашем примере постоянный множитель

$$\frac{2P}{\pi} = 13.$$

После наложения такого рода решения мы получаем новые значения для Φ , которые мы обозначим через Φ^* . В таблице 3 приведены значения Φ^* для точек внутреннего и внешнего контуров в зависимости от угла φ .

Таблица 3.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Значения Φ^* на внутреннем контуре	-3,32	-3,01	-2,26	-1,24	-0,20	0,71	1,44	1,97	2,29	2,41
Значения Φ^* на внешнем контуре	0,30	0,27	0,18	0,03	-0,13	-0,30	-0,54	-0,58	-0,66	-0,68

Исходя из численных значений Φ^* таблицы 3, нам легко написать аналитические выражения для Φ^* на внутреннем и внешнем контурах.

Для внутреннего контура

$$\Phi^* = -0,09 - 2,87 \cos 2\varphi - 0,37 \cos 4\varphi. \quad (22)$$

Для внешнего контура

$$\Phi^* = -0,20 + 0,49 \cos 2\varphi + 0,02 \cos 4\varphi. \quad (23)$$

После того как найдены аналитические выражения для Φ^* на внутреннем и внешнем контурах, нам остается определить функцию Φ^* — внутри области и совпадающую на контурах, соответственно, с выражениями (21) и (22).

Будем искать общее решение в виде:

$$\Phi^*(r, \varphi) = C \lg r + D + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cos n\varphi. \quad (24)$$

Не трудно получить, если для кольца внутренний радиус $R_1 = 8$, а внешний $R_2 = 25$:

$$C = -0,10; \quad C_2 = 0,00127; \quad C_4 = 0,00000005;$$

$$D = 0,12; \quad D_2 = -188,8; \quad D_4 = -1504.$$

Все остальные коэффициенты C_n и D_n равны нулю.

Вставляя полученные значения для коэффициентов в формулу (24), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi^* = & -0,10 \lg r + 0,12 + (0,00127 r^2 - 188,8 r^{-2}) \cos 2\varphi + \\ & + (0,00000005 r^4 - 1504 r^{-4}) \cos 4\varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы теперь получить истинное решение, соответствующее первоначально поставленной задаче, мы должны к решению (25) прибавить решение от сосредоточенной силы, действующей на границе полуплоскости; окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & -0,10 \lg r + 0,12 + (0,00127 r^2 - 188,8 r^{-2}) \cos 2\varphi + \\ & + (0,00000005 r^4 - 1504 r^{-4}) \cos 4\varphi + 13 \frac{\cos \theta}{P}. \end{aligned} \quad (26)$$

В таблице 4 приведены значения $P + Q$ для точек внутри кольца, расположенных по линии действия сосредоточенной силы, вычисленные по формуле (26), и для сравнения приведены теоретические значения.

Таблица 4.

r	8	10	12	13	14	16	18	20	22	24
$P + Q$ по формуле (26)	-2,56	-1,16	-0,33	-0,014	0,28	0,85	1,50	2,45	4,37	13,62
$P + Q$ теорет.	-2,54	-1,13	-0,33	-0,017	0,26	0,80	1,42	2,35	4,11	12,33

Таблица 5.

r	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25
$P + Q$ по формуле (26)	2,88	1,94	1,34	0,93	0,61	0,33	0,09	-0,12	-0,33	-0,42
$P + Q$ теорет.	2,88	1,95	1,37	0,95	0,63	0,35	0,11	-0,11	-0,32	-0,43

В таблице 5 приведены значения $P + Q$ для точек внутри кольца, расположенных по диаметру, перпендикулярному линии действия сил, и для сравнения также приведены теоретические значения.

Как видно из приведенных таблиц, значения для $P + Q$, вычисленные по формуле (26), мало отличаются от соответствующих теоретических значений. Следует однако заметить, что аналитический способ решения рассматриваемой задачи во многих случаях весьма затруднителен в виду сложности контура области. Правда, для ряда задач это затруднение можно обойти, отображая (конформное преобразование) изучаемую область на круг, в случае односвязной, или на кольцо, в случае двусвязной области.

Таким образом круг применения аналитического способа решения задачи до некоторой степени расширяется.

В случае, когда аналитический способ неприменим, приходится прибегать к численному способу решения. Наиболее удобным и чаще всего употребляемым на практике в настоящее время является разностный метод, так называемый метод Либмана. Суть этого метода заключается в том, что мы заменяем производные отношениями конечных разностей.

В результате такой замены задача решается приближенно, но с достаточной для практики точностью. Уравнение (21) при решении задачи мето-

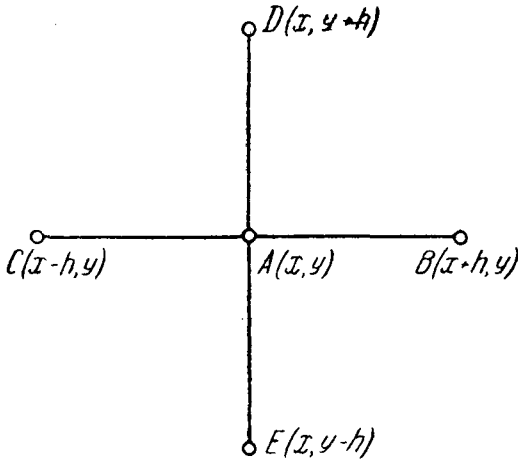


Рис. 8.

дом Либмана заменяется таким:

$$\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) - 4\Phi(x, y) = 0,$$

или

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h)],$$

т. е. значение функции в точке $A(x, y)$ (рис. 8) равно среднему арифметическому в точках B, C, D, E .

Для проведения вычисления методом Либмана поступаем следующим образом: рассматриваемую область (приведенные ниже вычисления относятся к задаче для кольца, причем контурные значения взяты из таблицы 3) разбиваем на клетки (рис. 9), аналогичные рисунки готовим в достаточном количестве. В клетках, обведенных жирными линиями, впишем контурные значения для $P + Q$, в данном случае для кольца. Внутри остальных клеток впишем произвольно взятые цифры, согласуя их, однако, для сокращения вычисления, с контурными условиями задачи. На рис. 9 для примера заполнены несколько столбцов.

Совершенно ясно, что, для того чтобы произвести вычисления до конца, необходимо заполнить все клетки, что фактически и было выполнено. Написанные значения мы будем считать первым приближением для рассматриваемой задачи. Чтобы получить второе приближение, производим вычисления согласно схеме, приведенной на рис. 8. Полученный результат для первого столбца (данные остальных столбцов опущены ради сокращения) приведен на рис. 10. Для получения третьего, четвертого и т. д. приближения необходимо повторить каждый раз указанные вычисления. Операцию нужно производить до тех пор, пока два соседние приближения не будут отличаться друг от друга. Доказательство сходимости процесса, которое мы здесь не приводим, читатель может найти в книге Скарбюро.

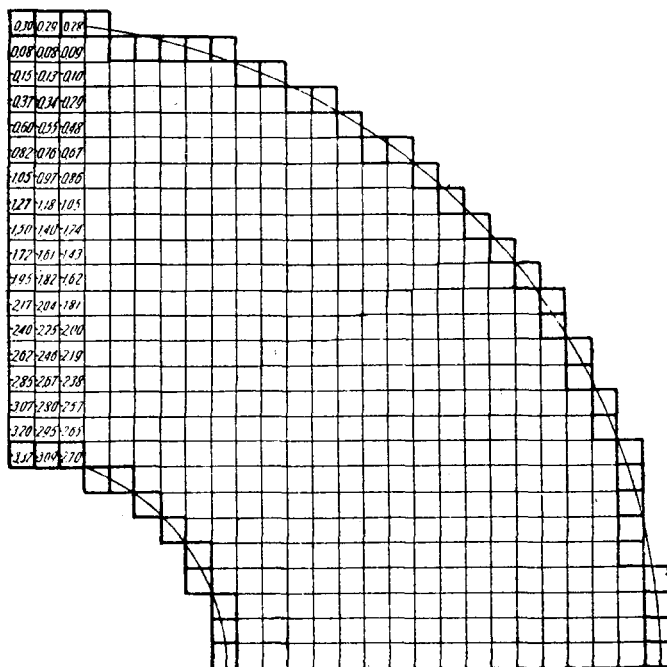


Рис. 9.

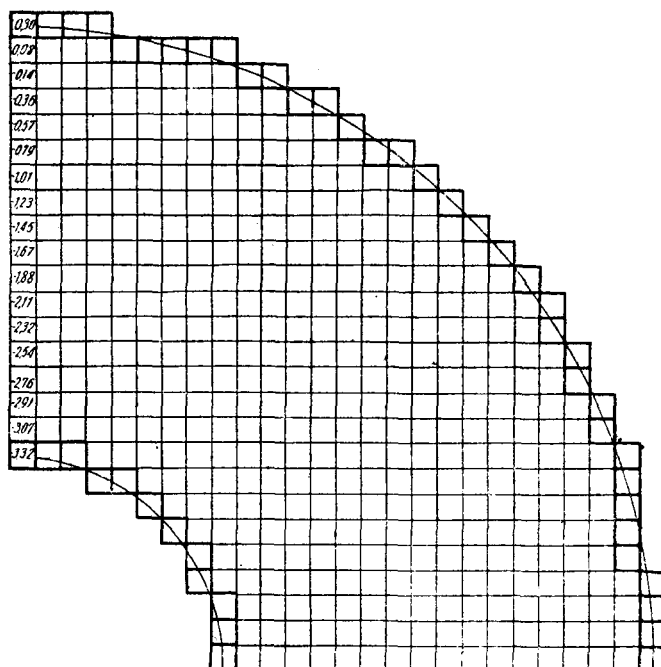


Рис. 10.

На рис. 11 приведено последнее 20-е приближение для первого столбца, которое не отличается от предыдущего. Чтобы получить истинные значения для

$P+Q$, необходимо из значений, приведенных на рис. 11, вычесть соответствующие значения величины $\frac{13}{r}$, где r отсчитывается от точки приложения сосредоточенной силы. Найденные значения приведены в таблице 6.

Таблица 6.

r	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$P+Q$	-2,56	-1,20	-0,38	+0,22	0,75	1,34	2,30	4,22	13,16

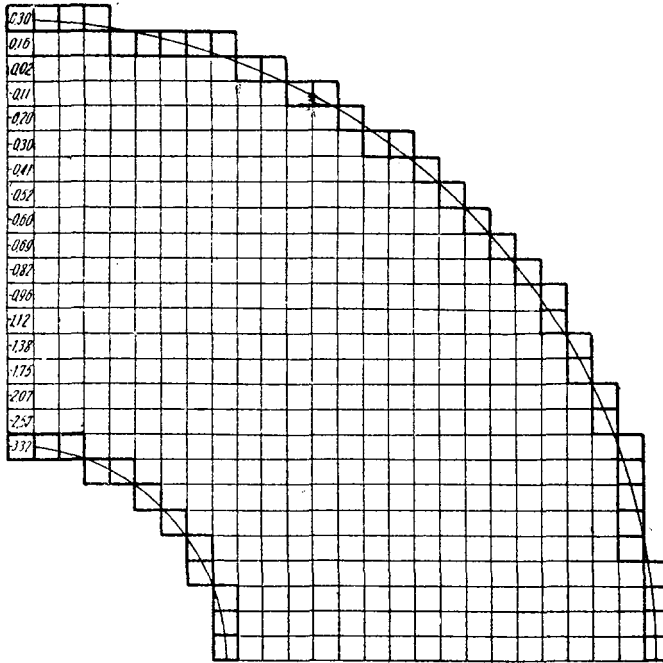


Рис. 11.

Как видно, полученные данные мало отличаются от данных, приведенных в таблице 4.

По поводу изложенного метода необходимо заметить следующее: хотя окончательные данные достаточно близко подходят к теоретическим значениям, однако вычисления довольно громоздки и длительны. Вспомним, что для того, чтобы получить удовлетворительный результат в рассматриваемой задаче, пришлось вычислить 20 приближений. Такая громадная вычислительная работа, несмотря на элементарность вычисления, до некоторой степени обесценивает описанный выше метод.

§ 4. Составление аналитических формул для составляющих напряжений для части исследуемой области на основе данных оптического метода изучения напряжений.

Для целого ряда практических задач до сих пор не найдено точных теоретических решений. В этих случаях приходится решать задачу тем или другим экспериментальным методом исследования.

Оптический метод изучения напряжений в этом случае оказывает неоценимые услуги. Сказанное подтверждают многочисленные и интересные исследования, приведенные в настоящей книге. Как известно, на основе данных оптического метода изучения напряжений можно получить по любому сечению исследуемой модели численные значения составляющих напряжений. Имея эти данные, легко составить для любой части модели аналитические выражения для составляющих напряжений. Для решения этой задачи поступаем следующим образом. Интересующую нас часть модели заключаем в окружность. Начало координат помещаем в центр этой окружности. На контуре C окружности из данных оптического метода определим \overline{rr} и $\overline{r\theta}$. Далее, для величин \overline{rr} и $\overline{r\theta}$ составим аналитические выражения и после этого решаем первую основную задачу — теорию упругости для диска. Означенное решение и дает аналитические выражения составляющих напряжений для интересующей нас части рассматриваемой области. Если значения \overline{rr} и $\overline{r\theta}$, полученные из данных эксперимента, определены достаточно точно, то решение, полученное на их основе, довольно хорошо согласуется с точным теоретическим решением.

Для иллюстрации сказанного возьмем диск фиг. 4.38 (изоклины и изохромы, приведенные на этом рисунке, получены экспериментально) и вырежем из него диск радиуса приблизительно $0,4R$, где R радиус основного диска, так, чтобы центры их совпали. На контуре вырезанного диска из данных эксперимента определим численные значения для \overline{rr} и $\overline{r\theta}$. В таблице 7 приведены эти величины в зависимости от центрального угла φ .

ТАБЛИЦА 7.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
\overline{rr}	0,526	0,467	0,302	0,015	-0,410	-1,090	-1,780	-2,632	-3,296	-3,553
$\overline{r\theta}$	0	-0,320	-0,799	-1,170	-1,530	-1,840	-1,880	-1,695	-0,848	0

По значениям таблицы 7 для \overline{rr} и $\overline{r\theta}$ составим аналитические выражения методом интерполяции, что дает:

$$\overline{rr} = -1,083 + 1,958 \cos 2\theta - 0,421 \cos 4\theta + 0,082 \cos 6\theta,$$

$$\overline{r\theta} = -1,724 \sin 2\theta - 0,400 \sin 4\theta - 0,069 \sin 6\theta.$$

Решение основной задачи теории упругости для диска, как известно, сведется к нахождению двух голоморфных функций комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

Составляющие напряжений \overline{xx} , \overline{yy} и \overline{xy} выразятся через эти функции следующим образом:

$$\overline{xx} + \overline{yy} = 4R\Phi(z), \quad (27)$$

$$\overline{yy} - \overline{xx} + 2i\overline{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (28)$$

где \bar{z} величина, сопряженная z ; символ R означает, что берется вещественная часть функции $\Phi(z)$. Комплексное равенство (28) соответствует двум вещественным. Таким образом равенства (27) и (28) достаточны для определения \overline{xx} , \overline{yy} и \overline{xy} .

Функции Φ и Ψ для нашей задачи могут быть взяты в виде бесконечных рядов:

$$\Phi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

$$\Psi(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

где a_0 , a_n , b_0 и b_n , вообще говоря, какие-то постоянные комплексные числа. Для их определения существует следующее контурное равенство для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - e^{2i\theta} [z\Phi'(z) + \Psi(z)] = \bar{r}r - ir\theta,$$

где $\bar{\Phi}(\bar{z})$ функция, сопряженная $\Phi(z)$.

Применяя это контурное равенство к нашей задаче, мы находим необходимые значения для коэффициентов и окончательно получаем:

$$\Phi(z) = -0,541 + 0,117 \rho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) - 0,010 \rho^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) - 0,006 \rho^6 (\cos 6\theta + i \sin 6\theta),$$

$$\Psi(z) = 1,957 + 0,440 \rho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) - 0,046 \rho^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta).$$

Зная функции Φ и Ψ , не трудно получить по формулам (27) и (28) выражения для составляющих напряжений xx , yy и xy :

$$\begin{aligned} \overline{xx} &= 0,875 - 0,234 \rho^2 - (0,206 - 0,04 \rho^2) \rho^2 \cos 2\theta + \\ &+ (0,026 + 0,036 \rho^2) \rho^4 \cos 4\theta - 0,012 \rho^6 \cos 6\theta, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \overline{yy} &= -3,039 + 0,234 \rho^2 + (0,674 - 0,04 \rho^2) \rho^2 \cos 2\theta - \\ &- (0,066 + 0,036 \rho^2) \rho^4 \cos 4\theta - 0,012 \rho^6 \cos 6\theta, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\overline{xy} = (0,44 - 0,04 \rho^2) \rho^2 \sin 2\theta - (0,046 + 0,036 \rho^2) \rho^4 \sin 4\theta. \quad (31)$$

ТАБЛИЦА 8.

ρ	\overline{xx} по формуле (29)	\overline{yy} по формуле (30)	\overline{xx} экспер.	\overline{yy} экспер.	\overline{xx} теорет.	\overline{yy} теорет.
0	0,88	-3,04	0,84	-3,24	1,06	-3,18
0,26	0,85	-2,97	0,81	-3,13	1,02	-3,10
0,53	0,77	-2,80	0,72	-2,81	0,90	-2,86
0,79	0,65	-2,50	0,61	-2,43	0,74	-2,51
1,06	0,52	-2,21	0,48	-2,05	0,56	-2,09
1,32	0,44	-2,03	0,35	-1,68	0,38	-1,66

В таблице 8 приведены значения \overline{xx} и \overline{yy} для точек оси x , вычисленные по формулам (29) и (30), и для сравнения приведены значения тех же величин, полученные из данных опыта путем численного интегрирования и чисто теоретическим путем.

Как видно из данных таблицы 8, формулы (29) и (30) дают достаточно хорошее приближение к данным теории и эксперимента.

Важно еще отметить, что формулы (29) и (30) дают хороший результат не только внутри вырезанного круга, но и в ближайшем соседстве и за кругом. Правда, при дальнейшем возрастании данные резко расходятся.

БИБЛИОГРАФИЯ

Расположение дано по авторам.

После названия каждой работы, в квадратных скобках приведена ссылка на издание, где эта работа опубликована; номер серии обозначен римскими цифрами, номер тома арабскими; год издания помещен в обычных скобках; наконец приведены номера первой и последней страниц. Если дан лишь один номер страницы, — он относится к начальной.

В тех случаях, когда не оказалось возможным дать точное заглавие работы, приводится ссылка на источник, и в скобках указывается, о каком вопросе идет речь.

При ссылках на монографии проводится место и время издания; при необходимости даются номер тома и страницы слева и справа от даты, как и в случае периодических изданий.

Abh. Akad. Berlin = Abhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Amer. Phys. Rev. = American Physical Review.

Amsterdam Acad. Proc. = Proceedings of the Section of Sciences of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam. (English edition.)

Ann. de Ch. et de Phys. = Annales de Chimie et de Physique.

Ann. d. Phys. = Annalen der Physik und Chemie (II = Poggendorff's Ann.; III = Wiedemann's Ann.).

Ann. Fac. Sci. Marseille = Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.

Ann. Soc. Ing. e. Arch. Ital. = Annali Società degli ingegneri e degli architetti italiani, Roma.

Arch. Anat. Physiol. = Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medicin.

Arch. Néerl. = Nederlandsch Archief voor Genees- en Natuurkunde.

Ark. för Mat. Astron. och. Fys. = Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. (Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar: Stockholm.)

Beiblätter = Beiblätter zu den Annalen der Physik.

Ber. Akad. Berlin = Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie von Wissenschaften zu Berlin.

Ber. deutsch. bot. Ges. = Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft.

Ber. schles. Ges. f. vaterl. Cultur = Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.

Brit. Ass. Rep. = Annual Reports of the British Association for the Advancement of Science.

Bull. Acad. Sci. Cracovie = Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie.

Bull. Massachusetts Inst. Tech. = Bulletin of the Massachusetts Institute of Technology.

Bull. sé. Soc. fr. Phys. = Bulletin des séances de la Société française de Physique.

Bull. Soc. Belge des Ingénieurs et des Industriels = Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels.

Bull. Soc. Minér. de France = Bulletin de la Société Minéralogique de France.

Bull. Soc. Philomath. Paris. = Bulletin de la Société Philomathique de Paris.

Camb. Phil. Soc. Proc. = Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

C.R. = Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.

Durham Phil. Soc. Proc. = Proceedings of the University of Durham Philosophical Society.

- Fortschr. d. Min. = Fortschritte der Mineralogie.
 Freiburg Berichte = Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B.
- Geophysical Lab. Publ. = Publications of the Geophysical Laboratory, Washington.
 Göttingen Nachr. = Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- J. Civ. Eng. Soc. Japan = Journal of the Civil Engineering Society of Japan.
 J. de Phys. = Journal de Physique théorique et appliquée.
 J. Franklin Inst. = Journal of the Franklin Institute of the State of Pennsylvania.
 J. Jun. Inst. Eng. = Journal of the Junior Institution of Engineers.
 J. of Ind. and Eng. Chem. = Journal of Industrial and Engineering Chemistry.
 J. Opt. Soc. Amer. = Journal of the Optical Society of America and Review of Scientific Instruments.
- J.R.I.B.A. = Journal of the Royal Institute of British Architects.
 J. Roy. Soc. Arts. = Journal of the Royal Society of Arts.
 J. Soc. Glass Tech. = Journal of the Society of Glass Technology.
 J. Washington Acad. = Journal of the Washington Academy of Sciences.
- Kolloid chem. Beihefte = Kolloid chemische Beihefte.
 Kolloid Ztschr. = Kolloid Zeitschrift.
- Leipzig Abh. = Abhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (Mathematisch-physische Klasse).
 Leipzig Berichte = Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Mathematisch-physische Klasse).
- Mem. Accad. Lincei = Memorie dell' Accademia dei Lincei.
 Mem. Coll. Eng. Kyushu I. Univ. = Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University.
 Mém. Soc. Ing. Civ. Fr. = Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France.
- Napoli Rend. = Rendiconto dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (sezione della Società reale di Napoli),
 N. Jahrb. f. Miner. = Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie.
 Nuovo Cim. = Il Nuovo Cimento, Pisa.
- Öster. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst = Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst.
- Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. = Archiv für die gesammte Physiologie des Menschen und der Thiere. Herausgegeben von E. F. W. Pflüger.
 Phil. Mag. = Philosophical Magazine.
 Phil. Trans. = Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
 Phys. Rev. = Physical Review.
 Phys. Ztschr. = Physikalische Zeitschrift.
 Proc. Amer. Soc. Mech. Eng. = Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers.
 Proc. Inst. Aer. Eng. = Proceedings of the Institution of Aeronautical Engineers.
 Proc. Inst. Aut. Eng. = Proceedings of the Institution of Automobile Engineers.
 Proc. Inst. Civ. Eng. = Proceedings of the Institution of Civil Engineers.
 Proc. Inst. Mech. Eng. = Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.
 Proc. Inst. of Eng. and Shipbuilders in Scotland = Proceedings of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.
 Proc. Physico-Math. Soc. Japan = Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan.
 Proc. Phys. Soc. Lond. = Proceedings of the Physical Society of London.
 Publ. Astrophys. Potsdam = Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.

