
HANS
PETER

ENZYKLOPÄDIE DER RECHTS- UND STAATSWISSENSCHAFT

BEGRÜNDET VON

F. VON LISZT UND W. KASKEL

HERAUSGEGEBEN VON

E. KOHLRAUSCH · H. PETERS · A. SPIETHOFF

ABTEILUNG STAATSWISSENSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

DR. ARTHUR SPIETHOFF
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
BONN

XLVI

GRUNDRISS DER STATISTIK

I

THEORETISCHE STATISTIK

VON

DR. WILHELM WINKLER
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
WIEN

MIT 22 ABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1931

GRUNDRISS DER STATISTIK

I

THEORETISCHE STATISTIK

VON

DR. WILHELM WINKLER
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
WIEN

MIT 22 ABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1931

ISBN 978-3-642-88868-7 ISBN 978-3-642-90723-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-90723-4

Vorwort.

Der vorliegende Grundriß der Statistik fußt auf den gleichen theoretischen Gesichtspunkten, wie sie der Verfasser bereits in seinem Büchlein „Statistik“[1] zur Durchführung gebracht hat. Auch hier sollen die beiden in der deutschen Statistik bisher auf zwei getrennten Geleisen laufenden Richtungen der „allgemeinen Statistik“ und der „mathematischen Statistik“ als zwei einseitige Betrachtungsarten des gleichen Gegenstandes dargetan und in einem einzigen System der Theorie der Statistik vereinigt werden. Die Berechtigung dieser Vereinigung dürfte aus der vorliegenden ausführlicheren Bearbeitung noch klarer hervorgehen als aus der gedrängten, auf mathematischen Ausdruck beinahe vollständig verzichtenden Darstellung des erwähnten Bändchens. Dieses sollte ja einem Kreis von Lesern dienen, an deren Vorbildung keine besonderen Anforderungen gestellt werden durften. Unser Grundriß dagegen wendet sich, entsprechend dem Zwecke der Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft, vor allem an die akademische Jugend, darf also billigerweise diejenigen Kenntnisse voraussetzen, die in den mittleren Lehranstalten deutscher Sprache vermittelt werden. Freilich ergab sich aus dem gleichen Zwecke eine Beschränkung: es mußte auf die Darstellung aller Gedankengänge, die höhere Mathematik voraussetzen, so gut wie verzichtet werden. So darf die hier dargebotene Stufe füglich als Mittelstufe der statistischen Theorie (einschließlich der unentbehrlichen Unterstufe) bezeichnet werden. Der Leser findet aber auf Schritt und Tritt die Wege angegeben, die ihn von da zur Oberstufe führen, wenn er eine Erweiterung und Vertiefung des durch diesen Grundriß erworbenen Wissens anstrebt.

In unserer Darstellung sollte vermieden werden, in den mathematischen Sport mancher statistischer Lehrbücher zu verfallen, die viele Seiten mit mathematischen Formelableitungen anfüllen und dort zu wünschen übriglassen, wo es gilt, den Nutzen dieser Formeln für die Theorie und Praxis der Statistik zu erweisen. Wir haben uns, schon aus Raumrücksichten, darauf beschränkt, den logischen Ansatz, die Problemstellung, klarzulegen, von der aus eine mathematische Gedankenreihe zu einer für die Statistik verwendbaren Formel gelangt, und den Wert dieser Formel für die statistische Theorie und Praxis darzutun. Die Ableitungen der Formeln wie auch die von der dargestellten Theorie weiterführenden Wege wurden durch Angaben des wichtigsten Schrifttums nachgewiesen.

Der vorliegenden Darstellung der theoretischen Statistik — oder, schärfer bezeichnet, der reinen Theorie der Statistik — soll in einem zweiten Teile eine Darstellung der angewandten Statistik — oder schärfer der angewandten Theorie der Statistik — folgen. In einer Vorlesung über das gesamte Gebiet der Statistik mag es wohl zweckmäßig sein, diese Zweiteilung nicht streng zu beobachten und die theoretische Statistik ganz oder teilweise in den Rahmen der angewandten Statistik hineinzustellen, um das Verständnis der abstrakten Denkformen der theoretischen Statistik zu erleichtern. Von einem Lehrbuch dagegen verlangt man mit Recht

[1] Sammlung Wissenschaft und Bildung. Leipzig: Quelle & Meyer 1925.

einen streng systematischen Aufbau. Um aber dem weniger abstrakt veranlagten Leser entgegenzukommen, hat der Verfasser lieber an dem Umfang des darzustellenden Stoffes gespart als an Beispielen, Aufgaben und Abbildungen. Desgleichen hat er eine kurze Darstellung des äußeren Herganges einer statistischen Erhebung und Aufarbeitung der Einleitung eingefügt, um dem Studierenden das Verständnis der theoretischen Darlegungen zu erleichtern.

Der Verfasser ist sich der durch die ihm gesteckten Grenzen bedingten Unvollkommenheit seines Werkes wohl bewußt. Er erbittet auch beim Leser hierfür Verständnis und Nachsicht. Trotzdem hofft er, mit der Schaffung dieses Grundrisses einigen Nutzen zu stiften, weil die deutsche Statistik eine knappe, dabei doch auch dem mathematisch minder geschulten Leser zugängliche Darstellung der modernen statistischen Theorie in dem eingangs gefaßten Sinne derzeit noch nicht besitzt.

Bei der Auswahl und Durchrechnung der Beispiele und Aufgaben war mir in dankenswerter Weise Dr. Gregor Sebba behilflich.

Wien, im Juli 1931.

Wilhelm Winkler.

Inhaltsverzeichnis.

I. Einleitung.

II. Theorie und Verfahrenslehre der Statistik.

III. Schluß. Lügt die Statistik?

Anhang.

I. Einleitung.

1. Einiges über die Geschichte der Statistik[1].

Das Bedürfnis, zahlenmäßige Angaben über die Bevölkerung und ihre persönlichen und wirtschaftlichen Verhältnisse zu erhalten, ist beinahe ebenso alt wie die organisierte menschliche Gesellschaft. Es beruhte zumeist auf dem Gedanken, für Steuer- oder Aushebungszwecke Grundlagen zu gewinnen.

Der Name „Statistik" wurde zuerst von HERMANN CONRING (1606 bis 1681), Universitätsprofessor in Hellmstädt in Braunschweig, verwendet. Er ebenso wie der ein Jahrhundert später im gleichen Sinne schaffende Göttinger Professor ACHENWALL (1719 bis 1772) verstanden unter Statistik oder Staatsbeschreibung die Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten, umfassend etwa Land und Leute, Verfassung und Verwaltung, Staatszwecke, Land- und Seestreitkräfte eines Staates. Im Rahmen dieser wissenschaftlichen Richtung wuchs die Gepflogenheit heraus, die darzustellenden Tatsachen und Zahlen in Tabellen darzustellen. Der hervorragendste Vertreter dieser Sonderheit war CROME (1753 bis 1833). Zwischen den „Statistikern" der Göttinger Schule und diesen „Tabellenknechten" entbrannte ein heftiger Streit. Die Göttinger warten ihnen vor, sie könnten in ihren Tabellen keinesfalls auch die geistigen Kräfte eines Staates, Willenskraft, Begeisterungsfähigkeit, Tüchtigkeit, allgemeine und sittliche Kultur, Gottvertrauen, Selbstbewußtsein u. dgl. ausdrücken und hielten ihre Lehre für die idealere. Die Geschichte und die statistische Praxis haben sich zugunsten der „Tabellenknechte" entschieden. Die Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten löste sich in der Folge in der Ausgliederung der Wissenschaften in ihre verschiedenartigen Bestandteile auf, die Zahlentabellen aber blieben das Rückgrat dessen, was man in der weiteren Folge unter „Statistik" verstand und auch heute versteht.

Das mag wohl darin begründet sein, daß sich diese wissenschaftliche Richtung mit Bestrebungen begegnete, die seit längerem im Gange waren. Von England herkommend, durch GRAUNT (1620 bis 1674) und PETTY (1623 bis 1687) begründet, hatte sich unter dem Namen „Politische Arithmetik" eine Art Bevölkerungsstatistik eingebürgert. Man erfaßte im allgemeinen die leichter zugänglichen Bevölkerungstatsachen wie Geburten und Sterbefälle und begnügte sich damit, aus diesen eine Vorstellung von der Bevölkerungszahl, Zusammensetzung der Bevölkerung nach Geschlecht und Alter u. dgl. zu erhalten. Unter den Persönlichkeiten, die diese Richtung trugen, ist eine der bedeutendsten der preußische Feldprediger J. PETER SÜSSMILCH (1707 bis 1767) mit seinem Hauptwerk „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen" (1741).

Die große praktische Wichtigkeit aller dieser Arbeiten führte in der Mitte des 18. Jahrhunderts zunächst in Schweden zur Einrichtung von Bevölkerungsregistern,

[1] JOHN, V.: Geschichte der Statistik. Stuttgart 1884. GÜNTHER, A.: Geschichte der deutschen Statistik, in F. ZAHN: Die Statistik in Deutschland nach ihrem heutigen Stand **1**, 1ff. München u. Berlin 1911. WESTERGAARD-NYBØLLE: Grundzüge der Theorie der Statistik, 2. Aufl., S. 11ff. Jena 1928. WALKER, H. M.: Studies in the History of Statistical Method. Baltimore 1929.

in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts oder zur Wende des 18. und 19. Jahrhunderts zu den ersten Volkszählungsversuchen sowie zur Gründung der ersten staatlichen statistischen Ämter. Die ersten Volkszählungsversuche fanden statt: in Österreich 1754, in den Vereinigten Staaten 1790, in Frankreich und in Großbritannien 1801; statistische Ämter wurden gegründet in Frankreich 1796, in Preußen 1805, in Österreich 1829. Die amtliche Statistik des Deutschen Reiches setzte naturgemäß erst nach der Reichsgründung ein, hatte aber einen Vorläufer in der seit 1833 betriebenen Statistik des Deutschen Zollvereines.

Die ersten Tabellen der amtlichen Statistik erschienen zumeist unter Ausschluß der Öffentlichkeit und beruhten auf einer ganz einfachen Aufbereitungstechnik; die den Unterbehörden abverlangten Tabellen wurden von den oberen Stellen summiert. Im Laufe der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts gelang es, die amtliche Statistik von der Geheimhaltung zu befreien, auch wurden im Rahmen der angegebenen primitiven Aufbereitungsart die Tabellen durch zeitliche und örtliche Vergleiche ausgestaltet.

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts war es eine Anzahl bedeutender Männer, z. B. der Belgier ADOLPHE QUETELET, Präsident der belgischen statistischen Zentralkommission, ERNST ENGEL, Direktor des preußischen statistischen Landesamtes, KARL VON CZOERNIG, Direktor der österreichischen statistischen Zentralkommission, die auf die weitere Entwicklung der amtlichen Statistik einen günstigen Einfluß nahmen und der Statistik zu Ansehen verhalfen. Besonders war es QUETELET, der in der Statistik eine bedeutsame Wendung dadurch herbeiführte, daß er aus ihr als einer Wissenschaft von den Staatsmerkwürdigkeiten eine Wissenschaft von der menschlichen Gesellschaft machte. Sein Versuch der Aufrichtung einer sozialen Physik, d. i. eines Nachweises, daß die menschliche Gesellschaft unter ewigen, ehernen Gesetzen stehe ebenso wie die Natur, erregten viel Aufsehen und schafften ohne Zweifel eine Zeitlang eine für die Statistik günstige Stimmung. Die Lehre war aber auf unzulässigen Verallgemeinerungen aufgebaut und brach zusammen. Es gab in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts eine Krisis in der Statistik, die sich auch in ihrem äußeren Schicksal nachweisen läßt[1].

Es folgte eine wissenschaftliche Neueinstellung: die Begründung der wissenschaftlichen Statistik als Theorie der Massenerscheinungen. Man zieht sich auf die Begriffe und Verfahren der Statistik zurück, man studiert die typischen Formen, in denen statistische Massen auftreten, ihre typischen Zusammenhänge und leitet daraus die Regeln für eine richtige Behandlung des statistischen Zahlenstoffes ab. Daß bei dieser Darstellung der Formen und Beziehungen von Zahlengrößen die Ausdrucksweise der Mathematik eine Rolle zu spielen beginnt, ist selbstverständlich. Studien wahrscheinlichkeitstheoretischer Art, die aus der Untersuchung der Glücksspiele ihren Anfang nahmen, münden in die statistische Betrachtung der menschlichen Gesellschaft, das Studium der statistischen Kurvenformen ruft nach analytischem Ausdruck, die Fehlertheorie, die Ausgleichsrechnung findet Anwendungsmöglichkeiten usw. Namen wie LEXIS, v. BORTKIEWICZ, GALTON, EDGEWORTH, PEARSON, TSCHUPROW u. a. gewinnen für die Entwicklung der Statistik Bedeutung. Gebiete, die die Aufmerksamkeit weiter Kreise auf die statistische Theorie lenken, sind die Anwendung der Korrelationstheorie zunächst in der Vererbungsforschung, die Anwendung der Indextheorie für die Messung der Veränderung des Preisspiegels und des Geldwertes, der Reihentheorie für die Konjunkturforschung. Neben dieser Richtung finden wir in Deutschland, gewissermaßen als einen späten Ausläufer der Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten, eine Richtung, die das Ziel der statistischen Wissenschaft in der wissenschaftlichen Durchdringung des Zahlenstoffes über die menschliche Gesellschaft erblickt. Der

---

[1] Vgl. des Verfassers Die Statistik in Österreich. Wiener stat. Sprechabende, H. 1. Wien 1930.

Hauptvertreter dieser Richtung ist GEORG v. MAYR (1841 bis 1925), der in seinem umfassenden, unvollendet gebliebenen Werke „Statistik und Gesellschaftslehre“ eine imponierende Übersicht über den Zahlenstoff der Bevölkerungs- und Moralstatistik seiner Zeit geboten hat.

An dem Aufbau der statistischen Theorie im erstgenannten Sinne hat Deutschland, abgelenkt durch die großen auf die Zusammentragung und stoffliche Ausbeutung der Ergebniszahlen gerichteten Bemühungen, einen verhältnismäßig geringen Anteil genommen und ist daher in manchen Beziehungen hinter dem Auslande zurückgeblieben, woran sich erst in der neuesten Zeit einiges zu ändern beginnt. Dagegen hat sich die neuere deutsche Statistik (besonders F. ZIZEK) um die Herausarbeitung der logischen Denkformen der statistischen Theorie verdient gemacht.

Parallel mit der geschilderten wissenschaftlichen Vertiefung der Statistik ist die Vertiefung in der Aufbereitungstechnik der amtlichen Statistik gegangen, indem an Stelle des oben erwähnten primitiven Verfahrens der Tabellensammlung und -aufsummierung der Grundsatz der Individualbearbeitung des Stoffes getreten ist: Jede Zähleinheit wird auf ein Individualzählblatt übertragen und kann nun nach allen Merkmalen und Merkmalsverbindungen ausgezählt werden. Dieser Umschwung ist durch die Einführung der elektrischen Zählmaschinen gefördert worden.

Wie sich die amtliche Statistik in der Gegenwart weiterentwickelt hat, soll aus dem nächsten Abschnitt über die Organisation der Statistik ersichtlich werden. Näheres zum Begriff der Statistik soll weiter unten in Abschnitt II, 5d ausgeführt werden.

2. Die Organisation der zeitgenössischen Statistik[1].

a) Die amtliche Statistik. Die Statistik hat es durchaus mit großen Zahlen zu tun (vgl. auch weiter unten das „Gesetz der großen Zahl“). Für die äußere Einrichtung der Statistik folgt daraus, daß die Durchführung einer Statistik vom ersten Anfang bis zur Veröffentlichung der Ergebnisse in der Regel eine kostspielige Angelegenheit ist. Es liegt darum nahe, daß die öffentliche Gewalt, der Staat, die Länder, Bezirke, Städte, hauptsächlich Träger der Statistik sind. Im Deutschen Reiche ist es vor allem das Statistische Reichsamt, das heute beinahe für alle Zweige der Statistik die Zuständigkeit besitzt. Daneben stehen die statistischen

[1] ZAHN, F.: Artikel Statistik im Handwörterbuch der Staatswissenschaften 4. Aufl., **7.** BREISKY, W.: Die Weltlage der Statistik, Wiener Statistische Sprechabende, H. 1. Wien 1930. BURGDÖRFER, F.: Die Organisation des amtlichen statistischen Dienstes in Deutschland, in: Forschungsinstitute, ihre Geschichte, Organisation und Ziele. Hrsg. von LUDOLPH BRAUER, ALBRECHT-MENDELSSOHN-BARTHOLDY und ADOLF MEYER **1.** Hamburg: Hartung 1930. Das Arbeitsgebiet des Statistischen Reichsamtes zu Beginn des Jahres 1931, in: Vierteljahrshefte zur Statistik des Deutschen Reiches Jg **40,** H. 1 (1931). SCHIFF, WALTHER: Die amtliche Statistik und die neuen Erfordernisse der Zeit, in: Statistische Monatsschr. III. F., I, H. 5 bis 8, S. 111ff. Wien 1919. WEYR, F.: Die Tätigkeit des statistischen Staatsamtes der čechoslovakischen Republik seit seiner Errichtung bis Ende 1921, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **63,** III. F., S. 567. Jena 1922. BUZEK, J.: Die Organisation der amtlichen Statistik in Polen, in: Allgemeines Statistisches Archiv **16,** 592ff. Jena 1927. KOLLAR, R.: Rozhledy po literatuře o organisaci statistické služby, in: Československý Statistický Věstník **8,** 235ff. Prag 1927. GINI, C.: La Statistique en Italie, in Journ. de la Soc. de Stat. de Paris S. 52ff. Nancy-Paris-Straßburg 1927. WILHELM, A.: Die Neuordnung des statistischen Verwaltungsdienstes in Italien, in: Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, Jg 64, S. 414ff. Bern: A. Francke A.G. 1928. DOBROVITS, A.: La réforme du service statistique en Hongrie, in: Journ. de la Soc. Hongroise de Stat. Jg 7, Nr 1 bis 2, S. 222ff. (1929). BREISKY, W.: Der statistische Hochschulunterricht bei uns und auswärts, in: Zeitschrift für Volkswirtschaft und Sozialpolitik, **5.** N. F., S. 358. Wien u. Leipzig 1927. WÜRZBURGER, E.: Rapport sur l'Enseignement de la Statistique dans les Ecoles des Hautes Etudes, in: Bull. de l'Institut International de Statistique **22,** 2. Lief., S. 345ff. Kairo 1928.

Landesämter (Preußisches, Bayerisches, Sächsisches, Württembergisches usw. Statistisches Landesamt), die bei den großen Reichserhebungen unter Führung des Statistischen Reichsamtes mitwirken, daneben auch in reinen Landesangelegenheiten ihre eigene Statistik betreiben, ähnlich wie die städtischen statistischen Ämter, von denen beinahe in jeder größeren deutschen Stadt eines zu finden ist. Sowohl die Landesstatistik wie die im Verbande Deutscher Städtestatistiker vereinigte Städtestatistik treten alljährlich zu Beratungen zusammen. In Österreich ist das Bundesamt für Statistik die zur Betreuung der staatlichen Statistik berufene Stelle. Aber nicht die gesamte staatliche Statistik liegt in seiner Zuständigkeit, sondern große Teile der amtlichen Statistik, z. B. die Handelsstatistik, die Landwirtschaftsstatistik, die Gesundheitsstatistik, werden von den zuständigen Fachministerien betrieben. Diesen Zustand nennt man — entgegengesetzt zu der im Deutschen Reich nahezu erzielten Vereinigung (Zentralisation) — den der Zersplitterung (Dezentralisation) des statistischen Aufbaues. Die vereinigte (zentralisierte) Statistik hat den Vorteil eines von allgemeineren Gesichtspunkten getragenen, daher verschiedenen Verwaltungszwecken gleichzeitig dienenden, sachlicheren und billigeren, in der Regel auch fachmännischeren statistischen Betriebes, ist daher als die vollkommenere Aufbauform der amtlichen Statistik zu betrachten gegenüber der zersplitterten (dezentralisierten) Statistik, die für sich in der Regel nur die größere Vertrautheit der verschiedenen Fachstellen mit den bearbeiteten Stoffgebieten geltend machen kann.

Eine weitgehende oder vollständig durchgeführte Vereinigung der staatlichen Statistik finden wir in Italien, Rußland, der Tschechoslowakei, Polen, Rumänien; zersplittert ist die staatliche Statistik Frankreichs, Großbritanniens, der Vereinigten Staaten von Amerika.

Die Vereinigung oder Zersplitterung im Aufbau der Statistik ist nicht zu verwechseln mit der örtlichen Vereinigung oder Auseinanderlegung der Aufarbeitung, von der später (im Abschnitt I 5b) die Rede sein wird.

Gewissermaßen die Krönung der Organisation der amtlichen Statistik bildet das „statistische Gesetz“, mit dem den statistischen Ämtern die allgemeine Erhebungsgewalt eingeräumt wird. Für die einzelne Erhebung ist dann nur noch eine Verordnung des statistischen Amtes oder eines Fachministeriums notwendig. In den meisten Staaten, darunter auch im Deutschen Reich und Österreich, fehlt noch dieser letzte Schlußstein zum statistischen Aufbau, und es müssen große Erhebungen, die nicht alljährlich vorgenommen werden, erst durch ein besonderes Gesetz verfügt werden (so z. B. die großen Volks-, Berufs- und Betriebszählungen im Deutschen Reiche), sofern nicht für einen bestimmten Zählungszweck ein besonderes Dauergesetz vorhanden ist (wie z. B. in Österreich das Volkszählungsgesetz vom Jahre 1869).

b) Die nichtamtliche Statistik. Unter der nichtamtlichen Statistik sind vor allem zu erwähnen die statistischen Abteilungen der Körperschaften und Institute öffentlichen Rechts, wie Handels- und Gewerbekammern, Landwirtschaftskammern, Kammern für Angestellte und Arbeiter u. dgl., von denen in neuerer Zeit, besonders in Österreich infolge der unzureichenden Versorgung der staatlichen Statistik mit Geldmitteln, die statistische Abteilung der Kammer für Arbeiter und Angestellte und das der Wiener Handelskammer angegliederte österreichische Konjunkturforschungsinstitut Aufgaben der staatlichen Statistik übernommen haben und in weiteren Kreisen bekannt geworden sind. Zu erwähnen sind hier auch die statistischen Abteilungen der Notenbanken, die bemerkenswerte statistische Veröffentlichungen herausgeben.

Weiter betreiben und veröffentlichen Statistik Genossenschaften, Arbeitnehmer- und Arbeitgeberverbände, Erwerbsunternehmungen und sonstige.

Nationale statistische Gesellschaften sind für die Förderung der Statistik im Bereiche ihres Staates tätig. Hier sind zu nennen: die Deutsche Statistische Gesellschaft, der Verband Deutscher Städtestatistiker, die Royal Statistical Society (England), die American Statistical Association, die Schweizerische Statistische Gesellschaft, die Société Hongroise de Statistique und die Société de Statistique Tchécoslovaque.

c) Die Universitätsstatistik. Von Wichtigkeit für die Entwicklung der Statistik in einem Staate sind auch die statistischen Lehrkanzeln an den Universitäten, weil hier die wissenschaftliche Ausbildung der späteren Erzeuger und Verbraucher der Statistik erfolgt und weil eine statistische Lehrkanzel bei der üblichen Verbindung von Lehre und Forschung auch eine Stätte für wissenschaftliche Forschungsarbeit auf dem Gebiete der Statistik bedeutet. Bedauerlicherweise besitzen wir im Deutschen Reiche derzeit nur 5 statistische Lehrkanzeln (Berlin, Leipzig, Frankfurt, Köln, Jena), und es wird der statistische Unterricht überwiegend nur nebenbei von Ordinarien eines anderen Faches erteilt, so daß sowohl für die Lehre als auch für die Forschung noch nicht das günstigst mögliche Maß erreicht ist.

In Österreich besteht eine statistische Lehrkanzel an der Wiener Universität, der auch das „Institut für Statistik der Minderheitsvölker" zugehört, an dem im Studienbetriebe nicht bloß Nationalitätenstatistik, sondern alle Zweige der Statistik gepflegt werden.

Im Auslande liegen die Verhältnisse zum Teil viel günstiger. Wir finden dort an den Universitäten nicht nur eine viel größere Anzahl von statistischen Lehrkanzeln (z. B. in Italien an jeder zweiten, in Ungarn an jeder Universität), sondern auch große statistische Institute, an denen den Studierenden in einem mehrjährigen Lehrgang eine statistische Sonderausbildung geboten wird mit der Möglichkeit, hier eine Diplomprüfung abzulegen und „Diplomstatistiker" zu werden. Solche Institute bestehen in Paris, Rom usw.

Wie ganz anders als in Deutschland in anderen Staaten, besonders den angelsächsischen, Statistik studiert wird, beweist auch die beinahe unübersehbare Fülle von statistischen Lehrbüchern, die der dortige Büchermarkt zu tragen vermag. Dazu haben einige bevorzugte darunter auch noch eine hohe Auflagezahl erlebt; so hält Yules Introduction to the Theory of Statistics bei der 9. Auflage, 1929, Bowleys Elements of Statistics bei der 5. Auflage, 1926.

d) Die internationale Statistik. Die statistischen Ergebnisse der verschiedenen Länder sind nur dann untereinander voll vergleichbar, wenn in allen Ländern die gleichen Fragen gestellt, die gleichen Begriffe und Methoden verwendet werden. Um eine solche Gleichheit herbeizuführen, haben sich schon früh die Statistiker zu internationalen Kongressen zusammengefunden, deren erster im Jahre 1853 in Brüssel unter Leitung des bereits oben erwähnten tatkräftigen Belgiers Quetelet zustande kam. Von 1853 bis 1878 folgten acht weitere Kongresse. Im Jahre 1885 wurde, um dieser segensreichen Einrichtung die notwendige Ständigkeit zu geben, das Internationale Statistische Institut im Haag gegründet, das sowohl in seinen eigenen internationalen Zusammenstellungen, als besonders in seinen von zwei zu zwei Jahren stattfindenden Tagungen und den Berichten darüber (siehe 4., Quellenkunde) außerordentlich wertvolles Material theoretischer und praktischer Art beibringt.

Eine weitere internationale statistische Organisation ist das Internationale Landwirtschaftsinstitut in Rom, dessen Veröffentlichungen sich im allgemeinen auf die Anbau- und Erntestatistik der Staaten der Welt beziehen.

Neuerdings hat der Völkerbund eine statistische Abteilung eröffnet, die über Bevölkerungs- und Wirtschaftsstatistik ein Jahrbuch herausgibt. Eine andere statistische Stelle des Völkerbundes ist die statistische Abteilung des Internationalen Arbeitsamtes, das den gesamten Umfang der Arbeitsstatistik (in einem weiteren Sinne des Wortes, z. B. auch Wanderungsstatistik, Gesundheitsstatistik) bearbeitet. Eine dritte Stelle des Völkerbundes ist das Internationale Institut für geistige Zusammenarbeit in Paris, das um die Aufstellung einer internationalen Kulturstatistik bemüht ist.

Durch diese seine Schöpfungen hat der Völkerbund in die Zuständigkeit des altbewährten Internationalen Statistischen Institutes eingegriffen und es wird derzeit zum Teil Doppelarbeit geleistet. Um die hier einsetzenden Gegensätze zu überbrücken, hat man zu dem Hilfsmittel von „Commissions mixtes" gegriffen, deren Mitglieder beiden Organisationen angehören. Es ist zu wünschen, daß in der weiteren Entwicklung die für die Entfaltung von Theorie und Praxis so wichtige Tätigkeit des Internationalen Statistischen Institutes nicht irgendwie eingeschränkt werde.

3. Einige Voraussetzungen für das erfolgreiche Studium der Statistik.

Eine Hauptvoraussetzung für das erfolgreiche Studium der Statistik besteht darin, daß der Studierende nicht glaube, aus Lehrbüchern allein Statistik erlernen und verstehen zu können. Ein solches papierenes Wissen könnte nur mit einem übermäßigen Aufwand an Fleiß erworben werden und würde dem Studierenden doch niemals eine ganz richtige Vorstellung von dem Gegenstande vermitteln. Wohl ist die theoretische Statistik ein rein abstraktes Wissensgebiet; aber diese Theorie wird erst in der statistischen Praxis lebendig. Der Studierende sollte also bestrebt sein, in einem statistischen Amt oder mindestens in einem statistischen Universitätsseminare einen gewissen Anschluß an die statistische Praxis zu gewinnen. Ferner sollte er es nicht unterlassen, sich fleißig in den ihm zugänglichen statistischen Quellenwerken der Kulturstaaten umzusehen, weil er auch dadurch mit der statistischen Praxis Fühlung erhält.

Eine weitere Voraussetzung des wissenschaftlichen Betriebes der Statistik, gemeinsam mit allen anderen Wissenschaften, ist die Kenntnis der Hauptweltsprachen, also — außer der Kenntnis des hier als selbstverständlich vorausgesetzten Deutschen — auch des Französischen, Englischen und wenn möglich auch des Italienischen. Alle Menschen, die eine Wissenschaft, also z. B. Statistik betreiben, bilden eine geistige Gemeinschaft, und es gehört zu den ungeschriebenen Gesetzen eines richtigen wissenschaftlichen Betriebes, von den Leistungen früherer Geschlechter und denjenigen der Zeitgenossen Kenntnis zu nehmen. Es ist Zeichen eines unwissenschaftlichen Geistes, von diesen Leistungen nichts zu wissen und gewissermaßen in die Luft zu bauen, statt auf den Grundmauern, die andere bereits errichtet haben. Besonders in der Statistik, die im internationalen Vergleiche ein wichtiges Ziel findet, ist die Unkenntnis der Hauptsprachen ein schweres Bewegungshindernis; für den wissenschaftlich tiefer Schürfenden ist die Kenntnis der genannten Sprachen schlechthin unentbehrlich.

Zu diesen allgemeinen Voraussetzungen des statistischen Studiums kommt noch eine besondere hinzu: die Kenntnis der Mathematik. Die Statistik befaßt sich in vielfältiger Weise mit den Beziehungen von Zahlengrößen. Es gibt keine Ausdrucksform, die diese Beziehungen kürzer und klarer darstellen könnte als die mathematische. So ist der mathematische Ausdruck die beherrschende Umgangssprache der modernen wissenschaftlichen Statistik geworden, und man muß diese Sprache lernen, wenn man die wissenschaftlichen Arbeiten auf diesem Gebiete verstehen will. Besonders die außerdeutsche, vor allem die angelsächsische Statistik hat die mathematische Ausdrucksform allgemein angenommen, und es bleibt dieser große und wichtige Teil unserer Wissenschaft demjenigen ein Buch mit sieben Siegeln, der nicht diese Sprache lesen lernt. In Deutschland sind wir, wohl wegen der sehr ablehnenden Haltung, die der durch lange Zeit tonangebende Altmeister der deutschen Statistik, Georg v. Mayr, gegenüber der mathematischen Ausdrucksweise in der Statistik eingenommen hat, in dieser Beziehung etwas rückständig geblieben. Hier gilt es, einen Wandel zu schaffen. Freilich kann ein solcher nur ganz allmählich herbeigeführt werden, da weder bei den deutschen Lehrern, noch bei den deutschen Studierenden der Staatswissenschaften eine genügende Ausbildung in der Mathematik vorausgesetzt wird oder vorgesehen ist. Es wird darum auch dieses Lehrbuch im allgemeinen von der Verwendung der höheren Mathematik absehen und auch nur dort, wo es unbedingt notwendig ist, Ausdrucksmittel der elementaren Algebra verwenden, wie sie der Absolvent einer deutschen mittleren Lehranstalt beherrschen muß.

4. Statistische Quellenkunde[1].

Der Studierende der Statistik muß sich darüber klar werden, wo und in welcher Form die amtliche Statistik ihre Zahlen veröffentlicht; er soll weiter die wichtigsten Veröffentlichungen der internationalen statistischen Ämter kennen lernen. Er wird sich ferner mit den wichtigsten statistischen Zeitschriften, vielleicht auch mit diesem oder jenem Grundwerk der zeitgenössischen Statistik und mit diesem oder jenem anderen Lehrbuche der Statistik vertraut machen.

a) Die amtlichen Veröffentlichungen. Will man sich von den für einen Staat vorliegenden statistischen Ergebnissen einen ersten vorläufigen Überblick verschaffen, so greift man zu dessen statistischem Jahrbuch (Handbuch, Abstract usw.). In diesem findet man in knappen Tabellen, in der Regel ohne Begleittext, die gesamten Ergebnisse der amtlichen, aber auch, soweit nützlich und notwendig, der halbamtlichen und der nichtamtlichen Statistik dargestellt. Den einzelnen Tabellen ist in der Regel die Angabe der Originalquelle der Tabelle beigefügt. Außerdem enthalten diese Jahrbücher (Handbücher) in ihren Registern, Inhaltsverzeichnissen oder sonstigen Literaturverzeichnissen taugliche Übersichten über die amtlichen Ergebnisse. Mustergültig sind in dieser Hinsicht die Quellennachweise, die den statistischen Jahrbüchern für das Deutsche Reich vorangestellt werden.

Die Zahlen eines statistischen Jahrbuches (Handbuches) sollen nur erste Hinweise sein. Wer sich mit einem statistischen Stoff eingehender beschäftigen will, darf bei diesen Angaben nicht stehen bleiben, sondern muß die Quellenveröffentlichungen zu Rate ziehen. Diese erscheinen über alle wichtigeren Stoffe der Statistik: Volkszählungen, Berufszählungen, Betriebszählungen, Bevölkerungsbewegung, auswärtiger Handel, Verkehr, Kriminalstatistik u. a.

Ein Quellenwerk enthält in seiner Einleitung immer die Angabe der bei der Erhebung und Aufarbeitung verwendeten Begriffe und Methoden, die für die kritische Beurteilung der Zahlen sehr wichtig sind; dann in dem sogenannten „analytischen Teil" die Besprechung der gewonnenen Ergebnisse, durch Verhältniszahlen, Mittelwerte und andere statistische Maßzahlen durchsichtiger gemacht und mit zeitlichen, örtlichen Vergleichen u. dgl. versehen. Wie weit der Bearbeiter der Zahlen in diesem Besprechungsteile geht, hängt sowohl von dem zur Verfügung stehenden Raum, als auch von seiner Neigung ab. Die grundlegenden Ausführungen über die Begriffe und Methoden der Zählung sollen dagegen immer vorhanden sein; schon sie rechtfertigen die Forderung, daß der fachmännische Benützer statistischer Zahlen auf die Quellenwerke zurückgehe.

Im Deutschen Reich erscheint das große Quellenwerk „Statistik des Deutschen Reichs", Alte Folge 63 Bände, Neue Folge derzeit bei Band 418, außerdem 16 Bände „Einzelschriften zur Statistik des Deutschen Reichs". Daneben erscheinen die „Vierteljahrshefte zur Statistik des Deutschen Reichs", in denen die Bearbeitung der weniger umfangreichen Stoffe Aufnahme findet. Das österreichische Quellenwerk, im alten Österreich „Österreichische Statistik", im neuen Österreich „Beiträge

---

[1] Vgl. A. L. Bowley: Official Statistics. What They Contain and How to Use Them. 2. Aufl. Oxford University Press, London 1928.

zur Statistik der Republik Österreich", ist infolge der finanziellen Schwierigkeiten zunächst ins Stocken geraten, dürfte aber durch die landwirtschaftliche und gewerbliche Betriebszählung von 1930 und die kommende Volks-, Berufs-, Häuser-, Wohnungs- und Viehzählung wieder zu neuem Leben erweckt werden.

Eine weitere Veröffentlichungsform stellen die von amtlichen Stellen herausgegebenen wissenschaftlichen Zeitschriften dar, die vor allem den Beamten der statistischen Ämter Gelegenheit geben sollen, wissenschaftliche Stoffdurcharbeitungen oder sonstige wissenschaftliche statistische Arbeiten zu veröffentlichen. Das reinste Beispiel einer solchen Zeitschrift war die Statistische Monatsschrift der österreichischen statistischen Zentralkommission, die leider den Umsturz in Österreich nicht lange überlebt hat. Ähnliche Zeitschriften sind die Zeitschriften des Preußischen, des Bayerischen und des Sächsischen Statistischen Landesamtes u. a., in gewissem Sinne auch die Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung des deutschen Institutes für Konjunkturforschung. (Die ganz ähnlichen Monatsberichte des österreichischen Konjunkturforschungsinstitutes sind nichtamtliche Veröffentlichungen.)

Von dieser Art amtlicher Zeitschriften sind diejenigen zu unterscheiden, die hauptsächlich dazu bestimmt sind, die jüngst gewonnenen und interessantesten Ergebnisse der Statistik an einen weiten Benützerkreis heranzubringen und so die amtliche Statistik volkstümlich zu machen. Zeitschriften dieser Art sind die vom Statistischen Reichsamte herausgegebene Monatsschrift „Wirtschaft und Statistik" und die vom Österreichischen Bundesamte für Statistik herausgegebene Monatsschrift „Statistische Nachrichten".

In den anderen Kulturstaaten ist das Veröffentlichungswesen im allgemeinen ähnlich geregelt wie im Deutschen Reiche und Österreich. Der Studierende wird sich am besten an die Bücherei des nächsten statistischen Amtes wenden, wenn er einen Überblick über die amtlichen statistischen Veröffentlichungen eines Staates erhalten will.

b) Die Veröffentlichungen der internationalen statistischen Stellen. Unter den Veröffentlichungen internationaler Stellen nehmen diejenigen des Internationalen Statistischen Institutes schon vermöge seines Alters und seiner Geschichte den ersten Rang ein. Die weitaus größte Bedeutung haben die Bulletins des Internationalen Statistischen Institutes, in denen die bei den Tagungen des Institutes eingereichten Berichte und Mitteilungen und die darüber geführten Verhandlungen abgedruckt sind. Sie spiegeln in gewissem Sinne die Entwicklung der statistischen Theorie und Praxis in der neueren Zeit wieder und sind eine wertvolle Fundgrube auf allen Gebieten der Statistik. Der wissenschaftliche Bearbeiter eines Gebietes der Statistik wird daher gut tun, neben anderen Bibliographien auch die Register der Bulletins des Internationalen Statistischen Institutes zu befragen. Außerdem veröffentlicht das Internationale Statistische Institut in seinen Annuaires und Aperçus sowie in seinem Bulletin mensuel wertvolle internationale Übersichten aus dem Bereiche der gesamten Statistik.

Die statistische Abteilung des Völkerbundes veröffentlicht ein Annuaire Statistique International über die Bevölkerungs- und Wirtschaftsstatistik. (Ähnliche internationale statistische Übersichten sind auch im Anhang mancher statistischer Jahrbücher, z. B. des Deutschen Reiches oder Frankreichs, zu finden.) Die statistische Abteilung des Internationalen Arbeitsamtes hat außer der ständigen Bearbeitung des statistischen Teiles in der Revue Internationale du Travail (auch deutsch als Internationale Rundschau der Arbeit) unter seinen zahlreichen Veröffentlichungen auch eine Reihe statistisch-methodischer Einzelschriften aus dem Gebiete der Sozialstatistik herausgegeben.

Das Internationale Landwirtschaftsinstitut in Rom veröffentlicht vor allem das Annuaire International Agricole.

c) Private statistische Zeitschriften. Das folgende Verzeichnis führt die wichtigsten privaten statistischen Zeitschriften an:

Allgemeines Statistisches Archiv, Organ der Deutschen Statistischen Gesellschaft. Jena: Gustav Fischer. Die hauptsächlichste deutsche Veröffentlichungsstelle für größere wissenschaftliche Arbeiten auf dem Gebiete der Statistik.

Deutsches Statistisches Zentralblatt, Organ der Deutschen Statistischen Gesellschaft und des Verbandes Deutscher Städtestatistiker. Leipzig: B. G. Teubner; hauptsächlich das Literaturblatt der deutschen Statistik.

Journal de la Société de Statistique de Paris, Organ der französischen statistischen Gesellschaft, Paris.

Journal of the Royal Statistical Society, London. Organ der englischen statistischen Gesellschaft.

Journal of the American Statistical Association, Concordia, N. H., Organ der amerikanischen statistischen Gesellschaft.

Journal de la Société Hongroise de Statistique, Budapest.

Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, Bern. Organ der schweizerischen statistischen Gesellschaft.

Metron, Rom. Eine in italienischer, französischer, englischer und deutscher Sprache erscheinende internationale statistische Zeitschrift.

Nordisk Statistisk Tidskrift, Stockholm, mit einer englischen Nebenausgabe.

Biometrika, herausgegeben v. Biometric Laboratory, University College, London. Obzwar zunächst für biometrische Probleme bestimmt, ist diese Zeitschrift eine Fundgrube für die moderne englische Entwicklung der statistischen Theorie, besonders der Forschungen K. Pearsons und seiner Schule geworden.

Außer in diesen Zeitschriften finden sich noch in zahlreichen anderen, überwiegend volkswirtschaftlich eingestellten Zeitschriften häufig statistische Artikel, z. B. in den Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik, im Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica u. a.

d) Einige andere statistische Lehrbücher. Das folgende Verzeichnis von empfehlenswerten Lehrbüchern der Statistik strebt natürlich keine Vollständigkeit an und muß sich mit der Hervorhebung einiger weniger Werke begnügen.

Elementarbüchlein für Anfänger:

S. Schott: Statistik, Leipzig u. Berlin: Teubner 1913.

W. Winkler: Statistik, Sammlung Wissenschaft und Bildung. Leipzig: Quelle & Meyer 1925.

Größere Lehrbücher in deutscher Sprache:

C. V. L. Charlier: Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Lund: Verlag Scientia 1920. Neue Ausgabe Lund: Gleerup, 1931.

Emanuel Czuber: Die statistischen Forschungsmethoden. Wien: L. W. Seidel & Sohn 1921.

Westergard-Nybølle: Grundzüge der Theorie der Statistik, 2. Aufl. Jena: G. Fischer 1928.

H. L. Rietz: Handbuch der mathematischen Statistik. Deutsche Ausgabe, herausg. v. F. Baur. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1930.

G. v. Mayr: Statistik und Gesellschaftslehre, unvollständig. Tübingen: J. C. B. Mohr; Bd. 1: Theoretische Statistik, 2. Aufl. 1914; Bd. 2: Bevölkerungsstatistik, 2. Aufl. 1922ff.; Bd. 3: Moralstatistik 1917.

F. Zizek: Grundriß der Statistik (Theoretische und praktische Statistik umfassend), 2. Aufl. München u. Leipzig: Duncker & Humblot 1923.

Die beiden letzteren Werke sind unmathematisch.

Fremdsprachige Lehrbücher:

G. Udny Yule: An Introduction to the Theory of Statistics, 9. Aufl. London: Charles Mifflin and Co, Ltd. 1929.

Arthur L. Bowley: Elements of Statistics, 5. Aufl. London: P. S. King & Son, Ltd. 1926.

Frederick C. Mills: Statistical Methods Applied to Economics and Business. New York: Henry Holt and Co. 1924.

Rodolfo Benini: Principii di statistica metodologica, 2. Aufl. Turin 1926.

Lucien March: Les Principes de la Méthode Statistique. Paris: Librairie Félix Alcan 1930.

Statistische Tafeln:

Frederick C. Mills und Donald H. Davenport: A Manual of Problems and Tables in Statistics. New York: Henry Holt & Comp. 1925. Eine Sammlung statistischer Aufgaben und Tafeln im Anschluß an das erwähnte Mills'sche Lehrbuch.

Karl Pearson: Tables for Statisticians and Biometricians, issued by the Biometric Laboratory, University College, London.

Zahlreiche andere bemerkenswerte statistische Werke sind im Texte bei den einzelnen Abschnitten angeführt, darunter aber in der Regel nicht mehr die zutreffenden Abschnitte der hier ausgewiesenen Lehrbücher, die jeweils gleichfalls nachzuschlagen sind.

Zur Einführung in die höhere Mathematik:

R. FUETER: Das mathematische Werkzeug des Chemikers, Biologen und Statistikers. Vorlesungen über die höheren mathematischen Begriffe in Verbindung mit ihren Anwendungen. Zürich: Orell Füßli 1926.

S. H. THOMPSON: Höhere Mathematik und doch verständlich, 2. Aufl. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft 1927.

P. LORENZ: Höhere Mathematik für Volkswirte und Naturwissenschaftler. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft 1929.

Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

E. CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2 Bde. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften **9**, 1, 2. Leipzig u. Berlin: Teubner 1924.

J. M. KEYNES: Über Wahrscheinlichkeit. Übers. v. F. M. URBAN. Leipzig: J. A. Barth 1926.

I. L. COOLIDGE: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsche Ausgabe von F. M. URBAN. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1927.

J. v. KRIES: Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. 2. Aufl. Tübingen: I. C. B. Mohr 1927.

R. v. MISES: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung **3**. Wien: Julius Springer 1928.

R. v. MISES: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik **1**: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien: Deuticke 1931.

5. Der äußere Hergang der statistischen Erhebung und Aufarbeitung[1].

a) Die statistische Erhebung. Wenn es feststeht, daß eine statistische Erhebung, z. B. eine Volkszählung, eine Betriebszählung, stattfinden soll, so ist es zunächst notwendig, die Erhebung zu organisieren. Der erste Schritt hierzu ist die Bereitstellung der Zählpapiere. Diese hat immer im Einvernehmen mit den an der Erhebung hauptsächlich interesssierten Kreisen, Ministerien, wirtschaftlichen Körperschaften u. dgl. zu geschehen Der Fragebogen darf nicht zu umfangreich sein, weil zu umfangreiche Zählpapiere nicht gut und sorgfältig ausgefüllt werden. Die Fragen müssen klar und verständlich gestellt werden, es soll ihnen überdies eine klare und kurze Belehrung beigefügt sein.

Die Erhebung kann in Form von Individualzählblättern (Individualfragebogen) oder von Listen geschehen. Unter Listen versteht man Sammelfragebogen, in denen im Kopf die Fragen vorgesehen sind, in der Vorspalte (Legende) aber Raum für die Anführung der zutreffenden Fälle, so daß für jeden Fall eine Zeile gewidmet ist. Durch die weiter unten zu besprechenden elektrischen Zählmaschinen gewinnen die Listen immer weitere Verbreitung, weil sie die fortlaufende Auszeichnung und Lochung der Zählblättchen erleichtern, besonders auch dort, wo die einzelnen Fälle Gemeinschaften bilden (wie bei der Bevölkerung Haushaltungen, Wohnungsgemeinschaften), gleichzeitig diese Gemeinschaft darstellen und ihre Aufarbeitung erleichtern. Der Nachteil der Listen besteht in der Beschränktheit des Raumes für die

[1] v. MAYR, G.: Statistik und Gesellschaftslehre **1**, 2. Aufl. Freiburg i. B. 1914. WINKLER, W.: Statistik, S. 117ff. MÜLLER, J.: Theorie und Technik der Statistik. Jena: G. Fischer 1927. HIESS, F.: Methodik der Volkszählungen. Jena: G. Fischer 1930. SCHULZ, E., u. B. FELS: Richtlinien für die Aufbereitung einer Volks-, Berufs- und Betriebszählung. Berlin 1930. HIESS, F.: Technik der Statistik unter besonderer Berücksichtigung der großen amtlichen Zählungen. (In Vorbereitung.) LENZ, K.: Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1925. FEINDLER, R.: Das Hollerith-Lochkartenverfahren. Berlin: R. Hobbing 1929.

Fragestellung (was aber auch mit Rücksicht auf die wünschenswerte Vermeidung eines Zuviel an Fragen einen Vorteil bedeuten kann).

Außer den Zählpapieren ist die Erhebung selbst vorzubereiten. Man muß sich zunächst einen Überblick über die zu erfassenden Zähleinheiten verschaffen, soweit er nicht schon vorhanden ist. Diesem Zwecke dient die Vornumerierung der Häuser bei Volkszählungen, die Vorerhebung bei Betriebszählungen u. dgl. Dann ist die Art der Durchführung der Zählung vorzubereiten. Das Zählgebiet ist in Zählsprengel einzuteilen, und es sind im Falle einer Zählung durch Zähler (Gegensatz Selbstzählung, d. h. Ausfüllung der Zählpapiere durch den Befragten selbst) diese Zähler vorher zu bestellen und vorher zu unterrichten.

Schließlich ist die Zählung selbst sorgfältig durchzuführen, und es haben in genügender Anzahl Prüfungsorgane die Arbeit der Zähler (bei Selbstzählung der Befragten) zu prüfen. Wo irgend angängig, sind die gemachten Angaben mit Dokumenten (Geburts-, Tauf-, Trauungs-, Gewerbeschein u. dgl.) zu belegen.

Es ist außerordentlich wichtig, daß diese erste Stufe des statistischen Verfahrens, die statistische Erhebung, mit aller Sorgfalt und Aufmerksamkeit durchgeführt werde. Bei der Massenhaftigkeit des Stoffes und der örtlichen Entfernung des bearbeitenden statistischen Amtes sind nachherige Berichtigungen nur mit großer Mühe und großem Zeitverlust, wenn überhaupt, zu bewerkstelligen. Und doch ruht die ganze spätere Aufarbeitung auf diesen ursprünglichen Angaben, und es nützt auch ein Übermaß an Geist und Sachkenntnis des Bearbeiters nichts, wenn er, vielfach ohne es feststellen zu können, einen mit groben Erhebungsfehlern behafteten Stoff zur weiteren Bearbeitung übernimmt.

Bisweilen tritt der Statistiker einem statistischen Stoffe gegenüber, der nicht einer von ihm unmittelbar veranstalteten Erhebung entstammt, sondern einer für andere (z. B. Verwaltungs-) Zwecke bestimmten Stoffsammlung. Wir sprechen dann von einem sekundärstatistischen Stoffe, zum Unterschiede von dem erst geschilderten primärstatistischen. Der Statistiker ist bei einem sekundärstatistischen Stoffe nicht frei, seine Begriffe zu gestalten und seine Massen abzugrenzen, wie er es für zweckmäßig erachtet, sondern ist hierin durch den gegebenen Stoff gebunden, muß also die vorgefundenen Begriffe und Erhebungsverfahren sich zu eigen machen. Bei regelmäßig wiederholten Erhebungen wird es ihm allerdings in der Mehrzahl der Fälle gelingen, auf die Fragestellung einen Einfluß zu nehmen und so den sekundärstatistischen Stoff einem primärstatistischen nahe zu bringen. Ein darüber hinausgehender innerer Unterschied besteht zwischen Primär- und Sekundärstatistik nicht.

b) Die statistische Aufarbeitung. Eine doppelte Form der Aufarbeitung ist möglich, die örtlich auseinandergelegte (dezentralisierte) und die örtlich vereinigte (zentralisierte). Die örtlich auseinandergelegte Aufarbeitung besteht darin, daß die örtlichen Unterbehörden den Zählstoff auszählen — was allerdings nur in einer primitiven Weise geschehen kann —, dann bei sich behalten und nur die gewonnenen Tabellen an die nächst höhere Behörde weitergeben. Diese hat nichts mehr zu tun, als die eingelaufenen Tabellen auf ihre rechnerische Richtigkeit zu prüfen und aus den einzelnen Orts- und Gemeindetabellen die Bezirks-, Landes- und Reichssummen zu bilden. Dies war die Aufarbeitungsart unserer Väter. Mit der Erkenntnis, daß mit den bloßen Summen und einfachen Ausgliederungen der Massen noch weitaus nicht alles getan sei, sondern daß erst doppelte und mehrfache Ausgliederungen („Merkmalsverbindungen", S. 67) die statistischen Möglichkeiten voll ausschöpfen lassen, ist auch für die Aufarbeitungstechnik eine Änderung eingetreten. Es wurde notwendig, für jeden einzelnen Zählfall ein Zählblättchen herzustellen, um an ihm alle gewünschten Merkmalsverbindungen auszählen zu können. Dies konnte nur durch ein entsprechend ausgerüstetes statistisches Amt geschehen. Es tritt also in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts ganz allgemein die örtlich vereinigte Aufarbeitungsart an die Stelle der örtlich auseinandergelegten. Dabei ist es natürlich notwendig, daß das bearbeitende Amt den gesamten Zählstoff selbst in die Hand bekomme.

Mit dem geschilderten Wesen der örtlich vereinigten Aufarbeitung steht es nicht im Widerspruch, wenn bei einer Erhebung mehrere statistische Ämter zusammenwirken und die Ergebnisse ihrer Aufarbeitung an eine Zentralstelle zu einer zusammenfassenden Darstellung weitergeben, wie im Deutschen Reiche die Statistischen Landesämter an das Statistische Reichsamt.

Die erste Stufe der Bearbeitung im Falle der örtlich vereinigten Aufarbeitung, von der wir als der heute allein in Frage kommenden hier sprechen wollen, ist die Übernahme des Stoffes. Diese besteht darin, daß sich das Amt von der Vollständigkeit der Zählpapiere (dem Vorhandensein der Zählbogen für alle Bezirke, Gemeinden, Häuser) und von der Vollständigkeit der Ausfüllung überzeugt, gegebenenfalls die erforderlichen Ergänzungen veranlaßt. Eine Prüfung auf die Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit der gemachten Angaben findet in der Regel nicht auf dieser Stufe des Verfahrens, sondern in Verbindung mit der Auszeichnung statt.

Der Grundgedanke der modernen Aufarbeitung wird, wie bereits erwähnt, in der Regel durch die Übertragung jedes einzelnen Zählfalles auf die Zählblättchen verwirklicht. In diese Zählblättchen wird, um die nötige Kleinheit und Handlichkeit zu erzielen, der Zählstoff nur nach einem Schlüssel, in Abkürzungen, meist Zahlen, übertragen. Um aber dem Übertragenden die geistige Tätigkeit zu ersparen, die den Fortgang der mechanischen Übertragung aufhalten würde, wird hier eine Arbeitsteilung in der Weise vorgenommen, daß die Zählpapiere (Listen u. dgl.) zuvor dahin bearbeitet („ausgezeichnet“) werden, daß die Angaben auf den Zählpapieren, wo es nötig ist, in die Schlüsselzeichen übersetzt werden (z. B. selbständiger Gastwirt = 442 s der Berufseinteilung, Österreich 1923).

