ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ МНОЖИТЕЛѢ

РАЗНОСТНЫХЪ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Кн. С. С. Урусова.

(Читана 16-го марта 1865 г.).

Способъ непосредственнаго интегрированія уравненій въ разностяхъ.—Объ интегрирующемъ множителѣ неточныхъ разностей.— Замѣчаніе относительно дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, образующихся изъ начальной чрезъ посредство двухъ послѣдовательныхъ дѣйствій: дифференцированія и исключенія постоянной. — Объ интегрирующемъ множителѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. — Зависимость, существующая между интегрирующими множителями производныхъ отъ одной и той же начальной. — Вопросъ относительно замѣненія независимой перемѣнной x другою перемѣнною t приводится къ отыскиванію значенія интегрирующаго множителя. — Лемма. — Заключительные выводы. — Прибавленіе.

Примѣчаніе. Ссылки съ указаніями страницъ относятся къ сочиненію моему «Дифференціальныя и разностныя уравненія»; въ тѣхъ же случаяхъ, когда ссылка дѣлается на *нумеръ*, надо разумѣть нумеръ настоящей записки.

СТАТЬЯ I.

Непосредственное интегрированіе уравненій въ разностяхъ.

1. Въ настоящей статьѣ предлагается рѣшеніе слѣдующихъ вопросовъ, до сихъ поръ неизслѣдованныхъ:

1-е. Какъ узнать, что уравненіе въ разностяхъ 1-го порядка съ двумя перемѣнными, независимою x, зависимою u, есть результатъ одного только дѣйствія взятія разности.

2-е. Какъ должно интегрировать точную разность какого ни есть порядка?

И, какъ заключительный выводъ изъ рѣшенія послѣдняго вопроса, предлагается способъ узнавать точную разность также и въ томъ случаѣ, когда уравненіе какого ни есть порядка.

2. Предварительно условимся въ способѣ означенія.

Символомъ $U_{u,x}=0$ будемъ изображать начальную функцію вида $F(x, u)=0$, въ которой x имѣетъ приращеніемъ число постоянное $\Delta x=h$.

Когда возьмется разность этой начальной относительно одной перемѣнной x, напишемъ

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x.$$

Точно также, обозначимъ чрезъ

$$\frac{\Delta U}{\Delta u}\Delta u$$

взятіе разности начальной, относительно одной перемѣнной u.

Когда же въ количествѣ, обозначенномъ чрезъ $\frac{\Delta U}{\Delta u}$, измѣнится только одна перемѣнная x въ $x+h$, и потомъ возьмется разность, напишемъ

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta u\ \Delta x}\Delta u\ \Delta x.$$

При такомъ означеніи, *полная разность* начальной изобразится уравненіемъ

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x+\left(\frac{\Delta U}{\Delta u}+\frac{\Delta^2 U}{\Delta u\,\Delta x}\Delta x\right)\Delta u=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по условію имѣемъ:

$$U_{u,x+h}-U_{u,x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x$$

$$U_{u+\Delta u,x} - U_{u,x} = \frac{\Delta U}{\Delta u}\Delta u$$

$$U_{u+\Delta u,x+\Delta x} - U_{u,x+\Delta x} - U_{u+\Delta u,x} + U_{u,x} = \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta u \Delta x,$$

и сумма этихъ частныхъ разностей доставляетъ

$$U_{u+\Delta u,x+h} - U_{u,x} = \frac{\Delta U}{\Delta x}\Delta x + \left(\frac{\Delta U}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}\Delta x\right)\Delta u,$$

какъ и должно быть.

Положивъ же

$$M = \frac{\Delta U}{\Delta x}, \quad N = \frac{\Delta U}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \, \Delta x}\Delta x,$$

получимъ общій видъ уравненія въ разностяхъ 1-го порядка 1-й ст. съ двумя перемѣнными,

(1) . . . . $M\Delta x + N\Delta u = 0.$

3. Возьмемъ разность отъ M по одной перемѣнной u; будетъ:

(2) . . . . $\dfrac{\Delta^2 U}{\Delta x \, \Delta u} = \dfrac{\Delta M}{\Delta u}.$

Возьмемъ разность этого послѣдняго количества по одной перемѣнной x; будетъ:

(3) . . . . $\dfrac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u} = \dfrac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x}.$

Беремъ наконецъ разность отъ N относительно одной перемѣнной x,

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x} + \frac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u}\Delta x,$$

и въ это выраженіе вносимъ значенія $\dfrac{\Delta^2 U}{\Delta u \Delta x}$, $\dfrac{\Delta^3 U}{\Delta x^2 \Delta u}$, доставляемыя (2) и (3); получимъ формулу

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta u} + \frac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x} \Delta x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

которая и составитъ полное рѣшеніе перваго изъ предложенныхъ вопросовъ. Всякій разъ, когда найдемъ, что значенія M, N удовлетворяютъ условію (I), будемъ знать, что предложенное уравненіе интегрируемо *непосредственно*.

Въ случаѣ приращеній безконечно-малыхъ, формула (I), преобразится въ извѣстную формулу Эйлера

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{du}.$$

4. Это же условіе получится если къ (1) примѣнимъ слѣдующій способъ непосредственнаго интегрированія.

По условію имѣемъ

$$M\Delta x + N\Delta u = \Delta U_{u,x}.$$

Возьмемъ интегралъ члена $M\Delta x$, принимая u за постоянное; обозначивши этотъ частный интегралъ чрезъ U', будетъ

$$U' = \sum M\Delta x.$$

Беремъ потомъ полную разность этого интеграла,

$$\Delta U' = M\Delta x + \left\{ \frac{\Delta(\Sigma M\Delta x)}{\Delta u} + \frac{\Delta^2(\Sigma M\Delta x)}{\Delta x \Delta u} \Delta x \right\} \Delta u,$$

и результатъ вычитаемъ изъ даннаго уравненія,

$$\Delta U_{u,x} - \Delta U' = \left\{ N - \frac{\Delta(\Sigma M\Delta x)}{\Delta u} - \frac{\Delta^2(\Sigma M\Delta x)}{\Delta x \Delta u} \Delta x \right\} \Delta u;$$

наконецъ, разсуждаемъ такъ:

Лѣвая часть этого равенства есть *точная разность*, слѣдовательно и правая часть должна быть *точною разностію*; а такъ какъ это послѣднее можетъ быть только въ томъ случаѣ, если количество помноженное на Δu будетъ независимо отъ x. то и имѣемъ, какъ выраженіе необходимаго и достаточнаго условія интегрируемости, формулу

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} - \frac{\Delta^2(\Sigma M\Delta x)}{\Delta u \Delta x} - \frac{\Delta^3(\Sigma M\Delta x)}{\Delta x^2 \Delta u}\Delta x = 0.$$

А это и есть (I), ибо

$$\frac{\Delta^2(\Sigma M\Delta x)}{\Delta u\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta u}, \quad \frac{\Delta^3(\Sigma M\Delta x)}{\Delta x^2\Delta u} = \frac{\Delta^2 M}{\Delta x\Delta u}.$$

5. Слѣдуя этому методу можно заключить о точности или неточности разности какого ни есть порядка. А именно: если вышеизложенное послѣдовательное интегрированіе закончится такою разностію, которая будетъ функціей одной перемѣнной,— это будетъ значить, что предложенная разность *точная*; въ противномъ же случаѣ, если послѣдняя разность не будетъ функціей одной перемѣнной, заключимъ, что предложенное уравненіе есть разность *неточная*.

Для примѣра, найдемъ интегралъ слѣдующаго уравненія 2-го порядка:

$$(x+2\Delta x)^2\Delta^2 u + 2(2x+3\Delta x)\Delta x\Delta u + 2u\Delta x^2 = 0.$$

Для краткости будемъ изображать его чрезъ ΔU.

По вышесказанному, беремъ интегралъ по одной перемѣнной x члена $2u\Delta x^2$, заключающаго въ себѣ низшую разность функціи; обозначивши этотъ частный интегралъ чрезъ U', будетъ:

$$U' = u(2x\Delta x + \Delta x^2).$$

Полную разность этого интеграла,

$$\Delta U' = 2u\Delta x^2 + (2x + 3\Delta x)\Delta x\Delta u,$$

вычитаемъ изъ ΔU; получаемъ

$$\Delta U - \Delta U' = (x + 2\Delta x)^2.\Delta^2 u + (2x+3\Delta x)\Delta x\Delta u.$$

Въ этой разности интегрируемъ по x опять членъ съ низшею разностію функціи; обозначивши этотъ новый частный интегралъ чрезъ U'', будетъ

$$U'' = (x^2 + 2x\Delta x)\Delta u.$$

Полную разность этого частнаго интеграла,

$$\Delta U'' = (2x + 3\Delta x)\Delta x\Delta u + |(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)\Delta x|\,\Delta^2 u,$$

вычитаемъ изъ $\Delta U - \Delta U'$; получаемъ

$$\Delta U - \Delta U' - \Delta U'' = \Delta x^2 \Delta^2 u.$$

Правая часть этого равенства есть функція одной перемѣнной, такъ что $\Delta x^2 \sum \Delta^2 u = \Delta x^2 \Delta u$; слѣдовательно предложенное уравненіе есть *точная разность перваго порядка* отъ

$$\left|\frac{c}{\Delta x} + u(2x + \Delta x)\right|\Delta x + (x + \Delta x)^2.\Delta u = 0.$$

Чтобы узнать не есть ли предложенное уравн. точная разность *2-го порядка,* провѣримъ условіе интегрируемости относительно только что найденнаго перваго интеграла.

Имѣемъ:

$$M = \frac{c}{\Delta x} + u(2x + \Delta x),\ N = (x + \Delta x)^2.$$

Такъ какъ

$$\frac{\Delta M}{\Delta u} = 2x + \Delta x,\quad \frac{\Delta^2 M}{\Delta u \Delta x} = 2,\quad \frac{\Delta N}{\Delta x} = 2x + 3\Delta x,$$

и этими значеніями условіе (I) удовлетворяется, то и заключаемъ, что полная начальная можетъ быть найдена, такъ же какъ и первый интегралъ, непосредственно. Впрочемъ и не провѣряя условія, можно придти къ тому же заключенію.

Въ настоящемъ случаѣ интегралъ члена $M\Delta x$ по x есть:

$$\sum M\Delta x = \frac{cx}{\Delta x} + u.x^2.$$

Полная разность этого интеграла будетъ:

$$\Delta\left(\sum M\Delta x\right) = c + u(2x + \Delta x)\Delta x + (x + \Delta x)^2.\Delta u.$$

Вычтя ее изъ даннаго уравненія, то есть изъ $M\Delta x + N\Delta u = 0$, и взявъ потомъ интегралъ, найдемъ

$$x^2 u + \frac{cx}{\Delta x} + c_2 = 0.$$

Это и есть полная начальная.

6. Должно однакожъ замѣтить, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ встрѣтиться необходимость брать интегралъ не съ низшей разности, а съ высшей, и не по x, принимая за постоянное u, а по произведенію $\Delta u(x+h)$, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ:

Пусть $(x+1)(x+2)\Delta^3 u = 0$, $\Delta x = 1$.

Разность произведенія двухъ функцій x, напр. $v.y$, есть, какъ извѣстно,

$$\Delta(vy) = v\Delta y + (\Delta y + y)\Delta v.$$

По первому способу мы брали частный интегралъ

$$v\sum \Delta y = vy;$$

по другому же способу, интегрированіе начинается съ члена $(\Delta y + y)\Delta v$. Ясно, что онъ образуется изъ $v.y$ посредствомъ взятія разности отъ v, и одновременнаго измѣненія y въ $y + \Delta y$; поэтому, на оборотъ, частный интегралъ *по произведенію*, будетъ $v.y$; то есть онъ получается изъ произведенія $(\Delta y + y)\Delta v$ посредствомъ одновременнаго измѣненія Δv въ v, и y въ $y - \Delta y$.

Принявъ только что сказанное во вниманіе, измѣняемъ въ данномъ уравненіи x въ $x-1$, а $\Delta^3 u$ въ $\Delta^2 u$; будетъ

$U' = x(x+1)\Delta^2 u$, гдѣ U' употреблено для сокращенія рѣчи, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ.

Полная разность отъ U' будетъ:

$$[(x+1)(x+2) - x(x+1)]\Delta^2 u + (x+1)(x+2)\Delta^3 u = \Delta U'.$$

Вычтя ее изъ даннаго уравненія, которое обозначаемъ, какъ всегда, чрезъ $\Delta U_{u,x}$, получимъ

$$\Delta U_{u,x} - \Delta U' = -2(x+1)\Delta^2 u.$$

Опять беремъ частный интегралъ посредствомъ одновременнаго измѣненія $\Delta^2 u$ въ Δu, x въ $x-1$; будетъ:

$$U'' = -2x\Delta u.$$

Полную разность этого частнаго интеграла, которая есть

$$\Delta U'' = [-2(x+1)+2x]\Delta u - 2(x+1)\Delta^2 u,$$

вычитаемъ изъ $\Delta U - \Delta U'$; получаемъ

$$\Delta U - \Delta U' - \Delta U'' = 2\Delta u.$$

Такая окончательная разность, въ которой, какъ въ настоящемъ случаѣ, правая часть, $2\Delta u$, есть функція одной перемѣнной, доказываетъ, что предложенное уравненіе есть точная разность относительно уравненія

$$U' + U'' + 2u + c = 0,$$

то есть относительно

$$x(x+1)\Delta^2 u - 2x\Delta u + 2u + c = 0,$$

которое и есть его первый интегралъ.

Проинтегрировавъ этотъ первый интегралъ по тому же способу, увидимъ, что интегрированіе остановится; а именно получится

$$x(x-1)\Delta u - 4(x-1)u + cx + c_1 + 6\sum u = 0.$$

Относительно другихъ примѣровъ отсылаемъ къ слѣдующей и къ послѣдней статьямъ.

СТАТЬЯ II.

Объ интегрирующемъ множителѣ неточныхъ разностей.