- Rend. Accad. Lincei = Rendiconti della reale Accademia dei Lincei.
 Roy. Inst. = Royal Institution London.
 Roy. Soc. Edin. Trans. = Transactions of the Royal Society of Edinburgh.
 Roy. Soc. Proc. = Proceedings of the Royal Society of London.
- Schwieggers J. = Journal für Chemie und Physik, herausgegeben von J. S. O. Schweigger.
 Schweiz. Bauzeitung = Schweizerische Bauzeitung.
 Sci. Pap. Bur. Stand. = Scientific Papers of the American Bureau of Standards.
 Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio = Scientific Papers of the Institute of Physical-Chemical Research, Tokio.
 Sitz. ber. d. phys. med. Soc. Erlangen = Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.
- Tech. Eng. News Massachusetts Inst. Techn. = Technical Engineering News of the Massachusetts Institute of Technology.
 Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. = Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.
 Trans. Inst. Nav. Arch. = Transactions of the Institution of Naval Architects.
 Trans. O.S. = Transactions of the Optical Society.
- Uppsala Univ. Årsskr. = Uppsala Universitets Årsskrift.
- Verh. d. deutsch. phys. Ges. = Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft.
 Verh. Ges. d. Naturf. u. Aerzte = Verhandlungen der Gesellschaft der deutschen Naturforscher und Aerzte.
 Versl. Akad. Wet. Amsterdam = Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam: Verslagen van de gewone Vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeeling.
- Warszawa Spraw. Tow. Nauk. = Warszawa Towarzystwo Naukowe (Proceedings).
 Wiener Berichte = Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien (Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse).
- Ztschr. d. geolog. Ges. = Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft.
 Ztschr. d. öster. Ing. u. Archit. Ver. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur und Architekten Vereins.
 Ztschr. f. Elektroch. = Zeitschrift für Elektrochemie.
 Ztschr. f. Instr. = Zeitschrift für Instrumentenkunde.
 Ztschr. f. Krist. = Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie.
 Ztschr. f. phys. Chem. = Zeitschrift für physikalische Chemie.
 Ztschr. f. tech. Phys. = Zeitschrift für technische Physik.
 Ztschr. f. wiss. Mikrosk. = Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie und für mikroskopische Technik.
 Ztschr. Ver. d. Ing. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.
- Adams, L. H. and Williamson, E. D.* The relation between Birefringence and Stress in various types of Glass. [J. Washington Acad. 9 (1919) 609 — 623.]
 — — The Annealing of Glass. [J. Franklin Inst. 190 (1920) 597 — 631, 835 — 870.]
 — — Temperature Distribution in Solids during Heating or Cooling. [Phys. Rev. 14 (1919) 99.]
 — — [Geophysical Lab. Publ. (1920).]
- Atmy, J. E.* Concerning Accidental Double Refraction in Liquids. [Phil. Mag. v. 44 (1897) 490 — 503.]
- Ambrohn, H.* Notiz über die Doppelbrechung in zähflüssigen Gummi. [Ann. d. Phys. III 38 (1889) 159 — 160; see also Ber. deutsch. bot. Ges. 7 (1889) 183.]
 — Über das Verhalten doppelbrechender Gelatineplatten gegen Magnetismus und Elektrizität [Leipzig Berichte 43 (1891) 394 — 398.]
 — Über die Anomalien bei der akzidentellen Doppelbrechung. [Leipzig Berichte 50 (1898) 1 — 31.]

- Dispersion der Doppelbrechung in zweiphasigen Systemen. [Kolloid Ztschr. 9 (1911) 147 — 153.]
- Ambrohn, H.* Über anomale Doppelbrechung beim Zelluloid. [Leipzig Berichte 63 (1911) 249 — 257 and 402 — 406.]
- Über die Dispersion der Doppelbrechung in den Mischkristallen von Strontium und Bleidithionat. [Ztschr. f. Krist. 52 (1913) 48 — 57.]
- Über die Änderung des optischen Verhaltens der Zellulose bei der Nitrierung. [Dissertation Jena (1914).]
- Über Stäbchendoppelbrechung im Zelloidin und in der Gelatine. [Ztschr. f. wiss. Mikrosk. 32 (1915) 43 — 59.]
- Über das Zusammenwirken von Stäbchendoppelbrechung und Eigendoppelbrechung. [Kolloid Ztschr. 18 (1916) 90 — 97 and 273 — 281; 20 (1917) 173 — 185; 44 (1928) 1 — 5.]
- Über die akzidentelle Doppelbrechung im Zelloidin und in der Zellulose. [Göttingen Nachr. (Math. Phys. Kl.) (1919) Heft 2, 299 — 320.]
- Ambrohn, H.* and *Frey A.* Das Polarisationsmikroskop. [Leipzig, Kolloidforschung issued in parts, ed. R. Zsigmondy, 5 (1926).]
- Arakawa I.* On the Determination of Stress-Optical Coefficient of Bakelite with Initial Stress. [Proc. Physico-Math. Soc. Japan III 5 (1923) 117 — 136.]
- — Some Advantages obtained from Bakelite in Photo-Elastic Observation. [Proc. Physico-Math. Soc. Japan III 7 (1925) 7 No. 11.]
- Asch, E.* Untersuchung der Spannungen des gebogenen Balkens im polarisierten Licht. [Ztschr. f. tech. Phys. (1922) 295.]
- Aue, J.* Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben mit Hilfe der optischen Methode. [Dissertation Jena (1909).]
- Babinet, J.* Sur un cas de polarisation non encore signalé. [C.R. 61 (1865) 705.]
- Bach, C.* Elastizität und Festigkeit. [9th ed. jointly with R. Baumann, Berlin, (1924).]
- Baekland, L. H.* [J. of Ind. and Eng. Chem. 5 (1913) 504 — 511.]
- Baes L.* La Photo-élasticité. [Brussels (1925).]
- Balinkin, I. A.* An optical Determination of axial Stresses in Long Rectangular Plates under Torsion. [Amer. Phys. Rev. 30 (1927) 520 — 526.]
- Baud R. V.* Study of Stresses by means of Polarized Light and Transparencies. [Proceedings of the Engineers' Society of Western Pennsylvania 44 (1928) 199 — 232.]
- Description of a Polarized Light apparatus for Photo-Elastic Work. [Instruments, Industrial-Scientific 9 (1928) 393 — 400.]
- Experimental methods of studying Stress Distributions. [J. Opt. Soc. Amer. v 18 (1929) 411 — 421.]
- Further development in Photo-Elasticity. [J. Opt. Soc. Amer. v 18 (1929) 422 — 437.]
- Photoelasticity — and Its Application in Design. [Machine Design, 2 (1930) No. 11, 29 — 31 and No. 12, 27 — 30.]
- On the Determination of Principal Stresses from crossed Nicol Observations. [J. Franklin Inst. 211 (1931) 457 — 474.]
- Baud R. V.* and *Hines, W. H.* The Use of Motion Pictures to illustrate the generation of Involute Gearing and the use of Motion Pictures and Polarized Light as a method of studying Gear Stresses. [Iron and Steel Engineer, June, 1929.]
- Baud R. V.* and *Peterson, R. E.* Load and Stress Cycles in Gear Teeth. [Mechanical Engineering Journal, published by The American Society of Mechanical Engineers, 51 (1929) 653 — 662.]
- Baud, R. V.* and *Wright, W. D.* The Analysis of the Colors observed in Photo-elastic Experiments. [J. Opt. Soc. Amer. 20 (1930) 381 — 395.]
- Beaulard, F.* Sur la Biaxie du quartz comprimé. [C. R. 112 (1891) 1503—1506; sie also Ann. Fac. Sie. Marseille 3 (i) (1893) 118 and J. de Phys. III 2 (1893) 459.]
- Bell.* (On double refraction in glass rings.) [Dissertation Giessen (1926).]
- Bergholm C.* Über Doppelbrechung in kathodenzerstäubten Metallschichten. [Ann. d. Phys. IV 43 (1914) 1 — 23.]

- Bergholm C.* Polarisation bei geritzten Metallspiegeln im Gebiet der sichtbaren Strahlung. [Ark. för Mat. Astron. och. Fys. 10 (1915) 10; see also Uppsala Univ. Årsskr. (Mat. och. Naturwiss.) (1915) 64.]
- Berndt, G.* Über den Einfluss der Spannung auf die Eigenschaften des optischen Glases. [Ztschr. f. Instr. 40 (1920) 20 — 27, 37 — 42, 56 — 57, 70 — 75.]
- Bernhard, R.* Über Bestimmung von Spannungszuständen in elastischen Körpern mit Hilfe von Versuchsmodellen. [Der Bauingenieur 8 (1928) 127 — 132.]
- Bertin, A.* Note sur les propriétés optiques des feuilles de gélatine. [Ann. de Ch. et de Phys. V 15 (1878) 129—132.]
- Biernacki, V.* Eine einfache Methode die Doppelbrechung des Lichtes in bewegten Flüssigkeiten zu demonstrieren. [Phys. Ztschr. 6 (1905) 730 — 732.]
— (Beitrag zur Frage über die Doppelbrechung der bewegten Flüssigkeiten {Polish}.) [Warszawa Spraw. Tow. Nauk. I (1908) 127 — 129.]
- Biot M.* Nouvelles expériences sur le développement des forces polarisantes par la compression, dans tous les sens, des cristaux. [Ann. de Ch. et de Phys. II 3 (1816) 386 — 394.]
— Sur une nouvelle propriété physique qu'acquière les lames de verre quand elles exécutent des vibrations longitudinales. [Ann. de Ch. de Phys. II 13 (1820) 151 — 155; see also Bull. Soc. Philomath. Paris (1816) 49.]
- Bjerken P., von.* Untersuchung der durch Druck und Zug hervorgerufenen Doppelbrechung bei Kautschuk und Leimgallerten. [Ann. d. Phys. III 43 (1891) 808 — 816.]
- Björnstahl, B. Y.* Experimental studies on the accidental double-refraction in Colloids with special reference to the structure of the colloidal particle. [Dissertation Upsala (1924).]
- Bouasse.* (Double refraction due to compression.) [Bull. sé. Soc. fr. Phys. (1890) 245 — 246.]
- Braun, F.* Herstellung doppeltbrechender Körper aus isotropen Bestandteilen. [Phys. Ztschr. 5 (1904) 199 — 203.]
— Optische Doppelbrechung in isotropen geschichteten Medien. [Ann. d. Phys. IV 17 (1905) 364 — 366.]
- Braunbeck, C.* Über die magnetischen Eigenschaften von Stoffen mit künstlicher Anisotropie. [Dissertation Giessen (1918).]
- Bravais, A.* D'un nouveau polariscope, et recherches sur les doubles réfractions peu énergiques. [Ann. de Ch. et de Phys. III 43 (1855) 129—149; see also Ann. d. Phys. II 96 (1855) 395 — 414.]
- Brewster, Sir David.* Additional observations on the optical Properties and Structure of heated Glass and unannealed Glass Drops. [Phil. Trans. (1815) 1 — 8.]
— On new Properties of Heat, as exhibited in its Propagation along Plates of Glass. [Phil. Trans. (1815) 46 — 114.]
— On the Communication of the structure of doubly refracting Crystals to Glass, Muriate of Soda, Fluor Spar and other Substances, by mechanical Compression and Dilatation. [Phil. Trans. (1816) 156 — 178.]
— On the Effects of Compression and Dilatation in altering the Polarising Structure of Doubly Refracting Crystals. [Roy. Soc. Edin. Trans. 8 (1818) 281 — 286.]
— On the Laws which regulate the Distribution of the Polarising Force in plates, tubes, and cylinders of Glass that have received the Polarising Structure. [Roy. Soc. Edin. Trans. 8 (1818) 353 — 371.]
— On the production of regular Double Refraction in the molecules of Bodies by simple Pressures. [Phil. Trans. (1830) 87 — 97.]
— [Brit. Ass. Rep. (Notices and Abstracts) (1846) 7.]
- Bücking, H.* Über durch Druck hervorgerufene optische Anomalien. [N. Jahrb. f. Miner. I (1881) 177 — 178; see also Ztschr. d. geolog. Ges. 32 (1880) 199.]
— Über den Einfluss eines messbaren Druckes auf doppeltbrechende Mineralien. [Ztschr. f. Krist. 7 (1883) 555.]
- Buich, R.* El método fotoelástico para la determinación del régimen de tensiones en los casos de resistencia plana. [La Ingeniería, Buenos Aires 674 (1930) 502 — 524.]

- Castelain, J. J.* The Effect of Mechanical Stress upon Light travelling in the Direction of Stress in Glass. [Dissertation London (1925).]
- Coker, E. G.* The Optical Determination of Stress. [Phil. Mag. VI 20 (1910) 740 — 751.]
- Photo-Elasticity. [Engineering (1911) Jan. 6, 1 — 4.]
 - The determination, by Photo-Elastic Methods, of the distribution of stress in plates of variable section, with some applications to ship's plating. [Trans. Inst. Nav. Arch. 53 (1911).]
 - An optical Determination of the variation of Stress in a Thin Rectangular Plate subjected to Shear. [Roy. Soc. Proc. A 86 (1912) 291 — 319.]
 - The distribution of stress at the minimum section of a cement briquette. [International Association for Testing Materials, New York Meeting, 1912 (10), XXVIII₄.]
 - The Use of Polarised Light as an aid to determining the Effect of Stress in Engineering Materials. [Proc. Sheffield Society of Engineers and Metallurgists (1911) Part 2, 9 — 25.]
 - The experimental determination of the stresses in springs and other bodies by optical and electrical methods. [Brit. Ass. Rep. (1912) 569; see also Engineering, 94 (1912) 404 — 405.]
 - The effects of holes and semi-circular notches on the distribution of stress in tension members. [Proc. Phys. Soc. Lond. 25 (1912 — 13) 95 — 105.]
 - Colour photography of internal stress in bodies of engineering form. [West of Scotland Iron and Steel Institut (1913) 79 — 104.]
 - A column testing machine. [Proc. Phys. Soc. Lond. 25 (1912 — 13) 106 — 110.]
 - The Applications of Polarised Light to Mechanical Engineering Problems of Stress Distribution. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1913) 83 — 102.]
 - Cantor Lectures on the Measurement of Stresses in Materials and Structures. [J. Roy. Soc. Arts (1914).]
 - Polarised Light and its Applications to Engineering. [Roy. Inst. 21 (1916) 573 — 599.]
 - Presidential Address to Section G (Engineering). [Brit. Ass. Rep. (1914) 490 — 499.]
 - Photo-Elasticity for Engineers. [Proc. Inst. Aut. Eng. (1917) 31 — 68.]
 - Photo-Elastic Measurements of the Stress-Distribution in Tension Members used in the Testing of Materials. [Proc. Inst. Civ. Eng. 208 (1918 — 19) (ii) 362 — 401.]
 - Tension Tests of Materials. [Engineering, III, Jan. 7 (1921) 1 — 4.]
 - The Stress in the Fillets of a Crank Shaft. [Report on the Materials of Construction used in Aircraft. Aeronautical Research Committee (1920). Edited by Lieut.-Col. C. F. Jenkin, H. M. Stationery Office.]
 - Recent Researches in Photo-Elasticity. [Proceedings of the Sheffield Society of Engineers and Metallurgists (1921) 31 — 63.]
 - Photo-Elasticity for Engineers. [General Electric Review 23 (1920) 870 — 877, 966 — 973, and 24 (1921) 82 — 88, 222 — 226, 455 — 466.]
 - The Effects of Scratches in Materials. [Engineering, 112 (1921) 81 — 82.]
 - Curved Beams, Rings and Chain Links. (J. Jun. Inst. Eng. VI 32 (1922).)
 - Des recherches récentes sur la Photo-Elasticimétrie. [Mém. Soc. Ing. Civ. Fr. (1922) Bull. juillet — sep.]
 - A comparison of experimental methods for obtaining the stress at a point in a plate by optical and mechanical methods. [Brit. Ass. Rep. (1923) 468; see also Engineering 116 (1923) 512 — 513.]
 - Photo-Elastic Methods of Measuring Stress. [Proc. Inst. Aer. Eng. (1924) No. 17, 1 — 24.]
 - Some Engineering Problems of Stress Distribution. [Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft (1924) 18 — 38.]
 - Photo-Elasticity. [J. Franklin Inst. 199 (1925) 289 — 331.]
 - Report on the Action of Cutting Tools. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1925) 357 — 434.]
 - Some Problems on the Construction and Alteration of Buildings considered experimentally. [J.R.I.B.A. III 33 (1926) 209 — 225, 248 — 253.]
 - Elasticity and Plasticity. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1926) 897 — 941.]
 - Cantor Lectures on Photo-Elastic Measurements of Stress Distribution. [J. Roy. Soc. Arts 75 (1927) 1017 — 1028, 1033 — 1055, 1060 — 1079; see also La Technique Moderne 201 (1928) 153 — 162.]

- Coker, E. G.* The Stress Distribution in the Flange Connections of Air-tight decks for land shafts. [Home Office Report No. 1853 (1927) on a compressed Air Explosion at Deptford Green.]
- The Stresses in the Hulls of Stranded Vessels. [Trans. Inst. Nav. Arch. 70 (1928) 144—151.]
- Contact Pressures and Stresses of Curved Members. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1928) 901—920.]
- Bridge Stresses. [Engineering, Jan. 29th (1928) 810.]
- The Photography of Stress. [Proceedings of the 7th International Congress of Photography, London (1928) 337—344.]
- Some Experimental Methods and Apparatus for determining the Stresses in Bridges and Framed Structures. [Proc. Inst. Civ. Eng. 229 (1929—1930) (i) 33—76.]
- Lateral Extensometers. [Engineering 129 (1930) 465—467.]
- Coker, E. G. and Chakko, K. C.* The Stress-Strain properties of Nitro-Cellulose and the Law of its Optical Behaviour. [Phil. Trans. A 221 (1920) 139—162.]
- An Account of Some Experiments on the action of Cutting Tools. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1922) 567—621.]
- Coker, E. G., Chakko, K. C. and Ahmed, M. S.* Contact Pressures and Stresses. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1921) 365—467.]
- Coker, E. G., Chakko, K. C. and Satake, Y.* Photo-Elastic and Strain measurements of the Effects of Circular Holes on the Distribution of Stress in Tension Members. [Proc. Inst. of Eng. and Shipbuilders in Scotland 63 (1919—1920) 34—94.]
- Coker, E. G. and Coleman, G. P.* Stress distributions in notched beams and their application [Trans. Inst. Nav. Arch. 72 (1930) 141—153.]
- Cleavage Tests of Timber. [Proc. Roy. Soc. A 128 (1930) 418—431.]
- Coker, E. G. and Filon, L. N. G.* Experimental Determination of Stress and Strain in Solids. [Brit. Ass. Rep. (1914) 201—210.]
- Coker, E. G. and Heymans, P.* Stress Concentrations due to Notches and like Discontinuities [Brit. Ass. Rep. (1921) 291—299.]
- Coker, E. G. and Kimball A. L.* The Effect of Holes, Cracks and other Discontinuities in Ship's Plating. [Trans. Inst. Nav. Arch. 62 (1920) 117—123.]
- Coker, E. G. and Levi, R.* Contact Pressures and Stress Distributions in Cams, Rollers and Wheels. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1930) 693—730.]
- On St Venant's Principle of Equipollent Loads in Cases of Plane Stress. [Proceedings of the Third International Congress for Applied Mechanics, Stockholm (1930) 171—175.]
- The Stress Distributions in Fusion Joints. [Proc. Inst. Mech. Eng. (1931) 569—602.]
- Coker, E. G. and Luiggi, L.* Gli sforzi interni nei materiali di costruzione determinati mediante la luce polarizzata. [Ann. Soc. Ing. e Arch. Ital. 31 (1916) 17—21, 35—50.]
- Il metodo sperimentale del prof. E. G. Coker per determinare gli sforzi interni nei materiali da costruzione mediante la luce polarizzata. [Annali d' Ingegneria 31 (1916) 33—50.]
- Coker, E. G. and Scoble, W. A.* The Distribution of Stress due to a Rivet in a Plate. [Trans. Inst. Nav. Arch. 55 (1913) 207—218.]
- Coker, E. G. and Thompson, S. P.* The Design and Construction of Large Polarisopes. [Proceedings of the Optical Convention 2 (1912) 213—219; see also Engineering 94 (1912) 134—135.]
- Gotin, J.* Sur la rigidité des liquides. [C. R. 116 (1893) 1251—1253.]
- Colonnetti, G.* Ricerche sperimentali sulle coazioni elastiche. [L'Ingegneria 5 (1926) 169—170.]
- Corbino, O. M.* Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra e la conseguente doppia rifrazione accidentale. [Rend. Acc. Lincei V 18 (a) (1909) 437—444; see also Nuovo Cim. V 17 (1909) 361—370.]
- The double refraction produced by the distortions of elastic bodies according to Volterra's theory. [Nature 90 (1913) 540—541.]
- Cotton, A. and Mouton, H.* Sur les propriétés magnéto-optiques des colloïdes et des liqueurs hétérogènes. [Ann. de Ch. et de Phys. VIII 11 (1907) 145—203.]
- Czapski, S.* Über die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten. [Ann. d. Phys. III 42 (1891) 319—331.]

