МЕТОД НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В АНАЛИЗЕ.

В. В. Немыцкий.

§ 1. Введение.

Теоремы существования в анализе появились с XIX в., когда, с одной стороны, стали критически пересматривать основные математические факты и, с другой, потребность физических теорий заставляла математиков создавать новые математические аппараты и давать их обоснования.

Коши был первым математиком, который доказал теорему существования для системы диференциальных уравнений с аналитическими правыми частями, т. е. для того класса, который, как казалось тогда, обнимал все случаи, встречающиеся в приложениях.

Метод, развитый Коши (*метод мажорант*, *метод пределов*), заключается в том, что разыскивают степенной ряд, формально удовлетворяющий данному уравнению, строят некоторое уравнение сравнения, такое, что решение этого уравнения представляет собой сходящийся степенной ряд, коэфициенты которого соответственно больше коэфициентов формального ряда. Этим доказывается сходимость формального ряда, а, следовательно, и существование решения системы.

Метод мажорант имеет широкое применение в различных вопросах анализа, и, пожалуй, наиболее блестящие теоремы получены именно таким образом — укажем на теорему Ковалевской о существовании решения системы диференциальных уравнений в частных производных и на теорему Пуанкаре о разложимости решения обыкновенного диференциального уравнения по степеням параметра, входящего в правую часть уравнения.

Метод мажорант и до сих пор употребляется при доказательствах различных теорем существования (см., например, работу Шаудера, указанную в сноске [3]) к стр. 168).

Метод мажорант получил в дальнейшем развитие в работах Перрона. Перрон, взяв основную идею Коши об уравнениях сравнения, отказался от ее проведения посредством формальных степенных рядов и пытался в каждом отдельном случае строить последовательность „верхних“ и „нижних“ функций, между которыми заключено решение заданного уравнения, доказывая затем существование общего предела для этих последовательностей; тем самым доказывалось существование решения.

Перрон и его последователи, например, у нас в СССР И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов и др., приложили этот метод к доказательству существования решения системы обыкновенных диференциальных уравнений, а также к ряду нелинейных задач для уравнений в частных производных. Как было показано акад. Чаплыгиным, акад. Лузиным и Д. Ю. Пановым, разыскание „верхних“

и „нижних“ функций в ряде случаев может быть выполнено вполне эффективно и служить способом приближенного решения как интегральных, так и диференциальных уравнений.

Второй метод для доказательства теорем существования был предложен Пикаром; он по настоящее время носит название *метода Пикара* или *метода последовательных приближений.*

Метод Пикара состоит в том, что мы строим ряд, который должен давать решение, не сразу, как в методе формальных разложений, а постепенно, шаг за шагом, начиная от начальных условий задачи, причем самый способ построения ряда носит характер внесения все новых поправок в уже полученные приближенные результаты. Методу Пикара в настоящее время может быть придана чисто геометрическая трактовка, но сейчас мы на ней не остановимся, так как эта трактовка будет подробно изложена в § 2.

Метод Пикара, если судить по количеству работ, является в настоящее время господствующим методом для доказательства теорем существования, и этим методом были передоказаны все классические теоремы, полученные методом мажорант.

Хотя метод последовательных приближений и не требует для своего применения аналитических функций в правых частях уравнений и аналитических начальных условий, как это имело место в методе Коши, но все же на входящие функции приходится накладывать значительные ограничения, именно, требовать либо существования непрерывных производных, либо выполнения условий Липшица. Это обстоятельство уже для конца XIX в. было слишком стесняющим.

В 1894 г. Пеано доказал теорему существования решения обыкновенного диференциального уравнения без этих предположений. Он использовал при этом идею компактности семейства функций. Полностью эта идея была раскрыта в работе Фреше 1906 г. [1]). Так как она будет для нас весьма важной, то остановимся на ней подробнее.

Пусть дано семейство функций $\{f(x)\}$, для простоты непрерывных; мы назовем его *компактным,* если *из каждого его бесконечного подсемейства можно выделить равномерно сходящуюся последовательность функций* [2]). Условия компактности семейства непрерывных функций были даны Арцела (см. § 4).

Пеано следующим образом использовал эту идею. Он строил семейство функций, обладающих тем свойством, что если бы нашлась равномерно сходящаяся последовательность функций этого семейства, то ее предельная функция удовлетворяла бы уравнению. Для построения такого семейства, конечно, не может быть дано регулярного общего процесса, но в ряде задач, исходя обычно из геометрического смысла решения, удается построить такое семейство. Если после этого доказать, что построенное семейство удовлетворяет условиям компактности, то, очевидно, теорема существования будет доказана.

---

[1]) Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, т. XXII, 1906.

[2]) Общая формулировка компактности множества элементов будет дана ниже, см. стр. 144.

Надо сказать, что трудности конкретного проведения этого метода в каждом новом случае настолько велики, что он не получил достаточно широкого применения.

Таково в общих чертах было состояние вопроса о теоремах существования в анализе к началу мировой войны. Линейные задачи и ряд нелинейных задач были решены методами Коши и Пикара, но не существовало общего метода для доказательства теорем существования без условий диференцируемости. Новый метод, который и служит предметом настоящей статьи, был подготовлен работами Фреше и Гаусдорфа и стал широко известен после работ упорного его пропагандиста, польского математика Шаудера, который использовал гениально простую идею Биркгофа и Келлога (1922) [1].

Биркгоф и Келлог дали доказательство классической теоремы существования для уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ с помощью следующего оригинального рассуждения. Заменим диференциальное уравнение интегральным:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt$$

и будем рассматривать правую часть этого уравнения как операцию

$$y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, u)\, dt,$$

ставящую в соответствие функции u некоторую другую функцию v. Тогда, для того чтобы доказать теорему существования, мы должны найти инвариантную функцию, т. е. такую, для которой указанная операция ставит ей в соответствие ее же самое.

Следовательно, если мы найдем условия, достаточные для того, чтобы при преобразовании одного семейства функций в другое нашлась инвариантная функция, и если мы докажем, что данное конкретное преобразование удовлетворяет этим условиям, то теорема существования будет доказана.

Биркгоф и Келлог сами дали весьма частные условия для существования инвариантной функции. В 1926 г. мною и П. С. Александровым был доказан некоторый весьма общий принцип для обнаружения существования инвариантных функций; мы приложили этот принцип к доказательству теоремы Пеано.

Независимо от нас в январе 1927 г. Шаудер [2]) доказал этот принцип в более общей форме и дал многочисленные его приложения.

Для того чтобы сформулировать этот принцип существования инвариантной функции, остановимся на некоторых основных понятиях, высказанных и разработанных главным образом Фреше, Гаусдорфом и Банахом [3]).

---

[1]) Birkhoff and Kellogg, Invariant points in function space, Trans. Amer. Math. Soc., т. 23, 1922.

[2]) Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalräumen, Math. Zeitschr., т. 26, 1927.

[3]) Фреше — см. сноску [1]) на стр. 142, Гаусдорф — см., например, Mengenlehre, изд. 1914 и 1927; Банах — см., например, Théorie des opérations linéaires.

Рассмотрим какое-нибудь семейство функций $\{f(x)\}$; мы будем говорить, что это семейство функций образует *выпуклое множество* функций, если вместе с функциями f и g в семейство входит функция $\alpha f+\beta g$, где α и β — произвольные положительные действительные числа, такие, что $\alpha+\beta=1$. Семейство функций мы будем называть *линейным*, если вместе с функциями f и g в семейство входят функции $\alpha f+\beta g$, где α и β — произвольные действительные числа [1]). Например, семейство всех непрерывных функций есть, очевидно, линейное семейство, а семейство всех непрерывных функций, удовлетворяющих неравенству $|f|\leqslant K$, есть выпуклое семейство. Семейство всех функций, интегрируемых в степени p, есть линейное семейство; семейство тех же функций, удовлетворяющих неравенству $\left\{\int |f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant K$, есть выпуклое семейство.

Мы будем говорить далее, что семейство функций определяет *метрическое пространство*, если каждой паре функций f и g поставлено в соответствие число $\rho(f, g)$, называемое их *расстоянием*, удовлетворяющее следующим трем условиям:

$$\rho(f, f)=0,\ \rho(f, g)=\rho(g, f),\ \rho(f, g)\leqslant\rho(f, h)+\rho(h, g).$$

Точкой или *элементом* такого метрического пространства мы называем класс всех функций, находящихся друг от друга на расстоянии нуль [2]).

Далее мы будем говорить, что последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нашего пространства сходится, если в этом пространстве существует точка x такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x, x_n)=0\ ^{3)}.$$

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *фундаментальной*, если при любом ε можно найти такое целое N, что если $m>N$ и $n>N$, то $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся, т. е. существует элемент x нашего пространства такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x, x_n)=0.$$

Наконец, множество точек пространства называется *компактным*, если из всякого его бесконечного подмножества можно выбрать последовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства.

Нам в основном придется иметь дело с двумя метрическими пространствами: C и L_p.

---

[1]) Абстрактное определение линейного пространства будет дано ниже, см. стр. 154.

[2]) *Абстрактным метрическим пространством* называют совокупность элементов, каждой паре которых a и b поставлено в соответствие некоторое число $\rho(a, b)$, называемое расстоянием и удовлетворяющее трем аксиомам метрического пространства:

1. $\rho(a, b)=0$ тогда и только тогда, если $a\equiv b$.
2. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$.
3. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$.

[3]) Пользуясь определением сходимости, мы можем ввести понятие замкнутых и открытых множеств, если только за „окрестность“ данной точки принять сферу радиуса ρ, описанную около данной точки x_0, т. е. множество точек x, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_0, x)<\rho$.

Точками пространства C являются непрерывные функции на некотором конечном отрезке $[a, b]$; за расстояние между точками f и g принимается

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f - g|.$$

Точками пространства L_p являются классы функций, интегрируемых по Лебегу в степени p, на некотором множестве E, причем функции, входящие в один класс, отличаются друг от друга только на множестве меры нуль; за расстояние в L_p мы принимаем $\{\int |f-g|^p\, dx\}^{\frac{1}{p}}$.

Можно показать, что вводимое нами расстояние удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Часто пространство C называют *пространством равномерной сходимости*, а пространство L_p — *пространством сходимости в среднем*, так как последовательность точек сходится в пространстве C, если функции, изображающие точки этой последовательности, сходятся равномерно, и последовательность точек сходится в пространстве L_p, если соответствующая последовательность функций сходится „в среднем".

Полное линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу x поставлено в соответствие число $\|x\|$, называемое *нормой*, которое удовлетворяет следующим требованиям:

$$\|x + (-x)\| = 0, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \|tx\| \leqslant |t|\,\|x\|,$$

и, наконец,

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Пусть теперь дан *оператор* $A(x)$, преобразующий точки данного пространства в точки другого пространства или того же самого. Естественно назвать точку x *неподвижной точкой* при таком преобразовании, если

$$x = A(x).$$

Оператор $A(x)$ называется *непрерывным*, если, каково бы ни было ε, можно найти такое δ, что если $\rho(x, y) \leqslant \delta$, то $\rho(A(x), A(y)) \leqslant \varepsilon$.

Непрерывный оператор $A(x)$ называется *вполне непрерывным* на данном множестве, если он преобразует это множество в компактное множество.

Мы теперь можем высказать принцип существования неподвижной точки в форме, указанной Шаудером [1]).