7. Изъ формулы (I) не трудно вывести уравненіе для опредѣленія интегрирующаго множителя μ уравненія

$$\mathrm{M}\Delta x + \mathrm{N}\Delta u = 0:$$

надо только замѣнить въ ней M, N произведеніями $\mathrm{M}\mu$, $\mathrm{N}\mu$. Если это сдѣлаемъ, то получимъ слѣдующее уравненіе

$$\begin{aligned}&\left\{\mathrm{M}+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta x}+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta u}+\frac{\Delta^2 \mathrm{M}}{\Delta u\,\Delta x}\right\}\frac{\Delta^2\mu}{\Delta u\,\Delta x}\,\Delta x\\
&+\left\{\mathrm{M}+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta u}+\left(\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta x}+\frac{\Delta^2 \mathrm{M}}{\Delta u\Delta x}\right)\Delta x\right\}\frac{\Delta\mu}{\Delta u}\\
&+\left\{\left(\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta u}+\frac{\Delta^2 \mathrm{M}}{\Delta u\Delta x}\right)\Delta x-\mathrm{N}-\frac{\Delta \mathrm{N}}{\Delta x}\right\}\frac{\Delta\mu}{\Delta x}\\
&+\left\{\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta u}-\frac{\Delta \mathrm{N}}{\Delta x}+\frac{\Delta^2 \mathrm{M}}{\Delta u\,\Delta x}\right\}\mu=0.\end{aligned}$$

Не останавливаясь покамѣстъ на этой формулѣ по причинѣ ея сложности, обратимъ исключительное наше вниманіе на уравненія линейныя; это будетъ тѣмъ полезнѣе, что интереснѣйшіе вопросы, къ которымъ теорія разностей примѣнима, приводятся къ уравненіямъ линейнымъ.

8. Итакъ, пусть $\Delta x = 1$, и докажемъ слѣдующее примѣчательное предложеніе:

Если изобразимъ чрезъ u_1, u_2, ... u_n частные интегралы линейнаго уравненія

$$\Delta^n u + \mathrm{A}_x^{(n-1)}\Delta^{n-1}u + \mathrm{A}_x^{(n-2)}\Delta^{n-2}u + \ldots + \mathrm{A}'_x\Delta u + \mathrm{A}_x u = 0, \quad (1)$$

въ которомъ $A_x^{(n-1)}$, $A_x^{(n-2)}$, ..., A'_x, A_x данныя, вообще, между собою различныя, функціи x; чрезъ u'_r, u''_r, ..., u^n_r послѣдовательныя разности общаго члена частныхъ интеграловъ u_r, $r=1, 2, \ldots n$; чрезъ D_x опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} u_1^{n-1}, & u_1^{n-2} & \ldots & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^{n-1}, & u_n^{n-2}, & \ldots & u_n \end{vmatrix},$$

котораго значеніе есть, какъ доказано въ моемъ сочиненіи (стр. 285),

$$D_x = c\left[1 - A_{x-1}^{(n-1)} + A_{x-1}^{(n-2)} - \ldots (-1)^n A_{x-1}\right]^{(x)} \ldots\ldots \text{(II)}$$

(x) факторіальный указатель; и наконецъ, чрезъ M_x отношеніе

$$\frac{1}{D_x} \cdot \frac{dD_x}{du_r^{n-1}},$$

разумѣя подъ

$$\frac{dD_x}{du_r^{n-1}}$$

производную отъ опредѣлителя, взятую по элементу u_r^{n-1}: тогда *интегрирующій множитель* (1) *будетъ* M_{x+1}, *а первый интегралъ*

$$\frac{1}{D_x}\left\{\frac{dD}{du_r^{n-1}}.\,\Delta^{n-1}u + \frac{dD}{du_r^{n-2}}.\,\Delta^{n-2}u + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{dD}{du'_r}\Delta u + \frac{dD}{du_r}u\right\} = c_r \ldots\ldots \quad (2)$$

Доказательство. — Помножимъ обѣ части (2) на D_x и припишемъ r послѣдовательно значенія $1, 2, \ldots\ldots n$; получимъ слѣдующія n уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dD}{du_1^{n-1}}\Delta^{n-1}u+\frac{dD}{du_1^{n-2}}\Delta^{n-2}u+\ldots\ldots \\
\qquad\qquad +\frac{dD}{du'_1}\Delta u+\frac{dD}{du_1}u=c_1D_x \\
\frac{dD}{du_2^{n-1}}\Delta^{n-1}u+\frac{dD}{du_2^{n-2}}.\Delta^{n-2}u+\ldots\ldots \\
\qquad\qquad +\frac{dD}{du'_2}\Delta u+\frac{dD}{du_2}u=c_2D_x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dD}{du_n^{n-1}}\Delta^{n-1}u+\frac{dD}{du_n^{n-2}}.\Delta^{n-2}u+\ldots\ldots \\
\qquad\qquad +\frac{dD}{du'_n}\Delta u+\frac{dD}{du_n}u=c_nD_x
\end{array}\right\} \ldots \quad (3)$$

Ясно, что если результатъ исключенія изъ этой системы всѣхъ n разностей u, будетъ полное значеніе u, то есть

$$u=c_1u_1+c_2u_2+\ldots\ldots c_nu_n, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

то изъ этого необходимо придется заключить, что каждое изъ n уравненій этой системы есть относительно (1) *первый интегралъ*, и что, слѣдовательно, (2) есть общій членъ этихъ интеграловъ. Если же это докажется, то останется взять разность (2) и уравнять между собою коэффиціенты полученной разности и (1) помноженнаго на M_{x+1}. А такъ какъ въ полученной разности коэффиціентъ при $\Delta^n u$ будетъ M_{x+1}, то, необходимо, это количество и должно быть интегрирующимъ множителемъ (1).

Итакъ, исключимъ изъ (3) одновременно всѣ разности отъ u; получимъ, какъ извѣстно изъ теоріи опредѣлителей (стр. 366), слѣдующій результатъ:

$$D_x^{n-1}.\,u=D_x^{n-1}\left(c_1\frac{d^{n-1}D}{du_2^{n-1}..du'_n}-c_2\frac{d^{n-1}D}{du_1^{n-1}du_3^{n-2}..du'_n}\right.$$
$$\left.+\ldots(-1)^{n-1}c_n\frac{d^{n-1}D}{du_1^{n-1}\ldots du'_{n-1}}\right)$$

Но

$$\frac{d^{n-1}D}{du_2^{\,n-1}..du'_n}=u_1,\quad \frac{d^{n-1}D}{du_1^{\,n-1}du_3^{\,n-2}..du'_n}=-u_2,$$

$$\frac{d^{n-1}}{du_1^{\,n-1}..du'_{n-1}}=(-1)^{n-1}u_n;$$

а потому, по сокращенiи, получимъ (4).

Что и треб. доказать.

9. Другаго рода доказательство приведено въ слѣдующей статьѣ. Мы примѣнимъ оба доказательства къ слѣдующему уравненiю 2-го порядка

$$(1)\ \ldots\ldots\quad \Delta^2 u+A'_x\Delta u+A_x u=0.$$

Надо доказать, что M_{x+1} есть интегрирующiй множитель этого уравненiя, а

$$(2)\ \ldots\ldots\quad \frac{1}{D_x}\left\{\frac{dD}{du'_r}\,\Delta u+\frac{dD}{du_r}\,u\right\}=c_r$$

первый интегралъ.

Напомнимъ, что $M_x=\frac{1}{D}\cdot\frac{dD}{du'_r}$, $D_x=c\,[1-A'_{x-1}+A_{x-1}]^{(x)}$.

Сверхъ того можно для краткости положить $M'_x=\frac{1}{D}\cdot\frac{dD}{du_r}$.

Итакъ, беремъ разность (2):

$$M_{x+1}.\Delta^2 u+(\Delta M_x+M'_{x+1})\,\Delta u+\Delta M'_x.u=0,$$

и, по помноженiи (1) на M_{x+1}, уравниваемъ между собою коэффицiенты; получимъ:

$$\Delta M_x+M'_{x+1}=M_{x+1}.A'_x$$
$$\Delta M'_x=M_{x+1}A_x.$$

Изъ послѣдняго имѣемъ непосредственно:

$$M'_x=\sum M_{x+1}\,.\,A_x.$$

Внеся же это значенiе въ первое, найдемъ, сперва,

$$M_{x+1}(1-A'_x+A_x)-M_x+\sum M_{x+1}\,.\,A_x=0,$$

а потомъ, по причинѣ равенства

$$\frac{D_{x+1}}{D_x}=1-A'_x+A_x,$$

$$\frac{D_{x+2}}{D_{x+1}}\,.\,M_{x+2}-(2-A'_x)\,M_{x+1}+M_x=0.$$

Для приведенiя его въ простѣйшiй видъ, положимъ

$$M_x=\frac{N_x}{D_x},\ \text{то есть}\ N_x=\frac{dD}{du'_r},$$

тогда получится, по сокращенiи,

$$N_{x+2}-(2-A'_x)\,N_{x+1}+N_x(1-A'_x+A_x)=0.$$

Что и есть условiе для опредѣленiя множителя, и при этомъ-то условiи (2) будетъ общимъ членомъ первыхъ интеграловъ (1).

Изъ этого условiя тотчасъ видно, что въ случаѣ $D_x=0$ уравненiе (1) понижается безъ интегрированiя на единицу: надо только замѣнить въ (1) разности отъ u послѣдовательными состоянiями функцiи; коэффицiентъ при u будетъ нуль.

10. Другой способъ доказательства убѣждаетъ въ томъ, что M_x дѣйствительно должно быть $\frac{1}{D}.\frac{dD}{du'_r}$.

Приписавъ r значенiя 1, 2, послѣдовательно, получимъ изъ (2), по помноженiи на D_x, слѣдующiя два уравненiя:

$$\frac{dD_r}{du'_1}\Delta u+\frac{dD}{du_1}u=c_1 D_x$$

$$\frac{dD}{du'_2}\Delta u+\frac{dD}{du_2}u=c_2 D_x.$$

Исключеніе Δu доставитъ:

$$\left(\frac{dD}{du_1}\cdot\frac{dD}{du'_2}-\frac{dD}{du_2}\cdot\frac{dD}{du'_1}\right)u=D_x\left(c_1\frac{dD}{du'_2}-c_2\frac{dD}{du'_1}\right).$$

Но

$$D_x=\frac{dD}{du_1}\cdot\frac{dD}{du'_2}-\frac{dD}{du_2}\cdot\frac{dD}{du'_1},$$

$$\frac{dD}{du'_2},=u_1,\ \frac{dD}{du'_1}=-u_2;$$

а потому

$$u=c_1u_1+c_2u_2.$$

11. Какъ заключеніе изъ предыдущаго слѣдуетъ:

1° Линейное уравненіе понижается безъ интегрированія на единицу въ случаѣ $D_x=0$;

2° Интегрирующій множитель линейнаго уравненія есть функція одной перемѣнной x;

и 3° Если извѣстно $n-1$ значеній M_x, то найдется и полная начальная.

Послѣднее заключеніе явствуетъ изъ того, что если изъ $n-1$ уравненій полученныхъ изъ (2) исключатся всѣ разности кромѣ Δu, то получится линейное уравненіе 1-го порядка, котораго интегралъ извѣстенъ.

Такъ напр. изъ

$$N_x\Delta u-\Delta N_x\,.\,u=D_x\,,$$

по помноженіи на $\frac{1}{N_x N_{x+1}}$, вывели бы

$$u=N_x\left(c_1+\sum\frac{D_x}{N_x N_{x+1}}\right).$$

Относительно другихъ любопытныхъ выводовъ отсылаемъ къ послѣдней статьѣ (нум. 39).

СТАТЬЯ III.

Объ интегрирующемъ множителѣ дифференціальныхъ уравненій образующихся изъ начальной чрезъ посредство двухъ дѣйствій: дифференцированія и исключенія постоянной.

12. Занимаясь спеціально теоріей интегрирующаго множителя, я предположилъ себѣ изслѣдовать, между прочимъ, также и слѣдующій вопросъ: чѣмъ характеризуется дифф. уравненіе 1-го порядка съ двумя перемѣнными, когда оно образовалось изъ начальной чрезъ посредство двухъ послѣдовательныхъ дѣйствій: дифференцированія и исключенія постоянной?

Изслѣдованіе далеко еще не кончено; но и то, что сдѣлано, заслуживаетъ вниманія математиковъ.

Частный случай, съ котораго я началъ изслѣдованіе, слѣдующій:

Пусть $F(x, y) = 0$ нѣкоторая начальная функція двухъ перемѣнныхъ x, y, заключающая въ себѣ одну произвольную постоянную величину c; разрѣшимъ это уравненіе относительно c, и изобразимъ результатъ отношеніемъ

$$\frac{f(x, y)}{\psi(x, y)} = -c,$$

или, просто, такъ: $\frac{f}{\psi} = -c$: . . . . (1)

тогда начальной можно будетъ дать и такой видъ

$$f + c\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (1) получается производная вида

$$M + Ny' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

какъ извѣстно, такого свойства, что

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Если же возьмемъ производную отъ (2), а потомъ исключимъ c, то результатъ этихъ двухъ дѣйствій изобразится либо такъ:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' - \frac{f}{\psi}\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\,y'\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

либо слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{df}{dx} - \frac{f}{\psi}\frac{d\psi}{dx} + \left(\frac{df}{dy} - \frac{f}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy}\right)y' = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

въ обоихъ видахъ условіе интегрируемости удовлетворено не будетъ.

13. Положимъ

$$M_1 = \frac{df}{dx} - \frac{f}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx},\ N_1 = \frac{df}{dy} - \frac{f}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy};$$

тогда условіе Эйлера доставитъ:

$$\frac{dN_1}{dx} - \frac{dM_1}{dy} = \frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{f}{\psi}\right) - \frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\psi}\right).$$

Но изъ (3) имѣемъ;

$$N = \frac{d}{dy}\left(\frac{f}{\psi}\right),\ M = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\psi}\right),$$

а потому

$$N_1 = \psi.\,N,\ \ M_1 = \psi.\,M,$$

$$\frac{dN_1}{dx} - \frac{dM_1}{dy} = N.\frac{d\psi}{dx} - M\,\frac{d\psi}{dy},\ \text{или}$$

$$\frac{dN_1}{dx} - \frac{dM_1}{dy} = \frac{N_1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} - \frac{M_1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Этою особенностію, что $\frac{1}{\psi}$ и $\frac{1}{f}$ интегрирующіе множители

$$M_1 + N_1 y' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

и что эти множители заключаются въ самомъ уравненіи, характеризуется уравненіе 1-го порядка происходящее отъ (2) чрезъ посредство двухъ дѣйствій: дифференцированія и исключенія постоянной.

Очевидно, что еслибы извѣстны были оба множителя, то, приравнявъ отношеніе $\frac{f}{\psi}$ произвольной постоянной, получили бы начальную безъ интегрированія. Это подтверждаетъ довольно извѣстную истину: если будутъ извѣстны два значенія множителя, то найдется и полная начальная.

14. Изъ только что сказаннаго проистекаетъ двоякій способъ интегрированія (6):

1° Можно привести это уравненіе къ виду (4): если же это сдѣлаемъ, и опредѣлимъ потомъ либо f, либо ψ, либо отношеніе $\frac{f}{\psi}$, то найдемъ и начальную. Успѣхъ же опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ будетъ зависѣть отъ того: угадаемъ ли мы тѣ члены, которые, какъ имѣвшіе знаки противные, должны были исчезнуть.