- Dalladay, A. J.* Some Measurements of the Stresses produced at the surfaces of Glass by grinding with loose abrasives. [Trans. O.S. 23 (1921/1922) 170—174.]
- Dalladay, A. J.* and *Twyman, F.* The Stress Conditions surrounding a Diamond Cut in Glass. [Trans. O.S. 23 (1921/1922) 165—169.]
- Deas, F.* On Spectra formed by the passage of Polarised Light through Doubly-refracting Crystals. [Roy. Soc. Edin. Trans. 26 (1872) 177—188.]
- Delanghe, M. G.* La Photo-élasticimétrie ses applications et ses méthodes. [Génie Civil 91 (1927) 243—249; 271—275; 297—304.]
- La Photo-élasticimétrie, théorie, méthodes et applications. [Revue d'Optique VI—VIII (1928) 237—265; 285—313.]
- Descloizeaux.* Beobachtungen über die permanenten und temporären Modificationen, welche die Wirkung der Wärme einigen Eigenschaften mehrerer kristallisirter Körper einprägt. [Ann. d. Phys. II 119 (1863) 481—492; see also Annales des Mines VI 2 (1862) 327—338.]
- Nouvelles recherches sur les propriétés optiques des cristaux naturels ou artificiels et sur les variations que ces propriétés éprouvent sous l'influence de la chaleur. [C.R. 62 (1866) 988.]
- Diesselhorst H.* and *Freundlich, H.* Über die Doppelbrechung des Vanadin-pentoxyd Sols. [Phys. Ztschr. 16 (1915) 419—425.]
- Diesselhorst, H.* *Freundlich, H.* and *Leonhardt, W.* [Elster-Geitel Festschrift; Braunschweig (1915) 453.]
- Drude, P.* and *Wertauer, A.* Akzidentelle Doppelbrechung. [Gehrcke's Handbuch d. Phys. Optik, Leipzig 1 (1927) 866—882.]
- Ebner, V.* von. Untersuchungen über die Ursachen der Anisotropie organischer Substanzen. [Leipzig (1882) 28.]
- Über das optisch-anomale Verhalten des Kirschgummis und des Traganthes gegen Spannung. [Wiener Berichte 98 (1888). Abth. 2 a) 39—50; 1280; see also Ztschr. f. Krist. 18 (1888) 669.]
- Engelmann T. W.* Kontraktilität und Doppelbrechungsvermögen. [Arch. Anat. Physiol. (Physiol. Abt.) (1907) 25—55.]
- English, S.* An Examination of some current views on the Detection of Strain in Glass. [J. Soc. Glass Tech. 6 (1923) 1—8.]
- English, S.* and *Turner, W. E. S.* Some Notes on Annealing of Glass. [J. Soc. Glass Tech. 2 (1900) 90—102.]
- Eppendahl, B. R.* Über das piezo-optische Verhalten von Topas. [Ann. d. Phys. IV 61 (1920) 595—632.]
- Ewell, A. W.* Artificial Rotatory Polarisation. [Phys. Rev. 33 (1911) 480—491.]
- Rotationspolarisation durch Torsion. [Phys. Ztschr. 13 (1912) 100—104.]
- Exner, S.* Über Cylinder welche optische Bilder entwerfen [Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. 38 (1886) 274—290.]
- Fabry, C.* Photo-Élasticité. — Sur une nouvelle méthode pour l'étude expérimentale des tensions élastiques [C.R. 190 (1930) 457—460.]
- Faust, O.* Untersuchung über Doppelbrechung von zellulosehaltigen Gelen. [Kolloid Ztschr. 41 (1927) 54—55.]
- Favre, H.* Méthode purement optique de détermination des tensions intérieures se produisant dans les constructions. [Schweiz. Bauzeitung (1927) Dec. 3 and 10.]
- Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures. [Revue d'Optique 8 (1929) 193—213, 241—261, 289—307.]
- Sur une méthode optique de détermination des tensions intérieures dans les solides à trois dimensions. [C.R. 190 (1930) 1182—1184.]
- Ficker, E.* Experimentelle Untersuchungen über die Dielektrizitätskonstante von Gemischen. [Ann. d. Phys. IV 31 (1910) 365—392.]
- Filon, L. N. G.* On the variation with the wave-length double-refraction in Strained Glass. [Camb. Phil. Soc. Proc. 11 (1902) 478—492; and 12 (1903—4) 55—64; 313—336.]

- Filon, L. N. G.* On the Dispersion in Artificial Double-Refraction. [Phil. Trans. A 207 (1907) 263—306.]
 — Preliminary Note on a New Method of Measuring directly the Double-Refraction in Strained Glass. [Roy. Soc. Proc. A 79 (1907) 440—442.]
 — Measurements of the Absolute Indices of Refraction in Strained Glass. [Roy. Soc. Proc. A 83 (1910) 572—579.]
 — On the Temperature Variation of the Photo-Elastic Effect in Strained Glass. [Roy. Soc. Proc. A 89 (1912) 587—593.]
 — The Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by means of Polarized Light. [Phil. Mag. VI 23 (1912) 1—25.]
 — Investigations of Stresses in Aeroplane Wing Frameworks. [Brit. Ass. Rep. (1919) 468—475.]
 — Note on the Principle of Dynamical Similarity applied to Deformable Elastic Structures. [Brit. Ass. Rep. (1919) 475—478.]
 — On Stresses in Multiply-connected Plates. [Brit. Ass. Rep. (1921) 305—316.]
 — On the Graphical Determination of Stress from Photo-Elastic Observations. [Brit. Ass. Rep. 1923) 350—357; see also Engineering 116 (1923) 511—512.]
- Filon, L. N. G.* and *Harris, F. C.* On the Di-Phasic Nature of Glass, as shown by Photo-Elastic Observations. [Roy. Soc. Proc. A 103 (1923) 561—571.]
 — On the Photo-Elastic Dispersion of Vitreous Silica. [Roy. Soc. Proc. A 130 (1931) 410—431.]
- Filon, L. N. G.* and *Jessop, H. T.* On the Stress-Optical Effect in Transparent Solids strained beyond the Elastic Limit. [Phil. Trans. A 223 (1922) 89—125.]
- Fizeau, H. L.* Untersuchungen über die Modificationen welche das Licht in Glas und mehreren anderen Körpern unter dem Einfluss der Wärme erleidet. [Ann. d. Phys. II 119 (1863) 87—114; 297—316.]
 — Recherches sur la dilatation et la double réfraction du cristal de roche échauffé. [G. R. 58 (1864) 923—932.]
 — Untersuchungen über die Ausdehnung und Doppelbrechung des erhitzten Bergkrystalls [Ann. d. Phys. II 123 (1864) 512—526.]
- Föppl, A.* Vorlesungen über technische Mechanik. [Leipzig und Berlin; 3 (1922) 4te Aufl.; 5 (1927) 10te Aufl.]
- Fraas, E.* Über Elasticität von Gelatinelösungen. [Ann. d. Phys. III 53 (1894) 1074—1091.]
- Fresnel, A.* Résumé d'un Mémoire sur la réflexion de la lumière. [Ann. de Ch. et de Phys. II 15 (1820) 379—386; see also Ann. d. Phys. II 30 (1836) 255—261.]
 — Note sur la double refraction du verre comprimé. [Ann. de Ch. et de Phys. II 20 (1822) 376—383; see also Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel, Paris 1 (1866) 713—718 and Bull. Soc. Philomath. Paris (1822) 139—142.]
 — Über die Doppelbrechung des zusammengedrückten Glases. [Ann. d. Phys. II 19 (1830) 539—545.]
 — Mémoire sur les couleurs développés dans des fluides homogènes par la lumière polarisée. [Ann. de Ch. et de Phys. III 17 (1846) 172—198.]
- Freundlich, H.* [Ztschr. f. Elektroch. 22 (1916) 27.]
- Freundlich, H., Schuster, C.* and *Zocher, H.* Über die Strömungsdoppelbrechung von Farbstofflösungen. [Ztschr. f. phys. Chem. 105 (1923) 119—144.]
- Frey, A.* Doppelbrechung der Dispersoide. [Kolloid chem. Beihefte 20 (1924) 209—243.]
- Friedel, J.* Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung. [Ann. d. Phys. IV 18 (1905) 1031—1048; see also Leipzig Berichte 57 (1905) 315—320.]
- Frost, T. H.* and *Whitcomb, K. F.* The Stresses in Rotating Disks. [Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. III 53 (1931) 1—11.]
- Geel, W. C. van* and *Eymers, J. G.* Über die Doppelbrechung von gedehntem Kautschuk. [Ztschr. f. phys. Chem. B 3 (1929) 240—246.]
- Graffi, D.* Ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento. [Rend. Accad. Lincei VI 3 (1926) 28—31.]
- Gramont, A. de.* Sur quelques expériences de double réfraction par compression annulaire. [Bull. Soc. Minér. de France 9 (1886) 213—215.]

- Haidinger, W. von.* Über den Zusammenhang der Körperfarben, oder des farbig durchgelassenen, und der Oberflächenfarben, oder des farbig zurückgeworfenen Lichtes, gewisser Körper. [Wiener Berichte 8 (1852) 97—133; see also *Ann. de Ch. et de Ph.* 42 (1854) 249—259.]
- Bemerkungen über die optischen Eigenschaften einiger chrysammine Salze. [Wiener Berichte 36 (1859) 183—190.]
- Hall, G. W. and Kimball A. L.* Determining stresses by Polarized Light. [Scientific American Monthly 1 3 (1921) 49—53.]
- Harris, F. C.* The Photo-Elastic Constants of Glass as affected by High Temperatures and by Lapse of Time. [Roy. Soc. Proc. A 106 (1924) 718—723.]
- The Production of Residual Double Refraction by Pressure in certain Glasses at Atmospheric Temperature. [Phil. Mag. VII 11 (1931) 745—748.]
- Hartmann, L.* Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. [Paris (1896).]
- Hatschek, E.* Die physikalischen Eigenschaften der elastischen Gele. [Kolloid Ztschr. 28 (1921) 210—213.]
- Kaupt, K. and Wächter, M.* Die Homogenität des Kasein-Kunsthorns. [Kunststoffe, 15 (1925) 129—131.]
- Hauswaldt, H.* Interferenz Erscheinungen im polarisierten Lichte, photographisch angenommen: Neue Folge, Taf. 73, Magdeburg (1904): 3 Reihe, Taf. 24 u. 25, Magdeburg (1908).
- Havelock, T. H.* Artificial Double-Refraction due to aeolotropic distribution, with application to colloidal Solutions and magnetic Fields. [Roy. Soc. Proc. A 77 (1906) 170—182.]
- The Dispersion of Double-Refraction in Relation to Crystal Structure. [Roy. Soc. Proc. A 80 (1908) 28—44.]
- Henriot, E. and Henriot, Mme E.* La biréfringence du verre comprimé. [C. R. 172 (1921) 1477.]
- Heymans, P.* La Détermination par la Photo-élasticimétrie des Surtensions dues à certaines Discontinuités internes. [Brussels 1921.]
- La Photo-élasticimétrie, exposé de ses principes, de ses méthodes et de quelques-unes de ses applications d'après les travaux originaux de MM. les Professeurs *Coker* et *Filon*, de l'University College de Londres et de *M. Mesnager*, membre de l'Institut de France, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées de Paris. [Bull. Soc. Belge des Ingénieurs et des Industriels 2 (1921) 99—214.]
- Photo-Elasticity and its Applications to Engineering Problems. [Tech. Eng. News, Massachusetts Inst. Techn. (1922) May, 80—85.]
- Étude photo-élasticimétrique des tensions dans des pignons d'engrenages cylindriques. [Bull. Soc. Belge des Ingénieurs et des Industriels 5 (1924) No. 6.]
- Note on a property of rectilinear lines of principal stress. [Publications of the Massachusetts Institute of Technology II 19 (1924) 182—185.]
- Étude des causes de rupture de constructions métalliques au moyen de la lumière polarisée. [Revue universelle des Mines VII 4 (1925) 207—211.]
- Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck: „Anomalien der akzidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. [Ann. d. Phys. IV 77. (1925) 587—588.]
- Heymans, P. and Allis, W. P.* The Photo-Elastic constants of Celluloid, Glass and Fused Quartz. [Bull. Massachusetts Inst. Techn. 59 (1924) No. 64, 216—233.]
- Heymans, P. and Kimball, A. L.* Stress-Distribution in Electric Railway Motor Pinions as Determined by the Photo-Elastic Method. [General Electric Review 26 (1923) 143—153; see also Proc. Amer. Soc. Mech. Eng. (1922) No. 1859, 513—545.]
- Hill, B. V.* On Accidental Double Refraction in Liquids. [Phil. Mag. V 48 (1899) 485—498.]
- Note on Accidental Double Refraction in Liquids. [Phil. Mag. VI 2 (1901) 524—527.]
- Hönigsberg, O.* Über unmittelbare Beobachtung der Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schichte an beanspruchten Körpern. [Ztschr. d. Öster Ing. u. Archit. Ver. (1904/1906) Nr. 11.]
- Einrichtung für Versuche an beanspruchten durchsichtigen Körpern in polarisiertem Lichte. [Ztschr. d. Öster Ing. u. Archit. Ver. (1906) Nr. 35.]

- Hönigsberg, O.* Unmittelbare Abbildung der neutralen Schichte bei Biegung durchsichtiger Körper in zirkularpolarisiertem Licht. [International Association for Testing Materials: Brussels (1906).]
- Hönigsberg, O. and Dimmer, G.* Interferenzfarben beanspruchter durchsichtiger Körper. [International Association for Testing Materials: Brussels (1906).]
- Houwink, L.* Onderzoek omtrent den bouw en de eigenschappen van het zoogenaamde hardglas. [Versl. Akad. Wet. Amsterdam Sect. I 6 (1899) No. 2.]
- Howland R. C. J.* On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. [Phil. Trans. A 229 (1929) 49—86.]
- Humphrey, R. H.* Demonstration of the double refraction due to motion of a Vanadium Pentoxide solution, and some applications. [Proc. Phys. Soc. Lond. 35 (1923) 217—218.]
- Jackson, A.* Spannungslinien bei Berücksichtigung der lokalen Pressung mit Anwendungen für die Praxis. [Dissertation Karlsruhe (1916).]
- Jannetaz, E.* Figures de décollement qu'on obtient du gypse en y comprimant un point intérieur. [Bull. Soc. Minér. de France 2 (1879) 6—8.]
- Notes sur les phénomènes optiques de l'alun comprimé. [Bull. Soc. Minér. de France 2 (1879) 191.]
- Optische Erscheinungen in comprimierten Alaunen. [Ztschr. f. Krist. 4 (1880) 421.]
- Kaemmerer, W.* Spannungsmessungen an einer T-förmigen Glasplatte. [Staatsexamenarbeit Phys Inst. Giessen (1927).]
- Kaempff, F.* Grösse und Ursache der Doppelbrechung in Kundt'schen Spiegeln und Erzeugung von Doppelbrechung in Metallspiegeln durch Zug. [Dissertation Leipzig (1904); see also Ann. d. Phys. IV 16 (1905) 308—333.]
- Katz, I. R.* Röntgenspektrographische Untersuchungen am gedehnten Kautschuk und ihre mögliche Bedeutung für das Problem der Dehnungseigenschaften dieser Substanz. [Naturwissenschaften 13 (1925) 410—416.]
- Kerr, J.* On the Birefringent Action of Strained Glass. [Phil. Mag. V 26 (1888) (321 — 342).]
- Kimball, A. L.* Optical determination of stress in transparent materials. [J. Opt. Soc. Amer. III 5 (1921) 279—289.]
- Effect of rotation on stress distribution in electric railway motor pintons. [General Electric Review II 27 (1924) 130—131.]
- Klocke, F.* Über einige optische Eigenschaften optisch anomaler Krystalle und deren Nachahmung durch gepresste und gespannte Colloide. [N. Jahrb. f. Miner 2 (1881) 249—268; see also Ztschr. f. Krist. 6 (1882) 415—419.]
- Nachahmung der Erscheinungen optisch anomaler Krystalle durch gespannte Colloide. [Freiburg Berichte 8 (1885) 31—38.]
- Über die Wirkung eines einseitigen Druckes auf optisch anomale Krystalle von Alaun, Idokras und Apophyllit. [Freiburg Berichte 8 (1885) 37—47.]
- Axenbilden im convergenten Licht bei Alaun, Bleinitrat, gepressten Gelatine und rasch gekühlten Glase. [Freiburg Berichte 8 (1885) 48—54.]
- Köhler, W.* (Artificial double refraction in Gelatine). [Dissertation Giessen (1921).]
- König, W.* Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten. [Verh. Ges. d. Naturf. u. Aerzte (1895) Th. 2, Hälfte 1, 54; see also Ann. d. Phys. IV 4 (1901) 1—40.]
- Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. [Ann. d. Phys. IV 11 (1903) 842—866.]
- Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elasticität. [Boltzmann Festschrift, Leipzig (1904) 832—838.]
- Nachweis elastischer Spannungen in ring-förmigen Körpern mit Hilfe künstlicher Doppelbrechung. [Elster u. Geitel Festschrift (1915) 368—380.]
- Über einige Fälle künstlicher Doppelbrechung in zylindrischen Körpern. [Ann. d. Phys. IV 52 (1917) 553—607.]
- Die Untersuchung von Gläsern in polarisiertem Lichte. [Deutsche optische Wochenschrift (1918) Nr. 1/2 1—6.]
- Einige Beobachtungen über künstliche Doppelbrechung durch Temperaturungleichheit. [Phys. Ztschr. 26 (1925) 45—47.]

- König, W.* Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Paul Heymans zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck [Ann. d. Phys. 79 (1926) 757—760.]
- Kreutz.* Piezooptyczne Własności Salmiaku. (Piezooptisches Verhalten von Salmiak.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1911) A 118—122.]
- Kröger, M.* Die lamellare Pakkung des Kautschuks. [Kolloid Ztschr. 45 (1928) 46—52.]
— Die Doppelbrechung des Kautschuks im undeformierten und im deformierten Zustand. [Kolloid Ztschr. 45 (1928) 52—56.]
- Kronenberg.* Referat über die Arbeit von Heymans und Kimball. [Ztschr. Ver. d. Ing. (1926) 641.]
- Krüger, E.* Versuche zur Kenntniss der Doppelbrechung in strömenden Flüssigkeiten. [Ztschr. f. phys. Chem. 109 (1924) 438—452.]
- Kruyt, H. R.* Over het dubbelbrekende Sol van Vanadium pentoxyde. [Versl. Akad. Wet. Amsterdam 24 (1916) 1664—1670; see also Amsterdam Acad. Proc. 18 (1916) 1625—1631.]
- Kundt, A.* Über die Doppelbrechung des Lichtes in tönenden Stäben. [Ann. d. Phys. II 123 (1864) 541—557.]
— Temporärer Dichroismus hervorgebracht durch Zug. [Ann. d. Phys. II 151 (1874) 125—126.]
— Über die Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten. [Ann. d. Phys. III 13 (1881) 110—133.]
— Über Doppelbrechung des Lichtes in Metallschichten, welche durch Zerstäuben einer Kathode hergestellt sind. [Ann. d. Phys. III 27 (1885) 59—71.]
- Kundt, A. and Lehmann, O.* Über longitudinale Schwingungen und Klangfiguren in cylindrischen Flüssigkeitssäulen. [Ann. d. Phys. II 153 (1874) 1—11.]
- Kuno, J.* The Law of Photo-Elastic. Extinction [Phil. Mag VII 12 (1931) 503—511.]
- Lasaulx, A. von.* Über Doppelbrechung und Dichroismus durch Druck an Kristallen der Silberhaloide hervorgerufen. [Ber. schles. Ges. f. vaterl. Cultur (1879) 171.]
- Leger, M. A.* Transmissions des forces extérieures an travers des corps solides. [Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils (1878) 252—262.]
- Lehmann, O.* Plastizität fester Krisalle und erzwungene Homöotropie I und II Art. [Ann. d. Phys. IV 50 (1916) 555—599.]
- Leick, A.* Über künstliche Doppelbrechung und Elastizität von Gelatineplatten. [Ann. d. Phys. IV 14 (1904) 139—152; see also Dissertation Greifswald (1903).]
- Leon.* (Öster. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 14 (1908).]
- Low, A. R.* Stress Optical Experiments. [The Aeronautical Journal (1918) 341—372.]
- Macé de Lépinay, J.* Recherches sur la double réfraction accidentelle. [C. R. 84 (1877) 1024—1026 and 86 (1878) 326—328.]
— Recherches expérimentales sur la double réfraction accidentelle. [Ann. de Ch. et de Phys. V 19 (1880) 5—90.]
- Mach, E.* Über die temporäre Doppelbrechung der Körper durch einseitigen Druck. [Ann. d. Phys. II 146 (1872) 313—316.]
— Spectrale Untersuchung eines longitudinal tönenden Glasstabes. [Ann. d. Phys. II 146 (1872) 316—317.]
— Optisch-akustische Versuche. [Prag (1873).]
- Mach, E. and Merten, J.* Bemerkungen über die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in Quarz durch Druck. [Wiener Berichte II 72 (1875) 315—328; see also Ann. d. Phys. II 156 (1875) 639—654.]
- Maris, H. B.* Photo-Elastic-Properties of Transparent Cubic Crystals. [J. Opt. Soc. Amer. 15 (1927) 194—200.]
— Photo-Elastic Investigations of the Tensile Test specimen, the notched bar, the ship propeller strut and the roller path ring. [J. Opt. Soc. Amer. 15 (1927) 203—236.]
- Martin, H. E. L.* Some experiments with Reinforced Materials examined by aid of Plane Polarised Light. [Transactions of the Liverpool Engineering Society 36 (1914) 59—98.]
— Some further properties of Celluloid, with a discussion on the basic principles of optical methods of measuring stress and strain. [Durham Phil. Soc. Proc. Vol. 6 Pt. 5 323—364.]
— The experimental determination of the distribution of stress across the walls of thick cylinders subjected to internal pressures. [Durham Phil. Soc. Proc. II 7 (1926).]