Der so vorbereitete Zählstoff wird nun auf die Zählblättchen übertragen. Die Übertragung kann, wenn eine Legung der Blättchen mit der Hand vorgesehen ist, durch Anzeichnen des zutreffenden Feldes vorgenommen werden; in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle, mit Rücksicht auf die immer weiter um sich greifende Aufarbeitung mit elektrischen Zählmaschinen, wird sie durch die Lochung des zutreffenden Feldes (der zutreffenden Felder) erfolgen. Zu diesem Zwecke werden die Karten in eine Lochungsmaschine gelegt und an der betreffenden Stelle mit einem scharfen Eisenstift durchgeschlagen (Abb. 1 auf S. 13).

Diesem Vorgang der Herrichtung der Zählblättchen folgt deren Auszählung insgesamt und in den gewünschten Zergliederungen. Die Aussortierung geschieht entweder mit der Hand, indem die Zählkarten in so viele Zählpäckchen auseinandergelegt werden als die angestrebte Tabelle Felder hat, oder mit elektrischen Sortiermaschinen, die die gewünschte Sortierung durch Herstellung eines elektrischen Kontaktes in dem jeweils gelochten Felde vornehmen und die sortierten Zählblätter gleichzeitig auszählen. Solche Sortiermaschinen können allerdings nur die einzelnen Zähleinheiten nach Merkmalsgruppen und in der Gesamtmasse auszählen. Oft kommt es aber bei zahlenmäßigen Merkmalen (über Begriff und Einteilung der statistischen Merkmale vgl. Abschnitt II 1f.) nicht darauf an, die Zähleinheiten in Gruppen auszuzählen, sondern die Summe der bei den einzelnen Fällen vorkommenden Größenangaben zu bilden. Man kann z. B. die Ausfuhrsakte nach der Größe der Gewichte oder Werte der Waren in Gruppen einreihen. Dann müßte auf der Lochkarte für jede Gruppe eine Schlüsselziffer vorgesehen sein, und sie würde auf der Sortiermaschine aussortiert. Soll aber die gesamte Summe der ausgeführten Gewichte oder Wertbeträge festgestellt werden, dann müssen die einzelnen Beträge auf die Lochkarte übertragen werden; das Geschäft des Addierens besorgt dann nicht die Sortiermaschine, sondern eine elektrische Zählmaschine anderer Art, der sogenannte Tabulator.

Neben diesem hauptsächlichen Verfahren der Sortierung (des Legens) der Zählblättchen wird ausnahmsweise auch noch das Strichelverfahren oder das Markenklebeverfahren zur Sortierung und Auszählung der Zählfälle verwendet. Beim

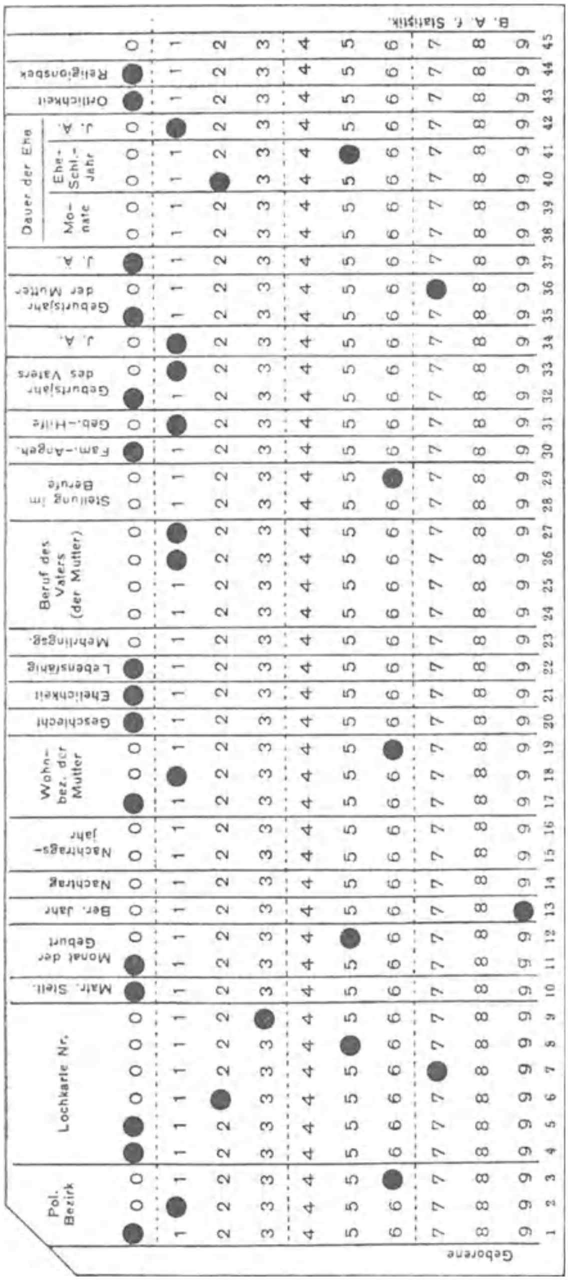


Abb. 1. Muster einer Lochkarte.

Dieses Lochkartenmuster entstammt der Aufarbeitung der Statistik der Geborenen in Österreich. Es liegen der Lochung folgende Angaben zugrunde:

Geburtsbezirk des Kindes:	16. Gemeindebezirk Wiens	Stellung im Berufe:	Gehilfe
Lochkartennummer:	2753	Familienangehörigkeit: (Berufszugehörigkeit)	berufstätig[1]
Matrikenstelle:	röm.-kath.	Geburtshilfe:	ja
Monat der Geburt	Mai	Geburtsjahr des Vaters:	1901
Berichtsjahr:	1929	J. Ä. (jünger, älter)[2]	älter
Wohnbezirk der Mutter:	16. Gemeindebezirk Wiens	Geburtsjahr der Mutter:	1907
Geschlecht:	männlich	Eheschließungsjahr:	1925
Ehelichkeit:	ehelich	Örtlichkeit der Geburt:	Privatwohnung
Lebensfähigkeit:	lebendgeboren	Religionszugehörigkeit:	röm.-kath.
Beruf des Vaters:	Gärtner		

[1] Diese Spalte ist für die Erfassung derjenigen Fälle bestimmt, in denen der Vater (die uneheliche Mutter) berufslos im Familienverbande lebt. In diesem Falle sind die Berufsangaben der Erhalter in den vorausgehenden Spalten zu lochen, in dieser Spalte die 1. Die Lochung der Null „berufstätig" besagt, daß ein solcher Fall hier nicht vorliegt.

[2] „Jünger", wenn der Geburtstag des Vaters im Kalenderjahr vor, „älter", wenn er nach dem Geburtstag des Kindes liegt.

Strichelverfahren wird in eine vorgezeichnete Tabelle für jeden einzelnen Zählfall an zutreffender Stelle ein Strich eingesetzt, und zwar meistens in der Weise, daß vier Striche lotrecht gesetzt werden, der fünfte wagrecht (卌), was die Auszählung erleichtert. Beim Markenklebeverfahren müssen so viele Markenblocks (d. s. Blocks mit Zettelchen, die die betreffende Gruppenbezeichnung aufweisen und fortlaufend numeriert sind) vorhanden sein als Gruppen gebildet werden sollen. Diese Blocks werden vor dem Bearbeiter, auf einem Brette befestigt, in Reichweite aufgestellt. Bei jedem Zählfall wird ein Zettelchen von dem zutreffenden Markenblock abgerissen und dem Zählfall beigeklebt, so daß hier von den Markenblocks jederzeit die Zahl der bisher in jeder Gruppe ausgezählten Fälle abgelesen werden kann. Sowohl das Strichelverfahren wie das Markenklebeverfahren eignen sich nur für solche Auszählungen, bei denen nicht zu viele Zergliederungen vorkommen. Das Strichelverfahren hat auch noch den Nachteil, daß es keine Prüfung zuläßt, außer man wiederholt den ganzen Zählvorgang neu — womöglich mit dem Ergebnis, daß man vor zwei verschiedenen Zählergebnissen steht und nun erst recht nicht weiß, welches das richtige ist.

Die Ergebnisse der Auszählung werden in Tabellen übertragen. Der statistische Bearbeiter prüft diese Tabellen nach ihrer rechnungsmäßigen Richtigkeit und nach ihrer inneren Wahrscheinlichkeit. Haben sie diese beiden Prüfungen bestanden, so bemüht er sich, die darin niedergelegten Tatbestände mit den Mitteln des statistischen Verfahrens (durch Verhältniszahlen, Mittelwerte, Streuungsmaße, zeitliche und örtliche Vergleiche, Ursachenforschung usw.) noch näher zu durchleuchten. Die so aus den Tabellen geschöpften Erkenntnisse legt er in dem Begleittexte der Tabellen nieder. Nicht zu unterlassen ist in diesem Begleittexte, wie oben erwähnt, die genaue Darstellung der Begriffs- und Verfahrensgrundlagen der ganzen Erhebung, weil sie für das Verständnis der Zahlen von großer Wichtigkeit sind.

II. Theorie und Verfahrenslehre der Statistik.

1. Die statistische Masse[1].

a) Der logische Sinn der statistischen Masse. Es ist eine der hervorstechendsten Eigenschaften des menschlichen Geistes, Begriffe zu bilden, d. h., das Gemeinsame der Gegenstände unserer Anschauung herauszufinden und sie trotz aller sonstigen Verschiedenheiten zu Gruppen der betreffenden Gemeinsamkeit zusammenzufassen. Wir schaffen so den Begriff „Mensch“ trotz der mannigfaltigen Verschiedenheiten, die sich aus Rasse, Volkszugehörigkeit, Geschlecht, Alter, Charakter, Bildung, Beruf, Wohlhabenheit usw. ergeben. Wir schaffen ähnlich den Begriff „Haus“ ohne Rücksicht auf die Verschiedenheiten aus dem Baustoffe, der Bauart, der Größe, dem Alter usw., den Begriff „Betrieb“ ohne Rücksicht auf die Verschiedenheiten aus der Betriebsart, der Größe, der Einrichtung usw., den Begriff „Schule“ ohne Rücksicht auf Art, Größe usw.

Das Wesentliche einer solchen Begriffsbildung ist also, daß hierbei verhältnismäßig gleichartige Gegenstände zusammengefaßt werden. Dabei kann die Gemeinsamkeit weiter oder enger gezogen sein. Ohne Zweifel haben die unter dem Begriff „Mensch“ vereinigten Personen eine geringere Gemeinsamkeit als die unter dem Begriff „Mann“ Vereinigten, diese wieder eine geringere als die unter dem Begriffe „Deutscher“, diese wieder eine geringere als die unter „deutscher o. ö. Universitätsprofessor“ Vereinigten. Es wächst also die Gemeinsamkeit der Masseneinheiten in dem Maße, als die Bedingungen der Gemeinsamkeit strenger werden.

[1] Winkler, W.: Von den statistischen Massen und ihrer Einteilung, in: Jb. f. Nationalök. u. Statistik **61**, 310ff., III. F. (1921). Flaskämper, P.: Beitrag zu einer Theorie der statistischen Massen, in: Allg. Statist. Archiv **17**, 538ff. (1928). Zizek, F.: Die statistischen Einheiten, in: Jahrbücher f. Nationalökonomie und Statistik **76**, 50ff., III. F. Tischer, A.: Grundlegung der Statistik, Jena: Gustav Fischer 1929, S. 13ff.

Umgekehrt wird die Zahl der den strengeren Bedingungen entsprechenden Einheiten immer kleiner. Es läßt sich unschwer nachweisen, daß der Begriff, hinter dem, wie gezeigt, eine Masse steht, aufgelöst werden kann dadurch, daß die Bedingungen der Gemeinsamkeit immer strenger und strenger gezogen werden; auch die hinter dem Begriffe stehende Masse wird dadurch aufgelöst, und wir langen beim Individuum, bei der Einheit an. Umgekehrt wird die verhältnismäßige Gleichartigkeit der Individuen (Einheiten), die durch den Begriff zusammengehalten wird, um so geringer, je weitere Kreise von Individuen (Gegenständen) wir einzubeziehen trachten.

Mit den vorausgehenden, einfachen Erwägungen ist auch schon das Wichtigste über den logischen Sinn der statistischen Masse gesagt. Es entspricht dem menschlichen Verstande nicht nur, wie ausgeführt, Begriffe zu bilden, sondern auch, sich darüber klar zu werden, welche Massen zahlenmäßig hinter diesen Begriffen stehen. Wir wollen wissen, wie viele Menschen, wie viele Männer, wie viele Deutsche, wie viele deutsche o. ö. Universitätsprofessoren, wie viele Häuser, wie viele Betriebe, wie viele Schulen usw. es gibt. Diese Zahlen, die die wichtigsten Tatsachen des menschlichen Lebens in Gesellschaft und Staat, gewissermaßen die Menschen selbst und die sie umgebende, ihnen dienstbare Welt, beleuchten, gehören mit zum Grundbestande des menschlichen Wissens. Mit ihnen beschäftigt sich unsere Wissenschaft, die Statistik.

Aus den obigen Betrachtungen ergeben sich einige Folgerungen von grundsätzlicher Bedeutung für die statistischen Massen:

a) die Einheiten statistischer Massen (statistische Einheiten) sind untereinander durch irgendeine Gemeinsamkeit, eine relative Gleichartigkeit, verbunden. Diese ist je nach den gestellten Bedingungen weiter oder enger. Es gibt also nicht eine starre, sondern eine bewegliche, von Fall zu Fall im Grade wechselnde Gleichartigkeit.

b) Der Grad der Gleichartigkeit steht gewöhnlich im umgekehrten Verhältnis zur Größe der betrachteten Massen. (Sehr wichtig, da die Forderungen der Gleichartigkeit und des Gesetzes der großen Zahl zwei Grundforderungen der Statistik sind).

c) Die Einheiten der Massen haben untereinander keine andere Bindung als die der begriffsmäßigen Gemeinsamkeit. Über diese hinaus sind sie einander, statistisch betrachtet, fremd, voneinander unabhängig. Das schließt nicht aus, daß wir eine Masse sinnvoll in Teilmassen zerlegen können. Die gefügemäßige Beziehung besteht dann zwischen den Massen (Teilmassen, Gesamtmasse, und ähnlich auch bei allen anderen Beziehungen von Massen), aber nicht zwischen den Einheiten.

b) Die Abgrenzung der statistischen Masse. Als erste Abgrenzung ergibt sich für eine statistische Masse die aus dem sie deckenden Begriffe folgende, wir können sagen, die sachliche. Durch die Begriffe „o. ö. Universitätsprofessor", „gewerblicher Betrieb", „Handelshochschule" usw. ist der Umfang der Fälle abgegrenzt. Eine zweite und dritte Abgrenzung der Masse ist die räumliche und zeitliche. Da die Statistik in der Hauptsache von staatlichen Ämtern betrieben wird, so ist die natürliche räumliche Abgrenzung diejenige nach Staaten und ihren politischen Gebietsteilen. Die zeitliche Abgrenzung geschieht entweder durch Bestimmung eines Zeitpunktes, an dem eine Anzahl von gleichzeitig nebeneinander vorhandenen Gegenständen gezählt wird, dem „Stichtag" (z. B. bei einer Zählung der Bevölkerung, der Betriebe), oder durch Bestimmung zeitlicher Grenzen, innerhalb deren ein Ereignis gezählt wird (z. B. der Geburten eines Jahres, eines Monates).

Die wichtigste dieser drei Abgrenzungen ist die sachliche. Hier ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, daß die Begriffe, wie sie uns das Leben liefert, nicht immer klar und eindeutig, und die Begriffe, wie sie uns die Rechtsordnung oder die Wissenschaft liefert, nicht immer allgemein angenommen, sondern häufig umstritten sind.

Wo der Statistiker auf die Begriffsbildung keinen Einfluß nehmen kann, wo er z. B. statistisches Material auswertet, das ursprünglich für einen anderen Zweck bestimmt war („Sekundärstatistik", S. 11), da ist er an die vorgefundene Begriffsabgrenzung gebunden, und es kann an ihn keine andere Forderung gestellt werden, als daß er diese Begriffe auch klar anführe, damit der Benützer seiner Zahlen diese wichtige Grundtatsache kennen lerne und bei der Beurteilung der Zahlen sowie bei etwaigen Vergleichen mit anderen Statistiken beachte. So kann z. B. der Begriff „Haus", „Betrieb", „Schule" usw. auf verschiedene Weise bestimmt werden, und es wird der Kreis der Zählfälle jeweils verschieden groß sein, je nachdem diese oder jene Begriffsfassung verwendet wird. Veranstaltet der Statistiker eine unmittelbare statistische Erhebung, so hat er wohl die allgemeinen Forderungen des behandelten Stoffgebietes zu beachten, hat also z. B. die Begriffe „Haus", „Betrieb", „Schule" möglichst so zu definieren, wie es die zuständigen Wissensgebiete, die Technik, Wirtschaftslehre, Erziehungslehre usw. verlangen, kann aber auch, wenn es die Zwecke der Erhebung erfordern, davon abgehen, also z. B. bei einer Häuser-, Betriebs- oder Schulzählung Gruppen einbeziehen, die von dem zuständigen Wissensgebiete nicht einbezogen werden, oder Gruppen ausschließen, die sonst einbezogen werden, steht also jedenfalls der Begriffsbildung gewissermaßen mit diktatorischen Befugnissen gegenüber, ist im übrigen wieder nur gehalten, die verwendete Begriffsbildung bei der Erhebung und Aufarbeitung folgerichtig zu beachten und den Benützer der Zahlen zwecks richtiger Deutung der Zahlen über die verwendete Begriffsabgrenzung entsprechend aufzuklären.

c) Eine weitere Folgerung aus der Abgrenzung. Diese Begriffsdiktatur des Statistikers hat für die Theorie der Statistik eine außerordentlich große Tragweite, besonders auch in ihrer negativen Auswirkung. Hat der Statistiker die Begriffsabgrenzung diktiert, dann gilt eben diese Begriffsabgrenzung und keine andere für die Masse. Sie gilt aber nicht nur für die Masse als Ganzes, sondern auch für alle ihre Teile, soweit nicht im Wege einer Ausgliederung neue Bestimmungsgründe für eine Bildung von Teilmassen hereingebracht werden. Wir dürfen also, wenn die Masse als „o. ö. deutsche Universitätsprofessoren" abgegrenzt ist, dort, wo wir für irgendeinen Zweck nicht die ganze Masse, sondern nur einen Teil etwa als Stellvertreter für die ganze Masse brauchen, nicht etwa die „verheirateten deutschen o. ö. Universitätsprofessoren" oder die „deutschen o. ö. Universitätsprofessoren von über 60 Jahren" heraussuchen, sondern müssen unter allen Umständen den allgemeinen Begriff „deutscher o. ö. Universitätsprofessor" auch in dem Teile zur Geltung bringen. Das Verbot, irgendwelche neuen Gesichtspunkte wie Familienstand oder Alter bei der Auswahl zu berücksichtigen, ist gleichbedeutend mit dem Gebote, die Auswahl der Teilmasse nur zufällig, d. h. nach den Regeln der Glücksspiele, zu treffen. Es tritt uns hier der Begriff der zufälligen Auswahl (als Gegenstück der eine bestimmte Richtung aufweisenden Auswahl) zum erstenmal entgegen. Diesem Gesichtspunkte kommt für die moderne Theorie der Statistik eine große Bedeutung zu. Wir werden im folgenden dartun, daß, so wie jede zwecks Vertretung der ganzen Masse ausgewählte Teilmasse nicht anders als zufallsbestimmt sein darf, so die Gesamtmasse selbst wieder als eine zufallsbestimmte Vertretung einer unendlich großen Obermasse aufgefaßt werden muß (siehe Abschnitt II, 3a). Diese theoretische Erwägung ist auch für die statistische Praxis sehr wichtig, da zufallsbestimmte Massen gewisse Schwankungen um einen festen Wert, die sogenannten Zufallsschwankungen, aufweisen, eine jede statistische Masse daher sowohl hinsichtlich ihres Umfanges als auch hinsichtlich ihrer Eigenschaften als mit einem zufälligen Fehler behaftet aufzufassen ist. Diese Zufallsfehler sind um so kleiner, je größer die Masse wird (Gesetz der großen Zahl, siehe Abschnitt II, 3). Die Höchstgrenze der Fehler kann aber auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sich eben mit der Lehre vom Zufall und den zufälligen Abweichungen befaßt, für die meisten statistischen Maßzahlen genau bestimmt werden, so daß wir in der Lage sind, die Größe der Sicherheit oder Unsicherheit unserer statistischen Beobachtungen zahlenmäßig genau zu bestimmen.

d) Auswahl der statistischen Massen. Grundsätzlich ist jede Masse im Sinne der oben gegebenen Darstellung einer statistischen Betrachtung und Behandlung zugänglich. In Wirklichkeit kann nur eine Auswahl getroffen werden, da die statistische Bearbeitung schon einer einzigen Masse zeitraubend und kostspielig ist. Die statistischen Ämter beschränken sich daher auf die statistische Erhebung und Bearbeitung solcher Massen, bei denen die Wichtigkeit der Ergebnisse in einem Verhältnis zu den aufgewendeten Kosten steht. Die Bevölkerung nach ihrem Stand und ihren Veränderungen, die Grundlagen der Wirtschaft, Erzeugung, Handel, Einkommensverteilung und Verbrauch, die wirtschaftliche Organisation; das Schul- und sonstige Bildungswesen, die Tatbestände des öffentlichen Lebens und der Verwaltung, sind die üblichen Gegenstände der statistischen Betrachtung. Daneben findet sie aber auch auf vielen Wissenschaftsgebieten, besonders in den Naturwissenschaften, Anwendung.

Bei der Kostspieligkeit der statistischen Aufarbeitung besteht kaum die Gefahr, daß unerhebliche Tatbestände zum Gegenstande einer statistischen Betrachtung gemacht werden. Trotzdem muß hier erwähnt werden, daß unerhebliche Tatbestände nicht erhoben werden sollen, schon wegen des Widerstandes, der sich hiergegen bei den befragten Personen wegen der als unnötig empfundenen Belastung regt. Mit einem solchen Widerstande hat ja häufig auch die ernste statistische Erhebung zu kämpfen; sie kann ihn aber durch zweckmäßige Aufklärungstätigkeit auf ein Mindestmaß herabdrücken. Um so weniger sollen Fragen gestellt werden, die mit Recht als unnötig, läppisch und lächerlich empfunden werden. Das gleiche gilt von allen Fragen, die in das Privat- und Familienleben der Personen eindringen wollen und die darum, weil der Befragte in der Regel eine Scheu hat, fremden Personen hier einen Einblick zu gewähren, nicht auf eine willige und richtige Beantwortung rechnen können. Ein bedenkliches Grenzgebiet bilden auch die Fragen nach dem wirtschaftlichen Erfolg (Ertrag, Einkommen, Vermögen u. dgl.). Auf sie kann wegen ihrer großen Bedeutung für unsere wirtschaftliche Erkenntnis nicht verzichtet werden; zum Teil werden diese Stoffe der Statistik von der Steuerbehörde als sekundärstatistische Stoffe zur Verfügung gestellt. Der Statistiker darf sich aber nicht im Unklaren darüber sein, daß er es hier mit erheblichen Fehlerquellen zu tun hat, deren Größe zu ermitteln er sich bemühen muß,

e) Einteilung der statistischen Massen. Die Haupteinteilung der statistischen Massen schöpft den Einteilungsgrund aus der Dauer der Einheiten. Haben die Einheiten einer statistischen Masse Dauer, so sind sie gleichzeitig nebeneinander vorhanden und sind der statistischen Betrachtung zu irgendeinem Zeitpunkte, der „Stichzeit", zugänglich. Die Bevölkerung, der Viehstand, die Häuser, die Wohnungen, die Betriebe, die Schulen usw. sind solche Gegenstände von Dauer. Andere Einheiten statistischer Beobachtung, Ereignisse, vollziehen sich dagegen in einem Augenblick oder sind doch von so kurzer Dauer, daß sie als in einem Augenblick vollzogen angesehen werden können. Aus diesem Grunde sind sie in der Regel nicht in genügender Anzahl gleichzeitig vorhanden, so daß sie nicht in einem Zeitpunkt, stichzeitmäßig, sondern nur im Rahmen eines längeren Zeitabschnittes, Tag, Monat, Jahr, erfaßt werden können. Solche Ereignisse sind Geburt und Tod der Menschen, Zu- und Abwanderung, der Ertrag der Ernte und der sonstigen Erzeugung, die Akte des Außenhandels, die Verurteilung wegen strafbarer Handlungen usw.

Die ersteren Massen werden in der deutschen Statistik Bestandsmassen, die zweiten Ereignismassen (nicht Bewegungsmassen, wie G. v. Mayr vorschlägt!) genannt. Ich habe mit Rücksicht auf die übliche geometrische Darstellung der Massen die Ausdrücke Streckenmassen und Punktmassen vorgeschlagen, die das Geometrische bildhaft betonen.

In der in der Statistik am häufigsten verwendeten Beckerschen geometrischen Darstellung[1] von Bestands- und Ereignismassen (Abb. 2) denkt man sich die Zeit sowohl auf der Y-Achse eines Koordinatensystems — als Geburtszeit — als auch auf der X-Achse des Koordinatensystems — als Beobachtungszeit — ablaufend. Die in der Bevölkerung vorkommenden Geburten (oder sonstige Eintrittsereignisse an einer Masse) können bei dieser Darstellung nur als auf einer unter 45° zu beiden Achsen geneigt verlaufenden Geraden, der Geburtenachse, gedacht werden. Nehmen wir die Zeiteinheit in Jahren an, so werden die im Jahre J_1 (0 bis t_1) Geborenen auf der Strecke 0 bis g_1 als folgeweise hintereinander gelagerte Punkte auftreten, die Geburten des Jahres J_2 (t_1 bis t_2) als auf der Strecke g_1 bis g_2 gelagerte Punkte usw. Dabei beginnen gleichzeitig die Lebenslinien der in J_1, J_2 usw. Geborenen (in unserer Abbildung die von der Geburtenachse ausgehenden waagrechten Geraden) zu laufen. Die aus dem Geburtenjahrgang J_1 Stammenden werden, wenn sie das im Beobachtungszeitpunkt τ_1 aufgerichtete Lot $\tau_1 g_1$ überschreiten, 0 bis 1jährig sein, d. h. die im Zeitpunkt 0 Geborenen werden gerade ein Jahr alt sein, dagegen die im Zeitpunkt t_1 Geborenen gerade neugeboren (0-jährig). Beim Überschreiten der parallel zur Geburtenachse gezogenen Geraden werden sie gerade ein Jahr alt geworden sein, beim Überschreiten des in τ_2 aufgerichteten Lotes $\tau_2 g_2$ 1 bis 2 Jahre alt usw. So können wir uns symbolisch die zu einem bestimmten Zeitpunkt τ Lebenden, aber auch die während einer Zeitstrecke ein gewisses gleiches Lebensalter n Erreichenden der beobachteten „Streckenmasse" (Bestandsmasse) vorstellen.

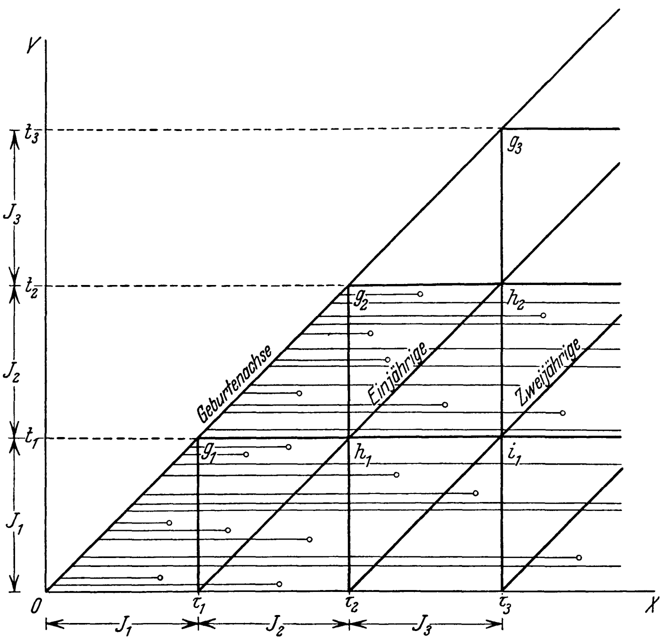


Abb. 2. Strecken- und Punktmassen in der Beckerschen Darstellung.

Aber auch die „Punktmassen" (Ereignismassen) finden in dieser Darstellung einen Ausdruck. Sie sind dargestellt durch die Punkte zwischen gewissen Zeit- oder Altersgrenzen. So stellen z. B. die Endpunkte der Lebenslinien die Todespunkte vor. Wir haben in den Grenzen des Dreieckes, $0 g_1 \tau_1$ die aus dem Geburtenjahrgang J_1 bis zum Zeitpunkt τ_1 0-jährig Gestorbenen enthalten; dagegen sind in dem Dreiecke $\tau_1 g_1 h_1$ die aus dem gleichen Geburtsjahrgange J_1 geborenen, im Jahre J_2 gestorbenen Nulljährigen als Punkte enthalten. Der Inhalt des aus diesen beiden Dreiecken zusammengesetzten Parallelogrammes $0 g_1 h_1 \tau_1$ drückt die aus dem Jahrgang J_1 nulljährig Gestorbenen aus. Sie verteilen sich, wie ersichtlich, auf die beiden Kalenderjahre J_1 und J_2.

Diese Bemerkungen mögen hier einstweilen genügen, um die geometrische Darstellung von statistischen Strecken- und Punktmassen zu verdeutlichen. Bei den

[1] Becker, K.: Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Statistik zu stellende Anforderungen. Berlin 1874.

statistischen Verhältniszahlen (Abschnitt II, 15b ζ) wollen wir auf diese Darstellung noch einmal zurückkommen.

Die vorliegende Unterscheidung der Massen nach der Dauer der Einheiten hat sowohl eine innere (methodische) als auch eine äußere (technische) Bedeutung. Es gibt Verfahren, die nur an dauerhaften Einheiten möglich sind (z. B. das „Verfahren der beharrenden Fälle", wo man von Zählung zu Zählung die identischen Fälle in ihrer Entwicklung besonders betrachtet), es unterscheiden sich aber auch beide Arten von Massen wie erwähnt durch eine verschiedene Erhebungsart.

f) Die statistischen Merkmale. Durch die der Massenbildung zugrunde liegende Begriffsbestimmung wird ganz allgemein verfügt, welche Einheiten in die Masse gehören sollen und welche nicht. Das Verfahren ist ganz summarisch. Ob und inwieweit zwischen den in die Masse einbezogenen Einheiten noch irgendwelche wesentliche Unterschiede bestehen, wird dabei nicht gefragt. Bei einer eingehenderen Bearbeitung kann die Statistik über solche Unterschiede natürlich nicht hinweggehen. Wir werden jedoch hier unterscheiden müssen, ob die Unterschiede allgemein sind oder nur auf individuellen Eigentümlichkeiten beruhen. Wenn wir eine Masse von Menschen nach dem Geschlecht oder nach dem Alter gliedern, so sind das Geschlecht und das Alter ohne Zweifel solche allgemeine Merkmale. Wenn dagegen jemand in der Bevölkerung „zufällig" einen von einem Verwandten in Amerika gesendeten Scheck über tausend $ in der Tasche trägt, oder wenn sich jemand bei der nächtlichen Heimkehr das Gesicht zerschunden hat, so sind das ohne Zweifel keine allgemeinen Merkmale, nach denen man die Bevölkerung aufteilen könnte, sondern rein individuelle („zufällige") Verhältnisse.

Unter statistischen Merkmalen verstehen wir somit solche allgemeine Eigenschaften der Masseneinheiten, die Unterschiede zwischen ihnen begründen.

Statistische Merkmale sind also immer Gliederungsmerkmale. Sie können diese Eigenschaft leicht verlieren, wenn die ausgegliederte Teilmasse fortan als selbständige Masse betrachtet und behandelt wird (wenn wir z. B. durch Strengerwerden der Abgrenzung von der Masse „berufstätige Bevölkerung" zur Masse „selbständige Landwirte" fortschreiten und diese Teilmasse zum Ausgangspunkt weiterer statistischer Betrachtungen machen). Im gleichen Augenblick verwandelt sich das frühere Merkmal in einen Mitbestimmungsgrund der Massenabgrenzung.

Die statistischen Merkmale unterscheiden sich in artmäßige und zahlenmäßige. Das Geschlecht, die Muttersprache, der Beruf der Bevölkerung, das Bestimmungsland der Ausfuhrsendungen, die Gattung der Schulen sind artmäßige Merkmale; denn die Kennzeichnung nach diesen Merkmalen ist artmäßig (qualitativ). Das Alter der Bevölkerung, die Kinderzahl der Familien, der Wert der Ausfuhrsendung sind zahlenmäßige Merkmale; denn die Kennzeichnung nach diesen Merkmalen ist zahlenmäßig (quantitativ). Bei einem zahlenmäßigen Merkmal ist noch zu unterscheiden, ob die Kennzeichnung nur nach ganzen Einheiten oder mit einer bis auf unendlich kleine Teile gehenden Genauigkeit denkbar ist. Danach sprechen wir von unstetigen und von stetigen zahlenmäßigen Merkmalen. Die Kinderzahl einer Familie, die Arbeiterzahl eines Betriebes sind unstetige, das Alter oder die Körpergröße der Menschen stetige Merkmale.

Die Unterscheidung in artmäßige und zahlenmäßige Merkmale hat für die weitere Theorie der Statistik eine große Bedeutung; es gabelt sich vielfach die theoretische Behandlung der statistischen Massen, je nachdem sie artmäßig oder zahlenmäßig gegliedert sind.

Statistische Massen, die nach einem stetigen zahlenmäßigen Merkmal gegliedert sind, werden im Schrifttum auch „Kollektive" genannt. Mit ihnen beschäftigt sich die „Kollektivmaßlehre"[1], die somit nichts anderes ist, als ein Ausschnitt aus der statistischen Theorie.

[1] Vgl. Th. Fechner: Kollektivmaßlehre, herausg. von Lipps, Leipzig 1897. H. Bruns: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig u. Berlin 1906. Ferner auch in Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung 1, 4. Aufl., III. Teil: Kollektivmaßlehre, S. 386ff.

2. Die statistische Streuung.

a) Allgemeine Vorbemerkungen. Haben wir im vorausgehenden Abschnitt den Gegenstand aller statistischen Betrachtung, die statistische Masse, zunächst vorläufig und in ganz großen Umrissen nach ihrer logischen Herkunft, ihrer äußeren Abgrenzung usw. bestimmt, so treten wir in diesem Abschnitt ihrer wichtigsten Eigenschaft näher, der statistischen Streuung, einer Eigenschaft, tief einschneidend und grundlegend für das Wesen der Statistik. Diese Eigenschaft hat denn auch zur Folge, daß die statistische Theorie besondere Denkformen bereitstellen muß, die sich durchaus von den Formen unseres üblichen, auf den Einzelfall abgestellten Denkens unterscheiden. Es erscheint daher als durchaus gerechtfertigt, dieser Eigenschaft der statistischen Massen eine ganz eingehende Beachtung zu widmen.

b) Wesen und Arten der statistischen Streuung. Wenn wir α) gleichartige statistische Massen, z. B. die Sterbefälle verschiedener Jahre nebeneinanderstellen, oder wenn wir

β) eine statistische Masse nach irgendeinem Gesichtspunkt zergliedern, z. B. die eingeführten Warenmengen nach den Warengattungen, oder wenn wir

γ) verschiedene Massen (oder Teilmassen einer und derselben Masse) nach irgendwelchen Tatbeständen untersuchen, z. B. die Hörerschaft der verschiedenen deutschen Universitäten oder der verschiedenen Fakultäten einer und derselben Universität nach ihrem Anteil an weiblichen Hörern, oder wenn wir

δ) aus einer und derselben Masse zufällig ausgewählte Proben über einen Tatbestand nehmen, z. B. eben über den Anteil an weiblichen Hörern Probemassen der Studierenden durch Auslosung der von der Universitätsbehörde erteilten fortlaufenden Nummern,

so werden wir mit Sicherheit annehmen können, daß die Massen (α), die Teilmassen (β) oder die Zahlenausdrücke für die zuletzt genannten Tatbestände (γ u. δ) irgendwie voneinander abweichen. Diese Verschiedenheiten stellen den Tatbestand der *statistischen Streuung* dar.

Wenn diese Verschiedenheiten durch die Nebeneinanderstellung verschiedener Massen (Fall α und γ) aufgedeckt werden, so sprechen wir von *äußerer Streuung*, wenn sie dagegen im Inneren einer Masse auftreten (Fall β und δ), von *innerer Streuung*. Ferner sprechen wir dort, wo eine „wesentliche" Ursache der Verschiedenheit vorliegt, wie z. B. bei den Anteilen der weiblichen Hörer an den verschiedenen Fakultäten, von *Wesensstreuung*, beim Fehlen einer solchen Ursache — wie im Falle der nach dem Lose ausgewählten Teilmassen — von *Zufallsstreuung*. Es wird sich im folgenden ergeben, daß Zufallsstreuung *allen* statistischen Massen anhaftet, daß sie also immer auch dort vorliegt, wo wir Wesensstreuung feststellen können. Im folgenden wird, wo von Zufallsstreuung die Rede ist, in der Regel an die *nur* mit Zufallsstreuung behafteten Massen gedacht, und es wird das Vorhandensein der Zufallsstreuung an den mit Wesensstreuung behafteten Massen als selbstverständlich vorausgesetzt. Zu bemerken ist ferner, daß Wesens- und Zufallsstreuung sowohl im Falle äußerer als auch innerer Streuung vorhanden sein können, so daß sich die beiden oben gegebenen Einteilungen in weitgehendem Maße überkreuzen. Um dies an dem oben gegebenen Beispiele zu zeigen: die Sterbefälle zweier Jahre werden in der Regel Wesensverschiedenheiten aufweisen, da ein Gleichbleiben aller sie bestimmenden Ursachen nur selten vorkommen dürfte (äußere Wesensstreuung); sie werden außerdem mit jenen zufälligen Verschiedenheiten behaftet sein, deren Vorhandensein im folgenden erwiesen werden wird und die auch auftreten würden, wenn die bestimmenden Ursachen stetig wären (äußere Zufallsstreuung). Oder: die Anteile der verschiedenen Staaten an der Gesamtausfuhr des Deutschen Reiches werden verschieden sein (innere Wesensstreuung). Diese Verschiedenheiten sind außerdem noch mit zufälligen Schwankungen behaftet (innere Zufallsstreuung). Die zufälligen Schwankungen können mit dem wesentlichen Unterschiede gleichgerichtet (den Unterschied vermehrend) oder ihm entgegengerichtet (den Unterschied vermindernd) sein.

c) Die statistische Wesensstreuung. Wir sehen hier zunächst von der eben erwähnten Tatsache ab, daß Wesensstreuung immer mit Zufallsstreuung verbunden ist und betrachten aus Gründen der Vereinfachung den Fall so, als ob die Verschiedenheiten nur wesentlicher Art wären. Es würden dann die Verschiedenheiten wesentlicher Bestimmungsgründe in der Höhe der Zahlen zu klarem und eindeutigem Ausdruck gelangen. Zeigt es sich z. B., daß in einer Bevölkerung die ungelernten Arbeiter neunmal so häufig sind als die gelernten, so wird darin ein Ausdruck für alle dieses Zahlenverhältnis bestimmenden Umstände, das Bedürfnis der Volkswirtschaft, die gegebenen Ausbildungsmöglichkeiten der Arbeiter usw. zu erblicken sein. Es ist in diesem Zahlenverhältnis sozusagen die im Zeitpunkt der Zählung durch die Lage der Dinge bestimmten Grundforderung der Verteilung zwischen gelernten und ungelernten Arbeitern ausgedrückt[1]. Dabei darf der Bezeichnung „Grundforderung" nicht etwa eine mystische oder deterministische Auslegung gegeben werden, sondern sie soll nur ein zusammenfassender Ausdruck für die im gegebenen Augenblicke das Zahlenverhältnis der beiden Arten von Arbeitern bestimmenden (wesentlichen) Umstände sein. Wahrscheinlichkeitstheoretisch gewinnt die „Grundforderung" folgenden Ausdruck: Sollen unter je 10 Arbeitern im Durschschnitt 9 ungelernte und 1 gelernter sein, dann ist der Bruch $^1/_{10}$, der im Nenner alle möglichen, im Zähler die nach der Grundforderung zu erwartenden Fälle von gelernten Arbeitern enthält, die „Wahrscheinlichkeit" der gelernten Arbeiter, unter der Gesamtmasse vorzukommen (ebenso umgekehrt $^9/_{10}$ die Wahrscheinlichkeit der ungelernten Arbeiter). An den Begriff der Wahrscheinlichkeit wird nun von manchen zu Unrecht die Vorstellung der Stetigkeit ihrer Geltung geknüpft. Stetigkeit ist aber keinesfalls ein Begriffserfordernis, sondern gegebenenfalls nur eine für die Praxis sehr schätzenswerte Eigenschaft der Wahrscheinlichkeit.

Wesensstreuung wird durch Ausgliederung einer Masse (innere Wesensstreuung) oder durch Aneinanderreihung von Massen (äußere Wesensstreuung) dargetan. Es wird daher von der Wesensstreuung an geeigneter Stelle noch viel zu sagen sein. Vorher wollen wir aber der Zufallsstreuung unsere ganze Aufmerksamkeit zuwenden.

d) Die innere Zufallsstreuung. Wir wollen nun das Wirken der Zufallsstreuung an einem Beispiel näher betrachten. Es handelt sich um ein statistisches Experiment, das der Statistiker an jeder statistischen Masse leicht selbst ausführen kann. Wohl entziehen sich die gezählten Menschen, Tiere, Betriebe usw. begreiflicherweise jedem experimentellen Zugriff; aber die statistische Aufarbeitungstechnik gibt uns Stellvertreter für die gezählten Einheiten in Gestalt der für jeden einzelnen Zählfall angefertigten Zählblättchen in die Hand, mit denen wir dann alle diejenigen experimentellen Handlungen vornehmen können, die uns an dem ursprünglichen Zählstoff verwehrt sind.

Es handelt sich also darum, aus einer uns zugänglichen statistischen Masse Serien unter Ausschaltung jedes irgendwie wesentlichen Gesichtspunktes, also rein zufällig, zu nehmen, an denen wir die Streuung, die dann also eine reine Zufallsstreuung ist, beobachten können. Das erste Material, an dem der Verfasser dieses Experiment durchführte, waren die Körpergrößenmessungen von 906 Rekruten des niederösterreichischen Landbezirkes Mistelbach im Jahre 1913[2].

---

[1] Es wird hier vielfach der Ausdruck „Grundgesetz" gebraucht, den wir lieber vermeiden, um nicht irrtümliche Verwechslungen mit den für die Statistik unbedingt abzulehnenden „Kausalgesetzen" der Naturwissenschaften hervorzurufen.

[2] Vgl. des Verfassers Artikel: Zahl, Gesetz der großen, im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl. 8, 1112ff.

Die Auszählung dieses Materials nach der Körpergröße hatte folgende Zahlen ergeben:

147 cm	1	160 cm	30	173 cm	31
148 „	0	161 „	35	174 „	33
149 „	0	162 „	43	175 „	21
150 „	2	163 „	48	176 „	24
151 „	4	164 „	47	177 „	13
152 „	3	165 „	60	178 „	9
153 „	4	166 „	63	179 „	9
154 „	7	167 „	74	180 „	3
155 „	6	168 „	60	181 „	3
156 „	12	169 „	64	182 „	4
157 „	14	170 „	47	183 „	1
158 „	25	171 „	48	Summe	906
159 „	22	172 „	36		

Die Betrachtung dieser Zahlen, besonders auch die Betrachtung ihrer zeichnerischen Darstellung in Abb. 3b, zeigt, daß die Gestalt dieser Größengliederung im allgemeinen einen symmetrischen Aufbau um einen Höhepunkt bei 167 cm darstellt. Über die Ursachen dieser Regelmäßigkeit wie auch über diejenige der sie störenden Unregelmäßigkeiten folgt Näheres weiter unten.

Die Auslese von Proben nach dem bloßen Zufallsprinzip war an diesem Stoffe auf die einfachste Weise dadurch gewährleistet, daß die Losnummern der Rekruten zur Verfügung standen, die sie zwecks Einreihung in das stehende Heer oder in die Ersatzreserve hatten ziehen müssen. Es war also nichts anderes zu tun, als je 10 und 10 oder je 100 und 100 Rekruten in der Reihenfolge der Losnummern zu Teilmassen zusammenzufassen. Als wir nun auf diese Weise die Rekruten der 1., 2., 3., ... und 9. Serie zu je 100 zusammenfaßten, ergab sich, wenn wir uns auf die sieben mittleren Körpergrößen beschränken, folgendes Bild:

Serie	Körpergröße in cm						
	164	165	166	167	168	169	170
1. Hundert	5	10	9	7	4	9	3
2. „	6	10	4	8	10	6	3
3. „	6	6	7	10	6	9	7
4. „	2	7	10	6	5	5	4
5. „	7	8	6	11	8	6	6
6. „	4	5	4	6	9	13	6
7. „	6	5	7	7	9	5	10
8. „	4	2	8	9	6	6	5
9. „	7	6	8	10	3	5	3
Ausgeglichen nach dem Verfahren der fünfgliedrigen gleitenden Durchschnitte (Abschn. II, 13b)	5,8	6,5	6,7	7,1	6,8	6,5	5,6

Welche Reihe der Erfolge immer wir ins Auge fassen mögen, die Zahlen der Rekruten, die in den einzelnen Serien 164 cm oder eine andere Körpergröße maßen, zeigen immer ein Bild der Streuung. Die Feststellung dieses Untereinander-Verschiedenseins soll uns aber nicht genügen. Wir brauchen den ruhenden Punkt, von dem aus wir die Richtung und die Größe der Schwankungen, die sich dann als Abweichungen darstellen, beurteilen können. Dieser ruhende Punkt ist ohne Zweifel die Wesensform der Körpergrößenverteilung (vgl. unten S. 26). Sie ist uns aber unmittelbar nicht zugänglich. Dagegen können wir aus später noch näher auszuführenden Gründen (Abschnitt II, 3a) die ausgeglichene Verteilungsreihe als einen annähernden Ersatz für die Wesensform ansehen. Die ausgeglichenen Zahlen, der Vergleichsmöglichkeit wegen auf 100 bezogen, sind als unterste Reihe unserer Übersicht beigefügt. Es würden also gemäß der Wesensform auf die Körpergröße von z. B. 164 cm im Durchschnitt 5,8 Fälle unter 100 zu erwarten sein. In Wirklichkeit finden wir die nächstliegende Besetzungszahl 6 3mal vertreten, 7 und 4 je zweimal, 2 einmal. Ein ähnliches Bild ergibt sich auch aus den anderen Reihen.

Wir wollen nun zunächst die Abweichungen auf ihre Größe und ihr Vorzeichen hin untersuchen. Da die Grundwerte der Wesensform, von denen sie erfolgten, für jede Größenstufe verschieden sind, kann das nur so geschehen, daß wir die verhältnismäßige Abweichung, gemessen an der jeweiligen Größe der Wesensform, darstellen, also z. B. im Falle des Erfolges 5 bei der Körpergröße 164 cm $\frac{-0{,}8}{5{,}8} = -0{,}138$. Wir gelangen bei dieser Rechnung, mit der Größenstufe 164 beginnend, folgeweise zu folgenden Zahlen:

Abweichungen der beobachteten Besetzungszahlen von der Wesensform.

Serie	Körpergröße in cm						
	164	165	166	167	168	169	170
	a) Absolute Abweichungen						
1. Hundert. . . .	− 0,8	+ 3,5	+ 2,3	− 0,1	− 2,8	+ 2,5	− 2,6
2. „	+ 0,2	+ 3,5	− 2,7	+ 0,9	+ 3,2	− 0,5	− 2,6
3. „	+ 0,2	− 0,5	+ 0,3	+ 2,9	− 0,8	+ 2,5	+ 1,4
4. „	− 3,8	+ 0,5	+ 3,3	− 1,1	− 1,8	− 1,5	− 1,6
5. „	+ 1,2	+ 1,5	− 0,7	+ 3,9	+ 1,2	− 0,5	+ 0,4
6. „	− 1,8	− 1,5	− 2,7	− 1,1	+ 2,2	+ 6,5	+ 0,4
7. „	+ 0,2	− 1,5	+ 0,3	− 0,1	+ 2,2	− 1,5	+ 4,4
8. „	− 1,8	− 4,5	+ 1,3	+ 1,9	− 0,8	− 0,5	− 0,6
9. „	+ 1,2	− 0,5	+ 1,3	+ 2,9	− 3,8	− 1,5	− 2,6
	b) Verhältnismäßige Abweichungen						
1. Hundert. . . .	− 0,138	+ 0,538	+ 0,343	− 0,014	− 0,412	+ 0,385	− 0,464
2. „	+ 0,034	+ 0,538	− 0,403	+ 0,127	+ 0,471	− 0,077	− 0,464
3. „	+ 0,034	− 0,077	+ 0,045	+ 0,408	− 0,118	+ 0,385	+ 0,250
4. „	− 0,655	+ 0,077	+ 0,493	− 0,155	− 0,265	− 0,231	− 0,286
5. „	+ 0,207	+ 0,231	− 0,105	+ 0,549	+ 0,176	− 0,077	+ 0,071
6. „	− 0,310	− 0,231	− 0,403	− 0,155	+ 0,324	+ 1,000	+ 0,071
7. „	+ 0,034	− 0,231	+ 0,045	− 0,014	+ 0,324	− 0,231	+ 0,786
8. „	− 0,310	− 0,692	+ 0,194	+ 0,268	− 0,118	− 0,077	− 0,107
9. „	+ 0,207	− 0,077	+ 0,194	+ 0,408	− 0,559	− 0,231	− 0,464

Unter den Abweichungen sind, wie ersichtlich, 31 positiv, 32 negativ. Wenn wir die Abweichungen der besseren Übersicht halber in Größengruppen zusammenfassen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

a) Gliederung der absoluten Abweichungen nach der Größe.

	+	−	insgesamt
unter 1,0	9	12	21
1,0 bis „ 2,0	8	11	19
2,0 „ „ 3,0	7	6	13
3,0 „ „ 4,0	5	2	7
4,0 „ „ 5,0	1	1	2
5,0 „ „ 6,0	0	0	0
6,0 „ „ 7,0	1	0	1

b) Gliederung der verhältnismäßigen Abweichungen nach der Größe.

	+	−	insgesamt
bis 0,150	9	12	21
über 0,150 „ 0,300	8	9	17
„ 0,300 „ 0,450	7	5	12
„ 0,450 „ 0,600	5	4	9
„ 0,600 „ 0,750	0	2	2
„ 0,750 „ 0,900	1	0	1
„ 0,900 „ 1,050	1	0	1

Es zeigt sich also schon an diesem Beispiel von nur 63 Beobachtungen:

1. daß die zufälligen Abweichungen die Neigung haben, ebenso oft im negativen wie im positiven Sinn vorzukommen,
2. daß sowohl bei den positiven wie bei den negativen Abweichungen die kleinen Abweichungen häufiger, die großen weniger häufig zu beobachten sind. Alles in allem erhalten wir den Eindruck, daß die hier beobachteten zufälligenAbweichungen die Neigung haben, sich in einer symmetrischen Weise um die Wesensform anzuordnen.

3. Das Gesetz der großen Zahl[1].

(Abbildungen 3a—c auf S. 25, 26 u. 27.)

a) Der empirische Nachweis. Wir haben in Abb. 3a die 9 Serien zu je 100, die wir aus unserem Rekrutenmaterial gewonnen haben, in der vollen Ausdehnung, also nicht mehr beschränkt auf die 7 Mittelstufen der Körpergröße, zeichnerisch dargestellt, wobei als Abszissen die Körpergrößenstufen, als Ordinaten die Besetzungszahlen der einzelnen Körpergrößen aufgetragen sind. Es bestätigt sich hier das Bild der Vielfältigkeit der Erfolge durch die Zufallsstreuung, das wir schon aus dem kleinen Tabellchen für die 7 Mittelstufen erhalten haben. Der Eindruck ist aber hier insofern anders, als wir dort in den Zahlen die Schwankungen der Erfolge im einzelnen besser beobachten konnten, hier jedoch besser die Verschiedenheit der Gesamtanordnung der Erfolge.

In Abb. 3b und 3c gehen wir um einen Schritt weiter. Wir bauen aus unseren Teilmassen durch Aufsummierung die Gesamtmasse allmählich wieder auf, und zwar in Abb. 3b unmittelbar aus den Grundzahlen (weshalb eine Änderung des Maßstabes notwendig wird), in Abb. 3c hierauf in den Verhältniszahlen, d. h. indem wir die in dem entsprechenden Bildchen der Abb. 3b jeweils errechnete Gesamtzahl von Fällen = 100 setzen, daher die übrigen Zahlen in dem entsprechenden Maße vergrößern oder verkleinern. Dies ist darum notwendig, weil erst auf diese Weise die einzelnen Bildchen untereinander voll vergleichbar werden und die Schwankungsunterschiede erst recht ins Licht treten. Es ergibt sich nun, daß dem kleinsten Umfang der beobachteten Masse ein wirkliches Chaos der Körpergrößengliederung entspricht, das sich beim Wachsen der Zahlen mehr und mehr in eine bestimmte Gesetzmäßigkeit ordnet. Dieser Fortschritt der Ordnung von dem kleinen zu dem größeren Massenumfang ist besonders aus Abb. 3c schön zu entnehmen.