Угадать результатъ дифференцированія и исключенія c, предшествовавшій этому третьему, неуловимому дѣйствію, сокращенію $+$ на $-$, и составляетъ единственную трудность рѣшенія (6). Мы говоримъ *единственную* потому, что, какъ уже сказано, оба множителя должны заключаться явнымъ образомъ въ данномъ уравненіи.

2° Формула (I) есть извѣстное условіе Эйлера для опредѣленія множителя; только въ настоящемъ случаѣ оно получилось не вслѣдствіе подстановленія $N\mu$, $M\mu$ вмѣсто N, M въ $\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$, а непосредственно, изъ даннаго уравненія (6). Эта формула доставляетъ, какъ извѣстно, систему дробей:

$$(\mathrm{II}) \;.\;.\;.\quad \frac{d\psi}{\psi\left(\frac{dN_1}{dx}-\frac{dM_1}{dy}\right)}=\frac{dx}{N_1}=-\frac{dy}{M_1}\,.$$

Интегрированіе этой системы и составляетъ другой способъ отыскиванія начальной.

15. Въ примѣръ 1-го способа возьмемъ извѣстное уравненіе линейное 1-го порядка.

$$y' + Xy - Q = 0.$$

Чтобы узнать не есть ли это уравненіе результатъ двухъ только дѣйствій, напишемъ его въ формѣ (4), и съ этою цѣлію введемъ въ него предварительно неизвѣстную функцію P съ $+$ и $-$; получимъ

$$y' + P - Q + X\left\{y - \frac{P}{X}\right\} = 0.$$

Сравнивъ этотъ результатъ съ (4), видимъ, что

$$f = y - \frac{P}{X}, \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = y' + P - Q,$$

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{d\psi}{dy} y' + \frac{d\psi}{dx}\right) = - X.$$

Въ настоящемъ случаѣ множитель опредѣляется легко, такъ какъ изъ послѣдняго предположенія слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{\psi} = e^{\int X dx}.$$

Но такъ какъ это трансцендентное число не заключается *явно* въ данномъ уравн., то любопытно изслѣдовать какъ могло оно исчезнуть?

Этотъ послѣдній вопросъ въ настоящемъ случаѣ приводится опять къ линейному уравн. по причинѣ условія

$$P - Q = - \frac{d}{dx}\left(\frac{P}{X}\right).$$

Но и не зная рѣшенія этого уравненія легко догадаться, что исчезнувшее количество P есть

$$P = X\, e^{-\int X dx} \int e^{\int X dx} Q dx.$$

Такимъ образомъ находимъ, что оба множителя, $\frac{1}{\psi}$, $\frac{1}{f}$ заключаются явнымъ образомъ въ самомъ уравненіи, а потому начальная $\frac{f}{\psi}$, то есть

$$e^{\int X dx}\left(y - e^{-\int X dx} \int e^{\int X dx} Q dx\right) = c_1,$$

получается безъ интегрированія.

Этотъ способъ весьма удобно примѣняется и къ уравненіямъ выше 1-го порядка; отыскиваніе исчезнувшихъ членовъ всегда будетъ зависѣть отъ рѣшенія уравненія 1-го порядка 1-й степени.

16. Вся послѣдующая статья посвѣщена теоріи множителя, а потому распространяться здѣсь объ общемъ случаѣ, когда уравненіе вида

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + Xy = 0,$$

считаемъ излишнимъ. Однакоже, чтобы не возвращаться къ уравненію 1-го порядка, обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Извѣстный математикъ Ліувилль нашелъ, что если D опредѣлитель только что приведеннаго уравненія, то всегда

$$D = ce^{-\int X_{n-1} dx};$$

Юрьевъ же замѣтилъ, что всегда

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}}$$

интегрирующій множитель этого уравненія: какъ видно, оба вывода справедливы также и при $n = 1$.

Въ самомъ дѣлѣ, когда частный интегралъ одинъ, напр. y_1, то $D = y_1$, и изъ $\frac{y'_1}{y_1} = -X_1$ получается

$$D = y_1 = ce^{-\int X dx}, \quad \frac{dD}{dy_1} = 1,$$

такъ что значеніе множителя остается то, которое найдено Юръевымъ.

17. Въ примѣръ интегрированія системы (II) избираемъ уравненіе

$$\text{(A)} \quad \ldots \quad a_1 + b_1 x + c_1 y + (a_2 + b_2 x + c_2 y) y' = 0.$$

Это уравненіе, получившее столь большую извѣстность съ появленія въ печати труда Миндинга, я привожу съ двоякою цѣлію: во 1-хъ чтобы показать сколь просто и элегантно опредѣляется одновременно и множитель и начальная; во 2-хъ, какъ необходимое прибавленіе къ названному труду Миндинга.

Въ настоящемъ случаѣ имѣемъ:

$$N_1 = a_2 + b_2 x + c_2 y, \quad M_1 = a_1 + b_1 x + c_1 y;$$

а потому

$$\frac{dN_1}{dx} = b_2, \quad \frac{dM_1}{dy} = c_1,$$

$$\text{(II')} \quad \frac{d\psi}{\psi(b_2 - c_1)} = \frac{dx}{a_2 + b_2 x + c_2 y} = \frac{-dy}{a_1 + b_1 x + c_1 y}.$$

На основаніи той извѣстной теоремы, что каждая дробь системы (II'), или другой подобной, равна такой дроби, у которой числитель однородная функція и линейная числителей другихъ дробей, а знаменатель такая же функція знаменателей, имѣемъ:

$$\frac{d\psi}{\psi(b_2 - c_1)} = \frac{dx - m dy}{a_2 + m a_1 + (b_2 + m b_1) x + (c_2 + c_1 m) y},$$

или

$$\frac{d\psi}{\psi(b_2-c_1)}=\frac{1}{b_2+mb_1}\cdot\frac{(b_2+mb_1)\,dx-m\,(b_2+mb_1)\,dy}{(b_2+mb_1)\,x+(c_2+c_1m)\,y+a_2+a_1m.}$$

Опредѣлимъ m такъ, чтобы существовало равенство

$$m\,(b_2+mb_1)=-\,(c_2+c_1\,m),$$

и пусть m_1, m_2, значенія m удовлетворяющія этому квадратному уравненію: тогда для ψ получатся слѣдующія два значенія:

$$c'\,\psi=\Big\{(b_2+m_1b_1)x+(c_2+c_1m_1)y+a_2+a_1m_1\Big\}^{\frac{b_2-c_1}{b_2+m_1b_1}}$$

$$c''\,\psi=\Big\{(b_2+m_2b_1)x+(c_2+c_1m_2)y+a_2+a_1m_2\Big\}^{\frac{b_2-c_1}{b_2+m_2b_1}}.$$

Одно изъ этихъ значеній будетъ f, а другое доставитъ $\frac{1}{\psi}$; начальная же будетъ $\frac{f}{\psi}=\mathrm{C}$, то есть

$$\mathrm{C}=\left\{\frac{\Big[(b_2+m_1b_1)x+(c_2+c_1m_1)y+a_2+a_1m_1\Big]^{\frac{1}{b_2+m_1b_1}}}{\Big[(b_2+m_2b_1)x+(c_2+c_1m_2)y+a_2+a_1m_2\Big]^{\frac{1}{b_2+m_2b_1}}}\right\}^{b_2-c_1}$$

Или, возвысивъ обѣ части равенства въ степень $\frac{1}{b_2-c_1}$, и приравнявъ $\mathrm{C}^{\frac{1}{b_2-c_1}}=\mathrm{C}_1$ получимъ другой видъ той же начальной.

Въ случаѣ $b_2=c_1$ интегралъ найдется непосредственно.

18. Этотъ видъ начальной полагаю не безъ-извѣстнымъ; онъ приведенъ въ сочиненіи Буля, которое вышло въ свѣтъ въ 1859

году, а изъ сочиненія Буля позаимствовалъ этотъ способъ интегрированія уравненія (А) и я (стр. 203). Я замѣтилъ сверхъ того, что производная этого уравненія интегрируется множителемъ вида $\varphi(y')$ и что она удовлетворяется значеніемъ $y' = \alpha$, изъ котораго проистекаетъ подстановленіе $y = \alpha x + \beta$, употребленное Миндингомъ; только α опредѣляется изъ квадратнаго уравненія

$$\alpha^2 . c_2 + \alpha(c_1 + b_2) + b_1 = 0.$$

Въ статьѣ моей о совокупныхъ уравненіяхъ это самое уравненіе (А) приведено ввидѣ дробей

$$\frac{dx}{a_2 + b_2 x + c_2 y} = \frac{dy}{a_1 + b_1 x + c_1 y} = \frac{dt}{t}, \quad . \; . \quad (A')$$

гдѣ $\frac{dt}{t}$ есть произвольная точная производная отъ $logt$. Получивъ два значенія для t, это количество исключается и получается вышеприведеннаа начальная. И этотъ способъ, какъ сказано, я заимствовалъ у Буля.

Изъ сравненія послѣдней системы дробей съ (II') получается

$$t = \psi^{\frac{1}{b_2 - c_1}}$$

Дальнѣйшее развитіе теоріи интегрированія уравненій, происходящихъ отъ начальной чрезъ посредство сказанныхъ двухъ дѣйствій, составитъ предметъ другаго моего мемуара, а теперь обращаемся къ теоріи множителя общаго линейнаго дифференціальнаго уравненія.

СТАТЬЯ IV.

Объ интегрирующемъ множителѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

19. Въ послѣдней статьѣ упомянуто, что Ліувиль нашелъ формулу

$$D = c e^{-\int X_{n-1} dx} = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n \end{vmatrix} \quad \dots\dots (S)$$

опредѣляющую зависимость, существующую между опредѣлителемъ и коэффиціентами при $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ уравненія

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \dots X_1 y' + X y = 0 \quad \dots (1)$$

Мы полагаемъ $X_n = 1$, но если бы мы этого не сдѣлали, формула (S) преобразовалась бы въ

$$c e^{-\int \frac{X_{n-1}}{X_n} dx}.$$

Я сказалъ также, что С. А. Юрьевъ замѣтилъ и сообщилъ мнѣ, что

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}} \quad \dots\dots\dots (F)$$

есть интегрирующій множитель (1); вслѣдствіе чего общій членъ *первыхъ интеграловъ* (1) есть

$$\frac{1}{D} \left\{ \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}} y^{(n-1)} + \frac{dD}{dy_r^{(n-2)}} y^{(n-2)} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{dD}{dy'_r} y' + \frac{dD}{dy_r} y \right\} = c_r, \quad \dots \quad (2)$$

разумѣя подъ $y_r^{(s)}$ производную порядка s отъ частнаго интеграла y_r, $r = 1, 2; \ldots n$.

Это послѣднее, что (2) есть общій членъ первыхъ интеграловъ (1) замѣтилъ я самъ, и теперь я намѣренъ доказать какъ свойство количества (F), такъ и свойство (2). Потомъ, какъ заключительный выводъ изъ этого предложенія, покажу зависимость существующую между множителями послѣдовательныхъ интеграловъ (1); а наконецъ опредѣлю видъ полнаго значенія y.

20. Доказать вышесказанное предложеніе, что (2) есть общій членъ первыхъ интеграловъ (1), и что, слѣдовательно, (F) есть интегрирующій множитель (1) можно двоякимъ способомъ: первый весьма убѣдителенъ и простъ; другой же, не менѣе убѣдителенъ, но довольно сложенъ.

Первый способъ. — Припишемъ r въ (2) послѣдовательно значенія 1, 2, . . n тогда, по помноженіи на D, получится n слѣдующихъ уравненій:

$$(3)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dD}{dy_1^{(n-1)}}y^{(n-1)}+\dfrac{dD}{dy_1^{(n-2)}}y^{(n-2)}+\ldots+\dfrac{dD}{dy_1}y=c_1D\\ \dfrac{dD}{dy_2^{(n-1)}}y^{(n-1)}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{dD}{dy_2}y=c_2D\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dD}{dy_n^{(n-1)}}y^{(n-1)}+\dfrac{dD}{dy_n^{(n-2)}}y^{(n-2)}+\ldots+\dfrac{dD}{dy_n}y=c_nD.\end{array}\right.$$

Результатъ исключенія производныхъ y', y'', ... $y^{(n-1)}$ изъ этой системы долженъ быть, какъ извѣстно,

$$(E)\ \ldots\ldots\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

потому что, по предположенію, каждое изъ этихъ n уравненій есть относительно (1) первый интегралъ. И такъ, если докажется, что результатъ исключенія производныхъ изъ (3) есть дѣйствительно (E), то тѣмъ самымъ докажется, что (2) есть общее выраженіе первыхъ интеграловъ. За симъ, чтобы убѣдится относительно справедливости того предложенія, что (F) есть интегрирующій множитель, останется только взять производную (2); а такъ какъ коэффиціентъ при $y^{(n)}$ въ этой производной будетъ необходимо (F), то и заключаемъ, что это предложеніе есть слѣдствіе перваго предложенія.

Но изъ теоріи опредѣлителей знаемъ, что результатъ исключенія производныхъ изъ (3) долженъ быть (стр. 356) слѣдующій:

$$y \,.\, D^{n-1} = D^{n-1}\left(c_1 \frac{d^{n-1}D}{dy_2^{(n-1)}\ldots dy'_n} - c_2 \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{n-1}dy_3\ldots^{(n-2)}} + \ldots (-1)^{n+1} c_n \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{n-1}\ldots dy'_{n-1}}\right).$$

А такъ какъ притомъ же

$$\frac{d^{n-1}D}{dy_2^{n-1}\ldots dy'_n} = y_1, \quad \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{n-1}dy_3^{n-2}\ldots dy'_n} = -y_2,$$

$$\ldots \frac{d^{n-1}D}{dy_1^{(n-2)}dy_2^{(n-2)}\ldots dy'_{n-1}} = (-1)^{n+1} y_n,$$

то и получаемъ, по сокращеніи, (E), что и требов. доказать.

21. *Другой способъ.* — Когда возьмемъ производную отъ (2), и сравнимъ коэффиціенты полученнаго уравненія съ соотвѣтствующими коэффиціентами даннаго уравненія помноженнаго на (F), то получится слѣдующая система условныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dD}{dy_r^{(n-1)}}\right) + \dfrac{dD}{dy_r^{(n-2)}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dD}{dy_r^{(n-2)}}\right) + \dfrac{dD}{dy_r^{(n-3)}} = X_{n-2}\dfrac{dD}{dy_r^{(n-1)}} - X_{n-1}\,.\dfrac{dD}{dy_r^{(n-2)}}. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dD}{dy_r^{(n-h)}}\right) + \dfrac{dD}{dy_r^{(n-h-1)}} = X_{n-h}\dfrac{dD}{dy_r^{(n-1)}} - X_{n-1}\,.\dfrac{dD}{dy_r^{(n-h)}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dD}{dy_r}\right) = X\dfrac{dD}{dy_r^{(n-1)}} - X_{n-1}\,.\dfrac{dD}{dy_r}.
\end{array}\right\}(4)$$

Надо доказать, что значенія производныхъ отъ D дѣйствительно таковы, что условія эти могутъ быть ими удовлетворены.