- Matthiessen*, Über das Gesetz der Quellung von Leimcylindern. [F. Exner's Repertorium der Physik 21 (1886) 333.]
- Maxwell, J. C.* On the Equilibrium of Elastic Solids. [Roy. Soc. Edin. Trans. 20 (1853) 87—120.]
— On Double Refraction in a viscous Fluid in Motion. [Roy. Soc. Proc. 22 (1873/1874) 46—47.]
— Über Doppelbrechung in einer bewegten zähen Flüssigkeit. [Ann. d. Phys. II 151 (1874) 154—154.]
- Mesmer, G.* Spannungs optische Untersuchungen von ebenen Spannungszuständen. [Ztschr. Ver. d. Ing. 72 (1928) 951—959.]
- Mesnager, A.* Mesures des efforts intérieurs dans les solides, et applications. [International Association for Testing Materials; Buda-Pesth (1901).]
— Contribution à l'étude de la déformation élastique des solides. [Annales des Ponts et Chaussées 4 (1901) 128—190.]
— Sur une méthode expérimentale pour déterminer à l'avance les tensions qui se produiront dans les constructions. [C. R. 155 (1912) 1071—1072.]
— Utilisation de la double réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides. [International Association for Testing Materials, New York (1912) (11) XXVII₅.]
— Détermination complète sur un modèle réduit des tensions qui se produiront dans un ouvrage. Utilisation de la double réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides. [Annales des Ponts et Chaussées 16 (1913) 133—186.]
— Les tensions intérieures visibles. [La Technique Moderne, March 15th, 1924.]
— Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides. [Fascicule X du Memorial des sciences physiques, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1929.]
- Metz, G. de.* Über die temporäre Doppelbrechung des Lichtes in rotirenden Flüssigkeiten. [Ann. d. Phys. III 35 (1888) 497—507.]
— (In Russian.) [Mémoires de la section mathématique de la Société des naturalistes de la nouvelle Russie à Odessa 9 (1889).]
— Über die Compressibilität der Oele und Colloide. [Ann. d. Phys. III 41 (1890) 663—674.]
— Double réfraction accidentelle des liquides mécaniquement déformés. [C. R. 134 (1902) 1353—1356.]
— Rigidité des liquides. [C. R. 136 (1903) 604—606.]
— La double réfraction accidentelle dans les liquides. [Paris (1906): Collection „Scientia“ No. 26, Gauthier-Villars.]
- Mey, A.* Optische Konstanten der Halogenverbindungen einiger Schwermetalle. [Dissertation Leipzig (1906).]
- Möhring, A.* Gele mit anomaler akzidenteller Doppelbrechung. [Kolloid chem. Beihefte 23 (1927) 152—161.]
— Zur Doppelbrechung natürlicher Zellulosefasern und des Chitins. [Kolloid chem. Beihefte 23 (1927) 162—188.]
- Moigno, F. and Soleil, H.* Note sur un nouveau caractère distinctif entre les cristaux à un axe positifs et négatifs [C. R. 30 (1850) 361—362.]
- Monnory, M.* Pouvoir rotatoire et double réfraction. [J. de Phys. II 9 (1890) 277—287.]
— Sur la compression du quartz. [C. R. 112 (1891) 428—430.]
- Müller, G.* Einfluss der Temperatur auf die Brechung des Lichtes im Glas, Kalkspath und Bergkrystall. [Publ. Astrophys. Potsdam 4 (1885) 151; see also Ztschr. f. Krist. 13 (1887) 422—423 and N. Jahrb. f. Miner. 2 (1887) 1.]
- Muller, J.* Étude photoélastométrique de trois profils de murs encastés sollicités à la compression et à la flexion. [Revue d'Optique 9 (1930) 439—469.]
- Nakamura, S.* Wirkung einer permanenten mechanischen Ausdehnung auf die optischen Konstanten einiger Metalle, [Ann. d. Phys. IV 20 (1906) 807—832.]
- Natanson, L.* On Double-Refraction in Moving Viscous Liquids. [Phil. Mag. VI 2 (1901) 469—477.]
— Über die temporäre Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten. [Ztschr. f. phys. Chem. 39 (1901) 355—363.]
— O podwójnem zalamaniu światha w cieczach adksztalcanych. (Sur la double réfraction acci-

- dentelle dans les liquides) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1901) 161—171.]
- Natanson, L.* O stapniu przybliżenia pewnych równań teorii tarcia wewnetrznego. (Sur l'approximation de certaines équations de la théorie de la viscosité.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1903) 283—311.]
- O pewnej właściwości podwójnego załamania światła w cieczach adkkształcanych mogacej posłużyć do wyznaczania ich czasu zluźnienia. (Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides pouvant servir à la détermination de leur temps de relaxation.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1904) 1—22.]
- Uwagi nad pracami prof. Zaremby, tyżacemi się teorii podwójnego załamania światła w cieczach adkkształcanych. (Remarques sur les travaux de M. Zaremba relatifs à la théorie de la double réfraction accidentelle dans les liquides.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1904) 103—113.]
- Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. [J. de Phys. IV 4 (1905) 183—190.]
- Neumann, F. E.* Über die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimierten und ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern. [Abh. Akad. Berlin (1841) Part (II) 1—254; see also Ber. Akad. Berlin (1841) 330—353, Ann. d. Phys. II 54 (1841) 449—476 and Gesammelte Werke, Leipzig 3 (1912) 81.]
- Offret, A.* De la variation, sous l'influence de la chaleur, des indices de réfraction de quelques espèces minérales dans l'étendue du spectre visible. [Bull. Soc. Minér. de France 13 (1890) 405—697; see also Ztschr. f. Krist. 21 (1893) 290—303.]
- Okuda, K.* Effect of Temperature on the Stress-Optical Behaviour of Glass. [Mem. Coll. Eng. Kyushu I. Univ. 4 (III) (1927) 159—191.]
- Pfaff, F.* Versuchen über den Einfluss des Drucks auf die optischen Eigenschaften doppeltbrechender Krystalle. [Ann. d. Phys. II 107 (1859) 333—338 and II 108 (1859) 598—601.]
- Einfluss der Temperaturveränderung und des Druckes auf die doppelte Strahlenbrechung. [Sitz. ber. d. phys. med. Soc. Erlangen H. 10 (1877/1878) 213—218.]
- Pockels, F.* Über den Einfluss elastischer Deformationen, speciell einseitiges Druckes, auf das optische Verhalten krystallinischer Körper. [Ann. d. Phys. II 37 (1889) 144—172, 269—305, 372—394.]
- Über die durch einseitigen Druck hervorgerufene Doppelbrechung regulärer Krystalle, speciell von Steinsalz und Sylvin. [Ann. d. Phys. III 39 (1890) 440—469.]
- Über die Änderung des optischen Verhaltens von Alaun und Beryll durch einseitigen Druck. [N. Jahrb. f. Miner. 8 (1892) 217—268; see also Ztschr. f. Krist. 23 (1892) 639.]
- Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation. [Ann. d. Phys. IV 7 (1902) 745—771 and 9 (1902) 220—223.]
- Bemerkungen zu meiner Abhandlung: „Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation.“ [Ann. d. Phys. IV 11 (1903) 651—653.]
- Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen [Ann. d. Phys. IV 11 (1903) 726—753.]
- Lehrbuch der Kristalloptik. [Leipzig (1906).]
- Bemerkungen zur Theorie der durch äussere Einwirkung erzeugten Doppelbrechung. [Phys. Ztschr. 9 (1908) 314—317.]
- (Review of paper by E. G. Coker in Phil. Mag. (1910).) [Beiblätter 35 (1911) 136.]
- Pontremoli, A.* La doppia rifrazione accidentale meccanica nei liquidi. [Mem. Accad. Lincei 13 (1921) 594—616.]
- Circa alcune nuove ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento. [Rend. Accad. Lincei VI 3 (1926) 75—82.]
- Preston, F. W.* A Note on Stress-Systems and Photo-Elastic-Phenomena. [J. Soc. Glass Tech. 11 (1927) 23—29.]
- Pugno, G. M.* La determinazione degli sforzi e della loro distribuzione nei solidi mediante la luce polarizzata. [L'Ingegneria (1925) 256—259; (1926) 86—91, 238—242; (1927) 2—7, 200—206.]

- Quincke, G.* Doppelbrechung der Gallerte beim Aufquellen und Schrumpfen. [Ann. d. Phys. IV 14 (1904) 849—885 und 15 (1904) 1—54.]
- Raman, C. V. and Krishnan, K. S.* A Theory of the Birefringence induced by Flow in Liquids. [Phil. Mag. VII 5 (1928) 769—783.]
- Ramspeck, A.* Anomalien der accidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. [Ann. d. Phys. IV 74 (1924) 722—742.]
- Rayleigh, the late Lord.* On the Stresses in Solid Bodies due to Unequal Heating and on the Double-Refraction resulting therefrom. [Phil. Mag. VI 1 (1901) 169—178; see also Arch. Néerl. II 5 (1900) 32—42 and Collected Papers Vol. 4, p. 502.]
- Rayleigh, Lord.* Double Refraction and Crystalline Structure of Silica Glass. [Roy. Soc. Proc. A 98 (1920) 284—296.]
- Reeb, O.* Über eine Methode zur Messung der Dispersion der künstlichen Doppelbrechung. [Ann. d. Phys. IV 71 (1923) 427—456.]
- Reiger, R.* Innere Reibung plastischer und fester Körper. [Phys. Ztschr. 2 (1900—1901) 213—217; see also Dissertation Erlangen (1901).]
- Über optische und mechanische Relaxationszeit. [Ann. d. Phys. IV 31 (1910) 93—97.]
- Reinders, W.* Dubbelbrekende kolloidale oplossingen. [Versl. Akad. Wet. Amsterdam 25 (1916) 25—33; see also Amsterdam Acad. Proc. 19 (1917) 189—197.]
- Rieth, Helene (née Marx).* Über die künstliche Doppelbrechung in zylindrischen Glaskörpern bei Einwirkung äusserer Drucke. [Ann. d. Phys. IV 79 (1926) 145—176; see also Dissertation Giessen.]
- Rinne, F.* Über das Glasschneiden. [Leipzig Berichte 77 (1925) 141—152.]
- Rohmann, H.* Doppelbrechung des Lanolins. [Phys. Ztschr. 20 (1921) 256—257.]
- *H.* Studien über die Doppelbrechung des Lanolins. [Phys. Ztschr. 23 (1922) 39—43.]
- Rolla, L.* Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. [Rend. Accad. Linecei V 16 (i) (1907) 191—108.]
- Rossi, P.* La doppia rifrazione accidentale nel caucciù studiata in rapporto al comportamento elastico. [Napoli Rend. III 16 (1910) 125—134; see also Nuovo Cim. V 20 (1910) 226—237.]
- La doppia rifrazione accidentale e le azioni elastiche susseguenti nel caucciù. [Napoli Rend. III 16 (1910) 142—151; see also Nuovo Cim. V 20 (1910) 268—277.]
- La doppia rifrazione accidentale delle gelatine studiata in rapporto al loro comportamento elastico. [Napoli Rend. III 16 (1910) 181—192.]
- La doppia rifrazione accidentale del celluloido e del vetro studiata in rapporto al loro comportamento elastico. [Napoli Rend. III 16 (1910) 206—215.]
- Osservazioni su taluni fenomeni di rilassamento. [Napoli Rend. III 17 (1911) 207—212; see also Nuovo Cim. VI 2 (1911) 151—158.]
- Doppia rifrazione accidentale di talune sostanze studiata in rapporto al loro comportamento elastico. [Nuovo Cim. VI 1 (1911) iii-iv.]
- Rühl, D.* Experimentelle Ermittlung ebener Verschiebungs- und Spannungszustände auf neuem Wege und Anwendung auf eine durch zwei Nietbolzen gespannte Platte. [Forschungsarbeit auf dem Geb. d. Ing. Wes. Heft 221, Berlin (1920).]
- Savur, S. R.* On the Stress-optical Coefficients for Direct Tension und Pressure measured in the case of Glass. [Phil. Mag. VI 50 (1925) 453—463.]
- On the Stress-optical Effect in Permanently Overstrained Celluloid. [Roy. Soc. Proc. A 109 (1925) 338—350.]
- Schott und Genossen.* Der Einfluss der Abkühlung auf das optische Verhalten des Glases u. s. w. [Mittheilung aus dem Glastechnischen Laboratorium Schott u. Genossen in Jena; see also Ztschr. f. Instr. 10 (1890) 41—43.]
- Schultz, H.* Doppelbrechung gekühlter Gläser und eine Methode zur Messung derselben. [Phys. Ztschr. 13 (1912) 1017—1029; see also Verh. d. deutsch. phys. Ges. 14 (1912) 883—897.]
- Apparat zur Untersuchung der Doppelbrechung optischer Gläser. [Ztschr. f. Instr. 33 (1913) 205—209, 247—253.]

- Schultz, H.* Beiträge zum Problem der Spannung in Glas. [Sprechsaal Coburg 47 (1914) 460—462, 478—480.]
- Die Messung innerer Kräfte mit Hilfe optischer Methoden. [Zeitschrift für die keramischen Glas und verwandten Industrien (1920).]
- Die Bestimmungen der Spannungen in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes. [Der Betrieb 3 (1921) 405—412.]
- Schwedoff, T.* Recherches expérimentales sur la cohésion des liquides. [J. de Phys. II 8 (1889) 341—359; 9 (1890) 34—46.]
- Sur une anomalie dans la réfraction double des liquides. [J. de Phys. III 1 (1892) 49—53.]
- [Rapports présentés au congrès international de Physique réuni à Paris; 1 (1900) 478.]
- Schwendener, S.* Über Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen. [Ber. Akad. Berlin (1887) 659—702.]
- Zur Doppelbrechung vegetabilischer Objekte. [Ber. Akad. Berlin (1889) 233—244.]
- Seebeck, A.* Einige neue Versuche und Beobachtungen über Spiegelung und Brechung des Lichtes. [Schweiggers J. 7 (1813) 259—298, 382—384.]
- Von den entoptischen Farbenfiguren und den Bedingungen ihrer Bildung in Gläsern. [Schweiggers J. 12 (1814) 1—16.]
- Seherr-Thoss, M. von.* Über künstlichen Dichroismus. [Ann. d. Phys. III 6 (1879) 270—287.]
- Selényi, P.* Zur Frage der Beeinflussung selektiver Absorptions-Spektren durch elastische Deformation. [Verh. d. deutsch. phys. Ges. 15 (1913) 290—291.]
- Über die Wirkung des äusseren Druckes auf die optischen Eigenschaften der Körper. [Mathematikai és Fizikai Lapok, Budapest 22 (1913) 125—144.]
- Siedentoff, H.* Über direkte Sichtbarmachung der neutralen Schichten an beanspruchten Körpern. [Ztschr. d. öster. Ing. u. Archit. Ver. 58 {No. 33} (1906) 469—471.]
- Steinheil, H.* Einige Fälle von Doppelbrechung in kreisförmigen Glasscheiben. [Dissertation Giessen (1920).]
- Steitz, K.* Bestimmung der Differenz der Suszeptibilitäten von Gelatinezylindern mit künstlicher Anisotropie. [Dissertation Giessen (1922).]
- Suyehiro, K.* The distribution of stress in a tension strap having a circular hole filled with a plug. [Proc. Soc. Mech. Eng. Japan 17 (1924) No 34; see also Engineering 98 (1914) 231—232.]
- Taffin.* Mesure de la double réfraction dans le verre trempé. [C. R. 173 (1921) 1347—1350.]
- Le recuit des verres. [C. R. 174 (1922) 36—39.]
- Sur le recuit et les propriétés mécaniques du verre. [C. R. 174 (1922) 159—162.]
- Tesár, V.* Représentation simple et complète en grandeur et en direction des efforts intérieurs dans les problèmes d'élasticité plane. [Le Génie Civil 98 (1931) 615—619.]
- Thompson, S. P. and Coker, E. G.* Note on the application of polarised light to determine the condition of a body under stress. [Brit. Ass. Rep (1909) 585—586.]
- Tool, A. Q. and Valasek J.* Concerning the Annealing and Characteristics of Glass. [Sci. Pap. Bur. Stand. 15 (1920) 537—571.]
- Trabacchi, G. C.* I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un copro elastico dalle distorsioni di Volterra. [Rend. Accad. Lincei V 18 (a) (1909) 444—449; see also Nuovo Cim. V 17 (1909) 371—377.]
- Tuzi, Z.* A new Material for the study of Photo-Elasticity. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 7 (1927) 79—96.]
- Photo-Elastic study of Stress in a Specimen of three-dimensional Form. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 7 (1927) 97—103.]
- Photo-Elastic study of Stress in heat-treated column. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 7 (1927) 104—120.]
- Photographic and Kinematographic Study of Photo-Elasticity. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 8 (1928) 247—267.]
- Effect of a circular hole on the stress distribution of a beam under uniform bending moment. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 9 (1928) 65—89; see also Phil. Mag. VII 9 (1930) 210—224.]

- Tuzi, Z.* On the development of experimental methods in photo-elasticity. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 12 (1929) 21—36.]
- Photo-Elastic study of Stress-Distributions in the side-framing steel car. [Sci. Pap. Inst. Phys.-Chem. Res. Tokio 12 (1929) 37—68.]
- The Effect of a Circular Hole in the Uniform Shear Field and the Stresses of Stiff Frames. [International Congress for Metallic Structures, Liege (1930) 6 pp.]
- Twyman, F.* The Annealing of Glass. [J. Soc. Glass Tech. 1 (1917) 61—74.]
- Twyman, F. and Perry J. W.* The Determination of Poisson's Ratio and of the Absolute Stress-variation of Refractive Index. Proc. Phys. Soc. Lond. 34 (1922) 151—154.]
- Twyman, F. and Simeon, F.* On the Refractive Index Changes in Optical Glass occasioned by Chilling and Tempering. [J. Soc. Glass. Tech. 7 (1923) 199—207.]
- Umlauf, K.* Über Doppelbrechung in rotirenden Flüssigkeiten. [Ann. d. Phys, III 45 (1892) 304—315.]
- Vlès, F.* Sur la biréfringence apparente des cils vibratiles [C. R. 146 (1908) 88—89.]
- Volterra, E.* La fotoelasticità e le sue applicazioni allo studio delle tensioni nell' interno dei corpi elastici. [L'Ingegnere 4 (1930) 516—531.]
- Metodi ed applicazione della fotoelasticità. [L'Ingegnere 4 (1930) 816—827.]
- Vorländer, D. and Walter, R.* Die erzwungene Doppelbrechung der amorphen Flüssigkeiten im Zusammenhange mit der molekularen Gestalt. [Phys. Ztschr. 25 (1924) 571—573.]
- Die mechanisch erzwungene Doppelbrechung der amorphen Flüssigkeiten im Zusammenhang mit der molekularen Gestalt. [Ztschr. f. phys. Chem, 118 (1925) 1—30.]
- Wachtler, M.* Über die Beziehung zwischen Doppelbrechung und Dauerdeformation in einigen Gelen. [Dissertation Jena (1914); see also Kolloid chem. Beihefte 20 (1924) 158—208.]
- Über die akzidentelle Doppelbrechung im Zelloidin und in der Zellulose. [Göttingen Nachr. (1919) 299—320.]
- Eine Bemerkung über die optischen Methoden zur Prüfung von Materialbeanspruchungen insbesondere bei Verwendung von Zelluloid. [Ztschr. f. tech. Phys. 5 (1924) 418—423.]
- Über die Doppelbrechungserscheinungen in Kolloiden. [Fortschr. d. Min. 12 (1927) 119—192.]
- Über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern. (Zusammenfassender Bericht.) [Phys. Ztschr. 29 (1928) 497—534.]
- Über die Untersuchung ebener Spannungszustände mit Hilfe von polarisiertem Licht. [Ztschr. Ver. d. Ing. 74 (1930) 545—546.]
- Weidert, F. and Berndt, G.* [Ztschr. f. tech. Phys. 1 (1920) 51—58.]
- Wertheim, G.* Sur les effets optiques de la compression du verre. [C. R. 32 (1851) 144—145.]
- Mémoire sur la polarisation chromatique produite par le verre comprimé. [C. R. 32 (1851) 289—292; see also Ann. d. Phys. II 86 (1852) 321—325.]
- Notes sur la double réfraction artificiellement produite dans des cristaux du système régulier. [C. R. 33 (1851) 576—579; 35 (1852) 276—278; see also Ann. d. Phys. II 86 (1852) 325—329; 87 (1852) 498—500.]
- Mémoire sur la double réfraction temporairement produite dans les corps isotropes, et sur la relation entre l'élasticité mécanique et l'élasticité optique. [Ann. de Ch. et de Phys. III 40 (1854) 156—221.]
- On the double réfraction temporarily produced in isotropic bodies, [Phil. Mag. IV 8 (1854) 241—261; 342—357.]
- Wiedemann, E.* Über Colloide. [Verh. d. deutsch. phys. Ges. (1884) 44—45.]
- Wiener, O.* Lamellare Doppelbrechung. [Phys. Ztschr. 5 (1904) 332—338.]
- Zur Theorie der Stäbchendoppelbrechung. [Leipzig Berichte 61 (1909) 113—116.]
- Zur Theorie der Refraktionskonstanten. [Leipzig Berichte 62 (1910) 255—277.]
- Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. I Abth. Die Mittelwerthsätze für Kraft, Polarisation und Energie. [Leipzig Abh. 32 (1912) 507—604.]
- Willigen, V. S. M. van der.* Sur la réfraction du quartz et du spath d'Islande. [Archives du musée de Teyler 2 (1869) 153—182 and 3 (1874) 34—54.]

- Wilson, C.* On the influence of Surface loading on the Flexure of Beams. [Phil. Mag. V 32 (1891) 481—503.]
- Wright, F. E.* A simple method for the accurate measurement of relative Strain in Glass. [J. Waschington Acad. 4 (1914) 594—598.]
- Wyss, T.* Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktische Anwendung. [Berlin (1926).]
- Yamaguti, N.* On the stresses around a horizontal circular hole in gravitating elastic solid. [J. Civ. Eng. Soc. Japan 15 (1929) 291—303.]
- On the investigation of the Stress-Distribution in a Tunnel with the Agar-agar model experements. [J. Civ. Eng. Soc. Japan 16 (1930) 113—118.]
- Zakrzewski, K.* O polozeniu osi optycznych w cieczach adkształcanych. (Sur la position des axes optiques dans les liquides déformés.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1904) 50—56.]
- Zakrzewski, K.* and *Kraft, K.* Directions principales dans les liquides biréfringents par l'effet du mouvement. [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1905) 506—510.]
- Zaremba, S.* Uwagi o pracach prof. Natansona nad teorią tarcia wewnętrznego. (Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1908) 85—93.]
- O pewnen uogólnieniu klasycznej teorii tarcia wewnętrznego. (Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1903) 380—403.]
- O podwójnem załamaniu w cieczach adkształcanych i wywodach prof. Natansona odnoszących się do tej kwestyi. (Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1903) 403—423.]
- O pewnej postaci doskonalszej teorii relaxacyi. (Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1903) 594—614.]
- Zasada ruchów względnych i równania mechaniki fizycznej. (Odpowiedz prof. Natansonowi.) (Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. Réponse à M. Natanson.) [Bull. Acad. Sci. Cracovie (1903) 614—621.]
- Note sur la double réfraction accidentelle de la lumière dans les liquides. [J. de Phys. IV 3 (1904) 606—611; 4 (1905) 514—516.]
- Zimmermann, A.* Über das anomale optische Verhalten gedehnter Guttaperchalamellen. [Ber. deutsch. bot. Ges. 9 (1891) 81—84.]
- Zocher, H.* Über Sole mit nichtkugelligen Teilchen. [Ztschr. f. phys. Chem. 98 (1921) 293—337.]
- Zocher, H.* and *Coper, K.* Über die Erzeugung der Anisotropie von Oberflächen. [Ztschr. f. phys. Chem. 132 (1928) 295—302.]
- Zocher, H.* and *Jacoby, F. C.* Über die optische Anisotropie selektiv absorbierender Farbstoffe. [Kolloid chem. Beihefte 24 (1927) 365—417.]
- Zschimmer, E.* Einfluss der Temperatur und Zeit auf die Doppelbrechung ungleichförmig gespannter Gläser. [S.-A. Arch. f. d. phys. Chem. d. Glases u. d. keramischen Massen 1 (1912) 17, 5, 9; see also Ztschr. f. Instr. 32 (1912) 303—304.]
- Zschimmer, E.* and *Schultz, H.* Die Doppelbrechung optischer Gläser in Abhängigkeit von ihrer chemischen Zusammensetzung und der Form. [Ann. d. Phys. IV 42 (1913) 345—396.]