Die Erklärung dafür ist nach dem Vorausgegangenen nicht schwer. Wir haben als eine Eigenschaft der vorliegenden Abweichungen erkannt, daß sie die Neigung zeigten, sich gleich häufig nach oben wie nach unten zu lagern, und zwar in einer symmetrischen Weise, wobei die kleinen Abweichungen häufiger, die großen seltener auftraten. Es ist darum erklärlich, daß diese Abweichungen in dem Maße, als die Teilmassen aufeinander aufsummiert werden, sich gegenseitig mehr und mehr aufheben.

[1] Bernoulli, J.: Ars conjectandi, Basileae 1713. Deutsch von R. Haussner, in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften **107** u. **108**. Leipzig 1889. Laplace: Théorie analytique des probabilités. Paris 1820. Poisson, S. D.: Recherches sur la probabilité des jugements. Paris 1837. v. Bortkiewicz, L.: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften **1**, H. 6 (1901). Tschuprow, Al. A.: Das Gesetz der großen Zahlen und der stochastisch-statistische Standpunkt in der modernen Wissenschaft, in: Nordisk Statistisk Tidskrift **1**, 39ff. (1922). Slutsky, E.: Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte, in: Metron **5**, H. 3 (1925). Winkler, W.: Artikel Zahl, Gesetz der großen, im Handwörterbuch der Staatswissenschaften **8**, 1112ff., 4. Aufl. (Mit reichem Schriftenverzeichnis.) Zizek, F.: Das Gesetz der großen Zahlen, die zeitliche Konstanz und die typische Reihengestaltung, in: Allgemeines Statistisches Archiv **18**, 118ff. (1929). v. Mises, R.: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. (Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung **3**.) Wien 1928, 78ff.

Sehen wir nun, daß das Wachsen der Zahl der Beobachtungsfälle bis 900 einen so deutlichen Einfluß auf die Regelmäßigkeit der dargestellten Form nimmt, so

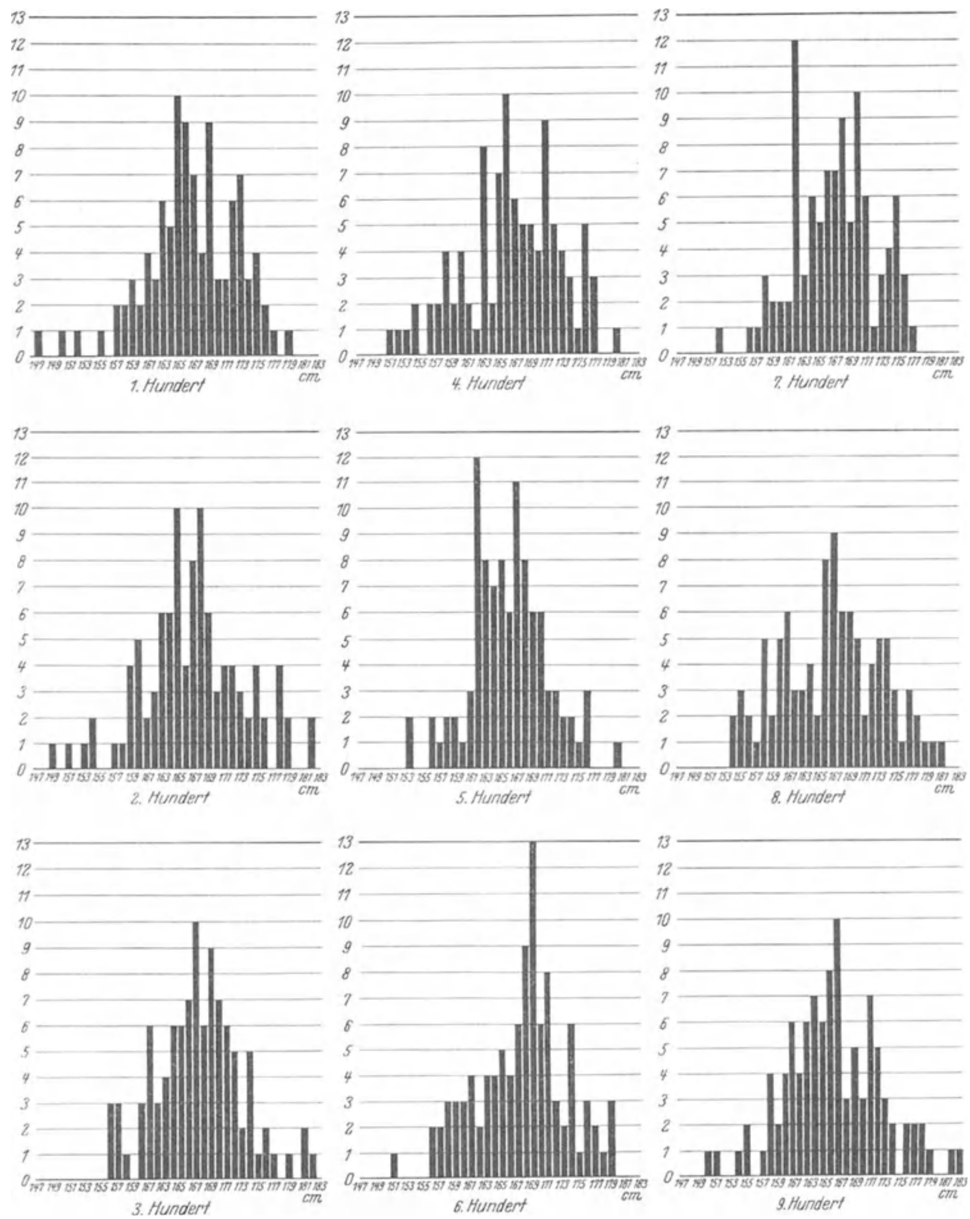


Abb. 3a bis 3c. Das Gesetz der großen Zahl, gezeigt am Zählstoffe der Körpergrößenverteilung Mistelbacher Rekruten des Jahres 1913. (Vgl. des Verfassers Artikel „Zahl, Gesetz der großen" im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl., 8. Bd., S. 1114ff. Abgedruckt mit freundlicher Zustimmung des Verlages G. Fischer, Jena.)

Abb. 3a. Die Besetzung der Größenstufen in den einzelnen Serien zu je 100 Fällen.

können wir keinen vernünftigen Grund finden, warum dieser Vorgang bei 900 aufhören und nicht darüber hinausgehen sollte. Es könnte ja ebensogut der Bezirk Mistelbach statt 900 Rekruten ihrer 9000 hervorgebracht haben. Aber auch wenn das nicht der Fall ist, müssen wir nach dem Verlauf der Größenverteilung in Abb. 3c annehmen, daß wir bei 9000, 90000, 900000 usw. einer gleichartigen Bevölkerung entstammenden Rekruten eine immer glattere Umrahmung der bei 900 Fällen noch recht zackigen Figur finden würden, und wenn wir dies in Ermanglung einer größeren Masse von Rekruten in unserem Falle auch nicht unmittelbar beweisen können, so können wir einen Beweis dafür aus der glatteren Form anderer größerer Massen von ähnlicher regelmäßiger Gestalt gewinnen (man vgl. z. B. die glatte Umrahmung der auf 25878 Fällen beruhenden Abb. 7 auf S. 87 über die Körpergrößenverteilung

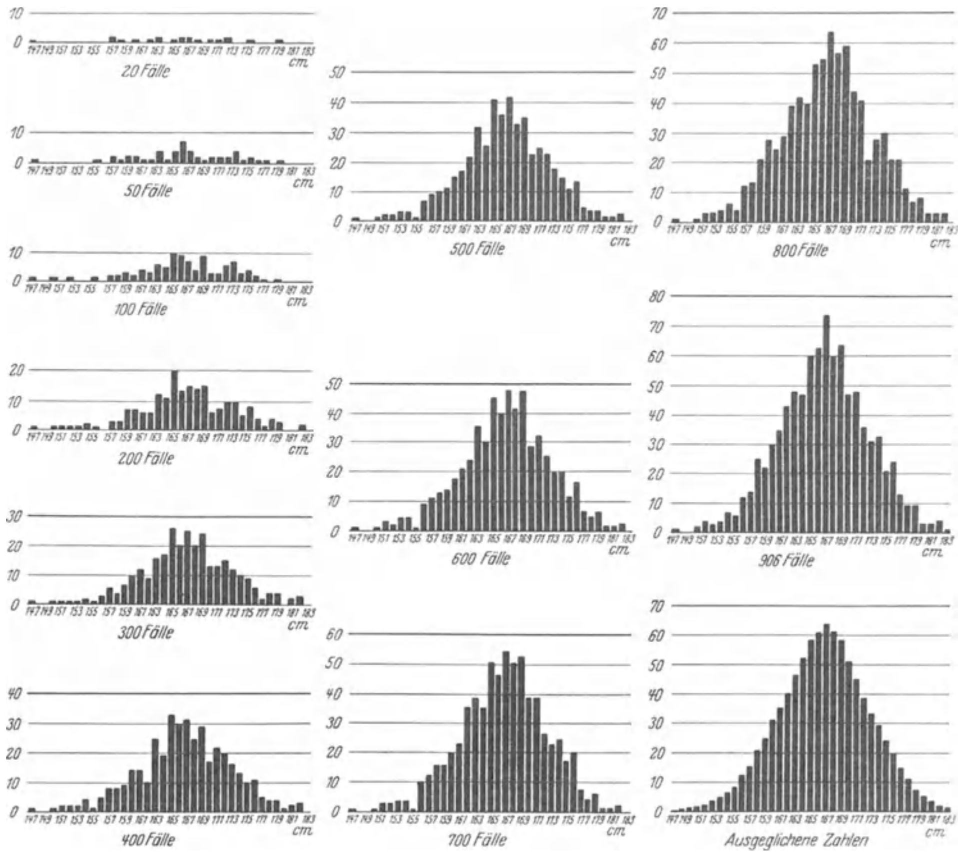


Abb. 3b. Das Ergebnis der Aufsummierung der absoluten Serienzahlen.

nordamerikanischer Freiwilliger mit der Umrahmung unseres auf 906 Fällen beruhenden Rekrutenpolygons in Abb. 3c). Wir sehen uns somit auch in unserem Falle der Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten zu einer ganz regelmäßigen Endform, der Wesensform, geführt, die bei einer unendlich großen Anzahl von Fällen auftreten müßte. Diese Wesenform ist uns freilich in der statistischen Praxis niemals vergönnt zu schauen, da wir die Voraussetzung dafür, eine unendlich große Anzahl von Fällen, nicht schaffen können. Dagegen können wir im Experiment, durch Umkehrung des statistischen Erkenntnisvorganges, die Wesensform und ihre Beeinflussungen durch die Größe der jeweils gegebenen Beobachtungszahl in einem nur durch unseren Fleiß beschränkten Ausmaße studieren: im Glücksspielversuch (Urnenzug, Münzwurf u. dgl.).

Aufgabe. 1. Eine Anzahl von gleichen Münzen ist in Serien von 10 Stücken mehrere hunderte Male zu werfen und es sind die Serienerfolge zu verzeichnen.

a) Es sind die verhältnismäßigen Abweichungen des Erfolges Wappen von der Wesensform (5 unter 10) zu berechnen und nach Vorzeichen und Größe zu gruppieren (ähnlich wie oben auf S. 23). b) Es ist die Aufsummierung der Serien vorzu-

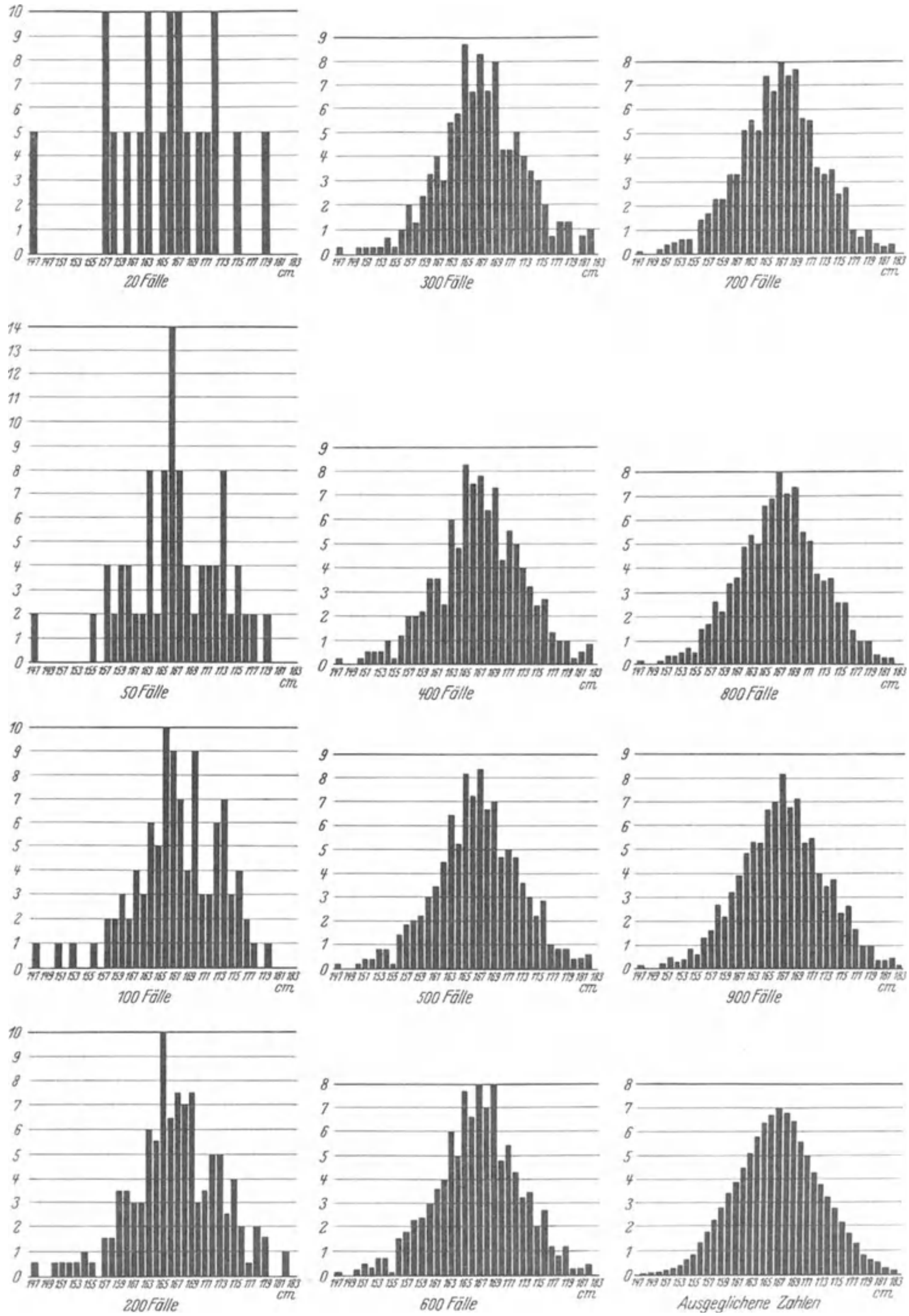


Abb. 3c. Das Ergebnis der Aufsummierung, die jeweils erreichte Gesamtzahl = 100 gesetzt.

nehmen und es ist für die jeweilige Seriengröße (10, 20, 30 usw. Fälle) die verhältnismäßige Abweichung von der Wesensform 0,5 (durch Division der absoluten Abweichung vom absoluten Wesenserfolg durch die Seriengröße) zu bestimmen. (Z. B. bei 21 mal Wappen unter 30 Würfen $\frac{21-15}{30} = +0{,}2$. — Lösung im Anhang.)

Wir haben im vorausgehenden die Eigenschaften der zufälligen Abweichungen, wie sie sich aus unserem Experimente ergaben, dargetan und die wichtige Folgerung daraus, das Gesetz der großen Zahl, untersucht. Nun liegt es uns aber daran, über die zufälligen Abweichungen von zuständiger Stelle Näheres zu erfahren. Die zuständige Stelle ist die Theorie der Glücksspiele, wie sie die Wahrscheinlichkeitstheorie herausgearbeitet hat.

Unser vorausgehendes Experiment läßt sich ohne weiteres auf das Schulbeispiel der Glücksspieltheorie, auf den Kugelzug aus der Urne, zurückführen. Wir hätten in der Urne nicht Rekruten verschiedener Körpergrößen, sondern Kugeln verschiedener Farben im Mischungsverhältnis der Körpergrößenstufen in der Wesensform, oder wir hätten in einem Nummernbeutel Nummern von 1 bis 906 und teilten ideell diesen Nummern Körpergrößen zu in dem Verhältnis der Verteilung der Wesensform. Nun bilden wir Serien zu je 100, indem wir die gezogenen Kugeln oder Nummern jedesmal wieder zurücklegen und den Urnen- oder Beutelinhalt jedesmal neu durchmischen.

Hätten wir eine unendlich große Urne mit einer unendlich großen Zahl von Kugeln, so müßten wir die Kugeln (oder Nummern) nicht immer zurücklegen, sondern es würde genügen, durch gehöriges Mischen dafür Sorge zu tragen, daß nicht die zurückgelegten Kugeln immer wieder gezogen würden. Unser Fall der Rekruten ist, da wir von der nur in der unendlichen Zahl erreichbaren Wesensform ausgehen, diesem im Experiment nicht nachbildbaren Falle gleich, weshalb zwischen dem geschilderten Urnenversuch und dem Rekrutenexperiment eine kleine äußere Verschiedenheit besteht, die aber innerlich ohne Belang ist. (Vgl. auch unten Abschn. II, 3 d ζ.)

So sehen wir, daß unser statistisches Experiment innerlich durchaus dem Experiment des Urnenzuges gleicht. Wir wollen nun die Regeln kennenlernen, die die Wahrscheinlichkeitstheorie deduktiv für die an solchen Beispielen zu erwartenden zufälligen Abweichungen von der Wesensform aufgestellt und in der praktischen Durchführung oft und oft bewährt hat.

b) Die Theorie der zufälligen Abweichungen bei den Glücksspielen. Nochmals der empirische Nachweis. Die Glücksspieltheorie geht bei ihren Ableitungen von drei Voraussetzungen aus:

1. Daß das Mischungsverhältnis der Kugeln in der Urne während der Dauer des Zuges unserer Serien unverändert bleibe (Gleichbleiben der Grundwahrscheinlichkeit);

2. daß für alle Kugeln einer Farbe die Aussichten, gezogen zu werden, auch wirklich gleich seien, wie das eben die für sie aufgestellte gemeinsame Wahrscheinlichkeit vorgibt (gleiche Möglichkeit, Aussichtsgleichheit der Fälle);

3. daß unter ihnen nicht eine Verbundenheit in dem Sinne herrsche, daß das Ziehen einer Kugel die Wahrscheinlichkeit für die Kugeln gleicher Farbe vergrößere (positive Verbundenheit) oder vermindere (negative Verbundenheit). Der Wahrung der Unverbundenheit dient ja auch das Zurücklegen der Kugeln bei beschränktem Urneninhalt.

Wenn diese drei Voraussetzungen erfüllt sind, dann ist die Frage der Größe der Abweichungen eine einfache Frage der Kombinatorik. Wir brauchen nur für jede Seriengröße die möglichen Verbindungen aufzustellen und auszuzählen, wie oft eine solche Verbindung zustande kommen kann, um ihre Erfolgszahl, damit gleichzeitig auch ihre Wahrscheinlichkeit bei der gegebenen Seriengröße, zu bestimmen. Jeder Erfolg, der nicht dem Mischungsverhältnis in der Urne entspricht, ist gleichzeitig als eine Abweichung davon zu kennzeichnen, und zwar als eine zufällige Abweichung, weil er dem Zusammenwirken zahlreicher kleiner Ursachen, die wir nicht überblicken können, entspringt, die Ausgangslagerung in der Urne, die Art, die Hand an die Kugeln heranzuführen, die Art, die gezogenen Kugeln zurückzulegen, das Ergebnis der neuen Mischung (selbst wieder ein Zusammenwirken zahlreicher kleiner Ursachen) usw.

Wir wollen uns diese für die Glücksspieltheorie kennzeichnende Aufstellung der möglichen Verbindungen und die darauf beruhende Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Erfolge an einem Urnenbeispiel klarmachen, das wir aber der Durchsichtigkeit halber vereinfachen: Wir nehmen an, es seien nur Kugeln zweier verschiedener Farben, weiß und schwarz, in der Urne (auf diesen Fall kann jeder verwickeltere Fall zurückgeführt werden, z. B. Körpergröße 167 und Körpergröße nicht 167). Wir nehmen weiter an, daß das Mischungsverhältnis der weißen und schwarzen Kugeln 1 : 1 sei. Auch diese Annahme ist nur eine Annahme aus Gründen der leichteren Verständlichkeit, durchaus nicht Voraussetzung für die Gültigkeit der folgenden Erwägungen, und könnte durch jede andere Annahme über die Mischung des Urneninhalts ersetzt werden.

Beschränken wir die Seriengröße s auf eine Kugel ($s = 1$), so sind unter den gemachten Voraussetzungen ohne Zweifel zwei Erfolge möglich:

weiß (w) oder nicht weiß (s).

Da diese beiden Fälle voraussetzungsgemäß gleich wahrscheinlich sind, so sind als Erfolgswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ anzunehmen.

Bilden wir Serien aus je zwei Kugeln, so sind ohne Zweifel folgende Erfolge möglich:

$$\begin{matrix} w & w & s & s \\ w & s & w & s. \end{matrix}$$

Unter den vier möglichen Erfolgen sind die zwei mittleren, wenn wir nicht auf die Reihenfolge der Kugeln besonderen Wert legen, als gleich zu betrachten, so daß wir, praktisch gesehen, nur drei Erfolge haben: $2\,w$; $1\,w, 1\,s$; $2\,s$. Da wir unter je vier Erfolgen die ersten und dritten je einmal, den zweiten zweimal zu erwarten haben, so sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $^1/_4$, $^2/_4$, $^1/_4$.

Bei Serienzügen mit 3 Kugeln ergeben sich folgende acht Möglichkeiten:

$$\begin{matrix} w & w & w & s & w & s & s & s \\ w & w & s & w & s & w & s & s \\ w & s & w & w & s & s & w & s \end{matrix}$$

Diese Aufzählung zeigt, daß wir, wenn wir wieder von der Reihenfolge der Anordnung absehen, vier Erfolge haben: $3\,w$; $2\,w, 1\,s$; $2\,s, 1\,w$; $3\,s$, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $^1/_8$, $^3/_8$, $^3/_8$ und $^1/_8$.

So können wir fortfahren, indem wir die Fälle wie hier einfach auszählen, oder indem wir uns der von der Kombinatorik bereitgestellten Formeln dafür bedienen, und werden folgende Erfolgsmöglichkeiten und Erfolgszahlen dafür finden:

Seriengröße	Erfolgsmöglichkeiten	Die Erfolgshäufigkeiten verhalten sich wie
1	2	1 : 1
2	3	1 : 2 : 1
3	4	1 : 3 : 3 : 1
4	5	1 : 4 : 6 : 4 : 1
5	6	1 : 5 : 10 : 10 : 5 : 1
6	7	1 : 6 : 15 : 20 : 15 : 6 : 1
7	8	1 : 7 : 21 : 35 : 35 : 21 : 7 : 1
8	9	1 : 8 : 28 : 56 : 70 : 56 : 28 : 8 : 1

usw.

Wir erkennen schon aus diesem kleinen Bruchstück, daß bei der Seriengröße s eine Zahl von $s + 1$ Erfolgen möglich ist, und daß die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Erfolge sich verhalten wie die bekannten Binomialzahlen des Binoms $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$; berücksichtigen wir, daß hier $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeiten für und gegen das Eintreten des Erfolges Weiß sind, — man bezeichnet sie mit p und mit q, — daß hier ferner $n = s$ ist, so können wir die Binomialformel für unseren Fall schreiben $(p + q)^s$. Wenn wir z. B. bei unserer Urne Serien von je 10 Kugeln ziehen wollen, so wissen wir zunächst, daß elf Erfolgszahlen für den Erfolg: weiße Kugeln möglich sind: von 10 weißen Kugeln angefangen bis zu 0 weißen Kugeln. Diesen Erfolgen werden Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen sein, die sich aus der Ausrechnung der Binomialformel $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$ ergeben.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \cdots \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Es beträgt somit die Wahrscheinlichkeit, daß unter einem Serienzuge 10 weiße Kugeln enthalten seien $= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$. Es beträgt ferner die Wahrscheinlichkeit, daß unter einem Serienzuge 9 weiße Kugeln enthalten seien $= \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{10}{1024}$ usw.

Wenn wir diese Berechnung durchführen, und neben die bloßen Wahrscheinlichkeiten der besseren Veranschaulichungen halber die darauf beruhenden Erfolgshäufigkeiten bei 10000 Serienzügen von je 10 Kugeln stellen, so erhalten wir folgende Zahlen:

Erfolg	Abweichung von der Wesensform	Wahrscheinlichkeit	Erwartungsmäßige Zahl unter 10000 Serienzügen
10 mal weiß . .	+ 5	0,0009765625	10
9 „ „ . .	+ 4	0,0097656250	98
8 „ „ . .	+ 3	0,0439453125	439
7 „ „ . .	+ 2	0,1171875000	1172
6 „ „ . .	+ 1	0,2050781250	2051
5 „ „ . .	0	0,2460937500	2460
4 „ „ . .	— 1	0,2050781250	2051
3 „ „ . .	— 2	0,1171875000	1172
2 „ „ . .	— 3	0,0439453125	439
1 „ „ . .	— 4	0,0097656250	98
0 „ „ . .	— 5	0,0009765625	10
Insgesamt	—	1,0000000000	10000

Es zeigt sich, daß die größte unter den Wahrscheinlichkeiten, nahezu 0,25, dem Erfolge 5 Kugeln weiß, 5 schwarz zukommt, was nicht überraschen kann, da dieser Erfolg dem Mischungsverhältnis in der Urne entspricht. Die Wahrscheinlichkeit 0,25 ist also gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abweichung von diesem Grunderfolge $= 0$ sei. Die Wahrscheinlichkeit für die anderen Erfolge und Abweichungen nehmen symmetrisch ab, erst langsam, dann immer schneller, bis sie bei den beiden Grenzerfolgen (Abweichung $+ 5$ und $- 5$), die unter 10000 Serienzügen von je 10 nur je 10 mal zu erwarten sind, anlangen.

Die oben angeführte Binomialformel gilt in der allgemeinsten Weise, auch wenn die Wahrscheinlichkeiten p und q nicht $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, sondern voneinander verschieden sind. Freilich nimmt dann die Reihe der den Erfolgen zugehörigen Wahrscheinlichkeiten keinen symmetrischen Verlauf wie hier, sondern gestaltet sich (bei kleinem s, vgl. S. 32) unsymmetrisch, und zwar um so stärker, je verschiedener die Teilwahrscheinlichkeiten voneinander sind. G. U. YULE hat in seinem Lehrbuche[1] die auf 10000 Serienzüge umgerechneten erwartungsmäßigen Erfolgszahlen für Serien von je 20 Zügen für die Wahrscheinlichkeiten $p = 0{,}5$ bis 0,1 berechnet. Die Ergebnisse sind in dem folgenden Tabellchen niedergelegt.

Erwartungsmäßige Erfolge auf Grund der Binomialreihe 10000 $(p + q)^{20}$ für die Werte von p von 0,5 bis 0,1.

Erfolge	Wahrscheinlichkeit				
	$p = 0{,}5$ $q = 0{,}5$	$p = 0{,}4$ $q = 0{,}6$	$p = 0{,}3$ $q = 0{,}7$	$p = 0{,}2$ $q = 0{,}8$	$p = 0{,}1$ $q = 0{,}9$
	1	2	3	4	5
0	—	—	8	115	1216
1	—	5	68	576	2702
2	2	31	278	1369	2852
3	11	123	716	2054	1901
4	46	350	1304	2182	898
5	148	746	1789	1746	319
6	370	1244	1916	1091	89
7	739	1659	1643	545	20
8	1201	1797	1144	222	4
9	1602	1597	654	74	1
10	1762	1171	308	20	—
11	1602	710	120	5	—
12	1201	355	39	1	—
13	739	146	10	—	—
14	370	49	2	—	—
15	148	13	—	—	—
16	46	3	—	—	—
17	11	—	—	—	—
18	2	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—

Die Zahlen dieser Tabelle bedeuten, um es noch einmal zu wiederholen, die Erfolgszahlen, die nach den Regeln der Kombinatorik zu erwarten sind, wenn wir aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln unter jedesmaligem Zurücklegen der Kugeln und neuem Mischen 10000 Serien von je 20 Kugeln ziehen, wobei das Mischungsverhältnis der weißen und schwarzen Kugeln einmal (durch alle die 10000 Serien hindurch) 5 : 5, dann 4 : 6 usw. ist. Nehmen wir also die letzte Reihe, so ist sie so zu deuten, daß wir bei einem Mischungsverhältnis der weißen und schwarzen Kugeln von 1 : 9 unter 10000 Serien von je 20 Kugeln z. B. 4 Serien zu erwarten haben, in denen 8 weiße Kugeln vorkommen, 20 Serien, in denen 7 weiße Kugeln unter den 20 vorkommen usw., entsprechend den Gliedern des Binoms 10000 $(0{,}1 + 0{,}9)^{20}$.

Der Einfluß der Ungleichheit von p und q nimmt mit dem Wachsen des Unterschiedes $p - q$ zu, führt aber bei der vorliegenden Seriengröße von $s = 20$ erst bei $p = 0{,}2$ zu einer empfindlicher schiefen Anordnung der Erfolgszahlen, die sich naturgemäß bei $p = 0{,}1$ noch steigert. Es ist indessen sehr bemerkenswert, daß die Schiefe der Anordnung bei steigender Seriengröße s abnimmt, wie folgende Tabelle (s. S. 32) zeigt.

Diese Tabelle, die wir selbst für den vorliegenden Zweck haben berechnen lassen, ist mit der vorausgehenden insofern verknüpft, als beide die Binomialzahlen für das Binom 10000 $(0{,}1 + 0{,}9)^{20}$ enthalten. Wir erkennen in dieser Verknüpfung nicht nur, wie der Wandel in den Wahrscheinlichkeiten, sondern auch, wie der

[1] Introduction, 8. Aufl., S. 294. — Die Summen der Spalten 2, 3 und 5 weichen infolge der Abrundungsfehler um ein Geringes von 10000 ab.

Die Annäherung an die symmetrische Verteilung bei wachsender Seriengröße s.

Erfolge	Binomialzahlen $10000\,(0{,}1 + 0{,}9)^{20}$				
	$s = 2$	$s = 10$	$s = 20$	$s = 50$	$s = 100$
	1	2	3	4	5
0	8100	3487	1216	51	—
1	1800	3874	2702	286	3
2	100	1937	2852	779	16
3	—	574	1901	1386	59
4	—	112	898	1809	159
5	—	14	319	1849	338
6	—	2	89	1541	596
7	—	—	20	1076	889
8	—	—	3	643	1148
9	—	—	—	333	1304
10	—	—	—	155	1319
11	—	—	—	61	1199
12	—	—	—	22	988
13	—	—	—	7	743
14	—	—	—	2	513
15	—	—	—	—	327
16	—	—	—	—	193
17	—	—	—	—	106
18	—	—	—	—	54
19	—	—	—	—	26
20	—	—	—	—	12
21	—	—	—	—	5
22	—	—	—	—	2
23	—	—	—	—	1
	10000	10000	10000	10000	10000

Wandel in der Seriengröße die Asymmetrie beeinflußt. Er zeigt sich, daß die Asymmetrie der Reihe für $s = 20$ noch übertroffen wird durch diejenige der Seriengrößen $s = 10$ und $s = 2$, daß aber schon bei bescheidenerer Vergrößerung der Seriengröße (auf 50 und 100) eine starke Verwischung der Asymmetrie und Hinneigung zur symmetrischen Gestalt erfolgt. (In unserem obigen Experiment [S. 32ff.] war trotz großer Ungleichheit der Wahrscheinlichkeiten eine Asymmetrie kaum wahrnehmbar.) Wir können daher bei großem s mit einer für praktische Zwecke durchaus genügenden Annäherung die Reihe der den verschiedenen Erfolgen zukommenden Wahrscheinlichkeiten (und Erfolgszahlen), abgesehen von ganz extremen Ungleichheiten von p und q, immer als symmetrisch annehmen.

Die mit zunehmender Seriengröße s wachsende Symmetrie der Binomialreihe ist nichts Geheimnisvolles, sondern im Aufbau der Binomialreihe begründet. Die Reihe der Potenzprodukte $p^n, p^{n-1}q, p^{n-2}q^2, \ldots$ fällt monoton, wenn $p > q$ ist, steigt monoton, wenn $p < q$ ist und bleibt unverändert auf der Höhe $p^n = q^n$, wenn $p = q = \frac{1}{2}$ ist. Den zweiten Bestandteil der einzelnen Glieder bilden die Binomialzahlen $\binom{s}{0}, \binom{s}{1}, \binom{s}{2}, \ldots \binom{s}{s}$, die sich in symmetrischer Anordnung von 1 über einen (eingliedrigen oder zweigliedrigen) Höhepunkt wieder zu 1 zurückbewegen, deren Mitte sich bei wachsendem s bald zu stattlicher Höhe auftürmt. Es leuchtet ein, daß diese starke Bewegung der Binomialzahlen bei wachsendem s diejenige der pq-Potenzen mehr und mehr überwiegt und so den zunehmend symmetrischen Charakter der Reihe bestimmt.

Es ist oft von Wichtigkeit, die Lage des größten Gliedes in der Binomialreihe zu bestimmen, auch ohne die ganze Binomialreihe durchzurechnen. Eine einfache Erwägung aus dem Aufbau der Reihe $p^s + \binom{s}{1} p^{s-1}q + \binom{s}{2} p^{s-2}q^2 + \cdots$ führt zur Bestimmung des größten Gliedes. Die Reihe steigt, wenn wir den Quotienten aus dem $(m+1)$-ten Glied durch das m-te Glied $\frac{s-m+1}{m}\frac{q}{p}$ bilden, solange, als dieser Quotient > 1, also $m < sq + q$ ist, und sie fällt so lange, als dieser Quotient < 1, also $m > sq + q$ ist. Somit ist die größte, unter $sq + q$ liegende ganze Zahl der Exponent von q. Ähnlich ergibt sich, daß die kleinste, über $sp - q$ liegende ganze Zahl der Exponent von p sein muß. Dadurch ist die Lage des größten Gliedes in der obigen Binomialreihe eindeutig bestimmt.

Beispiel. Für den oben in der Tafel behandelten Fall $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $s = 100$ ergibt sich für $sq + q = 90{,}9$, $sp - q = 9{,}1$; das Potenzenpaar der Wahrscheinlichkeiten heißt also $p^{10}\,q^{90}$. Das größte Glied $\binom{100}{90} p^{10}\,q^{90}$ ist das 90. Glied unter der 101 mögliche Erfolge zählenden Reihe — die Erfolge der weißen Kugeln von oben nach unten gereiht — und entspricht dem Erfolge 10mal A (z. B. weiß), 90mal das Gegenteil (z. B. schwarz).

Wenn $sq + q$ selbst eine ganze Zahl ist, dann wird es auch $sp - q$. Dann gibt es zwei gleiche Glieder, bis zu denen die Reihe steigt und von denen ab sie fällt[1].

Es ist nun von großer Bedeutung, für die Streuung der zufälligen Abweichungen ein einziges Maß zu finden. Das allgemeine Streuungsmaß, das jede, nicht nur die aus zufälligen Abweichungen bestehende Streuung zu messen bestimmt ist, ist die mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n}},$$

worin Σ das Summenzeichen bedeutet (an Stelle von $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \cdots \lambda_n^2$), λ die jeweilige Abweichung vom arithmetischen Mittel und n die Zahl der der Streuung unterworfenen Beobachtungsfälle. (Vgl. Näheres in Abschnitt II, 9b.) Es läßt sich nun leicht nachweisen[2], daß σ für den besonderen Fall der Glücksspielabweichungen den Wert

$$\sigma = \sqrt{s\,p\,q}$$

annimmt, worin s die Seriengröße, p die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des in Rede stehenden Ereignisses, q die Wahrscheinlichkeit für den Nichteintritt des Ereignisses ($= 1 - p$) bezeichnet. (Vgl. zum Begriff der „Wahrscheinlichkeit" oben S. 21.) Dieses σ ist somit die mittlere Abweichung von dem wahrscheinlichsten Erfolg bei der Seriengröße s, also im obigen Beispiel bei der Seriengröße $s = 10$ und der Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ vom Erfolge 5. Man kann die mittlere Abweichung aber auch berechnen von dem auf die Einheit bezogenen Erfolg. Dann wird

$$\sigma_v = \frac{\sigma}{s} = \sqrt{\frac{p\,q}{s}}.$$

Diese verhältnismäßige Abweichung ist also in unserem Beispiel zu berechnen von dem auf die Einheit bezogenen wahrscheinlichsten Erfolg 0,5.

1. Beispiel: In Spalte 5 des Tabellchens auf S. 32 ist die Seriengröße $s = 100$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$. Es ist daher unter den tatsächlich beobachteten Erfolgszahlen die mittlere Abweichung $\sigma = \sqrt{spq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ zu erwarten. Berechnen wir σ nach der allgemeinen (nicht nur für die Verteilung der zufälligen Abweichungen) gültigen Formel $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n}}$, so ergibt sich die folgende Rechnung (vgl. dazu auch Abschnitt II, 9b). Da die Abweichungen nicht alle verschieden, sondern gruppenweise gleich sind, ergibt sich hier die Vereinfachung, daß wir immer eine Anzahl Abweichungen gruppenmäßig zusammenfassen können, wodurch sich unsere Formel ändert in $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (z \cdot \lambda^2)}{n}}$.

---

[1] Vgl. hierzu CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung 4. Aufl., 1, 131ff.; Statistische Forschungsmethoden S. 190.

[2] Vgl. z. B. CZUBER: Statistische Forschungsmethoden S. 177ff. — YULE: Introduction usw. 8. Aufl. S. 256f.

Erfolg	Abweichung vom arithmetischen Mittel λ	Quadrat der Abweichung λ^2	Zahl der Fälle z	Zahl der Fälle mal Abweichungsquadrat $z \cdot \lambda^2$
1	-9	81	3	243
2	-8	64	16	1024
3	-7	49	59	2891
4	-6	36	159	5724
5	-5	25	338	8450
6	-4	16	596	9536
7	-3	9	889	8001
8	-2	4	1148	4592
9	-1	1	1304	1304
10	0	0	1319	0
11	1	1	1199	1199
12	2	4	988	3952
13	3	9	743	6687
14	4	16	513	8208
15	5	25	327	8175
16	6	36	193	6948
17	7	49	106	5194
18	8	64	54	3456
19	9	81	26	2106
20	10	100	12	1200
21	11	121	5	605
22	12	144	2	288
23	13	169	1	169
			10000	89952

$$\Sigma (z \cdot \lambda^2) = 89952\,,$$

$$\frac{\Sigma (z \cdot \lambda^2)}{n} = \frac{89952}{10000}\,.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (z \cdot \lambda^2)}{n}} = 2{,}999\,.$$

Es stimmt also tatsächlich der nach der theoretischen Ableitung berechnete Wert von $\sigma = \sqrt{spq}$ mit dem nach der allgemein gültigen Formel berechneten überein. (Die kleine Abweichung um 1 Tausendstel ist auf die Vernachlässigung von Dezimalstellen zurückzuführen.)

Wir können, statt wie im vorausgehenden die mittlere Abweichung an den absoluten Erfolgswerten 0, 1, 2, ... 10, 11 . . . . . . 20 usw. zu messen, dies an den auf die Einheit bezogenen Erfolgswerten 0,00, 0,01, 0,02 . . . . . . 0,10, 0,11 . . . . . . 0,20 usw. tun. Dies erfolgt vermittels der zweiten Formel $\sigma_v = \sqrt{\frac{pq}{s}}$. σ_v nimmt hier, da s das Hundertfache von 1 ist, naturgemäß den Wert eines Hundertstels von σ, also 0,03 an. Die Übereinstimmung mit dem nach der Formel $\sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n}}$ berechneten σ_v läßt sich ganz ähnlich wie oben auch an der Reihe der relativen Erfolgswerte zeigen.

2. Beispiel. In unserem obigen Falle der Mittelgruppe der Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten (167 cm) berechnet sich die erwartungsmäßige mittlere Abweichung $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}071 \cdot 0{,}929} = 2{,}568$. Die tatsächliche Streuung, nach der erstern Formel berechnet, betrug[1]

$$\sqrt{\frac{(-0{,}1)^2 + 0{,}9^2 + 2{,}9^2 + (-1{,}1)^2 + 3{,}9^2 + (-1{,}1)^2 + (-0{,}1)^2 + 1{,}9^2 + 2{,}9^2}{9-1}} = 2{,}2048\,.$$

[1] Da hier die Abweichungen der beobachteten Erfolge nicht von ihrem arithmetischen Mittel, sondern von der wirklichen Wesensform gemessen werden sollen, diese aber nur in

Wir können zwischen der tatsächlichen und der theoretisch erwartungsmäßigen Streuung eine ziemlich nahe Übereinstimmung feststellen, wobei wir bedenken müssen, daß bei einer so kleinen Zahl von Beobachtungsfällen die zufälligen Schwankungen eine größere Rolle spielen. Für σ_v ergibt sich der Wert $\sqrt{\frac{0{,}071 \cdot 0{,}929}{100}} = 0{,}02568$. Das entsprechende auf die Einheit berechnete allgemeine σ_v beträgt 0,02205.

Da s hier ein dekadisches Vielfaches von 1 ist, haben σ und σ_v den gleichen Betrag, wenn auch auf einer verschiedenen dekadischen Ebene.

Aufgabe 2. Für die sechs anderen Reihen der Körpergrößenstufe (164 bis 166 und 168 bis 170, S. 22) ist die gleiche Rechnung durchzuführen. Es sind für die beiden σ aller 7 Reihen die arithmetischen Durchschnitte zu bilden und miteinander zu vergleichen.

In den Formeln für $\sigma = \sqrt{spq}$ und $\sigma_v = \sqrt{\frac{pq}{s}}$ kommt das Gesetz der großen Zahl in mathematischer Formulierung klar zum Ausdrucke. Wir sehen zunächst aus σ, daß die Zufallsstreuung beim Wachsen der Seriengröße s nicht im gleichen Ausmaße, sondern nur im Ausmaße von $\sqrt{s}$ wächst. σ muß daher verhältnismäßig immer kleiner werden. Noch klarer erkennen wir das aus σ_v. Dieses drückt aus, daß die Zufallsstreuung von dem auf die Einheit bezogenen Erfolg mit wachsendem s kleiner wird, freilich nicht im Ausmaße von $\frac{1}{s}$, sondern von $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Wir erkennen also auch hier, daß bei unendlich großem s die relative Abweichung σ_v gleich Null werden muß. Wir erkennen aber auch weiter, daß bei sehr großem s eine wirksame Verkleinerung von σ_v praktisch in keinem Verhältnis mehr steht zu der dazu erforderten Vergrößerung der Zahl.

Wir fügen hier ein Tabellchen ein, das das Ausmaß der Zufallsfehlergrenzen und ihre fortschreitende verhältnismäßige Einengung bei wachsender Seriengröße s veranschaulicht.

Mittlere Abweichung vom erwartungsmäßigen Erfolg und Abweichungsgrenzen der Glücksspiele.

$p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$

s	$\sigma = \sqrt{spq}$	$E \mp 3\sigma$	untere obere Grenze der Zufallsschwankungen
10	1,58	5 ∓ 4,74	0,26 bis 9,74
100	5	50 ∓ 15	35 „ 65
1000	15,8	500 ∓ 47,4	453 „ 547
10000	50	5000 ∓ 150	4850 „ 5150
100000	158	50000 ∓ 474	49526 „ 50474
1000000	500	500000 ∓ 1500	498500 „ 501500
s	$\sigma_v = \sqrt{\frac{pq}{s}}$	$0{,}5 \mp 3\sigma_v$	
10	0,1581	0,5 ∓ 0,4746	0,0254 bis 0,9746
100	0,0500	0,5 ∓ 0,1500	0,3500 „ 0,6500
1000	0,0158	0,5 ∓ 0,0474	0,4526 „ 0,5474
10000	0,0050	0,5 ∓ 0,0150	0,4850 „ 0,5150
100000	0,0016	0,5 ∓ 0,0047	0,4953 „ 0,5047
1000000	0,0005	0,5 ∓ 0,0015	0,4985 „ 0,5015

Ein anderes, häufig verwendetes Maß der zufälligen Abweichungen ist die „wahrscheinliche Abweichung" (das ist die mittlere der nach Größen geordneten Abweichungen, „mittlerer

einer Annäherung angenommen werden konnte, muß im Nenner der oben angeführten Formel eine kleine Korrektur angebracht werden ($n - 1$ statt n, vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung 4. Aufl. **1**, 320ff.).

[Zentral-]Wert", vgl. Abschn. II, 8d). Sie nimmt den theoretischen Wert 0,4769 $\sqrt{2spq}$ für die absoluten Erfolgswerte und 0,4769 $\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ für die auf die Serieneinheit bezogenen Erfolgswerte an. Der reziproke Wert des letzteren Wurzelausdruckes spielt als Präzisionsmaß h in LEXIS' Streuungsuntersuchungen eine Rolle.

Der in der wahrscheinlichen Abweichung und im Präzisionsmaß vorkommende Wurzelausdruck $\sqrt{2spq}\,(=\sigma\sqrt{2})$ wird im Schrifttum bisweilen auch „Modul" genannt.

Da die Berechnung der Glieder des Binoms $(p+q)^s$ bei größerem s äußerst verwickelt ist, wird (unter Benutzung der Stirlingschen Näherungsformel) das größte Glied der Reihe der Wahrscheinlichkeiten annähernd dargestellt durch

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}},$$

die anderen Glieder der Reihe, die um l Einheiten von y_0 abweichen, durch

$$y_0 \pm l = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}},$$

worin π die Ludolphische Zahl 3,1416, e die Basis der natürlichen Logarithmen 2,7183 bedeutet[1]. Die Werte für y nehmen in der Nähe des Höhepunktes zuerst ganz langsam, dann immer schneller ab.

Die analytische Auswertung dieses Gedankens führt bei unendlich groß angenommenem Serienumfang zu dem bekannten Wahrscheinlichkeitsintegral

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt,$$

worin $\gamma = \frac{l}{\sigma\sqrt{2}}$, $t = \frac{x}{\sigma\sqrt{2}}$ und σ den bekannten Ausdruck $\sqrt{spq}$ annimmt. x ist der Abszissenwert der von der Mitte ($x = 0$) der symmetrischen Erfolgsverteilung aus gemessenen Abweichung. P bedeutet dann den Wert der Fläche vom Nullpunkt bis zu dem Abweichungswert und ist gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit der Erfolge, die in diesem Abstand zu erwarten sind.

Soll aber die erwartungsmäßige Zahl der Fälle für einen Flächenstreifen x_1 bis x_2 berechnet werden, so muß die Differenz aus den Wahrscheinlichkeiten für die Flächenstücke 0 bis x_2 und 0 bis x_1 berechnet werden.

Soll die absolute Zahl der erwartungsmäßigen Ereignisfälle berechnet werden, so müssen die ermittelten Wahrscheinlichkeiten mit n, der Gesamtzahl der Serien, die angestellt wurden, multipliziert werden.

Das obige Integral muß nicht etwa für jeden einzelnen Fall berechnet werden, sondern ist in bekannten Funktionstafeln ausgewertet[2].

Es ergibt sich schon bei mäßig großem s eine gute Annäherung der nach diesem Integral berechneten Wahrscheinlichkeiten an die strengen, dem Binomialgesetz entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Erfolge.

Auf das Nähere des Gebrauchs dieser Funktionstafeln soll hier nicht eingegangen werden. Das Integral entspricht sehr nahe dem Gaußschen Fehlerintegral, von dem es sich nur durch das besondere $\sigma = \sqrt{spq}$ unterscheidet. Es mag darum hier genügen, auf die Belehrung über den Gebrauch des Gaußschen Fehlerintegrals in Abschnitt II, 10d hinzuweisen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es hier festzustellen, daß nach der besonderen Anordnung der Wahrscheinlichkeitskurve innerhalb des einfachen σ 68,27 Prozent (oder annähernd zwei Drittel), innerhalb des zweifachen 95,45, innerhalb des dreifachen 99,73 Prozent aller Fälle zu liegen kommen. Daraus schöpfen wir nicht nur eine vereinfachte Verteilungsnorm, sondern auch eine wichtige Beurteilungsregel für die Unterscheidung zufälliger und wesentlicher Abweichungen: Alle Abweichungen innerhalb des Spielraumes der dreifachen mittleren Abweichung können zufallsbedingt sein, d. h. einer und derselben Wesensform zugehören; Abweichungen darüber hinaus sind mit einer für praktische Zwecke an Gewißheit grenzenden Wahrscheinlichkeit (0,9973) als einer anderen Wesensform zugehörig zu erklären.

---

[1] Vgl. hierzu CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung 4. Aufl. **1**, 134ff.

[2] Vgl. z. B. CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung, **1**, 455ff.

So weit unsere Betrachtungen über die Regeln, die für die zufälligen Abweichungen von der Wesensform auf Grund der Erfahrung aus der Glücksspieltheorie festzustellen sind. Es handelt sich jetzt nur noch darum, den Zusammenhang zwischen der Glücksspieltheorie und der statistischen Beobachtung abschließend herzustellen.

Wir sind von der empirischen Tatsache der Zufallsstreuung ausgegangen. Freilich hat man diese in der statistischen Wirklichkeit nicht in der sehr durchsichtigen Weise unseres Experimentes am Rekrutenmaterial kennengelernt, sondern zuerst an Schwankungen der Grundzahlen. GRAUNT[1] beobachtete, daß die Zahlen der Sterbefälle in London von Jahr zu Jahr viel geringere Schwankungen aufwiesen als diejenigen der umliegenden Landgemeinden. Er glaubte, den Grund dafür in dem verschiedenen Klima feststellen zu können. In Wirklichkeit war es so, daß die größere Zahl der Sterbefälle in London die relative Beständigkeit der Wesensform der Sterbefälle schärfer zum Ausdrucke brachte als die kleinen Zahlen der Sterbefälle in den Landgemeinden. Spätere Verfasser, z. B. HALLEY[2], kannten aber schon den Grund der Erscheinung. HALLEY sagt, daß die Schwankungen in seinem nach dem Alter gegliederten Material der Sterbefälle in Breslau verschwinden würden, wenn man statt fünfjähriger Durchschnitte 20jährige Durchschnitte verwenden könnte. J. BERNOULLI schreibt in seiner Ars conjectandi (erschienen 1713, 7 Jahre nach seinem Tode), es müsse schon dem gewöhnlichen Menschenverstande einleuchten, daß aus einer großen Anzahl von Beobachtungsfällen zuverlässigere Schlüsse gezogen werden könnten als aus einer kleinen. Er erbrachte dann als erster in diesem Werke die Theorie der Glücksspielabweichungen.

Außer an den schwankenden Grundzahlen wurden die zufälligen Schwankungen besonders auch dort beobachtet, wo die Zergliederung des Stoffes eine regelmäßige Anordnung ergibt (wie in unserem Beispiel der Körpergröße). Man konnte da deutlich beobachten, wie die großen Schwankungen um die regelmäßige Form, die sich bei wenigen hunderten Beobachtungen ergaben, verschwanden, wenn viele Tausende von Fällen zur Verfügung standen. Man konnte diese Beobachtung sowohl beim Vergleiche gleichartiger Gegenstände verschiedenen Umfangs, wie auch verschiedenartiger Gegenstände verschiedenen Umfangs machen. Man siehe zu letzterem den oben S. 26 angestellten Vergleich zwischen der zackigen Umrandung der Verteilungsfigur von 906 Fällen in Abb. 3b auf S. 26 und der glatteren Umrandung der Verteilungsfigur in Abb. 7 auf S. 87 oder Abb. 5 auf S. 70.

Natürlich besteht kein Grund, die Annahme zufälliger Schwankungen auf solche regelmäßige Gestaltungen einzuschränken, die nur bei Zergliederungen nach zahlenmäßigen Merkmalen auftreten können. Wir müssen auch für Zergliederungen nach artmäßigen Merkmalen (z. B. nach dem Geschlecht) das Vorhandensein solcher zufälliger Schwankungen annehmen, was sich auch für solche Stoffe in ähnlicher Weise wie in dem oben dargestellten Experiment erweisen läßt.

Die empirische Geltung des Gesetzes der großen Zahl in der Statistik, daß kleine Zahlen gewissen Schwankungen unterliegen, die in den großen Zahlen mehr und mehr verschwinden, darf daher als erwiesen angenommen werden. Sie ist wohl auch kaum jemals bestritten worden. Anders ist es mit der wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründung, die die Parallelität der statistischen Beobachtung mit der Beobachtung an den Glücksspielen behauptet. Hier ist vor allem zweierlei festzustellen:

1. ob für die lebendige Wirklichkeit ein solches Zusammenwirken einer Grundursache und zahlreicher das Ergebnis mitbeeinflussender Nebenursachen angenommen werden kann wie beim Glücksspielversuche,

2. ob für die lebendige Wirklichkeit die drei oben (S. 28) genannten Voraussetzungen der Glücksspiele als geltend angenommen werden dürfen.

---

[1] Natural and Political Observations usw. 1662.

[2] An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind usw., Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, 1693.