Теорема Шаудера. *Если в линейном полном нормированном пространстве оператор $A(x)$ переводит всякое выпуклое множество в его компактную часть, то всегда существует неподвижная точка.*

Этот принцип и служит основным орудием для применения идей Биркгофа к теоремам существования. Его доказательство и применения мы изложим в § 3 и 4. Следующий параграф мы посвятим более элементарному принципу существования неподвижной точки, позволяющему охватить теоремы, которые доказывались методом последовательных приближений.

§ 2. Принцип сжатых отображений (Каччополи-Банаха).

Наиболее элементарным и в то же время очень плодотворным приемом при доказательствах теорем существования и единственности является принцип,

[1]) Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Mathem., т. II, 1930.

сформулированный в 1922 г. Банахом [1]) и впервые примененный к доказательству теорем существования Каччополи в 1930 г. [2]).

Этот принцип является результатом геометрической обработки идеи Пикара — метода последовательных приближений. Вот в чем он состоит:

Теорема Каччополи-Банаха. *Если в полном метрическом пространстве R_f дан оператор $A(f)$, переводящий элементы f и g пространства R_f, отстоящие друг от друга на расстояние d, в какие-то другие элементы R_f, отстоящие друг от друга на расстояние d', так что $d' < \alpha d$, где $\alpha < 1$ и не зависит от d, то существует единственный элемент $\bar{f}$ пространства R_f такой, что*

$$A(\bar{f}) = \bar{f},$$

причем, если f_0 — произвольный элемент R_f и $f_{n+1} = A(f_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f, f_n) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $f_0 \subset R$ и пусть $f_{n+1} = A(f_n)$; из условия $d' < \alpha d$ следует, что

$$\begin{gathered}
\rho(f_1, f_2) < \alpha\rho(f_0, f_1), \\
\rho(f_2, f_3) < \alpha\rho(f_1, f_2) < \alpha^2\rho(f_0, f_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\rho(f_n, f_{n+1}) < \alpha^n \rho(f_0, f_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, f_{n+1}) &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \rho(f_{n+i}, f_{n+i+1}) < \\
&< \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+i} \rho(f_0, f_1) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(f_0, f_1).
\end{aligned}$$

Поэтому последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ есть фундаментальная последовательность и, значит, имеет предел. Пусть этот предел будет $\bar{f}$. Покажем, что $\bar{f}$ есть неподвижный элемент. В самом деле, пусть $A(\bar{f}) = \bar{\bar{f}}$. Имеем при любом n

$$\begin{aligned}
\rho(\bar{f}, \bar{\bar{f}}) &\leqslant \rho(\bar{f}, f_n) + \rho(f_n, f_{n+1}) + \rho(\bar{\bar{f}}, f_{n+1}) \leqslant \\
&\leqslant 2\rho(\bar{f}, f_n) + \rho(f_n, f_{n+1}).
\end{aligned}$$

Так как оба слагаемых в правой части при возрастании n стремятся к нулю, то $\rho(\bar{f}, \bar{\bar{f}}) = 0$.

Если бы, теперь, кроме $\bar{f}$ существовал другой неподвижный элемент $\bar{f}'$, так что $\rho(\bar{f}, \bar{f}') > 0$, то мы имели бы $\rho(\bar{f}, \bar{f}') < \alpha\rho(A(\bar{f}), A(\bar{f}'))$ или [так как $A(\bar{f}) = \bar{f}$, $A(\bar{f}') = \bar{f}'$] $\rho(\bar{f}, \bar{f}') < \alpha\rho(\bar{f}, \bar{f}') < \rho(\bar{f}, \bar{f}')$. Полученное противоречие доказывает единственность неподвижного элемента $\bar{f}$.

---

[1]) Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales, Fund. Math., т. III, 1922.

[2]) Caccioppoli, Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Rend. Accad. Lincei, т. 11, 1930.

Заметим, что если пространство R_f компактно, то условия теоремы можно ослабить, именно вместо условия $d' < \alpha d$, $\alpha < 1$, можно потребовать лишь, чтобы $d' < d$.

В самом деле, построив последовательность итераций f_1, $f_2 = A(f_1)$, ..., $f_{n+1} = A(f_n)$, ..., выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность f_{n_1}, f_{n_2}, ..., f_{n_k}, ... и обозначаем ее предел через $\bar{f}$. В остальном ход доказательства остается прежним. Таким образом можно сформулировать теорему:

Если в метрическом пространстве R_f дан оператор A, переводящий элементы f пространства R_f в элементы g некоторой компактной части R_f, так что при этом

$$\rho(A(f),\ A(g)) < \rho(f,\ g),$$

то существует единственный элемент $\bar{f}$ пространства R_f такой, что

$$A(\bar{f}) = \bar{f}.$$

Приведем ряд применений этих элементарных принципов к доказательству классических теорем анализа.

Теорема Пикара. *Пусть дано диференциальное уравнение* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, *где* $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$. *Тогда на некотором отрезке* $|x - x_0| < d$ *существует, и притом только одно решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее условию* $\varphi(x_0) = y_0$.

Доказательство. Заменяем диференциальное уравнение интегральным:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y)\, dt.$$

Рассмотрим семейство всех непрерывных функций $\{\varphi(x)\}$ на отрезке $a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b$; это семейство на основании критерия Коши образует полное метрическое пространство, если принять за расстояние между функциями φ_1 и φ_2 выражение

$$\rho(\varphi_1,\ \varphi_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Будем рассматривать правую часть написанного выше интегрального уравнения как оператор

$$A(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi)\, dt,$$

определенный на $\{\varphi(x)\}$. Так как определенный интеграл есть непрерывная функция верхнего предела, то этот оператор переводит точки $\{\varphi(x)\}$ в точки того же пространства. Оценим $\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2))$; имеем

$$\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2)) = \max|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)| =$$

$$= \max\left|\int_{x_0}^{x} [f(t,\ \varphi_1) - f(t,\ \varphi_2)]\, dt\right| \leqslant M \max|\varphi_1 - \varphi_2| \cdot |x - x_0|.$$

Если взять $|x - x_0| < \frac{\alpha}{M}$, где $\alpha < 1$, то

$$\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2)) < \alpha\rho(\varphi_1,\ \varphi_2),$$

и тогда на основании теоремы Каччополи существует одно и только одно решение $\overline{\varphi}(x)$ уравнения $A(\varphi)=\varphi$, т. е. заданного диференциального уравнения; та же теорема утверждает, что это решение может быть получено путем итерации оператора $A(\varphi)$, исходя от любой непрерывной функции.

Теорема Пикара легко обобщается на систему диференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ \dots,\ x_n;\ t),\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где функции $f_i(x_1,\ \dots,\ x_n;\ t)$ удовлетворяют условиям Липшица

$$|f_i(x_1',\ \dots,\ x_n';\ t)-f_i(x_1'',\ \dots,\ x_n'';\ t)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|x_i'-x_i''|.$$

Заменим эту систему диференциальных уравнений системой интегральных уравнений

$$=x_i^0+\int\limits_{t_0} f_i(x_1,\ \dots,\ x_n;\ t')\,dt',\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

и рассмотрим пространство C^n, в котором за точку принимается совокупность n непрерывных функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, а за расстояние между точками $\{\varphi_1^{(1)},\ \dots,\ \varphi_n^{(1)}\}$ и $\{\varphi_1^{(2)},\ \dots,\ \varphi_n^{(2)}\}$ принимается

$$\sum_{i=1}^{n}\max|\varphi_i^{(1)}-\varphi_i^{(2)}|.$$

Такое пространство будет полным.

Рассматривая совокупность правых частей написанной системы интегральных уравнений как оператор в C^n, мы также убеждаемся, что при условии

$$|t-t_0|<\frac{\alpha}{M},\quad \alpha<1,$$

оператор уменьшает расстоя е и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы Каччополи.

При доказательстве теорем с аналитическими функциями нам придется воспользоваться следующими предложениями из теории степенных рядов.

1) Пусть дан ряд $\sum a_{\alpha\beta\dots\gamma}x^\alpha y^\beta\dots u^\gamma$, сходящийся внутри некоторой сферы $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\dots+(u-u)^2<\rho$. Если вместо переменных $x, y,\ \dots,\ u$ подставить степенные ряды, сходящиеся в сфере радиуса ρ', то полученный степенной ряд будет сходиться в сфере, радиус которой равен меньшему з чисел ρ и ρ'.

2) Предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций любого числа переменных есть аналитическая функция во всякой области, внутренней ко всем областям сходимости членов этой последовательности (теорема Вейерштрасса).

Теорема Коши. *Если дано диференциальное уравнение* $\dfrac{dy}{dx}=f(x,\ y)$, где $f(x,\ y)$ — *аналитическая функция от* x *и* y, *т. е.* $f(x,\ y)=\sum a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ *в области* $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon$, *то существует, и притом только одно, решение* $y=\varphi(x)$, *разложимое в ряд по степеням* $x-x_0$ *в некоторой окрестности* *точки* x_0 *и удовлетворяющее условию* $\varphi(x_0)=y_0$; *при этом* x *может быть как действительной, так и комплексной переменной.*

Доказательство. Пусть $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=M$ для $|x-x_0|\leqslant\varepsilon'<\varepsilon, |y-y_0|\leqslant\leqslant\varepsilon'<\varepsilon$. Рассмотрим семейство аналитических функций $\{\varphi(x)\}$, голоморфных в круге $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2$ радиуса $\rho=\min\left\{\frac{\alpha}{M};\ \varepsilon'\right\}$, где α — некоторое фиксированное число, меньшее единицы.

Сводим диференциальное уравнение к интегральному:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y)\,dt=y_0+\int_{x_0}^{x}\sum a_{\alpha\beta}t^{\alpha}y^{\beta}\,dt$$

и рассматриваем правую часть уравнения как оператор A, определенный на семействе $\{\varphi(x)\}$. На основании предложения 1) и известной теоремы об интегрировании степенных рядов находим, что в результате применения оператора A получается снова функция из семейства $\{\varphi(x)\}$. Кроме того, на основании теоремы Вейерштрасса [предложение 2)] семейство $\{\varphi(x)\}$ образует полное метрическое пространство, если за $\rho(\varphi_1,\ \varphi_2)$ взять $\max|\varphi_1-\varphi_2|$.

Оцениваем $\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2))$. Имеем

$$\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2))=\max\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,\ \varphi_1)-f(x,\ \varphi_2)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\max\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right|\cdot|\varphi_1-\varphi_2|\,dx\right|\leqslant M\max|\varphi_1-\varphi_2|\,|x-x_0|.$$

Беря $|x-x_0|$ меньше, чем $\frac{\alpha}{M}$, имеем

$$\rho(A(\varphi_1),\quad A(\varphi_2))<\alpha\,\rho(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

Следовательно, теорема Каччополи применима, и теорема Коши доказана.

Ясно, что распространение теоремы на случай системы уравнений можно провести тем же способом, что и в случае теоремы Пикара.

Аналогично можно доказать следующую теорему Пуанкаре.