Съ этою цѣлію, изслѣдуемъ на основаніи правила для дифференцированія опредѣлителя, написаннаго въ символической формѣ (S), чему равна сумма

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}\right)+\frac{dD}{dy_n^{(n-h-1)}}.$$

Мы приписали r значеніе изъ ряда $1,\ 2, \ldots\ldots n$ для того, чтобы не вводить лишнихъ буквъ; это, очевидно, не можетъ умалить строгости доказательства.

Правило для взятія производной по x отъ опредѣлителя слѣдующее:

Должно взять производную по x отъ каждаго изъ элементовъ каждаго столбца отдѣльно, не измѣняя въ то же время элементовъ прочихъ столбцовъ, и потомъ взять сумму этихъ частныхъ производныхъ.

Для примѣра составимъ производныя по x отъ слѣдующихъ двухъ опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_3'' & y_3' & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1''' & y_1' & y_1 \\ y_2''' & y_2' & y_2 \\ y_3''' & y_3' & y_3 \end{vmatrix}.$$

По сказанному правилу имѣемъ:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_3'' & y_3' & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1''' & y_1' & y_1 \\ y_2''' & y_2' & y_2 \\ y_3''' & y_3' & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1'' & y_1'' & y_1 \\ y_2'' & y_2'' & y_2 \\ y_3'' & y_3'' & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1' \\ y_2'' & y_2' & y_2' \\ y_3'' & y_3' & y_3' \end{vmatrix};$$

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1''' & y_1' & y_1 \\ y_2''' & y_2' & y_2 \\ y_3''' & y_3' & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1^{\text{IV}} & y_1' & y_1 \\ y_2^{\text{IV}} & y_2' & y_2 \\ y_3^{\text{IV}} & y_3' & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1''' & y_1'' & y_1 \\ y_2''' & y_2'' & y_2 \\ y_3''' & y_3'' & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1''' & y_1' & y_1' \\ y_2''' & y_2' & y_2' \\ y_3''' & y_3' & y_3' \end{vmatrix}.$$

Первый примѣръ относится къ случаю $h=1$, то есть къ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dD}{dy_n^{(n-1)}}\right)$, такъ какъ

$$\frac{dD}{dy_n^{(n-1)}}=\begin{vmatrix} y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-3)} & \dots & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}^{(n-2)} & y_{n-1}^{(n-3)} & \dots & y_{n-1} \end{vmatrix};$$

послѣдній же приличествуетъ общему случаю $h>1$, такъ какъ при такихъ значеніяхъ h всегда

$$\frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} \dots & y_1^{(n-h+1)}, & y_1^{(n-h-1)}, & y_1^{(n-h-2)} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}^{(n-1)} \dots & y_{n-1}^{(n-h+1)}, & y_{n-1}^{(n-h-1)}, & y_{n-1}^{(n-h-2)} \dots \end{vmatrix}.$$

Въ первомъ случаѣ, $h=1$, во всѣхъ слагаемыхъ опредѣлителяхъ кромѣ одного будетъ по двѣ колонны съ элементами тожественными, какъ это видно изъ примѣра перваго. Въ общемъ же случаѣ, $h>1$, въ каждомъ изъ слагаемыхъ кромѣ двухъ, какъ это легко усмотрѣть изъ втораго примѣра. А такъ какъ такія тожества обращаютъ опредѣлитель въ нуль, то и будетъ:

$$(5)\dots\dots \frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-1)}}\right)=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y^{(n-3)} & \dots & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}^{(n-1)} & y_{n-1}^{(n-3)} & \dots & y_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(6)\dots \frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}\right)=\begin{vmatrix} y_1^{(n)} \dots & y_1^{(n-h+1)}, & y_1^{(n-h-1)}, & y_1^{(n-h-2)} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}^{(n)} \dots & y_{n-1}^{(n-h+1)}, & y_{n-1}^{(n-h-1)}, & y_{n-1}^{(n-h-2)} \dots \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} \dots & y_1^{(n-h)}, & y_1^{(n-h-2)} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}^{(n-1)} \dots & y_{n-1}^{(n-h)} \dots & y_{n-1}^{(n-h-2)} \dots \end{vmatrix}$$

Но вторая часть равенства (5) взятая съ противнымъ знакомъ и есть значеніе

$$\frac{dD}{dy_n^{(n-2)}},$$

а потому

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-1)}}\right)+\frac{dD}{dy_n^{(n-2)}}=0.$$

Что и есть первое условіе системы (4).

Въ общей же формулѣ (6) второе слагаемое во второй части равенства есть значеніе $\frac{dD}{dy_n^{(n-h-1)}}$ взятое съ противнымъ знакомъ; а потому

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}\right)+\frac{dD}{dy_n^{(n-h-1)}}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1^{(n)}\ldots y_1^{(n-h+1)}, & y_1^{(n-h-1)}\ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n-1}^{(n)}\ldots y_{n-1}^{(n-h+1)}, & y_{n-1}^{(n-h-1)},\ldots \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (7)$$

Это послѣднее равенство можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}\right)+\frac{dD}{dy_n^{(n-h-1)}}=\sum_{k=1}^{k=n-1}y_k^{(n)}\cdot\frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)}dy_n^{(n-h)}}\;;\;\ldots\;(8)$$

потому что, по принятому означенію, $\frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)}dy_n^{(n-h)}}$ есть значеніе второй части (7), изъ которой вычеркнутъ столбецъ съ элементами коихъ верхній значекъ есть n, и рядъ элементовъ съ нижнимъ значкомъ k, $k = 1, 2, \ldots\ldots n-1$; такъ что если въ произведенiи $y_k^{(n)} \cdot \frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)} dy_n^{(n-h)}}$ припишемъ k, послѣдовательно, значенiя $1, 2, \ldots n-1$, а потомъ возьмемъ сумму полученныхъ произведенiй, то получится истинное значенiе сокращенной формулы (8) и символа (7).

Беремъ теперь въ разсмотрѣнiе слѣдующую систему уравненiй:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1^{(n)} \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}} + y_2^{(n)} \frac{dD}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} = -D.X_{n-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{(n)} \frac{dD}{dy_1^{(n-h)}} + y_2^{(n)} \frac{dD}{dy_2^{(n-h)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} = -D.X_{n-h} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{(n)} \frac{dD}{dy_1} + y_2^{(n)} \frac{dD}{dy_2} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{dD}{dy_n} = -D.X
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Она получается, какъ извѣстно (стр. 377), посредствомъ послѣдовательнаго исключенiя всѣхъ коэффицiентовъ кромѣ одного X_{n-h}, $h = 1, 2, \ldots n$, изъ системы

$$\begin{array}{l}
y_1^{(n)} + X_{n-1}\, y_1^{(n-1)} + X_{n-2}\, y_1^{(n-2)} + \ldots Xy_1 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n^{(n)} + X_{n-1}\, y_n^{(n-1)} + X_{n-2}\, y_n^{(n-2)} + \ldots + Xy_n = 0.
\end{array}$$

Если изъ (9) исключимъ одинъ и тотъ же элементъ $y_r^{(n)}$, напр. $y_n^{(n)}$, послѣдовательно между первымъ и вторымъ ур., между первымъ и третьимъ, и т. д., то получимъ, вообще,

$$y_1^{(n)} \left(\frac{dD}{dy_1^{(n-1)}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} - \frac{dD}{dy_1^{(n-h)}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} \right)$$

$$+ y_2^{(n)} \left(\frac{dD}{dy_2^{(n-1)}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} - \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} \cdot \frac{dD}{dy_2^{(n-h)}} \right)$$

$$+ \ldots y^{(n)}_{n-1} \left(\frac{dD}{dy^{(n-1)}_{n-1}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} - \frac{dD}{dy^{(n-h)}_{n-1}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} \right)$$

$$= D \left(X_{n-h} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} - X_{n-1} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} \right).$$

Но суммовой членъ лѣвой части этого равенства есть

$$D \sum_{k=1}^{k=n-1} y_k^{(n)} \frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)} dy_n^{(n-h)}},$$

ибо

$$\frac{dD}{dy_k^{(n-1)}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}} - \frac{dD}{dy_k^{(n-h)}} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} = D \cdot \frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)} dy_n^{(n-h)}};$$

а потому, по сокращеніи, и будетъ

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} y_k^{(n)} \cdot \frac{d^2D}{dy_k^{(n-1)} dy_n^{(n-h)}} = X_{n-h} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-1)}} - X_{n-1} \cdot \frac{dD}{dy_n^{(n-h)}}.$$

Изъ сравненія этой формулы съ (8) заключаемъ о равенствѣ

$$(10) \ldots \frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_r^{(n-h)}} \right) + \frac{dD}{dy_r^{(n-h-1)}}$$

$$= X_{n-h} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-1)}} - X_{n-1} \cdot \frac{dD}{dy_r^{(n-h)}}.$$

Подставляя вмѣсто k послѣдовательно $1, 2, 3, \ldots \ldots n$, получимъ всѣ n условій (4).

Это требовалось доказать.

22. Послѣ столь убѣдительныхъ доказательствъ, не можетъ быть сомнѣній относительно общности и справедливости предложенія заявленнаго въ началѣ этой статьи; и теперь остается только перечислить замѣчательнѣйшіе выводы изъ этой истины, и подтвердить общую теорію частными примѣрами.

Королларій 1. — Первое заключеніе есть, конечно, то, что множитель линейнаго дифференціальнаго уравненія есть функція одной перемѣнной x; почему онъ и долженъ опредѣлиться изъ извѣстнаго условія Эйлера

$$(\mathrm{I}) \cdot\cdot \frac{d^n\mu}{dx^n} - \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\mu.X_{n-1}) + \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(\mu X_{n-2}) \ldots (-1)^n \mu X = 0,$$

гдѣ дифференцированіе должно быть произведено только по x.

Королларій 2. — Положимъ, что вторая часть (1) не нуль, а другое какое нибудь число постоянное или перемѣнное: тогда, такъ какъ эта часть уравненія въ самомъ общемъ случаѣ будетъ нѣкоторой данной функціей x, X_{n+1}, а множитель μ также функція x, хотя и неизвѣстная, — можемъ заключить, что значеніе X_{n+1} не можетъ измѣнить значенія μ; что впрочемъ явствуетъ и изъ (I); а потому первый интегралъ будетъ все-таки (2), но во второй части его прибавится членъ $\int \mu.X_{n+1}dx$.

Королларій 3. — Изъ доказаннаго предложенія проистекаетъ правило для составленія значенія интегрирующаго множителя какого ни есть линейнаго дифференціальнаго уравненія, а слѣдовательно также и значеній множителей послѣдовательныхъ интеграловъ (1). Правило это слѣдующее:

Посредствомъ раздѣленія всего уравненія на коэффиціентъ высшей производной отъ y, данное уравненіе приводится къ виду (1); потомъ на основаніи формулы Ліувилля составляется значеніе опредѣлителя, отъ котораго берется производная по высшей производной элемента y_r, заключающагося въ опредѣлителѣ: *отношеніе этой производной отъ опредѣлителя къ значенію опредѣлителя и будетъ значеніемъ интегрирующаго множителя.*

На этомъ основаніи, если положимъ для краткости

$$D_1 = \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}},\ D_2 = \frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_2^{(n-2)}}\ \dots\ .$$

$$D_i = \frac{d^iD}{dy_1^{(n-1)}\dots dy_i^{(n-i)}},$$

и примемъ сверхъ того въ соображеніе, что каждый изъ послѣдовательныхъ интеграловъ долженъ быть освобожденъ отъ коэффиціента высшей производной y, общая зависимость существующая между множителями послѣдовательныхъ интеграловъ отъ (1) изобразится слѣдующимъ рядомъ:

$$\frac{D_1}{D},\ D.\frac{D_2}{D_1^{\ 2}},\ D_1\frac{D_3}{D_2^{\ 2}},\ \dots\ \frac{D_{i-2}.D_i}{D^2_{i-1}}.\ \dots\ \frac{D_{n-2}.D_n}{D^2_{n-1}}\ \dots \qquad (G)$$

Вслѣдствіе же этого закона полное значеніе y, долженствующее удовлетворить (1), будетъ:

$$(H)\ \dots\ y = c_n D_{n-1} + c_{n-1} D_{n-1}\int\frac{D_{n-2}.D_n}{D^2_{n-1}}dx$$

$$+ c_{n-2} D_{n-1}\int\frac{D_{n-2}.D_n}{D^2_{n-1}}\int\frac{D_{n-3}D_{n-1}}{D^2_{n-2}}dx^2$$

$$+\dots+ c_1 D_{n-1}\int\frac{D_{n-2}.D_n}{D^2_{n-1}}\int\dots\dots\int e^{\int X_{n-1}dx}.\frac{D_2}{D_1^{\ 2}}.dx^{n-1},$$

гдѣ c_r, $r = 1, 2, \dots n$, произвольная постоянная.

23. Приложимъ теперь вышеизложенную теорію къ частнымъ случаямъ, и во первыхъ къ уравн. 2-го порядка

$$(1_1) \quad \ldots \ldots \quad y'' + Xy = 0.$$

Предварительно замѣчаемъ:

1° Линейное диф. уравн., какъ извѣстно, всегда можетъ быть освобождено отъ своего втораго члена X_{n-1}; поэтому мы вправѣ, для сокращенія формулъ, разсматривать частныя уравненія вида (1_1).