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. РУССКАЯ ЛИТЕРАТУРА

) Книги

1. *Зайцев А. К.* Оптический метод изучения напряжений. Лгр. 1927 г. (В книге приводится много примеров применения оптического метода к изучению напряжений в деталях машин, с прилож. 8 цветн. диагр.)

2. *Кирпичев В. А.* Оптическое изучение упругих деформаций. 1913 г. Брошюра. (См. также „Изв. О-ва технологов“ 1912—1913 г.) (Общ. обзор оптич. метода с приложен. кратк. библиогр.)

3. Оптический метод изучения напряжений в деталях машин. Работы Лаборатории оптического метода изучения напряжений и Лаборатории пластических деформаций Научно-иссл. ин-та математики и механики Лен. гос. университета им. Бубнова. Под. общ. ред. Одинга. Л.-М. ОНТИ, 1935 г. 135 стр.

4. *Попов А. А.* Изучение напряжений в поляризованном свете. — М. Трансжелдориздат, 1934 г. 136 стр. с илл. (Библиография на стр. 136.)

5. *Самсонов К. В.* Оптический метод изучения напряжений в применении к исследованию работы строительных конструкций. М., НКПС, Трансжелдориздат, 1934, 38 стр.

б) Журнальные статьи

6. *Веденева Н. и Грум-Гржимайло, С.* Спектро-полярископический метод Умова в применении к исследованию минералов под микроскопом. Доклады Акад. наук СССР, 1934 г. т. 111, № 8—9, стр. 583—585.

7. Измерение напряжений в железобетонных сооружениях методом фотоэластичности (Реф. М. Калтград из „Engineer“, 1934, № 4095, стр. 20) „Новости техники“ 1934, № 91.

8. Исследовательские работы НИГИ. „Гидротехнич. Строит-во“, 1935, № 7, стр. 45—47 § 8. Работы лаборатории оптического метода исследования напряжений. (Краткая заметка.)

9. *Кноль Д. К.* Оптический метод изучения напряжений на современном этапе своего развития. „Вестник инж. и техн.“ 1935, № 7, стр. 430—436.

10. *Конт В.* Оптический метод исследования напряжений в материалах, 1931 г. № 1, стр. 145—150.

11. *Менаже.* Оптический метод изучения внутр. напряжений. „Известия собр. инж. путей сообщ.“ № 5 и 7, 1903 г.

12. *Михайлов А. Д.* Исследование оптическим методом напряжений, вызванных вальцовкой. „Сов. котлотурбостроение“, 1934 г., № 6, стр. 59—69 (Библиография 88 назв.).

13. Работы по освоению методики оптического исследования напряжений в лаборатории проф. Г. А. Озерова в Центр. Аэро-гидродинамическом институте. „Сорена“ 1934. № 6, стр. 171 — Успехи науки и техники. (Заметка.)

II. ИНОСТРАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) Книги, диссертации

14. *Coker E. G. and Filon, N. G.* Treatise on photoelasticity, London, Cambridge Un-ty Press, 1931. Трактат об оптическом методе изучения напряжений. (Обзор исторического развития оптич. метода. Области применения. Обзор теорий, служащих основой для оптич. метода. Богатая библиография на нескольких страницах.)

15. *Messmer G.* Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen und Fliessversuche unter konzentriertem Druck. Dissert. Göttingen, 1923. (Сравнительное изучение напряжений оптическим методом и исследование текучести при сосредоточенной нагрузке.)

16. *Rinne F. und Borck M.* Anleitung zu optischen Untersuchungen mit dem Polarisationsmikroskop. Leipzig, M. Jänocke Verlagsbuchhandl., 1934. VIII+279 S. 335 Abb. Руководство оптическими исследованиями поляризационным микроскопом. (См. также „Physik. Z.“, Nr. 14/15, 1934).

17. *Siebel E. u. Kopf, E.* Beanspruchung in gelochten Platten. Mitteil. aus d. Materialprüfungsanstalt d. Techn. Hochschule Stuttgart. (Forschungsheft 369. Beil. zu „Forschung auf d. Geb. d. Ingenieurwesens“, Ausg. B. Bd 5, 1934). Berlin, V. D. I.—Verl., 1934. (Напряжения в пластинах с отверстиями.)

18. *Tuzi Z.* Photography and cinematography of photo-elasticity. (В книге Verhandlungen d. 3 Internat. Kongress f. techn. Mechanik., стр. 176—180).

б) Журнальные статьи

19. *Ambronn H. und Frey, B.* Das Polarisationsmikroskop. „VDI“, 1927, S. 468.
20. *Baud R. V.* Photoelasticity makes possible stress analysis. „El. Journ.“ 1930, v. 27. Nr. 1, 3 a. 5, Jan., Mar. a. May. p. 57, 171—181 and 303—305. Возможность анализа напряжений при помощи оптического метода. (Опыты с прозрачными моделями).
21. *Baud R. V.* Techn. Meth. photoelastischer Forschung. „Schweiz. Bauzeitung“ v. 100. Nr. 1, 2, Juli 2, 1932, S. 1—4 und 15—20. Технический метод оптического исследования. (Имеется библиография в примечании).
22. *Beyer A. H. and Solakian A. G.* Photo-elastic analysis of stresses in composite materials. „Proceed. of Am. Soc. Civ. Engrs“ v. 60, Nr. 1, 1934, p. 136—9 a. May p. 691—7. Исследование оптическим методом сложных материалов. (Дискуссия и ответ автора по статье, вышедшей в сент. 1933 г.)
23. *Birnbaum W.* Optische Untersuchung des Spannungs Zustandes in Maschinenteilen mit scharfen und abgerundeten Ecken. „Z-t f. techn. Phys.“, Bd 5, 1024, S. 143. Изучение оптическим методом напряжений в деталях машин с острыми и закругленными углами.
24. *Blackmon H. N.* Watching stresses at work. „Machinery“, (N. Y.), v. 37, Nr. 10. June, 1931, p. 737—742. Наблюдения за напряжениями в работе. (Применение оптич. метода в лаборатории Вестингауза для движения и станции. частей. Рисунки иллюстрируют распространение напряжений в целлюлоидных моделях.)
25. *Brahtz J. H.* Photoelastic apparatus at the California Institute of Technology (Рефер. Мезмера из „Rev. Scient. Instr.“ (N. S.), v. 5, 1934, Nr. 2, 80—83). „Physikal. Berichte“, 1934, H. 11, Juni, S. 836. Оптический аппарат для изучения напряжений.
26. *Carleton R. B.* Suitability of materials for photoelastic investigations. „Rev. Sci. Instr.“, v. 5, Nr. 1, Jan. 1934, pp. 30—32. (Аннот. см. „Sc. Abstr.“, 1934, Nr. 434, с. 110). Материалы, пригодные для исследования оптическим методом.
27. *Coker E. G.* The design and equipment of photo-elastic laboratories. „Engineering“ 1935, Nr. 3605, pp. 183—185. Лаборатории для изучения напряжения оптическим методом, — их оборудование и проводимая ими работа.
28. *Coker E. G.* Experimental methods of determining stresses in framework. „Engineering“ v. 127, Nr. 3333, Nov. 29, 1929, p. 710. Экспериментальный метод определения напряжений в формах. (Применение специальных методов на прозрачных материалах).
29. *Coker E. G.* Force fits and shrinkage fits in crank webs and locomotive driving wheels. „Proceed. of the Inst. of Mech. Eng.“, 1944, v. 127, p. 249—275. Усилия и сжимающие напряжения, возникающие в кривошипях и ведущих колесах локомотивов. (Описание опытов, произведенных при помощи оптич. метода изучения напряжений).
30. *Coker E. G. and Rossell R.* Influence of keys and keyways on cylindrical force fits and shrinkable fits. — Inst. Naval Architects“. — Adv. paper Nr. 11, mtg. Mar. 28, 1934 6 p. 2 suppl. (См. также „Engineering“, v. 137, 1934, Nr. 3561, 13/IV, p. 439—441. Напряжения, вызываемые шпонками и шпоночными канавками).
31. *Coker E. G.* Polarised light and its application to engineering. „Metallurgia“, v. 5, Nr. 30, Apr. 1932, p. 189—194. Поляризованный свет и его применение в технике.
32. *Coker E. G.* Some experimental methods and apparatus for determining the stresses in bridges and frames structures. „Inst. p. o. Civil Engin-rs Proc.“. 1, 1929, Nr. 4733, 23 p. Некоторые экспериментальные методы и приборы для определения напряжений в мостах и строительных конструкциях. (Применение оптического метода на нитроцеллюлозных моделях арок).
33. *Delanghe.* La détermination photoélastique des contraintes, dues aux dilatations dans un modèle de pont en arc. „Génie Civil“ 1935, Nr. 26, p. 635—6. Определение оптическим методом напряжений, возникающих под действием расширения в модели арочных мостов.
34. *Edmonds R. H. G. and Mc Minn B. T.* Celluloid as medium for photoelastic investigation. „Am. Soc. Mech. Eng.“ — Adv. pap. Nr. 10 f. mtg., Nov. 30, Dec. 4. 1931. 6 p. 8 figs. (См. также Trans. ASME, v. 54 (Nr. 11) Apl. Mech., 15/VI, 1932, p. 77. Целлюлоид как среда для оптических исследований.)

35. *Evans T. H.* Photoelasticity. „Civ. Eng.“ (N. J.) 1933, vol. 3, Nr. 10, p. 570—573. Изложение элементарной теории оптического метода изучения напряжений и применений аппаратов.
36. *Favre H.* La détermination optique des tensions intérieures, „Revue d'Optique“, 1932, Nr. 1, p. 1—21. Оптическое определение внутренних напряжений. (Различные методы оптического способа и их применение. Аппараты и обращение с ними. Точность результатов. Время, нужное для измерений. Постройка моделей. Возможность применения двойного преломления к решению задач в 3-х измерениях. обстоятельная статья с 8 илл. и табл. сравнения различн. оптич. методов).
37. *Favre H.* Méthode purement optique de Favre pour la détermination photoélastici métrique des contraintes élastiques. „Génie Civil“, v. 95, 1929, Nr. 22 30/XI, p. 543—545 и дискуссии № 24, p. 598 и № 10 1930 г. с 244. Чисто оптический метод Фавра для определения напряжений.
38. Favre's optical method for the photoelasticimetric determination of elastic stresses „Mech. Eng-g“, 1930, p. 550. Оптический метод Фавра для определения упругих напряжений.
39. *Foeppl L.* Fortschritte auf dem Gebiet der Spannungsoptischen Untersuchung von Konstruktionen. „VDI“, Bd 76, 1932, Nr. 21, S. 505—8. Достижения в производстве оптических исследований в конструкциях.
40. *Foeppl L.* Spannungsmessung mit Hilfe der optischen Doppelbrechung. „Zeitschr. f. tech. Phys.“, 1934, Nr. 11, S. 430—436. Оптический метод измерения напряжений при помощи двойного преломления.
41. *Frocht M.* Factors of stress concentration photoelastically determined — „Trans. ASME“, APM 1935, v. 2, Nr. 2, p. A67—A68. Оптический метод определения факторов, вызывающих концентрацию напряжений. (По докладу в ASME от. 18 и 19/VI, 1935 г.)
42. *Frocht M.* Kinematography in photoelasticity. „Am. Soc. Mech. Eng.“ Adv. pap. Nr 16, f. mtg. Nov. 30, Dec. 4, 1931, 9 p., 45 fgs. (См. также Tr. ASME, 1932). Применение кинематографии в оптическом методе изучения напряжений. (Показаны движущиеся изображения 15 моделей, иллюстрирующих образование и распространение напряжений).
43. *Frocht M.* On application of interference fringes to stress analysis. „Journal of the Franklin Inst.“, 1933, v. 216, Nr. 1, July, p. 73—89. О применении полос, вызванных интерференцией к определению напряжений.
44. *Frocht M.* Recent advances in photoelasticity. „Trans. ASME“, APM, 1931, v. 53, Nr. 15, Sept.-Dec.-p. 135—149. и дискуссии стр. 140—153. Новые достижения в оптическом методе изучения напряжений.
45. *Goetz A.* A modified optical arrangement for photoelastic measurements (Реф. Мезмера из „Rev. Scient. Instr.“ (Nr. 4) v. 5, 1934, Nr. 2, 84). „Physik Berichte“, 1934, H. 11, Juni S. 836. Видоизмененный оптический прибор для измерения напряжений.
46. *Hennig A.* Polarisations-Optische Spannungsuntersuchungen am gelochten Zugstab und am Nietloch. — „Forschung a. d. Geb. d. Ing. Wes.“ Aug., Bd 4, 1933, Nr. 2, S. 53—63. Библиография. (См. также VDI, Bd 77, 1933, Nr. 18, S. 462). Поляризационно-оптические исследования направлений у растягиваемого стержня и заклепочного отверстия.
47. *Hollister S. C.* Experimental study of stresses at crack in compression member. „Journ. of Concrete Inst.“, v. 5, 1934, Nr. 4, Mar.-Apr., p. 361—365. Экспериментальное изучение напряжений в трещинах в шестах, подверженных сжатию.
48. How stresses are analyzed with polariscopes. „Product Eng“, 1933, v. 4, Nr. 4, p. 145—147. Определение напряжений при помощи поляризатора.
49. *Kettenacker L.* Neue Untersuchungen über ebene Spannungszustände mittels der polarisationsoptischen Methode. „Bauingenieur“, 1932, Bd 13, Nr. 47/48, 18/XI, S. 552—553. Новые исследования плоских напряжений оптическим поляризационным методом. (Обзор экспериментальных работ Мюнхенского технологич. ин-та).
50. *Kuno J.* Properties of Phenolite. The law of photoelastic extinction. „Phil. Mag.“, Ser. 7, v. 12, 1931, p. 503. Свойства фенолита.

51. *Kuno J.* Studies on photoelasticity. „Civ. Eng. Soc. Japan, J.“, v. 19, Nr. 1, Jan. 1933, p. 1—39. (На англ. яз.). Изучение оптического метода. Изучение растяжений в фенолите оптическим методом.

52. *Mc Givern et Supper K. L.* — Complément à la théorie de la photoélasticité. „Génie Civil“, 1933, v. 103, Nr. 21, p. 495—8. К теории оптического метода изучения напряжений.

53. *Mc Givern J. and G. Supper H. L.* A membrane analogy supplementing photoelasticity. „Trans. ASME“, APM 56—9, 1934, Nr. 8 (v. 56), p. 601—605. (См. также J. of Franklin Inst. v. 217, Nr. 4, Apr. 1934, p. 491—504). Резиновая мембрана, служащая для изучения напряжений дополнительно к оптическому методу.

54. *Mc Givern L. G. et Supper H. L.* Les méthodes de la photo-élasticité. „Génie Civil“, v. 104, 1934, Nr. 3, 20/1, p. 67—68. Оптический метод изучения напряжений. (Замечания Фавра об основах оптич. метода по статье, вышедш. в ноябрьск. номере 1933 г.).

55. *Marboux G.* Applications de la photoélasticimétrie à l'étude de des ouvrages en béton. „Revue d'Optique“, 1932, Nr. 12, p. 501—507. Применение оптического метода к изучению бетонных сооружений. — Оптический метод изучения напряжений в непрозрачных материалах. 6 явл.

56. *Marboux G.* La photo-élasticimétrie étendue à l'étude des ouvrages en béton. „Comptes Rend. de l'Ac. d. Sc.“, 1932, v. 194, Nr. 22, 30/V, p. 1896—98. Распространение оптического метода изучения напряжений на бетонные сооружения.

57. The Marboux photo-elasticity mater. „The Engineer“, 1934, 6/VII, v. CLVIII, Nr. 4095, p. 20. Оптический измеритель напряжений Марбу. (Аппарат Марбу для измерения напряжений, применявшийся при постройке моста из армированного бетона через Луару).

58. *Marcotte E.* Photo-élasticimétrie. „Revue Générale des Sciences“. 1933, v. 44, Nr. 3, 15/VI, p. 73 и 85. Измерения при помощи оптического метода. (Библиография).

59. *Marcotte E.* Verification pratique des formules et des calculs de résistance de matériaux. „Arts et Métiers“, 1927, v. 80. Nr. 77, 78, Fevr. et Mar., p. 48—56, 77—84. 43 figs. Проверка на практике формул и расчетов по сопротивлению материалов. (Методы, основанные на теории поляризации и двойного преломления в прозрачных материалах, позволяют сделать точную практическую проверку внутренних напряжений от внешней нагрузки).

60. *Mesmer G.* Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen und Fliesversuche unter konzentriertem Druck. „VDI“, 1930. Bd 74, S. 365. Сравнение оптических исследований напряжений и опытов по изучению текучести при сосредоточенной нагрузке.

61. *Meyer H.* Spannungsoptische Untersuchung ebener Schwingungsvorgänge. (Аннот. из „Helv. Phys. Acta“. 7, 651—652, 1934, Nr. 7). „Phys. Ber.“, 1935. Н. 4, S. 305. Оптический метод изучения напряжений при вибрации.

62. *Mindlin R. D.* A reflection polariscope for photoelastic analysis. (Аннот. из „Rev. Scient. Instr.“ (N. S.) 5, 1934. Nr. 6, 224—228). Phys. Ber., 1934, Н. 19, S. 1575. Поляризатор, основанный на принципе отражения, для исследования оптическим методом.

63. *Motard R.* La photo-élasticimétrie. „Nature“ (Paris), 1934, Nr. 2922, 1/II, p. 100—105. Оптический метод изучения напряжений (Принципы измерений оптич. методом, основные законы. Различные применения).

64. *Neuber H.* Exact Construction of the $(\sigma_1 + \sigma_2)$ — Network from photoelastic observations. „Trans. of the ASME“, vol. 56, Nr. 10—1934, p. 733—737. Графическое построение сетки суммы значений $(\sigma_1 + \sigma_2)$, при оптическом изучении напряжений.

65. *Neuber H.* New method of deriving stresses graphically from photoelastic observations. „Proceed. of the Royal Soc.“, 1933, Series A, vol. 141, Nr. A844, Aug. 1, p. 314—24. Новый метод графического изображения напряжений, вытекающий из оптических наблюдений.

66. *Nisida M.* Physical properties of the photoelastic material. „Phenolite“ — Inst. Phys. a. Chem. Research, Tokyo, Sci. Papers, Nr. 467, p. 269—283, 1933. (Аннот. см. „Sc. Absr.“ 1934. Nr. 434, p. 110). Физические свойства фото-эластического материала „фенолит“.

67. *Nisida M.* Some properties of phenolite used in photoelastic study. „Inst. Phys. & Chem. Research Bull.“, v. 12, Nr. 1, 1933, p. 1—12. Свойства фенолита, употребляемого для оптического метода. (На японск. яз.).

68. *Pellet D. L.* Designing and applying photoelastic equipment. „Machine Design“, 1932, v. 4, Nr. 7, July, p. 27—28. Конструирование и применение оборудования для оптического метода изучения напряжений. Расположение поляризационных приборов и работа с ними.
69. *Peterson and Wahl.* Fatigue of shafts at fitted members, with a related photoelastic analysis. „Journal of Appl. Mechanics“. 1935, vol. 2, Nr. 2, p. A69—A74. Усталость валов с насаженными деталями и данные по определению напряжений в них при помощи оптического метода. Дискуссия. Ост. статью см. „Journ. Appl. Mech.“, 1935, Nr. 1.
70. Photoelastic study by moving pictures. „Trans. ASME, APM“, 1932, v. 54, par. 9, p. 83. Оптический метод изучения напряжений на движущихся изображениях.
71. Le photo-élasticimètre Marboux et son emploi pour l'étude des ouvrages en béton. „Génie Civil“, 1934, v. 109, Nr. 25, 23/VI, p. 566—567. Прибор Марбу и его употребление для исследования бетонных сооружений.
72. *Preston F. W.* A new polariscope. „The glass industry“, 1934, v. 15, Nr. 5, June, p. 85—86. Новый поляризатор. Описание конструкции и схемы.
73. *Rajnfeld S.* Studie di alcuni problemi elastici (a due dimensioni). „Energia elettrica“, 1933, v. 10, Nr. 9, p. 724—745. Теория и оптич. метод изучения напряжений в упругих плитах.
74. *Smith E. W.* Studying structural stresses with the aid of the polariscope. „The Wolding Engineer“, 1934, vol. 19, April, Nr. 4, p. 17—19. Изучение структурных напряжений посредством полярископа.
75. *Smith.* Применение поляризованного света для исследования сварных соединений. Amer. Weld „Soc. Journal“ vol. XIV, Nr. 2 (Указ. в „Техн. возд. флота“, 1935, № 6, стр. 126).
76. *Solakian A. G.* Kinematography in photoelasticity „Trans. ASME, APM“, 1932, v. 54, par. 9, p. 93. Кинематография при оптическом методе изучения напряжений.
77. *Solakian, A. G.* New developments in photoelasticity. A purely optical method of stress analysis. „Journ. of the Optic Soc-ty of America“, 1932, v. 22, Nr. 5, May, p. 293. Новые достижения в оптическом методе изучения напряжений. Чисто оптический метод анализа напряжений.
78. *Solakian A. G. and Karelitz G. B.* Photoelastic study of shearing stresses in keys and keyways. „Trans. ASME, APM“, 1932, v. 54, p. 10, p. 97. Оптический метод изучения напряжений на срез в шпонках и шпоночных канавках.
79. *Solakian A. G.* Scope of photo-elastic analysis „Product Eng“. 1933, v. 4, Nr. 12, p. 45—52. Объекты для оптического метода изуч. напряжений.
80. Stresses determination with celluloid. „Trans. ASME, APM“, 1932, v. 54, par. 8, p. 77. Определение напряжений при помощи целлюлоида.
81. *Suquet.* Recherches photo-élasticimétriques sur les dalles nervurées. „Annales des Ponts et Chaussées“ (Partie Technique) 1934, v. 104, Nr. 4, p. 34—49. Исследование оптическим методом ребристых плит.
82. *Takabeya F. and Shingo F.* Application of photo-elastic effect to measurement of pressure. „Hokaido imperial Un-ty Fac. Eng. Mem.“ 1932. v. 3, Nr. 1, Mar. p. 1—12. Применение оптического эффекта к измерению давления.
83. *Tank, Favre u. Jenny Doerst.* Aus dem Laboratorium für photoelastische Untersuchungen an der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich. „Bautechnik“. 1930. B. 8, Nr. 48, Nov. 7, S. 719—723. Из лабораторных исследований по оптическому методу изучения напряжений.
84. *Tank F.* Die Tätigkeit des photoelastischen Laboratoriums der Eidgen. Techn. Hochschule 1927—1933. „Schweizer. Bauzeitung“ 1934, Bd 104, Nr. 5, S. 45—48. Деятельность лаборатории оптич. метода в высшей технической школе за время с 1927 по 1933 г. (Обзор изысканий в области оптич. метода, проделанных в Цюрихском технолог. ин-те в период с 1927 по 1933 г. Библиография).
85. *Thum und Wunderlich.* Die Anwendung von Kunststoffen zur polarisationsoptischen Untersuchung von Spannungszuständen in Konstruktionsteilen. „Kunststoffe“, 1934, Bd 24. Nr. 7, S. 161—163. Применение искусственных материалов для изучения оптич. методом поляризации напряжений в частях конструкции. (Применение в опытах оптич. метода бакелита и других фенолитных материалов, употр. в США и Японии; результаты опытов автора с германскими материалами).