Теорема Пуанкаре. *Если в уравнении* $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y;\ \lambda)$ *функция* $f(x,\ y;\ \lambda)$ *разлагается в степенной ряд* $\sum a_{\alpha\beta\gamma}x^{\alpha}y^{\beta}\lambda^{\gamma}$ *по* x, y, λ, *сходящийся в некоторой области* $|x|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$, $|\lambda|<\varepsilon$, *то существует решение вида*

$$y=\lambda u_1(x)+\lambda^2u_2(x)+\ldots+\lambda^n u_n(x)+\ldots$$

Доказательство. Пусть снова $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=M$, где M не зависит от x, y и λ. Рассмотрим семейство функций $\varphi(x,\ \lambda)=\sum c_{\alpha\beta}x^{\alpha}\lambda^{\beta}$, аналитических в области $|x|\leqslant\min\left\{\frac{\alpha}{M},\ \varepsilon\right\}$, $|\lambda|\leqslant\min\left\{\frac{\alpha}{M},\ \varepsilon\right\}$, где $\alpha<1$. Это семейство определяет полное метрическое пространство, если за расстояние принять

$$\max|\varphi_1(x,\ \lambda)-\varphi_2(x,\ \lambda)|.$$

Рассмотрим оператор

$$A(\varphi)=\int_0^x \sum a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha \varphi^\beta \lambda^\gamma\, dx.$$

На основании предложений 1) и 2) получаем, что $A(\varphi)$ тоже функция нашего семейства.

Оцениваем снова $\rho(A(\varphi_1),\ A(\varphi_2))$ и так же, как в теореме Коши, получаем

$$\rho(A(\varphi_1),\quad A(\varphi_2))<\alpha\rho(\varphi_1,\ \varphi_2),$$

что и доказывает теорему Пуанкаре.

До сих пор мы формулировали и доказывали классические теоремы, но этим же путем можно получить и новые результаты.

Теорема [1]. *Если функция $K(x,\ y,\ u)$ непрерывна по x и y в некоторой области G и если для всех $|u|\leqslant L$, где L — константа, выполнено неравенство*

$$|K(x,\ y,\ u_1)-K(x,\ y,\ u_2)|<C\,|u_1-u_2|,$$

где C — константа, то при достаточно малом λ существует единственное непрерывное решение $\bar{u}$ уравнения

$$u(x)=\lambda\int_G K(x,\ y,\ u(y))\,dy,$$

удовлетворяющее условию $|\bar{u}(x)|\leqslant L$, причем если u_1 — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|u_1|\leqslant L$, и

$$u_n=\lambda\int_G K(x,\ y,\ u_{n-1})\,dy,\quad n=1,2,\ldots,$$

то u_n равномерно сходится к $\bar{u}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$A(u)=\lambda\int_G K(x,\ y,\ u)\,dy,$$

определенный в сфере $|u(x)|\leqslant L$ пространства непрерывных функций, в котором принято $\rho(u_1,\ u_2)=\max|u_1-u_2|$. Очевидно $A(u)$ есть непрерывная функция, причем

$$|A(u)|\leqslant\lambda\int_G |K(x,\ y,\ u)|\ dy.$$

На основании условия теоремы

$$|K(x,\ y,\ u)|<|K(x,\ y,\ 0)|+C\,|u|,$$

следовательно,

$$|A(u)|\leqslant\lambda\left\{\int_G |K(x,\ y,\ 0)|\,dx+C\int_G |u|\,dy\right\}.$$

Так как $K(x,\ y,\ 0)$, по условию, непрерывная функция, то

$$\int_G |K(x,\ y,\ 0)|\,dy\leqslant S$$

[1] Немыцкий, Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сборник, т. 41, вып. 4.

для $x \subset G$, и мы имеем

$$|A(u)| \leqslant \lambda (S + CL \operatorname{mes} G).$$

Следовательно, $|A(u)|$ при достаточно малом λ меньше L, т. е. сфера $|u(x)| \leqslant L$ преобразуется в свою часть, и так как, кроме того,

$$\max |A(u_1) - A(u_2)| \leqslant \lambda \int_G \max |K(x, y, u_1) - K(x, y, u_2)| \, dy \leqslant$$
$$\leqslant \lambda C \int_G \max |u_1 - u_2| \, dy = \lambda C \max |u_1 - u_2| \operatorname{mes} G,$$

то при достаточно малом λ

$$\rho(A(u_1), \ A(u_2)) \leqslant \alpha \rho(u_1, u_2),$$

т. е. на основании принципа Каччополи-Банаха теорема доказана. Неравенства

$$\lambda (S + CL \operatorname{mes} G) < L \quad \text{и} \quad \lambda C \operatorname{mes} G < 1$$

дают нам связь между входящими постоянными.

В качестве последнего приложения принципа Каччополи-Банаха приведем доказательство теоремы, впервые опубликованной Иглишем в 1930 г.

Теорема. *Уравнение $\Delta z = f(x, y, z)$ имеет решение, обращающееся на границе некоторой области в нуль, и притом только одно, если $f(x, y, z)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2)| \leqslant M |u_1 - u_2|$$

для всех x, y в рассматриваемой области и для всех $|u| \leqslant K$, где K — константа, а

$$M < \frac{1}{\max \int\int G(x, y, \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta},$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина для данной области.

Доказательство. Известно, что решение этой задачи эквивалентно решению нелинейного интегрального уравнения

$$z = \int\int G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta, z) \, d\xi \, d\eta.$$

Рассмотрим семейство непрерывных функций $\{\varphi\}$ и оператор

$$A(\varphi) = \int\int G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta, \varphi) \, d\xi \, d\eta = \Phi(x, y).$$

$A(\varphi)$ есть непрерывная функция от x и y. В самом деле,

$$\Phi(x', y') - \Phi(x'', y'') = \int\int [G(x', y', \xi, \eta) - G(x'', y'', \xi, \eta)] f(\xi, \eta, \varphi) \, d\xi \, d\eta,$$
$$|\Phi(x', y') - \Phi(x'', y'')| \leqslant$$
$$\leqslant \max |f(\xi, \eta, \varphi)| \cdot \int\int |G(x', y', \xi, \eta) - G(x'', y'', \xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta,$$

и двойной интеграл стремится к нулю вместе с $|x' - x''|$ и $|y' - y''|$, так как G разрывна только на поверхности $x = \xi$, $y = \eta$.

Оценим $\rho(A(\varphi_1), A(\varphi_2))$. Имеем

$$\rho(A(\varphi_1), A(\varphi_2)) = \\ = \max \left| \int\int G(x, y, \xi, \eta)\,[f(\xi, \eta, \varphi_1) - f(\xi, \eta, \varphi_2)]\, d\xi\, d\eta \right| \leqslant \\ \leqslant \int\int G(x, y, \xi, \eta)\, M \max|\varphi_1 - \varphi_2|\, d\xi\, d\eta = \\ = M \max|\varphi_1 - \varphi_2| \int\int G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Для

$$M \leqslant \frac{\alpha}{\max \int\int G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}, \quad \alpha < 1,$$

получаем

$$\rho(A(\varphi_1), \quad A(\varphi_2)) \leqslant \alpha\, \rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

т. е. мы находимся в условиях применения теоремы Каччополи.

§ 3. Принцип неподвижной точки.

Для изложения доказательства принципа неподвижной точки нам придется воспользоваться некоторыми топологическими теоремами. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство. Пусть дано $n+1$ точек пространства, не лежащих в $(n-1)$-мерной плоскости. Полиэдр (многогранник), имеющий эти точки своими вершинами, называется *n-мерным симплексом*. Взаимно однозначный и непрерывный образ симплекса называют *n-мерным элементом*.

Лемма Лебега [1]). *Если точки n-мерного симплекса Σ^n с вершинами e_1, $e_2, \ldots, e_{n+1}$ распределены по $n+1$ замкнутым множествам $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ так, что* 1) *каждая точка Σ^n принадлежит одному из множеств*; 2) *вершина e_i принадлежит множеству M_i*; 3) *множество M_i не имеет общих точек с гранью S_i, противолежащей вершине e_i, — то существует точка, принадлежащая одновременно всем множествам M_i.*

Доказательство. Разобьем симплекс Σ^n на частичные n-мерные симплексы так, что пара этих симплексов или прилегает друг к другу по целой k-мерной стороне $(k < n)$, или совсем не имеет общих точек. Назовем частичный симплекс *отмеченным*, если он имеет точки во всех множествах M_i. Предположим сначала, что при всяком симплициальном разбиении существуют отмеченные симплексы. Пусть тогда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Рассмотрим последовательность таких симплициальных разбиений $R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots$, что ребра симплексов R_k меньше, чем ε_k, и пусть σ_k — отмеченный симплекс в R_k. Пусть P — предельная точка множества вершин симплексов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$; в любой окрестности этой точки находится бесчисленное множество отмеченных симплексов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$, следовательно, в любой окрестности этой точки находятся точки любого из множеств M_i. Так как M_i замкнуты, то P принадлежит каждому M_i. Итак, для доказательства

1) Приведенные здесь доказательства принадлежат Шпернеру. См. Sperner, Über die Fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, Abhandl. math. Semin. Hamb. Univ., т. 10, 1934; см. также Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, там же, т. 6, 1928.

леммы Лебега остается установить наличие отмеченных симплексов при любом разбиении Σ^n на частичные симплексы. Пусть частичные симплексы при некотором разбиении будут $T_1, T_2, \ldots, T_p$. Каждой вершине каждого из этих симплексов отнесем совершенно произвольно в качестве координаты номер одного из множество M_i, к которым эта вершина принадлежит. Тогда каждый симплекс T_k получит $n+1$ координат $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1})$, среди которых, вообще говоря, будут и равные. Мы будем считать, что $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n+1}$.

Докажем, что число тех симплексов, у которых вершины имеют только различные координаты, так что сами симлексы имеют координаты $(1, 2, \ldots, n+1)$, нечетно. Этим, очевидно, будет доказано существование отмеченного симплекса. Для $n=0$, т. е. для нульмерных симплексов, теорема тривиальна. Предположим, что она доказана для $(n-1)$-мерных симплексов. Пусть опять частичные симплексы при некотором разбиении симплекса Σ^n будут $T_1, \ldots, T_p$ и пусть система чисел $(1, 2, 3, \ldots, n)$ входит t_k раз в совокупность систем координат $(n-1)$-мерных сторон частичного симплекса T_k. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=1}^{p} t_k \geqslant 0$. Если $t_k > 0$, то симплекс T_k имеет координаты $(1, 2, 3, \ldots, n, a)$, где $1 \leqslant a \leqslant n+1$. Если $a = n+1$, то, очевидно, $t_k = 1$. Если же a не равно $n+1$, то $t_k = 2$. Следовательно, если через e обозначим число тех симплексов T_k, для которых $a = n+1$, и через f — тех, для которых $a \neq n+1$, то

$$\sum_{k=1}^{p} t_k = e + 2f.$$

Представим эту же сумму другим способом. Рассмотрим совокупность $(n-1)$-мерных симплексов — сторон симплекса T_k, которые имеют координаты $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Пусть такой $(n-1)$-мерный симплекс лежит *внутри* Σ^n; тогда в нашу сумму он войдет дважды, так как каждая из сторон принадлежит двум T_k. Пусть число таких $(n-1)$-мерных симплексов есть g. Перейдем теперь к случаю, когда такой $(n-1)$-мерный симплекс с координатами $(1, 2, 3, \ldots, n)$ лежит на границе Σ^n. В силу условия 3) теоремы наш симплекс может лежать только на стороне $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Эта сторона есть $(n-1)$-мерный симплекс, разбитый на n множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$, удовлетворяющих всем условиям леммы, и, следовательно, на основании предположения, на стороне $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ может быть только нечетное число частичных $(n-1)$-мерных симплексов с координатами $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Обозначим его через m, $m \equiv 1 \pmod 2$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{p} t_k$ примет вид $2g + m$. Итак,

$$e + 2f = 2g + m \equiv 1 \pmod 2,$$

т. е. *e нечетно*, и лемма Лебега доказана.