2° D_i, какъ извѣстно, всегда можетъ быть выражено въ функціи однихъ только значеній производной $\frac{dD}{dy_r^{(n-1)}}$. Для этого надо только принять въ соображеніе условія (4), а также и слѣдующую систему:

$$(K)\ldots\left\{\begin{aligned}
&D.\frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_2^{(n-2)}} = \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}}\cdot\frac{dD}{dy_2^{(n-2)}} \\
&\qquad -\frac{dD}{dy_1^{(n-2)}}\cdot\frac{dD}{dy_2^{(n-1)}}, \\
&\frac{dD}{dy_1^{(n-1)}}\cdot\frac{d^3D}{dy_1^{(n-1)}dy_2^{(n-2)}.dy_3^{(n-3)}} = \frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_2^{(n-2)}}\cdot \\
&\frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_3^{(n-3)}} - \frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_3^{(n-2)}}\cdot\frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}dy_2^{(n-3)}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&D_{i-2}.D_i = D^2_{i-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_{i-1}}{D_{i-1}}\right)
\end{aligned}\right.$$

гдѣ

$$D_i = \frac{d^iD}{dy_1^{(n-1)}\ldots dy_i^{(n-i)}},$$

а

$$\Delta_i = \frac{d^iD}{dy_1^{(n-1)}\ldots dy_{i+1}^{(n-i)}}.$$

Общій членъ системы (K), то есть выраженіе

$$D_{i-2} \cdot D_i = D^2_{i-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_{i-1}}{D_{i-1}}\right),$$

всего проще объяснить на формулѣ

$$D \cdot \frac{d^2 D}{dy_1^{(n-1)} dy_2^{n-2}} = \frac{dD}{dy^{n-1}} \cdot \frac{dD}{dy_2^{(n-2)}} - \frac{dD}{dy_2^{(n-1)}} \cdot \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}} .$$

По первому условію (4) имѣемъ:

$$\frac{dD}{dy_1^{(n-2)}} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_1^{(n-1)}}\right),$$

$$\frac{dD}{dy_2^{(n-2)}} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_2^{(n-1)}}\right);$$

а потому

$$D \cdot \frac{d^2 D}{dy_1^{(n-1)} dy_2^{(n-2)}} = \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_2^{(n-1)}}\right)$$

$$- \frac{dD}{dy_2^{(n-1)}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dD}{dy_1^{(n-1)}}\right):$$

или

$$= D_1 \frac{d\Delta_1}{dx} - \Delta_1 \frac{dD_1}{dx},$$

гдѣ

$$\Delta_1 = \frac{dD}{dy_2^{(n-1)}};$$

а наконецъ

$$D \cdot D_2 = D_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_1}{D_1}\right).$$

Послѣ этихъ предварительныхъ объясненій возвращаемся къ предложенному уравненію (1_1).

Первый интегралъ его будетъ

$$D_1 y' - D'_1 y = c_1 \qquad (2_1)$$

гдѣ

$$D_1 = \frac{dD}{dy'_1}, \; D = \begin{vmatrix} y'_1 & y_1 \\ y'_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{произв. пост.},$$

$D'_1 = \frac{dD_1}{dx}$, лишь бы D_1 опредѣлилось изъ условія (J), то есть изъ уравненія

$$D_1'' + XD_1 = 0,$$

гдѣ верхніе значки, какъ всегда, означаютъ порядокъ производной по x.

Изъ этого условія видно, что каждое изъ частныхъ значеній y есть вмѣстѣ и значеніе D_1; или, точнѣе, что значенія $\mu = \frac{dD}{dy_r'}$ находятся между собою въ томъ же отношеніи, которое существуетъ и между значеніями y.

Взявъ производную отъ (2_1) найдемъ

$$D_1 y'' - D_1'' y = 0.$$

А такъ какъ изъ условія для опредѣленія D_1 имѣемъ

$$D_1'' = - XD_1,$$

то и получается данное уравненіе.

Изъ (2_1) выводится извѣстная формула

$$y = c_2 D_1 + c_1 D_1 \int \frac{dx}{D_1^2}.$$

24. — Переходимъ къ уравненію 3-го порядка.

$(1_{\prime\prime})$. . . . . $y''' + X_1 y' + Xy = 0.$

Положивъ, какъ принято,

$$D_1 = \frac{dD}{dy_1''}, \; D_2 = \frac{d^2D}{dy_1'' dy'_2}, \; D_3 = 1 = \frac{d^3D}{dy_1'' dy'_2 dy_3},$$

первый интегралъ выразится уравненіемъ

$$(2_{\prime\prime}) \quad . \quad . \quad . \quad D_1 y'' - D'_1 y' + (D_1'' + X_1 D_1)\, y = c_1,$$

лишь бы D_1 опредѣлилось изъ условія (J), которое въ настоящемъ случаѣ есть

$$(3_{\prime\prime}) \quad . \quad . \quad . \quad D_1''' + D'_1 X_1 + (X'_1 - X)\, D_1 = 0.$$

Взявши интегралъ $(2_{\prime\prime})$, по помноженіи его предварительно на

$$\frac{D_2}{D_1^{\,2}},$$

найдемъ второй интегралъ

$$(4_{\prime\prime}) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{D_1}\left(D_2\, y' - D'_2\, y\right) = c_2 + c_1 \int \frac{D_2}{D_1^{\,2}}\, dx,$$

лишь бы значеніе, которое припишется D_2, удовлетворило условію (J), которое въ настоящемъ случаѣ есть

$$(5_{\prime\prime}) \quad . \quad . \quad . \quad D_2'' - \frac{D'_1}{D_1} \cdot D_2 + \frac{D_2}{D_1}\left(D_1'' + X_1 D_1\right) = 0.$$

А это условіе необходимо проистекаетъ изъ того, что другое значеніе μ, какъ и третье, то есть $\frac{dD}{dy'_2}, \frac{dD}{dy'_3}$, должны удовлетворить $(3_{\prime\prime})$. Чтобы убѣдиться въ совмѣстности условій $(3_{\prime\prime})$, $(5_{\prime\prime})$, надо только замѣнить въ послѣднемъ изъ нихъ D_2 его значеніемъ

$$D_2 = \frac{D_1^{\,2}}{D} \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_1}{D_1}\right),$$

выведеннымъ изъ (K). Если это сдѣлаемъ, то получимъ сперва

$$\Delta_1''' + X_1\, \Delta'_1 - \frac{\Delta_1}{D_1}\, (D_1''' + X_1\, D'_1) = 0,$$

а потомъ, по причинѣ $(3_{\prime\prime})$,

$$\Delta_1''' + X_1 \Delta'_1 + (X'_1 - X)\Delta_1 = 0.$$

Что и должно быть, такъ какъ $\Delta_1 = \frac{dD}{dy'_2}$ есть также значеніе μ.

Наконецъ изъ ($4_{,,}$) выводимъ:

$$y = D_2\left(c_3 + c_2\int\frac{D_1 D_3}{D_2^2}dx + c_1\int\frac{D_1 D_3}{D_2^2}\int\frac{D_2}{D_1^2}dx^2\right).$$

Что согласуется съ (H).

25. Проинтегрируемъ наконецъ уравненіе 4-го порядка

$$y^{\text{IV}} + X_2 y'' + X_1 y' + Xy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1_{,,,})$$

Первый его интегралъ будетъ

$$D_1 y''' - D'_1 y'' + (D_1'' + X_2 D_1) y'$$
$$-\left[D_1''' + X_2 D'_1 + (X'_2 - X_1) D_1\right] y = c_1.$$

Лишь бы значеніе D_1 удовлетворило условію

$$D_1^{\text{IV}} + X_2 D_1'' + (2X'_2 - X_1) D'_1 + (X_2'' - X'_1 + X) D_1 = 0 \ldots (3_{,,,})$$

Второй интегралъ будетъ

$$\frac{1}{D_1}\left(D_2 y'' - D'_2 y' + \left[D_2'' - D'_2 . \frac{D'_1}{D_1} + \frac{D_2}{D_1}(D_1'' + X_2 D_1)\right] y\right)$$
$$= c_2 + c_1\int\frac{D_2}{D_1^2}dx,$$

подъ условіемъ

$$D_2''' - 2\frac{D'_1}{D_1}D_2'' - D'_2\left(2\frac{D_1''}{D_1} - 2\frac{{D'_1}^2}{D_1^2} + X_2\right)$$
$$+\frac{D_2}{D_1}\left(2D_1''' - 2\frac{D'_1 D_1''}{D_1} + 2D_1 X'_2 - D_1 X_1\right) = 0; \;.\;.\; (4_{,,,})$$

и это условіе совмѣстно съ $(3_{,,,})$ по причинѣ перваго изъ уравненій (K).

Таким же способомъ найдемъ третій интегралъ

$$\frac{1}{D_2}(D_3y'-D'_3y)=c_3+c_2\int\frac{D_1D_3}{D_2^{\,2}}\,dx+c_1\int\frac{D_1D_3}{D_2^{\,2}}\int\frac{D_2}{D_1^{\,2}}\,dx^2,$$

подъ условіемъ

$$D_3''-\frac{D'_2}{D_2}\cdot D'_3+\left[D_2''-\frac{D'_1}{D_1}D'_2+(D_1''+X_2D_1)\frac{D_2}{D_1}\right]\frac{D_3}{D_2}=0,$$

которое по причинѣ первыхъ двухъ уравненій (K) совмѣстно съ $(3_{,,,})$.

Полное значеніе y и будетъ, согласно съ (H),

$$y=c_4D_3+c_3D_3\int\frac{D_2D_4}{D_3^{\,2}}\,dx+c_2D_3\int\frac{D_2D_4}{D_3^{\,2}}\int\frac{D_1D_3}{D_2^{\,2}}\,dx^2$$
$$+c_1D_3\int\frac{D_2D_4}{D_3^{\,2}}\int\frac{D_1D_3}{D_2^{\,2}}\int\frac{D_2}{D_1^{\,2}}\,dx^3.$$

Относительно другихъ подробностей отсылаемъ къ слѣдующей статьѣ.

СТАТЬЯ V.

Зависимость между множителями.

26. Настоящая статья есть, сколько мнѣ извѣстно, первый опытъ изслѣдованія теоріи интегрирующаго множителя въ общемъ видѣ, то есть предполагая данное дифференціальное уравненіе съ двумя перемѣнными самаго общаго вида, $F(x, y, y', \dots y^{(n)})=0$. Я думалъ сперва посвятить этому предмету не болѣе двухъ страницъ, такъ какъ ничего замысловатаго въ моихъ сужденіяхъ не представлялось, а пріемы употребленные мною для доказательства справедливости суж-

деній были чрезвычайно просты; но въ этомъ сжатомъ видѣ, статья моя возбудила столько возраженій и недоразумѣній, что я нашелся вынужденнымъ значительно развить предметъ. Всѣ возраженія и недоразумѣнія сообщенныя мнѣ я принялъ во вниманіе и не оставилъ безъ отвѣта; чему лучшимъ доказательствомъ служатъ тѣ подробности, даже мелочныя, въ которыя я вхожу послѣ каждаго новаго сужденія. Наконецъ, такъ какъ ничто такъ не подтверждаетъ справедливость сужденія какъ примѣръ, я этому условію удовлетворилъ вполнѣ.

Цѣль настоящей статьи — упростить задачу интегрированія дифференціальныхъ и разностныхъ уравненій вообще. Эта цѣль мною достигнута, но не вполнѣ. Я искалъ, но не нашелъ строгаго доказательства слѣдующей теоремы:

Если найдется одно значеніе интегрирующаго множителя или даннаго уравненія или одной изъ его производныхъ, то можно найдти и еще $n-1$ значеній этого же множителя; если же будемъ имѣть n частныхъ значеній множителя, то опредѣлятся непосредственно всѣ первые интегралы, а слѣдовательно и полная начальная.

Много имѣется данныхъ для доказательства *à priori*; но строгаго доказательства я не вижу. Время покажетъ справедлива ли теорема или нѣтъ.

И такъ, цѣль моихъ изысканій не вполнѣ достигнута. Тѣмъ не менѣе, и то, что сдѣлано для этой цѣли, весьма упрощаетъ и облегчаетъ отыскиваніе интеграла; это немногое, достаточно впрочемъ разработанное, и сообщается въ этой послѣдней статьѣ.

27. Не лишнимъ считаю предварительно привести довольно ясное доказательство того, что отыскиваніе новой независимой перемѣнной, относительно которой данное уравненіе есть точная производная, если только это отыскиваніе произойдетъ не ощупью, а путемъ раціональнымъ, столь же

трудно какъ и опредѣленіе интегрирующаго множителя; если же уравненіе будетъ линейное, то обѣ задачи совпадутъ; такъ что если найдемъ значеніе искомой независимой перемѣнной, то найдемъ также и множитель. Это мы докажемъ покамѣстъ двумя примѣрами довольно большой общности.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$y'' + \mathrm{A}y = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

А данная функція x; и положимъ, что ищется такая независимая перемѣнная t, которая, будучи внесена вмѣсто x въ данное уравненіе, преобразовала бы его въ точную производную.

Изъ предыдущей статьи мы знаемъ, что интегрирующій множитель μ, то есть $\frac{d\mathrm{D}}{dy'_r}$, разумѣя подъ y_r общій членъ частныхъ значеній y, долженъ опредѣлиться изъ уравненія

$$\mu'' + \mathrm{A}\mu = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Сейчасъ убѣдимся, что искомое независимое перемѣнное должно опредѣлиться изъ уравненія

$$\frac{dt}{dx} = \mu;$$

такъ что оно будетъ

$$t = \int \mu dx + \text{произв. пост.} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Изобразимъ чрезъ T' такую первую производную отъ t по x, въ которой эта послѣдняя перемѣнная не заключается; можно предположить, напримѣръ, что значеніе x въ функціи t выведено изъ $t = \int \mu dx$, и внесено въ правую часть уравненія $\frac{dt}{dx} = \mu$, вслѣдствіе чего и получилось $\frac{dt}{dx} = \mathrm{T}'$.

При такомъ предположенiи, по причинѣ равенствъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot \mathrm{T}',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2}=\mathrm{T}'^2\,\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{T}'\,\mathrm{T}''\,\frac{dy}{dt},$$

данное уравненiе преобразится въ слѣдующее:

$$\mathrm{T}'^2\,\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{T}'\,\mathrm{T}''\,\frac{dy}{dt}+\mathrm{A}y=0,$$

гдѣ A, какъ и прежде, заключаетъ въ себѣ только x.

Это послѣднее уравненiе будетъ точною производною, если T′ опредѣлится изъ условiя интегрируемости, которое есть

$$\mathrm{T}'\mathrm{T}'''+\mathrm{T}''^2+\mathrm{A}=0.$$

Но $\mathrm{T}'\mathrm{T}'''+\mathrm{T}''^2=\dfrac{d^3t}{dx^3}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}$; потому и имѣемъ

$$\frac{d^3t}{dx^3}+\mathrm{A}\frac{dt}{dx}=0.$$

Что и есть (2), въ которомъ замѣнили бы μ производною $\dfrac{dt}{dx}$.

28. Докажемъ то же самое предложенiе для уравненiя 3-го порядка

$$y'''+\mathrm{A}_1y'+\mathrm{A}y=0.$$

Условiе для опредѣленiя μ, то есть $\dfrac{d\mathrm{D}}{dy''_r}$, въ настоящемъ случаѣ будетъ

$$(2_1)\quad .\;\;.\;\;.\quad \mu'''+\mathrm{A}_1\mu'+(\mathrm{A}'_1-\mathrm{A})\,\mu=0.$$

По предыдущему полагаемъ

$$\frac{dt}{dx} = T',$$

гдѣ T' незаключаетъ въ себѣ x.

Вслѣдствіе этого данное уравненіе преобразится въ слѣдующее:

$$T'^3 \frac{d^3y}{dt^3} + 3T'^2T'' \frac{d^2y}{dx^2} + T'(T'T''' + T''^2 + A_1)\frac{dy}{dt} + Ay = 0,$$

гдѣ A_1, A, какъ и прежде, данныя функціи x.