86. *Thum und Wunderlich*. Die polarisations-optische Untersuchung des spannungsverlaufes in Konstruktionselementen. „ATM“, 1934, L. 38, v. 132—10; T. 99—101. Изучение распределения напряжений элементов конструкций оптич. методом поляризации.

87. *Timby E.* Photo-elasticity-apparatus embodies novel features. „Eng. News. Rec.“ 1934, v. 113, Nr. 21, p. 647. Новые виды аппаратов для оптического метода.

88. *Tuzi L.* On the high-speed kinematography of photo-elasticity. Анн. в „Physik. Berichte“ 1934, H. 6, S. 378. О высокоскоростной кинематографии при оптическом методе изучения напряжений.

89. *Tuzi L.* Optical stress analysis. „Engineering“, 1931, v. 131, Nr. 3393, 3396, p. 116—117, Fol. 13, p. 193—196. Оптический анализ напряжений.

90. *Tuzi and Nisida*. Photoelastic study of stress duo to impact. (Inst. Phys. and Chem. Research Tokyo, Sc. papers 1936, Nr. 566, p. 277 u. 309). „Science Abstracts“, Section A. Physics 1935, vol. 38, Nr. 450, p. 583. Изучения напряжений при динамической нагрузке при помощи оптического метода.

91. *Thibodeau, W. Mc. Pherson*. Arch. Photoelastic properties of soft vulcanized rubber. „Journ. of Research of the Nat. Bureau of Standards“, 1934, vol. 13, Dec. Nr. 6, p. 887—896. Фотоэластические свойства мягкой вулканизированной резины.

92. *Wahl A. M. and Beeuwkes R.* Stress concentration produced by hole and notches. „Trans. ASME“, 1934, v. 56, Nr. 8, Sec. 1, Aug. p. 617—623 (discussion 623—625) (APM. 56—11), см. также Product Eng. 1934, v. 5, Nr. 3, p. 92—94. Концентрация напряжений, образующих отверстиями и выемками. (Изуч. напр. опт. методом).

93. *Weber K.* Ein neues Verfahren zur Bestimmung von Spannungszuständen mittels polarisierten Lichtes. „Die Messtechnik“, 1934, H. 2, S. 27—29. Новый способ определения напряжений поляризованным светом.

94. *Weibel E. E.* Studies in photoelastic stress determination. „Trans. ASME“, 1934, Nr. 8, vol. 56, p. 637—658 and discussion 649—658 (APM. 56—15). Исследования оптического метода изучения напряжений. (I. Изучение напряжений под действием крипа на бакелитовых и фенолитовых моделях. II. Концентрация напряжений при растяжении и изгибе. III. Изучение напряжений на мыльной пленке (soap film).

95. *Ynasa K., Fukui S. and Onishi T.* Optisches Kriechen beim Photoelastizitätsexperiment. „Journal of the Soc. Mech. Eng. Japan“, 1933, vol. 36, Nr. 195, p. 447—452.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

A

Adams F. D. 287
 Almy J. E. 246
 Ambronn H. 190, 228, 229, 236, 237, 242, 243,
 244, 247
 Andrade E. N. de C. 233
 Andrews E. S. 543
 Arakawa I. 224, 230, 236, 254, 353

B

Barr A. 570
 Basset A. B. 40
 Beltrami E. 110
 Bickley W. G. 429, 453
 Biot M. 163
 Bjerken P. von 227, 228, 234, 235, 236, 254
 Brewster Sir David 47, 159, 160, 190, 223, 358,
 544
 Browne A. D. 412

C

Cápper P. L. 422, 479
 Carus Wilson C. A. 360, 382, 383, 385, 386,
 528
 Castigliano 543
 Chakko K. C. 230, 235, 286, 332, 341
 Chaplin C. J. 501
 Claye D. 497
 Coker E. G. 56, 152, 183, 216, 217, 230, 235,
 262, 265, 286, 287, 332, 357, 361, 358, 406,
 407, 422, 497, 507, 510, 511, 514, 519, 532,
 546, 566, 572, 574, 575, 577
 Coleman G. P. 407, 532
 Corbino O. 450
 Cornu M. A. 173, 209
 Coulomb C. A. 108

D

Dadswell C. J. 494
 Dalby W. E. 107, 528, 531
 Darwin Sir G. 108

E

Ebner V. von 190
 Ewing Sir J. A. 108, 532

F

Fabry and Perot 209
 Filon L. N. G. 160, 161, 162, 182, 190, 191

Filon L. N. G. 192, 201, 203, 204, 206, 207, 209,
 210, 211, 214, 225, 227, 228, 229, 230, 231,
 232, 233, 234, 243, 254, 307, 326, 329, 352,
 369, 371, 385, 392, 393, 395, 434, 487, 488,
 501, 511, 540, 577, 582
 Fresnel A. 22, 23, 46, 163, 168, 185, 248, 358
 Fukuda T. 421, 451, 518
 Fukuhara T. 395

G

Grashof F. 263, 264

H

Hadfield Sir R. 523
 Haigh B. P. 110
 Hamilton Sir W. 40
 Harris F. C. 161, 203, 209, 210, 211, 225, 229
 Harris J. 522
 Heymans P. 507, 564
 Hill Bruce V. 246
 Hooke Robert 100, 227
 Howland R. C. J. 415, 418

I

Inglis C. E. 315, 475, 515, 517

J

Jamin J. 47
 Jeffery G. B. 149, 247, 265, 415
 Jenkin C. F. 532, 539
 Jessop H. T. 173, 211, 227, 228, 229, 231, 232,
 238, 254, 353

K

Kerr J. 184, 185, 186, 188
 Kimball A. L. 457, 564, 565
 Kirsch G. 416
 Knoll D. 577, 579, 588
 Kraft K. 246, 247
 Kundt A. 192, 245, 246

L

Lamé G. 108, 126, 255, 541
 Leick A. 227, 234, 235, 236, 253, 254
 Leon A. 479, 480
 Levi R. 357, 572, 574
 Lloyd Dr Humphrey 40
 Love A. E. H. 126, 273, 443, 475, 884

- M**
- Macé de Lépinay J. 182, 192
 Mach E. 184, 185, 192, 195, 196, 197, 198, 199, 245
 Mariotte 108
 Maris H. B. 341, 408, 493
 Mathieu E. 436, 437
 Maxwell J. Clerk 126, 173, 223, 230, 237, 244, 245, 246
 Mc Kergow C. M. 497
 Mesnager A. 127, 128, 151, 291, 544
 Metz G. de 246
 Michell J. H. 343, 432, 444, 572
 Mildner R. C. 510
 Mises R. von 111
 Mohr O. 109, 110
 Moigno F. 248, 252
 Moullin E. B. 412
- N**
- Natanson L. 246
 Navier M. 108
 Neuber H. 583, 586
 Neumann F. E. 163, 166, 167, 168, 170, 171, 173, 174, 182, 184, 185, 187, 189, 223, 228, 248, 358
 Newton Sir Isaac 216
- O**
- Okuda K. 226
- P**
- Pearson K. 334, 338
 Peirce F. T. 233
 Perry J. W. 204, 208, 209
 Pockels F. 160, 182, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 201, 248, 251, 253
 Porter A. W. 486
 Price A. T. 532
- Q**
- Quincke G. 228
- R**
- Ramspeck A. 197, 203, 204, 229
 Rankine W. J. M. 108
 Rayleigh Lord 40
 Reeb O. 197, 203
 Reiger R. 236, 246
 Rolla L. 450
- Rosenhain W. 108
 Rossi P. 227, 228, 230, 231, 234, 236, 244, 254
 Rowland L. 568
- S**
- Saint-Venant Barré de 108, 179, 306, 320, 368, 369, 397, 399, 400, 403, 488, 532
 Satake Y. 419, 482
 Savur S. R. 181, 182, 190, 201, 211, 224, 228, 506
 Schneider A. 579
 Schwedoff Th. 246
 Scoble W. A. 152, 450
 Snell W. 34
 Soleil H. 248, 252, 253
 Stokes Sir George 51, 55, 383, 384, 385, 394, 395
 Straubel R. 173
 Suyehiro K. 425, 426
- T**
- Taylor G. I. 247
 Thompson S. P. 56
 Timpe A. 321
 Todhunter and Pearson 334, 532
 Trabacchi G. C. 450
 Tresca H. 108
 Tuzi Z. 404
 Twyman F. 204, 208, 209
- U**
- Umlauf K. 246
- V**
- Volterra V. 273, 433
- W**
- Wächtler M. 228, 229, 230
 Watson G. N. 488
 Weingarten G. 433, 442,
 Wertheim G. 179, 180, 181, 182, 183, 184, 200, 216, 251
 Whitworth Sir Joseph 576
 Wiener O. 237, 244, 247
 Winkler E. 334
 Wolf K. 405
- Z**
- Zakrzewski K. 246, 247

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

- Английские стандартные испытания на растяжение 492
- Арагонит 28
- Арки
 - стеклянные модели 544
 - железобетонные 544
 - сквозные 545, распределение напряжений в них 546
 - двухшарнирные 545

Б

- Балки
 - изгиб стеклянных моделей 160
 - отклонение поляризованных лучей при изгибе 205
 - при чистом изгибе 358
 - с отверстиями 359, 404
 - короткие 360, 395
 - в форме плоских рессор 360, 361
 - изгиб прямых балок 361
 - любого сечения, при чистом изгибе 364
 - нейтральная ось 365
 - нейтральная плоскость 365
 - чистый изгиб и изгиб Сен-Венана 368
 - линии главных средних напряжений, изоклинические и изохроматические линии 368
 - оптическая проверка чистого изгиба и изгиба с касательными напряжениями 369
 - бесконечно длинные прямые, под действием двух равных и одинаково направленных сил 370, 374
 - местные напряжения от сосредоточенного груза 373
 - опертые по концам и нагруженные в центре 360, 377
 - оптические исследования Карус Вильсона 382
 - теория Стокса для опытов Карус Вильсона 383
 - изоклинические линии при сосредоточенной силе 385
 - изгиб клина 397
 - касательные напряжения, вызванные двумя противоположно направленными силами 400
 - с резкими изменениями внешнего контура 405
 - влияние узких надрезов и вырезов 407
- Бакелит 217, 223, 224, 230
- Бар (единица), определение 93
- Биполярные координаты 138

- Болты и гайки, распределение напряжений в них 568, 569
- Болты и стержни с проушинами, линии главных напряжений 4.6
- распределение напряжений по главным поперечным сечениям 456
- Брюстер (единица), определение 162

В

- Валы составные, см. Составные валы
- Вдавливания от острия винта
 - влияние на распределение напряжений в растянутых образцах 523
 - роликовые зажимы для уменьшения этого влияния 525
- Волновая поверхность 525
- Волны
 - продольные и поперечные 9
 - света 9
 - длина 9, 10
 - период 9, 10
 - частота 9, 10
 - гармонические 11
 - фаза волны 11
 - амплитуда 11
- Вращение, его составляющие при деформации 92
- Вязкая жидкость в движении
 - двойное лучепреломление в ней 244
 - между вращающимися цилиндрами 244

Г

- Гайки, см. Болты и гайки
- Гука, закон 110

Д

- Двойное лучепреломление 37
 - в одноосном кристалле 38
 - в стеклянной пластинке при деформации 159
 - в стеклянной пластинке при продольном колебании 163
 - теория искусственного лучепреломления, Неймана 163
 - влияние химического состава на двойное лучепреломление 188, 191
 - пластинчатое 237
 - волокнутое 238
 - в коллоидах 243
 - в вязких жидкостях при их движении 244
 - в естественных кристаллах при напряжениях 248

Дерево

- опыт на раскалывание 531
- распределение напряжений в образце с неполным отверстием 533
- с двумя неполными отверстиями 536

Деформация (относительная) 85

- преобразование к новым осям 86
- поверхность деформации 88, 168
- линии главных деформаций 88
- шесть составляющих деформации 88
- выражение составляющих через перемещения 91
- плоская 112
- в функции координат после деформации 164
- конечная 165
- зависимость искусственного лучепреломления от деформации 166, 168
- коэффициенты для этой зависимости 167, 183

Деформация продольная, определение 85, 165**Динамическое подобие**

- принципы 540
- приложение к конструкциям 540

Диск (см. также Каток)

- проблема инверсии 347
- распределение напряжений при сжатии 347

Дисперсия

- метод измерения 192, 195, 197, 204
- при искусственном двойном лучепреломлении 200
- при искусственном двойном лучепреломлении, в различных стеклах 201, 207, в желатине 203, 204, в целлулоиде 203, 204
- местные аномалии при искусственном двойном лучепреломлении 203
- аномальное искусственное двойное лучепреломление, в целлулоиде 204
- при прямом и поперечном оптических коэффициентах напряжения 207

Диэлектрическая постоянная 15, 34

- действительная, в неоднородной среде 237, 239

Ж**Жамена интерферометр 79**

- рефрактор 185

Желатин

- оптический коэффициент напряжения 197, 254
- дисперсия при деформации 203
- законы двойного лучепреломления в желатине 228, 235
- влияние добавки солей 253

З**Зависимости между напряжениями и деформациями 102, 106****Законы искусственного двойного лучепреломления 161, 167, 169, 174, 175, 180, 182, 200, 234, 247****Звенья цепей (см. также Кольца)**

- эллиптические 331
- распределение напряжений 333, 338
- теория распределения напряжений 334
- с полукруглыми концами и прямыми сторонами 339
- с распорками 338

Здания

- дверные проемы 555
- оконные проемы 550, 555
- фундаменты 550
- уширяющиеся фундаменты 554
- несимметричные фундаменты 554
- карнизы 557
- подрезанные каменные массивы 557
- железобетонные детали 560

Зубчатые колеса

- распределение напряжений в них 564
- эвольвентное зацепление 564
- влияние скорости на интенсивность напряжений в зубах 565

И**Изоклинические линии**

- определение 123
- нахождение при помощи оптического метода 212
- влияние изменения напряжений по толщине пластинки 222

Изопахы 157**Изотропические или нейтральные точки**

- определение 123
- нахождение при помощи оптического метода 214
- влияние распределения напряжений по толщине пластинки 219

Изохроматические линии

- определение 123
- нахождение при помощи оптического метода 213
- влияние распределения напряжений по толщине пластинки 221

Инверсия 138, 342**Интенсивность, определение 40**

- отраженных и преломленных лучей 43
- света, отраженного от стопы стеклянных пластинок 54
- света, прошедшего через стопу стеклянных пластинок 55
- после прохождения через кристаллическую пластинку 62

Интерференция 77

- условия для 77
- полосы 78
- влияние неоднородного света на 79
- вызванная решеткой 82

Интерферометр 76

- Жамена 79, 188
- Майкельсона 80, 208
- Фабри и Перо 81, 209

Исландский шпат 29, 58**Испытание материала на растяжение 481**

- влияние уширенных концов 483
- расчетная длина для чистого растяжения 483
- линии главных напряжений при 485

Испытательные машины, условия для них 506
 Исследование напряжений в пластинке
 по изоклиническим и изохроматиче-
 ским линиям 128

К

Камфара 228, 229
 Касательное напряжение 93
 равенство для взаимно-перпендикуляр-
 ных площадок 94
 опыты 511
 влияние высоты образца на распре-
 деление 514
 материал между двумя параллельными
 плоскостями при действии 515
 опыты с балками при действии 518, 519
 Каток цилиндрический (см. также Диск)
 распределение напряжений в нем 350
 оптическое исследование распределе-
 ния напряжений 352
 роликовые захваты, распределение выз-
 ванных ими напряжений 528
 Кварц 29
 Клин
 сосредоточенная сила в вершине 284
 пара сил в вершине 312
 Колебания, направления их в кристалле 21
 Колеса
 распределение напряжений для колеса
 в виде сплошного диска 572;
 в виде диска с отверстиями 573
 типа вагонного колеса 573
 распределение напряжений, вызванное
 посадкой на ось 574 и насадкой
 бандажа 575
 прикрепление бандажей к 575
 Коллиматор 36
 Коллоид, аномалия двойного лучепреломле-
 ния в жидкости 246
 Коллоиды 225
 Кольца (см. также Звенья цепей)
 круговые, при чистом изгибе 276
 полукольцо, при действии срезающих
 сил 320
 разрезанное, при действии стягиваю-
 щих сил 320
 круговой формы при заданных напря-
 жениях по контуру 321
 главный вектор и главный момент для
 326
 экспериментальная проверка напряже-
 ний 328
 напряжения в полном кольце и полу-
 кольце 330
 эллиптические 331
 поправки к напряжениям в круговом
 кольце, вызванные изменением
 материала 448
 Компенсатор
 Бабинэ 68, 161, 186, 196, 217, 544, 545,
 548
 кварцевый, приблизительно ахромати-
 ческая комбинация с целлулои-
 дом 204
 Солейль-Бабинэ 197
 упругий 182, 217

Контактные напряжения
 при соприкосновении по малой пло-
 щадке 301
 оптическое исследование, для пластин-
 ки под распределенной нагруз-
 кой 304
 распределение напряжений в прямо-
 угольных массивах 307
 Контурные условия смешанного типа 356
 Координаты
 криволинейные, применение 130
 криволинейные, преобразование эле-
 ментарного прямоугольника 131
 криволинейные, ортогональные пре-
 образования 132
 конформные преобразования 134, 137,
 138, 140
 полярные 137, решение для перемеще-
 ний 147
 биполярные 138, решение для переме-
 щений 150
 эллиптические 140
 криволинейные, напряжения в 142
 криволинейные, преобразование опе-
 ратора Лапласа к 145
 криволинейные, выражения для пере-
 мещений в 145, 149
 Коэффициент оптический напряжения, см.
 Оптический коэффициент напряжения
 Кривизна
 линий главных напряжений 126
 координатных линий в конформных
 преобразованиях 135
 Крип при нагрузке
 оптический 230, 236
 напряжения 231, 232, 233
 влияние времени на 232
 Кристалл
 распространение света в нем 19
 оптические оси 24, 26
 одноосный 29
 двuosный 28
 искусственное двойное лучепреломле-
 ние в 248
 триклинический 248
 моноклинический 249
 правильный или кубический 250
 ромбический 249
 тетрагональный 249
 Кручение цилиндра из прозрачного мате-
 риала 178
 Ксилолит (см. также Целлулоид) 217, 228,
 229, 233, 234

Л

Лапласа оператор, преобразование для кри-
 волинейных координат 145
 Линии главных напряжений 96, 122
 полученные из изоклин 124, 127
 изменение напряжений вдоль них, по-
 лученное оптическим путем 128,
 129
 Линии главных средних касательных напря-
 жений 125
 Линии равных главных напряжений, получе-

- ние из изохроматических и изопахических линий 158
- Луч
обыкновенный 38
необыкновенный 38
- М**
- Магнитная индукция 13
проницаемость 15
- Магнитный вектор 13
в кристалле 21
- Материал
вполне восстанавливающий свойства 99
следующий закону Гука 100
вполне упругий 100
обладающий одно- и двухконстантной изотропией 102
- Менаже теорема относительно линий главных напряжений 125
- Многосвязные пластинки 431
общая теория 431
Митчелля теорема 432
совместимые траектории и сократимые замкнутые пути 436, 437
циклические функции 437
ациклические функции 440
циклические функции перемещений 442
упругие постоянные в решении для 443
решения для элементов из другого материала 444
- Модели, условия прочности для них 542
- Модуль
сдвига 102
объемный 103
пластинки 104
Юнга 102
- Мосты
стеклянные модели 544
целлулоидные модели 546
- Н**
- Надрезы (см. также Образцы для растяжения, плоские с вырезами)
в балках при изгибе 407
в деревянных образцах на раскалывание 533, 536
- Напряжение
определение 92, 93
единица измерения 93
касательное 93
шесть составляющих напряжения в точке 95
преобразование к новым осям 95, 131
поверхность напряжения 96, 174
линии главных нормальных напряжений 96
линии главных средних напряжений 122
обобщенное плоское напряженное состояние 113
среднее 113; преобразование для новых направлений 121
функция напряжений 116
плоское напряженное состояние 118;
решение для него 118
в пластинке, определение по изоклиническим и изохроматическим линиям 128
линии равных главных напряжений 157
законы искусственного двойного лучепреломления при напряжениях 173
оптический эффект изменения напряжений по толщине пластинки 218
начальное 223
остаточное 226
- Напряжение магнитного поля, см. Магнитный вектор
- Напряжение электрического поля, см. Электрический вектор
- Напряжения
в криволинейных координатах 142
в полярных координатах 144
в эллиптических координатах 462
- Напряжений распределение
исследование 127, 212
- Напряжений функция
решение порядка n 314
порядка нуль и единица 316
ограничения, вызванные условиями для перемещений 460
- Начальные напряжения 223
причины 224
- Нейтральная ось 214
- Николя призма 56
- Нитроцеллюлоза, см. Целлулоид и Ксилонит
- О**
- Образец растягиваемый, клинообразной формы 300
- Образцы для растяжения, круглые, теоретическое исследование 487
экспериментальное исследование влияния угольцевых выступов 486
влияние кольцевых выступов 528
- Образцы для растяжения, плоские с вырезами полукруглой формы 478, 480, 481
металлические 482
с вырезами прямоугольной формы 494, 509
с вырезами типа Шарпи 509
V-образной формы 507, 503
- Обточка
токарный станок для наблюдений при помощи оптического метода 293
распределение напряжений при 294
- Оптические оси 24, 27
- Оптический коэффициент напряжения относительный 162, числовые значения 182, 189, 190, 191, 254
прямой и поперечный 175, 207, числовые значения 186, 188, 189, методы определения 186, 197, 205, 209, 210
влияние химического состава 189
метод определения при помощи призмы 192, видоизменение Маха для этого метода 195, 197, другие видоизменения 197
целлулоида 197