Теорема Броуэра [1]. *При однозначном и непрерывном отображении n-мерного симплекса Σ^n в свою часть имеется по меньшей мере одна неподвижная точка.*

Доказательство. Пусть $t = f(x)$ — некоторое непрерывное отображение Σ^n в свою часть. Разобьем совокупность точек Σ^n на $n+1$ частей $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$

[1] См. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., т. 71, 1912.

следующим образом. Точку P мы отнесем к M_i, если расстояние ее образа $f(P)$ от грани S_i не больше, чем расстояние точки P от той же грани. Очевидно, каждое из множеств M_i замкнуто; то, что каждая точка принадлежит одному из M_i, — ясно, так как образ снова принадлежит к симплексу; наконец, вершина e_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, по определению множеств M_i, принадлежит соответствующему M_i. Таким образом выполнены условия леммы Лебега за исключением условия 2).

Допустим на момент, что оно тоже выполнено; тогда по лемме Лебега существует точка, принадлежащая всем M_i, т. е. не удалившаяся ни от одной из граней; но это и будет неподвижная точка. Таким образом теорема доказана, если при отображении вся граница симплекса переходит во множество, целиком расположенное внутри, так как в этом случае выполнено и условие 3).

Сведем теперь доказательство общей теоремы Броуэра к этому случаю. Рассмотрим новый симплекс Σ_1^n, заключающий внутри симплекс Σ^n. Пусть, далее, t' — такое однозначное отображение Σ_1^n на Σ^n, при котором все точки Σ^n остаются неподвижными.

Рассмотрим отображение $T = tt'$, т. е. отображение, при котором мы сначала производим t', а потом t. T дает такое непрерывное отображение Σ_1^n на Σ^n, при котором вся граница Σ_1^n переходит внутрь Σ_1^n. При этом отображении существует неподвижная точка P: $T(P) = P$. Эта точка, как легко видеть, будет неподвижной и при t.

Перейдем к доказательству принципа Шаудера в той форме, в какой он высказан им в 1930 г. Предварительно дадим некоторые определения, нужные нам для формулировки принципа. Мы будем называть некоторую совокупность элементов *линейным пространством*, если 1) каждой паре ее элементов x и y поставлен в соответствие третий элемент $x+y$, причем $(x+y)+z = x+(y+z)$ и существует один и только один элемент θ такой, что $\theta + x = x + \theta = x$; 2) каждому элементу x и произвольному действительному числу α соответствует элемент αx, причем $\alpha x + (-\alpha x) = \theta$. Если предположить, кроме того, что данная совокупность элементов образует метрическое пространство, то мы будем допускать, что из условия $\rho(x, x_n) \to 0$ следует $\rho(-x, -x_n) \to 0$ и из условия $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha$, следует $\rho(\alpha_n x_n, \alpha x) \to 0$.

Теорема Шаудера [1]). *В линейном полном нормированном пространстве при преобразовании замкнутого компактного выпуклого множества H посредством непрерывного оператора F в свою часть всегда существует неподвижная точка.*

Так как H компактно и замкнуто, то можно найти конечное число точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ таких, что каждая точка H отстоит от одной по крайней мере из точек $\{\xi_i\}$ на расстояние, меньшее, чем ε [2]). Рассмотрим наименьшее выпуклое тело, заключающее все точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Размерность n (число измерений) полученного множества $H^{(n)}$ не превышает $s-1$.

---

[1]) В своей работе, указанной в сноске на стр. 145, Шаудер дает несколько более общую формулировку, но доказательство его в этой общей формулировке не вполне корректно.

[2]) См. выше статью Л. А. Люстерника, стр. 91.

Подобное выпуклое тело можно найти следующим образом: соединить сначала точки ξ_i прямыми, что мы можем сделать, так как наше тело выпуклое, затем вершины полученных треугольников соединить прямыми с противолежащими сторонами, причем получающиеся при этом тетраэдры тоже будут принадлежать нашему множеству H, и т. д.

Построим теперь так называемое *симплициальное отображение* $F^{(n)}(x)$ тела $H^{(n)}$ на свою часть следующим образом. Пусть $F(d)$ — образ какой-нибудь вершины некоторого подразделения тела $H^{(n)}$. $F(d)$ принадлежит H, следовательно, найдется точка ξ_i, отстоящая от $F(d)$ на расстояние, меньшее, чем ε. Эту точку ξ_i, принадлежащую $H^{(n)}$, мы и поставим в соответствие точке d, полагая $F^{(n)}(d) = \xi_i$. Таким образом соответствие $F^{(n)}$ будет определено в вершинах, внутри же симлексов мы произведем линейную интерполяцию. Согласно теореме Броуэра при этом отображении будет неподвижная точка x:

$$F^{(n)}(x) = x.$$

Пусть теперь d — некоторая точка симплекса, в котором лежит x; тогда $\rho(x, d) < \varepsilon$. Далее, образы этих точек при отображении $F^{(n)}(x)$ будут отстоять друг от друга не дальше образов вершин симплекса, в котором они лежат, т. е. $\rho(F^{(n)}(x), F^{(n)}(d)) < \varepsilon$ и, следовательно, $\rho(d, F^{(n)}(d)) < 2\varepsilon$. Наконец, по построению функции $F^{(n)}(x)$, $\rho(F(d), F^{(n)}(d)) < \varepsilon$, так что в итоге

$$\rho(d, F(d)) < 3\varepsilon.$$

Так как подобную точку d можно найти при любом ε, то вследствие компактности и замкнутости множества H будет существовать неподвижная точка.

Принцип Шаудера был обобщен им на случай некомпактных множеств, расположенных в нормированном пространстве. Это обобщение основано на применении следующей леммы Мазура.

Лемма Мазура [1]). *Пусть Z — компактное множество в некотором линейном нормированном полном пространстве R. Тогда наименьшее замкнутое выпуклое тело, заключающее Z, компактно.*

Доказательство. Построим прежде всего наименьшее замкнутое выпуклое тело, заключающее Z. Нетрудно видеть, что Z, как компактное множество в метрическом пространстве, содержит всюду плотную счетную сеть $\{z_n\}$. Пусть V — множество всех точек вида $z = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $a_1 + \ldots + a_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\bar{V}$ — замыкание множества V — и будет наименьшим замкнутым выпуклым телом, заключающим Z.

В самом деле, всякое замкнутое выпуклое тело, заключающее Z, должно, очевидно, содержать и V, а значит, и его замыкание $\bar{V}$. Таким образом нужно лишь доказать, что $\bar{V}$ выпукло, т. е. что если $\bar{z}, \bar{z}' \subset \bar{V}$ и $0 < \alpha < 1$, то также $\bar{z}'' = \alpha\bar{z} + (1 - \alpha)\bar{z}' \subset \bar{V}$. Но по определению $\bar{V}$, для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие точки $z = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$, $z' = a'_1 z_1 + \ldots + a'_n z_n$ из V, что $\| \bar{z} - z \| < \varepsilon$,

[1]) S. Mazur, Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält, Studia Mathem., т. II, 1930. Приводимое ниже доказательство леммы Мазура принадлежит Д. А. Райкову.

$\|\bar{z}' - z'\| < \varepsilon$. Тогда, полагая $\bar{z}'' = \alpha\bar{z} + (1-\alpha)\bar{z}'$, $z'' = \alpha z + (1-\alpha) z'$, будем иметь

$$\|\bar{z}'' - z''\| \leqslant \alpha\|\bar{z} - z\| + (1-\alpha)\|\bar{z}' - z'\| < \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon.$$

Так как $z'' \subset V$ и ε произвольно, то $\bar{z}'' \subset \bar{V}$.

Докажем теперь, что $\bar{V}$ компактно, чем будет завершено доказательство леммы Мазура. Очевидно, достаточно доказать компактность V. Для этого мы воспользуемся приводимой ниже в § 4 теоремой Фреше. Именно, мы покажем, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших n множество V_n точек вида $z^{(n)} = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $a_1 + \ldots + a_n = 1$ (n фиксированно) компактно и обладает тем свойством, что для всякой точки $z \subset V$ найдется точка $z^{(n)} \subset V_n$ такая, что $\|z - z^{(n)}\| < \varepsilon$; так как, по предположению, R — полное пространство, то в силу указанной теоремы и V будет компактно.

Компактность множеств V_n очевидна. Теперь, последовательность $\{z_n\}$ всюду плотна на Z, следовательно, в частности, можно указать такое $n = n(\varepsilon)$, что всякая точка z_i будет отстоять от одной по крайней мере из точек $z_1, \ldots, z_{n(\varepsilon)}$ меньше, чем на ε. Но тогда, заменяя в сумме $a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$ каждую точку z_i с $i > n(\varepsilon)$ соответственной точкой из $z_1, \ldots, z_{n(\varepsilon)}$, мы получим точку $a_1' z_1 + \ldots + a'_{n(\varepsilon)} z_{n(\varepsilon)}$, $0 \leqslant a_i' \leqslant 1$, $a_1' + \ldots + a'_{n(\varepsilon)} = 1$, отстоящую от $a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$ меньше, чем на ε. А это показывает, что $V_{n(\varepsilon)}$ и обладает требуемым свойством.

Этим лемма Мазура доказана, и мы получаем очевидное обобщение принципа Шаудера для нормированных пространств:

Обобщенный принцип Шаудера [1]). *Если в линейном полном нормированном пространстве непрерывный оператор переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то существует неподвижная точка.*

§ 4. Компактность семейств функций.

В основе теории компактности семейств функций лежит теорема Фреше [2]), которая явилась обобщением данного мною и П. С. Александровым условия компактности множеств в пространстве Гильберта (пространстве L_2), сообщенного нами Фреше.

Теорема Фреше. *Для того чтобы множество E полного метрического пространства было компактным, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ нашлось компактное множество F такое, что какова бы ни была точка $x \subset E$, имелась бы точка $y \subset F$, для которой $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим произвольную последовательность точек E: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и произвольно малое ε; на основании условия теоремы найдется последовательность точек $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ из некоторого компактного множества F таких, что $\rho(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ при любом n. Выберем из последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ сходящуюся подпоследовательность $y_{n_1^{(1)}}, y_{n_2^{(1)}}, \ldots, y_{n^{(1)}}, \ldots$; тогда $\rho(y_{n_i^{(1)}}, y_{n_j^{(1)}}) < \frac{\varepsilon}{3}$,

[1]) См. сноску на стр. 145.

[2]) Fréchet, Quelques propriétés des ensembles abstraits, Fund. Math., т. XII, 1928.