Это послѣднее уравненіе будетъ точной производной, если T' опредѣлится изъ условія интегрируемости:

$$T'^2 T^{\text{IV}} + 4T'T''T''' + T''^3 + A_1 T'' + A'_1 - A = 0.$$

Но

$$T'^2 T^{\text{IV}} + 4T'T''T''' + T''^3 = \frac{d^4t}{dx^4} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dx}}, \quad T'' = \frac{d^2t}{dx^2} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dx}};$$

а потому условіе будетъ·

$$\frac{d^4t}{dx^4} + A_1 \frac{d^2t}{dx^2} + (A'_1 - A)\frac{dt}{dx} = 0.$$

Что и есть (2_1); только $\frac{dt}{dx}$ поставлено вмѣсто μ.

Примѣръ: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^{-2}y = 0.$

Опредѣливъ $\frac{dt}{dx}$ изъ уравненія

$$\frac{d^3t}{dx^3} - 2x^{-2}\frac{dt}{dx} = 0,$$

найдемъ

$$\frac{dt}{dx} = x^2;$$

а потому $t = \frac{x^3}{3}$ есть та независимая перемѣнная, относительно которой данное уравненіе есть точная производная; такъ что

$$3t^{\frac{4}{3}}y'' + 2t^{\frac{1}{3}}y' - \frac{2}{3}t^{-\frac{2}{3}}y = 0$$

доставитъ непосредственно

$$3t^{\frac{4}{3}}y' - 2t^{\frac{1}{3}}y = c.$$

29. И такъ, отыскиваніе независимой перемѣнной съ цѣлію преобразовать данное уравненіе въ точную производную, и отыскиваніе μ есть, покрайней мѣрѣ для линейныхъ уравненій, одна и та же задача. Зная это, мы уже не будемъ искать рѣшенія посредствомъ замѣненія x другою перемѣнною, если не найдемъ его способомъ множителя.

Въ этомъ полезно было убѣдиться главнымъ образомъ вотъ почему.

Примемъ въ разсмотрѣніе законъ (G) (нум. 22) опредѣляющій зависимость, существующую между множителями послѣдовательныхъ интеграловъ общаго линейнаго уравн. II-го порядка:

$$\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D_1^2}.D,\ D_1\frac{D_3}{D_2^2},\ \ldots\ldots\ \frac{D_{n-2}.D_n}{D^2_{n-1}}\ \ldots\ \ldots \qquad (G)$$

Ясно, что если бы какимъ нибудь способомъ удалось производныя D_1, $D_2, \ldots D_{n-1}$, взятыя по различнымъ неизвѣстнымъ перемѣннымъ, преобразовать въ другія производныя по одной и той же перемѣнной, то получился бы рядъ вида

$$\frac{m'_1}{m_1},\ m_1\frac{m''_1}{m'^2_1},\ m'_1\frac{m_1'''}{m_1''^2},\ \ldots\ m_1^{(i)}.\frac{m_1^{(i+2)}}{[m_1^{(i+1)}]^2}\ \ldots \qquad (G_1)$$

такого свойства, что съ опредѣленіемъ m_1 опредѣлились бы всѣ множители послѣдовательныхъ интеграловъ, а слѣдовательно и полная начальная. Казалось бы, что это можетъ быть достигнуто посредствомъ измѣненія независимой перемѣнной x, и это дѣйствительно такъ; но, какъ видно изъ предыдущаго анализа, этотъ путь такъ же труденъ какъ и обыкновенный путь для опредѣленія множителя. Въ этомъ и состоитъ связь только что разсмотрѣннаго предложенія съ теоріей множителя, которою теперь займемся.

30. Средства для преобразованія ряда (G) въ (G_1) будутъ предложены ниже; теперь же начнемъ анализъ съ слѣдующей примѣчательной леммы.

Лемма. — Если μ *интегрирующій множитель уравненія n-го порядка общаго вида* $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, *которое изобразимъ чрезъ* $U = 0$; а μ_r *множитель обращающій производную* $U^{(r)} = 0$ *порядка r отъ* $U = 0$, *въ новую точную производную того же порядка, то значеніе* μ *будетъ* $\mu_r^{(r)}$, *то есть производная порядка r отъ* μ_r.

Доказательство. — Возьмемъ интегралъ по частямъ произведенія $\mu_r U^{(r)} dx$; получимъ:

$$(\mathrm{I}) \quad \ldots \quad \int \mu_r U^{(r)} dx = \mu_r U^{(r-1)} - \mu'_r U^{(r-2)} + \ldots$$

$$- (-1)^r \mu_r^{(r-1)} U + (-1)^r \int \mu_r^{(r)} U dx.$$

Произведеніе подъ знакомъ $\int$ въ лѣвой части этого равенства есть, по предположенію, точный дифференціалъ; а потому членъ подъ тѣмъ же знакомъ во второй части долженъ быть также точнымъ дифференціаломъ. А такъ какъ по предположенію множитель U есть μ, то и имѣемъ

$$(\mathrm{II}) \quad \ldots\ldots \quad \mu = \mu_r^{(r)}.$$

31. Примѣчанія. — 1° Мы могли взять интегралъ только до члена $\mu_r^{(r)} U dx$ на томъ основаніи, что послѣдовательныя

производныя отъ U намъ вполнѣ извѣстны, тогда какъ U есть неточная производная.

2° Формула (I), а слѣд. и (II), имѣетъ мѣсто при всякомъ соотношеніи между x, y; но потому именно, что это такъ есть, обѣ формулы справедливы и въ томъ случаѣ, когда $U=0$, а слѣдовательно и $U'=0$, $U''=0$, и т. д. Такъ что хотя вторая часть (I) и распадается на $r+1$ уравненій,

$$U'=0,\ U''=0,\ .\ .\ .\int\mu_r{}^{(r)}U dx=c,$$

тѣмъ не менѣе мы имѣемъ право разсматривать эту формулу въ настоящемъ ея видѣ; изъ этой-то формулы и получимъ искомую зависимость между множителями.

3° Что дѣйствительно вторая часть (I) есть точное воспроизведеніе того результата, который доставило бы *непосредственное интегрированіе* уравненія $\mu_r U^{(r)}dx=0$, это легко усмотрѣть изъ одного примѣра.

Пусть $y''-2x^{-2}y=0$ данное уравненіе: тогда послѣдовательныя производныя, напр. при $r=2$, будутъ:

$$U'=y'''-2x^{-2}y'+4x^{-3}y,\ U''=y^{\text{IV}}-2x^{-2}y''+8x^{-3}y'-12x^{-4}y;$$

и, такъ какъ множитель второй производной есть $\mu_2=x^4$, формула (I) доставитъ:

$$\int x^4\,(y^{\text{IV}}-2x^{-2}y''+8x^{-3}y'-12x^{-4}y)dx=$$

$$x^4\,(y'''-2x^{-2}y'+4x^{-3}y)-4x^3\,(y''-2x^{-2}y)$$

$$+12\int x^2\,(y''-2x^{-2}y)\,dx.$$

Мы еще не знаемъ интеграла послѣдняго члена, но знаемъ навѣрно, что, на основаніи (II), членъ этотъ, подъ знакомъ $\int$, есть точный дифференціалъ. Когда же проинтегрируемъ его,

$$\int x^2 (y'' - 2x^{-2}y)\, dx = x^2y' - 2xy + c,$$

а потомъ, взявъ интегралъ *непосредственно* отъ

$$x^4 (y^{\text{IV}} - 2x^{-2}y'' + 8x^{-3}y' - 12x^{-4}y)\, dx = 0,$$

сравнимъ между собою оба результата, то найдемъ слѣдующее тожество:

$$\begin{aligned} c_1 + x^4y''' - 4x^3y'' + 10x^2y' - 12xy \\ = x^4 (y''' - 2x^{-2}y' + 4x^{-3}y) \\ - 4x^3 (y'' - 2x^{-2}y) + 12x^2y' - 24xy + c_1. \end{aligned}$$

4^0 Академикъ О. И. Сомовъ доказываетъ (II) формулой Лейбница для дифференцированія произведенія двухъ множителей.

На основаніи этой формулы имѣемъ:

$$u.\, v^{(r)} = \frac{d^r\,(u.v)}{dx^r} - r\frac{d^{r-1}\,(u'\,v)}{dx^{r-1}} + \frac{r\,(r-1)}{2}\frac{d^{r-2}\,(u''\,v)}{dx^{r-2}}$$
$$- \ldots (-1)^r\, u^{(r)}.\, v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Положивъ теперь $u = \mu_r$, $v = \mathrm{U}$, необходимо придемъ къ тому заключенію, что если $u.\ v^{(r)}$ точная производная, то и $u^{(r)}v$ также точная производная.

Впрочемъ, написавъ (I) такъ:

$$\mu_r\, \mathrm{U}^{(r)} = \frac{d}{dx}(\mu_r\, \mathrm{U}^{(r-1)} - \mu'_r\, \mathrm{U}^{(r-2)} + \ldots - (-1)^r\, \mu_r^{(r-1)}\, \mathrm{U})$$
$$+ (-1)^r\, \mu_r^{(r)}\, \mathrm{U}$$

точно также очевидно опредѣлимъ соотношеніе (II).

5^0 Замѣтимъ между прочимъ, что формула (α) получится изъ (I) если, освободивъ эту послѣднюю отъ $\int$, подставимъ, вмѣсто $\mu_r^{(r-2)} U'$, $\frac{d}{dx}(\mu_r^{(r-2)}U) - \mu_r^{(r-1)}U$; вмѣсто $\mu_r^{(r-3)} U''$,

$\frac{d^2}{dx^2}(\mu_r^{(r-3)}U) - 2\frac{d}{dx}(\mu_r^{(r-2)}U) + \mu_r^{(r-1)}U$, и т. д.

6^0 Для разностныхъ уравненій формула соотвѣтствующая (II) будетъ

$$\mu_x = \Delta^r M_{x-r},$$

гдѣ μ_x множитель даннаго уравненія, а M_x множитель разности порядка r даннаго уравненія.

32. И такъ, предложенная лемма очевидно справедливо все же что будетъ сказано далѣе, будетъ строгимъ выводомъ изъ доказаннго

Необходимо предварительно замѣтить, что порядокъ уравненія $U = 0$ можетъ повыситься въ томъ случаѣ, если въ $\mu_r^{(r)}$ войдутъ дифференціальные коэффиціенты выше порядка n: для того же чтобы порядокъ снова понизился, должно будетъ исключить эти повышающія порядокъ производныя посредствомъ даннаго уравненія и его производныхъ.

Напримѣръ: $1 + y'^2 + yy'' = 0$ есть точная производная отъ $x + yy' = a$, и она обращается въ точную производную отъ $\frac{y^2y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} + b = 0$ посредствомъ множителя yy' на основаніи леммы, $y'^2 + yy''$ есть множитель $x + yy' = a$; но изъ $1 + y'^2 + yy'' = 0$ имѣемъ $y'^2 + yy'' = -1$, а потому $x + yy' = a$ остается точной производной 1-го порядка

Другой примѣръ:

$$b_1 + (c_1 + b_2)y' + c_2 y'^2 + (a_2 + b_2 x + c_2 y)y'' = 0$$

есть точная производная отъ

$$a_1 + b_1 x + c_1 y + (a_2 + b_2 x + c_2 y)y' = 0,$$

и она обращается въ новую точную производную посредствомъ множителя вида

$$(y' - \beta_1)^{m_1} (y' - \beta_2)^{m_2} (y' - \beta_3)^{m_3}$$

β_1, β_2, β_3, m_1, m_2, m_3 извѣстныя постоянныя (стр. 144); производная этого множителя повышаетъ порядокъ уравненія 1-го порядка; но если исключимъ y', y'' посредствомъ извѣстныхъ уравненій, то порядокъ неизмѣнится; сверхъ того, какъ уже замѣчено въ статьѣ III, данная производная удовлетворяется значеніемъ $y' = a$, такъ что $y = ax + b$ необходимо доставитъ множитель. Отсылаемъ также къ нашему анализу мемуара Мальмстена (стр. 269)-

33. Королларій 1. — Изъ того, что правая часть (I) распадается на $r+1$ уравненій, слѣдуетъ, что, на оборотъ, если бы дано было уравненіе $\int \mu_r^{(r)} \mathrm{U} + c = 0$, c произв. пост., можно было бы отыскать другое уравненіе того же пор дка посредствомъ интегрированія уравненія

$$m \left\{ \mu_r^{(r-1)} \mathrm{U} - \int \mu_r^{(r)} \mathrm{U} - c \right\} = 0,$$

или и инаго, составленнаго изъ нѣсколькихъ членовъ второй части (I): множитель m можетъ найдтись весьма легко, какъ увидимъ ниже.

Королларій 2. — Положимъ

$$\int \mu_r \mathrm{U}^{(r)} dx = \mathrm{V}:$$

тогда, такъ какъ множитель $\mathrm{V}' = \mu_r \mathrm{U}^{(r)}$ есть $\frac{1}{\mu_r}$, — на основаніи (II) имѣемъ

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_r}\right) \int \mu_r \mathrm{U}^{(r)} dx = \text{точн. производ.}$$

Примѣчаніе 1. — Изъ того, что $\int \frac{\mathrm{V}'}{\mu_r} dx = \mathrm{U}^{(r-1)}$, нельзя вывести заключенія ни о справедливости, ни о несправедливости формулы (III): она неопровержима потому, что справедлива (II). И притомъ (III) не есть производная $U^{(r-1)}$ или иная извѣстная, но неизвѣстная, новая функція.

Положивъ напр. $r = 2$,

будетъ:

$$\frac{\mu_2'}{\mu_2^2}\int \mu_2 U'' dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu'_2}{\mu_2}U\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{W}{\mu_2}\right), \text{ гдѣ } W = \int U\mu_r^{(r)}dx.$$

Положивъ $r = 3$, найдемъ

$$\frac{\mu'_3}{\mu_3^2}\int \mu_3 U''' dx = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\mu'_3}{\mu_3}U\right)$$

$$-2\frac{d}{dx}\left[U\left(\frac{d}{dx}\frac{\mu'_3}{\mu_3} + \frac{1}{2}\frac{\mu'^2_3}{\mu_3^2}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left(\frac{W}{\mu_3}\right).$$

Такъ что, вообще,

$$(S_1)\ldots\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}\int \mu_r U^{(r)} dx = \sum_m \frac{d^m}{dx^m}(\lambda U) + (-1)^{r+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{W}{\mu_r}\right).$$

Какъ видно, суммованіе относится къ m, между предѣлами $m = r - 1$, $m = 1$, а λ изображаетъ общее значеніе той функціи μ_r, на которую множится U.

Для того чтобы получить (S_1) изъ (I) надо только помножить вторую часть этой формулы на $\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}$, и потомъ поступить точно такъ, какъ показано въ примѣчаніи 5, нум. 31.