Das Zutreffen der Parallele zu 1. geht ohne weiteres aus den oben (S. 21) an die Besprechung der Wesensstreuung geknüpften Bemerkungen hervor. Ohne Zweifel besitzt jeder statistische Tatbestand einen wesentlichen Ursachenkomplex, der ihn zu bestimmen sucht: im obigen Beispiel der gelernten und ungelernten Arbeiter ist es das technische Bedürfnis der Wirtschaft nach dieser oder jener Art Arbeit in einem gegebenen Zeitpunkt, bei der Verteilung der Marktpreise einer Ware sind es die wirtschaftlichen Bestimmungsgründe des Preises, bei der Verteilung der Körpergröße die Art der Erbmasse und die Art ihrer Vererbung usw. Haben wir nun oben (S. 19) zwischen statistischen Merkmalen (d. h. Merkmalen allgemeiner Art) und individuellen Verhältnissen unterscheiden müssen, so müssen wir hier erkennen, daß dieser Einteilung durchaus entspricht die Einteilung in Ursachen allgemeiner Art (wesentliche Ursachen) und individuelle Beeinflussungen. Die Ursachen allgemeiner Art entsprechen dem Mischungsverhältnis in der Urne; sie bestimmen die Wesensform des Tatbestandes. Die individuellen Verhältnisse stellen jene zahlreichen kleinen Ursachen bei, die, bald positiv, bald negativ gerichtet, die Störungen von der Wesensform hervorrufen. Es zeigt sich also in diesem einen Punkt, daß wir die Parallele zwischen Glücksspielversuch und statistischer Beobachtung als berechtigt annehmen dürfen.

Es bleibt daher noch zu untersuchen, inwieweit die zu 2. genannten Voraussetzungen zutreffen. Auf sie soll im weiteren — und zwar wegen der Umfänglichkeit des Stoffes in einem besonderen Abschnitt — eingegangen werden. Hier sollen zunächst einige Problemstellungen besprochen werden, die sich unmittelbar aus den vorausgehenden Betrachtungen ergeben und die für die statistische Praxis von großer Wichtigkeit sind.

c) Einige Folgerungen für die statistische Praxis. Wir knüpfen an die oben auf S. 36 gemachte Feststellung an, daß die dreifache mittlere Abweichung, von der Wesensform aus gerechnet, uns mit einer für die Praxis durchaus genügenden Sicherheit die Grenzen angibt, bis zu denen zufällige Abweichungen zu erwarten sind. Auf dieser Feststellung beruhte die Beantwortung folgender Probleme:

1. Wir haben uns über eine statistische Verteilung eine apriorische Vorstellung gemacht, für die wir nun Zahlenstoff gewinnen. Bestätigen diese Zahlen die apriorische Vorstellung?

Eine Bestätigung werden wir ohne Zweifel dann gewinnen, wenn sich die Abweichung der Beobachtung von der Erwartung als im Rahmen der Zufallsgrenzen $\mp 3\sigma$ liegend erweist, besonders, wenn dies bei mehreren Wiederholungen immer wieder zutrifft. Übersteigt der Unterschied aber die Zufallsgrenzen, so ist die Annahme einer anderen Wesensform als der apriorisch angenommenen berechtigt.

Beispiel. Wir nehmen eine Münze zur Hand und stellen unter Berücksichtigung der gleichen Prägung auf beiden Seiten die Annahme auf, daß beim Wurf das Obenliegen von Schrift und Wappen gleich wahrscheinlich sei. Unter 1000 Würfen hätten wir also 500 mal Wappen zu erwarten. In Wirklichkeit fanden wir bei einem 1000maligen Wurf 485 mal Wappen. Wurde dadurch unsere Annahme widerlegt?

Die mittlere Abweichung σ beträgt hier $\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 15{\cdot}8$, $3\sigma = 47$. Der wirklich beobachtete Unterschied von der Erwartung betrug 15. Er nähert sich dem einfachen σ, beträgt weniger als ein Drittel des dreifachen, liegt also zweifellos im Rahmen der Zufallsgrenzen. Unsere Annahme wurde durch die Wirklichkeit nicht widerlegt.

Aufgabe 3. Nach der Mendelschen Regel sollen bei Kreuzung weiß- und rotblühender Erbsen die Nachkommen sich im Verhältnis von ¾ rot- und ¼ weißblühenden aufspalten. Unter 300 Nachkommen seien 86 weißblühende beobachtet worden. Ist die Mendelsche Erwartung widerlegt?

2. Die zweite Problemstellung ist folgende: An zwei verschiedenen Orten oder am gleichen Orte zu verschiedenen Zeiten sind statistische Beobachtungen über einen Tatbestand gemacht worden. Sind die Ergebnisse so wenig voneinander unter-

schieden, daß sie als zufällige Abweichungen von einer gemeinsamen Wesensform betrachtet werden können, oder unterscheiden sie sich so stark voneinander, daß notwendigerweise das Vorhandensein zweier voneinander verschiedener Wesensformen angenommen werden muß?

Um diese Frage zu beantworten, ist es notwendig, zuerst über die vermutete gemeinsame Wesensform eine Annahme zu machen. Die wahrscheinlichste Annahme ist die des arithmetischen Mittels, und zwar, wenn s_1 und s_2 verschiedenen Umfang haben, des gewogenen arithmetischen Mittels der empirisch gegebenen Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 (vgl. dazu Abschnitt II, 8bα). Wir erhalten demnach

$$p_0 = \frac{s_1 p_1 + s_2 p_2}{s_1 + s_2}$$

und

$$q_0 = 1 - p_0.$$

Von dieser vermuteten gemeinsamen Wesensform aus wäre die mittlere Abweichung der ersten Beobachtung $\sigma_{v_1} = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_1}}$, die der zweiten Beobachtung $\sigma_{v_2} = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_2}}$. Nach einem algebraisch leicht zu beweisenden Satze[1] ist die mittlere Abweichung der Summe oder Differenz zweier Beobachtungen

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Wir erhalten somit hier als mittlere Abweichung der Differenz der beiden Beobachtungen

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_1} + \frac{p_0 q_0}{s_2}}.$$

Es kommt nun darauf an, ob das so errechnete σ_v, dreifach genommen, den Unterschied der beiden Beobachtungen p_1 und p_2 erreicht oder nicht. Im ersteren Falle ist die Annahme einer gemeinsamen Wesensform berechtigt, im zweiten nicht.

Beispiel[2]. Im Jahre 1928 wurden von 33116 flugplanmäßig vorgesehenen Reisen 30424 oder 91,87% vollständig durchgeführt, im Jahre 1929 dagegen von 26696 flugplanmäßig vorgesehenen Reisen 24440 oder 91,55%. Kann der Unterschied der beiden verhältnismäßigen Anteile zufällig sein oder liegt ein wirklicher Rückgang vor?

$$s_1 = 33116, \qquad p_1 = 0{,}9187,$$
$$s_2 = 26696, \qquad p_2 = 0{,}9155,$$
$$p_0 = \frac{s_1 p_1 + s_2 p_2}{s_1 + s_2} = \frac{30424 + 24440}{59812} = 0{,}9173.$$
$$q_0 = 0{,}0827,$$
$$p_0 q_0 = 0{,}07586,$$
$$\frac{p_0 q_0}{s_1} = 0{,}000002291,$$
$$\frac{p_0 q_0}{s_2} = 0{,}000002842,$$
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_1} + \frac{p_0 q_0}{s_2}} = \sqrt{0{,}000005133} = 0{,}00227 = 0{,}227\ \%.$$
$$3\,\sigma_v = 0{,}68\ \%.; \qquad p_1 - p_2 = 0{,}32\ \%.$$

Der Unterschied der beiden Prozente liegt also im Bereiche der Zufallsfehlergrenzen. Es ist somit kein Grund vorhanden, eine wesentliche Änderung des Verhältnisses der durchgeführten zu den planmäßig vorgesehenen Flügen anzunehmen.

[1] Vgl. Czuber: Statistische Forschungsmethoden S. 147ff. — Yule: An Introduction usw. 8. Aufl. S. 277ff.

[2] Statistisches Jahrbuch f. d. Deutsche Reich, **1930**, 155.

Aufgabe 4. Im Jahre 1928 waren unter 16089 gestorbenen 70jährigen Personen im Deutschen Reiche 7822 oder 48,62% männlichen Geschlechtes, im Jahre 1927 unter 15492 7483 oder 48,30%[1]. Können die Unterschiede als zufällig gelten oder müssen sie als wesentlich angenommen werden?

3. Die Beantwortung der vorausgehenden Frage wird in der Regel mit einem großen Grade von Wahrscheinlichkeit erfolgen können. Volle Sicherheit gewährt die Antwort allerdings nur dort, wo der beobachtete Unterschied eine starke Überschreitung der Zufallsgrenzen darstellt. Sind diese nur schwach überschritten, so muß die Möglichkeit offen gehalten werden, daß hier einer der seltenen Fälle (3 unter 1000) vorliegt, in denen die Grenzen des dreifachen σ auch von zufälligen Abweichungen überschritten werden; sind die Zufallsgrenzen dagegen nicht überschritten, so bleibt immer noch die Möglichkeit einer in geringen Grenzen gehaltenen Verschiedenheit der Wesensform bestehen. Über diesen oder den vorausgehenden Zweifelsfall können nur wiederholte Beobachtungen Gewißheit schaffen.

Bei einem größeren Unterschiede der Wesensformen wird eine solche wiederholte Beobachtung natürlich auch ohne alle wahrscheinlichkeitstheoretischen Hilfsmittel nach einer größeren Reihe von Beobachtungen Gewißheit geben, wenn wir immer wieder die eine Wesensform höher als die andere finden.

Hier kann aber ein neues, das dritte Problem auftauchen: Sind die Unterschiede der beiden bekannt verschiedenen Wesensformen groß genug, daß nicht einmal eine solche Lagerung eintrete, die eine gemeinsame Wesensform vortäuschen könnte? Entsprechend dem geänderten logischen Ausgangspunkte ist hier ein etwas geändertes Verfahren am Platze. In Frage stehen nicht die Abweichungen von einer angenommenen gemeinsamen Wesensform, sondern die Abweichungen von den beiden gegebenen Ausgangspunkten,

$$\sigma_{v_1} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{s_1}} \quad \text{und} \quad \sigma_{v_2} = \sqrt{\frac{p_2 q_2}{s_2}}.$$

Die mittlere Abweichung des Unterschiedes $p_1 - p_2$ beträgt nach dem Obigen (S. 39)

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{s_1} + \frac{p_2 q_2}{s_2}}.$$

Auch hier berechnen wir $3\,\sigma_v$ und vergleichen diese Größe mit $p_1 - p_2$, woraus sich dann die Antwort ergibt.

Beispiel.

Der Knabenanteil von den Lebend- und den Totgeborenen im Deutschen Reiche in den Jahren 1920 bis 1928[2].

Jahr	Lebendgeborene	Darunter Knaben		Totgeborene	Darunter Knaben	
		Grundzahlen	%		Grundzahlen	%
1920	1599287	827355	51,73	52306	29160	55,75
1921	1560447	807687	51,76	50973	28282	55,48
1922	1404215	725687	51,68	46678	26055	55,82
1923	1297449	670024	51,64	42705	23776	55,67
1924	1270820	656272	51,64	42805	23664	55,28
1925	1292499	666667	51,58	43828	24443	55,77
1926	1227900	632370	51,50	41519	23308	56,14
1927	1161719	597765	51,46	38310	21454	56,00
1928	1182815	609052	51,49	37962	21140	55,69
Im Durchschnitt 1920—1928	1333011	688098	51,62	44121	24587	55,73

[1] Statistisches Jahrbuch f. d. Deutsche Reich, **1930**, 36f., **1929**, 34f.

[2] Statistisches Jahrbuch f. d. Deutsche Reich **1930**, 30f.; **1929**, 28f.; **1928**, 30f.; **1927**, 26f.; **1926**, 23f., 29; **1924/25**, 28ff., 41.

Es ergibt sich aus dieser Reihe ganz zweifellos, daß der Knabenanteil der Lebendgeborenen ständig niedriger ist als derjenige der Totgeborenen (was wir aus den Beobachtungen nur eines Jahres leicht mit dem unter 2. geschilderten Verfahren hätten dartun können.) Es erhebt sich nun die Frage, ob der Unterschied groß genug ist, daß nicht doch einmal die beiden Prozentzahlen als zufällige Abweichungen einer gemeinsamen Wesensform erscheinen könnten. Wir gehen von dem neunjährigen Durchschnitt unserer Beobachtungen aus und bestimmen danach p_1 und p_2, berechnen dann die mittlere Abweichung des Unterschiedes $p_2 - p_1$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{0{,}2497}{1333011} + \frac{0{,}2467}{44121}} = 0{,}0024.$$

$3\sigma_v = 0{,}0072$, dagegen $p_2 - p_1 = 0{,}0411$. Der Unterschied übersteigt $3\sigma_v$ um das Fünffache. Es besteht also wegen des großen Unterschiedes keine Wahrscheinlichkeit einer solchen Gestaltung, daß p_1 und p_2 jemals für zufällige Abweichungen einer gemeinsamen Wesensform gehalten werden könnten.

4. So wie von der bekannten Wesensform aus die Zufallsgrenzen des dreifachen σ berechnet werden, d. h. die Grenzen, innerhalb deren eine in ihrer Abweichung nur vom Zufall bestimmte Beobachtung dieser Wesenform noch liegen kann, so berechnet man umgekehrt von dem beobachteten Erfolg zurück die Grenzen, innerhalb deren die zugehörige Wesensform liegend gedacht werden muß. Die für diese Grenzenberechnung benützten Formeln sind die gleichen, wie diejenige der Messung der Abweichungen der Wesensform, also $\pm 3\sigma$ oder die oben (S. 35f.) erwähnte „wahrscheinliche Abweichung". Durch die Berechnung dieser Grenzen wird die „Sicherheit" einer statistischen Beobachtung hinsichtlich der Größe möglicher zufälliger Abweichungen (allerdings nicht auch hinsichtlich anderer Abweichungen von der Wesensform, z. B. durch Erhebungsfehler) bestimmt. Wenn wir z. B. beobachtet haben, daß von 5283 deutschen Facharbeitern der mechanischen und elektrischen Werkstätten im Jahre 1928 1270 oder 24,04% einen Bruttowochenverdienst von 55 bis 60 RM hatten, so ist diese Aussage wegen der verhältnismäßigen Kleinheit der Zahlen nicht als endgültig anzunehmen, sondern es ist zweckmäßig, ihr die Zufallsfehlergrenzen in Gestalt von $\pm 3\sigma_v$, das ist $\pm 1{,}76\%$ beizusetzen.

d) Die Wirkung des Fehlens der strengen Glücksspielvoraussetzungen. α) *Vorbemerkungen.* Die im Abschnitt b) dargelegte Theorie ist auf dem Boden der Glücksspiele erwachsen, fußt also ganz auf ihren Voraussetzungen: Gleichbleiben des Grundverhältnisses (der Wesensform) von einer Serie zur andern, Aussichtsgleichheit der Beobachtungsfälle gleicher Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit dieser voneinander. Nur wenn diese drei Voraussetzungen zutreffen, gelten die oben aufgestellten Streuungsregeln der Glücksspiele, die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Erfolge nach der Binomialreihe oder dem Integralausdruck und die mittlere Abweichung dieser Streuung $\sigma = \sqrt{spq}$ oder $\sigma_v = \sqrt{\frac{pq}{s}}$[1].

Es ist nun von großer Wichtigkeit zu untersuchen, welche Wirkung das Fehlen einer dieser Voraussetzungen nach sich zieht; denn es ist anzunehmen, daß in der statistischen Wirklichkeit, für die wir diese mathematischen Betrachtungen nutzbar machen wollen, die reinen, klaren Voraussetzungen des Experimentes, hier des Urnenzuges, nicht in der gleichen Weise vorhanden sein werden.

β) *Die Änderung der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie.* Die Bedingung des Gleichbleibens der Grundwahrscheinlichkeit durch den ganzen Versuchsablauf setzen wir dadurch außer Kraft, daß wir die erste Serie unter Walten der Wahr-

[1] Für die praktische Bewährung dieser deduktiv gefundenen Regeln ist auch noch die Forderung einer sehr großen Zahl von Serien zu stellen.

scheinlichkeiten p_1 und q_1, die zweite unter Walten der Wahrscheinlichkeiten p_2 und q_2, ... die n^{te} unter Walten der Wahrscheinlichkeiten p_n und q_n ziehen, daß wir also von Serie zu Serie das Mischungsverhältnis der Kugeln der Urne ändern.

Wir können dann die gesamten Serien hinsichtlich der in ihnen vorkommenden Erfolge als eine Gesamtmasse betrachten und zum Zwecke eines Vergleiches untersuchen, welche Streuung der Erfolg voraussichtlich gehabt hätte, wenn allen Serienzügen eine einheitliche Grundwahrscheinlichkeit, z. B. das arithmetische Mittel aller Serienwahrscheinlichkeiten $p_0 = \frac{p_1 + p_2 + \cdots p_n}{n}$, zugrunde gelegen hätte, wenn die in Rede stehende Voraussetzung also nicht gestört gewesen wäre. Die beistehende Abb. 4 hat keineswegs den Zweck einer streng mathematischen Ableitung, sondern soll nur der Veranschaulichung dienen. Wenn p_0 allein durch

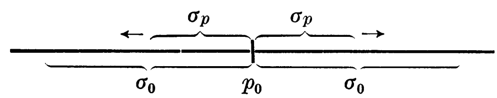


Abb. 4. Veranschaulichung der Wirkung des Schwankens von p von Serie zu Serie.

alle Serien wirksam wäre, so hätten wir in σ_0 $(= \sqrt{s p_0 q_0})$, das ist der mittleren Abweichung, den schon bekannten Ausdruck für die Größe der Streuung. Wenn aber p_0 selbst Schwankungen unterworfen ist, die ihren Ausdruck in σ_p finden, so zeigt schon die zeichnerische Darstellung, daß die Streuung der gesamten Masse, dargestellt durch σ, größer sein muß als σ_0, weil ja σ_0 nicht von dem ruhigen Punkt p_0, sondern von einem nach beiden Seiten entsprechend hinausgeschobenen Punkt wirksam wird, in der neuen Gesamtstreuung σ also nicht nur die schon bei gleichbleibendem p_0 zu erwartende Streuung σ_0, sondern noch eine durch die Eigenbewegung der Wahrscheinlichkeit hinzukommende Zusatzstreuung wirksam wird. Die mittlere Abweichung, die durch diese Hinausschiebung von p_0 bis an die Grenze der p_i erzeugt wird, ist, wie aus dem bereits Gesagten (S. 39) hervorgeht, $\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_p^2}$. Daraus ergibt sich, daß der Wechsel der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie die Streuung größer macht, als wir sie nach den Glücksspielregeln erwarten sollten.

Der Ausdruck $\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_p^2}$ verdient noch eine nähere Betrachtung. Wenn wir ihn ausführen, erhalten wir $\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s} + \frac{\Sigma (p_0 - p_i)^2}{n}}$. In diesem Ausdruck ist, wenn wir einmal die Zahl der Serien n und die mit ihnen wechselnden Wahrscheinlichkeiten p_i festgelegt haben, nur noch eine Veränderliche vorhanden, die Seriengröße s. Es zeigt sich, daß bei sehr großem s der erste Summand unter dem Wurzelzeichen sich Null nähert, σ also überwiegend durch den zweiten Summanden, die Streuung der p_i, bestimmt wird. Je kleiner dagegen die Seriengröße s wird, eine um so größere Bedeutung erlangt der erste Summand für die Größe von σ. Bei sehr kleinem s ist er der weitaus bestimmende Teil des Ausdruckes. Wir werden auf diese Feststellung bei Besprechung der Verwendbarkeit von LEXIS' Dispersionskoeffizienten Q zurückkommen.

LEXIS bezeichnet die beiden Summanden des Wurzelausdrucks als die „unwesentliche" und als die „physische" Schwankungskomponente, „unwesentlich" die erstere darum, weil sie auch ohne die zweite, die „physische" auftreten würde[1]. Die Bezeichnung scheint uns im Sinne der oben angestellten Betrachtungen nicht ganz glücklich gewählt zu sein.

---

[1] LEXIS: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. S. 177. Jena 1903.

γ) *Die Aussichtsungleichheit der einzelnen Fälle innerhalb der Serie.* Unter Aussichtsgleichheit der Fälle verstehen wir die Voraussetzung unseres Urnenzuges, daß innerhalb einer und derselben Serie alle Fälle unter Wirkung der unverändert bleibenden Wahrscheinlichkeiten p und q gezogen wurden.

Um den Einfluß der fehlenden Aussichtsgleichheit, also des Wechsels der Grundwahrscheinlichkeit innerhalb einer und derselben Serie, auf die Größe der Streuung zu untersuchen, stellen wir uns zunächst eine sehr große Urne mit weißen und schwarzen Kugeln in einem bestimmten Mischungsverhältnis p_0, q_0 vor. Wenn wir aus dieser Urne eine große Anzahl von Serien ziehen, so werden die Erfolge ohne Zweifel die normale Streuung der Glücksspiele aufweisen. Wenn wir nun den Inhalt dieser großen Urne in so viele kleinere Urnen füllen, als die Serie Züge enthalten soll, in der Weise, daß jede ein anderes Mischungsverhältnis hat, und wenn wir nun diese Urnen auf ein laufendes Band stellen und in ihrer strengen Reihenfolge ihnen die zu ziehenden Kugeln (mit Zurücklegen und Neumischen) entnehmen, und darin fortfahren, bis wir eine sehr große Anzahl von Serien auf diese Weise gebildet haben, und wenn wir dann die mittlere Abweichung σ aus dieser Serienreihe berechnen, so werden wir finden, daß σ in diesem Falle kleiner ausfällt als σ_0 im vorhergehenden Falle. Es ist dies auch mathematisch von verschiedenen Verfassern gezeigt worden[1]. Das Zurückbleiben der Streuung hinter der reinen Zufallsstreuung läßt sich aber auch ohne mathematischen Beweis nicht unschwer begreifen, wenn wir die Bedingungen der beiden σ einander gegenüberhalten. In dem Normalfall der Glücksspiele ist dem Zufall durch die gegebenen Bedingungen ein gewisser Spielraum für sein Walten zugewiesen. Dieser Spielraum wird eingeschränkt, wenn wir den Inhalt der gesamten Urne irgendwie aufteilen, und die Züge nun nach einer strengen Reihenfolge der Teilurnen durchführen. Es wird darum auch die Streuung in ihrer Größe eingeschränkt sein. Wollten wir nun versuchen, mit den Teilurnen am laufenden Bande etwas dem Normalversuche unserer ursprünglich großen Urne Gleichwertiges zu gestalten, so müßten wir die Auswahl der Urnen, aus denen jeweils die Kugel zu ziehen ist, dem Zufalle überlassen, sie also entweder durch Losbestimmung oder mit verbundenen Augen oder sonst irgendwie willkürlich wählen. Dadurch, daß wir die Urnen zufällig wählen, wird ideell das Ganze der Teilurnen wieder auf die ursprüngliche Gesamturne zurückgeführt. (Ebenso, wie wir uns umgekehrt in der Gesamturne ideell die Teilmassen vorstellen können, aus denen die Auswahl für den jeweiligen Kugelzug auch nur durch Zufall geschieht.)

Wenn wir aus dem Vorausgehenden das Ergebnis ziehen, so haben wir zwei Fälle der Aussichtsungleichheit zu unterscheiden: den der konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit (laufendes Band mit strenger Reihenfolge) und den der Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne[2] (laufendes Band mit zufälliger Reihenfolge). Nur im ersteren Falle ergibt sich aus der Aussichtsungleichheit eine Wirkung auf die Streuungsgröße: sie wird in diesem Falle kleiner als die normale Glücksspielstreuung, also unternormal. Im Falle der gewöhnlichen Durchschnittswahrscheinlichkeiten tritt dagegen keine Beeinflussung der Streuung ein: sie wird daher ebenso normal, als ob die Masse, in der die Streuung vor sich geht, gleichartig zusammengesetzt wäre. Diese Erkenntnis ist für die praktische Statistik sehr wichtig, weil gleichartig zusammengesetzte Massen kaum jemals erreichbar sind.

δ) *Die Verbundenheit der Fälle.* Wir hätten wieder eine Urne mit weißen und schwarzen Kugeln in einem gewissen Mischungsverhältnis p_0 und q_0. Wir zögen eine weiße Kugel, legten sie aber nicht mehr zurück. Ohne Zweifel wird dadurch das Mischungs-

[1] v. Bortkiewicz: Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik I. Conrads Jahrbücher 8, 3. F., S. 641ff. (1894). — Yule: Introduction. 8. Aufl., S. 284.

[2] Bezeichnungen von v. Bortkiewicz: a. a. O., S. 650 u. 651.

verhältnis der in der Urne verbleibenden Kugeln zu ungunsten der weißen Kugeln verschoben. Die Wahrscheinlichkeit der weißen Kugeln wird somit durch den Zug einer weißen Kugel vermindert. Wären z. B. 10 Kugeln in der Urne, 4 weiße und 6 schwarze, so wäre die Ausgangswahrscheinlichkeit für den Zug einer weißen Kugel $^4/_{10}$; legen wir die Kugel aber nicht mehr zurück und setzen die Ziehung fort, so ist die Wahrscheinlichkeit der weißen Kugeln auf $^3/_9$ herabgemindert. Es läge also ein Fall von Verbundenheit vor, und zwar von negativer, d. h. durch das Eintreten des Ereignisses an einer weißen Kugel wäre die Wahrscheinlichkeit für die anderen weißen Kugeln herabgemindert. Stellen wir uns dagegen vor, daß in einer Urne sehr viele kleine Stahl- und Messingkugeln vorhanden sind, daß aber unter den Stahlkugeln eine Anzahl magnetisch sei, so wird es vorkommen, daß bei dem Zug einer Stahlkugel gleich noch eine oder mehrere andere Stahlkugeln mitgezogen werden. Ergreift somit die Hand eine magnetische Stahlkugel, so steigt für die übrigen Stahlkugeln die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. Wir haben den Fall einer positiven Verbundenheit.

Es läßt sich nun mathematisch beweisen[1], daß positive Verbundenheit die Streuung vergrößert, negative Verbundenheit sie verringert. Wir können uns von der Richtigkeit dessen auch schon in einer ganz primitiven Weise eine Vorstellung verschaffen. Wir hätten eine Urne mit weißen und schwarzen Kugeln, die aber infolge Verbundenheit sowohl der weißen als auch der schwarzen Kugeln immer zwei und zwei aneinander klebten. Bilden wir Serien von je 100 Kugeln, so werden wir dazu offenkundig nur 50 Züge brauchen; der Fall wird sich also so darstellen, als hätten wir eine Seriengröße nicht von 100, sondern von 50 Fällen. Ohne Zweifel muß daher die mittlere Abweichung σ gegenüber der mittleren Abweichung σ_0 des Normalfalles größer sein, und zwar um so größer, je größer die Verbundenheit ist. Umgekehrt, im Falle negativer Verbundenheit, müßten wir, um einen der Grundwahrscheinlichkeit p gleichwertigen Erfolg zu erzielen, eine entsprechend größere Anzahl von Ziehungen machen, denen wieder ein kleineres σ entspräche als σ_0.

ε) *Zusammenfassung.* Wir haben somit erkannt,

1. daß ein Schwanken der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie die Streuung vergrößert;

2. daß die Aussichtsungleichheit innerhalb der Serien von verschiedener Wirkung ist,

a) bei konstant zusammengesetzter Durchschnittswahrscheinlichkeit die Streuung vermindert,

b) bei der eigentlichen Durchschnittswahrscheinlichkeit sie unberührt läßt,

3. daß die positive Verbundenheit der Beobachtungseinheiten die Streuung vergrößert, die negative die Streuung verkleinert.

Diese Wirkungen können entweder vereinzelt auftreten — wenn nur eine Voraussetzung der Glücksspiele fehlt — sie können aber auch in Häufung auftreten, wenn zwei der Glücksspielvoraussetzungen oder alle drei fehlen. Im Falle der Häufung werden sich die Wirkungen verstärken, wenn sie gleichgerichtet sind, abschwächen, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. In einem solchen Falle steht der Beurteiler gewissermaßen einer Gleichung mit mehreren Unbekannten gegenüber und muß darauf verzichten, die beobachtete Verschiedenheit des σ von σ_0 den in Wirkung stehenden Ursachen genau zuzurechnen. Trotzdem ist die Betrachtung auch dann nicht wertlos, weil sie dem Statistiker doch Hinweise für die Beurteilung seines Stoffes gibt, auf die er sonst vielleicht nicht verfiele.

ζ) *Zutreffen oder Nichtzutreffen der Glücksspielvoraussetzungen in der statistischen Wirklichkeit.* Wenn wir mit einer statistischen Masse experimentieren, d. h. aus dem Bestande der Zählkarten zufallsbestimmte Serienzüge unter jedesmaligem

---

[1] Vgl. z. B. YULE: Introduction. 8. Aufl., S. 286.

Zurücklegen der Karte veranstalten, so liegt es in unserer Hand, die reinen Glücksspielvoraussetzungen dabei zu schaffen. Wir können aus der gut durchmischten Masse Serien ziehen, die untereinander die gleiche Grundwahrscheinlichkeit besitzen und besitzen müssen, weil ja an der Masse auf dem Schreibtischregal von Serie zu Serie keine Änderung vor sich gehen kann; wir wahren dabei die Aussichtsgleichheit, da es immer eine und dieselbe Masse mit der gleichen Mischung ist, aus der die einzelnen Züge erfolgen, die sich zu den Serien zusammensetzen; und es ist jede Abhängigkeit der Fälle untereinander beseitigt — selbst wenn sie in Wirklichkeit bestünde, da die Fälle im erwähnten Experiment als unabhängig behandelt werden. Natürlich ist diese Herstellung der reinen Glücksspielvoraussetzungen nicht unbedingt notwendig. Wir können ebensogut das Mischungsverhältnis unserer Masse von Serie zu Serie ändern, können die Serien durch Züge statt aus der Gesamtmasse aus verschieden gemischten Teilmassen — und zwar wiederum entweder nach einer bestimmten Zwangsreihenfolge oder nach zufälliger Wahl — zusammensetzen, und schließlich den uns bekannten Verbundenheiten in entsprechender Weise Rechnung tragen.

Bei der obigen Serienbildung aus der Masse der Mistelbacher Rekruten haben wir, wie bereits erwähnt wurde, nicht Serien in Analogie des Kugelzuges aus der Urne mit nachherigem Zurücklegen der gezogenen Kugel, sondern Serien ohne dieses Zurücklegen gebildet, so daß wir damit die ganze Masse nach und nach ausgeschöpft haben. Hätten wir keine Kenntnis der Wesensform gehabt, sondern die gegebene Masse als etwas Endgültiges hinnehmen und die Serienzüge auf die Form der Gesamtmasse beziehen müssen, so hätte dieser Vorgang ohne Zweifel im Sinne einer negativen Verbundenheit wirken müssen. Nun waren wir aber in der Lage, über die Wesensform eine wahrscheinliche Annahme aufzustellen und die Serien auf diese Wesensform zu beziehen. Dadurch ist dem Experiment der Charakter des reinen Glücksspieles gewahrt geblieben und wir hatten dazu den Vorteil, die gewonnenen Serienzüge zum Aufbau der uns bekannten Masse verwenden zu können, also diese vermeintlich endgültige „Gesamtmasse" als ein vorläufiges Durchgangsergebnis dartun zu können.

Anders, als wenn wir mit der statistischen Masse experimentieren, liegen die Dinge, wenn sie uns von der Wirklichkeit dargeboten werden. Hier können wir weder die Voraussetzungen künstlich schaffen, sondern müssen die Massen nehmen, wie sie sind, noch können wir Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der Voraussetzungen anders als im Ergebnis ihres Zusammenwirkens, also nicht in ihren einzelnen Wirkungen, erkennen, können auch über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein dieser Voraussetzungen nur mehr oder minder wahrscheinliche Vermutungen aussprechen.

Was nun zunächst die Voraussetzung des Gleichbleibens der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie, also von statistischer Masse zu statistischer Masse, anlangt, so ist die Erfüllung dieser Bedingung sowohl bei zeitlich als örtlich als sachlich unterschiedenen Massen sehr selten anzutreffen. Das Leben ist vielgestaltig und in stetem Flusse begriffen, und es wird die zeitliche, örtliche oder sachliche Aneinanderreihung nur selten eine übereinstimmende Wesensform mit nur zufälligen Abweichungen davon erkennen lassen. Auf solche Fälle nachgewiesener Übereinstimmung der Wesensform soll weiter unten bei der Darstellung der Lexisschen Dispersionslehre eingegangen werden. Von Gegnern der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Denkformen in der Statistik wird auf den engen Umkreis solcher Fälle besonders Nachdruck gelegt, weil daraus vermeintlich die geringe Bedeutung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Denkformen für die Statistik hervorgehe. Diese Auffassung ist durchaus irrtümlich. Denn es ist unrichtig zu glauben, es sei minder wertvoll, die Verschiedenheiten der Wesensform mit einem scharfen Maße festzustellen und zu messen, als ihre Übereinstimmung zu ermitteln. Dabei haben diese Betrachtungen immer nur die äußere Zufallsstreuung im Auge, nicht die innere, der auch die einmalige statistische Masse unterworfen ist, bei der es gar keine Änderung der Grundwahrscheinlichkeit geben kann. Der vorausgegangene Abschnitt über die innere Zufallsstreuung dürfte dargetan haben, welche große Bedeutung dieser für die Theorie der Statistik zukommt — und wenn die Wahrscheinlichkeitstheorie, ohne dabei irgend etwas an statistischen Massen zu messen oder zu berechnen, uns nur dazu verhülfe, die innere Zufallsstreuung und das Gesetz der großen Zahl zu verstehen, so hätte sie uns schon damit einen wertvollen, ja schlechthin unersetzlichen Dienst geleistet.

Was nun die zweite Voraussetzung der Gültigkeit der Glücksspiele, die Aussichtsgleichheit der einzelnen Fälle innerhalb der Serien, anlangt, so wird diese ohne Zweifel durch die Gleichartigkeit der Fälle begründet. Zur Forderung der Gleichartigkeit aber sind wir schon oben (S. 14f.) auf anderem Wege gelangt, haben aber einsehen müssen, daß die Möglichkeit, gleichartige Massen zu bilden, beschränkt ist, so daß wir in der Statistik praktisch zumeist mit ungleichartigen Massen zu rechnen haben. Darin läge ein noch stärkerer Ausschließungsgrund für die Gültigkeit der Glücksspielregeln als im vorhergehenden Falle, da dieser Ausschließungsgrund auch für die innere Zufallsstreuung Geltung haben müßte, wenn diese Gefahr nicht dadurch aufgehoben würde, daß die Ungleichartigkeit in der Regel überhaupt keinen Einfluß auf die Massenstreuung nimmt (Fall der „Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne"), sondern nur dort, wo die ungleichartigen Massen in ihrer Beteiligung an der Durchschnittsbildung starr kontingentiert sind. Solche Kontingentierung finden wir bisweilen, aber nicht oft im gesellschaftlichen Leben (Heereskontingent, kontingentierte Produktionsmengen, Steuerkontingent u. dgl.). Im Falle der kontingentierten Zusammensetzung von Durchschnitten wird eine Beeinflussung im Sinne unternormaler Streuung zu erwarten sein, im Falle der gewöhnlichen Durchschnittswahrscheinlichkeit aber überhaupt kein Einfluß.

Diese sehr wichtige Tatsache wird merkwürdigerweise von einigen deutschen Verfassern vollständig übersehen, und es wird auch die Unmöglichkeit der Erreichung vollständiger Gleichartigkeit der Massen als ein Grund gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Statistik zu Felde geführt.

Was nun die dritte Voraussetzung der Geltung der Glücksspielregeln, die Unverbundenheit der einzelnen Fälle untereinander, anlangt, so müssen wir feststellen, daß wir Verbundenheit bei manchen Ereignissen antreffen. Tötet ein Eisenbahnunglück, eine Explosion, eine Epidemie, ein Häusereinsturz, eine Schlacht eine Person, so wird diese in der Regel nicht allein bleiben, sondern es werden in positiver Verbundenheit andere Personen mit in den Tod folgen. Ähnliche Schicksalsgemeinschaften bilden Mehrlinge im Mutterleib oder bei der Geburt, kollektive Arbeitsgemeinschaften wie die Schüler einer Schulklasse, die Arbeiter einer Fabrik oder eines Betriebszweiges, die Bewerber um in beschränkter Anzahl ausgeschriebene Stellen usw. Die letztgenannte Verbundenheit bietet ein Beispiel negativer Verbundenheit; denn jeder Erfolg eines der Bewerber vermindert die Wahrscheinlichkeit des Erfolges der anderen. In negativer oder positiver Verbundenheit, je nach der Eigenart der Prüfer, stehen Prüfungskandidaten bei gleichzeitiger Prüfung: Der Mißerfolg eines ist bei weichherzigen Prüfern geeignet, die Wahrscheinlichkeit der ihm folgenden Kandidaten, gleichfalls einen Mißerfolg zu erleiden, zu verringern, bei nervösen Prüfern, zu vergrößern.

Diese Verbundenheiten sind indessen in der Regel nicht häufig und stark genug, um auf die Streuung statistischer Massen einen größeren Einfluß zu nehmen. Sie müssen dem Statistiker aber trotzdem bekannt sein und von ihm gegebenenfalls berücksichtigt werden.

e) Abschließendes zum Gesetz der großen Zahl. *α) Die Nichterfüllung der strengen Glücksspielvoraussetzungen und das Gesetz der großen Zahl.* Wir haben oben die Frage aufgeworfen, ob die Störungen der Voraussetzungen des reinen Glücksspielversuches in der statistischen Wirklichkeit auf die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahl einen solchen Einfluß nehmen können, daß es als gar nicht oder nur sehr eingeschränkt wirksam zu denken ist. Wir haben zunächst erkannt, daß sich aus der Seltenheit der zeitlichen Beständigkeit statistischer Wahrscheinlichkeiten kein Grund gegen die Geltung des Gesetzes der großen Zahl ableiten läßt. Denn, wie schon oben (S. 21) erwähnt, darf die zeitliche Stetigkeit nicht als ein Begriffsmerkmal einer Wahrscheinlichkeit gefordert werden. Fassen wir aber den Wahrscheinlichkeitsbegriff so, daß eine Wahrscheinlichkeit auch als nur einmalig wirksam gedacht werden kann, so fällt damit der von den erwähnten Verfassern vorgebrachte Gegengrund weg. Es ist dann gleichgültig, ob eine Wahrscheinlichkeit in der Zeit unverändert bleibt oder nicht. Es bleiben dann nur zwei Gründe der Streuungsänderung übrig: eine etwaige Verminderung der Streuung durch Kontingentierung der Teilmassen und eine Verminderung oder Vermehrung der Streuung durch negative oder positive Verbundenheit der Masseneinheiten. Beide Ursachen treten an Bedeutung weit hinter der erstgenannten, hier auszuschaltenden, zurück. Wenn sie aber trotzdem ins Spiel treten, so können sie grundsätzlich dem Walten des Gesetzes der großen Zahl keinen Eintrag tun: ob die Streuung etwas größer oder kleiner ist als die Normalstreuung, Hauptsache bleibt, daß sie sich doch auch im Falle einer geänderten Streuung in einer symmetrischen Weise anordnet, so daß die positiven und negativen Abweichungen einander mit dem Wachsen der Zahl mehr und mehr aufheben. Also nicht das Grundsätzliche im Walten des Gesetzes der großen Zahl kann aufgehoben werden, sondern es wird nur die Größe der Abweichungen erhöht oder vermindert. Das bleibt natürlich nicht ohne Einfluß dort, wo wir uns der dreifachen mittleren Abweichung $3\,\sigma$ zur Ermittlung der Zufallsfehlergrenzen bedienen. Ist die Streuung der Wirklichkeit kleiner, so verschlägt das nichts. Wir haben dann in $\pm\,3\,\sigma_0$ eine Höchstgrenze der Zufallsabweichungen. Ist die Streuung der Wirklichkeit dagegen größer, dann werden die durch $\pm\,3\,\sigma_0$ bestimmten Zufallsgrenzen unzuverlässig, da die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Überschreitens größer ist als 3 auf 1000. Wir müssen daher in einem solchen Falle, der bei Ausschaltung der Streuung der Grundwahrscheinlichkeit nur durch positive Verbundenheit erzeugt werden kann, wohl aufmerken müssen, gegebenenfalls durch Nachbildung der Wirklichkeit im Serienexperiment die Größe des im besonderen Falle vorliegenden σ zu ermitteln suchen. Keinesfalls ist aber dieser eine Fall geeignet, die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahl zu widerlegen oder das Vertrauen in die Anwendbarkeit der Zufallsgrenzen $\pm\,3\,\sigma_0$ zu erschüttern.

β) *Die „zufälligen" Erhebungs- und Bearbeitungsfehler.* Eine weitere Bemerkung zum Gesetz der großen Zahl ist noch in folgender Richtung zu machen. Die bei der Bearbeitung vorkommenden Aufnahme-, Rechen-, Schreib- usw. Fehler haben im allgemeinen hinsichtlich ihrer Richtung die gleiche Eigenschaft wie die zufälligen Abweichungen der Glücksspiele, dagegen natürlich nicht hinsichtlich ihrer Größe. Das Gesetz der großen Zahl wird in einem erweiterten, uneigentlichen Sinn im allgemeinen auch bei solchen Abweichungen, soweit sie nicht vereinzelt und mit großen Abweichungsbeträgen auftreten, als wirksam angenommen werden können.

γ) *Die systematischen Erhebungs- und Bearbeitungsfehler.* Nicht das gleiche gilt hinsichtlich der systematischen Erhebungs- und Bearbeitungsfehler. Besteht z. B. in einem Staate die Neigung, bei der Volkszählung die Zahl der Minderheiten als geringer erscheinen zu lassen, als sie in Wirklichkeit ist, oder besteht — wie sehr häufig — bei den Einkommenssteuerträgern die Neigung, ihr Einkommen geringer anzugeben, als es ist — so tritt zu den wesentlichen Ursachen, die die wahre Nationalitätenverteilung, die wahre Einkommensverteilung bestimmen, noch eine wesentliche Ursache hinzu, die diese wahre Wesensform entstellt. Diese neue Wesensursache geht mit ein in die Wesensform, wie sie sich dem Statistiker in der Wirklichkeit darbietet, wenn das Gesetz der großen Zahl wirksam geworden ist. Dafür, daß der Statistiker nicht die wahre Wesensform, sondern eine entstellte dargereicht erhält, ist natürlich nicht das Gesetz der großen Zahl verantwortlich zu machen. Es ist eine spätere Aufgabe, die durch den systematischen Fehler entstellte Wesensform auf die wahre Wesensform zurückzuführen. Diese Aufgabe kann jedoch nicht immer mit den Mitteln der Statistik, sondern oft nur mit denjenigen des jeweils behandelten Stoffgebietes gelöst werden.

δ) *Die Streuung der Grundzahlen* (*„absoluten Zahlen“*). Auch die Grundzahlen, die unmittelbar den Umfang der betrachteten Masse ausdrücken, z. B. die Zahlen der Eheschließungen, der Spareinlagen, der Verbrechen, unterliegen der Streuung, wie wir aus den monatlichen Schwankungen bei ihrer zeitlichen Nebeneinanderreihung erkennen können. Bleibt dabei der den Umfang der Masse bestimmende Ursachenkreis unverändert, so werden etwa auftretende Schwankungen ohne Zweifel als zufällig anzusehen sein. Ändert sich der Ursachenkreis, so ergibt sich naturgemäß eine wesentliche Änderung des Massenumfanges, wobei aber das Mitvorhandensein einer zufälligen Schwankung nicht ausgeschlossen ist.

Die Mehrzahl der Erscheinungen der menschlichen Umwelt ist einem Wesenswandel unterworfen, weshalb wir nur selten in die Lage kommen, die Zufallsstreuung an einer zeitlichen Reihe absoluter Zahlen mit im allgemeinen unveränderter Höhe zu beobachten. Wir müssen uns hier in der Regel entweder mit einer Reihe von Größen veränderlicher Wesensform behelfen, in der wir durch Ausgleichung die Wirkung der wesentlichen Änderung von derjenigen der zufälligen Schwankungen trennen (vgl. unten Abschnitt II, 4a), oder wir müssen uns bemühen, in einem Experiment die gewünschten Voraussetzungen zu schaffen, obzwar auch hier Fehlerquellen sich einschleichen können, die nicht leicht vorauszusehen sind.

So könnte es scheinen, daß man, wenn man 1000 mal eine Handvoll Lotterienummern aus dem Nummernbeutel (mit einem entsprechend großen Inhalt) mit nachherigem Zurücklegen der Nummern zieht, zu einer Häufigkeitsanordnung der gezogenen Erfolge gelangen müßte, die der symmetrischen Anordnung der zufälligen Fehler vollkommen entspräche. Denn das Greifen mit der ausgestreckten Hand bietet durch das gleichzeitige Zusammenwirken von fünf greifenden Fingern die Wahrscheinlichkeit des Zusammenwirkens zahlreicher Fehlerquellen mit verhältnismäßig geringen Wirkungen. In Wirklichkeit führte ein vom Verfasser durchgeführter Versuch von 1000 solchen Ziehungen nicht zu einer ganz symmetrischen, sondern zu einer etwas nach rechts verschobenen, also etwas unsymmetrischen Häufigkeitskurve. Die Untersuchung der Ziehungserfolge ergab, daß, in den einzelnen Ziehungserfolgen durch die zufälligen Schwankungen überdeckt, in den Durchschnitten über mehrere aufeinanderfolgende Ziehungen aber deutlich hervortretend, ein allmähliches Wachsen der Ziehungserfolge festzustellen war, offenbar hervorgerufen durch die mit der Übung wachsende Geschicklichkeit der Hand, immer mehr Nummern zu fassen. Es hatte sich also in dem Kreis der wesentlichen Ursachen, zu denen hier außer der Größe des Beutels, der Zahl und Art der darin enthaltenen Nummern und der Größe der greifenden Hand auch deren Geschicklichkeit gehörte, die letztere Komponente verschoben. Immerhin kann der Erfolg des Experimentes als eine Bestätigung der Erwartung angesehen werden, da wir den Grund der Abweichung von der symmetrischen Fehlerkurve erkannt haben. Wenn das Experiment in anderer Form durchgeführt würde, indem an Stelle der verschieden greifenden Hand etwa ein Gefäß gesetzt würde, mit dem aus dem Beutel in stets gleichbleibender Weise geschöpft würde, dürfte eine größere Stetigkeit der Voraussetzungen geschaffen werden. Allerdings dürfte man dann nicht Lotterienummern schöpfen, sondern etwa Schrotkörner, um die Vielheit der kleinen Ursachen, die zu der Wirkung der wesentlichen Ursachen noch die Zufallswirkung hinzufügen sollen, zu gewährleisten.

Desgleichen können wir folgende kleine Erhebung, die der Verfasser in der Wiener Stadtbahn angestellt hat, trotz der kleinen Zahl und der dadurch bedingten Unebenheiten als ganz lehrreich ansehen. Der Verfasser merkte an 29 aufeinanderfolgenden Werktagen die Zahl der bereits im Wagen befindlichen und die der zusteigenden Fahrgäste des Triebwagens eines zu einer bestimmten Morgenstunde in der Haltestelle Ober-St. Veit einfahrenden Wiener Stadtbahnzuges vor. Die an der Wende von Winter und Frühling begonnenen Aufzeichnungen mußten leider bald abgebrochen werden, da das Längerwerden der Tage eine andere Tageseinteilung der Fahrgäste, damit auch eine Verschiebung in dem bis dahin offenbar stetigen Ursachenkreis befürchten ließ. Das Ergebnis dieser Aufzeichnungen ist in dem nebenstehenden kleinen Tabellchen niedergelegt.

Zahl der Fahrgäste	Häufigkeit des Vorkommens der links ausgewiesenen Zahlen	
	1. für die bereits im Wagen Befindlichen	2. für die Zugestiegenen
5	3	4
6	3	3
7	2	2
8	6	4
9	5	9
10	2	5
11	4	1
12	1	—
13	2	—
14	1	1

Das Tabellchen ist z. B. in der Spalte 1 zu lesen: Die Zahl von 5 Fahrgästen wurde unter den 29 gemachten Beobachtungen 3mal angetroffen, die Zahl von 6 auch 3mal, die von 7 2mal usw. Trotz der anscheinenden Ungleichmäßigkeit dieser Häufigkeitsreihe wird der Kenner eine Hebung der Fälle in der Nähe des arithmetischen Durchschnittes von 8,8 Personen beobachten. Dies wird noch deutlicher, wenn wir die Häufigkeitszahlen in Obergruppen (vgl. unten Abschnitt II, 13b) zusammenfassen. (S. nebenstehende Tabelle).

Zahl der angetroffenen Fahrgäste	Häufigkeit des Vorkommens
5—7 Personen . . .	8
8—10 „ . . .	13
11—13 „ . . .	7
14 „ . . .	1

In dieser Zusammenfassung tritt die symmetrische Anordnung der Fälle deutlicher hervor. Eine ähnliche Zusammenfassung der zweiten Reihe der zusteigenden Personen, bei der wir aber, da der arithmetische Durchschnitt bei 8,2 Personen liegt, die Zahl 8 (nicht wie oben die Zahl 9) in die Mitte nehmen müssen, ergibt die nebenstehende Anordnung.

Zahl der zugestiegenen Fahrgäste	Häufigkeit des Vorkommens
5 od. 6 Personen . . .	7
7—9 „ . . .	15
10—12 „ . . .	6
14 „ . . .	1

Wenn wir, um auf größere Zahlen zu kommen, die Abweichungen vom arithmetischen Mittel beider Beobachtungsreihen zusammenfassen, was zwar wegen des kleinen Abstandes der beiden arithmetischen Mittel (0,6) nicht ganz korrekt, aber für eine rohe Betrachtung doch zulässig ist, so gelangen wir zur folgenden Zusammenstellung:

Größe der Abweichung vom arithmetischen Mittel (ohne Hinblick auf das Vorzeichen)	Zahl der Abweichungen	
	nach unserer tatsächlichen Beobachtung	nach der theoretischen Erwartung
bis 1 Person	24	20,7
über 1 „ 2 Personen	11	16,0
„ 2 „ 3 „	11	11,8
„ 3 „ 4 „	8	4,5
„ 4 „ 5 „	2	3,9
„ 5 „ 6 „	2	0,9

Wir haben hier neben unsere beobachteten Zahlen diejenigen gestellt, die wir nach der Theorie der zufälligen Messungsfehler zu erwarten hätten (vgl. dazu Abschnitt II, 10b und c). Die Annäherung der wirklich beobachteten an die theoretisch erwartungsmäßigen Abweichungen ist so groß, als wir sie bei 58 Beobachtungen überhaupt erwarten können. Jedenfalls geht aus den Zahlen — wie schon aus der obigen Bildung von Gruppen — der Typus der Beobachtungsreihe als einer dem Fehlerstreuungsgesetz unterliegenden deutlich hervor.

Es zeigt sich somit, daß eine statistische Masse auch nach ihrem äußeren Umfange nichts Endgültiges, Feststehendes ist, sondern daß sie, auch wenn der ihren äußeren Umfang bestimmende Ursachenkomplex stetig ist, das Gesetz der Streuung zufälliger Fehler befolgt. Wollten wir also die wahre, schwankungsbefreite Größe der Erscheinung ermitteln, so müßte uns immer eine größere Anzahl von zeitlich aufeinanderfolgenden Beobachtungen über die gleiche statistische Masse zur Verfügung stehen, aus denen wir den arithmetischen Durchschnitt als die vermutliche wahre Größe der Erscheinung ermitteln würden. Durch den Nachweis des Zufallscharakters der Abweichungen ist auch hinsichtlich dieser Abweichungen das Gelten des Gesetzes der großen Zahl erwiesen. Ganz ähnlich, wie in der zeitlichen Längsrichtung unserer beiden Beispiele die zufälligen Abweichungen einander aufheben und, im zeitlichen Durchschnitte, zu einer der Wesensform der Größe der Masse besser angenäherten Zahl führen, so müssen wir uns auch das Wirken der Abweichungen der Teilmassen einer Gesamtmasse bei ihrer Aufsummierung zur Gesamtmasse vorstellen. Es zeigt sich somit, daß das Experiment der Zerlegung einer Masse in zufallsbestimmte Teile auch hinsichtlich des Massenumfanges durchführbar ist und daß die Aufsummierung der Teilmassen zu einem ähnlichen Ergebnis in der Gesamtmasse führen muß wie oben: daß nämlich kleine Massen auch hinsichtlich ihres Umfanges den zufälligen Schwankungen in stärkerem Maße ausgesetzt sind als große. Beispiel: Eine Fabrik hätte eine Anzahl grundsätzlich gleich großer Abteilungen, deren Arbeiterzahl von den gleichen Ursachenkreisen bestimmt würde. Die zufälligen Schwankungen der Arbeiterzahl der einzelnen Abteilungen werden verhältnismäßig stärker sein als diejenigen der Gesamtarbeiterzahl der Fabrik.

Wir haben also ein ganz allgemeines Gesetz der großen Zahl, das nicht nur für die in Wahrscheinlichkeiten und anderen Maßzahlen ausgedrückten Eigenschaften, sondern auch für den Umfang der statistischen Massen in ganz allgemeiner Weise gilt.

ε) Das Gesetz der großen Zahl und der freie Wille. Nicht selten in der deutschen Literatur begegnen wir dem Einwand, daß die Geltung des Gesetzes der großen Zahl und die Anwendbarkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Denkformen in der Statistik überhaupt nur dort zugegeben werden könne, wo es sich um Tatbestände handle, die der menschlichen Willkür entzogen seien. Wo aber die menschliche Willkür auf die Tatbestände einen Einfluß nehme, sei die Anwendbarkeit wahrscheinlichkeitstheoretischen Denkens ausgeschlossen.