- желатина 197
 Тваймана метод для определения 208
 влияние температуры 209
 влияние времени 210
- Опыты с искусственным двойным лучепре-
 ломлением
 Амбронна 228
 Брюстера 159, 160
 Вертгейма 179, 181
 Вехтлера 228
 Керра 184
 Кокера и Чакко 230
 Маха 184, 197
 Неймана 171
 Покельса 186, 187
 Риба и Рамспика 203
 Росси 227, 230
 Савура 229
 Тваймана и Перри 209
 Файлона 192, 204, 207
 Френеля 163
 Харриса 209, 210
- Отверстия круговой формы 413
 распределение напряжений около 414
 влияние прямого контура на распре-
 деление напряжений около них
 417
 большого диаметра в растянутом эле-
 менте 417
 в стальном образце 419
 группа отверстий 422
 с болтами или заклепками 425, 426
 с системой неуравновешенных сил 429
 распределение напряжений, вызван-
 ное присутствием болта или за-
 клепки 450
- Отверстия эллиптической формы 457
 малого размера в широкой пластинке
 457
 при всестороннем растяжении 464
 влияние конечной ширины стержня 469
 при сдвиге 471
 при растяжении в любом направле-
 нии 473
- Отражение
 от плоской поверхности 32, законы 33
 полное внутреннее 34, 35
- Отставание
 абсолютное 61, 74
 относительное 61
 относительное, пропорциональность
 напряжению 161
- П
- Перемещение
 точки деформированного тела 91
 составляющие деформации в функции
 от перемещений 91
 среднее 113
 решения для перемещений, в прямо-
 угольных координатах 117
 решения для перемещений, в криво-
 линейных координатах 145, 149
 решения для перемещений, в поляр-
 ных координатах 147
 решения для перемещений, в биполяр-
 ных координатах 150
 функция (перемещений) 118
- Пластинка
 изотропного материала, ее влияние 49
 кристалла 60
 в пол-волны 62, 185
 множители уменьшения интенсивности
 после прохождения через пла-
 стинку 63
 в четверть волны 69
 кристаллическая в полярископе кру-
 говой поляризации 71
 под действием напряжений в ее пло-
 скости 113
 исследование напряжений при помощи
 изоклинических и изохромати-
 ческих линий 128
 исследование напряжений при помощи
 поперечного экстенсометра 151
 изменение толщины, вызванное напря-
 жениями 151
 при действии напряжений, изменяю-
 щихся по толщине 219
- Поверхность, разделяющая две среды
 условия на ней для электромагнитного
 вектора 42
- Пойнтинга вектор 19
- Поляризатор
 через преломление 54
 через отражение 54
 и анализатор 60
- Поляризация 11
 плоская 11, 12, в кристалле 24
 плоская, перпендикулярно к световому
 вектору 12
 направление в кристалле 21, 24, 25, 28
 стопой пластинок 48, 50
 призмой Николя 56
 стеклянной призмой со слоем исланд-
 ского шпата 58
 круговая 70
 эллиптическая 71
- Полярископ
 для плоской поляризации 59, 216
 для круговой поляризации 69, 215,
 с кристаллической пластинкой 71
 с зеркалами 73
 для больших моделей 546
- Полярные координаты 137
 формулы для напряжений 144
 формулы для перемещений 147
- Последствие, оптическое 226, 236
- Предел
 текучести 107
 упругости 107
- Преломление
 в изотропной среде 33
 закон Снеллиуса 34
 показатель 34, обыкновенный и не-
 обыкновенный 38
 в призме 35
 в кристаллической среде 37, для нор-
 мали к волне и луча 39
 коническое 40, искусственное кониче-
 ское 177
- Преобразование
 ортогональные 132

- конформные 134
с комплексной переменной 136
путем инверсии 138
- Призма
для полного внутреннего отражения 34, 35
Николя 56
стеклянная со шпагатом 58
- Принцип Сен-Венана 179, 306, 320
- Проектирование
деталей конструкций и машин 560
стержней с проушинами 561
рычагов 562
- Пружинные весы 217, 544, 547, 548
- Р**
- Растяжение 93
в стеклянных образцах 180, 181
- Расширение, кубическое 90
- Резина 227, 235
- Режущие инструменты (см. также Фрезы, Стrojка, Обточка и Клиn)
распределение напряжений в них 285
для строжки 289, 291
линии главных напряжений в них 289, 291
упругие деформации, вызванные резами 292
отрывающее действие 292
искажение материала, вызванное резами 293
непрерывные наблюдения оптическим методом 293
экспериментальный станок для наблюдений оптическим методом 293
распределение напряжений в обрабатываемом диске 294
пластическая деформация, вызванная резов 295
две стружки, произведенные посредством 295
зона пластических деформаций в материале, вызванная резов 296
- Релаксация, время ее 231, 237
- Решетка
дифракционная 82
отражательная 84
- С**
- Сварные швы
распределение напряжений в них 570
в притык с накладкой 570
в нахлестку 572
- Свет
природа его 9
волны 9
вектор 9
лучи 11, 19, в кристалле 29
плоско-поляризованный 11, прохождение через кристаллическую пластинку 60
монохроматический или однородный 12
белый 12, естественный 21
скорость 15
анализ при помощи призмы 35
прохождение через одиночную пластинку 48, 49
поляризованный по кругу 70, 215
- Сдвиг
определение 86
эквивалентность двум продольным деформациям 89
- Селитра 28
- Сжатие 93
образцы 498
центрировка образцов 505
машины для сжатия 499, 506, 545
теоретическое исследование для круговых цилиндров 501
- Скорость
луча 30
распространения волн 15, в кристалле 20, 25, в деформированном теле 167, 169
- Слой, упругий
передача через него сосредоточенных напряжений 375
- Смещения (дислокации)
порядка единицы 317
первого порядка 319, 320
общая теория многосвязных пластинок 431
пластинка при чистом смещении 433
- Соединения ласточкиным хвостом
распределение напряжений в них 520
расположенные радиально 522
- Сосредоточенная пара сил внутри бесконечной пластинки
теория 309
экспериментальная проверка 311
- Сосредоточенная сила внутри бесконечной пластинки 281
- Составные валы
распределение напряжений 311, 313
для коробки скоростей 311
- Сосуды для сжатых газов
влияние днищ 262
теория распределения напряжений по Грасгофу 263
экспериментальное определение напряжений 264
- Спектр 12
цвета 12
метод получения 36, 37
- Спектрометр 36, 192
- Статически-неопределимые фермы, см. Фермы
- Стекло
искусственное двойное лучепреломление 159, 163, 179, 182, 184, 188, 191, 227, 235, 236
влияние состава 188, 192
дисперсия при деформации 192, 200, 207
влияние температуры 210
влияние времени 211
аналогия с коллоидом 225
- Стrojка
распределение напряжений в строгальных резах 289
станок для наблюдений оптическим методом при строжке 291
резец в работе 291

повреждение материала при строжке 292
 Суда
 изменение сечений балок 406, 407
 швы расширения 407

Т

Температура, влияние на постоянные при искусственном двойном лучепреломлении 209
 Теория искусственного двойного лучепреломления
 Амбронна-Винера 237
 Максвелла 173
 Неймана 163
 Покельса 248
 Теории прочности 108
 Токи
 магнитный 13
 электрический 13
 Трещины
 с концами круглого или эллиптического очертания 475
 Туннели кругового сечения 414

У

Угол поляризации 47
 Ударные испытания
 распределение напряжений у надрезов в растянутых элементах 507, 508
 английский стандарт 509, распределение напряжений в надрезанных образцах 510
 Упругие постоянные
 Ламэ 102
 при плоском напряженном состоянии 103
 соотношение между модулями и 104
 Уравнения
 равновесия для напряжений внутри тела, в теории упругости 97
 для напряжений на поверхности 98
 связывающие деформацию и скорости распространения волн 167, 169
 для вязкой и упругой среды 231
 для функции напряжений 255

Ф

Фаза 1
 изменение при отражении и преломлении 46
 химическая 225
 Фермы
 статически-неопределимые 543
 мостовые 545, 546
 Фланцы
 тоннельной облицовки 565
 распределение напряжений в них 567
 Фрезы 296
 действие их 297
 распределение напряжений, вызванное ими 300
 фрезерный станок для наблюдений оптическим методом 298

Фронт волны 10
 в кристалле 20, 24
 параллельный оптической оси 31
 Функция напряжений Эри 116

Х

Химический состав стекол
 влияние на искусственное двойное лучепреломление 188, 191
 влияние на дисперсию в различных стеклах 201

Ц

Царапины и зазубрины 523
 Цвета
 чистые и смешанные 12
 кристаллических пластинок 65
 порядок 67
 при прохождении через напряженную пластинку 159, 213, 215, 216
 ньютонových колес 171
 Целлоидин 243
 Целлулоид (см. также Ксилонит)
 восстановление после разгрузки 234
 законы оптических явлений при нагрузке 227, 228, 230
 крип деформаций 232
 оптическая дисперсия при нагрузке 204
 оптические коэффициенты напряжения 197
 оптические эффекты при перенапряжении 228
 оптический крип 230
 применение в моделях 217
 Цементные образцы
 распределение напряжений 495
 американский стандарт 495
 английский стандарт 496
 канадский стандарт 496
 французский стандарт 496
 Цилиндры
 пустотелые, под внутренним давлением 258
 с эксцентрично расположенными контурами 264
 распределение напряжений, вызванное дефектами центровки 276
 с внешним контуром квадратной формы 276, 277

Э

Эквивалентный путь 75
 Экстенсометр
 поперечный 151, поправки к его показаниям 156
 поперечный, самозаписывающий прибор к нему 154, 155
 Электрический вектор 13
 перпендикулярный магнитному вектору 17, 22
 в кристалле 21
 Электрическое смещение 13
 Электромагнитные законы 13

- | | |
|--|-------------------------------------|
| вихревые соотношения 13 | Эллипсоид Френеля 23, 168, 175, 248 |
| волны в изотропной среде 15, в кри-
сталле 19 | его круговые сечения 24, 168, 176 |
| единицы 16 | Эллиптические координаты 140 |
| уравнения 13, 15 | Энергия |
| энергия 18 | электромагнитная 18 |
| | упругой деформации 98, 100 |
-

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.
6

Введение

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

1. 01.	Природа света	9
1. 02.	Период, частота, длина волны	9
1. 03.	Фронт волны и луч	10
1. 04.	Гармонические волны, Фаза и амплитуда	11
1. 05.	Поляризация	11
1. 06.	Различные виды света	12
1. 07.	Электромагнитные уравнения	13
1. 08.	Распространение электромагнитной волны в изотропной среде, свободной от электрического заряда	15
1. 09.	Световые лучи	17
1. 10.	Распространение электромагнитной волны в кристалле	19
1. 11.	Направления колебания и поляризации	21
1. 12.	Оптические оси	24
1. 13.	Волновая поверхность	25
1. 14.	Лучи в кристалле	29
1. 15.	Отражение и преломление на поверхности раздела	32
1. 16.	Две изотропные среды	33
1. 17.	Преломление в призме	35
1. 18.	Спектрометр	36
1. 19.	Преломление при переходе из изотропной в кристаллическую среду	37
1. 20.	Коническая рефракция	40
1. 21.	Интенсивность света	40
1. 22.	Условия, которым должны удовлетворять электромагнитные векторы на границе двух сред	42
1. 23.	Интенсивность отраженных и преломленных лучей	43
1. 24.	Изменение фазы при отражении и преломлении	46
1. 25.	Угол поляризации	47
1. 26.	Поляризация стеклянной стопой	48
1. 27.	Действие одной пластинки	49
1. 28.	Действие нескольких пластинок	50
1. 29.	Стеклянная стопа, как поляризатор в проходящем свете	54
1. 30.	Призма Николя	56
1. 31.	Стеклянная призма с прокладкой из исландского шпата	58
1. 32.	Плоский полярископ	59
1. 33.	Прохождение через кристаллическую пластинку. Нормальное падение	60
1. 34.	Вычисление множителей уменьшения интенсивности	63
1. 35.	Цвета кристаллических пластинок	65
1. 36.	Компенсатор Бабинэ	68
1. 37.	Пластинка в четверть волны и круговой полярископ	69
1. 38.	Введение кристаллической пластинки в круговой полярископ	71
1. 39.	Расчет стеклянных плоских полярископов	73
1. 40.	Абсолютное отставание	74
1. 41.	Интерферометры	76
1. 42.	Интерференция двух изображений одного и того же точечного источника	77
1. 43.	Явление при применении неоднородного света	79
1. 44.	Интерферометр Жамена	79
1. 45.	Интерферометр Майкельсона	80
1. 46.	Интерферометр Фабри и Перо	81
1. 47.	Интерференция, производимая дифракционными решетками	82

Глава II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

§ 2. 01.	Деформации	85
§ 2. 02.	Деформации, отнесенные к каким-либо осям	86
§ 2. 03.	Поверхность деформации; линии главных деформаций	88
§ 2. 04.	Эквивалентность сдвига двум продольным деформациям	89
§ 2. 05.	Кубическое расширение	90
§ 2. 06.	Перемещения. Выражение составляющих деформации через перемещения	91
§ 2. 07.	Напряжения	92
§ 2. 08.	Равенство касательных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам	94
§ 2. 09.	Шесть составляющих напряжения в точке	95
§ 2. 10.	Поверхность напряжения; траектории главных нормальных напряжений	96
§ 2. 11.	Уравнения равновесия и условия на поверхности	97
§ 2. 12.	Работа при деформации тела. Потенциальная энергия деформации	98
§ 2. 13.	Выражение потенциальной энергии для материала, следующего закону Гука	100
§ 2. 14.	Зависимости между напряжениями и деформациями в изотропном совершенно упругом материале	102
§ 2. 15.	Равномерное растяжение или сжатие стержня; модуль Юнга и коэффициент Пуассона	102
§ 2. 16.	Гидростатическое сжатие; объемный модуль	103
§ 1. 17.	Растяжение пластинки. Упругие постоянные при плоском напряженном состоянии	103
§ 2. 18.	Соотношения между модулями и постоянными упругости	104
§ 2. 19.	Диаграммы растяжения	106
§ 2. 20.	Теории прочности	108
§ 2. 21.	Плоская задача теории упругости	112
§ 2. 22.	Плоская деформация	112
§ 2. 23.	Обобщенное плоское напряженное состояние	113
§ 2. 24.	Функция напряжений и ее дифференциальное уравнение	115
§ 2. 25.	Выражения для перемещений через функцию напряжений в прямоугольных координатах	117
§ 2. 26.	Точное решение, удовлетворяющее условию $zz = 0$	118
§ 2. 27.	Напряжения по наклонным площадкам в двух измерениях	121
§ 2. 28.	Линии главных средних напряжений. Изоклинические, изохроматические линии и другие кривые	122
§ 2. 29.	Теорема Менаже об изоклинических линиях	125
§ 2. 30.	Полное исследование напряжений в пластинке, с применением изоклинических и изохроматических линий	128
§ 2. 31.	Случай, когда одна из линий главных нормальных напряжений совпадает с изоклиной	129
§ 2. 32.	Применение криволинейных координат	130
§ 2. 33.	Преобразование элементарного прямоугольника	131
§ 2. 34.	Ортогональные преобразования	132
§ 2. 35.	Конформные преобразования	134
§ 2. 36.	Преобразования типа $x + iy = f(\xi + i\eta)$	136
§ 2. 37.	Примеры конформных преобразований. Полярные координаты	137
§ 2. 38.	Примеры конформного преобразования. Инверсия	138
§ 2. 39.	Примеры конформного преобразования. Биполярные координаты	138
§ 2. 40.	Примеры конформного преобразования. Эллиптические координаты	140
§ 2. 41.	Выражения для напряжений в криволинейных координатах	142
§ 2. 42.	Напряжения в полярных координатах	144
§ 2. 43.	Преобразование оператора Лапласа к криволинейным координатам	145
§ 2. 44.	Выражения для перемещений в криволинейных координатах	145
§ 2. 45.	Перемещения в полярных координатах	147
§ 2. 46.	Другой вид формул для перемещений	149
§ 2. 47.	Поперечный экстенсометр	151
§ 2. 48.	Способ измерений и поправок	156
§ 2. 49.	Способ графического получения линий главных напряжений	157

Глава III

ТЕОРИЯ ИСКУССТВЕННОГО ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ

§ 3. 01.	Опыты Брюстера	159
§ 3. 02.	Опыт с чистым изгибом	160
§ 3. 03.	Оптический коэффициент напряжения	162

3. 04.	Опыты Френеля	163
3. 05.	Теория Нейманна	163
3. 06.	Обобщенное определение составляющих деформации	164
3. 07.	Оптические уравнения деформации Нейманна	166
3. 08.	Точные оптические уравнения деформаций	168
3. 09.	Опыты Нейманна	171
3. 10.	Максвелл и законы для оптических явлений в зависимости от напряжений и деформацией	173
3. 11.	Законы оптических явлений, связанных одновременно с напряжением и деформацией	175
3. 12.	Случай искусственной конической рефракции	177
3. 13.	Исследования Вертгейма	179
3. 14.	Общие выводы Вертгейма	180
3. 15.	Измерение Вертгеймом оптических постоянных напряжения и деформации для различных материалов	182
3. 16.	Определения Кэрра и Пожельса прямого и поперечного оптического коэффициента напряженности	184
3. 17.	Влияние химического состава на оптические постоянные. Результаты Пожельса для свинцовых стекол	188
3. 18.	Влияние изменения процентного содержания других составных частей	191
3. 19.	Определение методом призмы	192
3. 20.	Способ призмы Маха	195
3. 21.	Способ Маха для определения C_1 и C_2	197
3. 22.	Дисперсия при искусственном двойном лучепреломлении	200
3. 23.	Определение C_1 и C_2 способом „эквивалентной призмы“	204
3. 24.	Дисперсия в прямом и поперечном оптическом коэффициенте напряжения	207
3. 25.	Определение оптических коэффициентов напряжения способом Тваймана	208
3. 26.	Влияние температуры на оптические коэффициенты напряжения	209
3. 27.	Влияние времени на оптические коэффициенты напряжения	210
3. 28.	Неравномерное распределение напряжений в пластинке из прозрачного материала. Изохронические линии	212
3. 29.	Изохроматические линии	213
3. 30.	Компенсационный метод Кокера для определения разности главных напряжений в любой точке	216
3. 31.	Изменение напряжения по толщине	218
3. 32.	Начальное напряжение. Его влияние на искусственное двойное лучепреломление	223
3. 33.	Причины, вызывающие начальное напряжение	224
3. 34.	Остаточное напряжение. Оптическое последствие при разгрузке	226
3. 35.	Оптический крип (медленное изменение) в целлулоиде или ксилоните	230
3. 36.	Закон, связывающий двойное лучепреломление с напряжением и деформацией в ксилоните	234
3. 37.	Оптический крип в других веществах	236
3. 38.	Теория двойного лучепреломления Амбронна-Винера	237
3. 39.	Двойное лучепреломление в вязких жидкостях	244
3. 40.	Искусственное двойное лучепреломление в естественных кристаллах	248
3. 41.	Различные численные результаты	253

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ И КРУГОВЫМ КОНТУРАМ

4. 01.	Решение уравнения $\nabla^2 \chi = 0$	255
4. 02.	Симметричные решения	257
4. 03.	Толстостенные круговые цилиндры под действием внутреннего давления	258
4. 04.	Исследования напряжений в толстостенных пустотелых цилиндрах оптическим методом	260
4. 05.	Цилиндрические сосуды; влияние днищ	262
4. 06.	Задача определения напряжений в эксцентричном цилиндре	264
4. 07.	Вычисление напряжений в эксцентрическом цилиндре	267
4. 08.	Напряжения на внутренней поверхности	271
4. 09.	Напряжения на внешней поверхности	272
4. 10.	Точка с наибольшим напряжением	273
4. 11.	Увеличение напряжений, вызванное небольшими ошибками в центрировании контуров	276
4. 12.	Круговое кольцо при чистом изгибе	276
4. 13.	Экспериментальная проверка для кругового кольца при чистом изгибе	278

§ 4. 14.	Сосредоточенная сила в точке внутри бесконечной пластинки	281
§ 4. 15.	Сила, приложенная в вершине клина	284
§ 4. 16.	Распределение напряжений в резце	286
§ 4. 17.	Напряжения в материале под действием резца	290
§ 4. 18.	Непрерывные наблюдения с помощью оптического метода над действием (работой) режущих инструментов	293
§ 4. 19.	Фрезы	296
§ 4. 20.	Действие фрез	297
§ 4. 21.	Растянутый стержень переменного сечения	300
§ 4. 22.	Контактные напряжения при соприкосновении по малой площадке	301
§ 4. 23.	Исследование с помощью оптического метода пластинки, находящейся под действием распределенной нагрузки	304
§ 4. 24.	Распределение напряжений в прямоугольных массивах, опирающихся нижней стороной на фундамент, под действием сил, приложенных к части верхней стороны	307
§ 4. 25.	Пара сил, приложенная в бесконечной пластинке	309
§ 4. 26.	Пара сил, приложенная к вершине клина	312
§ 4. 27.	Решения порядка n в полярных координатах	314
§ 4. 28.	Решения порядка нуля и единица	316
§ 4. 29.	Дислокации порядка единица	317
§ 4. 30.	Полукольцо при действии срезающих сил по концам и разрезанное кольцо под действием концевых растягивающих сил	320
§ 4. 31.	Равновесие сплошного кругового кольца при заданных напряжениях на контуре	321
§ 4. 32.	Главный вектор и главный момент по поперечному сечению кругового кольца	326
§ 4. 33.	Экспериментальная проверка напряжений в круговом кольце: сравнение этих данных с решением для двух полуколец	328
§ 4. 34.	Эллиптические звенья	331
§ 4. 35.	Преобразование путем инверсии	342
§ 4. 36.	Напряжения в сжатом диске	347
§ 4. 37.	Напряжения в цилиндрическом катке	350
§ 4. 38.	Исследования оптическим методом напряжений в круговом диске, нагруженном по диаметру	352
§ 4. 39.	Другие виды контурных условий	356