если $n_i^{(1)}$ и $n_j^{(1)}$ больше некоторого $N=N(\varepsilon)$. На основании аксиомы треугольника получим

$$\rho(x_{n_i^{(1)}}, x_{n_j^{(1)}}) \leqslant \rho(x_{n_i^{(1)}}, y_{n_i^{(1)}}) + \rho(y_{n_i^{(1)}}, y_{n_j^{(1)}}) + \rho(y_{n_j^{(1)}}, x_{n_j^{(1)}}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

если $n_i^{(1)}$ и $n_j^{(1)}$ больше $N(\varepsilon)$. Таким же точно образом из последовательности $\{x_{n_i^{(1)}}\}$ мы можем выделить подпоследовательность $\{x_{n_i^{(2)}}\}$ такую, чтобы $\rho(x_{n_i^{(2)}}, x_{n_j^{(2)}})$ было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ для $n_i^{(2)}$ и $n_j^{(2)}$, бо́льших, чем некоторое $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$; далее из $\{x_{n_i^{(2)}}\}$ мы можем выделить подпоследовательность $\{x_{n_i^{(3)}}\}$ такую, чтобы $\rho(x_{n_i^{(3)}}, x_{n_j^{(3)}})$ было меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ для $n_i^{(3)}$ и $n_j^{(3)}$, бо́льших, чем некоторое $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, и т. д. Тогда последовательность $x_{n_1^{(1)}}, x_{n_2^{(2)}}, \ldots, x_{n_k^{(k)}}, \ldots$ будет, очевидно, фундаментальной, так как начиная с k-го члена она вся содержится в последовательности $\{x_{n_i^{(k)}}\}$ и, значит, для всех достаточно больших l и m $\rho(x_{n_l^{(l)}}, x_{n_m^{(m)}}) < \frac{\varepsilon}{k}$. Так как, по предположению, пространство, в котором рассматривается множество E, полное, то последовательность $x_{n_1^{(1)}}, x_{n_2^{(2)}}, \ldots, x_{n_k^{(k)}}, \ldots$, являющаяся частью последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходится, что и требовалось доказать.

Очевидным частным случаем этого критерия является признак Гаусдорфа: для того чтобы множество E было компактным, достаточно, чтобы при любом ε можно было найти *конечное* число точек множества E: $x_1, x_2, \ldots, x_s$, таких, что какова бы ни была точка $x \subset E$, нашлась бы точка x_i указанного конечного множества $\{x_i\}$, для которой $\rho(x, x_i) < \varepsilon$.

Дадим в качестве применения теоремы Фреше доказательства компактности тех семейств функций, которые главным образом применяются в дальнейшем.

Теорема Арцела[1]. *Пусть дано семейство непрерывных функций $\{f\}$ любого числа переменных, определенных на замкнутом ограниченном множестве E. Это семейство будет компактным, если функции, составляющие его, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, т. е. если выполнены следующие условия: 1) существует такое число M, что для всех функций нашего семейства $|f| < M$; 2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое δ, что для всех функций нашего семейства $|f(A') - f(A'')| < \varepsilon$, если только $\rho(A', A'') = \sqrt{\sum (x_i' - x_i'')^2} < \delta$.*

Доказательство. Будем рассматривать семейство функций $\{f\}$ как множество точек в пространстве непрерывных функций, в котором расстояние определено по формуле

$$\rho(f, g) = \max_{A \subset E} |f(A) - g(A)|,$$

удовлетворяющее условию $|f| < M$.

[1]) Обычное доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Куранта-Гильберта, Методы математической физики, гл. II.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покроем множество E конечным числом множеств диаметра δ, соответствующего ε в силу условия 2) теоремы, причем будем предполагать, что эти множества могут совпадать только по границам. Пусть B_1, $B_2, \ldots, B_s$ — области подразделения; возьмем в каждой из этих областей по точке, соответственно $A_1, A_2, \ldots, A_s$, и определим функцию $g_f(A)$ следующим образом: $g_f(A) = f(A_i)$, если $A \subset B_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Рассмотрим теперь семейство функций $\{g_f(A)\}$. Пусть дана какая-нибудь функция $f(A)$ семейства $\{f(A)\}$; беря соответствующую ей функцию $g_f(A)$ семейства $\{g_f(A)\}$, имеем

$$\max|f(A) - g_f(A)| = \max|f(A) - f(A_i)|.$$

Так как $\rho(A, A_i) < \delta$ при $A \subset B_i$, то $\max|f(A) - f(A_i)| < \varepsilon$ и, значит, $\rho(f, g_f) < \varepsilon$. Следовательно, для применения теоремы Фреше остается показать, что семейство $\{g_f(A)\}$ компактно.

Пусть дана последовательность функций

$$g^{(1)}(A), \quad g^{(2)}(A), \quad \ldots, \quad g^{(n)}(A), \quad \ldots$$

Пусть $e_1^i, e_2^i, \ldots, e_s^i$ — значения функции $g^{(i)}(A)$ в областях подразделения. Составим таблицу

$$\begin{array}{c} e_1^1 e_2^1 \ldots e_s^1 \\ e_1^2 e_2^2 \ldots e_s^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_1^n e_2^n \ldots e_s^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Так как все числа этой таблицы по абсолютной величине меньше, чем M, то нетрудно показать на основании теоремы Больцано-Вейерштрасса, что можно выделить такую подпоследовательность строк, чтобы каждая вертикаль $e_j^{n_1}$, $e_j^{n_2}, \ldots, e_j^{n_k}, \ldots, j = 1, 2, \ldots, s$, представляла собой сходящуюся последовательность. Рассмотрим тогда последовательность функций

$$g^{(n_1)}(A), \quad g^{(n_2)}(A), \quad \ldots, \quad g^{(n_k)}(A), \quad \ldots$$

Так как

$$\max|g^{(n_p)} - g^{(n_q)}| = \max\{|e_1^{n_p} - e_1^{n_q}|, \ \ldots, \ |e_s^{n_p} - e_s^{n_q}|\} < \varepsilon,$$

если n_p и n_q достаточно велики, то эта последовательность, являющаяся частью последовательности $g^{(1)}(A), g^{(2)}(A), \ldots, g^{(n)}(A), \ldots$, сходится, что и требовалось доказать.

Из теоремы Арцела можно вывести ряд элементарных следствий. Например, рассмотрим пространство C^n, точкой A которого является совокупность n непрерывных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, заданных на некотором отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, $A = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ назовем координатами, расстояние между точками определим по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sum_{i=1}^{n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

Полученное пространство, как легко видеть, будет полным.

Для того чтобы множество точек E пространства C^n было компактным, достаточно, чтобы совокупность i-х координат для любого i, $i=1, 2, \ldots, n$ образовывала семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций.

Из этого факта как частный случай получаем следующую теорему. Семейство $\{f(x)\}$ n раз диференцируемых функций, n-е производные которых равномерно ограничены, $\left|\frac{d^n f}{dx^n}\right| < M$, и равностепенно непрерывны, образует компактное семейство в пространстве, где за расстояние принята величина

$$\rho(f, g) = \max|f-g| + \max|f'-g'| + \ldots + \max|f^{(n)} - g^{(n)}|.$$

Определенное таким образом пространство будет полным и каждая его точка будет иметь $n+1$ координату $(f, f', \ldots, f^{(n)})$, причем координаты удовлетворяют заданным условиям.

Принцип Монтеля[1]) „нормальности" семейства функций является очевидным следствием теоремы Арцела. В самом деле, пусть имеем семейство голоморфных функций, равномерно ограниченных в некоторой области; они, очевидно, образуют равностепенно непрерывное семейство, так как их производные образуют равномерно ограниченное семейство. Так как, кроме того, равномерно сходящиеся последовательности голоморфных функций сходятся к голоморфным же функциям, то, применяя теорему Арцела, получаем доказательство принципа Монтеля.

Приведем еще одно обобщение теоремы Арцела.

Рассмотрим пространство C^∞, за точку которого примем счетную совокупность непрерывных функций, равномерно ограниченных некоторым числом M, $|f(x)| \leqslant M$, называемых координатами этой точки. Пусть точка A имеет координаты $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, а точка B — координаты $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, тогда расстояние определим по формуле

$$\rho(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max|f_n - g_n|.$$

Аксиомы метрического пространства здесь, очевидно, выполнены.

Теорема. *Для того чтобы множество точек C^∞ было компактным, достаточно, чтобы для любого i семейство i-х координат было компактным.*

Доказательство. В самом деле, возьмем произвольное число ε и столь большое N, чтобы $M\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, и рассмотрим множество точек A^N пространства C^∞ с координатами $(f_1, f_2, \ldots, f_N, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Так как по условию семейство i-х координат компактно, то указанное множество в C^∞ тоже компактно и, кроме того,

$$\rho(A, A^N) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_i| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{2^n} < \varepsilon.$$

А тогда на основании теоремы Фреше и рассматриваемое множество, будучи подмножеством полного пространства, компактно.

---

[1]) П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ 1936.

Перейдем теперь к другому важному классу пространств, в основе которых лежит пространство L_p, определенное в § 1 (см. стр. 145).

Прежде всего заметим, что, используя теорию интеграла Лебега, можно показать, что пространство L_p полно, т. е. если $\int\limits_E |f_m - f_n|^p\,dx < \varepsilon$, для всех m и n, больших, чем $N = N(\varepsilon)$, причем ε может быть взято произвольно малым, то существует функция $f \subset L_p$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E |f - f_n|^p\,dx \to 0.$$

Докажем теперь следующую теорему М. Рисса [1]), дающую условия компактности семейства функций в пространстве L_p.

Теорема М. Рисса. *Для того чтобы семейство функций $\{f(x)\}$, принадлежащих пространству L_p, $p \geqslant 1$, было компактным в этом пространстве, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* 1) *существовала константа M такая, чтобы для всех функций семейства было $\int\limits_E |f|^p\,dx < M^p$, где E — n-мерное множество, на котором функции определены, и* 2) *для всякого $\varepsilon > 0$ можно было найти такое δ, чтобы для всех функций семейства было*

$$\left\{\int\limits_E |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ если } |h| < \delta,$$

причем функцию $f(x)$ мы предполагаем равной нулю вне E, и $f(x+h) - f(x)$ понимается как

$$f(x_1 + h,\ x_2 + h,\ \ldots,\ x_n + h) - f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Доказательство. Пусть $S(x, \delta)$ — сфера радиуса δ в пространстве n измерений, где мы предполагаем определенными функции $f(x)$, и $V(\delta)$ — объем этой сферы. Образуем функции

$$f_\delta(x) = \frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(x,\,\delta)} f(y)\,dy.$$

Для всех функций пространства L_p имеет место неравенство [2])

$$\left|\frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(x,\,\delta)} l(y)\,dy\right| \leqslant \left\{\frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(x,\,\delta)} |l(y)|^p\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{A}$$

---

[1]) M. Riesz, Sur les ensembles compacts des fonctions sommables, Middel. frän Lunds Univ. Matem. Seminarium, т. I. Аналогичные условия см. в работе Колмогорова, Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, 1931. (Результат Колмогорова изложен в статье Л. А. Люстерника в настоящем выпуске „Успехов математических наук", стр. 96—97). См. также Tamarkin, On the compactness of the spaces L_p, Bull. Amer. Math. Soc., т. 38, 1932.

[2]) Для $p = 1$ это очевидно, для $p > 1$ вытекает из неравенства Гельдера, имеющего вид

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left\{\int |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int |g(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где p и q связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Полагая $g(x) = 1$, получаем требуемое неравенство.