Diese Auffassung beruht auf einer vollständigen Verkennung der Rolle, die das wahrscheinlichkeitstheoretische Denken in der Statistik spielt. Es liegt darin in keiner Weise etwa die Einschmuggelung einer deterministischen Auffassung von der menschlichen Willensfreiheit, sondern eine rein formale Art, die Massenerscheinungen überhaupt, auch diejenigen der menschlichen Gesellschaft, zu verstehen. Das Gesetz der großen Zahl in seiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Fassung besagt nur, daß an den statistischen Massen neben allgemeinen ausschlaggebenden Ursachen auch individuelle Einflüsse wirksam werden, die die Wirkung der ersteren in kleinen Zahlen entstellen. Über die Art dieser wesentlichen Ursachen maßt sich die Statistik selbst kein Urteil an, sondern überläßt das der zuständigen Stoffwissenschaft. Natürlich wird diese, wo ein menschliches Handeln auf die zu erfassende Tatsache nach Art der erwähnten allgemeinen, ausschlaggebenden Ursachen einen Einfluß nimmt, dieses menschliche Handeln als zu den wesentlichen

Ursachen gehörig, also die Wesensform der Erscheinung ganz oder mitbestimmend, betrachten müssen. Die Frage der Freiheit oder Unfreiheit des menschlichen Willens wird dabei überhaupt nicht gestellt.

Das Gesetz der großen Zahl ist also zunächst eine Erfahrungstatsache; seine wahrscheinlichkeitstheoretische Erklärung ist eine formale Theorie und ein Stück der statistischen Theorie überhaupt; seine praktische Anwendung ein Teil der statistischen Verfahrenslehre.

4. Die Lexissche Dispersionstheorie[1].

a) Das formale Verfahren. Wir haben im vorausgehenden (S. 33) erkannt, daß die Zufallsstreuung der Glücksspiele nur ein Sonderfall der Streuung überhaupt ist, und zwar ein an strengere Bedingungen gebundener Sonderfall. Es ist daher naheliegend, diesen in seinen Bedingungen genau umschriebenen Fall als Maß anzusehen und von ihm aus jede andere Streuung zu beurteilen. Wir waren schon oben (S. 35) in der Lage, eine gegebene Streuung mit der Glücksspielstreuung zu vergleichen. Dieser einfache Gedankengang führt zu dem Lexisschen Dispersionskoeffizienten

$$Q = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

oder auch, in der Lexisschen Ausdrucksweise, $Q = \frac{h_0}{h}$, worin h wie oben (S. 36) erwähnt worden ist, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ bedeutet. Je nachdem $Q = 1$, > 1 oder < 1, spricht Lexis von normaler, übernormaler oder unternormaler Streuung (Dispersion). Der Wert solcher Berechnungen liegt darin, für eine Vielheit von Beobachtungen nicht nur die Tatsache der Gleichheit oder Verschiedenheit der Wesensform festzustellen, sondern auch im Falle der Verschiedenheit den zahlenmäßigen Grad zu erfassen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß Q, soweit es die Änderung der Wahrscheinlichkeit von Serie zu Serie mißt, aus den auf S. 42 angeführten Gründen die „physiologische Massenkonstante" nur bei großem Serienumfang s zur Geltung bringen kann, während bei kleinem s die zufällige Komponente überwiegt, was dahin wirkt, daß wir bei kleinem s auch bei sich ändernder Serienwahrscheinlichkeit normale Dispersion antreffen können. In diesem Falle versagt also das Maß Q.

Annähernd normale Dispersion hat Lexis an folgenden Verteilungen festgestellt[2]: Geschlechtsverhältnis der Geborenen, Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen bestimmter Altersklassen, Anteil der Ehelichen unter den Totgeborenen und den Gestorbenen im Alter von 0 bis 2 Jahren, Verhältnis der Zwillingsgeburten mit Geschlechtsgleichheit zueinander.

---

[1] Lexis, W.: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena: Gustav Fischer 1903. — Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg 1877. Knapp, G. F.: Quetelet als Theoretiker, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **18**, I. F. Jena 1872. Auch in Knapp: Einführung in einige Hauptgebiete der Nationalökonomie. München: Duncker & Humblot 1925. v. Bortkiewicz, L.: Die Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik nach Lexis, in Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **27**, III. F., S. 230ff. Zizek, F.: Die statistischen Mittelwerte. Eine methodologische Untersuchung. Leipzig: Duncker & Humblot 1908. v. Bortkiewicz, L.: Homogeneität und Stabilität in der Statistik, in: Skandinavisk Aktuarie tidskrift, H. 1/2. Uppsala 1918. — Die Dispersion der Knabenquote bei Zwillingsgeburten, in: Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft **56**, H. 2 (1920). Tschuprow, Al. A.: Ist die normale Stabilität empirisch nachweisbar? in: Nordisk Statistisk Tidskrift **1**, 369ff. (1922).

[2] Lexis, W.: Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, S. 46ff. 66ff. Freiburg i. Br. 1877. — Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, S. 198ff. Jena 1903.

Beispiel:

Anteil der 166 bis 170 cm Großen unter den ärztlich untersuchten Stellungspflichtigen des Militärterritorialbezirkes Wien in den Jahren 1892 bis 1912[1].

Jahr	Gesamtzahl der Untersuchten der ersten Altersklasse	Darunter waren 166 bis 170 cm groß	Anteil der 166 bis 170 cm Großen an der Gesamtzahl der Untersuchten	Abweichung vom Durchschnitt 1882 bis 1912 λ	Quadrat der Abweichung λ^2
1	2	3	4	5	6
1892	27259	7871	0,289	− 0,008	0,000064
1893	27861	8280	0,297	0,000	0,000000
1894	30337	8842	0,291	− 0,006	0,000036
1895	31246	9017	0,289	− 0,008	0,000064
1896	30861	9202	0,298	0,001	0,000001
1897	31060	9174	0,295	− 0,002	0,000004
1898	31574	9568	0,303	0,006	0,000036
1899	32032	9488	0,296	− 0,001	0,000001
1900	33015	9478	0,287	− 0,010	0,000100
1901	31798	9652	0,304	0,007	0,000049
1902	32651	9679	0,296	− 0,001	0,000001
1903	33881	10011	0,295	− 0,002	0,000004
1904	34199	10200	0,298	− 0,001	0,000001
1905	34387	10096	0,294	− 0,003	0,000009
1906	33906	9419	0,278	− 0,019	0,000361
1907	34565	9998	0,289	− 0,008	0,000064
1908	35220	10465	0,297	0,000	0,000000
1909	34855	10793	0,310	0,013	0,000169
1910	35397	11052	0,312	0,015	0,000225
1911	34399	10627	0,309	0,012	0,000144
1912	37642	11350	0,302	0,005	0,000025
Summe	688145	204262	—	—	0,001358
Durchschnitt	32769	9727	0,297	—	—

$$p = 0{,}297\,,$$
$$q = 0{,}703\,,$$
$$s = 32769$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{pq}{s}} = \sqrt{\frac{0{,}208791}{32769}} = \sqrt{0{,}0000063716} = 0{,}002524\,.$$

$$\Sigma\lambda^2 = 0{,}001358\,,$$
$$n = 21$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\lambda^2}{n-1}}\,{}^{2} = \sqrt{0{,}00006790} = 0{,}008240\,,$$

$$Q = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{0{,}008240}{0{,}002524} = 3{,}26\,.$$

Die Dispersion ist übernormal, was wir nicht ohne weiteres unseren ziemlich schwankenden Zahlen entnehmen konnten. Die Erklärung finden wir, durch diesen Hinweis aufmerksam gemacht, in dem durch die zufälligen Schwankungen überdeckten langsamen Wachsen des Anteils der 166 bis 170 cm Großen, zusammenhängend mit dem auch im Deutschen Reiche beobachteten

Durchschnitt der Jahre	Anteil der 166 bis 170 cm Großen
1892—1898	0,295
1899—1905	0,296
1906—1912	0,300

[1] Quelle: Militärstatistische Jahrbücher, Jahrgänge 1892 bis 1912. Wien.
[2] Vgl. Fußnote [1] auf S. 34.

Wachsen der Bevölkerung. Befreien wir unsere Zahl durch Zusammenfassung von den zufälligen Schwankungen, so tritt diese wesentliche Verschiebung deutlich hervor (s. Tab. S. 52 unten).

Aufgabe 5. Die folgende Reihe der im ersten Lebensjahr ehelich Gestorbenen im Deutschen Reich, 1901 bis 1914[1], ist auf ihre Dispersion hin zu untersuchen.

Jahr	Insgesamt	darunter ehelich	Jahr	Insgesamt	darunter ehelich
1901	420223	361745	1908	359022	308680
1902	370799	321055	1909	335430	288202
1903	404523	351086	1910	311458	267171
1904	397781	344972	1911	359522	308765
1905	407997	353342	1912	275571	234544
1906	374636	324592	1913	277196	235272
1907	351046	302920	1914	297382	252844

b) Die statistische Beständigkeit, Gesetzmäßigkeit, Regelmäßigkeit[2]. Das formale Verfahren der Streuungsforschung ist von Lexis nahezu ausschließlich in den Dienst des Studiums zeitlicher Beständigkeit statistischer Tatbestände gestellt worden, d. h. des Studiums, ob sich die Wesensursachen statistischer Tatbestände im Laufe der Jahre als beständig erwiesen oder nicht. Lexis und seine Schüler untersuchten so eine Reihe von statistischen Wahrscheinlichkeiten und gelangten dabei zu der Erkenntnis, daß zeitliche Beständigkeit statistischer Wahrscheinlichkeiten die Ausnahme, die Änderung dagegen die Regel bildet. Daß die Lexisschen Forschungen diese Richtung nahmen, ist geschichtlich vollständig verständlich. Kurz vor Lexis war Quetelet mit seinen aufsehenerregenden Behauptungen einer physique sociale, der Naturgesetzmäßigkeit der gesellschaftlichen Massenerscheinungen auf den Gebieten körperlicher, geistiger und seelischer Eigenschaften des Menschen, aufgetreten. Darin lag die Annahme der Beständigkeit aller gesellschaftlichen Massenerscheinungen. Es ist bekannt, daß Quetelet als einer der ersten wahrscheinlichkeitstheoretische Erwägungen auf dem Gebiete der Statistik angestellt hat und daß er sich, von einigen Anfangserfolgen auf dem Gebiete der Anthropologie bestimmt, zu einer phantastischen Verallgemeinerung der dort gewonnenen Erkenntnisse verführen ließ. Die Zeit unmittelbar vor Lexis' ersten Untersuchungen zu diesem Gegenstand stand ganz unter dem Einflusse Quetelets (vgl. A. Wagner, G. v. Mayr u. a.). Es ist das außerordentliche Verdienst Lexis', Quetelets Anschauungen gründlich und wissenschaftlich einwandfrei widerlegt und eine der Wirklichkeit entsprechende Theorie des Zeitverhältnisses der gesellschaftlichen Massenerscheinungen aufgestellt zu haben. Die Widerlegung der Annahme einer absoluten Beständigkeit der allermeisten gesellschaftlichen Erscheinungen schließt natürlich nicht aus, daß es eine verhältnismäßige Beständigkeit in allen biologischen und sozialen Erscheinungen des menschlichen Lebens gibt. Der Stamm der Bevölkerung bleibt im wesentlichen von Jahr zu Jahr gleich und ändert sich nur allmählich durch Geburten, Sterbefälle und Wanderungen. Die Kinder übernehmen die Rechtsordnung, die Sitten und Anschauungen ihrer Väter, so daß gesellschaftliche Änderungen im allgemeinen nur ganz allmählich sich entwickeln (Ausnahme: Kriege, Revolutionen).

[1] Quelle: Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs **16**, I, S. 158 (1907); **17** I, S. 124 (1908); Statistik des Deutschen Reichs **223**, 35*; **236**, 33*; **275**, 75*; **276**, LXV.

[2] Quetelet, A.: Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale, 2 Bde. Paris 1835. Deutsch von Dorn, **19** u. **20** der Sammlung sozialwissenschaftlicher Meister. Jena 1914 u. 1921. Wagner, A.: Die Gesetzmäßigkeit in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen. Hamburg 1864. Rümelin, G.: Über den Begriff eines sozialen Gesetzes, 1867, in Reden und Aufsätze, 1. Freiburg u. Tübingen 1875. v. Mayr, G.: Die Gesetzmäßigkeit im Gesellschaftsleben. München 1877. Lexis, W.: Artikel „Gesetz (im gesellschaftlichen und statistischen Sinne)", im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl. Gumbel, J.: Vom Sinne statistischer Gesetze, in Dtsch. St. Zentralblatt **1922**.

Auf diese verhältnismäßige biologische und soziale Beständigkeit der Bevölkerung hat LEXIS mit Nachdruck hingewiesen und sie der von QUETELET angenommenen absoluten, naturgesetzmäßigen gegenübergestellt. Für die praktische Statistik ist diese Eigenschaft der Bevölkerung besonders wichtig, da durch sie jede statistische Zahl, die sich wegen der Dauer der statistischen Aufarbeitung ja immer nur auf einen zurückliegenden Zeitpunkt beziehen kann, auch für die Gegenwart und nahe Zukunft Sinn und Wert erhält.

Mit dieser verhältnismäßigen zeitlichen Beständigkeit, die wir im allgemeinen an allen statistischen Entwicklungen beobachten, ist nicht zu verwechseln die Regelmäßigkeit der statistischen Formen, die sich bei der Darstellung sachlicher statistischer Reihen (siehe dort) vielfach ergibt. Ihrer ist auch hier Erwähnung zu tun, einmal, weil solche Regelmäßigkeiten, wie oben auf S. 26 gezeigt, erst durch das Gesetz der großen Zahl zum Vorschein kommen, dann, weil der Begriff „Regelmäßigkeit" in der Statistik vielfach mit demjenigen der Beständigkeit verwechselt wird und dieser wieder, infolge einer Verwechslung der Lexisschen Streuungsuntersuchungen an zeitlichen Reihen mit dem Tatbestande des Gesetzes der großen Zahl, mit diesem Gesetze in Verbindung gebracht wird. Wir haben zwei Dinge streng zu unterscheiden:

1. den Tatbestand des Gesetzes der großen Zahl, durch den die Wesensform der Erscheinungen klargelegt wird. Diese Wesensform kann bei zahlenmäßigen Merkmalen eine regelmäßige Gestalt haben (Beispiel der Körpergrößenverteilung, der Altersgliederung der Heiratenden, der Einkommensverteilung usw.), muß es aber nicht (Beispiel der artmäßigen Merkmale, z. B. Geschlechtsgliederung der Geborenen, Konfessionsgliederung der Bevölkerung, u. dgl.);

2. durch die Lexisschen Streuungsuntersuchungen an zeitlichen Reihen hat sich gezeigt, daß zeitliche Beständigkeit der Wesensform ein seltener Ausnahmefall, Veränderung die Regel ist. Diese Veränderung geht aber meistens nur langsam vor sich („verhältnismäßige biologische und soziale Beständigkeit der Bevölkerung".)

c) Das „Gesetz der kleinen Zahlen". Die Glieder der Binomalverteilung $(p + q)^s$ nehmen, wenn die Seriengröße s sehr groß, die Ereigniswahrscheinlichkeit p sehr klein wird, die Gestalt an $w_x = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$, worin w_x die Wahrscheinlichkeit des Erfolges x, m das Produkt sp (dem empirisch das arithmetische Mittel der Beobachtungen nahekommt) und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet[1]. v. BORTKIEWICZ hat für die verschiedenen m von 0,1 bis 10,0 Tafeln der w_x berechnet und gezeigt, daß die hier in Betracht kommenden seltenen Ereignisse (Selbstmorde von Kindern, Selbstmorde in kleinen Staaten, tödliche Unfälle u. dgl.) eine nahe Anpassung an die Erwartung nach der genannten Formel zeigen, also eine normale Streuung aufweisen[2]. v. BORTKIEWICZ erklärt diese auffallende Erscheinung unter Beziehung auf die auf S. 42 erwähnte Tatsache damit, daß in den kleinen Ereignissen eine Beschränkung des Beobachtungsfeldes wirksam geworden sei. Diese Erklärung wie auch andere Punkte der v. Bortkiewiczschen Darstellung sind Gegenstand weitreichender Auseinandersetzungen gewesen[3]. Auch uns scheint die Erklärung der Erscheinung nicht stichhaltig zu sein; denn die auf S. 42 erwähnte Tatsache bezieht sich auf die Größe des Serienumfang es s, nicht diejenige der Ereignis-

[1] POISSON: Recherches sur la probabilité des jugements, Nr 81, S. 205—207. Paris 1837.
[2] Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig 1898.
[3] WHITTAKER, LUCY: On the Poisson Law of Small Numbers, Biometrika **10**, 36ff. (1914/15). v. BORTKIEWICZ, L.: Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik. Allg. stat. Archiv **9**, 225ff. (1915). GINI, C.: La legge dei piccoli numeri, Giornale degli Economisti **35**, 758ff. (1907/2). — La Regolarità dei fenomeni rari. ebda. **36**, 207ff. (1908). BRESCIANI, C.: A proposito della „legge dei piccoli numeri". ebda. **36**, 357 (1908). v. BORTKIEWICZ, L.: La legge dei piccoli numeri. Chiarimenti. ebda. **37**, 415ff. (1908). GINI, C.: Su la legge dei piccoli numeri e la regolarità dei fenomeni rari. ebda. **37**, 649ff. (1908).

zahl E. Wir sind eher der Meinung, daß die Erklärung des Gesetzes der kleinen Zahlen mit einer anderen, gleichfalls von v. BORTKIEWICZ aufgezeigten Tatsache[1] zusammenhänge: daß in einem ungleichartig zusammengesetzten Ganzen die Streuung kleiner ausfalle, als wir sie nach der Formel über die Streuung bei schwankender Grundwahrscheinlichkeit ($\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_p^2}$, S. 42) erwarten sollten, daß also die Streuung eines (immer weniger gleichartig gefügten) Ganzen verhältnismäßig kleiner sei als die seiner Teile. Es hat den Anschein, als ob die vorausgesetzte sehr große Zahl bei sehr weitem Beobachtungsfeld infolge der darin vereinigten Ungleichartigkeiten auf die Streuung ausgleichend wirke. Es wäre also nicht die Enge des Beobachtungsfeldes in den Ereigniszahlen, sondern gerade die Weite des Beobachtungsfeldes in den Serienzahlen dasjenige, was die Streuung verkleinerte. Wir hätten dann ein Gegenstück zu der auf S. 42 erwähnten Erscheinung und es würde sich eine verminderte Zuverlässigkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtung nicht nur bei einer kleinen Beobachtungszahl s, sondern auch bei einer sehr großen Beobachtungszahl s bei gleichzeitig sehr kleiner Ereigniszahl (sehr kleinem p) ergeben.

Auch die Bezeichnung „Gesetz der kleinen Zahlen" ist auf Widerspruch gestoßen. Sie scheint in der Tat nicht ganz glücklich gewählt zu sein, da sie eine Beziehung zum Gesetz der großen Zahl nahelegt, die leicht irreführend wirken kann (z. B. „Das Gesetz der kleinen Zahlen ist das Gesetz der großen Zahlen in seiner Anwendung auf kleine Zahlen", BLEICHER). In Wirklichkeit betrifft das Gesetz der großen Zahl den Serienumfang s, das Gesetz der kleinen Zahl die Ereigniszahl E, ferner ist das Gesetz der großen Zahl schon in jeder einzelnen Beobachtungsserie wirksam, während das Gesetz der kleinen Zahlen eine örtliche oder zeitliche Aneinanderreihung von Beobachtungsserien voraussetzt. Es ist eine Weiterführung der Lexisschen Streuungsforschung an zeitlichen Reihen oder örtlichen Zusammenstellungen und darf ebenso wie diese nicht mit dem davon klar gesonderten Tatbestande des Gesetzes der großen Zahl verwechselt werden.

5. Einige weitere Folgerungen aus der Streuung der statistischen Masse.

a) Der Durchschnittscharakter aller statistischen Aussagen[2]. Im Schoße jeder statistischen Masse sehen wir Wesens- und Zufallsstreuung geborgen, mögen sie durch die Ausgliederung nach einem Wesensmerkmale oder Serienbildung sichtbar werden oder nicht. Aber auch dort, wo sie in der bezeichneten Weise sichtbar werden, tragen die Teilmassen oder Serien meistens weitere (latente) Wesensstreuung nach anderen nicht durchgeführten Gliederungsmerkmalen und immer weitere (latente) Zufallsstreuung nach kleineren Serien in sich. Daraus folgt, daß jede Aussage über den inneren Aufbau und andere Eigenschaften einer statistischen Masse Durchschnittscharakter besitzt. Wenn wir z. B. bei der oben herangezogenen Statistik der weiblichen Hörer festgestellt hätten, daß unter A Hörern einer Universität a weibliche seien, also auf je 100 Hörer überhaupt $\frac{100\,a}{A}$ weibliche entfielen, so wird diese Aussage ohne Zweifel einen Durchschnitt nach der Seite der Wesensstreuung feststellen; denn wir werden sicherlich, wenn wir die Masse der Hörer nach Fakultäten, nach der Staatsangehörigkeit, Nationalität, Konfession, dem Berufe der Väter usw. zergliedern, innerhalb dieser Teilmassen zu recht beträchtlichen Abweichungen

[1] Homogenität und Stabilität in der Statistik. Skandinavisk Aktuarietidskrift **1918**, H. 1/2.

[2] EPPSTEIN, P., Die Durchschnittsfiktion. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **76**, III. F. (1929). Vgl. ferner die im nächsten Abschnitt über den statistischen Vergleich angegebenen Schriften.

der Anteile der weiblichen Hörer von demjenigen der Gesamtmasse, also zu einer Wesensstreuung kommen, woraus der Durchschnittscharakter des genannten Anteiles klar ersichtlich ist. Da gleichzeitig im Schoße der gesamten Masse, wenn wir Serienzüge einer bestimmten Größe, z. B. von je 200, oder 100 oder 50 Hörern anstellen wollten, nach den vorausgegangenen Feststellungen auch eine Zufallsstreuung eintreten müßte, so erkennen wir, daß auch von dieser Seite her der obige Gesamtausdruck $\frac{100\,a}{A}$ nur ein Durchschnitt sein kann. Deshalb ist es notwendig und üblich, jeder ähnlichen Anteilsberechnung auf 100, 1000 usw. das Wörtlein „durchschnittlich" beizufügen, also z. B. auf je 100 (oder 1000 usw.) Hörer der Universität, der Fakultät, der Staatsangehörigkeit, der Nationalität, der Konfession usw. entfielen durchschnittlich ... weibliche Hörer.

Aus diesem Durchschnittscharakter jeder statistischen Aussage folgen nun einige wichtige Feststellungen für das statistische Denken: Ist jede statistische Aussage eine Aussage über den Durchschnitt, dann ergibt sich die Frage, ob eine solche Aussage denn überhaupt einen Wert besitzt, da ja ein Durchschnitt nur etwas Gedachtes, nicht etwas Wirkliches sei. Die Beantwortung wird sich der Natur der Sache gemäß in zwei Antworten teilen müssen; die Beurteilung des Durchschnittscharakters aus der Wesensstreuung und aus der Zufallsstreuung. In der ersten Beziehung leuchtet es ohne weiteres ein, daß jede Durchschnittsaussage um so mehr an Wert verliert, je weniger gleichartig die Masse ist. Eine durchschnittliche Aussage über das Frauenstudium einer ganzen Universität hat schon darum einen geminderten Wert, weil hier neben Fakultäten mit weiblichen Hörern solche stehen können, an denen es überhaupt keine weiblichen Hörer gibt, die obige Maßzahl also, als Wahrscheinlichkeit gedeutet, jeden Sinn verliert, weil diese Wahrscheinlichkeit für die Fakultäten, an denen das Frauenstudium nicht zugelassen ist, nicht einmal zu einer Unwahrscheinlichkeit, sondern zur negativen Gewißheit wird. Will man dem Wesen des Frauenstudiums näher kommen, so muß man es mindestens nach Fakultäten betrachten, aber wenn möglich noch in vielen weiteren Ausgliederungen, die dafür von Bedeutung sein können. Die Lehre, die wir daraus zu ziehen haben, gipfelt in der Forderung, statistische Massen bei Betrachtung ihrer Eigenschaften wenn irgend möglich nach allen für diese Eigenschaften maßgebenden, „wesentlichen" Gesichtspunkten in ihre Teile aufzulösen und dann erst die Betrachtung der Eigenschaft durchzuführen. Können wir aber aus irgendwelchen praktischen Gründen dieser theoretischen Forderung nicht genügen, so bleibt der Durchschnittscharakter aus der unaufgelösten (latenten) Wesensstreuung eine Fehlerquelle unserer Erkenntnis, sowohl bei der Betrachtung dieser Masse an sich als auch bei ihrem Vergleiche mit anderen Massen (siehe darüber auch Abschnitt b).

In ganz anderer Weise ist der Durchschnittscharakter der statistischen Aussage aus der Zufallsstreuung zu beurteilen. Aus den oben dargestellten Eigenschaften dieser Streuung ergibt sich, daß die Wesensform der Masseneigenschaft, die wir erkennen wollen, in diesem Durchschnitt reiner auftritt als in irgendeiner der gestreuten Teilserien, und zwar um so reiner, je größer die Beobachtungszahl ist. Es tritt also hier die Massenaussage als etwas durchaus Arteigenes, Neues in einen Gegensatz zur Einzelaussage. Die statistische Aussage gewinnt also erst durch diesen ihren Durchschnittscharakter Sinn und Wert.

Aus dem Vorausgegangenen wird es verständlich, wenn der Verfasser an anderer Stelle[1] die Forderungen nach der Gleichartigkeit und der großen Zahl als die Grundpfeiler der Statistik bezeichnet hat; denn zielt die erste dahin, die Trübung statistischer Aussagen durch die Schlacken fremder Beimischungen zu reinigen, so zielt die zweite dahin, die so bereinigte Aussage auch dem Wirken der Zufalls-

[1] Statistik: a. a. O., S. 4.

schwankungen möglichst zu entziehen und in eine erträgliche Nähe zu der hinter der statistischen Beobachtung stehenden, uns unbekannt bleibenden Wirklichkeit zu bringen.

Die statistische Praxis kann diese beiden Grundforderungen der Statistik meist nicht restlos erfüllen. Wenn z. B. bei der Anlage von Sterbetafeln in der Regel nur eine Zergliederung nach dem Alter und Geschlecht, nicht aber nach dem Berufe, der sozialen Stellung, dem Wohlstande, der Konstitution usw. vorgenommen wird, oder wenn in Fruchtbarkeitstafeln nicht die unfruchtbaren Frauen ausgeschieden werden, usw., so unterbleibt dies einfach aus dem Grunde, weil allgemeine statistische Erhebungen auf solche Verfeinerungen des Stoffes meistens nicht eingehen können. Desgleichen ist die Größe der Zahlen durch die Größe des zur Verfügung stehenden statistischen Machtbereiches gegeben. Kleine Staaten, wie z. B. Liechtenstein oder Monaco, können in ihren Statistiken naturgemäß nur kleine Zahlen aufweisen.

In den Rahmen der vorliegenden Betrachtung fällt auch die Prüfung des bekannten Vorwurfes, den G. Rümelin an die Adresse der statistischen Wahrscheinlichkeit gerichtet hat[1]: „Wenn mir die Statistik sagt, daß ich im Laufe des nächsten Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 zu 49 sterben, mit einer noch größeren Wahrscheinlichkeit schmerzliche Lücken in dem Kreis mir teurer Personen zu beklagen haben werde, so muß ich mich unter den Ernst dieser Wahrheit in Demut beugen; wenn sie aber, auf ähnliche Durchschnittszahlen gestützt, mir sagen wollte, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 zu soundsoviel eine Handlung von mir der Gegenstand eines strafgerichtlichen Erkenntnisses sein werde, so dürfte ich ihr unbedenklich antworten: ne sutor ultra crepidam!"

Es ist lehrreich, diesen Ausspruch im Lichte der vorausgehenden Erwägungen etwas näher zu betrachten. Der Vorwurf bezieht sich offenbar auf die Durchschnittsbildung aus ungleichartigen Massen. Wenn es reine Geister gibt, die ihrer selbst absolut sicher sind, daß sie nicht nur als satte Universitätsprofessoren in ihrem wohlgeheizten, behaglichen Arbeitszimmer, sondern unter allen denkbaren Schwierigkeiten und Widrigkeiten des menschlichen Lebens sich vor Begehung einer strafbaren Handlung sicher glauben, dann ist es natürlich ein Fehler der Statistik, sie mit den übrigen Sterblichen in eine Masse zusammenzufassen. Der Fehler ließe sich aber nur hinsichtlich der Gewohnheitsverbrecher ausschalten, während allen übrigen Menschen die Größe ihrer Verbrechensneigung nicht auf der Stirn geschrieben steht, für den Statistiker daher nicht faßbar ist. Rümelin hat aber ganz übersehen, daß der gleiche Fehler auch den von ihm rühmlich genannten Sterbewahrscheinlichkeiten innewohnt, wohl nicht in dem krassen Sinne wie oben, daß eine Anzahl von Menschen der Sterbegefahr überhaupt nicht ausgesetzt wären, aber doch darin, daß ihre Sterbeaussichten nicht nur individuell, sondern auch gruppenweise verschieden sind; er hätte sonst bemerkt, daß ein Universitätsprofessor durchschnittlich zweifellos eine geringere Sterbewahrscheinlichkeit besitzt als der Durchschnitt der Altersgenossen, weil die Universitätsprofessoren in der Regel eine günstige gesundheitliche Auslese vorstellen, dazu auch noch günstigere Einkommenverhältnisse besitzen als der Durchschnitt. Trotz solchen Einwänden wird kein Staat darauf verzichten, Sterbe- oder Verbrechenswahrscheinlichkeiten zu berechnen, weil eben auch solche Durchschnitte einen gewissen Erkenntniswert besitzen.

b) Der statistische Vergleich[2]**.** Vielfach wird der statistische Vergleich als die Seele der Statistik bezeichnet. Das ist wohl übertrieben; denn auch der einzelnen statistischen Zahl kommt nach Umfang und Eigenschaften schon eine selbstständige Bedeutung zu. Unzweifelhaft spielt aber der statistische Vergleich in der

---

[1] Über den Begriff eines sozialen Gesetzes, Reden und Aufsätze, S. 25. Tübingen 1875.

[2] Zizek, F.: Fünf Hauptprobleme der statistischen Methodenlehre. München: Duncker & Humblot 1922, S. 28ff. Winkler, W.: Artikel „Gleichartigkeit, statistische" im H. d. Staatswiss., 4. Aufl., **4**, 1163ff. Flaskämper, P.: Theorie der Indexzahlen. Zugleich ein Beitrag zur Logik des statistischen Vergleiches, in: Sozialw. Forsch. I, H. 7, Berlin u. Leipzig 1928. Zizek, F.: Nicht vergleichbare statistische Zahlen, in: Schmollers Jahrbuch **53**, 1. H., S. 29ff. — Gleichartigkeit, Homogenität und Gleichwertigkeit in der Statistik, in: Allg. Statist. Archiv **18**, 393ff. (1928). — Der Begriff der Gleichartigkeit in der Statistik, in: Allg. Stat. Archiv **20**, 8ff. (1930). Flaskämper, P.: Das Problem der Gleichartigkeit in der Statistik. Zugleich eine Erwiderung (auf Zizek), in: Allg. Stat. Archiv **19**, 205ff. (1929). Schenker, O.: Zur Vergleichbarkeit statistischer Zahlen, in: Zeitschrift für schweizerische Volkswirtschaft und Statistik Jg 64, S. 21ff., 1928. Würzburger, E.: Die Verwendung homogener Gruppen in der Statistik und ihre Grenze, in: Deutsches Statistisches Zentralblatt Jg 22, 1930, Sp. 129ff.

gesamten Statistik eine große Rolle. Wir werden in ihm, wenn schon nicht die Seele, so doch eine sehr wesentliche Denkform der Statistik erblicken dürfen.

Der statistische Vergleich ist der Vergleich der statistischen Massen untereinander. Wegen der oben dargelegten Eigenart der statistischen Massen ist er von einem Vergleich der Individuen untereinander wohl zu unterscheiden.

Für den statistischen Vergleich wird zunächst die Grundvoraussetzung jedes Vergleiches vorhanden sein müssen, eine weitere oder engere Gleichartigkeit der zu vergleichenden Gegenstände (je nach Weite oder Enge des zu vergleichenden Eigenschaftsbereiches). Wir können einen Menschen mit einem anderen in allgemeiner Weise, z. B. hinsichtlich der gesamten körperlichen oder geistigen Persönlichkeit vergleichen, wir können ihn auch mit einem anderen Menschen hinsichtlich nur einer menschlichen Eigenschaft, z. B. des Fleißes, vergleichen, wir können ihn auch mit einem Tiere hinsichtlich einer gemeinsamen Eigenschaft, z. B. mit einem Vogel hinsichtlich der Sehschärfe, mit einem Wurm hinsichtlich der Bewegungsgeschwindigkeit, vergleichen. Wir werden aber schwerlich — wenigstens nicht auf dem Gebiete des logischen Denkens — einen Menschen mit dem Pythagoräischen Lehrsatz oder einen Schuhabsatz mit einem Giftmord vergleichen können. So werden wir auch für den statistischen Vergleich in erster und allgemeinster Weise eine gewisse Gleichartigkeit hinsichtlich des zu vergleichenden Tatbestandes fordern müssen. Wir können die Geburten eines Landes oder einer Zeit mit den Geburten eines anderen Landes oder einer anderen Zeit vergleichen, wir können die Geburten mit den Sterbefällen, die Ausfuhrwerte mit den Einfuhrwerten, das Wachsen der Spareinlagen mit dem Wachsen der Bevölkerung vergleichen; aber wir werden gewiß den Boden des logisch Vertretbaren verlassen, wenn wir die Bevölkerungszahl des Deutschen Reiches mit der Zahl der Sterne oder die Ausgaben der Stadt Berlin mit den Keuchhustenfällen der Stadt Wien vergleichen.

Neben den Begriff der Gleichartigkeit hat ZIZEK neuerdings den Begriff der Gleichwertigkeit der Einheiten gestellt. Die als gleichartig in eine Masse zusammengefaßten Einheiten seien deswegen noch nicht gleichwertig, weil sie sich in allen anderen Punkten als den massebildenden Bestimmungsgründen voneinander unterschieden. Um die Ungleichwertigkeit der Einheiten auszuschalten, müßten oft Umrechnungen vorgenommen werden, z. B. auf Kilogramm Lebendgewicht bei Schlachtvieh, auf Registertonnen bei Schiffen.

Der von ZIZEK eingeführte Gesichtspunkt ist sehr beachtenswert. Allerdings darf nicht übersehen werden, daß Ungleichwertigkeit überall dort in Ungleichartigkeit übergeht, wo Ungleichwertigkeit statistisch bedeutsam wird, wo z. B. die Viehzahl zweier Staaten oder die Schiffszahl zweier Handelsflotten miteinander verglichen wird. Verschiedene Zusammensetzung nach dem Lebendgewicht oder nach der Tonnenanzahl begründet dann eben Ungleichartigkeit der beiden Massen und macht den bloßen Vergleich nach der Zahl wertlos. Denn hinter dem Vergleiche zweier Massen dem Umfange nach steht die unausgesprochene Voraussetzung der qualitativen und quantitativen Gleichartigkeit der Einheiten, oder wenigstens der Gefügegleichheit der Massen, wenn sie nicht gleichartig zusammengesetzt sein sollten. Die formale Begriffsabgrenzung hat dann eben nur formal, aber nicht materiell Gleichartigkeit geschaffen und der Rückzug auf die angeführten Umrechnungen ist nichts anderes als der Rückzug von der formalen auf die materielle Gleichartigkeit der Massen.

Neben dieser „Ungleichwertigkeit“ der Einheiten gibt es auch eine Ungleichwertigkeit der Massen, wenn diesen ein verschiedenes „Gewicht“ zukommt. Näheres darüber später beim „gewogenen arithmetischen Mittel“, Abschnitt II, 8bα.

Beruht also der Vergleich statistischer Massen auf der gleichen logischen Voraussetzung wie der Vergleich von Individuen, so ist er in seinem Wesen doch von ihm grundverschieden. Das muß wohl so sein, da wir die statistischen Massen als etwas in ihrem Wesen vom Wesen der Individuen Grundverschiedenes erkannt haben. Ist der Vergleich von Individuum zum Individuum etwas Festes und Eindeutiges, so besitzt der Vergleich von statistischen Massen durch den Durchschnittscharakter der statistischen Aussagen einen weniger festen Charakter. Verhältnismäßig einwandfrei ist er nur bei solchen Massen, die durch weitgehende Stoffzergliederung auf die größte praktisch erreichbare Gleichartigkeit gebracht sind. Dann bleiben im wesentlichen nur noch die möglichen Zufallsschwankungen übrig, die auch an Bedeutung verlieren, wenn die zu vergleichenden Massen groß genug sind. Vergleichen wir aber Eigenschaften verschiedenartig zusammengesetzter Massen, z. B. den Anteil der weiblichen Hörer einer vollständigen Universität mit demjenigen einer nur aus rechtswissenschaftlicher und theologischer Fakultät bestehenden, oder die durchschnittlichen Löhne zweier Industrien, die einen verschiedenen Anteil an Frauenarbeit besitzen usw., so kommt ohne Zweifel durch diese Gefügeungleichheit der verglichenen Massen eine Fehlerquelle herein und der Vergleich wird als nicht korrekt unser Bedenken erregen. Schwere Fehlurteile können durch eine solche Nichtbeachtung einer hinter Durchschnittsaussagen (Verhältniszahlen, Durchschnitten u. a.) stehenden Ungleichartigkeit zweier verglichenen Massen hervorgerufen werden.

Das Anwendungsgebiet des statistischen Vergleiches ist groß. Wir vergleichen verschiedene gleichartige Massen in zeitlicher oder örtlicher Anordnung untereinander sowohl nach ihrem absoluten Umfang als auch nach ihren durch gewisse Maßzahlen, z. B. Verhältniszahlen, Durchschnitte, ausgedrückten Eigenschaften. Die Bildung der weiter unten zu behandelnden statistischen Reihen erfolgt ausschließlich zu Vergleichszwecken. Wir zergliedern statistische Massen einfach oder nach Merkmalsverbindungen, vergleichen die Teile untereinander oder mit den entsprechenden Teilen gleichartiger anderer Massen, usw. So ist der statistische Vergleich zwar nicht die Seele der Statistik, aber er schafft den Hintergrund, von dem sich die zu betrachtenden Tatsachen um so schärfer und plastischer abheben.

c) Die unvollständige Erhebung. Die repräsentative Darstellung[1]**.** Wir haben aus den obigen Ausführungen (S. 24ff.) erkannt, daß auch der vollständigsten Statistik nicht schon durch diese Vollständigkeit, sondern erst durch die große Zahl der Beobachtungen eine gewisse Aussagekraft zukommt. Eine Statistik über die Geschehnisse auf Robinsons Eiland würde auch bei peinlichster Wahrung der Vollständigkeit nicht Endgültiges über die hinter den Ereignissen stehende Wesensform aussagen können, da die zufälligen Schwankungen wegen der Kleinheit der Zahlen zu stark sind. Immerhin, wie groß immer die von der Statistik vollständig erfaßte Zahl sein mag, einen Vorteil hat sie immer in sich: die Sicherheit, daß bei dem zutreffenden „Serienzug" nur zufällige Abweichungen vorgekommen sind. Anders ist das, wenn die Erhebung unvollständig ist; hier tritt neben die Gefahr der zufälligen Schwankungen auch noch die eines wesentlichen Abweichens des dargebotenen Teilstückes von der Form der Gesamtmasse. Hier muß der Bearbeiter immer auf der Hut sein, ob nicht der dargebotene Teil eine Auslese nach einer bestimmten Richtung hin darstellt. Wenn wir eine allgemeine Erhebung über die materiellen Verhältnisse der Studierenden durchführen und diese unvollständig bleibt, werden unter den Befragten, die Auskunft geben, die bedürftigeren Studierenden, die sich von der Erhebung eine Besserung ihrer Lage versprechen, wahrscheinlich verhältnismäßig stärker vertreten sein als in der Gesamtmasse der Studierenden; wenn wir eine landwirtschaftliche Erhebung vornehmen und die Landwirte als Auskunftspersonen auf das Gemeindeamt vorladen, werden im Falle der Unvollständigkeit in der erzielten

[1] Kiaer: A. N.: Observations et Expériences Concernant les Dénombrements Représentatifs, in: Bull. de l'Inst. Int. de Stat. **9**, 1895, XCIII ff., 176 ff. — Sur les Méthodes Représentatives usw., ebda. **13**/1, 66ff. Graevell, W.: Die repräsentative Methode, in: Dtsch. St. Zentralblatt **1923**. Zizek, F.: Nichtkorrekte statistische Verfahren, in: Allg. Stat. Archiv **21**, 27ff. (1931).

Teilmasse vermutlich die besser gestellten Landwirte, die infolge einer vorhandenen Vertretung abkömmlich sind, stärker vertreten sein als in der Gesamtmasse; desgleichen werden offenbar bei einer Erhebung von ganzjährigen Haushaltungsrechnungen, die an den Fleiß und die Sorgfalt der Rechnungführenden große Anforderungen stellen, unter den gelieferten Rechnungen bessere Haushaltungen stärker vertreten sein als in der Gesamtmasse. So müssen wir, wenn wir von einer Masse nur eine Teilmasse erfassen konnten, immer die äußerste Sorgfalt walten lassen, daß wir keinem Irrtum anheimfallen. Wir werden, wenn es möglich ist, versuchen, aus anderen statistischen Angaben Einblicke in das Wesen der Teilmasse zu erhalten. Wir hätten z. B. eine Berufserhebung nur unvollständig durchgeführt, würden aber sowohl in der gegebenen Teilmasse als auch in der Gesamtmasse die Verteilung nach Stadt und Land, nach Nationalitäten, nach Konfessionen und ähnlichen Merkmalen kennen, die auf die Berufsverteilung einen Einfluß nehmen; dann werden wir die Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung der Teilmasse mit der Gesamtmasse nach diesen Tatbeständen prüfen und uns daraus ein annäherndes Bild über die richtige oder entstellte Darstellung der Gesamtmasse in der Teilmasse hinsichtlich des Berufes machen können. Fehlt es an solchen Behelfen, dann sind wir allein darauf angewiesen, durch bloße Überlegung über alle eine zufällige Auslese etwa störenden Bedingungen uns ein Urteil darüber zu bilden, ob in der Teilmasse die Gesamtmasse wahrscheinlich richtig abgebildet ist oder nicht.

Die gleichen Überlegungen treten dort an den Statistiker heran, wo er, etwa aus Gründen der mangelnden Mittel oder der Beschleunigung der Ergebnisse, sich ganz oder nur zunächst mit einer Teildarstellung (repräsentativen Darstellung) eines statistischen Stoffes begnügt. Hier hat er zwecks Wahrung der Gleichartigkeit mit der Gesamtmasse streng auf eine zufällige Auswahl der die Teilmasse bildenden Fälle zu sehen, wie natürlich auch auf die Wahrung des Gesetzes der großen Zahl.

Solche Teildarstellungen haben in neuerer Zeit, besonders nach dem Kriege, da die materielle Lage der amtlichen Statistik vielfach ungünstig war, eine größere Ausbreitung erfahren. Ihr Nutzen ist unleugbar; trotzdem bleibt die Erhebung der vollständigen Masse wegen der Gefahr einer unrichtigen Vertretung der Gesamtmasse, aber auch wegen der größeren Zahl der Fälle das anstrebenswerte Ziel.

In diesem Zusammenhange sind auch die statistischen Schätzungen zu nennen, die der Statistiker häufig dort anzustellen in die Lage kommt, wo eine richtige statistische Erhebung nicht durchgeführt wurde oder durchgeführt werden konnte. Die statistische Schätzung bedarf gewisser Grundlagen und Annahmen — denn aus der Luft gegriffen wäre sie vollkommen wertlos. In gewissem Sinne kann die Teildarstellung in den Bereich der Schätzung einbezogen werden; denn man versucht hier, sich auf Grund der gegebenen Teilmasse durch Verallgemeinerung ein Bild der Gesamtmasse zu machen. Auf einer ähnlichen Verallgemeinerung beruht es, wenn wir z. B. für eine beschränkte Anzahl von Häusern die zugehörigen Menschen, Tiere, Felder, Obstbäume usw. feststellen (oder nach der Erfahrung annehmen), um darnach und nach der bekannten (oder geschätzten) Häuserzahl die Gesamtzahl der Menschen, Tiere usw. eines Gebietes zu schätzen. Schätzungen werden für alle diejenigen örtlichen Gebiete vorgenommen, in denen regelrechte statistische Erhebungen noch nicht stattfinden, sind aber auch für manche Sachgebiete, die dem statistischen Zugriff schwer zugänglich sind wie z. B. die wirtschaftliche Erzeugung auch in Kulturstaaten mit einer sonst wohlgepflegten Statistik bisweilen notwendig.

Von den Schätzungen zu unterscheiden sind die schätzungsmäßigen Berechnungen, die überall dort Platz greifen, wo irgendeine zusammengesetzte Größe, z. B. das Volkseinkommen, das Volksvermögen, ermittelt werden soll. Hier treten neben Angaben, über die genaue Statistiken vorliegen, Schätzungen in weiterem oder engerem Ausmaße, so daß einer solchen Ermittlung ein größerer oder geringerer Wert zukommen kann, je nachdem die Schätzungen im Rahmen der gesamten Berechnung einen kleineren oder größeren Raum einnehmen.

d) Begriff der Statistik. Statistik oder Stochastik? Der kurze geschichtliche Überblick in der Einleitung hat uns gezeigt, daß der Begriff der Statistik im Laufe der Zeiten einen Wandel erfahren hat. Ursprünglich als eine Summe der Staatsmerkwürdigkeiten zunächst auch nicht zahlenmäßiger Art, später durch QUETELET eine Physik der menschlichen Gesellschaft, heute als Theorie der Massenerscheinungen weniger und mehr als diese beiden. Die Auswertung der Zahlenergebnisse, die „Stoffstatistik", wie sie G. v. MAYR auf dem Gebiete der menschlichen Gesellschaft als wissenschaftliche Statistik begründen wollte, stellt einen letzten Ausläufer der einstmaligen „Staatsmerkwürdigkeiten" vor und dürfte mit dem Aussterben der alten Generation deutscher Statistiker, die noch unter G. v. MAYRS Einfluß standen, verschwinden. Die soziale Physik ist bereits unter den wuchtigen Hieben der späteren Kritik eingegangen. Dafür ist die statistische Theorie innerlich viel reicher geworden, als diese beiden im statistischen Stoffe sich auslebenden Lehren. Sie hat mit Hilfe der Mittel der Wahrscheinlichkeitstheorie Einblicke in das Innere der statistischen Masse gewonnen, sie hat die Wirkung der Zufallsstreuung erkannt, hat die aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sich ergebenden Parallelen in der Dispersionstheorie weiterverfolgt, sie hat die Erforschung der regelmäßigen Formen, in denen statistische Reihen auftreten, in Angriff genommen, ist somit auf dem Wege, eine statistische Formenlehre[1] aufzubauen. Die statistische Theorie bedarf nicht mehr eines Stoffraubes an anderen Wissenschaften, um selbst als Wissenschaft mit eigenem Stoffgebiet und eigenem Verfahren dazustehen. Ihr Stoff ist die formale Seite der Massenerscheinungen und ihrer Beziehungen untereinander, die sie mit den ihr arteigenen Verfahrensmitteln erforscht. Falsch ist es daher auch, die Statistik als ein bloßes Verfahren hinzustellen. Sie ist viel mehr als das; sie ist auch die formale Theorie der Massenerscheinungen. Zu diesem Irrtum konnte es nur kommen, weil aus der Theorie die Verfahrensregeln für die Behandlung statistischer Zahlen unmittelbar hervorgehen, so daß eine Trennung der beiden in der Darstellung unzweckmäßig ist. Wir haben auch in unserer Darstellung die Theorie der Massenerscheinungen nicht von der Verfahrenslehre an diesen getrennt, weil die Gebiete vielfach eng ineinander greifen, und eine Trennung bestehende Zusammenhänge zerreißen und Wiederholungen notwendig machen würde. Wir müssen aber nachdrücklich betonen, daß diese Verschmelzung nur aus Zweckmäßigkeitsgründen erfolgt ist und daß wir an dem grundsätzlichen Unterschiede von Theorie und Verfahrenslehre der Statistik festhalten.

In jüngerer Zeit hat auch die von v. BORTKIEWICZ wieder ins Leben gerufene Bezeichnung „Stochastik" Verbreitung gefunden[2], nicht ohne einige Verwirrung in weniger unterrichteten Köpfen hervorzurufen. v. BORTKIEWICZ führt diese Bezeichnung mit folgenden Worten ein: „Die an der Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte, somit auf „das Gesetz der großen Zahlen" sich gründende Betrachtung empirischer Vielheiten möge als Stochastik (von στοχάζεσθαι = zielen, mutmaßen) bezeichnet werden."

Es taucht nun die Frage auf, ob es einer solchen Gegenüberstellung von Statistik und Stochastik bedarf, ob nicht vielmehr jede statistische Erwägung auch stochastisch sein müsse. TSCHUPROW stellt hier den praktischen Bedarf, der an einer Zahl, so wie sie erhoben wurde, hafte, dem tiefer gehenden Bedürfnis gegenüber,

[1] Vgl. den Vortrag des Verfassers „Statistik und Mathematik" bei der 5. Tagung der Deutschen Statistischen Gesellschaft. Dtsch. St. Zentralblatt **1923**, H. 1/2, Sp. 1—6.

[2] Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 3. Berlin 1917. TSCHUPROW, AL. A.: Ziele und Wege der stochastischen Grundlegung der statistischen Theorie, Nordisk Statistisk Tidskrift **3**, 433ff. (1924). — Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Berlin 1925, 12ff., 19f.

den wahren Wert der uns nur verschwommen entgegentretenden empirischen Größe zu erfassen. Ein solcher Gegensatz besteht in Wirklichkeit nicht. Wohl wird der Statistiker in der Regel an die von ihm erhobene einmalige Zahl (z. B. Volkszählungszahl im ganzen und in ihren ausgegliederten Teilen) gebunden sein, da er keine Möglichkeit hat, sich über die Zufallsstreuung dieser Zahl eine Vorstellung zu machen. Könnte er es aber, könnte er also über einen Gegenstand unter gleichbleibenden Bedingungen eine Anzahl von aufeinanderfolgenden Beobachtungen anstellen, so dürfte er nicht diese oder jene einzelne Beobachtung herausgreifen, sondern müßte das arithmetische Mittel der Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Wert des Gegenstandes wählen (vgl. oben S. 48ff.). Es ist also nicht der grundsätzliche Unterschied vorhanden, den TSCHUPROW macht, sondern nur ein praktischer. Immer soll der Statistiker und mit ihm der Verwaltungsfachmann oder sonstige Praktiker, der die Zahl übernimmt, bestrebt sein, hinter die Verdunkelungen durch die zufälligen Abweichungen zu blicken und die wahre Größe der statistischen Erscheinungen seinen theoretischen und praktischen Folgerungen und Entschließungen zugrunde zu legen. Vielleicht beruht die Unterscheidung TSCHUPROWS darauf, daß ihm noch nicht der weite und allgemeine Umfang der Zufallsstreuung und des Gesetzes der großen Zahl bewußt war, wie wir ihn oben in Abschnitt II 3eδ formuliert haben. Nehmen wir die dortigen Darlegungen als richtig an, so folgt daraus zwingend, daß die Zufallsstreuung jede statistische Zahl beherrscht, daß also auch hinter jeder statistischen Zahl eine „Wesensform" steht, deren Erkenntnis wir, wenigstens theoretisch, in allen Fällen anstreben müssen. Es ist dann jedes richtige statistische Denken ein stochastisches Denken, und es fällt für uns die Notwendigkeit, den Begriff Stochastik neben dem Begriffe Statistik aufrechtzuerhalten, weg.

Desgleichen können wir die von der einseitig unmathematischen Richtung der Statistik aufgestellte Scheidung in „mathematische Statistik" und „gewöhnliche Statistik" nicht anerkennen. Die mathematischen Denkmittel der Statistik sind ebenso vollberechtigt wie die logischen und es heißt, eine einheitliche Sache gewaltsam spalten, wenn man diese Unterscheidung aufstellt. In Wirklichkeit gibt es nur eine Theorie der Statistik, wohl aber zweierlei Arten ihrer Vertreter, solche, die alle Denkmittel der modernen statistischen Theorie beherrschen, und solche, denen ein Teil davon, der mathematische, ein Buch mit sieben Siegeln ist.

6. Die statistische Gruppenbildung. Die statistische Tabelle[1].

a) Grundsätzliches. Die Ausgliederung der uns entgegentretenden statistischen Massen ist eines der Hauptziele unseres Erkenntnisstrebens, und zwar in ihrer reinen, von zufälligen Schwankungen ungetrübten Form, der Wesensform. Freilich ist es eine Standpunktsfrage, inwieweit wir die ausgegliederten Teilmassen als Teile des Ganzen oder als neue selbständige Masse betrachten wollen. Wir können z. B. die Bewohner der verschiedenen Länder des Deutschen Reiches einmal als Teile des Ganzen, Glieder der Reichsbevölkerung, betrachten, aber auch etwa die Bevölkerung Preußens für sich als eigene Masse; oder die Sterbefälle der einzelnen Monate als Teile der gesamten Sterbefälle eines Jahres oder auch als selbständige Massen; oder die selbständigen Landwirte als ein Glied der ganzen berufstätigen Bevölkerung oder als eine Masse für sich. Diese standpunktmäßige Bedingtheit kann für uns

[1] ZIZEK, F.: Die statistische Bearbeitung des Erhebungsmateriales durch Gruppenbildung, in: Statist. Monatsschrift, 3. F., 1, 175ff. Wien 1919. FLASKÄMPER, P.: Die logische Natur der quantitativen statistischen Merkmale mit besonderer Berücksichtigung des Problems der Gruppenbildung, in: Jb. f. Nationalök. u. Statistik, III. F., **76**, 50ff. Vgl. ferner die in Fußnote 1 auf S. 14 (zur statistischen Masse) und Fußnote 2 auf S. 57 (zum statistischen Vergleich) angegebenen Schriften.

kein Hindernis sein, die für die Statistik so außerordentlich wichtige Erscheinung der Ausgliederung (Gruppenbildung) nach Gebühr zu behandeln.