Глава V ИЗГИБ БАЛОК

§ 5. 01.	Введение	358
§ 5. 02.	Изгиб прямого стержня с прямоугольным поперечным сечением	361
§ 5. 03.	Чистый изгиб балки любого поперечного сечения	364
§ 5. 04.	Изгиб балки прямоугольного сечения при наличии срезающих напряжений	366
§ 5. 05.	Линии средних главных нормальных напряжений, изоклины и изохромы при чистом изгибе и при „изгибе Сен-Венана“	368
§ 5. 06.	Оптическая проверка чистого изгиба и изгиба с касательными напряжениями	369
§ 5. 07.	Бесконечно длинная прямая балка, находящаяся под действием двух равных вертикальных, одинаково направленных сил, приложенных в соответствующих точках обеих граней	370
§ 5. 08.	Местные напряжения от сосредоточенного груза	373
§ 5. 09.	Бесконечно длинная прямая балка под действием двух равных прямо противоположных сил, приложенных в соответствующих точках верхней и нижней граней, перпендикулярно к ним	374
§ 5. 10.	Передача сосредоточенных нагрузок через упругую прокладку	375
§ 5. 11.	Длинная балка, опертая по концам и нагруженная в середине пролета	377
§ 5. 12.	Разложение в окрестности точки приложения силы	378
§ 5. 13.	Опыты Вильсона	382
§ 5. 14.	Теория Стокса, объясняющая опыты Вильсона	383
§ 5. 15.	Изоклинические линии при действии сосредоточенной силы	385
§ 5. 16.	Построение изоклинических линий	387
§ 5. 17.	Анализ полученных результатов	392
§ 5. 18.	Сравнение с формулой Стокса	394
§ 5. 19.	Изгиб коротких балок	395
§ 5. 20.	Изгиб клина	397
§ 5. 21.	Касательные напряжения, возникающие от двух почти противоположных сил	400

§ 5. 22.	Влияние отверстия на распределение напряжений в балке, находящейся под действием постоянного изгибающего момента	404
§ 5. 23.	Балки с резкими изменениями внешних контуров	405
§ 5. 24.	Влияние надрезов или вырезов на изогнутую балку	407

Глава VI

ОТВЕРСТИЯ И ТРЕЩИНЫ

§ 6. 01.	Круглые отверстия	413
§ 6. 02.	Распределение напряжений в широкой растянутой пластинке с одним отверстием	414
§ 6. 03.	Распределение напряжений в стальной растянутой пластинке с центральным отверстием	419
§ 6. 04.	Растянутая пластинка с внецентренным отверстием	421
§ 6. 05.	Группы отверстий	422
§ 6. 06.	Влияние заклепки, плотно заполняющей центральное отверстие в растянутой пластинке	425
§ 6. 07.	Распределение напряжений при действии неуравновешенных сил, приложенных к контуру отверстия в пластинке	429
§ 6. 08.	Общая теория многосвязных пластинок	431
§ 6. 09.	Функция напряжений и равнодействующая сила и пара сил по дуге	434
§ 6. 10.	Совместимые и сократимые замкнутые пути	436
§ 6. 11.	Циклические функции	437
§ 6. 12.	Циклические функции от χ и ψ и от их производных	440
§ 6. 13.	Циклические функции перемещений	442
§ 6. 14.	Характер зависимости решения уравнений теории упругости от упругих постоянных	443
§ 6. 15.	Получение решения для пластинки на основании наблюдений над другой пластинкой	444
§ 6. 16.	Поправки к напряжениям в круговом кольце для материалов разного сорта	448
§ 6. 17.	Распределение напряжений, вызванное силой, передающейся через болт или заклепку	450
§ 6. 18.	Стержни и болты с проушинами	455
§ 6. 19.	Эллиптические отверстия	457
§ 6. 20.	Решение уравнения $\nabla^2\chi = 0$ в эллиптических координатах	459
§ 6. 21.	Однозначность перемещений	460
§ 6. 22.	Напряжения в эллиптических координатах	462
§ 6. 23.	Бесконечная всесторонне растягиваемая пластинка с эллиптическим отверстием	464
§ 6. 24.	Пластинка с эллиптическим отверстием, растягиваемая в направлении одной из осей координат	466
§ 6. 25.	Приближенный метод учета влияния конечной ширины растягиваемой пластинки с эллиптическим отверстием	468
§ 6. 26.	Пластинка с эллиптическим отверстием, находящаяся под действием чистого сдвига	471
§ 6. 27.	Пластинка с эллиптическим отверстием, подверженная простому растяжению в любом направлении	473
§ 6. 28.	Трещины	475

Глава VII

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ

§ 7. 01.	Введение	477
§ 7. 02.	Испытание материалов на растяжение	481
§ 7. 03.	Образцы для испытаний на растяжение с круглым поперечным сечением	486
§ 7. 04.	Теоретическое исследование напряжений в круговом цилиндре	487
§ 7. 05.	Английские стандартные испытания на растяжение	492
§ 7. 06.	Цементные восьмерки	495
§ 7. 07.	Испытание образцов на сжатие	498
§ 7. 08.	Теоретическое исследование распределения напряжений в круговом цилиндре при сжатии	501
§ 7. 09.	Центрировка образцов при сжатии	505
§ 7. 10.	Влияние надрезов в образцах для ударной пробы	507
§ 7. 11.	Испытание на сдвиг	510
§ 7. 12.	Напряжения в материале, подвергающемся сдвигу, между двумя параллельными плоскостями	515
§ 7. 13.	Распределение напряжений в шпиковых соединениях	519

§ 7. 14.	Влияние царапин и зазубрин при испытании материалов	523
§ 7. 15.	Влияние кольцевых выступов на растяжение образцов	528
§ 7. 16.	Испытание дерева на раскалывание	531
§ 7. 17.	Распределение напряжений в образце на раскалывание при одностороннем вырезе	533
§ 7. 18.	Распределение напряжений в образце для испытания на раскалывание с двумя неполными круговыми вырезами	536

Глава VIII

КОНСТРУКЦИИ И МАШИНЫ

§ 8. 01.	Общие соображения	540
§ 8. 02.	Принцип динамического (силового) подобия	540
§ 8. 03.	Статически неопределимые конструкции	543
§ 8. 04.	Пружинные весы, применяемые при исследованиях оптическим методом	547
§ 8. 05.	Распределение напряжений в частях зданий	549
§ 8. 06.	Распределение напряжений в несимметричном фундаменте	554
§ 8. 07.	Распределение напряжений, вызванных резкими изменениями поперечных сечений стен за счет окон и дверей	555
§ 8. 08.	Карнизы	557
§ 8. 09.	Проектирование частей конструкций и машин	560
§ 8. 10.	Зубчатая передача	563
§ 8. 11.	Фланцы	565
§ 8. 12.	Гайки и болты	567
§ 8. 13.	Распределение напряжений в сварных швах	570
§ 8. 14.	Колеса	572

Дополнение

Некоторые графические вычислительные методы вычислений составляющих напряжений при наличии данных оптического метода (Д. К. Кноль)	577
Библиография	595
Дополнительная литература	612
Указатель имен	618
Предметный указатель	621

Ответственный редактор Д. Кноль.

Технический редактор Р. В. Эдича.

Корректор А. Н. Кузьмин.

Слана в набор 7/V 1935 г.

Подписана к печати 2/II 1936 г.

Формат 72 × 100¹/₁₆.

Инд. 319Л.

Бум. листов. 19¹/₈.

Тип. зн. в 1 бум. л. 145.920.

Ленгорлит № 373.

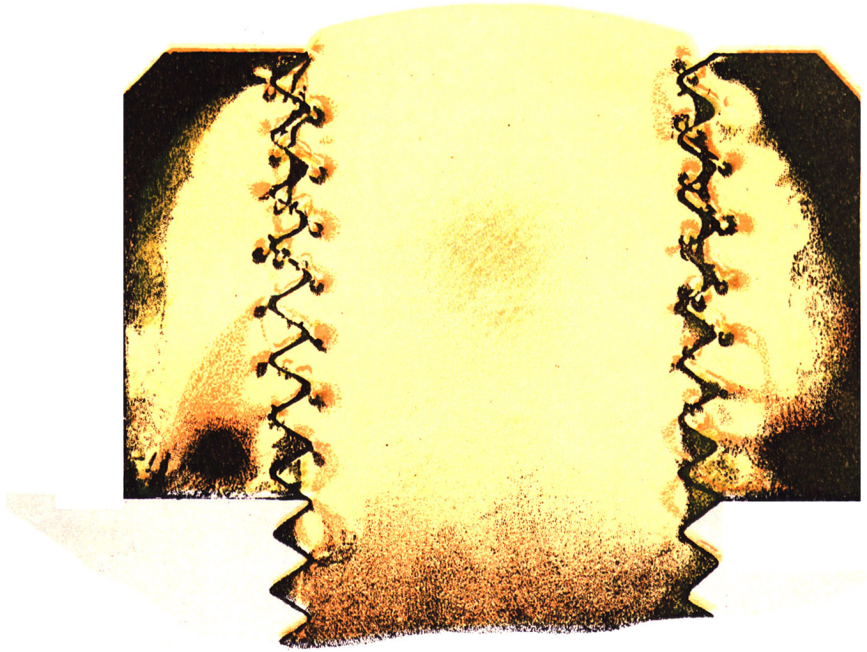
Тираж 3.500.

У. а. л. 56,28.

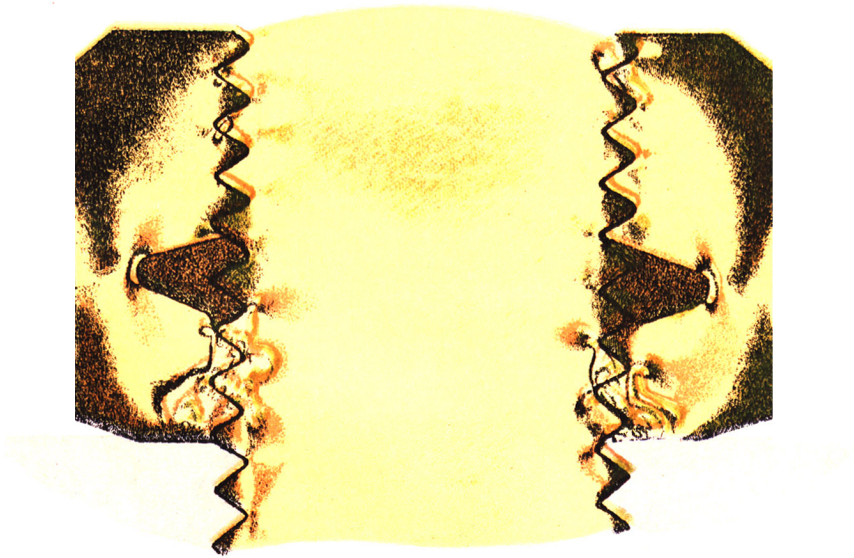
Заказ № 591.

О П Е Ч А Т К И

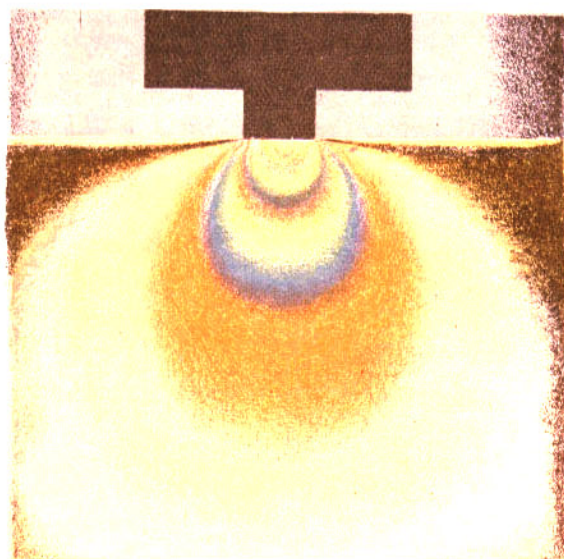
Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
218	19 сверху	действительных	действующих
351	1 „	получаемого из	равного по величине
352	10 снизу	bicircular quartics	бициркулярных кривых четвертого порядка
489	11 сверху	условия	усилия
513	10 снизу	— 0,0013	— 0,0013t
540	20 снизу	Принцип динамического подобия (аналогии)	Принцип динамического (силового) подобия



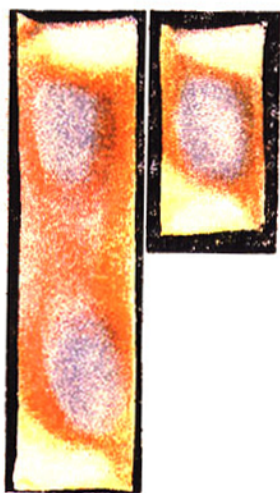
Фиг. 8.122. Распределение напряжений в плоской модели гайки и болта с однодюймовой нарезкой Витворта.



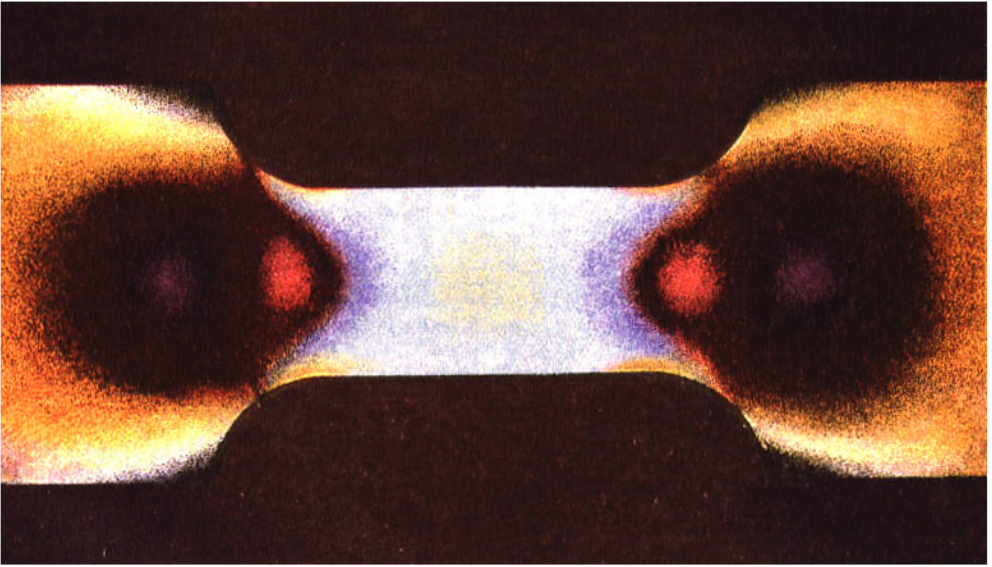
Фиг. 8.123. Распределение напряжений в подобной же гайке с закругленными торцами и V-образным вырезом.



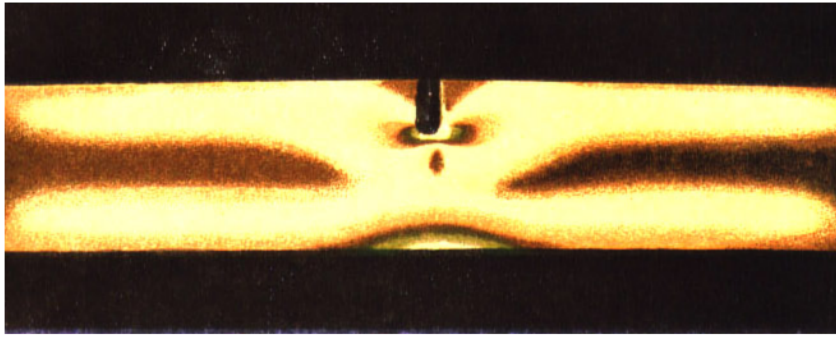
Фиг. 4.231. Распределение напряжений в широкой прямоугольной пластинке, нагруженной центрально на небольшой части верхней грани.



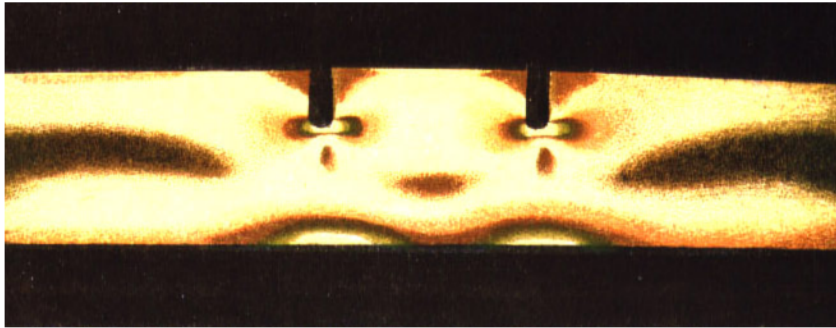
Фиг. 7.112. Пластинки при деформации сдвига;
в большей—два максимума напряжений;
в меньшей—один.



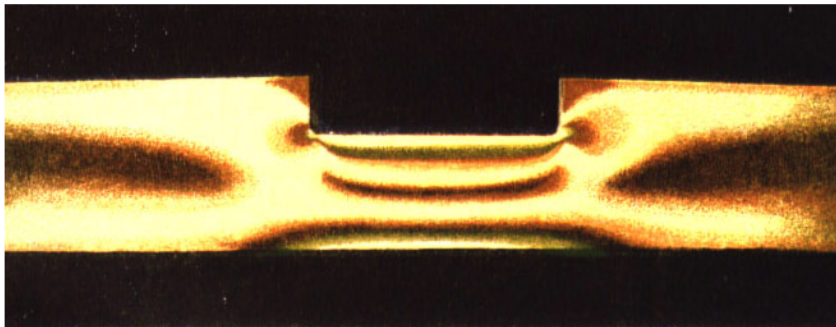
Фиг. 7.025. Распределение напряжений при растяжении в образце с ушпренными концами.



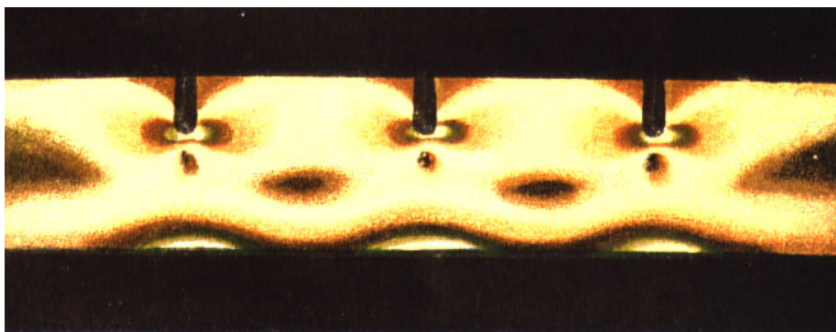
A



B

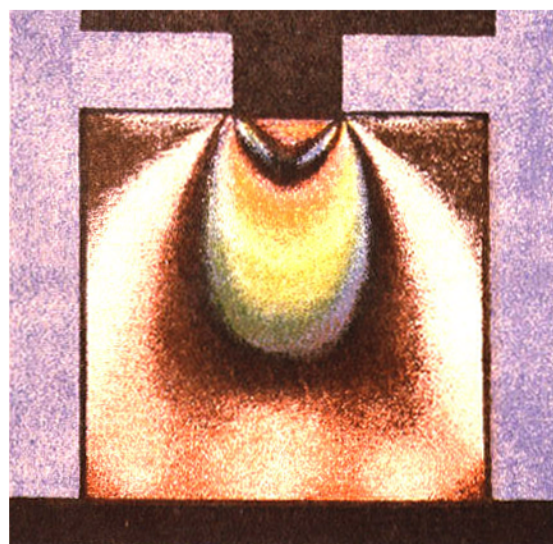


C

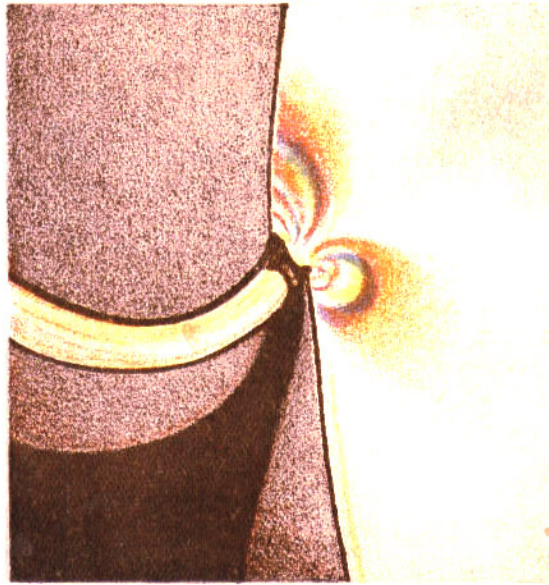


D

Фиг. 5.242. Распределение напряжений при чистом изгибе в балке с вырезами.



Фиг. 4.241. Распределение напряжений в небольшом квадратном массиве, нагруженном центрально по части верхнего ребра.



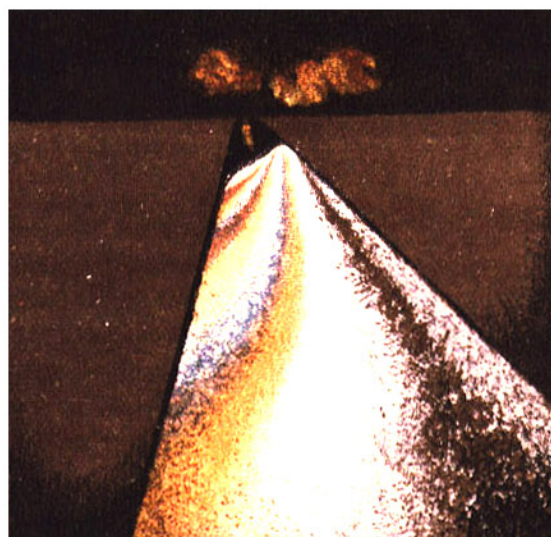
(a)

Фиг. 4.183а. Обточка диска хорошо заточенным резцом.

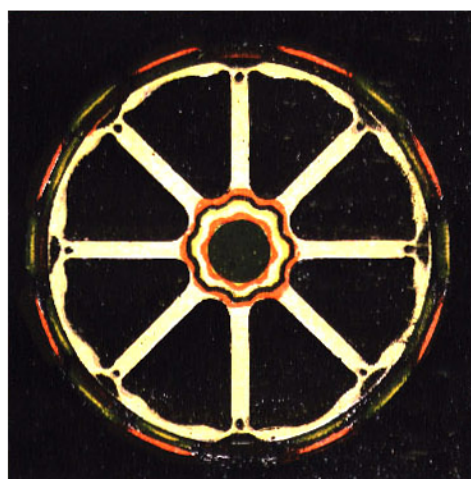


(b)

Фиг.4183б. Тот же диск при обточке плохим резцом.



Фиг. 4.162. Распределение напряжений в клине при асимметричной нагрузке.



Фиг. 8.146. Распределение напряжений в колесе железнодорожного вагона со спицами вследствие усилия оси и сжатия обода.