Полагая в (A) сначала $l(y)=f(y)$, имеем

$$|f_\delta(x)| \leqslant \left(\frac{1}{V(\delta)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{S(x,\,\delta)} |f(y)|^p\,dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{V(\delta)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_E |f(y)|^p\,dy \right\}^{\frac{1}{p}},$$

т. е.

$$|f_\delta(x)| \leqslant \left(\frac{1}{V(\delta)}\right)^{\frac{1}{p}} M,$$

и, значит, семейство функций $f_\delta(x)$ равномерно ограничено.

Полагая теперь в (A)

$$l(y)=f(y+h)-f(y),$$

имеем

$$|f_\delta(x+h)-f_\delta(x)| \leqslant \left(\frac{1}{V(\delta)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_E |f(x+h)-f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

и, следовательно, можно найти такое η, что если $|h|<\eta$, то для всех функций $f_\delta(x)$ имеем $|f_\delta(x+h)-f_\delta(x)|<\varepsilon$. Итак, семейство функций $\{f_\delta(x)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, следовательно, компактно в смысле равномерной сходимости, а значит, и подавно в смысле сходимости в L_p.

Полагая, наконец, в (A)

$$l(y)=f(x)-f(y),$$

имеем

$$|f(x)-f_\delta(x)| \leqslant \left(\frac{1}{V(\delta)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{S(x,\,\delta)} |f(x)-f(y)|^p\,dy \right\}^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$|f(x)-f_\delta(x)|^p \leqslant \frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(x,\,\delta)} |f(x)-f(y)|^p\,dy = \frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(0,\,\delta)} |f(x)-f(x+h)|^p\,dh.$$

Интегрируя обе части полученного неравенства по x, имеем

$$\int\limits_E |f(x)-f_\delta(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{V(\delta)} \int\limits_{S(0,\,\delta)} dh \int\limits_E |f(x+h)-f(x)|^p\,dx.$$

Так как в силу условия 2) внутренний интеграл в правой части этого неравенства меньше, чем ε для всех функций $f(x)$ нашего семейства, то получаем

$$\left\{ \int\limits_E |f(x)-f_\delta(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Таким образом при любом ε для всякой функции $f(x)$ рассматриваемого семейства можно найти функцию некоторого компактного семейства пространства L_p, отстоящую от нее не более чем на ε, т. е. мы находимся в условиях теоремы Фреше.

Доказанная теорема, конечно, может быть обобщена на случай пространства $L_p^{(n)}$, где за точку принимается совокупность n точек $z_1, \ldots, z_n$ пространства L_p и расстояние между точками $A(z_1, \ldots, z_n)$ и $A'(z_1', \ldots, z'_n)$ определяется формулой

$$\rho(A, A') = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_E |z_i - z_i'|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

§ 5. Приложения принципа Шаудера.

Прежде всего начнем с классической теоремы существования для диференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Мы будем предполагать, что $f(x, y)$ — непрерывная функция в некоторой области изменения переменных: $|x - a| \leqslant h_1$, $|y - b| \leqslant h_2$. Путем замены переменных мы всегда можем добиться того, чтобы $a = 0$, $b = 0$.

Теорема. *Уравнение* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *всегда имеет решение* $\varphi(x)$, *удовлетворяющее условию* $\varphi(0) = 0$.

Доказательство. Сводим это уравнение к эквивалентному интегральному уравнению

$$y = \int_0^x f(t, y) \, dt.$$

Рассматриваем правую часть этого уравнения как оператор, определенный в пространстве непрерывных функций. Рассмотрим выпуклое множество непрерывных функций $|\varphi(x)| \leqslant h_2$ (являющееся, очевидно, замкнутым). Так как $f(x, y)$ непрерывно, то $f(x, \varphi(x))$ интегрируемо; пусть $\int_0^x f(t, \varphi(t)) \, dt = \psi(x)$. Так как

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t, \varphi(t)) \, dt \right| \leqslant h \max |f(x, y)|,$$

то результат операций представляет равностепенно непрерывное семейство функций, которые, очевидно, при достаточно малом x будут по абсолютной величине меньше, чем h_2. Таким образом при этих значениях x рассматриваемый оператор дает отображение замкнутого выпуклого множества полного нормированного линейного пространства на компактную его часть, а следовательно, на основании обобщенного принципа Шаудера существует неподвижная точка, т. е. непрерывная функция φ, удовлетворяющая равенству

$$\varphi = \int_0^x f(x, \varphi) \, dx,$$

т. е. нашему уравнению.

Эта теорема тем же методом может быть легко обобщена в самых разнообразных направлениях; например, как легко видеть, можно предполагать, что $f(x, y)$ — функция, измеримая по x и ограниченная для значений x и y, определенных в указанной области.

Наконец, вместо одного уравнения можно перейти к системе конечного и даже счетного числа уравнений, как показывает нижеследующая теорема Тихонова[1]).

Теорема Тиханова. *Пусть дана счетная система диференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

причем функции f_i непрерывны по всем переменным в некоторой области изменения переменных $|x_i| \leqslant a$ и равномерно ограничены для этих значений переменных. Тогда эта система диференциальных уравнений имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условиям $x_i(0) = 0$.

Заметим прежде всего, что если вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ подставить непрерывные функции от $t: \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$, то функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ будут измеримыми ограниченными функциями и, значит, интегрируемыми функциями переменной t; поэтому мы можем вместо системы диференциальных уравнений рассматривать систему интегральных уравнений

$$x_i(t) = \int_0^t f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) dt.$$

Пусть $|f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)| < M$. Будем рассматривать совокупность операций

$$v_i(t) = \int_0^t f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)\, dt,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — функции от t, не превосходящие по абсолютной величине M, как преобразование, определенное в пространстве C^∞ (см. выше стр. 159), ставящее точке этого пространства $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ в соответствие точку $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$. Последняя при $|t| < 1$ будет точкой того же пространства C^∞, так как $|v_i(t)| < M|t| < M$. Кроме того,

$$|v_i(t+h) - v_i(t)| = \left| \int_t^{t+h} f_i \, dt \right| < Mh,$$

и, значит, семейство i-х координат преобразованных точек равномерно непрерывно. Следовательно, множество точек $\{v_i\}$ компактно, а тогда в пространстве C^∞ должна существовать неподвижная точка, т. е. решение нашей системы.

[1]) А. Н. Тихонов, О бесконечных системах диференциальных уравнений, Матем. сборник, т. 41, вып. 4.

Второй пример возьмем из области нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна[1]). Рассмотрим в пространстве $L_p^{(n)}$, $p \geqslant 2$, оператор $u(\beta)$, вообще говоря, нелинейный, определенный системой равенств

$$u_i(\beta) = \int\limits_R K_i(\alpha, \beta) f_i(\alpha, z_1 \ldots, z_n)\, d\alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $(z_1, \ldots, z_n)$ — точка пространства $L_p^{(n)}$, α и β — точки n-мерного пространства и интегрирование производится по некоторому ограниченному n-мерному множеству R. Первой нашей задачей будет установить условия полной непрерывности этого оператора для любого ограниченного множества в пространстве $L_p^{(n)}$[2]). Именно, мы докажем следующее предложение:

Теорема. *Оператор $u(\beta)$ вполне непрерывен в пространстве $L_p^{(n)}$, $p \geqslant 2$, если* 1) *ядра $K_i(\alpha, \beta)$ удовлетворяют неравенствам $\int\limits_R |K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha \leqslant B^q$, $\int\limits_R |K_i(\alpha, \beta)|^q d\beta \leqslant B^q$, где B — постоянная и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;* 2) *функции $f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны для всех значений аргументов и в каждой сфере $\sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_R |z_i|^p d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} < M$ пространства $L_p^{(n)}$ ограничены некоторой интегрируемой в степени p функций от α:*

$$|f_i(\alpha, z_i, \ldots, z_n)| \leqslant \varphi_M(\alpha), \qquad \int\limits_R |\varphi_M(\alpha)|^p d\alpha < G^p < \infty.$$

Докажем сначала, что оператор $u(\beta)$ переводит каждое ограниченное множество элементов пространства $L_p^{(n)}$ в компактное множество. Так как каждое ограниченное множество из $L_p^{(n)}$ можно заключить в сферу $\sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_R |z_i|^p d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} < M$ подходяще выбранного радиуса, то достаточно, очевидно, показать, что оператор $u(\beta)$ переводит каждую такую сферу в компактное множество, а для этого в свою очередь достаточно показать, что функции $\{u_i(\beta)\}$, определенные на этой сфере, для любого i удовлетворяют условиям теоремы М. Рисса.

---

[1]) В. В. Немыцкий, Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений, Матем. сборник, т. 41, вып. 3; В. В. Немыцкий, Решения эллиптических уравнений в „малых областях", Матем. сборник, т. 43 (печатается). См. также Caccioppoli, Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni, Rend. Semin. Mat. R. Univ. di Padova, т. X, 1932, вып. 1—2.

[2]) Как уже было указано на стр. 145, мы называем оператор вполне непрерывным на некотором множестве, если он 1) непрерывен и 2) переводит это множество в компактное множество. В теории линейных операторов принято несколько отличное определение: линейный оператор называют вполне непрерывным, если он переводит любое ограниченное множество в компактное (непрерывен он по самому своему определению). В дальнейшем мы будем понимать полную непрерывность именно в этом последнем смысле.

Имеем

$$\left\{\int_R |u_i|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_R \left|\int_R K_i(\alpha, \beta) f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)\, d\alpha\right|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_R \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{p}{q}} \left[\int_R |f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)|^p d\alpha\right] d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int_R |f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)|^p d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_R \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{p}{q}} d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} <$$

$$< GB(\operatorname{mes} R)^{\frac{1}{p}} < B_1.$$

Итак, первое условие теоремы М. Рисса выполнено. Докажем, что выполнено также второе условие. Имеем, применяя неравенство Гельдера,

$$\left\{\int_R |u_i(\beta+h) - u_i(\beta)|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int_R \left|\int_R \{K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)\} f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)\, d\alpha\right|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_R \left\{\left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_R |f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)|^p d\alpha\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} <$$

$$< G\left\{\int_R \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \text{[1]} =$$

$$= G\left\{\int_R \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right] \times\right.$$

$$\left.\times \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{p}{q}-1} d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$\left(\text{так как } p \geqslant 2 \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ то } 1 < q \leqslant 2 \leqslant p \text{ и } \frac{p}{q} - 1 \text{ неотрицательно}\right).$

Но в силу неравенства Минковского

$$\left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h) - K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta+h)|^q d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_R |K_i(\alpha, \beta)|^q d\alpha\right]^{\frac{1}{q}} < 2B.$$

[1]) Если $p = q = 2$, то необходимость применения неравенства Минковского отпадает, и мы можем, минуя все дальнейшие выкладки, прямо перейти к заключениям, изложенным в следующем абзаце.

Следовательно,

$$\left\{\int\limits_R |u_i(\beta+h)-u_i(\beta)|^p\,d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} <$$

$$< G(2B)^{\frac{p-q}{q}} \left\{\int\limits_R\int\limits_R |K_i(\alpha,\ \beta+h)-K_i(\alpha,\ \beta)|^q\,d\alpha\,d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Но теперь, в силу условия 1) теоремы, $\int\limits_R\int\limits_R |K_i(\alpha,\ \beta)|^q\,d\alpha\,d\beta < B^q \operatorname{mes} R$. Значит, по известной теореме Лебега, интеграл $\int\limits_R\int\limits_R |K_i(\alpha,\beta+h)-K_i(\alpha,\beta)|^q\,d\alpha\,d\beta$ стремится к нулю при $h\to 0$, и так как этот интеграл, очевидно, не зависит от $u_i(\beta)$, то тем самым показано, что выполнено и второе условие теоремы М. Рисса. Этим компактность множества $\{u_i(\beta)\}$ доказана.