Während sich der Vorgang der statistischen Gruppenbildung statistisch-logisch als ein Ausgliederungsvorgang der gegebenen statistischen Massen darstellt, bedeutet er statistisch-technisch einen Aufbauvorgang von der untersten Einheit auf. In dem statistischen Rohstoff, der uns aus einer statistischen Erhebung gegenübertritt, liegen die Einheiten zunächst ungeordnet in der zufälligen Reihenfolge, wie sie sich bei der Erhebung dargeboten haben: die Personen einer Volkszählung nach Wohnungen, die gewerblichen Betriebe einer Betriebszählung nach ihrer örtlichen Lage im Erhebungsbezirk, die Ein- und Ausfuhrsakte nach der Reihenfolge des Grenzübertrittes der Waren usw. Soll die Masse nach Merkmalen unterschieden geordnet werden, so ist der bereits oben in dem technischen Abschnitt (S. 12ff.) geschilderte Vorgang der Einreihung in die vorgesehenen Gruppen notwendig.

Als Beispiel wollen wir hier die verhältnismäßige Wahlbeteiligung der Geschlechter in 85 sächsischen Gemeinden mit 1000 und mehr Einwohnern im Jahre 1924 anführen. Als statistische Aussage kommt wohl hier nicht eine unmittelbar erhobene, sondern eine durch Rechnung abgeleitete Zahl, eine Verhältniszahl, vor (vgl. Abschn. II, 15), doch bietet uns das den Vorteil der Vergleichbarkeit der verschieden großen Gemeinden untereinander, so daß wir diesen kleinen Schönheitsfehler gern in Kauf nehmen. Auf den hier vorzuführenden Einreihungsvorgang hat die Art der Aussage keinen Einfluß.

Verhältnismäßige Wahlbeteiligung der Geschlechter in 85 sächsischen Gemeinden mit 1000 und mehr Einwohnern im Jahre 1924[1]. (Stimmen auf 100 Stimmberechtigte.)

	m.	w.
Kreishauptmannschaft Bautzen.		
Kamenz	80,7	79,0
Großröhrsdorf	81,0	61,5
Großschönau	80,7	69,5
Olbersdorf	79,5	76,1
Eibau	88,1	79,1
Waltersdorf	71,0	52,1
Hörnitz	87,3	75,5
Jonsdorf	98,6	71,3
Oberfriedersdorf	85,4	79,2
Kemnitz, O.-L.	80,5	65,0
Pethau	74,9	81,5
Kreishauptmannschaft Dresden.		
Dresden	72,3	64,6
Freital	85,6	76,2
Pirna	84,1	75,8
Radeberg	89,7	83,6
Sebnitz	84,1	72,5
Coswig	84,3	84,3
Gittersee	85,1	81,7
Niedersedlitz	84,6	81,5
Lausa	89,7	91,6
Bad Schandau	83,1	77,3
Rabenau	93,9	85,9
Neuhausen	93,9	86,4
Glashütte	80,3	70,3
Schmiedeberg	91,8	87,4
Coßmannsdorf	94,7	89,4
Lohmen	80,8	75,4
Reichenberg	89,3	81,9
Hertigswalde	81,8	66,5
Oberneuschönberg	90,8	85,1
Deutschneudorf	92,3	73,7
Pesterwitz	92,5	92,1
Somsdorf	93,9	91,0
Willschdorf	90,5	87,9
Kreishauptmannschaft Leipzig.		
Leipzig	80,3	89,2
Döbeln	85,7	79,4
Mittweida	75,2	79,5
Wurzen	92,1	88,4
Burgstädt	82,9	76,2
Engelsdorf	82,9	77,9
Taucha	90,3	82,2
Böhlitz-Ehrenberg	89,5	84,2
Pegau	91,5	85,0
Hertmannsdorf bei Limbach (Amtsh. Rochlitz)	82,5	72,8
Zwenkau	86,9	81,0
Liebertwolkwitz	87,5	84,0
Göppersdorf	81,8	69,5
Naunhof	89,5	79,8
Rötha	88,3	88,5
Strehla	87,8	88,3
Brandis	84,6	76,5
Burkersdorf b. Burgstädt	87,5	77,6
Knautkleeberg	90,6	82,4
Lobstädt	80,5	81,6
Claußnitz	87,3	74,8
Thekla	88,2	86,9
Quasnitz	89,5	85,9
Holzhausen	91,3	87,5
Ottendorf	88,2	81,6
Dölzig	90,0	86,8
Wiederau	94,0	84,0
Mölkau	95,1	89,0
Cröbern	94,2	92,8
Bösdorf	95,4	89,0
Kreishauptmannschaft Chemnitz.		
Ölsnitz i. E.	77,4	71,0
Stollberg	85,5	71,7
Gersdorf	84,5	74,5
Eppendorf	91,1	77,6
Plaue-Berndsdorf	87,4	78,5
Scheibenberg	84,9	72,3
Dittersdorf	78,9	69,1
Auerswalde	91,3	80,8
St. Egidien	74,8	62,3
Weißbach	85,3	78,0
Eubau	91,0	77,8
Gornau	88,4	83,1
Arnsfeld	88,4	65,5
Heinrichsort	76,1	57,0
Witzschdorf	91,2	80,5
Kreishauptmannschaft Zwickau.		
Zwickau	79,2	73,8
Lichtentanne	90,1	82,0
Vielau	86,3	80,4
Langenhessen	91,3	90,9
Rebesgrün	77,7	59,7
Langenbach	80,4	75,5

[1] Zeitschrift des Sächsischen Statistischen Landesamtes Jg. 70/71, S. 41ff. (1924/25).

Wir wollen nun durch Ausstrichelung die Wahlbeteiligung der Männer in die nebenstehenden Gruppen einreihen und gelangen somit zu folgendem Ergebnis:

über 70 bis 75%	ǀǀǀǀ	4
„ 75 „ 80 „	𝍸 ǀǀ	7
„ 80 „ 85 „	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ǀǀ	22
„ 85 „ 90 „	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ǀ	26
„ 90 „ 95 „	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ǀǀǀ	23
„ 95 „ 100 „	ǀǀǀ	3
Gemeinden zusammen		85

Aufgabe 6. Die gleiche Einreihung ist für die verhältnismäßige Wahlbeteiligung der Frauen zu machen.

Gruppen: Über 50 bis 55%
„ 55 „ 60 „
usw.

Die vorliegende Form der Ausgliederung des Zählstoffes nach Gruppen ergibt die sogenannte Verteilungsreihe. Neben dieser findet besonders in der modernen Reihentheorie höherer Art auch die Summenreihe eine vielfache Anwendung. Es wird darin dargestellt, wie viele Einheiten von 70 bis 75%, von 70 bis 80% usw. gezählt wurden. Obige Verteilungsreihe nimmt als Summenreihe nebenstehende Gestalt an.

Männliche Wahlbeteiligung	Zahl der Gemeinden
Insgesamt bis 75% . . .	4
„ „ 80 „ . . .	11
„ „ 85 „ . . .	33
„ „ 90 „ . . .	59
„ „ 95 „ . . .	82
„ „ 100 „ . . .	85

Die Summenreihe hat gegenüber der Verteilungsreihe — außer den erwähnten, auf dieser Stufe nicht zu behandelnden Vorteilen — den Vorteil, daß sie durch die Summenbildung von Stufe zu Stufe größere Zahlen erzeugt, weshalb sie dem Gesetz der großen Zahl besser Genüge leistet als die Verteilungsreihe. Dieser Vorteil wird besonders dort zum Vorschein kommen, wo die Verteilungsreihe kleine Zahlen umfaßt.

Die statistische Ausgliederung setzt ein Merkmal voraus, nach dem sie erfolgen soll; dieses kann artmäßig oder zahlenmäßig sein (S. 19). Bei beiden Arten von Merkmalen gabelt sich der Vorgang weiter, je nachdem eine Zergliederung in nur wenige oder eine in sehr viele Teile möglich ist. Einfach ist die Zergliederung im ersten Falle. Beispiele hierfür sind: bei artmäßigen Merkmalen das Geschlecht der Bevölkerung (zwei Gruppen), der Familienstand (4 bis 5 Gruppen), die Konfession, die Muttersprache u. dgl. m.; bei zahlenmäßigen Merkmalen: die Familien nach der Zahl der Kinder, die Wohnungen nach der Zahl der Wohnräume, die Häuser nach der Zahl der Wohnungen usw. In allen diesen Fällen werden die Möglichkeiten, die sich durch die Ausgliederung darbieten, auch geltend gemacht werden, werden also die Zahlen für die beiden Geschlechter, für die möglichen Familienstände, die Zahlen für die Familien mit 0, 1, 2 usw. Kindern ermittelt werden.

Schwieriger wird die Sache, wo eine große Zahl von Möglichkeiten uns gegenübertritt. So bringt bei artmäßigen Merkmalen die Gliederung der Sterbefälle nach Todesursachen, der Personen nach dem Berufe, der Betriebe nach der Betriebsart, der Ein- und Ausfuhrsendungen nach der Warengattung usw. eine viel größere Vielfältigkeit der Gliederungsmöglichkeiten. Hier sucht man mit Rücksicht darauf, daß eine Ausgliederung, die etwa 200 Gruppen übersteigt, praktisch an Übersichtlichkeit verliert, Zusammenzüge in der Weise zu erzielen, daß man ein „Todesursachenverzeichnis (-schema"), „Berufsverzeichnis", Betriebsverzeichnis", „Warengattungsverzeichnis" mit einer beschränkten Anzahl von Stellen verfaßt und diesem ein alphabetisches und systematisches Einreihungsverzeichnis beigibt, in dem die große Fülle der Möglichkeiten enthalten und mit einer Einreihungsanweisung versehen ist. Ähnlich muß dort, wo viele Zahlenabstufungen möglich sind, z. B. gewerbliche Betriebe nach der Zahl der Arbeiter, eine Zusammenfassung in Gruppen erfolgen, z. B. Betriebe mit bis 20 Arbeitern usw. Bei den stetigen zahlenmäßigen Merkmalen müssen wegen der Vielheit der Möglichkeiten immer zusammenfassende Gruppen gebildet werden. Es wird z. B. das Alter nach Altersjahren, die Körpergröße nach Größenzentimetern, es werden die Preise nach RM angegeben.

Dadurch, daß die einzelnen Fälle nach den einem Merkmal entsprechenden Gruppen aufgeteilt werden, wird in gewissem Sinn bessere Ordnung und Übersicht geschaffen, indem wir von der schwer zu handhabenden Gesamtmasse zu kleineren Teilmassen fortschreiten. Der Einzelfall, der in der Gesamtmasse untertaucht, taucht auch in den Gruppen unter. Bilden wir z. B. eine Gruppe „landwirtschaftlich Berufstätige", so sind darin alle Ackerbauer, Weinbauer, Viehzüchter usw. enthalten, ohne daß wir sie nach geschehener Einreihung besonders herauskennen könnten, außer, wenn wir uns zu einer weiteren Zergliederung entschließen. Haben wir eine Gruppe der Personen mit einem Alter von vollendeten 0 Jahren gebildet, so sind sowohl die soeben Geborenen, als auch die bereits 3, 6, 9 oder nahezu 12 Monate alten Kinder darin enthalten. Eine etwaige verschiedene Häufigkeit der 0-jährigen Kinder nach Kalendermonaten geht in dieser Gruppe ganz verloren. Wenn wir über die Verteilung im Inneren der Gruppe nichts Näheres wissen, behelfen wir uns in der Regel mit der bequemen, wenn auch oft nicht richtigen Annahme einer gleichmäßigen Verteilung über die ganze Gruppenbreite, wie das auch in der zeichnerischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung im Häufigkeitspolygon (vgl. Abschn. II, 7c, Abb. 7—11, 14 auf S. 87, 95ff. und 103) zum Ausdruck kommt. Demzufolge liegt der Schwerpunkt in der Gruppenmitte (beim Häufigkeitspolygon die Schwerlinie der Gruppe in deren Mittelordinate) und man hat sich den ganzen Gruppeninhalt als auf die Gruppenmitte uniformiert vorzustellen. Der dieser Vorstellung innewohnende Fehler ist umso geringer, je enger die Gruppen sind und je gleichartiger der Gruppeninhalt ist.

Wir gelangen durch diese Erwägungen zu den allgemeinen Forderungen, die an die Gruppenbildung zu stellen sind. Die Gruppen sollen den Forderungen der Übersichtlichkeit, der Gleichartigkeit und der großen Zahl entsprechen. Die Übersichtlichkeit verlangt, daß die Zahl der Gruppen nicht zu groß genommen werde; die Gleichartigkeit, daß der Umfang der Gruppen nicht zu weit gezogen, die Zahl der Gruppen also nicht zu klein genommen werde; dem Gesetz der großen Zahl zufolge soll wieder die auf die einzelnen Gruppen entfallende Besetzungszahl nicht zu klein werden, sollen also dort, wo diese Gefahr besteht, nicht zu viele Gruppen gebildet werden. Wie ersichtlich, widerstreiten sich diese Forderungen: die Forderungen der Übersichtlichkeit und des Gesetzes der großen Zahl zielen auf einen größeren Gruppenumfang, daher eine kleinere Anzahl von Gruppen, die der Gleichartigkeit auf einen kleineren Gruppenumfang, daher auf eine größere Anzahl von Gruppen. Ohne Zweifel kann dieser Widerstreit nur dadurch geschlichtet werden, daß sich der bearbeitende Statistiker für einen mittleren Weg entscheidet, auf dem weder die eine noch die andere Forderung der Statistik zu gröblich verletzt wird. Hierbei kommt es ganz auf den einzelnen Fall an. Es wird eine Gruppenbildung über ein Merkmal in dem einen Fall, z. B. große Gruppen bei einer beschränkten Anzahl von Fällen, zu bewilligen, in dem anderen, bei einer genügenden Anzahl von Fällen, abzulehnen sein.

Zu diesen allgemeinen Grundforderungen der Gruppenbildung kommt noch eine weitere für die Gruppenbildung bei zahlenmäßigen Merkmalen. Die Gliederungen nach zahlenmäßigen Merkmalen sind für die statistische Theorie darum besonders interessant, weil sie einen Entstehungsgrund statistischer Reihen vorstellen, die uns weiter unten (Abschn. II 7) noch näher beschäftigen werden. Solche statistische Reihen stellen meist Gebilde irgendeiner Regelmäßigkeit vor. Es folgt daraus die Forderung für die Gruppenbildung, daß diese den Reihencharakter wahre, also die Grundlage der Reihenbildung, die natürliche Zahlenreihe, weder nach der Reihenfolge der Zahlen, noch im Falle einer Gruppenbildung nach der Gleichheit der gebildeten Gruppen verlasse. Es wäre fehlerhaft, wollten wir die Altersgliederung der Gestorbenen nach durcheinandergewürfelten Altersjahren darstellen, ebenso fehlerhaft, wollten wir einen Teil nach Monaten, einen nach Altersjahren, einen dritten nach Altersjahrfünften usw. ausgliedern. Wenn aber, wie in dem angeführten Beispiele, eine eingehendere Ausgliederung nur für gewisse Altersabschnitte von Interesse ist, dann mag das Ganze auf eine allgemeine, allen Teilen entsprechende Gruppengröße, z. B. Altersjahrfünfte, gebracht werden, es mögen aber daneben etwa die Gestorbenen von vollendeten 0 bis 4 Jahren nach Altersjahren, die Gestorbenen des 0-ten Jahres nach Altersmonaten und die Gestorbenen des 0-ten Monates nach Alterstagen ausgegliedert werden. Dadurch ist sowohl der Forderung der Gruppengleichheit als auch dem Bedürfnis nach eingehender Ausgliederung einzelner Teile Genüge getan.

Die Forderung nach Gruppengleichheit stößt in der Praxis überall dort auf Schwierigkeiten, wo starke Verschiedenheiten in der Besetzung der gleichgehaltenen Gruppen vorhanden sind. Wenn wir z. B. die Einkommensverteilung (siehe Abschnitt II, 11a) betrachten, so sehen wir die Gruppen niedrigeren Einkommens sehr stark, die Gruppen höheren Einkommens fortschreitend immer schwächer besetzt, bis endlich die Gruppen der ganz hohen Einkommen nur noch eine ganz schüttere Besetzung aufweisen. Die Gleichheit der Gruppen müßte hier zu einer kaum übersehbaren Anzahl von Gruppen führen; dazu würde in den höheren Gruppen die Besetzung so schwach werden, daß dem Gesetze der großen Zahl nicht mehr entsprochen wäre. Es würden sich hier also die aus der Reihennatur gewonnene Forderung der Gruppengleichheit und die auf Kleinheit der Gruppen abzielende allgemeine Forderung der Gleichartigkeit mit den gleichfalls allgemeinen Forderungen der Übersichtlichkeit und der Wahrung des Gesetzes der großen Zahl bekämpfen. Die Praxis gibt in solchen Fällen unter Verletzung der beiden ersten Forderungen den beiden letzteren recht und bildet ungleiche Gruppen, in unserem Beispiele also Gruppen von wachsendem Umfange. Welche Mittel dem Statistiker zur Verfügung stehen, um aus einem Material mit ungleichen Gruppen die reihenmäßige Regelmäßigkeit zu entnehmen, also den notwendigerweise begangenen Darstellungsfehler annähernd zu beseitigen, soll weiter unten (Abschnitt II, 8a) dargestellt werden.

Als Auskunftsmittel wurde im Falle der Einkommensverteilung der Vorschlag gemacht, die Gruppengrenzen nicht im arithmetischen, sondern im geometrischen Verhältnis zunehmen zu lassen. Wird der Vorschlag grundsätzlich angenommen (was nach der Natur der Einkommenskurve bestritten werden kann), so ist es richtiger, nicht die Gruppengrenzen, sondern die Gruppenmitten, in denen nach der obigen Darstellung der ganze Gruppeninhalt als vereinigt angenommen wird, im geometrischen Verhältnis fortschreiten zu lassen. Der Vorschlag bezweckt also statt eines unregelmäßigen Größerwerdens der Gruppen ein nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit geregeltes Größerwerden. Die Verletzung des oben vertretenen Grundsatzes der Gruppengleichheit wird natürlich auch hier begangen.

Bei der Abgrenzung zahlenmäßiger Merkmale ist auf die Klarheit der Abgrenzung zu achten. Man darf z. B. Altersgruppen nicht bilden 0 bis 5, 5 bis 10 usw. Jahre, weil man dann nicht weiß, ob die 5jährigen in der unteren oder oberen Gruppe gezählt sind. Die richtige Abgrenzungsweise für den Statistiker, der in vollendeten Lebensjahren rechnet, ist 0 bis 4, 5 bis 9 Jahre usw.; man kann auch abgekürzt schreiben 0—, 5— Jahre usw. oder —4, —9 Jahre usw.

Eine wichtige weitere Forderung an die Gruppenbildung, und zwar negativer Art, ist die der Vermeidung von „offenen Gruppen“, das sind Gruppen, die unten ohne Grenze beginnen (z. B. bis 18 Jahre, bis 1500 RM Einkommen u. dgl.) oder die ohne Grenze schließen (z. B. 60 Jahre u. darüber, 100000 RM Einkommen und darüber). Offene Gruppen sind überall dort ein schweres Übel, wo das arithmetische Mittel und die mittlere Abweichung berechnet werden sollen, also die Grundmaße der statistischen Reihendarstellung. Der Mangel kann nur in der Weise überbrückt werden, daß über die untere oder obere Gruppengrenze eine Annahme aufgestellt wird, oder daß diese Gruppen bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden. Der erstere Weg dürfte mehr zu empfehlen sein, da hierbei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers kleiner ist. Der zweite Weg ist nur dann gangbar, wenn die Außengruppen ganz kleine Zahlen aufweisen, was z. B. bei der Normalkurve oder der schiefen Verteilungskurve (Abschn. II, 10 u. 11) zutrifft.

Die Werte der Zahlenreihe, die ein zahlenmäßiges Merkmal annehmen kann, (z. B. 1, 2, 3 usw. Kinder, 0—, 1—, 2— usw. Altersjahre), werden häufig auch „Argumentwerte" genannt.

b) Die Bildung von Obergruppen. Die Obergruppenlage. Der Statistiker kann, wie sich aus der vorausgehenden Darstellung ergeben hat, in die Lage kommen, die ursprünglich vorgenommene Gruppengröße erweitern zu müssen, wenn nämlich die Besetzung der einzelnen Gruppen so schütter ist, daß die Wesensform der Verteilung von zufälligen Abweichungen zu stark getrübt wird. Läßt nun schon die mit den zu kleinen Gruppen erzielte Ausgliederung eine gewisse Regelmäßigkeit der Gestalt, z. B. Symmetrie, Asymmetrie, einseitigen Abfall oder dergleichen vermuten, so darf die Lagerung der Obergruppen nur in der Weise erfolgen, daß die Obergruppenlage diese Regelmäßigkeit nicht verwische. Wollen wir also z. B. im Falle einer symmetrischen Verteilung auch in der Obergruppenverteilung die Regelmäßigkeit nicht entstellen, so müssen wir den Mittelpunkt der ursprünglichen Verteilung, der hier wegen der vermuteten Symmetrie des Ganzen mit dem arithmetischen Mittel nahe zusammenfällt, auch zum Mittelpunkt der Mittelgruppe machen, von der aus dann die weiteren Gruppen nach beiden Seiten verlaufen.

Beispiel. Wir teilen in Abschnitt II, 10b die Zahlen für 300 Tischkantenmessungen mit und berechnen dort aus den ursprünglichen Gruppen zu je 1 mm Obergruppen zu je 2 mm. Dabei beachten wir, daß das arithmetische Mittel 2,1086 m beträgt, weshalb wir als Mittelgruppe die Gruppe 2,108 bis 2,109 wählen.

Aufgabe 7. Zu den Zahlen des Tabellchens auf S. 22 über die Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten sind Obergruppen zu je 3 cm für alle drei möglichen Obergruppenlagen, ferner die Zahlen für die richtige Obergruppenlage von 5 cm zu berechnen und alle vier Verteilungen zeichnerisch (nach dem Muster von Abb. 3b auf S. 26) darzustellen.

c) Die mehrfache Ausgliederung. In manchen Fällen genügt eine einfache örtliche, zeitliche oder sachliche Ausgliederung einer statistischen Masse, um den stofflich gewünschten Einblick zu vermitteln. Sehr häufig bleibt der Statistiker aber nicht dabei stehen, sondern fährt in der Ausgliederung der Masse fort. Es gibt dann doppelte, dreifache und mehrfache Ausgliederungen. Wir können z. B. die Bevölkerung nach dem Berufe allein, aber auch nach dem Berufe in Verbindung mit dem Geschlechte oder mit dem Alter oder mit beiden Merkmalen zugleich ausgliedern. Die einfache Berufsausgliederung gibt nicht mehr als das rohe Bild der Berufsverteilung der Bevölkerung. Die Berufsausgliederung nach dem Geschlechte zeigt uns, welchen Anteil die Männer- und die Frauenarbeit an der Berufsarbeit haben, die Ausgliederung nach dem Berufe und dem Alter gibt uns die für viele Zwecke, z. B. für die Sozialversicherung, wichtige Altersgliederung der einzelnen Berufe. Wir erkennen an diesem Beispiele, daß die Merkmalsverbindung dazu dient, den Stoff tiefer zu durchdringen, als es mit einer einfachen Ausgliederung möglich ist. Die Merkmalsverbindung ist auch, wie wir in Abschnitt II, 16b) sehen werden, eines der Hauptmittel der statistischen Ursachenforschung. Sie wird erst ermöglicht durch die moderne statistische Technik der Individualzählkarte.

In der Praxis können natürlich nicht alle möglichen Merkmalsverbindungen, sondern wegen der Kostspieligkeit des Aufbereitungsverfahrens nur die wichtigsten von ihnen ausgezählt werden.

Aufgabe 8. In dem oben auf S. 63 mitgeteilten Stoffe über die verhältnismäßige Wahlbeteiligung in 85 sächsischen Gemeinden ist die doppelte Ausgliederung nach der männlichen und weiblichen Wahlbeteiligung zugleich vorzunehmen.

d) Die statistische Tabelle. Die zutreffende Ausdrucksform für jede statistische Darstellung, besonders also auch für die einfache und mehrfache Ausgliederung, ist die statistische Tabelle. Sie gibt mit ihren in ein Fachwerk eingeordneten Zahlen, ihren Spalten und Zeilen, das übersichtlichste Bild der vorzuführenden Zahlengruppierungen und spricht eben wegen dieser Übersichtlichkeit eine deutliche, allerdings nur dem geübten Statistiker leicht zugängliche Sprache, die er den üblichen Umschreibungen ihres Inhalts in Textform weit vorzieht. (Umgekehrt allerdings der Laie.) Der Jünger der Statistik muß sich daher vor allem in dem Lesen und Durchdringen statistischer Tabellen üben, da sie es sind, die den Kern der statistischen Darstellung bilden.

Die wesentlichsten äußeren Bestandteile einer Tabelle sind der Kopf und die Vorspalte, in denen die Bezeichnung des Zahleninhaltes enthalten sind. Der Zahleninhalt selbst wird in die Felder der Tabelle eingefüllt, die in lotrechter Richtung Spalten, in waagrechter Richtung Zeilen bilden. Jeder Tabelle, auch wenn sie in einen Text eingefügt ist, gebührt eine Aufschrift, die kurz den Inhalt kennzeichnet; ferner ist, wenn die Tabelle nicht in einem Quellenwerk steht, sondern von dort entlehnt ist, die genaue Angabe der Quelle der Tabelle unter der Überschrift oder in einer Fußnote beizusetzen.

Eine weitere beachtenswerte Übung besteht darin, daß Felder grundsätzlich nicht leer gelassen werden; Felder, für die der ausgewiesene Wert gleich Null ist, werden mit einem Querstrich (—), Felder, deren Inhalt unbekannt ist, mit einem Punkt (·) ausgefüllt.

Die Berufsverteilung im Deutschen Reich i. J. 1925[1].

Wirtschaftsabteilungen	Erwerbstätige			Nicht erwerbstätige Berufszugehörige	Berufszugehörige insges.
	männlich	weiblich	insgesamt		
	1	2	3	4	5
A. Land- u. Forstwirtschaft . . .	4793147	4969279	9762426	4610830	14373256
B. Industrie u. Handwerk . . .	10330343	2908880	13239223	12542058	25781281
C. Handel u. Verkehr	3698247	1575255	5273502	5288439	10561941
D. Verwaltung, freie Berufe usw.	1211732	290647	1502379	1654356	3156735
E. Gesundheitswesen usw. . . .	293308	295480	588788	375917	964705
F. Häusliche Dienste usw. . . .	204511	1438471	1642982	267275	1910257
A bis F zusammen	20531288	11478012	32009300	24738875	56748175
G. Ohne Beruf u. Berufsangabe	1697153	2147277	3844430	1818014	5662444
A bis G, Gesamtbev.	22228441	13625289	35853730	26556889	62410619

Die beigefügte, dem Statistischen Jahrbuche für das Deutsche Reich, 49. Jahrg., 1930, S. 23 entnommene Tabelle über die Berufsverteilung im Deutschen Reiche enthält in ihrer Vorspalte die Ausgliederung nach den Wirtschaftsabteilungen, in ihrem Kopfe die Ausgliederung nach der Tatsache der Erwerbstätigkeit, teilweise in Verbindung mit dem Geschlecht.

[1] Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich **49**, 23 (1930).

7. Die statistische Reihe.

a) Wesen, Zweck und Voraussetzungen ihrer Bildung. Statistische Reihen können in doppelter Weise zustande kommen: a) indem statistische Größen, Grundzahlen oder daraus abgeleitete Werte wie Verhältniszahlen, Durchschnitte, in der zeitlichen Aufeinanderfolge, z. B. nach Kalendermonaten, -jahren, -jahrzehnten aneinander gereiht werden, oder b) indem statistische Größen nach den Abstufungen eines zahlenmäßigen Merkmals aneinander gereiht werden. Die ersteren Reihen nennen wir die zeitlichen Reihen, die zweiten die sachlichen Reihen.

Ein Beispiel für die erstere Art von Reihen ist die Aneinanderreihung der Zahlen der Arbeitslosen von Monat zu Monat oder der Ernteerträge auf 1 ha von Jahr zu Jahr, Beispiele für die zweite Art von Reihen sind die Ausgliederung einer Masse von Gleichaltrigen nach der Körpergröße, die Ausgliederung der Betriebe nach der Zahl der verwendeten Arbeiter oder die Aneinanderreihung der Sterbewahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Altersstufen.

Man kann wohl auch andere als die beiden genannten Aneinanderreihungen von statistischen Größen vornehmen; man kann die Zahlen für verschiedene örtliche Gebiete, z. B. die Bevölkerungszahlen der Staaten Europas oder die Zahlen einer Ausgliederung nach einem artmäßigen Merkmal, z. B. dem Berufe, aneinanderreihen. Es kommt aber hier keine statistische Reihe im eigentlichen Sinne des Wortes zustande, weil ein zwingender Reihungsgrund, der in den Fällen a und b in der natürlichen Zahlenreihe gegeben ist, fehlt. Man spricht gleichwohl in diesem uneigentlichen Sinne von örtlichen und sachlichen Reihen, sollte aber besser nur von örtlichen und sachlichen Aneinanderreihungen sprechen.

Der von der Reihenbildung verfolgte Zweck ist der des Vergleiches und Überblickes. Wir stellen Jahresergebnisse oder die Ergebnisse einer zahlenmäßigen Stufung nebeneinander, weil diese Nebeneinanderreihung uns nicht nur den Vergleich eines Gliedes der Reihe mit jedem anderen Gliede, sondern auch einen Überblick über den Gesamtverlauf der Reihe ermöglicht. Beides ist für die Beurteilung des jeweils vorliegenden statistischen Tatbestandes von Wichtigkeit. Den Statistiker geht es sowohl an, wie sich das Ergebnis etwa des letzten betrachteten Jahres gegenüber dem vorletzten, drittletzten usw. verändert hat, als auch, welche Gesamtentwicklung (zunehmende, abnehmende, gleichbleibende, regelmäßig schwankende) die gesamte Reihe nimmt.

Soll ein solcher Vergleich möglich sein, so muß als Voraussetzung der Reihenbildung Gleichheit der zugrunde gelegten Stufen der Zahlenreihe gelten. Stellen wir die Ergebnisse von Zählungen zu einer statistischen Reihe zusammen, so sollen die Zählungsabstände gleich sein, stellen wir die Ergebnisse von Verzeichnungen (Registrierungen) in eine Reihe, so sollen die der Verzeichnung zugrunde gelegten Zeitabschnitte einander gleich sein; bilden wir eine Reihe auf Grund eines zahlenmäßigen Merkmales, so sollen die Merkmalsstufen einander gleich sein (vgl. oben S. 65f.). Wir haben gesehen, daß diese Forderung in der Praxis häufig verletzt wird, ja aus Zweckmäßigkeits- oder anderen Gründen verletzt werden muß. Es taucht somit die Frage auf, wie wir diesen unvermeidlichen Fehler, der die Erkenntnis der Reihenform behindert, beseitigen können. Nehmen wir folgendes Beispiel (s. S. 70).

Die Reihe zeigt einen ganz regelmäßigen Verlauf (vgl. auch die Abb. 5). Nur von dem Augenblicke an, da die Darstellung von einjährigen zu fünfjährigen Altersstufen übergeht, ergibt sich eine scheinbare Unterbrechung des regelmäßigen Verlaufes.

Das Verfahren, diesen Scheinfehler aus der Gruppenungleichheit zu beseitigen, besteht darin, daß wir uns den der größeren Gruppe entsprechenden Wert auf den Umfang der vorausgehenden kleineren Gruppen umrechnen. Hier erhalten wir also als den fünfjährigen Durchschnitt aus 18014 den Wert von 3603. Dieser darf aber nicht ohne weiteres für den Wert 18014 eingesetzt werden, da sich dieser auf fünf

Alter der eheschließenden Männer im Deutschen Reiche im Jahre 1928[1].

Alter	Zahl	Alter	Zahl
18 bis unter 19	353	32 bis unter 33	14738
19 „ „ 20	1912	33 „ „ 34	11633
20 „ „ 21	6227	34 „ „ 35	9766
21 „ „ 22	28935	35 „ „ 36	8091
22 „ „ 23	36563	36 „ „ 37	7081
23 „ „ 24	47022	37 „ „ 38	6176
24 „ „ 25	55280	38 „ „ 39	5379
25 „ „ 26	58910	39 „ „ 40	4913
26 „ „ 27	58915	40 „ „ 45	18014
27 „ „ 28	52691	45 „ „ 50	12281
28 „ „ 29	42536	50 „ „ 55	9555
29 „ „ 30	32743	55 „ „ 60	6311
30 „ „ 31	25252	60 und darüber	6484
31 „ „ 32	19414	Zusammen	587175

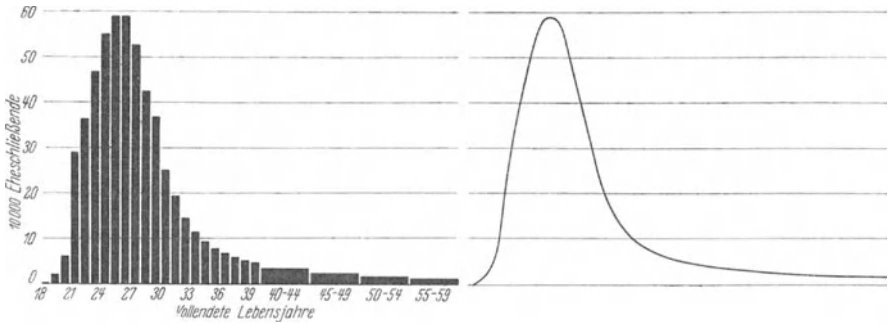


Abb. 5. Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der Altersgliederung der eheschließenden Männer im Deutschen Reiche im Jahre 1928.

Jahre, der Durchschnitt aber nur auf ein Jahr bezieht. Wir können die Reihe mit dem gewonnenen Durchschnittswert nur in der Weise richtig fortsetzen, daß wir ihn uns fünfmal in die Reihe eingesetzt denken. Natürlich wird durch ein solches Vorgehen der stetige Lauf des vorausgehenden Teiles der Reihe unterbrochen. Setzen wir aber dieses Verfahren fort, so gelangen wir doch wenigstens zu einer stufenmäßigen Annäherung an den wahren Verlauf, also etwa: .... 6176, 5379, 4913, 3603, 3603, 3603, 3603, 3603, 2456, 2456, 2456, 2456, 2456, 1911, 1911, 1911, 1911, 1911 usw.

Dieses wird noch deutlicher, wenn wir die Korrektur zeichnerisch durchführen. Hier ergibt sich der oben besonders errechnete Durchschnitt einfach aus der Erwägung, daß die als Fläche darzustellende Größe 18014 nicht auf die gleiche Grundlinie wie die vorausgehenden Gruppen, sondern auf eine fünfmal so große zu beziehen ist, die Höhe des Rechteckes daher nur ein Fünftel der angegebenen Größe betragen darf. In der zeichnerischen Durchführung wirkt das Gleichbleiben auf einer breiteren Stufe weitaus nicht so störend als in einer Tabelle das Gleichbleiben der Besetzungszahl durch 5 Stufen hindurch. (Man vergleiche hierzu auch die Abb. 5 und Abb. 9 auf S. 96.)

Über die Behandlung ungleicher Zeiträume bei zeitlichen Reihen siehe Abschnitt II, 12, S. 106.

b) Überblick über die statistischen Reihenformen. Aus der großen Zahl der möglichen statistischen Reihenformen heben sich in scharfer Zeichnung eine Anzahl von besonders bemerkenswerten Reihenformen heraus. Hier treten uns vor allem diejenigen Reihenformen entgegen, die wir bei der Zergliederung einer Masse nach

[1] Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich **49,** 34/35 (1930).

einem zahlenmäßigen Merkmal antreffen. Hierher gehören die einfachen Typen der symmetrischen Verteilungsreihe (Normalkurve), der asymmetrischen Verteilungsreihe, der J-förmig gebogenen Verteilungsreihe und der U-förmig gebogenen Verteilungsreihe. Dann finden wir Mischformen; deren bekannteste Erscheinungsarten sind die Verteilung des Alters der Gestorbenen (in der rohen Gestalt der Wirklichkeit oder in ihrer verfeinerten Gestalt der Sterbetafelberechnung) und die zweigipfeligen symmetrischen oder schiefen Verteilungskurven.

Ähnliche Reihenformen wie die hier genannten finden wir bei Reihen von Verhältniszahlen, die durch die Beziehung der Größen zweier Reihen aufeinander gewonnen worden sind, z. B. die Reihe der Heiratswahrscheinlichkeiten, der Sterbewahrscheinlichkeiten nach dem Alter.

Eine zweite Gruppe von regelmäßigen Reihengestaltungen finden wir, wenn auch zum Teil in viel loserer Weise, bei den zeitlichen Reihen. Hier ergeben sich zunächst die ganz losen Formen der zunehmenden und der abnehmenden (ganz allgemein der „Entwicklungs"-)Reihen. Daneben zeigen zeitliche Reihen häufig Schwankungen: jahreszeitliche Schwankungen und die in neuerer Zeit viel genannten Konjunkturschwankungen. Alle drei Arten der Reihenformen können in Verbindung miteinander auftreten. Hierbei ergibt sich für den statistischen Betrachter dann oft die Aufgabe, eine von diesen drei ihn interessierenden Bewegungen herauszulösen: entweder die Hauptbewegungsrichtung (in der angelsächsischen Literatur „secular trend" genannt) oder die jahreszeitlichen Schwankungen oder die Konjunkturschwankungen. Auf alle diese Möglichkeiten einer Reihengestaltung soll weiter unten (Abschnitt II, 10ff.), nachdem wir einige wichtige Maßzahlen für die Darstellung der statistischen Reihen (Abschnitt II, 8 und 9) kennengelernt haben, näher eingegangen werden.

c) Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve. Wir haben in der obigen Abb. 5 über die Verteilung der Altersgliederung der eheschließenden Männer neben die Darstellung der Zahlen in Form des bereits aus Abb. 3b bekannten „Häufigkeitspolygons" die bloße obere Umrandung in Form einer „Häufigkeitskurve" gestellt. Das „Häufigkeitspolygon" ist nichts anderes als der zeichnerische Ausdruck der zugehörigen Zahlentabelle. In der seitlich angebrachten Einteilung kann die Größe aller als Ordinaten dargestellten Gruppenbesetzungszahlen, die auf die einzelnen Altersjahre entfielen, abgelesen werden. Aber dazu ist die zeichnerische Darstellung eigentlich nicht da, das findet man besser in der Tabelle selbst. Was uns die zeichnerische Darstellung, das Häufigkeitspolygon, Eigenes gibt, das ist der bessere Überblick über die Gesamtanordnung der Verteilung, über die Verteilungsform des Merkmales.

Wenn wir die stufenweise abgesetzten Ränder des Häufigkeitspolygons betrachten, so fällt sofort der oben (S. 65) erwähnte Mangel jeder Gruppenbildung ins Auge. Die einzelnen Fälle, die in die Gruppengrenze fallen, können nicht nach ihrem individuellen Wert zur Geltung kommen, sondern sind alle auf die Gruppenmitte uniformiert. Dadurch erklären sich die Stufen, die das Bild der wirklichen Verteilung etwas entstellen, hier wohl weniger, weil die Gruppenbreite klein bemessen worden ist, aber dort, wo wir die Fälle in größere Gruppen zusammenfassen, bedeutend mehr.

Welche Bedeutung hat dem gegenüber die rechts danebengestellte Häufigkeitskurve? Sie soll ein Bild des wahren Verlaufes der Fälle (unbehindert um die Hemmungen der Gruppengrenzen) geben. Der Gedankenweg, der vom Häufigkeitspolygon zur Häufigkeitskurve führt, ist folgender: Die aus dem eben erwähnten Einreihungsvorgang hervorgehende Fehlerhaftigkeit des Häufigkeitspolygons wird um so kleiner, je enger wir die Gruppen fassen. Würden wir also die Gruppenbreite stufenweise verengern, etwa folgeweise auf die Hälfte, ein Viertel, ein Achtel usw., wobei wir, um dem Gesetz der großen Zahl zu genügen, die Gruppenbesetzungszahlen verdoppeln, vervierfachen, verachtfachen usw. müßten, so würden wir in der Polygongestalt ohne Zweifel eine immer schärfere Ausprägung der Gestalt ersehen, da nicht nur theoretisch erwartbar, sondern auch praktisch nachweisbar im Rahmen der einzelnen Gruppen eine ähnliche Anordnung Platz greift, wie sie sich in der Gesamtgestalt kund gibt. Wir würden schließlich, wenn die Gruppenbreite unendlich klein und die Beobachtungszahl unendlich groß geworden wäre, bei der durch die Kurvenform dargestellten Häufigkeitsgestalt anlangen. Der Weg vom Häufigkeitspolygon zur Häufigkeitskurve ist also kein anderer als der von der unvollkommenen Wirklichkeit zur Idealform. Jedes Häufigkeitspolygon ist somit als eine Art Obergruppenbildung aus einer der Wesensform näherliegenden Häufigkeitsverteilung, somit als eine aus Gründen der Forderung der großen Zahl vergröberte Darstellung der Häufigkeitskurve aufzufassen.

Beinahe alle unter b) genannten Reihenformen zeigen eine analytische Regelmäßigkeit der Form, die zwar massenindividuelle Schwankungen aufweist, im Grundtypus aber unverkennbar vorhanden ist. Es ist darum naheliegend, für die Form auch einen analytischen Ausdruck $y = f(x)$ zu suchen[1]. Es mag nicht nur den mathematisch geschulten Verstand reizen, für ein regelmäßiges geometrisches Gebilde den angemessenen analytischen Ausdruck zu finden, sondern es sind damit auch erhebliche praktische und theoretische Vorteile verbunden. Die praktischen Vorteile der gelungenen analytischen Darstellung einer Kurve bestehen in der durch die neue Reihe gegebenen Ausgleichung der zufälligen Schwankungen, in der damit verbundenen leichten Interpolation (Errechnung von Zwischenwerten), in der leichten Errechenbarkeit der statistischen Mittelwerte u. dgl. m. Der hauptsächliche theoretische Vorteil besteht darin, daß wir aus dem Wesen der in Verwendung gelangenden Kurven Hinweise auf das Zustandekommen einer solchen Gruppierung in der statistischen Wirklichkeit entnehmen können. Dieser Teil der statistischen Theorie steht allerdings noch ganz in den Anfängen und ist noch eines reichlichen weiteren Ausbaues fähig.

8. Die statistischen Mittelwerte[2].

a) Zweck, Wesen und Einteilung. Ein wichtiges Erkenntnisziel der Lehre von den statistischen Reihen, besonders soweit sie die Verteilung nach einem Merkmal ausdrücken, ist es, einen einfachen, einzigen Größenausdruck für die Reihe, also meistens für das Merkmal, zu gewinnen. Diesem Zwecke dienen die statistischen Mittelwerte.

Ihrem Namen nach sind sie ganz allgemein als Werte, die zwischen den Endwerten der statistischen Reihe liegen, zu bestimmen. Es gibt demnach grundsätzlich unzählig viele Mittelwerte. In Wirklichkeit werden aus deren Schar aber nur eine kleine Anzahl von Werten hervorgehoben, die ihrer Natur nach etwas besonders Kennzeichnendes besitzen. Von den zahlreichen Werten, die dieser Bedingung entsprechen, seien hier nur vier behandelt: der arithmetische Durchschnitt, der geometrische Durchschnitt, der mittlere (Zentral-)wert und der häufigst vorkommende („dichteste") Wert.

---

[1] Dann ist die statistische Masse selbst durch die von der Kurve umschlossene Fläche dargestellt und ihr analytischer Ausdruck ist das Integral der erwähnten Kurve $\int f(x)\,dx$.

[2] Edgeworth: On Methods of Statistics, in Jubilee Volume of the Royal Statistical Society **1885**, 181ff. Venn: On the Nature and Use of Averages, in J. of the Royal Statist. Soc. **1891**, 429ff. Zizek, F.: Die statistischen Mittelwerte. Eine methodologische Untersuchung. Leipzig: Duncker & Humblot 1908. v. Bortkiewicz, L.: Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **65**, 321ff. Winkler, W.: Von statistischen Durchschnitten im allgemeinen, Preisdurchschnitten im besonderen, in: Dtsch. St. Zentralblatt **18**, 65ff. Gini, C. und L. Galvani: Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi, in: Metron **8**, H. 1—2, 3ff. (1929). Flaskämper, P.: Beitrag zur Logik der statistischen Mittelwerte, in: Allg. Stat. Archiv, **21**, 379ff. (1931).

Wenn wir, wie üblich, auf der Abszissenachse die Stufen des betrachteten zahlenmäßigen Merkmals auftragen, dann ist es klar, daß alle vier Werte hier immer Abszissenwerte sein werden: z. B. die durchschnittliche, die mittlere, die häufigste Körpergröße werden naturgemäß Werte in der auf der Abszissenachse aufgetragenen Körpergrößenskala sein. Dagegen ist es ebenso klar, daß Durchschnitte usw. aus Größen zeitlicher Reihen immer Ordinatenwerte sein müssen. So wird z. B., wenn wir die Bevölkerung des Deutschen Reiches von 1871 an als Ordinaten auf einer Abszissenachse mit der Zeitskala auftragen (vgl. Abb. 15 auf S. 105), die durchschnittliche Bevölkerung etwa des Zeitabschnittes 1871—1880 auch ein Ordinatenwert sein muß.

Neben dem durch die Mittelwerte befriedigten Bedürfnis nach einem einfachen Ausdruck für die Größe des Merkmales besteht noch das Bedürfnis nach einem einfachen Ausdruck für die Größe der Streuung. Dieses Bedürfnis wird befriedigt durch die im nächsten Abschnitt zu behandelnden Streuungsmaße.

b) Das arithmetische Mittel (der arithmetische Durchschnitt). α) *Begriff und Berechnung.* Wenn für eine Anzahl von Einheiten, die verschiedene Werte aufweisen, der arithmetische Durchschnitt gezogen werden soll, so geschieht dies bekanntlich in der Weise, daß die Werte summiert werden, und die Summe durch die Anzahl der Werte dividiert wird. Der so erzielte Durchschnitt gibt Antwort auf die Frage, welches Ausmaß der betrachtete Tatbestand bei jeder Einheit aufweisen würde, wenn er allen Einheiten in der gleichen Weise zugewiesen worden wäre. Das arithmetische Mittel beruht also logisch auf der Fiktion der Gleichheit in der Zuweisung des Ausmaßes der in Betracht stehenden zahlenmäßigen Eigenschaft. Berechnen wir z. B. das durchschnittliche Einkommen, so heißt das: über dieses eine und einheitliche Einkommen würden alle Personen verfügen, wenn der in den Privateinkommen zur Verteilung kommende Teil des Reinertrages der Volkswirtschaft auf alle Personen gleichmäßig verteilt worden wäre.

Die Berechnung des arithmetischen Mittels eines zahlenmäßigen Merkmals ist dann äußerst einfach, wenn wir es unmittelbar aus den Angaben für die einzelnen Fälle berechnen können. Ebenso einfach ist die Berechnung des arithmetischen Mittels einer Zeitreihe, wobei jede einzelne Zahl einen Summanden für die Durchschnittsberechnung abgibt. Etwas verwickelter wird die Berechnung, wenn bei der Darstellung eines zahlenmäßigen Merkmals die Fälle, wie in der Statistik zumeist, bereits in Gruppen gefaßt, somit ideal auf die Gruppenmitte uniformiert sind. Sie können dann nicht mehr als Individualitäten, sondern nur nach dem Werte der Gruppenmitte in Rechnung gesetzt werden. Es werden daher mit dem Werte der Gruppenmitte so viele Einheiten in die Rechnung eintreten, als die Gruppe Einheiten enthält. Man spricht in diesem Falle vom „gewogenen" arithmetischen Mittel; es ist, wie wir sehen, nur ein Sonderfall des einfachen arithmetischen Mittels. Ein Gegensatz besteht zwischen den beiden nicht.

Gruppenmitte in RM.	Zahl der Fälle	Produkt der beiden
27,50	13	357,50
32,50	45	1462,50
37,50	98	3675,00
42,50	309	13132,50
47,50	687	32632,50
52,50	1128	59220,00
57,50	1270	73025,00
62,50	1035	64687,50
67,50	432	29160,00
72,50	148	10730,00
77,50	73	5657,50
82,50	45	3712,50
Summe	5283	297452,50

$$297452{,}50 : 5283 = 56{,}3037$$

$$A = 56{,}30 \text{ RM.}$$

Wir wollen das Verfahren an einem Stoffe zeigen, auf den wir noch einmal später, bei der Korrelationsrechnung (S. 137), zurückkommen werden, an der Ausgliederung von 5283 über 21 Jahre alten Facharbeitern in mechanischen und elektrischen Reparaturwerkstätten nach dem Wochenlohn im Jahre 1928 (S. 73). Als Lohngruppen haben wir über 25 bis 30 RM, über 30 bis 35 RM usw., dementsprechend als Gruppenmitten 27,50 RM, 32,50 RM usw.

Der arithmetische Durchschnitt des Wochenverdienstes unserer Facharbeiter betrug somit 56,30 RM.

Bei größeren Zahlen wäre diese definitionsgemäße Art der Berechnung beschwerlich. Man bedient sich daher eines abgekürzten Verfahrens, das auf folgendem Grundgedanken beruht. Das arithmetische Mittel ist der einzige Wert der Reihe, von dem aus die algebraische Summe aller Abweichungen gleich Null ist (siehe unter β, Punkt 1). Wählen wir statt des arithmetischen Mittels einen andern Punkt, so werden die Abstände von ihm einen Rest nach der positiven oder nach der negativen Seite aufweisen. Dieser Rest, auf die Einheit der Beobachtungszahl berechnet, drückt uns die Abweichung des gewählten Hilfspunktes vom arithmetischen Mittel in Gruppeneinheiten aus. Wollen wir den Abstand in der Gruppenbenennung ausdrücken, so müssen wir die gewonnene Zahl noch mit der Gruppenbreite multiplizieren. Die Rechnung nimmt sonach nebenstehenden Verlauf.

Gruppenmitte in RM	Abstand vom gewählten Hilfspunkt a	Besetzungszahl z	Produkt $a \cdot z$	
27,50	-6	13	-78	
32,50	-5	45	-225	
37,50	-4	98	-392	
42,50	-3	309	-927	
47,50	-2	687	-1374	
52,50	-1	1128	-1128	-4124
57,50	0	1270	0	
62,50	$+1$	1035	$+1035$	
67,50	$+2$	432	$+864$	
72,50	$+3$	148	$+444$	
77,50	$+4$	73	$+292$	
82,50	$+5$	45	$+225$	$+2860$
Summe		5283		-1264

$-1264 : 5283 = -0{,}23926$ Gruppeneinheiten
$-0{,}23926 \times 5$ RM $= -1{,}1963$ RM
$57{,}50$ RM $- 1{,}1963$ RM $= 56{,}3037$ RM

Das arithmetische Mittel liegt somit bei 56,30 RM wie oben.

Es muß hier bemerkt werden, daß die Verwendung des gleichen Abstandes 0, +1, +2 usw. wie hier nur dann zulässig ist, wenn die Gruppen einander gleich sind. Sind sie ungleich, so müssen auch die Abstände für die aus der Gleichheit heraustretenden Gruppen entsprechend abgeändert werden.

β) *Die Eigenschaften des arithmetischen Mittels.* Für den Statistiker ist es von Wichtigkeit, folgende Eigenschaften des arithmetischen Mittels zu kennen:

1. Die Summe aller Abweichungen der unterhalb des arithmetischen Mittels liegenden Werte (also der negativen Abweichungen) und die Summe aller Abweichungen der oberhalb des arithmetischen Mittels liegenden Werte (also der positiven Abweichungen) muß gleich sein.

2. Für das arithmetische Mittel wird die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum. Das ist von Wichtigkeit, weil in der Statistik mehr mit Quadraten der Abweichungen als mit den einfachen Abweichungen gerechnet wird (vgl. z. B. die mittlere quadratische Abweichung, Abschnitt II, 9b, dann die Methode der kleinsten Quadrate, Abschnitt II, 13d).

3. Haben wir mehrere statistische Massen der gleichen Art mit den Umfängen $N_1, N_2 \ldots$ und den arithmetischen Mitteln $A_1, A_2 \ldots$ und wollen wir das arithmetische Mittel A der aus diesen einzelnen Massen gebildeten Gesamtmasse mit dem Umfange N kennen, so dürfen wir nicht etwa kurzerhand das einfache arithmetische Mittel aus den arithmetischen Mitteln bilden (also nicht $A = \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{n}$ setzen), sondern müssen hierbei die Größe der einzelnen Untermassen berücksich-

tigen, gerade so, wie das der Fall wäre, wenn wir das arithmetische Mittel dieser Gesamtmasse ohne Kenntnis der bereits gewonnenen arithmetischen Mittel ihrer Untermassen berechnen würden. Es hat also die Formel zu gelten

$$A = \frac{N_1 A_1 + N_2 A_2 + \cdots}{N}.$$

Beispiel. In einer Fabrik bezögen 100 Arbeiter einer bestimmten Art durchschnittlich einen Wochenlohn von 50 RM, in einer zweiten 200 Arbeiter durchschnittlich einen Wochenlohn von 60 RM. Es wäre nun ein schwerer Fehler, den durchschnittlichen Wochenlohn für sämtliche 300 Arbeiter mit 55 RM anzunehmen. Die richtige Berechnung ergibt $\frac{100 \cdot 50 + 200 \cdot 60}{300} = 56{,}67$ RM. Wir sehen, daß der Lohn, den die größere Zahl Arbeiter (200) hatte, durch sein größeres „Gewicht" den Durchschnitt näher zu sich herangezogen hat.