Напримѣръ: членъ $\mu_r^{(r-2)}U'$ въ (I), по помноженіи на $\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}$, обращается въ $\mu_r^{(r-2)}.\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}.U'$: для того чтобы освободить его отъ U', имѣемъ:

$$\int \mu_r^{(r-2)}.\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}.U' dx = \mu_r^{r-2}.\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}.U - \int U\frac{d}{dx}\left(\mu_r^{r-2}.\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}\right)dx,$$

а потому

$$\mu_r^{r-2} \cdot \frac{\mu'_r}{\mu_r^2} \cdot U' = \frac{d}{dx}\left(\mu_r^{(r-2)} \cdot \frac{\mu'_r}{\mu_r^2} U\right) - U \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_r^{r-2} \cdot \mu'_r}{\mu_r^2}\right).$$

Такимъ же пріемомъ освободимъ и всѣ прочіе члены второй части (I) отъ производныхъ U.

34. Изъ формулы (S_1) очевидно, что $\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}$ обращаетъ лѣвую часть, то есть V въ новую точную производную, отличную отъ извѣстныхъ производныхъ.

Какъ должно пользоваться формулой (III), можно усмотрѣть изъ различныхъ примѣровъ, которые приведемъ ниже, но между прочимъ изъ слѣдующаго:

$$y^{(n)} + X_{n-2}\, y^{(n-2)} + X_{n-3}\, y^{(n-3)} + \ldots + X_1 y' + X y = 0 \ldots \quad (1)$$

Положимъ, для краткости,

$$m_1 = \frac{dD}{dy_1^{(n-1)}},\; m_2 = \frac{dD}{dy_2^{(n-1)}},\; p_1 = \frac{d^2D}{dy_1^{(n-1)}\, dy_2^{(n-1)}}.$$

тогда, какъ доказано въ статьѣ IV-й, m_1 будетъ интегрирующимъ множителемъ (1), а $\frac{p_1}{m_1^2}$ будетъ множителемъ перваго интеграла, то есть уравненія

$$m_1\, y^{(n-1)} - m'_1\, y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy'_1}\, y' + \frac{dD}{dy_1}\, y = c_1 \ldots \quad (2)$$

По формулѣ (II) множитель (1) помноженнаго на m_1 долженъ быть

$$\int \frac{p_1}{m_1^2}\, dx:$$

въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ это послѣднее выраженіе есть не иное что какъ $\frac{1}{D} \cdot \frac{m_2}{m_1}$, D = произв. пост., а m_2 такой же множитель (1) какъ m_1, то и заключаемъ, что $\int \frac{p_1}{m_1^2}\, dx$ есть дѣйствительно множитель (1) помноженнаго на m_1.

И такъ, другой первый интегралъ (1) будетъ

$$m_2 y^{(n-1)} - m'_2 y^{(n-2)} + \ldots + \frac{dD}{dy'_2} y' + \frac{dD}{dy_2} y = c_2 \ldots (2')$$

Провѣримъ теперь выводъ (III).

Какъ сейчасъ доказано, (1) помноженное на $\left(m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1}\right)$ есть точная производная отъ (2′); на основаніи (III) множитель (2′) долженъ быть

$$\frac{d}{dx}\left(1 : \frac{m_2}{m_1}\right) :$$

это и дѣйствительно такъ есть, потому что

$$\frac{d}{dx}\left(1 : \frac{m_2}{m_1}\right) = -D\,\frac{p_1}{m_2^{\,2}},\ \text{D произв пост.},$$

а $\frac{p_1}{m_2^{\,2}}$ есть, какъ извѣстно изъ ст. IV, множитель (2′).

Примѣчаніе 2. — Для разностныхъ уравненій формула соотвѣтствующая (III) будетъ

$$\Delta\left(\frac{1}{M_{x-1}}\right)$$

35. Мы полагаемъ, что по помноженіи второй части на $\frac{\mu'_r}{\mu_r^{\,2}}$ необходимо должны опредѣлиться еще $n-1$ значеній μ, то есть множителя U; но строго доказать это не можемъ. Предположеніе наше основывается на слѣдующемъ сужденіи:

Такъ какъ отъ помноженія второй части на $\frac{\mu'_r}{\mu_r^{\,2}}$ образовалась вторая часть (S_1), то есть не просто одинъ точный дифференціалъ, но сумма точныхъ производныхъ, слѣдовательно для каждой изъ производныхъ отъ U долженъ былъ опредѣлиться свой особенный множитель; если же эти множители обозначимъ чрезъ

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1},$$

то, по формулѣ (II), найдемъ, что

$$\lambda_1, \lambda''_2, \ldots \lambda^{(r-1)}_{r-1}$$

суть множители U: положивъ $r=n$, получимъ для μ всего n значеній. Если бы это сужденіе оказалось справедливымъ, тогда полная начальная получилась бы посредствомъ исключенія $n-1$ дифф. коэффиціентовъ изъ системы n уравненій:

$$\int \mu_r^{(r)} \mathrm{U}\, dx = c_1, \int \lambda'_1 \mathrm{U}\, dx = c_2, \int \lambda''_2 \mathrm{U}\, dx = c_3, \ldots$$

$$\int \lambda^{(r-1)}_{r-1} \mathrm{U}\, dx = c_n.$$

За невозможностію доказать справедливость только-что приведеннаго сужденія, мы заявимъ вмѣсто теоремы такого рода выводъ:

По помноженіи второй части, какъ и первой, формулы (I) на $\frac{\mu'_r}{\mu_r^2}$, *во многихъ случаяхъ опредѣлятся и другія значенія* μ; что вполнѣ подтверждается многими примѣрами. Эти другія значенія μ будутъ во многихъ случаяхъ $\mu_r^{(r-1)} \cdot \frac{\mu_r'}{\mu_r^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\mu_r^{(r-2)} \cdot \frac{\mu'_r}{\mu_r^2}\right)$. и друг.

36. Примѣръ 1. — $yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{x} = 0$.

Первая производная этого уравненія обращается въ новую точную производную посредствомъ множителя $\mu_1 = \frac{x^2}{2}$, и формула (I) доставитъ:

$$\int \mu_1 \mathrm{U}'\, dx = \frac{x^2}{2}\left(yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{x}\right)$$

$$-\int x\left(yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{x}\right) dx \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{I}')$$

А потому первый интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$-xyy' + y^2 = c_1.$$

Теперь, если на основаніи (III) помножимъ вторую часть равенства (I′) на $\frac{\mu'_1}{\mu_1^2}$, то есть на $\frac{4}{x^3}$, то найдемъ, что

$$\frac{4}{x^3}\left\{\frac{x^2}{2}\left(yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{x}\right)\right\}$$

есть точная производная отъ

$$\frac{yy'}{x} = c_2;$$

такъ что другое значеніе μ есть $\frac{\mu'_1}{\mu_1}$ то есть $\frac{2}{x}$.

Исключивъ y' между обоими *первыми интегралами*, получимъ полную начальную

$$y^2 - c_2x^2 = c_1.$$

Примѣръ 2. — $y'' - 2x^{-2}y = 0$.

Множители первой производной суть x^3, $alogx$, a постоянное неопредѣленное.

Если бы было извѣстно только $\mu_1 = x^3$, то множители даннаго уравненія тотчасъ нашлись бы изъ формулъ μ'_1, $\frac{\mu'_1}{\mu_1}$, то есть $3x^2, \frac{3}{x}$. Но положимъ, что найдено на x^3, а $alogx$: въ такомъ случаѣ положимъ также что не μ'_1 найдено, а $\frac{\mu'_1}{\mu_1} = alogx$.

Тогда $\mu_1 = x^a$, $\mu'_1 = ax^{a-1}$, подстановленіе этого значенія въ уравненіе для опредѣленія множителя

$$\mu'' - 2x^{-2}\mu = 0$$

доставитъ $a = 3$; такъ что опять имѣемъ $\frac{3}{x}$, x^2 — оба множителя.

37. Примѣръ 3. — $y'' + Ay = 0$, гдѣ A данная функція x.

Пусть, какъ прежде, y_1, y_2 частные интегралы (1), то есть даннаго уравненія,

$$y'' + Ay = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$D = \begin{vmatrix} y'_1 & y_1 \\ y'_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

опредѣлитель, который въ настоящемъ случаѣ равенъ произв. пост., $\mu = \frac{dD}{dy'_r}$ множитель (1): тогда, какъ доказано въ предыдущей статьѣ, первый интегралъ будетъ

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mu y' - \mu' y = c_1,$$

подъ условіемъ

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mu'' + A\mu = 0.$$

Пусть μ_1, какъ принято, множитель первой производной отъ (1), которая есть

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y''' + Ay' + A'y = 0;$$

$$D' = \begin{vmatrix} y_1'' & y'_1 & y_1 \\ y_2'' & y'_2 & y_2 \\ y_3'' & y'_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ опредѣлитель:}$$

тогда другой первый интегралъ относительно (4), отличный отъ (1), будетъ

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \quad \mu_1 y'' - \mu'_1 y' + (\mu_1'' + A\mu_1) y = D',$$

подъ условіемъ

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mu_1''' + A\mu'_1 = 0.$$

Изъ сравненія условій (6), (3) видимъ, что $\mu_1 = \mu'_1$, согласно съ леммой.

И нетрудно убѣдиться, что условія, изъ которыхъ опредѣлятся множители $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_r$, будутъ, соотвѣтственно, $\mu_2^{\text{IV}} + \mu_2'' A = 0$, $\mu_3^{(\text{V})} + \mu_3''' A = 0$, . . .

$$\ldots \mu_r^{(r+2)} + A\mu_r^{(r)} = 0.$$

Изъ (6) видно, что значенія μ_1 суть:

c, $\int y_1\, dx$, $\int y_2 dx$, ибо $\mu_1 = \int \mu dx$, и каждое изъ частныхъ значеній y есть значеніе μ.

Но сверхъ этихъ значеній, такъ какъ $\mu_1 = \frac{dD'}{dy_r''}$, имѣемъ также:

$$c\,, \begin{vmatrix} y'_3 & y_3 \\ y'_1 & y_1 \end{vmatrix}\,, \begin{vmatrix} y'_2 & y_2 \\ y'_3 & y_3 \end{vmatrix}\,.$$

По причинѣ же равенства $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^{\,2}}$, y_3 можно опредѣлить изъ уравненія

$$\begin{vmatrix} y'_3 & y_3 \\ y'_1 & y_1 \end{vmatrix} = \int y_1 dx.$$

Отсюда

$$y_3 = y_1 \int \frac{1}{y_1^{\,2}} \int y_1\, dx^2.$$

Такимъ же способомъ можно найти y_r въ зависимости отъ одного значенія μ, или y_1.

38 Мы только что привели отношеніе $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^{\,2}}$, которое существуетъ также и между значеніями μ. Можно однако же выразить это отношеніе весьма разнообразными формулами. Вообще же, чтобы рѣшить, выразимо ли отношеніе между значеніями μ, удовлетворяющими уравненію $\mu'' + A\mu = 0$, формулами $\mu_r^{(r)}$, $\mu_r^{(r-1)}$. $\frac{\mu'_r}{\mu_r^{\,2}}$, или иными, доставляемыми (I) помноженной на $\frac{\mu_r'}{\mu_r^{\,2}}$, необходимо приписать μ послѣдовательно каждое изъ двухъ значеній, и потомъ опредѣлить изъ полученныхъ совокупныхъ уравненій при какихъ условіяхъ

они будутъ совмѣстны. Разберемъ нѣкоторыя изъ формулъ: при какихъ условіяхъ онѣ выразятъ отношенія существующія между значеніями μ.

1^0. Если внесемъ въ уравненіе

$$\mu'' + A\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

послѣдовательно $\mu = m'^a$, $\mu = m'^a . m^b$, разумѣя подъ a, b постоянныя, подъ m неизвѣстную функцію x, а подъ m', какъ всегда, $\frac{dm}{dx}$, то получатся слѣдующія два уравненія:

$$a\frac{m'''}{m'} + a(a-1)\left(\frac{m''}{m'}\right)^2 + A = 0 \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

$$(1+2a)\frac{m''}{m} + (b-1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2 + \frac{m'^a}{b}\Big\{a\frac{m'''}{m'}$$

$$+ a(a-1)\left(\frac{m''}{m'}\right)^2 + A\Big\} = 0.$$

Послѣднее изъ нихъ обращается вслѣдствіе перваго въ

$$(1+2a)\frac{m''}{m} + (b-1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2 = 0.$$

Это уравненіе можетъ имѣть мѣсто одновременно съ (7), независимо отъ значеній, которыя припишутся x, только въ двухъ случаяхъ: во 1-хъ, если будетъ одновременно $(1+2a)=0$, $b-1=0$; во 2-хъ если будетъ существовать равенство $Ax^2 =$ пост.

И такъ, въ общемъ случаѣ, частные интегралы (3), а слѣдовательно и (1) выразимы совокупными формулами

$$m'^{-\frac{1}{2}}, \quad m \, . \, m'^{-\frac{1}{2}},$$

или, положивъ $m = e^{\int u dx}$, слѣдующими функціями:

$$\mu = u^{-\frac{1}{2}} . \, e^{-\frac{1}{2}\int u dx}, \qquad \mu = u^{-\frac{1}{2}} \, e^{\frac{1}{2}\int u dx}.$$

2. Весьма большую общность имѣютъ слѣдующія выраженія

$$\mu = m^b,\ \ \mu = \frac{m'^a}{m^c};$$

a, b, c, какъ и прежде, неопредѣленныя постоянныя, а m функція x.

Послѣдовательное подстановленіе этихъ выраженій въ (3) доставитъ:

$$b\,\frac{m''}{m} + b(b-1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2 + \mathrm{A} = 0$$

$$a\frac{m'''}{m'} + a(a-1)\left(\frac{m''}{m'}\right)^2 - c(2a+1)\,\frac{m''}{m}$$

$$+\,c(c+1)\left(\frac{m'}{m}\right)^2 + \mathrm{A} = 0.$$

Отсюда выведемъ одно уравненіе

$$\mathrm{B}\left(\frac{m'}{m}\right)^4 + \mathrm{B}_1\mathrm{A}\left(\frac{m'}{m}\right)^2 + \frac{a(a-1)}{b}\mathrm{A}^2 - a\mathrm{A}'\left(\frac{m'}{m}\right) = 0,$$

гдѣ A' производная отъ A,

$$\mathrm{B} = a\,(a+1)\,b^3 - (a - c - 2ac + 2a^2)\,b^2 + b\,(a-c)^2$$

$$\mathrm{B}_1 = a^2\,(2b-3) + 2a(1 - b + c) + b + c.$$

Найденныя значенія для $\frac{m'}{m}$ надо будетъ подставить потомъ въ данное уравненіе.