Доказательство непрерывности оператора $u(\beta)$ [1]) основывается на следующей лемме: если функции $f_i(\alpha,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$ удовлетворяют условиям 2) теоремы, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что при

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int\limits_R |z_i-z_i'|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}} < \delta$$

будем иметь

$$\int\limits_R |f_i(\alpha,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)-f_i(\alpha,\ z_1',\ \ldots,\ z_n')|^p\,d\alpha < \varepsilon.$$

По поводу доказательства этой леммы, которое может быть проведено обычными методами метрической теории функций, мы отсылаем к первой из наших статей, указанных в сноске [1]) на стр. 164. Дадим теперь доказательство непрерывности оператора $u(\beta)$. Для этого оценим

$$\rho(u_i,\ u_i') = \left\{\int\limits_R |u_i-u_i'|^p\,d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Имеем

$$\left\{\int\limits_R |u_i-u_i'|^p\,d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_R \left|\int\limits_R K_i(\alpha,\ \beta)\,[f_i(\alpha,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)-f_i(\alpha,\ z_1',\ \ldots,\ z_n')]\,d\alpha\right|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_R \left[\int\limits_R |K_i(\alpha,\ \beta)|^q\,d\alpha\right]^{\frac{p}{q}} \left[\int\limits_R |f_i(\alpha,z_1,\ldots,z_n)-f_i(\alpha,z_1',\ldots,z_n')|^p\,d\alpha\right]d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_R \left[\int\limits_R |K_i(\alpha,\ \beta)|^q\,d\alpha\right]^{\frac{p}{q}} d\beta\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_R |f_i(\alpha,z_1,\ldots,z_n)-f_i(\alpha,z_1',\ldots,z_n')|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}} <$$

$$< B(\operatorname{mes} R)^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_R |f_i(\alpha,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)-f_i(\alpha,\ z_1',\ \ldots,\ z_n')|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

[1]) Если бы оператор $u(\beta)$ был аддитивным, то его непрерывность вытекала бы уже из доказанной выше ограниченности.

Следовательно, на основании леммы расстояние между u_i и u_i', а значит, и

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int\limits_R |u_i-u_i'|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}},$$

стремится к нулю, когда расстояние между точками $A(z_1, \ldots, z_n)$ и $A'(z_1', \ldots, z_n')$ стремится к нулю, т. е. оператор $u(\beta)$ непрерывен. Тем самым теорема полностью доказана.

Вместо условий, наложенных на функции $f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)$ в доказанной теореме, можно потребовать, чтобы функции $f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)$ удовлетворяли условиям Гельдера, т. е. чтобы

$$|f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)-f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant$$
$$\leqslant M_1|z_1-z_1'|^{\nu_1}+\ldots+M_n|z_n-z_n'|^{\nu_n}.$$

Доказательство компактности получающегося при отображении множества остается тем же; что касается непрерывности, то она немедленно получится, если воспользоваться при оценке интеграла

$$\int |f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)-f_i(\alpha, z_1', \ldots, z_n')|^p d\alpha$$

неравенством

$$[a_1^{\nu_1}+a_2^{\nu_2}+\ldots+a_n^{\nu_n}]^p \leqslant n^{\frac{q}{p}}[a_1^{\nu_1 p}+a_2^{\nu_2 p}+\ldots+a_n^{\nu_n p}],$$

где, как и всюду, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Это последнее неравенство представляет собой непосредственное следствие неравенства Гельдера для сумм.

Пользуясь доказанной теоремой, легко утверждать существование решения у системы нелинейных интегральных уравнений

$$u_i(\beta)=\lambda\int\limits_R K_i(\alpha, \beta) f_i(\alpha, z_1, \ldots, z_n)\, d\beta, \quad i=1, \ldots, n,$$

для достаточно малых значений параметра λ, если K_i и f_i удовлетворяют условиям этой теоремы. Для возможности применения принципа неподвижных точек остается только показать, что при достаточно малом λ сфера радиуса M в пространстве $L_p^{(n)}$ переходит в свою часть, а это может быть легко получено непосредственным подсчетом.

Заметим, что из той же теоремы могла бы быть получена, например, теорема существования для эллиптического уравнения

$$\Delta z=f(x, y, z, p, q).$$

Для этого нужно было бы свести это уравнение к системе интегральных уравнений.

Уже последний пример показывает, что хотя применение общих принципов и дает возможность вести доказательства существования по строго определенному плану, тем не менее это отнюдь не снимает трудности проблемы, так как часто трудности, возникающие при проведении различных этапов доказательства, и являются главными при решении данной проблемы. Уже само сведение проблемы к функциональному преобразованию типа $\varphi=f(u)$ не всегда возможно и представляет часто значительные трудности.

Опишем в заключение этого параграфа один весьма общий прием приведения некоторого класса проблем к функциональным преобразованиям типа $\varphi=f(u)$.

Этот прием в частном случае был применен и высказан Каччополи в 1931 г.[1]) и в более общей форме в работе Лерея и Шаудера[2]) в 1934 г.; наконец, наиболее блестящее применение он получил в работе Шаудера в 1935 г.[3]). Вот в чем он состоит.

Пусть $L(v)$ — выражение, линейное относительно частных производных от v некоторого данного порядка; коэфициенты этого выражения мы предположим зависящими, уже, вообще говоря, нелинейно, от v и ее производных, порядок которых меньше, чем порядок тех производных, которые линейно входят в выражение $L(v)$.

Рассмотрим уравнение

$$L(v)=\varphi(x_1, \ldots, x_n, v, v_{x_1}, \ldots), \tag{a}$$

причем предположим, что порядок производных, входящих в φ, меньше, чем порядок производных, от которых $L(v)$ зависит линейно.

Поставим задачу найти решение уравнения $L(v)=\varphi$, удовлетворяющее некоторым граничным условиям, причем эти граничные условия должны быть такими, чтобы семейство функций, удовлетворяющих им, было выпуклым.

Подставим в коэфициенты $L(v)$ и в правую часть уравнения (a) вместо неизвестной v и ее производных — функции, удовлетворяющие граничным условиям. Тогда наше нелинейное уравнение превратится в линейное относительно v. Предположим далее, что решение полученных линейных уравнений возможно. Тогда каждой функции v будет соответствовать некоторая функция v', являющаяся решением соответствующей линейной проблемы. Очевидно, неподвижная точка полученного преобразования будет решением нелинейной проблемы (a).

§ 6. Слабая сходимость.

Остановимся теперь очень кратко на некоторых обобщениях принципа Шаудера и их приложениях. Среди таких обобщений наиболее интересны обобщения самого Шаудера на случай так называемой „слабой сходимости“ и обобщение Тихонова на неметрические пространства.

Начнем со слабой сходимости. Пусть дано линейное нормированное пространство и пусть дан в этом пространстве *линейный функционал*, т. е. оператор $u(x)$, ставящий в соответствие каждой точке нашего пространства некоторое число и обладающий следующими свойствами:

1) аддитивность: $u(x_1+x_2)=u(x_1)+u(x_2)$ и
2) непрерывность: если $x_n\to x$, то $u(x_n)\to u(x)$.

---

[1]) Caccioppoli, Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali, Rend. Accad. Lincei, т. 13, 1931.

[2]) J. Leray et J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Annales scient. de l'École Norm., серия III, 1934, вып. 1.

[3]) Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fund. Math., т. XXIV, 1935.

Введем следующее определение. Мы будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *слабо сходится* к элементу x, если для каждого линейного функционала

$$u(x_n) \to u(x).$$

Заметим, между прочим, что, пользуясь понятием слабой сходимости, можно формулировать условие для компактности множества в любом линейном нормированном пространстве.

Теорема Гельфанда[1]). *Для того чтобы множество M в линейном нормированном пространстве было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая слабо сходящаяся к нулю последовательность линейных функционалов сходилась на M равномерно.*

Из определения слабой сходимости ясно, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x в смысле метрики нашего пространства, то она сходится и слабо; но обратное, вообще говоря, не верно. Подобное определение сходимости не могло бы иметь широких применений, если бы мы не имели возможности найти общий вид линейных функционалов для различных типов пространств. Найдя общий вид функционалов для пространств L_p и C, можно получить следующие результаты. В пространстве непрерывных функций C слабая сходимость некоторой последовательности функций $\{f_n(t)\}$ эквивалентна следующему утверждению: все функции последовательности равномерно ограничены и $\lim f_n(t) = f(t)$, причем $f(t)$ — непрерывная функция. Для пространства L_p, $p > 1$, мы имеем следующую эквивалентную слабой сходимости формулировку[2]): для того чтобы в L_p, $p > 1$, последовательность $f_n(t)$ слабо сходилась к некоторой функции $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\int\limits_0^1 |f_n(t)|^p\, dt$ были равномерно ограничены и

2) $\lim \int\limits_0^u f_n(t)\, dt = \int\limits_0^u f(t)\, dt, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1.$

Интересно поставить вопрос, будет ли в пространстве L_p понятие слабой сходимости более общим, чем понятие сходимости в смысле метрики этого пространства (т. е. чем понятие сильной сходимости). Ответом на этот вопрос служит следующая теорема[3]). *Если последовательность $\{f_n(t)\}$ функций класса L_p, $p > 1$, слабо сходится к $f(t)$ и если, кроме того,*

$$\lim \int\limits_0^1 |f_n(t)|^p\, dx = \int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt,$$

то последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится к $f(t)$ и по норме, т. е.

$$\lim \int\limits_0^1 |f_n(t) - f(t)|^q\, dt = 0.$$

---

[1]) И. Гельфанд, Интегрирование абстрактных функций и аналитическое изображение линейных операторов. (Диссертация, 1935.)

[2]) F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann, т. 69, 1910.

[3]) F. Riesz, Sur la convergence en moyenne, Acta litt. ac scient. Szeged, т. IV, стр. 58—64.

Пользуясь понятием слабой сходимости, можно ввести следующие определения:

Множество называется *слабокомпактным*, если из любой его последовательности можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность.

Множество называется *слабозамкнутым*, если предел любой слабосходящейся последовательности сходится к элементу того же множества.

Оператор $F(x)$ называется *слабонепрерывным*, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует, что $F(x_n) \xrightarrow{\text{сл}} F(x)$.

Введем еще следующее определение: метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Второй принцип Шаудера. *Пусть дано полное нормированное сепарабельное пространство. Если некоторый слабонепрерывный оператор отображает выпуклое слабокомпактное и слабозамкнутое множество в свою часть, то существует неподвижная точка.*

Доказательство этого предложения основано на глубоких свойствах линейных операторов и не может быть дано без их изложения.