4. Kennen wir die arithmetischen Mittel zweier verschiedenartiger Massen, deren Summe oder Differenz sinnvoll eine dritte statistische Masse ergibt (z. B. die Masse der Männer und der Frauen, die die Gesamtbevölkerung ergeben, die Masse der Geburten und der Sterbefälle, deren Differenz den Geburtenüberschuß darstellt), so ist das arithmetische Mittel der Summen- oder Differenzmasse gleich der Summe oder Differenz der einzelnen arithmetischen Mittel,

$$A = A_1 \pm A_2.$$

Für Summen ist dieser Satz nicht auf zwei Glieder beschränkt, sondern gilt auch für beliebig viele Glieder.

Beispiel. Im Deutschen Reich betrugen die Zahlen für

	die Lebendgeborenen	die Gestorbenen (ohne Totgeb.)	den Geburtenüberschuß
1927	1161719	757020	404699
1928	1182815	739520	443295
1929	1146706	805973	340733
Durchschnitt 1927/29 .	1163746,6	767504,3	396242,3

Es zeigt sich, daß auch im Durchschnitt wie in den Zahlen für alle einzelnen Jahre der Geburtenüberschuß die Differenz der Geborenen und Gestorbenen ist, daß wir also, wenn wir den Durchschnitt für zwei dieser Reihen kennen, ihn nicht auch für die dritte Reihe berechnen müssen, sondern ihn aus den beiden anderen Durchschnitten ableiten können.

5. In der zeichnerischen Darstellung bedeutet die im Punkte des arithmetischen Mittels errichtete Ordinate die Schwerlinie der die statistische Masse darstellenden Figur (Häufigkeitspolygon, von einer Häufigkeitskurve umrahmte Häufigkeitsfläche). Diese Feststellung ist darum von Wichtigkeit, weil die statistische Theorie in Nachbildung der Momente der Mechanik statistische Momente eingeführt hat, die in der modernen Kurventheorie eine große Rolle spielen (vgl. Abschnitt II, 9f).

γ) *Die Bestimmung der Unsicherheit des arithmetischen Mittels.* Wäre die Reihe der Werte, aus denen wir das arithmetische Mittel bilden, nicht beeinflußt von zufälligen Schwankungen, entspräche sie also der Wesensform der Erscheinung, so wäre für uns auch das arithmetische Mittel etwas Endgültiges, nämlich das arithmetische Mittel der Wesensform der Reihe. Da wir die Wesensform aber nur bei einer unendlich großen Zahl von Fällen erwarten dürften, diese aber praktisch nicht erreichbar sind, so können wir dem wahren arithmetischen Mittel der Wesensform entweder in der Weise näher zu kommen versuchen, daß wir aus einer von den zufälligen Schwankungen befreiten, in irgendeiner Weise ausgeglichenen Reihe (vgl.

Abschnitt II, 13) das arithmetische Mittel in der soeben unter α angegebenen Weise berechnen, oder wir müssen uns mit dem arithmetischen Mittel aus den mit Zufallsfehlern behafteten Beobachtungszahlen begnügen. Im letzteren Falle gibt uns die Wahrscheinlichkeitstheorie eine Formel für den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels an die Hand,

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{s}},$$

worin σ die mittlere Abweichung unseres Merkmales (vgl. S. 33, ferner Abschnitt II, 9b), s die Zahl der Beobachtungen bedeutet[1].

Hätten wir also die Möglichkeit, unsere Beobachtung mit der Seriengröße s sehr oft zu wiederholen, so würde aus den zufälligen Abweichungen der aus den jeweiligen s_1, s_2, s_3 usw. gewonnenen arithmetischen Mittel A_1, A_2, A_3...eine mittlere Abweichung berechnet werden können, die dem hier angegebenen theoretischen Werte nahe entspräche.

σ_A hat (ähnlich wie σ, vgl. oben S. 36) die Eigenschaft, daß innerhalb seines Bereiches mit der Wahrscheinlichkeit 0,6827...das Vorhandensein der Wesensform zu erwarten ist, innerhalb der dreifachen σ_A mit der Wahrscheinlichkeit 0,9973...

Beispiel. Wenn wir die Sicherheit des arithmetischen Mittels an dem uns bereits vertrauten Stoffe der Mistelbacher Rekruten (S. 22) prüfen, so erhalten wir als arithmetisches Mittel $A = 166{,}768$ cm, als mittlere (quadratische) Abweichung $\sigma =$ 5,888 cm, als die Unsicherheit des arithmetischen Mittels σ_A somit $\frac{5{,}888}{\sqrt{906}} = 0{,}1956$ cm. Der Spielraum zufälliger Schwankungen liegt, wenn wir zunächst die Annahme machen, daß das arithmetische Mittel von 166,768 die Wesensform darstelle, im Rahmen der Grenzen von $\mp 3\,\sigma_A = \mp 0{,}587$ cm, also zwischen den Werten 166,181 und 167,355 cm. Nehmen wir dagegen, wie es der Wirklichkeit besser entspricht, das arithmetische Mittel $A = 166{,}768$ cm als einen mit einer zufälligen Abweichung behafteten Wert der unbekannten Wesensform des arithmetischen Mittels, dann haben wir, zurückschließend, die Wesensform innerhalb der angegebenen Grenzen zu suchen. Unsere Vermutung findet ihre Bestätigung, wenn wir das arithmetische Mittel von der mit fünfgliedrigen gleitenden Durchschnitten ausgeglichenen Form unserer Verteilung berechnen. Dieses arithmetische Mittel, ein Näherungswert des arithmetischen Mittels der vermutlichen Wesensform, liegt bei 166,755 cm, also reichlich innerhalb der Grenzen des einfachen σ_A.

Aufgabe 9. Es ist das arithmetische Mittel und seine Sicherheit aus der auf S. 87 mitgeteilten Körpergrößenverteilung von 25878 nordamerikanischen Freiwilligen zu berechnen. —

In einer ganz ähnlichen Weise, wie oben auf S. 38f. bei der Prüfung zweier Wahrscheinlichkeiten auf eine etwaige gemeinsame Wesensform vorgegangen wurde, kann dies auch bei der Prüfung zweier Durchschnitte aus gleichartigen Massen getan werden. Es wird der Unterschied der beiden Durchschnitte mit der dreifachen mittleren Abweichung $\sqrt{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2}$ verglichen, und je nach dem Ausfalle des Vergleiches wird auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer gemeinsamen Wesensform geschlossen.

Aufgabe 10. Es ist der oben im Text berechnete Körpergrößendurchschnitt der 906 Mistelbacher Rekruten mit dem in der vorhergehenden Aufgabe 9 berechneten Körpergrößendurchschnitt der nordamerikanischen Freiwilligen zu vergleichen und auf Wesentlichkeit oder mögliche Zufälligkeit des Unterschiedes zu prüfen.

[1] Vgl. hierzu CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung I, 4. Aufl., S. 320ff. — Statistische Forschungsmethoden, S. 148ff.

c) Das geometrische Mittel. Während das arithmetrische Mittel der angemessene Mittelwert für einfache statistische Größenausdrücke ist, ist der angemessene Mittelwert für statistische Größen, die durch Multiplikation oder Division zustande gekommen sind, das geometrische Mittel

$$G = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots} = \sqrt[n]{\Pi z}\,,$$

worin Π das Produktzeichen bedeutet (ähnlich wie Σ das Summenzeichen).

Für den in Gruppen gefaßten Zählstoff verwandelt sich die Formel in

$$G = \sqrt[n]{m_1^{z_1} \cdot m_2^{z_2} \cdot m_3^{z_3} \ldots}\,,$$

worin die m_i die Gruppenmitten, die z_i die Besetzungszahlen bedeuten.

Die Berechnung des geometrischen Mittels an der bereits bekannten Lohnreihe der Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten (S. 73) mag den Rechnungsvorgang veranschaulichen.

Gruppenmitte in RM m_i	Log. der Gruppenmitte $\log m_i$	Zahl der Fälle z_i	Produkt aus dem Log. der Gruppenmitte und der Zahl der Fälle $z_i \cdot \log m_i$
27,50	1,4393327	13	18,7113251
32,50	1,5118834	45	68,0347530
37,50	1,5740313	98	154,2550674
42,50	1,6283889	309	503,1721701
47,50	1,6766936	687	1151,8885032
52,50	1,7201593	1128	1940,3396904
57,50	1,7596678	1270	2234,7781060
62,50	1,7958800	1035	1858,7358000
67,50	1,8293038	432	790,2592416
72,50	1,8603380	148	275,3300240
77,50	1,8893017	73	137,9190241
82,50	1,9164539	45	86,2404255
Summe	—	5283	9219,6641304

$9219{,}6641304 : 5283 = 1{,}74515694$
Num log $1{,}7451569 = 55{,}61$ RM.

Das geometrische Mittel liegt also bei 55,61 RM, das ist, wie immer, niedriger als das arithmetische Mittel von 56,30 RM.

d) Der mittlere Wert (Zentralwert, Median). Denken wir uns alle Fälle einer Reihe der Größe nach geordnet, so drückt bei ungerader Zahl von Einheiten der Merkmalswert des Mittelmannes, bei gerader Zahl von Einheiten derjenige der Mitte zwischen den beiden Mittelmännern den mittleren Wert aus. Sind die Fälle, wie zumeist, in Gruppen eingereiht, so kommt es darauf an, zunächst durch die Abzählung der Fälle die Gruppe festzustellen, in die der Mittelmann oder die Mitte zwischen den beiden Mittelmännern fällt (Einfallsgruppe). Der genauen Bestimmung des Wertes in der Einfallsgruppe dient dann die einfache Formel

$$Z = J \cdot \frac{E + N - V}{2E}\,,$$

worin J die Intervallsbreite, E die Besetzungszahl der Einfallsgruppe, V die Vorzahl (Zahl der Fälle vor der Einfallsgruppe) und N die Nachzahl (Zahl der Fälle nach der Einfallsgruppe) bedeutet[1].

Beispiel. Wir wollen die Berechnung des mittleren Wertes wiederum an der Lohnreihe unserer Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten zeigen. Ihre Anzahl beträgt 5283. Es ist somit der $\frac{5283 + 1}{2}$ te, d. i. der 2642te der Mittelmann. Die folgeweise vorgenommene Aufsummierung der Besetzungszahlen bis zur Gruppe „über 50 bis 55 RM" ergibt 2280 Fälle, die Gruppe „über 55 bis 60 RM" enthält 1270 Fälle; es muß also der Mittelmann in diese Gruppe fallen. Wir haben somit $E = 1270$, $N = 1733$, $V = 2280$. Unsere Formel $\frac{E + N - V}{2E}$ erhält dann den Wert

[1] Näheres über die Ableitung dieser Formel siehe bei Winkler: Statistik, S. 64f.

$\frac{723}{2540} = 0{,}2846$ Teile der Gruppe, somit $\times$ 5 RM = 1,423 RM über der unteren Gruppengrenze. Der mittlere Wert liegt somit bei 55,00 RM + 1,423 RM = 56,42 RM.

Zu dem gleichen Ergebnis hätten wir durch folgende Erwägung gelangen können. Der Mittelmann, der der 2642te Mann der ganzen Reihe und der 362te Mann der Einfallsgruppe ist, teilt dadurch, daß die Reihenmitte durch seine Mittelachse geht, die Besetzungszahl der Einfallsgruppe im Verhältnis von 361,5 zu 908,5. Teilen wir die Gruppenbreite von 55 bis 60 RM nach diesem Verhältnis, berechnen wir also $\frac{361{,}5}{1270} \cdot 5$, so gelangen wir gleichfalls auf den Abstand des mittleren Wertes von der unteren Grenze im Ausmaße von 1,423 RM, somit zum mittleren Werte von 56,42 RM.

e) Der häufigste („dichteste") Wert (englisch „mode"). Der häufigste Wert wird in der Regel nur für sachliche Reihen berechnet. Er ist derjenige Wert eines zahlenmäßigen Merkmales, auf dem sich die größte Zahl von Fällen vereinigt. Der dichteste Wert kann natürlich für jede Kurvengestalt berechnet werden, und es sind auch zwei oder mehrere dichteste Werte nebeneinander möglich. Seinen vollen Sinn erhält er aber dort, wo die Kurve typischerweise eine oder mehrere Häufungen aufweist, wie im Falle der Normalkurve, der schiefen Verteilungskurve, der J-Kurve und der zusammengesetzten Kurven (wie etwa den Kurven der Altersverteilung der Gestorbenen in der Wirklichkeit und in der Berechnung der Sterbetafeln); in der Regel ist dann auch die Häufung gegenüber dem übrigen Verlaufe so bedeutend, daß dadurch der häufigste Wert wirklich zu einem kennzeichnenden Werte des Kurvenverlaufes wird.

Der häufigste Wert wird in der Regel nur vom gruppierten Material berechnet, da im Rohmaterial die Häufung bei einem stetig verlaufenden Werte nur bei einer sehr großen Zahl von Fällen beobachtet werden kann.

Der erste Schritt, den häufigsten Wert zu bestimmen, ist der, die Gruppe des häufigsten Wertes festzustellen. Im Beispiele unserer Facharbeiter (S. 73) wäre die häufigst besetzte Lohngruppe über 55 bis 60 RM, der häufigste Wert also bei 57,5 RM. Für manche Zwecke mag eine solche rohe Bestimmung genügen.

Soll der dichteste Wert dagegen feiner bestimmt werden, so sind verschiedene Möglichkeiten gegeben. Besitzen wir die analytische Gleichung unserer Kurve, so werden wir bei der Bestimmung des dichtesten Wertes, der die Stelle des Kurvenmaximums bedeutet, auf das Maximalproblem der Differenzialrechnung geführt. Besitzen wir die Kurvengleichung nicht oder wollen wir den erwähnten Weg nicht gehen, so besteht ein einfaches Verfahren darin, durch die Endpunkte der drei mittleren Gruppenordinaten, also die Gruppenordinate der häufigsten Besetzung und die der vorausgehenden und der ihr nachfolgenden Gruppe, eine Parabel 2. Grades zu legen, und für dieses Parabelstück das Maximum zu bestimmen. Die Durchrechnung führt auf eine einfache Formel, die sofort, ohne den Rechnungsgang jedesmal zu wiederholen, verwendet werden kann[1].

Bezeichnen wir mit b die Besetzungszahl der Gruppe der stärksten Besetzung, mit a die der ihr vorausgehenden, mit c die der ihr folgenden Gruppe, so wird der Abstand des dichtesten Wertes von der unteren Grenze der Gruppe b ausgedrückt durch

$$d = -\frac{(b-a)}{(c-b)-(b-a)}.$$

d ist ausgedrückt in Gruppeneinheiten. Wollen wir von diesen auf die tatsächlich vorliegende Benennung gelangen, so müssen wir noch d mit der Gruppenbreite J multiplizieren. Den so erhaltenen Wert müssen wir zur unteren Grenze der Gruppe b (Gruppe der stärksten Besetzung) hinzu addieren.

[1] Siehe die Ableitung bei Czuber: Statistische Forschungsmethoden, S. 71f.

Beispiel. Auch für die Veranschaulichung dieses Rechenvorganges mögen unsere Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten (S. 73) herhalten.

$$a = 1128 \qquad 1.\ b - a = +142$$
$$b = 1270 \qquad 2.\ c - b = -235$$
$$c = 1035 \qquad 3.\ (c - b) - (b - a) = -377\,.$$
$$d = -\frac{(b - a)}{(c - b) - (b - a)} = -\frac{142}{-377} = +0{,}3766 \text{ Gruppeneinheiten,}$$
$$0{,}3766 \times 5 = 1{,}883 \text{ RM},$$
$$D = 55{,}00 \text{ RM} + 1{,}88 \text{ RM} = 56{,}88 \text{ RM}$$

Der feiner berechnete häufigste Wert kann auch aus Gruppen unstetiger Merkmale berechnet werden. Es wird den Statistiker nicht befremden, wenn er den häufigsten Wert bei einem Bruchteil der Einheit findet (z. B. die häufigste Kinderzahl bei 2,5 Kindern). Die Deutung ist dann ähnlich wie bei einem entsprechenden Falle des Durchschnittes: daß die häufigst vorkommende Kinderzahl nicht 2 und nicht 3, sondern 2,5 Kinder wären, wenn auch Familien mit Bruchteilen von Kindern möglich wären.

f) Zusammenfassendes über die statistischen Mittelwerte. I. FISHER hat in geistreicher Weise die drei gangbarsten Mittelwerte des arithmetischen Mittels, des mittleren und des häufigsten Wertes mit drei Uhren verglichen, von denen die eine schon bei jeder Sekunde, die zweite erst bei vollendeten Minuten, die dritte bei vollendeten Stunden die Zeitänderung durch eine Verrückung der Zeiger anzeige. So ist der arithmetische Durchschnitt schon auf die kleinste Änderung, die irgendwo an einem beliebigen Reihenglied der Mitte oder Außenlage vor sich geht, empfindlich, der mittlere Wert wohl von allen Beobachtungen abhängig, aber nicht in der gleichen empfindlichen Weise, der dichteste Wert dagegen nur von der Gruppierung in den entscheidenden Häufungsgruppen. Eine solche Empfindlichkeit oder Unempfindlichkeit kann eine Tugend oder ein Mangel sein. Es ist im allgemeinen ein Vorteil des arithmetischen Mittels, so empfindlich auf jede Änderung in der Reihe zu antworten. Diese Empfindlichkeit kann aber auch ein Mangel werden, wenn bei einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Fällen zufallsbestimmte Außenfälle auf die Bestimmung des arithmetischen Mittels einen starken Einfluß nehmen. In solchen Fällen greift der Statistiker lieber zu dem weniger empfindlichen mittleren Werte.

Ein zweiter Unterschied liegt in der leichteren oder schwereren Berechenbarkeit. Für das arithmetische Mittel müssen wir, wie wir gesehen haben, eine ziemlich umständliche Berechnung anstellen, für die Ermittlung des mittleren oder des häufigsten Wertes dagegen nicht.

Noch ein dritter Grund spricht bisweilen gegen die Wahl des arithmetischen Mittels und für die Verwendung des mittleren Wertes: die unvollkommene Durcharbeitung der vorliegenden statistischen Reihe, die im unteren oder oberen Ende eine „offene Gruppe" besitzt (S. 66). Hier ist, sofern nicht eine annähernde Beseitigung des Mangels durch eine plausible Wahl der Gruppenmitte für die offene Gruppe gelingt, die Verwendung des mittleren Wertes ein Ersatz für das arithmetische Mittel, das hinsichtlich der Durcharbeitung der statistischen Reihe anspruchsvoller ist als der mittlere Wert.

Diese Gründe, die manchmal das arithmetische Mittel als den weniger verwendbaren Mittelwert erscheinen lassen, werden jedoch weitaus überwogen durch den theoretischen Wert des arithmetischen Mittels. Das arithmetische Mittel spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie als die wahrscheinlichste Annahme des durch zufällige Abweichungen entstellten wahren Wertes eine große Rolle. Das arithmetische Mittel ist darum auch der Ausgangspunkt für die Berechnung der mittleren Zufallsabweichung σ. Von dieser Stellung aus ist das arithmetische Mittel auch in der übrigen statistischen Theorie zu einer weitaus überragenden Bedeutung gelangt. Das arithmetische Mittel und die davon aus berechnete mittlere Abweichung sind gewissermaßen die theoretischen Grundmaße, die Hauptaussagen über die Lage einer Kurve und ihre Streuung geworden. Dem mittleren und dem häufigsten Wert kommt dagegen nur insofern eine Bedeutung zu, als sie gelegentlich als Ersatz des arithmetischen Mittels verwendet werden können. Daß dies möglich ist, wird durch die Lage der drei Mittelwerte zueinander bewirkt.

Bei der symmetrischen Verteilung fallen alle drei Werte ohne Zweifel ineinander, es kann daher unbedenklich der eine für den anderen verwendet werden. Bei der schiefen Verteilung fallen sie zwar auseinander, aber in der Regel in einer bestimmten Reihenfolge derart, daß der häufigste Wert weiterhin im Punkt der größten Häufung verbleibt, und ihm nun nach der Seite des flacheren Abfalles hin zuerst der mittlere, dann der durchschnittliche Wert folgt. Diese Lagerung trifft auch beim äußersten Fall der schiefen Verteilung, bei der J-Kurve, zu. Es ist nun theoretisch nachgewiesen und empirisch häufig bestätigt worden, daß sich die Entfernung des häufigsten Wertes vom mittleren zu derjenigen des mittleren vom durchschnittlichen Werte verhalten wie 2 : 1 (Abb. 6). Aus dieser Lageregel schöpfen im Falle einer schiefen Verteilung auch die beiden leichter zu berechnenden Werte, der häufigste und der mittlere Wert, eine Beziehung zum arithmetischen Mittel, die es berechtigt, daß für eine bestimmte Verteilung anstelle des arithmetischen Mittels der häufigste oder der mittlere Wert berechnet werde.

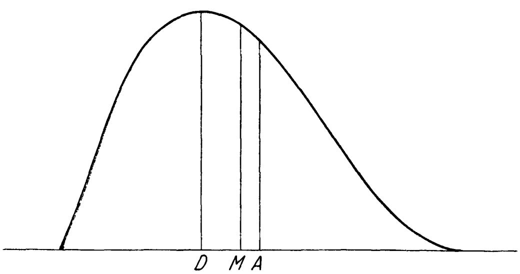


Abb. 6. Die Lageregel der Mittelwerte.

In unserem Beispiel der Lohnreihe der Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten nehmen die drei erwähnten Mittelwerte folgende Werte an:

$$D = 56{,}88 \text{ RM}$$
$$M = 56{,}42 \text{ ,,}$$
$$A = 56{,}30 \text{ ,,}$$

Die drei Mittelwerte haben somit die lagerichtige Stellung zueinander.

Die Abstände $D - M$ und $M - A$ betragen 0,46 und 0,12, verhalten sich also wie 3,8 : 1. Hier ist die Regel nicht befolgt. Wir müssen freilich bedenken, daß die Gruppen sehr groß sind, und die bei der Berechnung der beiden letzteren Werte gemachte Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Fälle über die ganze Gruppenbreite eine Fehlerquelle in sich schließt.

Aufgabe 11. Es ist der durchschnittliche, der mittlere und der dichteste Wert aus der Summenzeile der gleichen Korrelationstabelle (Gliederung der gleichen Facharbeiter nach Arbeitsstunden S. 137) zu berechnen, und die Lagerichtigkeit der drei Werte wie hier zu prüfen.

9. Die statistischen Streuungsmaße[1].

a) Zweck, Wesen und Einteilung. Wir knüpfen an das oben in Abschnitt II, 2 über die Streuung (Zufalls- und Wesensstreuung) Gesagte an. Wir erinnern uns, daß die Streuung einen der Grundtatbestände der Statistik darstellt, und daß es eine der wesentlichsten Aufgaben der Statistik ist, die Streuung zu untersuchen.

[1] Bowley, A. L.: The Measurement of Groups and Series. London 1903. March, L.: L'Analyse de la Variabilité, in Metron 6, H. 2, S. 3ff. Tschuprow, Al. A.: Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, S. 20ff. Leipzig u. Berlin: Teubner 1925. — On the

Die statistischen Streuungsmaße haben nun den Zweck, die Breite einer zahlenmäßig faßbaren Streuung durch einen kurzen Ausdruck zu kennzeichnen. Handelt es sich z. B. um die auf einem Markte erzielten Preise einer Ware, so wird es einen Unterschied machen, ob die bei den als zahlreich vorausgesetzten Verkaufsakten erzielten Preise zwischen 4 und 6 RM oder 4,90 RM und 5,10 RM liegen. Im ersteren Falle werden wir eine größere Streuung feststellen als im zweiten.

Die einfachste Art, die Streuung darzustellen, scheint auf den ersten Blick darin zu liegen, daß man den Abstand der beiden äußersten Fälle anführt, wie in dem soeben gebrachten Preisbeispiel. Diese einfache Art, die Streuung zu messen, ist aber nicht die beste. Der Abstand der Grenzfälle kann bei einer mäßig großen Zahl von Fällen durch den Zufall bestimmt sein; auch kann bei gleich großem Abstand der Außenfälle die Streuung der dazwischen gelagerten Fälle verschieden groß sein, je nachdem eine größere oder geringere Häufung der Fälle gegen die Mitte zu stattfindet. Es kommt also bei der Messung der Streuung nicht nur auf die Grenzfälle an, sondern auf die Gesamtheit der Fälle. Es gilt also, Verteilungsmaße zu finden, die der gestellten Bedingung besser entsprechen als die bloßen tatsächlichen Streuungsgrenzen.

Wir müssen da zwei Gruppen von Streuungsmaßen unterscheiden: solche, die von einem bestimmten Wert ausgehend, irgendeinen kurzen Ausdruck (selbst wieder einen Mittelwert) für die Gesamtheit der Abweichungen von diesem Wert darstellen, und solche, die ohne Beziehung auf einen Mittelwert einen Ausdruck für die Streuung bieten. Zu den ersten Streuungsmaßen gehört die mittlere (quadratische) Abweichung, die Viertelwerts-(Quartil-)abweichung und die durchschnittliche Abweichung. Die mittlere (quadratische) Abweichung geht in der Regel vom durchschnittlichen Wert aus, die Viertelwertsabweichung vom mittleren Wert, die durchschnittliche Abweichung vom dichtesten Wert. In die zweite Gruppe der Streuungsmaße gehört die von C. Gini aufgestellte durchschnittliche Entfernung der Einheiten voneinander.

b) Die mittlere quadratische Abweichung. Dieses Streuungsmaß ist uns nicht mehr fremd. Wir haben von ihm schon oben aus Anlaß der Streuungs-(„Dispersions"-)messung der zufälligen Abweichungen Gebrauch gemacht (Abschnitt II, 3b auf S. 33). Wir haben es dort in der Weise gebildet, daß die Abweichungen aller Beobachtungen vom arithmetischen Mittel festgestellt, deren Quadrate gebildet, addiert und die Summe durch die Zahl der Beobachtungsfälle dividiert wurde, worauf aus dem ganzen die Quadratwurzel gezogen wurde. Wenn wir wie dort diese Abweichungen mit λ bezeichnen, so ist die mittlere quadratische Abweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,\lambda^2}{N}}\,.$$

Da wir es in der statistischen Praxis aber in der Regel nicht mit den einzelnen Beobachtungen, sondern mit den in Gruppen eingereihten Fällen zu tun haben, von denen wir den wahren Wert nicht mehr kennen, sondern die wir nur noch als auf die Gruppenmitte uniformiert betrachten können (vgl. oben S. 65), so ändert

---

Mathematical Expectation of the Moments of Frequency Distributions, in Biometrika **12**, 140ff. Gumbel, E. J.: Ein Maß der Konzentration bei pekuniären Verteilungen, in Arch. f. Sozialwiss. u. Sozialpol. **58**, 113ff. (1927). Gumbel, E. J.: Das Konzentrationsmaß, in Allgemeines Statistisches Archiv **18**, 279ff. (1929). Gini, C.: Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri, in: Atti del R. Istituto Veneto **75**, II (1913/14). de Finetti, B., u. U. Paciello: Calcolo della differenza media, in Metron **8**, H. 3, S. 89ff (1930). Gini, C.: Sul massimo degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni agli indici di variabilità relativa e al rapporto di concentrazione, in: Metron **8**, H. 3, 3ff. (1930). Bortkiewicz, L. v.: Die Disparitätsmaße der Einkommensstatistik (Bull. de l'Inst. Int. de Stat. **25**, 3, S. 189ff., La Haye 1931). Ferner Gini, Savorgnan u. Pietra, ebendort, 299ff.

sich die obige Formel ab in

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma z_i \lambda_i^2}{N}},$$

worin z_i die jeweiligen Gruppenbesetzungszahlen, λ_i die jeweiligen Abweichungen der Gruppenmitte vom arithmetischen Mittel und N $(= z_1 + z_2 + z_3 + \ldots)$ die Gesamtzahl der Fälle bedeutet.

Die Durchführung der Berechnung soll wieder an dem Beispiel unserer Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten (S. 73) dargetan werden.

Gruppenmitte in RM	Abstand vom arithmetisch. Mittel λ_i	Quadrat des Abstandes λ_i^2	Zahl der Fälle z_i	Produkt $z_i \lambda_i^2$
27,50	− 28,8037	829,65313369	13	10785,49073797
32,50	− 23,8037	566,61613369	45	25497,72601605
37,50	− 18,8037	353,57913369	98	34650,75510162
42,50	− 13,8037	190,54213369	309	58877,51931021
47,50	− 8,8037	77,50513369	687	53246,02684503
52,50	− 3,8037	14,46813369	1128	16320,05480232
57,50	+ 1,1963	1,43113369	1270	1817,53978630
62,50	+ 6,1963	38,39413369	1035	39737,92836915
67,50	+ 11,1963	125,35713369	432	54154,28175408
72,50	+ 16,1963	262,32013369	148	38823,37978612
77,50	+ 21,1963	449,28313369	73	32797,66875937
82,50	+ 26,1963	686,24613369	45	30881,07601605
Summe			5283	397589,44728427

$$\sigma^2 = 397589{,}44728427 : 5283 = 75{,}258271$$

$$\sigma = \sqrt{75{,}258271} = 8{,}675 \text{ RM.}$$

Die Durchführung der Berechnung führt, wie ersichtlich, zu sehr unbequemen Rechnungen. Daher ist ein Rechnungsvorgang üblich, der (ähnlich wie bei der Berechnung des arithmetischen Mittels mit Vorteil, S. 74) einen bequemen Hilfsursprung in der Nähe des arithmetischen Mittels an Stelle des bei der vorausgehenden Rechnung beobachteten Ursprungs beim arithmetischen Mittel selbst einführt und die Rechnung mit glatten Größen so durchführt, als wäre der Hilfspunkt das arithmetische Mittel selbst, sich zum Schluß aber vor dem Ziehen der Quadratwurzel dieser Abweichung besinnt und das Quadrat des Abstandes des Hilfspunktes vom arithmetischen Mittel von dem Bruche unter dem Wurzelzeichen abzieht. Der formelmäßige Ausdruck hierfür ist

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma z_i \lambda_i^2}{N} - c_A^2},$$

worin z_i die Gruppenbesetzungszahlen, λ_i die Abstände vom Hilfsursprung, N die Zahl der Fälle und c_A den Abstand des Hilfsursprungs vom arithmetischen Mittel bedeutet. Die Rechnung erfolgt auch hier zunächst in Gruppeneinheiten und muß von da durch Multiplikation mit der Gruppenbreite auf die Maßeinheit der Einteilung gebracht werden. Der Vorgang mag durch folgende Rechnung an dem gleichen Beispiel veranschaulicht werden (s. Tab. S. 83).

Auch für diese abgekürzte Berechnung gilt als Voraussetzung Gruppengleichheit; Gruppenungleichheit müßte bei der Wahl der Abstände ähnlich wie oben beim arithmetischen Mittel (S. 74) berücksichtigt werden.

Will man verschiedene mittlere Abweichungen untereinander vergleichen, so bedient man sich nicht des absoluten Betrages σ, sondern bildet den sogenannten

Variabilitätskoeffizienten $100 \cdot \frac{\sigma}{A}$, in unserem obigen Fall $= 100 \cdot \frac{8{,}675}{56{,}30}$ $= 15{,}41\,\%$ des arithmetischen Mittels.

Den Sinn dieser Verhältniszahl werden wir am besten verstehen, wenn wir uns die oben auf S. 23 zum Zwecke der Vergleichbarkeit untereinander berechneten „verhältnismäßigen Abweichungen“ ins Gedächtnis zurückrufen.

Gruppenmitte in RM	Abstand der Gruppenmitte vom Hilfsursprung 57,50 λ_i	Quadrat des Abstandes λ_i^2	Zahl der Fälle z_i	Produkt $z_i \lambda_i^2$
27,50	− 6	36	13	468
32,50	− 5	25	45	1125
37,50	− 4	16	98	1568
42,50	− 3	9	309	2781
47,50	− 2	4	687	2748
52,50	− 1	1	1128	1128
57,50	0	0	1270	0
62,50	+ 1	1	1035	1035
67,50	+ 2	4	432	1728
72,50	+ 3	9	148	1332
77,50	+ 4	16	73	1168
82,50	+ 5	25	45	1125
Summe			5283	16206

$\frac{\Sigma z_i \lambda_i^2}{N} = 16206 : 5283 = 3{,}0676$

$c_A = 57{,}50 - 56{,}3037 = 1{,}1963$ RM $= 0{,}2393$ Gruppeneinheiten.

$c_A^2 = 0{,}0573$ Gruppeneinheiten

$\sigma = \sqrt{3{,}0676 - 0{,}0573} = 1{,}735$ Gruppeneinheiten, d. i. 8,675 RM wie oben.

c) Die Viertelwerts-(Quartil-)abstände. Diese schließen sich eng an den mittleren Wert an. Haben wir den mittleren Wert als denjenigen Wert erkannt, der die Mitte der nach der Größe geordneten Einheiten bezeichnet, so sind die Viertelwertsabstände diejenigen Werte, die das erste und das dritte Viertel der geordneten Reihe angeben. Mußten wir, um in der Reihe den Platz der Mitte zu finden, die Zahl der Einheiten um 1 vermehren, und das Ganze durch 2 dividieren $\left(\frac{N+1}{2}\right)$, so müssen wir, um den Platz der Viertelwerte zu ermitteln, für den ersten $\frac{N+1}{4}$, für den zweiten $\frac{3(N+1)}{4}$ berechnen. Da wir in der statistischen Praxis diesen Wert kaum jemals aus der Reihe des nach der Größe geordneten Urstoffes, sondern aus den bereits in Gruppen geordneten Zahlen der statistischen Masse zu berechnen haben, wird es sich ebenso wie beim mittleren Wert auch bei den Viertelwertsabständen ergeben, daß die ermittelten Reihenplätze mitten in eine Gruppe fallen, daher erst durch Interpolation in der Gruppe aufgesucht werden müssen. Dabei geht man in der Regel von der bekannten (bei einer steigenden oder fallenden Verteilung nicht ganz richtigen) Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Fälle über die Gruppe aus (vgl. oben S. 65). Zur Ermittlung der genauen Stelle in der Gruppe bedient man sich der folgenden Formeln, die in einer ganz ähnlichen Weise abgeleitet sind, wie die Formel für den mittleren Wert: für den unteren Viertelwert $x_{\frac{1}{4}} = J \cdot \frac{E + N - 3V}{4E}$, für den oberen Viertelwert $x_{\frac{3}{4}} = J \cdot \frac{3(E+N) - V}{4E}$, worin $x_{\frac{1}{4}}$ und $x_{\frac{3}{4}}$ den Abstand von der unteren Grenze der Einfallsgruppe der gesuchten Werte, E die Besetzungszahl der Einfallsgruppe, V die Vorzahl, N die Nachzahl bedeutet (ähnlich wie oben S. 77).

Sind die Viertelwerte ermittelt, so sind die beiden Viertelwertsabstände vom mittleren Werte und der Durchschnitt dieser beiden Viertelwertsabstände zu berechnen.

In dem Beispiel der Lohnverteilung unserer Facharbeiter (S. 73) ergeben sich für den unteren Viertelwert $E = 1128$, $V = 1152$ und $N = 3003$, für den oberen

Viertelwert $E = 1035$, $V = 3550$ und $N = 698$. Die Ausrechnung nach den beiden Formeln führt zu einem unteren Viertelwert von 50,75 RM und zu einem oberen Viertelwert von 61,99 RM. Die Viertelwertsabstände betragen somit:

unterer Viertelwertsabstand	= 5,68 RM
oberer Viertelwertsabstand	= 5,57 „
durchschnittlicher Viertelwertsabstand	= 5,62 „

Die Betrachtung der beiden Viertelwertsabstände ergibt, daß die Häufung der Fälle im 3. Viertel der Reihe etwas größer ist als im zweiten Viertel (weil nämlich das dritte Viertel sich auf einem kleineren Raum zusammendrängt als das zweite Viertel). Wären die beiden Viertelwertsabstände gleich, so läge symmetrische Verteilung vor.

In einer ähnlichen Weise, wie die Besetzungszahlen einer statistischen Reihe durch den mittleren Wert und die beiden Viertelwerte in 4 gleiche Teile zerlegt werden, kommt es bisweilen vor, daß sie in 10 gleiche Teile zerlegt werden („Dezilen"). Der fünfte dieser Dezilen ist natürlich der mittlere Wert.

Diese Art Zerlegung eines Stoffes beruht auf einer Umkehrung des üblichen Darstellungsgedankens: nicht die Gruppen des zahlenmäßigen Merkmals gleich abzumessen und die verschiedene Gruppenfüllung der Besetzungszahlen zu untersuchen, sondern die Gesamtzahl der Fälle in gleiche Teile zu teilen und die Gruppenbreiten sich ändern zu lassen. Diese Art der Betrachtung, die früher häufiger war, ist mit der modernen Verfeinerung der Reihentheorie so gut wie außer Gebrauch gekommen, und es lebt ein kärglicher Rest davon in den gleichfalls selten gebrauchten Viertelwerten weiter.

d) Die durchschnittliche Abweichung. Die durchschnittliche Abweichung ist das einfachste, dem Laienverstande zugänglichste Streuungsmaß. Bei seiner Berechnung wird in der Regel vom häufigsten (dichtesten) Werte ausgegangen. Es werden die negativen oder positiven Abweichungen gesondert berechnet, und aus ihnen die durchschnittliche untere und die durchschnittliche obere Abweichung gebildet. Will man zu einem einzigen Gesamtdurchschnitt kommen, so werden sämtliche Abstände ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen summiert und durch die Zahl der Fälle dividiert. Die durchschnittliche Abweichung ist somit ausgedrückt durch die Formel

$$\delta = \frac{\Sigma\,|\lambda_i|}{N},$$

worin das Symbol $|\,|$ bedeutet, daß bei der Summierung von dem Vorzeichen abgesehen wird. Das Verfahren soll wieder am Beispiel der Lohnverteilung unserer Facharbeiter in elektrischen und mechanischen Werkstätten (S. 73) gezeigt werden. Der Einfachheit halber gehen wir nicht vom fein, sondern vom roh bestimmten dichtesten Werte aus.

Gruppenmitte in RM	Abstand d	Besetzungszahl z		Produkt $d \cdot z$	
27,50	− 6	13		− 78	
32,50	− 5	45		− 225	
37,50	− 4	98		− 392	
42,50	− 3	309		− 927	
47,50	− 2	687		− 1374	
52,50	− 1	1128		− 1128	
			2280		− 4124
57,50	0	1270		0	
62,50	1	1035		1035	
67,50	2	432		864	
72,50	3	148		444	
77,50	4	73		292	
82,50	5	45		225	
			1733		+ 2860

Untere durchschnittliche Abweichung:
− 4124 : 2280 = − 1,8088 Gruppeneinheiten
d. i. − 9,04 RM

obere durchschnittliche Abweichung:
2860 : 1733 = 1,6503 Gruppeneinheiten
d. i. 8,25 RM

durchschnittliche Abweichung:
(4124 + 2860) : 5283 = 1,3219 Gruppeneinheiten,
d. i. 6,61 RM.

Auch hier weist die Verschiedenheit der unteren und der oberen Abweichung auf die asymmetrische Gestalt unserer Lohnkurve hin.

Aufgabe 12. Für die Verteilung unserer gleichen Facharbeiter nach der Arbeitsstundenzahl (Summenzeile in der Korrelationstabelle auf S. 137) sind die mittlere, die Viertelwerts- und die durchschnittliche Abweichung zu berechnen.

e) Die mittlere Entfernung der Einheiten[1]. Diesem von C. Gini aufgestellten Maße liegt der Gedanke zugrunde, daß eine Messung der Entfernung der Einheiten von einem Mittelwerte über eine Abstraktion führe, weshalb als unmittelbarer Streuungsausdruck ein Mittelwert der gegenseitigen [im ganzen $\frac{1}{2} n (n-1)$] Entfernungen der Masseneinheiten voneinander als Streuungsmaß gewählt werden solle. Gini schlägt als einen solchen Mittelwert das arithmetische Mittel der Entfernungen vor.

Obzwar der von Gini vertretene Gedanke unbestreitbar richtig ist, führt seine praktische Durchführung zu umständlichen Rechnungen, weshalb sich dieses Streuungsmaß in der statistischen Praxis bisher nicht durchzusetzen vermochte.

f) Ein Maß der Schiefe von Kurven. Nach der oben (S. 80) mitgeteilten Lageregel der Mittelwerte liegt das arithmetische Mittel A einer schiefen Kurve bei sonst gleicher Streuung um so weiter ab vom dichtesten Werte D, je schiefer die Kurve ist. Natürlich kann die gleiche Wirkung auch eine verschieden große Streuung bei sonst gleicher Kurvenform bewirken. Um diese zweite Wirkung auszuschalten, bedient man sich zur Messung der Schiefe einer Kurve der Formel $\frac{A-D}{\sigma}$.

Aufgabe 13. Es ist die Schiefe der Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten (S. 22), der Lohnverteilung deutscher Facharbeiter und ihrer Arbeitszeitverteilung (S. 137) zu messen und miteinander zu vergleichen.

g) Die statistischen Momente. K. Pearson, der die mathematische Seite der statistischen Theorie in vielfacher Weise bereichert hat, hat in die Statistik auch den Begriff der statistischen Momente eingeführt, der in der Theorie der statistischen Reihen eine wichtige Rolle spielt. Die statistischen Momente sind eine Übertragung der Momente der Mechanik auf die Statistik. In der Mechanik versteht man bekanntlich unter dem n-ten Moment eines Punktes, in dem das Gewicht einer Masse vereinigt erscheint, in Beziehung auf eine Gerade das Produkt $m \cdot s^n$, wenn unter m der die Masse tragende Punkt (Schwerpunkt), unter s die Entfernung des Punktes von der Geraden verstanden wird. n ist eine beliebige Zahl der natürlichen Zahlenreihe, 0, 1, 2, 3 usw., je nach der Wahl des Momentes. Wir können daher von einem 0-ten, 1-ten, 2-ten... 10-ten...n-ten Moment des Schwerpunktes hinsichtlich einer Geraden sprechen.

Die gleiche Formel gilt für das n-te Moment der Schwerlinie einer Fläche hinsichtlich einer Geraden. Hier liegt das Verbindungsstück zur statistischen Theorie. Wir haben bereits oben (S. 65) erwähnt, daß wir uns in einem Häufigkeitspolygon die durch eine Gruppenfläche dargestellte Zahl der Fälle z in der Mittelordinate vereinigt denken können. Bezeichnen wir nun die Entfernung zu einem an irgendeiner Stelle der Abszissenachse errichteten Lot mit d, so ist das n-te statistische Moment der Gruppe hinsichtlich jenes Lotes gleich $z \cdot d^n$. Statt der Momente einer einzigen Gruppe kann man auch die Momente der ganzen Fläche hinsichtlich des Lotes berechnen. Das n-te Moment der ganzen Verteilung hinsichtlich des Lotes wird in der Weise gebildet, daß die Momente der Gruppen summiert werden. Dabei ist es üblich, die Momente auf die Einheit zu berechnen. Es ist daher noch notwendig, die erhaltene Summe durch die Zahl der Masseneinheiten N zu dividieren. Bezeichnen wir das n-te Moment dieser Art mit ν'_n, so erhalten wir

$$\nu'_n = \frac{\Sigma z \cdot d^n}{N}.$$

[1] Vgl. hierzu C. Gini: Variabilità e Mutabilità; in: Studi economico-giuridici della R. Univ. di Cagliari, Bologna 1912, S. 19ff. Auch Bowley: Elements of Statistics, 5. Aufl., S. 114ff.

Eine besondere Bedeutung kommt den Momenten hinsichtlich der Schwerlinie der ganzen Verteilung, das ist der Ordinate des arithmetischen Mittels, zu. Wie leicht einzusehen, ist das 0-te Moment hinsichtlich dieser Ordinate die gleich 1 gesetzte Fläche $\frac{\Sigma z}{N} = 1$, das erste Moment als Abweichung der Einheit vom arithmetischen Mittel $\frac{\Sigma z \cdot d}{N} = 0$, das zweite Moment $\frac{\Sigma z d^2}{N}$ gleich dem Quadrate der mittleren Abweichung, σ^2.

Die Momente ν hinsichtlich des Lotes im arithmetischen Mittel können aus den Momenten ν' hinsichtlich jedes anderen Lotes leicht abgeleitet werden. Da das arithmetische Mittel rechnerisch meistens ein wenig handlicher Wert ist, so werden in der Regel die Momente ν' hinsichtlich eines benachbarten runden Abszissenwertes berechnet und dann in die Momente hinsichtlich des arithmetischen Mittels überführt. Das Verfahren wird durch die im vorausstehenden gegebene Hilfsrechnung zur Berechnung des arithmetischen Mittels (S. 74) und durch die abgekürzte Berechnung des Quadrates der mittleren Abweichung σ^2 (S. 82), deren Quadrat, wie erwähnt, ein Sonderfall der statistischen Momente ist, beleuchtet.

Mit der Berechnung der Flächenmomente aus dem Häufigkeitspolygon ν' und ν ist jedoch die Arbeit nicht beendet. Üblicherweise werden die Flächenmomente nicht für Zwecke des Häufigkeitspolygons, sondern für solche der Häufigkeitskurve berechnet. Es geht dann der obige Ausdruck von ν_n über in

$$\mu_n = \int_a^b y\, x^n\, dx\,,$$

worin x die Abszissenwerte in einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im arithmetischen Mittel liegt, also gleichzeitig die Abstände von diesen, y die den jeweiligen x nach der vorliegenden Kurvenform zugehörigen Ordinaten bedeutet.

Diese μ, auf die es eigentlich ankommt, können aus den ν rechnerisch abgeleitet werden.

Die statistischen Momente haben für die moderne Reihentheorie eine große Bedeutung gewonnen. Sie spielen in dem System der von K. PEARSON aufgestellten Kurven (vgl. unten Abschnitt 11b), aber auch darüber hinaus eine Rolle[1].

10. Die Normalkurve[2].

a) Die Darstellung der Verteilungsform. Die symmetrische Verteilung ist uns bereits bekannt. Sie ist die Verteilung der durch zufällige Schwankungen nach den Regeln der Glücksspiele abgelenkten Erfolge. Hier haben wir es aber nicht mehr mit der in den vorausgegangenen Abschnitten genügend behandelten Zufallsstreuung, sondern mit der Wesensstreuung der Massen zu tun, d. i. einer solchen Streuung, die mit der wechselnden Seriengröße nicht etwa verschwindet, sondern im Gegenteil immer deutlicher hervortritt. Hier kommen also solche statistische Reihen in Betracht, die, einer Ausgliederung oder einem sonstigen reihenbildenden Anlaß entstammend, eine Wesensverschiedenheit der ausgegliederten (oder aneinandergereihten) Teilmassen (Massen) in der Art aufweisen, daß sie sich zur symmetrisch gebauten Form der Normalkurve zusammenfügen. Ein Beispiel möge dies zeigen (s. Tab. S. 87)[3].

---

[1] Näheres über das zur Gewinnung der Momente zu beobachtende Rechenverfahren findet man bei K. PEARSON: On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurements, Biom. **1**, 265; **2**, 1. E. PAIRMAN u. K. PEARSON: On Corrections for Moment-Coefficients usw., Biom. **12**, 231. W. F. SHEPPARD: Calculation of the Most Probable Values of Frequency Constants usw. Proc. Lond. Math. Soc. **29**, 353. Eine übersichtliche Darstellung findet sich bei W. PALIN ELDERTON: Frequency Curves and Correlation, 2. Aufl. Layton, London 1927. S. 12ff.

[2] ELDERTON, W. P.: Frequency Curves and Correlation. BORTKIEWICZ, L. v.: Die Variationsbreite beim Gaußschen Fehlergesetz. Nordisk Statistisk Tidskrift **1**, 11ff. (1922). CHARLIER, C.V.L.: Über das Fehlergesetz. Arkiv f. mat., astr. och fysik **2**, Nr. 8. Vergleiche ferner die zu Abschnitt II, 3 und 4 angegebenen Schriften von LEXIS und v. BORTKIEWICZ.

[3] PEARSON, K.: Contributions to the Mathematical Theory of Evolution II, S. 385, in: Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A, **186** (1896).

Die symmetrische Anordnung geht sowohl aus dem nachfolgenden Tabellchen, als auch aus der zeichnerischen Darstellung dieser Zahlen (Abb. 7) hervor. Gegenüber einer ähnlichen Darstellung (Körpergrößenverteilung der 906 Mistelbacher Rekruten, S. 22) bemerken wir die größere Glätte der Umrandung, hervorgerufen durch die bedeutend größere Beobachtungszahl.

Körpergrößenverteilung von 25878 nordamerikanischen Freiwilligen.

Gruppenmitte in cm	Zahl der Fälle	Gruppenmitte in cm	Zahl der Fälle
130,81	1	166,37	3475
133,35	1	168,91	4054
135,89	2	171,45	3631
138,43	1	173,99	3133
140,97	3	176,53	2075
143,51	7	179,07	1485
146,05	6	181,61	680
148,59	10	184,15	343
151,13	15	186,69	118
153,67	50	189,23	42
156,21	526	191,77	9
158,75	1237	194,31	6
161,29	1947	196,85	2
163,83	3019		
		Insgesamt	25878

b) Der analytische Ausdruck der Normalkurve und seine Bedeutung. Wenn ein Schütze mit dem gleichen Gewehr eine Anzahl von Schüssen auf eine Scheibe abgibt, so werden die Treffer nie streng nebeneinander liegen, sondern auseinanderfallen. Diese Streuung wird dadurch bewirkt, daß der beste Schütze kein Präzisionsmechanismus und das beste Gewehr keine restlose Erfüllung der Forderungen ist, die die physikalische Theorie für das Gleichbleiben der Erfolge untereinander aufstellt. Die Streuung wird je nach der Güte des Schützen und des verwendeten Gewehres größer oder kleiner sein. Ganz ähnlich ist es mit der Messung irgendeiner physikalischen Größe. Auch hier werden die unvermeidlichen Fehler, je nach der Geschicklichkeit und Aufmerksamkeit des Messenden und nach der Tauglichkeit des verwendeten

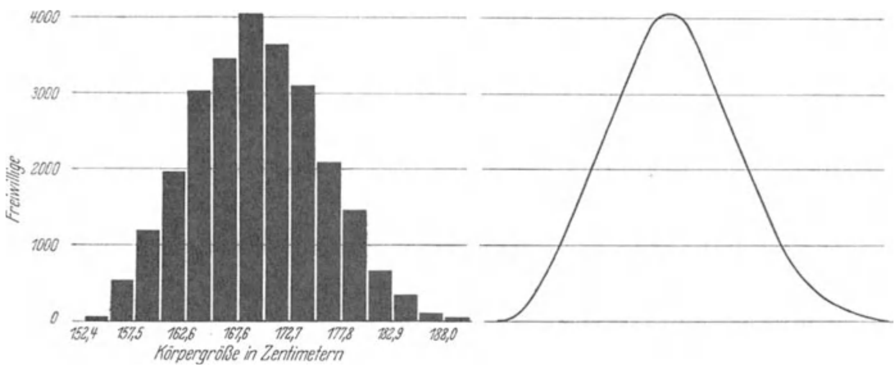


Abb. 7. **Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der Körpergrößenverteilung amerikanischer Freiwilliger im Jahre 1865.**

Maßes, in ihrer Gesamtheit größer oder kleiner sein. Wenn wir z. B. die Körpergröße eines Menschen mit einem anthroprometrisch tauglichen Instrument wiederholt messen, so werden die Unterschiede der wiederholten Messungen wahrscheinlich nur Bruchteile von Millimetern betragen, während sie, wenn wir die Körpergrößenverzeichnung mit einem quer über den Kopf gelegten Lineal am Türstock vornehmen, größere Abweichungen aufweisen werden. Ebenso wird die Streuung der wiederholten Messungen verschieden sein, wenn wir die Länge eines Gegenstandes mit einem einzigen für die ganze Länge ausreichenden Maßstab messen, oder etwa mit einem kurzen Lineal, das ein wiederholtes Anlegen notwendig macht. Wie immer die Tauglichkeit der Person des Messenden und des verwendeten Meßinstrumentes sein mag, sicher ist, daß die Erfolge der Messung eine Streuung aufweisen werden, und zwar in der Weise, daß sie bei einer genügend großen Zahl von Messungen eine symmetrische Gestalt annehmen, mit einer größten Häufigkeit der Erfolge in der Mitte und abnehmenden Häufigkeiten nach den Seiten.

Dies läßt sich sehr leicht durch einen Versuch nachweisen. Die folgenden Zahlen entstammen einer 300maligen Messung einer Tischkante mit einem kurzen Lineal, also einem Meßgerät, das wegen der Notwendigkeit des wiederholten Anlegens nicht als ideal bezeichnet werden kann. Die Ergebnisse dieser Messung waren nebenstehende.

Ergebnisse von 300 Messungen einer Tischkante mit einem kurzen Lineal.

Gemessene Länge in m	Zahl der Messungen	
2,104	3	13
2,105	10	
2,106	38	85
2,107	47	
2,108	49	102
2,109	53	
2,110	49	80
2,111	31	
2,112	13	20
2,113	7	
Insgesamt	300	

Da es sich hier um nur 300 Messungen, also eine verhältnismäßig kleine Anzahl handelt, so tritt die bezeichnende symmetrische Lagerung in unseren rohen Zahlen nur in groben Umrissen hervor. Die Kurvengestalt wird aber deutlicher, wenn wir die Gruppen zu 2 und 2, symmetrisch um das bei 2,1086 m liegende arithmetische Mittel gelagert, zusammenfassen (2. Reihe der Besetzungszahlen in der nebenstehenden Übersicht).