3. Не меньшая общность принадлежитъ значеніямъ

$$\mu = m'',\ \ \mu = \left(\frac{m'}{m}\right)^2.$$

Они приведутъ вопросъ окончательно къ слѣдующему кубичному уравненію:

$$z'^3 - z^2z'^2 + z'z^2\left(\frac{\mathrm{A}}{2} + 2z^2\right) + \frac{z^6}{3} - \frac{\mathrm{A}z^4}{3} - \frac{\mathrm{A}'z^3}{6} = 0,$$

гдѣ $z = \frac{m'}{m}$.

39. Прежде чѣмъ сдѣлаемъ окончательный выводъ изъ вышеприведенныхъ сужденій, дадимъ примѣры для интегрированія, на основаніи леммы, разностныхъ уравненій.

Примѣръ 1. $x(x+1)\Delta^2 u - 2x\Delta u + 2u = 0$.

Разность этого уравненія,

$$(x+1)(x+2)\Delta^3 u = 0,$$

обращается въ точную разность множителемъ

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)};$$

потому, по нумеру 31, множитель даннаго уравненія долженъ быть

$$\Delta \frac{1}{x(x+1)};$$

и дѣйствительно, оно будетъ точною разностію отъ

$$\frac{\Delta u}{x+1} - \frac{u}{x(x+1)} = c.$$

Этотъ первый интегралъ есть точная разность отъ

$$\frac{u}{x} = cx + c_1;$$

но къ этому же результату придемъ также и на основаніи примѣч. 2 нум. 34.

На основаніи формулы приведенной тамъ, множитель уравненія $\Delta^2 u = c_2$, которое происходитъ отъ $\Delta^3 u = 0$, есть

$$\Delta \,|\, x(x+1) \,| = 2(x+1),$$

или просто

$$x+1.$$

и дѣйствительно, по интегрированіи получается

$$x\Delta u - u = \frac{c_2}{2} x(x+1) + c_3.$$

На основаніи того же примѣчанія множитель этого послѣдняго есть $\Delta\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x(x+1)}$; такъ что имѣемъ точную разность

$$\frac{\Delta u}{x+1}-\frac{u}{x(x+1)}=\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{x(x+1)}.$$

Сравненіе этого интеграла съ вышеполученнымъ первымъ интеграломъ приводитъ къ заключенію, что

$$\frac{c_2}{2}=c_1,\ \ c_3=0.$$

Примѣръ 2 — $\frac{\Delta u}{A_x-1}-u=0.$

Пусть $A_x^{(x+1)}=A_x.\ A_{x-1}\ .\ .\ A_0$, тогда множитель разности даннаго уравненія выразится чрезъ $\frac{1}{A_x^{(x+1)}}$, и другой первый интегралъ будетъ

$$\frac{\Delta u}{A^{(x)}{}_{x-1}(A_x-1)}=c.$$

По нумеру 34, множитель этого послѣдняго есть $A^{(x)}{}_{x-1}(A_x-1)$, а по нум. 31 множитель даннаго уравненія есть $\Delta\left(\frac{1}{A^{(x)}{}_{x-1}}\right)$; наконецъ интегралъ можно получить исключеніемъ Δu между первыми интегралами.

40. *Заключительные выводы.*

1^0. По предположенію найдено такое значеніе $\mu=\mu_r^{(r)}$, которое обращаетъ данное уравненіе $F(x, y, y', \ldots y^{(n)})=0$, или какъ принято, $U=0$, въ точную производную, *не повышая порядка* уравненія; по этому самое общее значеніе $\mu_r^{(r)}$ будетъ вида $f(x, y, \ldots y^{n-1})$; то есть $y^{(n)}$ не войдетъ въ $\mu_r^{(r)}$. Но $\mu_r^{(r)}$ есть *производная* отъ $\mu_r^{(r-1)}$; а потому этотъ послѣдній множитель не можетъ заключать въ себѣ $y^{(n-1)}$. Точно также $\mu_r^{(r-h)}$ не можетъ заключать въ себѣ $y^{(n-h)}$. Положивъ же $r=h=n-1$, найдемъ, что μ_{n-1} должно быть вида $f_{n-1}(x, y)$, а μ_n должно будетъ заключать въ себѣ только x. Такъ что всего выгоднѣе отыскивать множитель къ n-й производной даннаго уравненія.

2°. Цѣлая функція x степени $r-1$-й есть одно изъ значеній μ_r: чтобы убѣдиться въ этомъ, надо только внести въ (I) вмѣсто μ_r сказанную функцію. Это подтверждаетъ ту истину, что множитель μ_r легче найдти чѣмъ μ.

3°. *Теорема.* — Положимъ, что намъ удалось преобразовать $U=0$ въ точную производную такого свойства, что она остается точною производною и тогда, когда помножимъ ее на цѣлую функцію x степени $n-2$: *тогда законъ происхожденія множителей послѣдовательныхъ интеграловъ отъ одного значенія* m_1 *множителя найденной точной производной,* которую изобразимъ чрезъ $mU = V'_1$, *выразится рядомъ*

$$(G_2)\ \ldots m_1,\ \frac{m'_1}{m_1^2},\ \frac{m_1 m''_1}{m_1'^2},\ \ldots \frac{m^i_1 . m_1^{i+2}}{(m^{i+1})^2},\ \ldots \frac{m_1^{(n-3)} . m_1^{(n-1)}}{(m_1^{n-2})^2}.$$

Доказательство. — Множитель $n-1$-го интеграла *будетъ*

$$\frac{m_1^{(n-3)} . m_1^{(n-1)}}{(m_1^{n-2})^2},$$

если, согласно съ формулой (II), значеніе

$$\frac{m_1^{(n-4)} . m_1^{(n-2)}}{(m_1^{n-3})^2}\int\frac{m_1^{(n-3} . m_1^{(n-1)}}{(m_1^{(n-2)})^2}\,dx,$$

или, что то же,

$$(x+a)\,.\,\frac{m_1^{(n-4)} . m_1^{(n-2)}}{(m_1^{(n-3)})^2} - \frac{m_1^{(n-4)}}{m_1^{(n-3)}}$$

будетъ множителемъ $n-2$-го интеграла.

На основаніи той же формулы, это послѣднее значеніе будетъ множителемъ $n-2$-го интеграла, если

$$\frac{m_1^{(n-5)} . m^{(n-3)}}{(m_1^{(n-4)})^2}\int\left[(x+a)m_1^{(n-4)} . \frac{m_1^{(n-2)}}{(m_1^{(n-3)})^2} - \frac{m_1^{(n-4)}}{m_1^{(n-3)}}\right]dx,$$

или, что то же,

$$\left(\frac{x^2}{2}+ax+b\right).\,m_1^{(n-5)}\frac{.m_1^{(n-3)}}{(m_1^{(n-4)})^2}-(x+a)\frac{m_1^{(n-5)}}{m_1^{(n-4)}}$$

будетъ множителемъ n — 3-го интеграла.

Такимъ разсужденіемъ найдемъ, что

$$\frac{m_1 m_1''}{m'^2}\left(X^{(n-3)}-X^{n-4}\frac{m_1'}{m_1''}\right),$$

гдѣ $X^{(i)}$ цѣлая функція x степени i, будетъ множителемъ втораго интеграла, если

$$\frac{m_1'}{m_1^2}\left(X^{(n-2)}-X^{(n-3)}\frac{m_1}{m_1'}\right)$$

будетъ множителемъ 1-го интеграла. А наконецъ этотъ послѣдній *будетъ* множителемъ 1-го интеграла, если только

$$m_1\int\frac{m_1'}{m_1^2}\left(X^{(n-2)}-X^{(n-3)}\frac{m_1}{m_1'}\right)dx,$$

или, что то же,

$$X^{(n-2)}$$

будетъ множителемъ V'_1. Что и требов. д.

4^0. Вслѣдствіе только-что доказаннаго, интегрированіе совокупныхъ уравненій вида

$$d\varphi_1=\psi_1 dx,\ d\varphi_2=\psi_2 dx,\ .\ .\ .\ .\ .\ d\varphi_n=\psi_n dx$$

произойдетъ слѣдующимъ образомъ:

Сперва приведемъ ихъ къ одному уравн. n-го порядка; послѣ чего, если уравн. будетъ линейное, тотчасъ же ищемъ удовлетворить сказаннымъ двумъ условіямъ; если же оно будетъ не-линейное, будемъ искать сперва μ_r; удовлетворивъ же какимъ ни есть способомъ сказаннымъ двумъ условіямъ, выразимъ n-й интегралъ въ функціи извѣстныхъ и одной неизвѣстной m_1: съ опредѣленіемъ этой величины закончится интегрированіе.

Сколь велики затрудненія, сопряженныя съ удовлетвореніемъ двумъ условіямъ, высказаннымъ въ теоремѣ, объ этомъ будемъ трактовать въ другомъ мемуарѣ: всего вдругъ сдѣлать нельзя. Теперь покамѣстъ замѣтимъ, во первыхъ, что рѣшеніе линейнаго уравненія приведено въ зависимость отъ возможности найдти два значенія μ съ тѣмъ, чтобы преобразовать ихъ вмѣстѣ съ даннымъ уравненіемъ согласно съ условіями теоремы; исполнить это будетъ не такъ затруднительно, потому что, какъ доказано, множитель линейнаго уравненія есть функція одной перемѣнной x. Во вторыхъ, каковы бы ни были затрудненія сопряженныя съ удовлетвореніемъ условіямъ теоремы, неопровержимо одно, что задача отыскиванія интеграловъ уравненій упрощена до чрезвычайности: а это и есть главная цѣль настоящой Записки.

41. *Прибавленіе.*

Рѣшеніе дифференціальнаго линейнаго уравненія втораго порядка съ двумя перемѣнными.

Въ *трудахъ московскихъ математиковъ* будетъ напечатанъ мемуаръ С. А. Юрьева трактующій о способѣ приведенія линейнаго дифференц. уравн. съ двумя перемѣнными n-го порядка съ коэффиціентами перемѣнными къ двумъ совокупнымъ уравненіямъ, изъ коихъ одно линейное дифференц. 2-го порядка съ коэффиціентами перемѣнными, а другое алгебрическое n-ной степени. Чтеніе этого мемуара и пренія съ авторомъ о подробностяхъ его способа навели меня на рѣшеніе линейнаго уравн. 2-го порядка общаго вида

$$u'' + Au' + Bu = 0.$$

Оно легко можетъ быть приведено къ виду

$$y' + ay^2 + by + X = 0; \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

подъ a, b разумѣются какія нибудь постоянныя, однакожъ a

не $=0$; X данная функція x, а y', какъ всегда, изображаетъ $\frac{dy}{dx}$.

Можно разложить (1) на совокупныя уравненія

$$y' + Py + X = 0$$
$$ay + Q = 0,$$

въ которыхъ P, Q двѣ функціи связанныя условіемъ

$$P + Q = b.$$

Если же замѣнимъ y суммою двухъ неизвѣстныхъ функцій $\alpha + \delta$, потомъ полученныя уравненія,

$$\alpha' + \delta' + P(\alpha + \delta) + X = 0$$
$$a\alpha + a\delta + Q = 0,$$

сложимъ, по помноженіи послѣдняго изъ нихъ на неопредѣленный множитель $-m$, и наконецъ къ результату придадимъ одно и то же количество m' съ плюсомъ и минусомъ: то равенство

$$d(\alpha+m)=(am-P)\left\{\alpha+\frac{1}{am-P}(m'-\delta'-P\delta-X+am\delta+mQ)\right\}dx$$

обратится въ точный дифференціалъ отъ

$$log\,(\alpha + m) = k + \int(am - P)\,dx,$$

или

$$\qquad\qquad\int(am - P)\,dx$$

$$(2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha + m = ce$$

лишь бы мы удовлетворили условію

$$m' - \delta' - P\delta - X + am\delta + mQ = m\,(am - P).$$

Положимъ

$$(3) \dots\dots\dots m' - \delta' - P\delta + am\delta = 0$$

$$am^2 - bm + X = 0;$$

а также, для краткости,

$$m_1 = \frac{1}{2a}\left\{b + \sqrt{(b^2 - 4ax)}\right\}$$

$$m_2 = \frac{1}{2a}\left\{b - \sqrt{(b^2 - 4ax)}\right\},\ v = e^{-\int P dx}$$

$$D = c_1 e^{a\int m_1 dx} - c_2 e^{a\int m_2 dx}:$$

тогда уравненія

$$\alpha + m_1 = c_1 e^{a\int m_1 dx} \cdot v$$

$$\alpha + m_2 = c_2 e^{a\int m_2 dx} \cdot v$$

доставятъ

$$v = \frac{m_1 - m_2}{D}$$

$$\alpha = \frac{m_1 c_2 e^{a\int m_2 dx} - m_2 c_1 e^{a\int m_1 dx}}{D}$$

а δ опредѣлится изъ (3).

Или, инымъ образомъ:

опредѣлимъ изъ (3) P, и означимъ чрезъ P_1, P_2 значенія

$$\frac{m'_1 - \delta' + am_1\,\delta}{\delta}, \frac{m'_2 - \delta' + am_2\,\delta}{\delta},$$

соотвѣтствующія двумъ значеніямъ m: тогда (2) доставитъ

$$\alpha + m_1 = c_1\delta e^{-\int\frac{m'_1}{\delta}\,dx}$$

$$\alpha + m_2 = c_2\delta e^{+\int\frac{m'_1}{\delta}dx},$$

ибо $m'_2 = - m'_1$.

Изъ перваго выведемъ

$$\alpha = - m_1 + c_1\delta e^{-\int\frac{m'_1}{\delta}\,dx}\;; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

внося это значеніе въ другое уравненіе, находимъ

$$m_1 - m_2 = \left(c_1 e^{-\int\frac{m'_1}{\delta}} - c_2 e^{\int\frac{m'_1}{\delta}\,dx}\right)\delta.$$

Положимъ

$$e^{\int\frac{m'_1}{\delta}\,dx} = W,$$

слѣдовательно

$$\delta = m'_1\,\frac{W}{W'}:$$

тогда W опредѣлится изъ точнаго дифференціала

$$\frac{dW}{c_1 - c_2 W^2} = \frac{m'_1}{m_1 - m_2} dx,$$

послѣ чего найдутся два значенія для δ и столько же для α, и частныя значенія y будутъ

$$y_1 = \alpha_1 + \delta_1$$
$$y_2 = \alpha_2 + \delta_2,$$

разумѣя подъ α_1, α_2 значенія α, а подъ δ_1, δ_2 соотвѣтствующія значенія δ.

Впрочемъ, можно удовольствоваться однимъ частнымъ значеніемъ y_1, ибо общее значеніе будетъ, какъ извѣстно,

$$y = y_1 + \frac{e^{-\int (2ay_1 + b)\, dx}}{C + a\int e^{-\int (2ay_1 + b)\, dx} \cdot dx}.$$