Шаудер [1]) приводит следующие примеры слабокомпактного множества и слабонепрерывного оператора. Рассмотрим множество непрерывных функций $p(\xi, \eta)$, $|p(\xi, \eta)| < M$; множество функций

$$z(x, y) = \int\int G(x, y, \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ — классическая функция Грина, будет слабокомпактным. Далее, оператор

$$Z(x, y) = \int\int G(x, y, \xi, \eta)\, f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta$$

будет слабонепрерывным, если

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqslant \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

где $\Phi(u)$ — монотонная непрерывная функция.

Эти примеры и второй принцип позволяют Шаудеру, например, формулировать следующую теорему:

Если функция $f(x, y, z, p, q)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqslant \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

где Φ монотонна и непрерывна, и непрерывным граничным условиям, то краевая задача для уравнения $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ будет разрешима для всех областей достаточно малого диаметра.

Надо, впрочем, отметить, что примеры, приводимые Шаудером, можно рассматривать также с помощью одного первого принципа существования неподвижной точки.

---

[1]) Schauder, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen", Math. Zeitschr., т. 26, 1927.

§ 7. Принцип Тихонова.

Рассмотрим одну весьма общую формулировку принципа неподвижной точки, данную А. Н. Тихоновым[1]). Для этого введем ряд новых определений.

Мы будем говорить, что данное множество элементов образует *топологическое пространство*, если каждому подмножеству A поставлено в соответствие другое подмножество $\bar{A}$, называемое *замыканием*, причем замыкания должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Замыкание пустого множества пусто.
2. Замыкание точки есть точка.
3. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
4. $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$.
5. $\bar{A}$ заключает A, $\bar{A} \supset A$.

Назовем множество F *замкнутым*, если $\bar{F} = F$. Дополнительное множество к замкнутому назовем *открытым* множеством или *областью*. Можно вместо замкнутых множеств взять за основу открытые множества.

Топологическое пространство назовем *пространством Гаусдорфа*, если, каковы бы ни были две точки пространства a и b, найдутся два открытых множества G_a и G_b таких, что

$$a \subset G_a, \quad b \subset G_b \quad \text{и} \quad G_a G_b = 0.$$

Все метрические пространства, как легко проверить, будут топологическими пространствами; но обратное неверно: существуют топологические пространства, в которые нельзя ввести метрики, т. е. найти такую функцию $\rho(a, b)$, удовлетворяющую аксиомам метрического пространства, чтобы замкнутые множества, определенные посредством этой функции, совпадали с замкнутыми множествами заданного топологического пространства.

Рассмотрим теперь следующий пример. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть дано пространство C равномерной сходимости. Каждому α поставим в соответствие некоторый экземпляр пространства C: C_α и рассмотрим пространство S, являющееся *топологическим произведением* всех пространств C_α, т. е. за точку этого пространства мы примем совокупность функций $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а за „окрестность“ данной точки $(\ldots, y_\alpha^0(x), \ldots)$ — совокупность точек $(\ldots, y_\alpha(x), \ldots)$, для которых удовлетворены неравенства $|y_\alpha(x) - y_\alpha^0(x)| < \varepsilon$ для всех α. Открытыми множествами этого пространства мы назовем суммы любого числа окрестностей любого числа точек; замкнутыми множествами будут дополнения к открытым множествам. Определенное так пространство S является обобщением пространства C^∞, каждая его точка имеет континуум координат. Можно было бы проверить, что все аксиомы топологического пространства для него выполнены.

Для того чтобы для топологических пространств можно было доказать „принцип неподвижной точки“, приходится ввести ряд дополнительных ограничений.

---

[1]) Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., т. 111, 1935.

Именно, мы будем говорить, что топологическое пространство *линейно*, если для его элементов определены операции сложения и умножения на действительное число, удовлетворяющее обычным требованиям, и притом непрерывные в этом пространстве.

Определим, например, непрерывность сложения. Пусть даны два элемента x и y пространства R; мы будем говорить, что операция сложения непрерывна, если, каково бы ни было открытое множество U_z, заключающее элемент $z = x + y$, найдутся такие открытые множества U_x и U_y, заключающие соответственно x и y, что, каковы бы ни были элементы a из U_x и b из U_y, $a + b$ заключается в U_z; аналогично определяем непрерывность умножения на действительное число.

Назовем *прямой* в таком пространстве совокупность точек $\alpha x + \beta y$, где α и β — любые действительные числа, и *отрезком*, соединяющим точки x и y, — совокупность точек $\alpha x + \beta y$, где α и β — действительные числа и $\alpha + \beta = 1$. Мы будем называть множество точек в пространстве R *выпуклым*, если вместе с каждой парой точек x, y оно содержит и весь соединяющий их отрезок. Скажем далее, что пространство R *локально выпукло*, если, каково бы ни было открытое множество, заключающее точку x, найдется выпуклое множество, содержащее эту точку и содержащееся в данном открытом множестве.

Заметим, что линейное нормированное пространство принадлежит к числу топологических локально выпуклых пространств, так как всякая сфера в таком пространстве есть выпуклое множество. Пространство S тоже принадлежит к числу локально выпуклых пространств. Наконец, назовем некоторое пространство или множество в пространстве *бикомпактным*, если каждое множество A этого пространства имеет *точку конденсации*, т. е. такую точку, что в любом открытом множестве, содержащем эту точку, заключается часть множества A, по мощности равная самому A. В бикомпактных пространствах имеет силу теорема Бореля-Лебега: *Из всякого покрытия данного пространства системой областей можно выделить конечное покрытие.* Компактные метрические пространства или компактные множества в метрических пространствах будут бикомпактными, но существуют и другие бикомпактные множества. Вернемся, например, к построенному нами пространству S. Рассмотрим множество E точек этого пространства, имеющих в качестве координат только такие непрерывные функции $\varphi(x)$, для которых выполнены условия: 1) $\varphi(x)$ равномерно ограничены и 2) $\varphi(x)$ имеют равномерно ограниченные производные; тогда множество E, как можно показать, будет бикомпактным в пространстве S.

Рассмотрим в линейном топологическом пространстве некоторый функциональный оператор $O(x)$, переводящей точки нашего пространства в точки этого же пространства. Мы будем говорить, что этот оператор *непрерывен*, если, каково бы ни было открытое множество U_y, заключающее образ точки x, т. е. точку $y = O(x)$, всегда найдется такое открытое множество U_x, заключающее точку x, что образ $O(a)$ любой точки a, заключающейся в области U_x, лежит в области U_y.

Пользуясь введенными определениями, мы выскажем следующий общий принцип.

Ппринцип Тихонова. *При каждом непрерывном отображении выпуклого бикомпактного множества некоторого линейного локально-выпуклого пространства в свою часть сущестеует по меньшей мере одна неподвижная точка.*

Дадим краткую наметку доказательства. Пусть при некотором отображении нет неподвижной точки. Тогда мы можем для каждой точки найти такую выпуклую окрестность, которая не имеет общих точек со своим образом. Далее, пользуясь бикомпактностью пространства, можно нетривиальными рассуждениями показать, что для каждого покрытия пространства R областями $\{W\}$ можно построить другое покрытие $\{U\}$, называемое более мелким подразделением покрытия $\{W\}$, которое удовлетворяет следующему условию: каждой области U можно поставить в соответствие область W так, что если $UU' \neq 0$, то $U' \subset W$. Пользуясь непрерывностью отображения, для каждой точки x выделяем область $V_x \ni x$ такую, что ее образ целиком лежит в одном из U. Покрытие областями U мы можем считать конечным, так как в бикомпактных пространствах верна теорема Бореля-Лебега. В каждой области $U_1, U_2, \ldots, U_p$ этого конечного покрытия выберем по точке, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и рассмотрим множество L, состоящее из точек y, определенных по формуле

$$y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i,$$

где

$$\alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Можно доказать, что это множество гомеоморфно некоторому r-мерному симплексу ($r \leqslant p$). Подразделим множество L на конечное число столь мелких симплексов S, чтобы их образы всегда попадали в одно из U_i. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_q$ — вершины этих симплексов. Определим некоторое отображение φ множества L самого в себя. Именно, положим $\varphi(y_i) = x_k$, где x_k принадлежит тому U_k, к которому принадлежит образ вершины y_i, т. е. точка $f(y_i)$. Таким образом отображение будет определено в вершинах симплексов S, внутри же симплексов мы его линейно интерполируем. Это будет непрерывное отображение симплекса L в себя, следовательно, на основании теоремы Броуэра будет существовать неподвижная точка x_0: $\varphi(x_0) = x_0$.

Покажем теперь, что $\varphi(x)$ и $f(x)$ для некоторой точки L лежат в одном и том же W, что приведет нас к противоречию со свойством покрытия W, высказанным в начале доказательства. Пусть x — некоторая точка L и пусть она лежит в некотором симплексе S, с вершинами $y_1, \ldots, y_l$. Образ S при отображении f, т. е. $f(x)$ и все $f(y_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, l$), всегда лежит в одном из U, например в U_0. Тогда $f(y_i)$ и $\varphi(y_i)$ согласно определению отображения $\varphi(y_i)$ находятся в таком U_i, что $U_0 U_i \ni f(y_i)$; отсюда следует, что все U_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) принадлежат тому W, — пусть это будет W_0, — которое поставлено в соответствие с U_0. Но если $\varphi(y_i)$ принадлежит W_0, то вследствие выпуклости W_0 ему же принадлежит $\varphi(x)$, а тогда $f(x) \subset U_0 \subset W_0$ и $\varphi(x) \subset W_0$, т. е. мы приходим к противоречию с определением покрытия W. Этим принцип Тихонова доказан.

В качестве приложения докажем следующую теорему Тихонова.

Каждая система диференциальных уравнений

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = f_\alpha(x, \ldots, y_\beta, \ldots),$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, *имеет по меньшей мере одно решение, удовлетворяющее* *начальным условиям* $y_\alpha(x_0)=y_\alpha^0$, *если только правые части уравнений для всех значений переменных* y_β *и для всех* $|x-x_0|\leqslant a$ *определены, непрерывны и ограничены, т. е.*

$$|f_\alpha(x, \ldots, y_\beta, \ldots)|\leqslant M_\alpha.$$

Доказательство. Если мы вместо y_β будем под знак функции f_α подставлять непрерывные функции $y_\beta(x)$, то полученные функции от x тоже будут непрерывны. Заменяем, как обычно, систему диференциальных уравнений системой интегральных уравнений

$$y_\alpha(x)=y_\alpha^0+\int\limits_{x_0}^{x} f_\alpha(x, \ldots, y_\beta(x), \ldots)\,dx,$$

и рассматриваем правые части как непрерывный оператор в пространстве S, построенном в начале этого параграфа. Оно представляет собой линейное топологическое локальновыпуклое пространство. В нем рассматриваем множество точек, координаты которых $f(x)$ удовлетворяют условиям:

1) $$y_\alpha^0-M_\alpha a\leqslant f(x)\leqslant y_\alpha^0+M_\alpha a;$$

α принимает конечное число значений.

2) все производные числа функций $f(x)$ по абсолютной величине не превосходят M_α.

Это — выпуклое бикомпактное множество в нашем пространстве. Далее показываем, что определенный нами оператор отображает это множество в свою часть, и этим доказываем теорему существования.

Таково современное состояние вопроса о теоремах существования в анализе, доказываемых методом неподвижных точек; совершенно ясно, что и в направлении новых приложений этого метода, и в направлении обобщения самого принципа неподвижной точки оно еще требует дальнейшего развития, и, несомненно, ближайшие годы принесут новые успехи в этой области математики.