Diese Art der Gruppierung der Messungen legt die Annahme nahe, daß der wahre Wert des gemessenen Gegenstandes in der Mitte dieser Anhäufung, also in der nächsten Nähe des arithmetischen Mittels der vorgenommenen Messungen, zu suchen sei. Es wird daher überall dort, wo der wahre Wert einer zu messenden Größe nicht unmittelbar bekannt ist, und die Messungsfehler nur als zufällig zu beurteilen sind, das arithmetische Mittel als die wahrscheinlichste Annahme für den wahren Wert der Größe anzusehen sein.

Wenn wir nun nach den Entstehungsgründen dieser Streuung fragen, so ergibt sich aus der Beobachtung des Messungsvorganges, daß hier mehrere Fehlerursachen zusammentreffen, die die Neigung haben, kleine Abweichungen entweder nach der einen oder nach der anderen oder nach beiden Seiten zu verursachen. Wenn wir z. B. drei Ursachen hätten, die mit gleicher Leichtigkeit (und darum auch mit gleicher Wahrscheinlichkeit) folgende Fehler erzeugen[1]

1. Ursache	$-2,$	$-1,$	0				
2. „		$-1,$	$0,$	$1,$			
3. „		$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	

dann sind aus dem Nebeneinanderbestehen und Zusammentreffen dieser 3 Ursachen folgende Fehler möglich:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,$$

und zwar können diese Fehler folgeweise auf

$$1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 8,\ 6,\ 3,\ 1$$

verschiedene Arten entstehen, -4 allein aus dem Zusammentreffen von -2, -1 und -1, -3 dagegen schon aus dem Zusammentreffen von -1, -1, -1, aus -2, -1, 0 und aus -2, 0, -1; usw. Es ist klar, daß die zu beobachtenden Fehler, die ein Aufrechnungsergebnis des Zusammentreffens der Elementarfehler vorstellen, in dem Verhältnis häufig oder weniger häufig auftreten werden, als sie häufige oder weniger häufige Kombinationen darstellen.

Das vorliegende Beispiel kann durch Vergrößerung der Zahl der möglichen Abweichungen bei den einzelnen Ursachen und besonders auch durch die Vergrößerung der Zahl der in das Spiel tretenden Ursachen erheblich verwickelter gestaltet werden.

[1] Das Beispiel ist entnommen Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung 1, 290.

In unserem Beispiel bedeutet das achtmalige Anlegen des Lineals acht solche Ursachensysteme, das Ablesen des Enderfolges noch eines dazu (wobei von Rechen- und Schreibfehlern ganz abgesehen ist).

Denken wir uns eine sehr große Anzahl von Messungen gegeben, so daß wir uns die Gruppenbreite sehr klein und die Gruppen dabei noch immer mit Beobachtungen reichlich besetzt denken können, so wird sich eine symmetrische Kurve von einer kennzeichnenden Gestalt, die sogenannte Normalkurve (Abb. 7) ergeben. Mit ihrer analytischen Untersuchung hat sich unter anderen besonders GAUSS befaßt, weshalb sie auch die „Gaußsche" Fehlerkurve genannt wird. GAUSS hat für die Normalkurve, die Zahl der Beobachtungsfälle $N = 1$ gesetzt, den analytischen Ausdruck gefunden

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

oder im Hinblicke darauf, daß $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = h$ das bekannte Gaußsche Präzionsmaß ist[1],

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}\,.$$

Darin besagt der Ausdruck $\varphi(x) = y$, daß die als jeweilige Ordinate zu denkende Häufigkeit des Vorkommens eines Fehlers x eine Funktion der Größe dieses Fehlers ist; hierbei ist der Nullpunkt des Koordinatensystems als durch die Symmetrieachse der Verteilung gelegt zu denken, die Abweichungen also als im negativen und positiven Sinne davon mit jeweils gleichen Ordinaten verlaufend. σ ist das bekannte Streuungsmaß (S. 81), π die bekannte Ludolphsche Zahl 3,14159 . . ., e die Basis der natürlichen Logarithmen 2,71828...

Wie wir sehen, stimmt die analytische Gleichung der Normalkurve vollständig mit derjenigen der Wahrscheinlichkeitskurve (S. 36) überein. Ein Unterschied der beiden ergibt sich nur daraus, daß die mittlere Abweichung σ bei der Wahrscheinlichkeitskurve einer strengen Regel folgt, bei der Normalkurve nicht. Der erstere Fall stellt sich also als ein Sonderfall des zweiten dar. (Davon hat LEXIS in seinem Dispersionskoeffizienten Gebrauch gemacht, indem er das an die strengeren Bedingungen gebundene σ der Glückspiele zum Maße der Streuung überhaupt machte.)

Die erwähnte Funktion stellt, wie erwähnt, die Verteilung der Ordinatenwerte, die Fläche gleich 1 gesetzt, also die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen x dar. Die Verteilung der Grundzahlen gewinnen wir, indem wir den Ausdruck der rechten Seite mit der Beobachtungszahl N multiplizieren. Es lautet dann die Gleichung

$$\varphi(x) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Für die praktische Berechnung ist es noch wichtig zu bemerken, daß die Teilausdrücke der rechten Seite $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ und $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ den Wert y_0, d.i. den Wert der größten Ordinate, derjenigen des Koordinatenursprungs, für die relative und für die absolute Verteilung darstellen.

Die Werte für $\varphi(x)$ sind ebenso wie diejenigen des zugehörigen Integrals in Tafeln niedergelegt, so daß es genügt, für eine gegebene Verteilung σ zu berechnen, um die den verschiedenen Abweichungen zukommenden Häufigkeiten zu finden. Über die Verwendung solcher Tafeln für die Kurvenanpassung soll aber erst unten gesprochen werden. Hier sei zunächst auf die analytische Ausdeutung des vorliegenden Ausdruckes eingegangen.

[1] Über die Ableitung siehe CZUBER: Wahrscheinlichkeitsrechnung 1, 297ff.; Statistische Forschungsmethoden: S. 201.

Gauss ging bei seiner Ableitung von der zu messenden Größe aus, für die das arithmetische Mittel der wiederholten Beobachtungen die wahrscheinlichste Annahme sei. Die Fehler seien rein zufällig in dem Sinne, daß jede der Fehlerursachen die gleiche Neigung habe, einen Fehler nach oben wie nach unten zu erzeugen. Dieser Hypothese käme zwar nicht dem Wesen aber dem Ergebnis nach diejenige gleich, daß eine größere Anzahl von Fehlerursachen vorhanden wäre, die immer einen gleichgerichteten negativen oder positiven Fehler erzeugen müßten, daß aber die Zahl der Ursachen positiver Wirkung derjenigen negativer Wirkung gleich käme, so daß es auch hier zu einer Aufhebung der Abweichungen bei genügend großer Zahl käme. Es ist aber von späteren Mathematikern gezeigt worden, daß für die Normalkurve eine Kurvenformel von ganz ähnlichem Aufbau aus der viel allgemeineren Annahme abgeleitet werden kann, daß in jeder Abweichung ein System von Elementarabweichungen wirksam wird, deren jede positive und negative Werte in einem engen Zwischenraum annehmen kann. Dabei wurde von der Voraussetzung der gleichen Wahrscheinlichkeit positiver und negativer Elementarabweichungen abgegangen und es wurden bei ihnen beliebige Wirkungsgesetze zugelassen; auch wurde die ursprüngliche Annahme vollständiger Unabhängigkeit der Abweichungssysteme voneinander aufgelassen. Als einzige Bedingung ist eine negative übriggeblieben, daß unter den Elementarabweichungen nicht eine oder einige wenige durch ihre Wirkung überwiegen dürfen[1]. Die Fehlersysteme können alle auch grundsätzlich einseitig wirksam sein, was dann eben nur zur Folge hat, daß der mittlere Wert der Abweichungen mit der wahren Größe des gemessenen Gegenstandes nicht übereinstimmt; der Symmetrie der erlangten Beobachtungen wird dadurch aber nicht Abbruch getan. (Man vgl. damit die symmetrischen Formen, die bei ungleichen p und q, aber bei genügend großer Beobachtungszahl auch nach dem Binomialgesetz zustande kommen können, S. 31f.). Diese Erkenntnis ist für die stoffliche Ausdeutung des Gegenstandes wichtig. Bekanntlich hat Quetelet unter dem Eindrucke der Gaußschen Hypothese für die Ableitung der Normalkurve seine verfehlte Theorie vom mittleren Menschen als dem von der Natur angestrebten Normalfall aufgestellt. Die Abweichungen von dem aus einer symmetrischen Verteilung gewonnenen mittleren Werte betrachtete er als Fehler der Natur, die in allen Fällen das normale Ausmaß der Eigenschaft angestrebt, aber nicht immer erreicht hätte. Dieser Irrtum Quetelets wird durch die erweiterte Annahme über das Zustandekommen der Fehlerkurve widerlegt.

Wenn wir nun das oben gebrachte Beispiel der Körpergrößenverteilung daraufhin prüfen, ob die der Gaußschen Normalkurve zugrunde liegenden Hypothesen darauf anwendbar sind und für die Verteilungserscheinung eine genügende Erklärung geben, so ist diese Frage zu bejahen. Wir wissen aus der Vererbungslehre, daß die Dimensionen aller Körperteile einzeln vererbt werden, daß sich also die im einzelnen Beobachtungsfalle erreichte Körpergröße aus zahlreichen voneinander nicht ganz abhängigen Teilgrößen zusammensetzt, deren jede in einem gewissen Spielraum Schwankungen unterworfen ist. Dazu kommen noch alle persönlichen Beeinflussungen des Wachstums bis zu dem beobachteten Alter, Einflüsse von Luft, Ernährung usw., deren Ergebnis wieder als eine Summe aus den durch die Jugend und das weitere Leben hindurch wirkenden Teileinflüssen gedacht werden muß. Es ist klar, daß eine rassemäßig gleichartige Masse unter diesen Umständen eine Wesensstreuung zeigen muß, und zwar eine Wesensstreuung, in der das Zusammenwirken dieser Elemente Häufigkeitszahlen hervorruft, die der Wahrscheinlichkeit der im Spiel gestandenen Kombinationen entsprechen. Hierbei kommt wegen der großen Anzahl der

[1] Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung **1**, 4. Aufl., S. 289ff.; über zum Teil weitergehende Annahmen siehe ebendort, S. 451, und Statistische Forschungsmethoden, S. 205ff. Edgeworth, F. Y.: Sur l'application du calcul des probabilités à la statistique. Bull. d. Intern. Statist. Inst. **18**, 220ff. (englischer Text S. 505ff.). Paris 1909.

zusammenwirkenden Elementarursachen die symmetrische Verteilung zustande. Aus dem vorher Ausgeführten geht hervor, daß die durchschnittliche (= häufigste) Körpergröße durchaus nicht sicher als die der ganzen Verteilung zugrunde liegende „Normalgröße" anzusehen ist. (Dieses könnte nur bei Zutreffen der Gaußschen Annahme über die Wirkung der Elementarabweichungen behauptet werden; es ist jedoch kein Anhaltspunkt dafür gegeben, daß die Gaußsche Annahme in einer statistisch gegebenen Normalkurve auch wirklich zutreffe.)

Die hier gebrachte Deutung der Körpergrößenverteilung zeigt, daß sich die statistische Theorie nur den weitesten Annahmen über die Normalkurve anschließen kann, wobei eine Loslösung von der Vorstellung einer zu messenden (oder hier: von der Natur angestrebten) Größe erfolgen muß, und nur die Annahme einer Summenwirkung des vielfältigen Zusammenspieles der Variationsmöglichkeiten von Teilgliedern der gemessenen Größe übrigbleibt. Es ist darum auch irrtümlich, in Anlehnung an die Gaußsche Hypothese hier von Fehlern und Fehlermaßen („mittlerer Fehler" usw.) zu sprechen. Wir wollen bei unseren allgemeineren Bezeichnungen „Streuung und Streuungsmaße" bleiben, wenn wir aber von Abweichungen sprechen, nur an die Abweichungen von gewissen statistisch bemerkenswerten Mittelwerten denken, diese aber von jeder mystischen Deutung („von der Natur angestrebte Größe" u. dgl.) frei lassen.

Wir wollen die Gelegenheit nicht verabsäumen, hier auch auf die häufige Verwechslung der Normalkurve als Wesensstreuung mit derjenigen als Zufallsstreuung hinzuweisen. Die Normalkurve als Wesensstreuung kommt hier, wie wir gesehen haben, durch das Zusammenwirken anatomischer und physiologischer Umstände zustande. Aus dieser in der Wesensform, also theoretisch, vollendeten Gestalt greift die statistische Wirklichkeit eine Probe heraus, die mit dem theoretischen Ebenbild, der Wesensform der Erscheinung, nicht übereinstimmen kann, weil ihr die Mängel der Zufallsstreuung anhaften. Diese Zufallsstreuung würde bei einer unendlich großen Zahl von Proben für jede Gruppe, hier also für jede Körpergrößenstufe, eine Gruppierung der zufälligen Fehler ergeben, die selbst wieder eine Normalkurve darstellen würde. Diese Form ist aber von der Wesensform des betrachteten Gegenstandes unabhängig und trifft bei jeder Art der Verteilung, auch der nach artmäßigen Merkmalen (z. B. in männlich und weiblich) zu.

Über eine weitere Hypothese, die zu einer ähnlichen Gestalt führt wie die Fehlerkurve, soll weiter unten im Rahmen des von K. Pearson abgeleiteten Formelsystems gesprochen werden.

Tafel der Funktion $\zeta = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

$\xi = \frac{x}{\sigma}$	ζ	$\xi = \frac{x}{\sigma}$	ζ	$\xi = \frac{x}{\sigma}$	ζ
0,0	1,00000	1,5	0,32480	3,0	0,01111
0,1	0,99503	1,6	0,27804	3,1	0,00819
0,2	0,98020	1,7	0,23575	3,2	0,00598
0,3	0,95600	1,8	0,19790	3,3	0,00431
0,4	0,92312	1,9	0,16447	3,4	0,00309
0,5	0,88250	2,0	0,13534	3,5	0,00237
0,6	0,83527	2,1	0,11025	3,6	0,00153
0,7	0,78270	2,2	0,08892	3,7	0,00106
0,8	0,72615	2,3	0,07100	3,8	0,00073
0,9	0,66697	2,4	0,05614	3,9	0,00050
1,0	0,60653	2,5	0,04394	4,0	0,00034
1,1	0,54605	2,6	0,03405	4,2	0,00015
1,2	0,48675	2,7	0,02612	4,4	0,00006
1,3	0,42956	2,8	0,01984	4,6	0,00003
1,4	0,37531	2,9	0,01492	4,8	0,00001
				5,0	0,00000

c) Die analytische Berechnung der Normalkurve. Um in der oben mitgeteilten Funktionsgleichung der Normalkurve den rechten Ausdruck von dem von Fall zu Fall wechselnden σ zu befreien (also parameterfrei zu gestalten), können wir, was bei einer relativen Verteilung zulässig ist, den Wert der größten Ordinate $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 1$ setzen und die Hilfsvariable $\xi = \frac{x}{\sigma}$ einführen. Dann schrumpft die obige Gleichung zu der höchst einfachen Funktionsgleichung zusammen: $\zeta = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Diese Funktion ist in bekannten Funktionentafeln ausgewertet, aus denen wir auf S. 91 einen Auszug mitteilen[1].

Nebeneinanderstellung der tatsächlich beobachteten und der durch die Gaußsche Normalkurve dargestellten Werte für die Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten.

Gruppenmitte in cm	Abstand der Gruppenmitte vom arithmetischen Mittel x	Quotient aus d. Abstand x u. d. quadrat. mittleren Abstand σ $\frac{x}{\sigma} = \xi$	Der zugehörige Ordinatenwert ζ	Berechnete Besetzungszahl der nebenstehenden Gruppe	Tatsächlich beobachtete Besetzungszahl der nebenstehenden Gruppe	Aus dem Flächenintegral berechnete Besetzungszahl
	1	2	3	4	5	6
146	− 20,768	− 3,527	0,00214	0,13	0	0,12
147	− 19,768	− 3,357	0,00361	0,22	1	0,22
148	− 18,768	− 3,187	0,00627	0,38	0	0,39
149	− 17,768	− 3,018	0,01058	0,64	0	0,65
150	− 16,768	− 2,848	0,01748	1,07	2	1,07
151	− 15,768	− 2,678	0,02786	1,71	4	1,71
152	− 14,768	− 2,508	0,04315	2,65	3	2,66
153	− 13,768	− 2,338	0,06535	4,01	4	4,01
154	− 12,768	− 2,168	0,09575	5,88	7	5,87
155	− 11,768	− 1,999	0,13563	8,33	6	8,36
156	− 10,768	− 1,829	0,18821	11,55	12	11,56
157	− 9,768	− 1,659	0,25309	15,54	14	15,54
158	− 8,768	− 1,489	0,33036	20,28	25	20,28
159	− 7,768	− 1,319	0,41925	25,74	22	25,73
160	− 6,768	− 1,149	0,51699	31,74	30	31,73
161	− 5,768	− 0,980	0,61862	37,98	35	37,98
162	− 4,768	− 0,810	0,72023	44,21	43	44,20
163	− 3,768	− 0,640	0,81424	49,98	48	50,00
164	− 2,768	− 0,470	0,89469	54,92	47	54,90
165	− 1,768	− 0,300	0,95600	58,69	60	58,60
166	− 0,768	− 0,130	0,99058	60,81	63	60,82
167	+ 0,232	+ 0,039	0,99806	61,26	74	61,25
168	+ 1,232	+ 0,209	0,97802	60,03	60	60,01
189	+ 2,232	+ 0,379	0,93002	57,09	64	57,06
170	+ 3,232	+ 0,549	0,85936	52,75	47	52,75
171	+ 4,232	+ 0,719	0,77196	47,39	48	47,40
172	+ 5,232	+ 0,889	0,67348	41,34	36	41,34
173	+ 6,232	+ 1,058	0,57145	35,08	31	35,06
174	+ 7,232	+ 1,228	0,47074	28,90	33	28,90
175	+ 8,232	+ 1,398	0,37639	23,11	21	23,12
176	+ 9,232	+ 1,568	0,29300	17,99	24	17,99
177	+ 10,232	+ 1,738	0,22137	13,59	13	13,59
178	+ 11,232	+ 1,908	0,16214	9,95	9	9,98
179	+ 12,232	+ 2,077	0,11602	7,12	9	7,13
180	+ 13,232	+ 2,247	0,08050	4,94	3	4,94
181	+ 14,232	+ 2,417	0,05407	3,32	3	3,33
182	+ 15,232	+ 2,587	0,03534	2,17	4	2,18
183	+ 16,232	+ 2,757	0,02254	1,38	1	1,39
184	+ 17,232	+ 2,927	0,01389	0,85	0	0,86
185	+ 18,232	+ 3,096	0,00831	0,51	0	0,51
186	+ 19,232	+ 3,266	0,00488	0,30	0	0,30
187	+ 20,232	+ 3,436	0,00283	0,17	0	0,17
				905,70	906	905,66

Aus dem Verlaufe der Ordinaten von dem in der Mitte der Kurve gelegenen Nullpunkt bis zu ihrem Ende ersehen wir das oben dargestellte Bild der Kurve:

[1] PEARSON, KARL: Tables for Statisticians and Biometricians 1, Second Ed., Cambridge University Press. Table II, S. 2ff. Siehe auch E. CZUBER: Stat. Forschungsmethoden, S. 203.

zuerst eine langsame, dann schnellere, dann wieder langsamere Abnahme der Ordinaten.

Der Vorgang bei der Benützung dieser Tafel soll an dem Beispiel der Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten veranschaulicht werden. (Vgl. die Tafel S. 92.)

Der Rechnungsgang ist folgender: Den Ausgangspunkt der Berechnung bilden die in Spalte 5 abgedruckten Zahlen der tatsächlichen Beobachtung. Ihre Anordnung legt die Vermutung nahe, daß hier eine symmetrische Verteilung vorliege, weshalb wir untersuchen wollen, wie eine Normalkurve, die vom gleichen arithmetischen Mittel ausgeht und die gleiche mittlere Abweichung besitzt, daneben aussieht. Es handelt sich daher darum, zuerst das arithmetische Mittel A (S. 73) und den mittleren quadratischen Abstand σ (S. 81) zu berechnen. Wir gelangen dabei zu dem Ergebnis

$$A = 166{,}768\,\text{cm}\,,$$

$$\sigma = 5{,}888\,\text{cm}\,.$$

Es liegt somit der Nullpunkt der aufzufindenden Normalkurve bei 166,768 cm. Von diesem Werte berechnen wir in Sp. 2 folgeweise nach unten in der Zahlenreihe die negativen, nach oben die positiven Abstände zu den Gruppenmitten, also nach unten folgeweise — 0,768 cm, — 1,768 cm usw., nach oben + 0,232 cm, + 1,232 cm usw. Diese Zahlen sind die x. Sie werden nun folgeweise durch $\sigma = 5{,}888$ cm dividiert, ergeben also — 0,130, — 0,300 usw., + 0,039, + 0,209 usw. Diese Zahlen sind die ξ. Zu diesen Zahlenwerten für ξ suchen wir nun aus der Funktionstafel die zugehörigen Ordinatenwerte, wobei wir, da unsere ξ-Werte jeweils zwischen den Tafelwerten liegen, von der aus dem Gebrauch der Logarithmentafeln bekannten Interpolation mit Hilfe der Tafeldifferenzen Gebrauch machen. Aus dieser in Verhältniszahlen (und zwar Meßzahlen, $y_0 = 1$, S. 126) ausgedrückten Ordinatenreihe gelangen wir auf die absoluten Werte der Ordinaten, indem wir zunächst den absoluten Wert der größten Ordinate

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{906}{5{,}888 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14159\ldots}}$$

berechnen. Wir erhalten dabei 61,387. Die folgeweise durchgeführte Multiplikation dieses Wertes mit den ζ-Werten der Sp. 3 führt uns auf die Zahlen der Spalte 4. Diese stellen die Ordinatenwerte der Gruppenmitte vor, die nach der in der Statistik allgemein herrschenden Anschauungsweise als Stellvertreter der Gruppenbesetzungszahlen genommen werden können. Die errechneten Zahlen zeigen eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den beobachteten. Die theoretische Kurve geht im allgemeinen mitten durch die Beobachtungszahlen hindurch (im Bereiche des geschlossenen Kernes der Beobachtungszahlen, Gruppe 150 cm bis 183 cm 19 negative und 15 positive Abweichungen).

Die eben gezeigte Berechnungsweise ist aus dem Grunde, daß die Mittelordinaten der Gruppe als Stellvertreter der Verhältniszahlen genommen werden, nicht streng richtig. Die Berechnung vermittels des Flächenintegrals der Normalkurve ist schärfer. Auch sie erfolgt aus Funktionstafeln, in denen die Flächenwerte der einzelnen Flächenstücke zwischen der Mittelabszisse $\xi_0 = \frac{x_0}{\sigma} = 0$ und den für die Gruppen*grenzen* (hier nicht die Gruppenmitten) geltenden Werten für ξ dargestellt sind. (Die Kurvenfläche selbst als 1 angenommen.) Wir bringen hier auszugsweise ein Stück einer solchen Funktionstafel[1] (s. Tab. S. 94).

Die Benutzung dieser Tafel soll hier an dem Beispiel der Berechnung der Besetzungszahlen zweier Mittelgruppen gezeigt werden. Da das arithmetische Mittel A mitten in die Gruppengrenzen der Gruppe 167, d. i. 166,5 bis unter 167,5, fällt, muß in diesem einen Falle die Gruppenzahl aus zwei Teilzahlen, derjenigen der Fläche unterhalb des arithmetischen Mittels und der-

[1] PEARSON, KARL: Tables for Statisticians and Biometricians **1**, Table II, S. 2ff.

jenigen der Fläche oberhalb desselben, zusammengefügt werden. (Für alle übrigen Gruppen ist nur eine Berechnung notwendig.) $-x$ ist in diesem Falle $-0{,}268$ cm, $+x$ ist 0,732 cm. Die zugehörigen ξ sind $-0{,}0455$ und $+0{,}1243$. Ihnen entsprechen auf Grund der Tabelle die durch Interpolation ermittelten Flächenwerte 0,5181454 und 0,5494605, somit nach Abzug der hier mitberücksichtigten, jenseits der Mittelachse liegenden Halbfläche von 0,5 die Differenzwerte als die beiden Anteile der Gruppen 167 von der Fläche 1. Von der Fläche 906 betragen diese Anteile 16,44 und 44,81, zusammen also 61,25. Diese Zahl setzen wir in Spalte 6 unserer obigen Tabelle ein. Ganz ähnlich verläuft die Berechnung der Besetzungszahl der Gruppe 166. Hier beträgt x $-1{,}268$, daher ξ $-0{,}2154$. Das zugehörige Flächenstück, vom entgegengesetzten Ende der Kurve gerechnet, hat den Flächenwert 0,5852713, von der Mitte der Kurve somit 0,0852713, der durch Subtraktion des unter dem arithmetischen Mittel liegenden Flächenstreifens der Gruppe 167 gewonnene Flächenstreifen der Gruppe 166 allein somit 0,0671259. Multipliziert mit 906, ergibt sich die Besetzungszahl von 60,82 für die Gruppe 166 usw. Naturgemäß sind bei der Berechnung für die gesamte Ausdehnung der Gruppen die Rechenoperationen nicht in der hier an den zwei Beispielen eingehaltenen Reihenfolge, sondern in der Weise durchzuführen, daß zuerst für alle Gruppengrenzen die x, die ξ, dann alle diesen zugehörigen Flächensummenwerte, dann alle diesen zugehörigen Flächendifferenzwerte, schließlich durch Multiplikation mit N die absoluten Besetzungszahlen errechnet werden.

Tafel der Flächenstücke φ der halben Normalkurve (Gesamtfläche = 1)[1].

ξ	φ	ξ	φ	ξ	φ
0,00	0,5000000	0,18	0,5714237	0,36	0,6405764
0,01	0,5039894	0,19	0,5753454	0,37	0,6443088
0,02	0,5079783	0,20	0,5792597	0,38	0,6480273
0,03	0,5119665	0,21	0,5831662	0,39	0,6517317
0,04	0,5159534	0,22	0,5870644	0,40	0,6554217
0,05	0,5199388	0,23	0,5909541	0,41	0,6590970
0,06	0,5239222	0,24	0,5948349	0,42	0,6627573
0,07	0,5279032	0,25	0,5987063	0,43	0,6664022
0,08	0,5318814	0,26	0,6025681	0,44	0,6700314
0,09	0,5358564	0,27	0,6064199	0,45	0,6736448
0,10	0,5398278	0,28	0,6102612	0,46	0,6772419
0,11	0,5437953	0,29	0,6140919	0,47	0,6808225
0,12	0,5477584	0,30	0,6179114	0,48	0,6843863
0,13	0,5517168	0,31	0,6217195	0,49	0,6879331
0,14	0,5556700	0,32	0,6255158	0,50	0,6914625
0,15	0,5596177	0,33	0,6293000	usw.	
0,16	0,5635595	0,34	0,6330717		
0,17	0,5674949	0,35	0,6368307		

Es zeigt sich, daß die Zahlen der Spalte 6 nur geringfügige Abweichungen von denen der Spalte 4 ergeben. Erst bei größerer Gruppenbreite oder größeren Gruppenbesetzungszahlen könnten die Unterschiede einige Bedeutung gewinnen.

Wenn es sich nicht um die Anpassung einer Normalkurve an eine symmetrische Wesensverteilung, sondern um Berechnung der erwartungsmäßigen Erfolge nach den Glücksspielregeln handelt, erfolgt die Benutzung der Tafeln in ganz gleicher Weise, nur daß σ nicht aus dem gegebenen Erfahrungsstoffe ermittelt, sondern nach der bekannten, für die Glücksspiele geltenden Formel (S. 33) berechnet wird.

11. Andere häufige Kurventypen[2].

a) Die Darstellung der Kurvenformen. Außer der Normalkurve und noch häufiger als diese können wir an statistischen Massen oder den aus ihnen abgeleiteten Maßzahlen die schiefe Verteilungskurve und die J-Kurve beobachten. Seltener begegnen wir der U-Kurve.

Die schiefe Verteilungskurve ist eine ins Asymmetrische verschobene Normalkurve. Sie kann linkssteil gebaut sein, dann ist der Höhepunkt nach links verschoben; oder rechtssteil, dann ist der Höhepunkt nach rechts verschoben.

Das oben (Abb. 5, S. 70) angeführte Beispiel des Heiratsalters der Männer hat bereits die linkssteile schiefe Verteilungskurve veranschaulicht. Wir fügen hier noch ein weiteres Beispiel für die Linkssteilheit an (S. 95 oben).

[1] Pearson, Karl: Tables for Statisticians and Biometricians, S. XVIIff. u. 2ff.

[2] Fechner, G. Th.: Kollektivmaßlehre, herausgeb. von G. F. Lipps. Leipzig 1897. Carver, H. C.: The Mathematical Representation of Frequency Distributions, in Quarterly Publications of the American Statistical Association **17**, 1920/21. — Ferner die im weiteren Texte angeführten Werke.

Die nebenstehende Verteilung läßt eine Häufung in der Gruppe ,,Wohnungen mit 3 Räumen" erkennen, ist also linkssteil. Dagegen ließ die oben (S. 64) beobachtete Verteilung der sächsischen Gemeinden nach der männlichen Wahlbeteiligung, ebenso die Verteilung der Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten (S. 73) Rechtssteilheit erkennen (vgl. Abb. 8).

Die i. J. 1930 in den deutschen Groß- und Mittelstädten neuerbauten Wohnungen nach der Wohnungsgröße[1].

Wohnungsgröße	Zahl der Wohnungen
Wohnungen mit	
1 Raum	602
2 Räumen	9910
3 ,, ...	66369
4 ,, ...	53870
5 ,, ...	15708
6 ,, ...	6070
7 und mehr Räumen	3638
Insgesamt	156167

Eine häufig zu beobachtende Verteilungsform ist die J-Kurve, so genannt, weil sie das Spiegelbild eines J oder bisweilen gar ein J selbst darstellt. Diese Verteilung kann als ein Grenzfall der schiefen Verteilung betrachtet werden. Denken wir uns nämlich die Asymmetrie soweit verschoben, daß der Gipfel an das linke Ende der Kurve gelangt, so ergibt das eine J-Kurve. Daß diese Grenzentwicklung in der Tat zutrifft, können wir daraus entnehmen, daß wir vielfach Verteilungen antreffen, in denen wir noch einen ver-

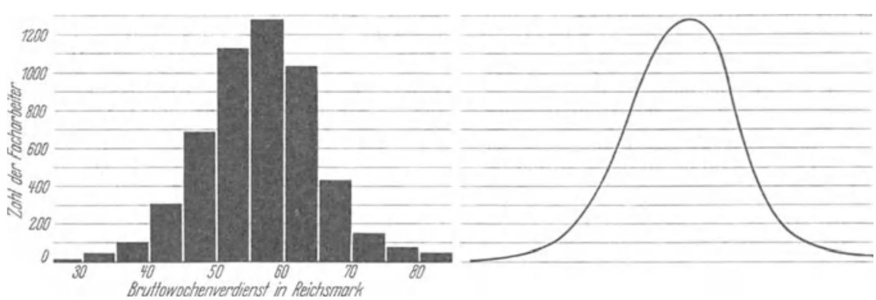


Abb. 8. Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der Lohnverteilung deutscher Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten.

kümmerten Überrest des aufsteigenden Astes vorfinden. Es ergibt sich dann eine J-Kurve bei Bildung größerer Gruppen, während bei Bildung kleinerer Gruppen der verkümmert aufsteigende Ast noch zur Geltung kommt. Sogar beim Schulbeispiel der J-Kurve, der Einkommensverteilung, könnten wir einen verkümmerten aufsteigenden Ast beobachten, wenn wir uns nicht auf die von der Einkommensbesteuerung herstammenden Zahlen, bei denen die Einkommen unter dem Existenzminimum fehlen, beschränkten, sondern die Einkommen unterhalb der Einkommensgrenze durch eine besondere Erhebung hinzufügten[2].

Einkommensgruppen	Veranlagte Pflichtige
Bis 1500 RM	1864087
über 1500 bis 3000 RM. . .	1171697
,, 3000 ,, 5000 ,, . . .	504018
,, 5000 ,, 8000 ,, . . .	241675
,, 8000 ,, 12000 ,, . . .	211461
,, 12000 ,, 16000 ,, . . .	86078
,, 16000 ,, 25000 ,, . . .	72379
,, 25000 ,, 50000 ,, . . .	42276
,, 50000 ,, 100000 ,, . . .	12335
,, 100000 RM	4977
Insgesamt	4210883

Als Beispiel für eine J-Kurve mag das Ergebnis der Einkommenssteuerveranlagung im Deutschen Reiche für

[1] Wirtschaft und Statistik, 11 (1931), S. 183.

[2] Vgl. des Verfassers Artikel: Einkommen, in Hdwb. d. Staatsw. 4. Aufl. 3, S. 387 und die dort und im Schriftenverzeichnis angeführten Feststellungen E. Würzburgers aus der sächsischen Einkommensstatistik.

das Jahr 1928 nach der Höhe des veranlagten Einkommens angeführt werden[1] (s. Tab. S. 95 unten).

Die Verteilung zeigt, wie auch aus Abb. 9 zu erkennen ist, die Gestalt eines gespiegelten J. Für eine richtige J-Gestalt führen wir folgende Verteilung an (Abb. 10). Sie ist im oberen Teile zwar regelwidrig gerade ausgefallen, doch dürfte der Grund darin zu suchen sein, daß unsere Einschätzung der offenen Gruppe 70— als 70 bis 85 Jahre das arithmetische Mittel der über 70 Jahre alten an Krebs Gestorbenen nach oben verschiebt (s. Tab. unten links).

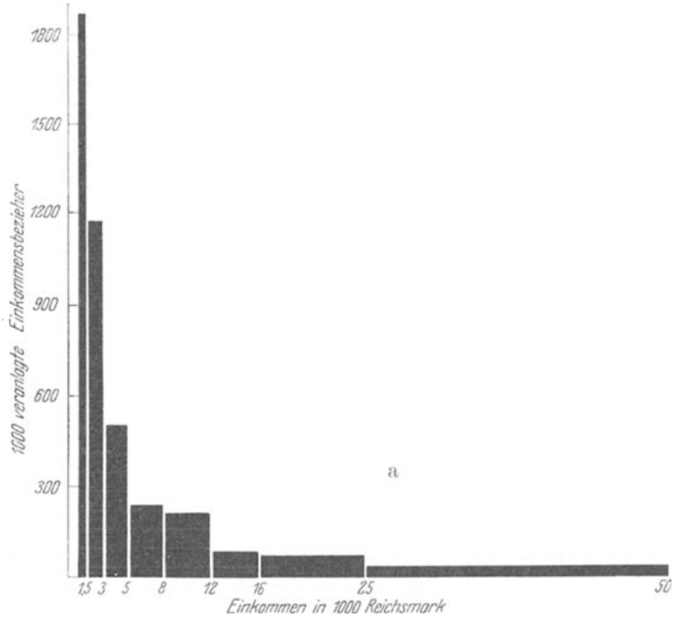


Abb. 9a und b. Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der

Seltener ist die U-Kurve. Das Schulbeispiel dafür ist die Bewölkungshäufigkeit, unter Annahme einer zahlenmäßigen Skala für die Bedeckung des Himmels. DaHalbbewölkung seltener vorkommt als klarer Himmel oder Vollbewölkung, ergibt die statistische Auszählung dieser Erscheinung je ein Maximum am Anfang und am Ende der Kurve, also eine U-Gestalt. Ein der Statistik der menschlichen Gesellschaft angehöriger Fall wird dargestellt durch die allgemeine Kurve der Sterbewahrscheinlichkeiten des Menschen, deren Gestalt die U-Form allerdings nur entfernt erkennen läßt.

Krebssterblichkeit des männlichen Geschlechts im Deutschen Reiche im Jahre 1928[2]. (Vgl. auch Abb. 10.)

Altersjahre	Gestorbene auf 10000 Lebende der gleichen Altersklasse[3]
0 bis unter 1	0,1
1 „ „ 5	0,1
5 „ „ 15	0,02
15 „ „ 30	0,2
30 „ „ 60	9,4
60 „ „ 70	65,0
70 u. darüber	100,9

Auszug aus der allgemeinen deutschen Sterbetafel f. d. Jahre 1924 bis 1926[4].

Alter (Jahre)	Sterbenswahrscheinlichkeit des männlichen Geschlechtes	Alter (Jahre)	Sterbenswahrscheinlichkeit des männlichen Geschlechts
0	0,11538	40	0,00535
1	0,01619	.	.
2	0,00636	.	.
3	0,00404	60	0,02362
4	0,00316	.	.
.	.	.	.
.	.	80	0,14196
10	0,00142	.	.
.	.	.	.
.	.	90	0,28469
20	0,00427	.	.
.	.	.	.
.	.	100	0,43623

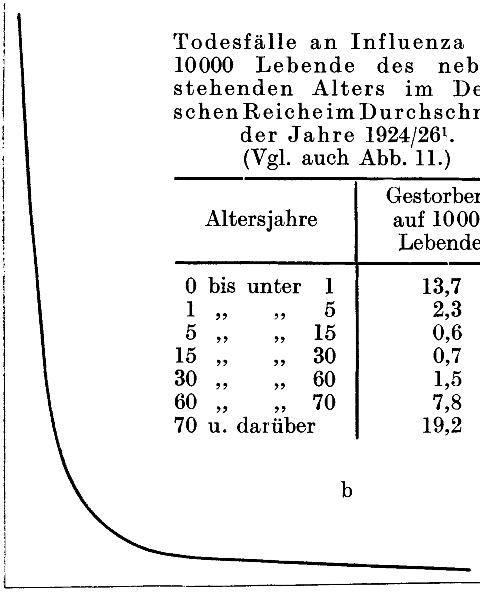
[1] Statistik des Deutschen Reiches **391,** 9.
[2] Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich **1930,** 47.
[3] In der Altersklasse 0—1 Jahr auf 10000 Lebendgeborene.
[4] Statistik des Deutschen Reiches **401** I, 476; **360,** 168.

Eine stärkere Ausprägung der U-Form ergibt sich, wenn wir die Sterblichkeit an bestimmten Krankheiten nach dem Alter darstellen. (Vgl. die folgende Tabelle und Abb. 11 auf S. 98.)

b) Die analytische Deutung der Kurvengestalten. Was zunächst die schiefe Verteilungskurve anlangt, so wollen wir an das oben auf S. 30f. über die schiefen Wahrscheinlichkeitskurven und das oben auf S. 90f. über das Zustandekommen der Normalkurve Gesagte anknüpfen. Ist die für den letzteren Fall genannte negative Bedingung des Fehlens einer oder mehrerer überwiegender, einseitig gerichteter Elementarursachen nicht erfüllt, so daß diese Einseitigkeit durch das sonst bei der Normalkurve zu beobachtende Zusammenwirken der vielen kleinen Ursachen nicht überwogen werden kann, so werden wir auf eine schiefe Verteilungsform gelangen. In dem Fall der schiefen Verteilung des Heiratsalters der heiratenden Männer (ebenso der Frauen) ist es der ganz natürliche Grund, daß eine Heirat in jüngeren Jahren eine größere Anziehungskraft hat als eine solche in älteren, in dem Beispiel der neugebauten Wohnungen sind es die aus der Wohnungsnachfrage folgenden Rücksichten, daß nämlich die Wohnungen unter der durchschnittlichen Wohnungsgröße häufiger verlangt werden als diejenigen über dem Durchschnitt, in dem Beispiel der Wahlbeteiligung der Grund, daß die

Todesfälle an Influenza auf 10000 Lebende des nebenstehenden Alters im Deutschen Reiche im Durchschnitt der Jahre 1924/26[1]. (Vgl. auch Abb. 11.)

Altersjahre	Gestorbene auf 10000 Lebende[2]
0 bis unter 1	13,7
1 „ „ 5	2,3
5 „ „ 15	0,6
15 „ „ 30	0,7
30 „ „ 60	1,5
60 „ „ 70	7,8
70 u. darüber	19,2



Einkommensverteilung im Deutschen Reiche im Jahre 1928.

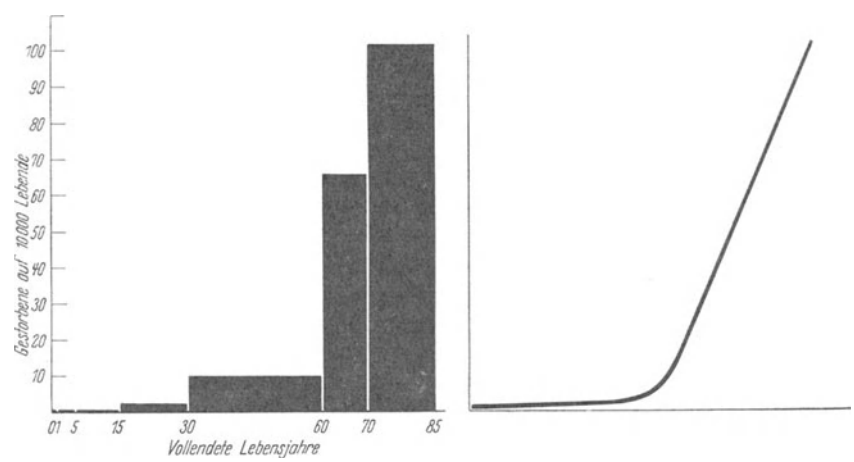


Abb. 10. Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der Krebssterblichkeit des männlichen Geschlechts im Jahre 1928.

politische Schulung der 85 Gemeinden, wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Gemeindegröße, einem Ausschlag über den Durchschnitt die größere Wahrscheinlichkeit

[1] Statistik des Deutschen Reiches **360**, 289.

[2] In der Altersklasse 0—1 Jahr auf 10000 Lebendgeborene.

zuteilt, in dem Beispiel der Lohnverteilung die Verteilung der Arbeitszeit, die durch die Arbeitslage bestimmt ist, und einem Wochenlohn über dem Durchschnitt eine etwas größere Wahrscheinlichkeit verleiht als einem unter dem Durchschnitt.

C. V. L. Charlier hat für diesen Fall der schiefen Verteilung eine Formel abgeleitet („Frequenzkurve Typus A“), in der zu dem analytischen Ausdruck für die

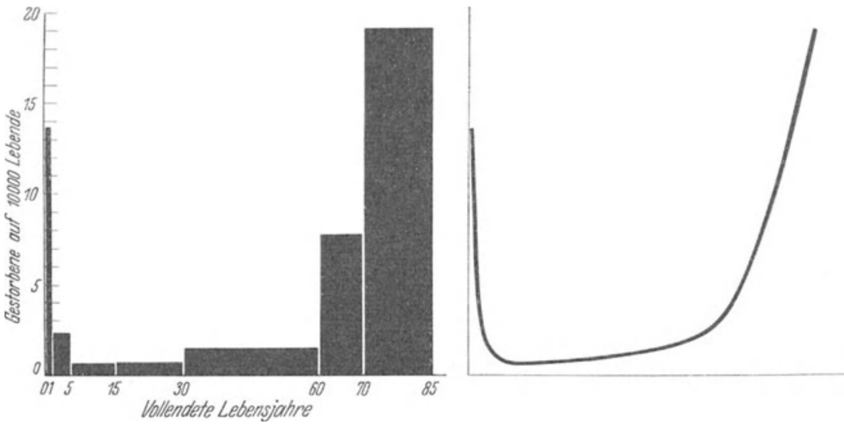


Abb. 11. Häufigkeitspolygon und Häufigkeitskurve der Influenzasterblichkeit im Deutschen Reiche im Durchschnitt der Jahre 1924 bis 1926.

Normalkurve noch eine Anzahl Glieder hinzugefügt sind, deren wesentlichster Bestandteil höhere Ableitungen der Normalkurve sind.

Die Formel lautet:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3\,!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\,\varphi_3(x) + \frac{1}{4\,!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi_4(x) - \frac{1}{5\,!}\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - \frac{10\,\mu_3}{\sigma^3}\right)\varphi_5(x) + \cdots$$

$\varphi(x)$ bedeutet die Normalkurve, $\varphi_n(x)$ ihre n-te Ableitung, die μ_n bedeuten das n-te Flächenmoment der Kurve hinsichtlich der Ordinate des arithmetischen Mittels, die σ^n Potenzen der mittleren Abweichung[1]. Eine abgeänderte Form dieses Kurventypus hat F. Y. Edgeworth in Vorschlag gebracht[2]. Einen inneren Zusammenhang mit der Charlierschen Reihe weist auch die Brunssche Reihe auf, die in der Reihenausgleichung eine gewisse Rolle spielt[3]. Alle diese Kurventypen gehen von der Normalkurve gewissermaßen als dem Grundfall einer Verteilung aus, verleihen ihr aber durch die Hinzufügung beliebig vieler aus der Normalkurve abgeleiteter Glieder eine Anpassungsfähigkeit auch an die schiefen Verteilungsformen.

So wie Charliers Typus A von der Normalkurve ausgeht, so geht sein Typus B von der oben (S. 54) erwähnten Poissonschen Reihe aus

$$f(x) = \frac{e^{-m}\cdot m^x}{x\,!},$$

der gleichfalls durch Hinzufügung höherer Ableitungen dieser Funktion eine allgemeinere Bedeutung verliehen wird. Der Typus B ist ebenso wie die Grundformel $f(x)$ für die Darstellung unstetiger zahlenmäßiger Merkmale geeignet, die entweder die Form einer J-Kurve oder doch einer sehr linkssteilen Kurve besitzen[4].

[1] Vgl. Näheres hierzu bei C. V. Charlier: Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, S. 67 und W. Palin Elderton: Frequency Curves and Correlation, S. 124ff.

[2] Cambr. Phil. Trans. **20/1,** 1904 (Law of Error); Il. R. Stat. Soc. **1906,** 497ff. (Generalised Law of Error). Vgl. auch hierzu Elderton: a.a.O., ferner Bowley: Elements, 5. Aufl., S. 287ff.

[3] Vgl. hierzu Bruns: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, S. 240ff. Leipzig u. Berlin 1906; auch bei Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung **1,** 4. Aufl., S. 400ff.

[4] Vgl. hierzu Charlier: a.a.O., S. 79ff. Elderton: a.a.O., S. 126ff.

Alle vorausgehenden Kurvenformeln gehen von verallgemeinerten Annahmen über die Wirkung eines Systems von Elementarfehlern aus, bei der indessen alle möglichen Fehlersysteme als ins Spiel tretend gedacht werden. Anders geartet ist die Annahme, die K. PEARSON einem Kurvensystem zugrunde legt, das eine weitgehende, verschiedene Kurvenformen umfassende Lösung des Problems darstellt[1].

PEARSON geht von einem Urnenschema aus, in dem np weiße und nq schwarze Kugeln enthalten sind, r Kugeln (nach unserer eigenen Bezeichnungsweise $= s$) würden folgeweise gezogen, ohne die Kugeln während der Dauer dieses Serienzuges wieder zurückzulegen. Ist $r \gtreqless np$, so kann die Gesamtzahl der weißen Kugeln jeden Wert von 0 bis np (d. i. der Gesamtzahl der weißen Kugeln in der Urne) annehmen. Ist $r < np$, so kann sie von 0 bis r betragen; das aus der häufigen Wiederholung dieses Serienzuges zu erwartende Häufigkeitspolygon würde also, wegen der Beschränktheit der Möglichkeiten von r und wegen der Ungleichheit von p und q schief sein.

PEARSON berechnet nun auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Werte von weißen Kugeln unter den r Ziehungen und gelangt im weiteren, bei Übergang zur Differenzialrechnung, zur Gleichung

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{\beta_1 + \beta_2\,x + \beta_3\,x^2},$$

worin β_1, β_2, β_3 Konstanten sind, die von p, q, r, n und c (d. i. der Abstand der Gruppenmitten voneinander) abhängig sind. Die Differenzialgleichung führt auf verschiedene Typen von Kurvengleichungen, je nach dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = \beta^2 - 4\,\beta_1\,\beta_3$$

des quadratischen Nenners. Die wichtigsten unter den von K. PEARSON hieraus abgeleiteten Kurvenformeln sind folgende:

a) Typus I.

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{\nu a_1}\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}, \tag{1}$$

worin a_1 und a_2 die Wurzeln des obigen quadratischen Nenners, ν ein abgekürzter Ausdruck für eine gewisse algebraische Beziehung zwischen β_3 und den beiden a sind. Dieser Typus stellt bei positivem a_1, a_2 und ν eine schiefe Fehlerkurve dar, die in den Abständen $-a_1$ und $+a_2$ die Abszissenachse schneidet. Der dichteste Wert fällt in den Nullpunkt des Koordinatensystems.

b) Typus II.

Dieser entsteht aus 1 dadurch, daß a_1 und $a_2 = a$ werden. Es ergibt sich dann die Gleichung

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\nu a}. \tag{2}$$

Diese Kurve ist symmetrisch mit dem dichtesten Wert im Nullpunkt. Sonderfälle dieser Kurve sind die halbe Ellipse ($y_0 = 1$, $\nu a = \frac{1}{2}$), der Halbkreis ($y_0 = 1$, $a = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$) und die Parabel ($\nu a = 1$).

Bei negativem ν ergibt sich

$$y = \frac{y_0}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\nu a}} \tag{3}$$

als symmetrische U-Kurve.

[1] Contributions to the Mathematical Theory of Evolution, in Phil. Trans. Abt. A **185** (1894); **186** (1895); **187** (1896); **191** (1898); **192** (1898/99); **195** (1900); **197** (1901). Der Hauptartikel ist in Bd. 186 zu finden. Siehe auch ELDERTON: Frequency Curves usw., S. 36ff. CZUBER: Mathematische Bevölkerungstheorie, Leipzig und Berlin 1923, S. 34ff. Wahrscheinlichkeitsrechnung **2**, 21ff. Wir folgen im Texte auszugsweise dieser Darstellung.

c) Typus III.

Wächst in (1) a_2 ins Unendliche, so ergibt sich

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\nu a} \cdot e^{-\nu x}. \tag{4}$$

Diese Gleichung entspricht einer schiefen Verteilungskurve, die auf der linken Seite endlich begrenzt ist, auf der rechten ins Unendliche verläuft.

d) Typus IV.

Schiefe Verteilungskurve, beiderseits unbegrenzt.

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} \cdot e^{-\nu \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}. \tag{5}$$

e) Typus V.

Lassen wir in 3) a ins Unendliche wachsen und schreiben wir statt νa $h^2 x^2$, so gelangen wir auf die Form

$$y = y_0 e^{-h^2 x^2},$$

die nichts anderes ist, als die bekannte Gaußsche Fehlerkurve, die sich demnach in dem ganzen Pearsonschen Formelsystem als ein besonderer Fall der allgemeinen schiefen Verteilungsform darstellt.

Die angeführten unter den von PEARSON abgeleiteten Formeln sind wohl für die Darstellung statistischer Verteilungen die wichtigsten. Ihre rechnerische Durchführung, zu der PEARSON die sinnreiche Methode der Momente (vgl. S. 85 u. 120) ersonnen hat, gestaltet sich jedoch für den einzelnen Fall ziemlich mühevoll und zeitraubend, weshalb von der Durchführung eines Beispieles hier abgesehen und der Leser auf die oben angeführten Quellen verwiesen wird.

Wenngleich wir nicht behaupten können, daß die Pearsonsche Annahme die endgültige Lösung des Problems darstelle, so zeigt sie doch eine Lösungsmöglichkeit, noch dazu eine, die von einer gemeinsamen Annahme aus alle statistisch interessierenden Kurventypen ableitet. Mag auch das Pearsonsche Formelinventar wegen der Beschwerlichkeit der Durchrechnung für die Praxis nicht die Bedeutung haben, die sein Entdecker ihm gewiß zugeteilt hat, so bleibt es doch ein Baustein von hoher theoretischer Bedeutung für die analytische Erforschung der statistischen Kurven.

Von einer ganz anderen Seite her hat V. PARETO[1] für die J-Kurve einen analytischen Ausdruck aufgestellt. Er hatte gefunden, daß die Logarithmen der Zahlen der Einkommensbezieher, die ein Einkommen über einer bestimmten unteren Grenze x haben, wenn als Abszissen im ersten Quadranten des Koordinatensystems die Logarithmen der Einkommensstufen aufgetragen werden, eine absteigende Gerade bildeten. Daraus ergab sich einfach die Gleichung

$$\log y = \log A - a \log x$$

und, entlogarithmiert, die Gleichung

$$y = A x^{-a}.$$

Diese Formel ist von PARETO zunächst nur für die Summenreihe (S. 64) der Besetzungszahlen gedacht. Sie gilt aber auch für die einfache Verteilungsreihe der Gruppenwerte[2].

[1] PARETO, V.: La Courbe des Revenues. Cours d'Economie Politique 2. Lausanne 1897. WINKLER, W.: Art. „Einkommen“, im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl., **3**, 387ff., mit reichen Angaben von Schrifttum. VINCI, F.: Nuovi contributi allo studio della distribuzione dei redditi, in Giornale degli Economisti **61**, 365ff. (1921). VINCI, F.: Calcolo della probabilità e distribuzione dei redditi nel pensiero di PARETO, in Giornale degli Economisti **64**, 127ff. (1924).

[2] Denn der Differentialquotient $f'(x)$ ist $-Aa \cdot x^{-(a+1)}$, also von der gleichen Art wie $f(x)$.

Die Paretosche Kurve hätte auch deduktiv gefunden werden können. Man kann sich nämlich die Verteilung dieser Form entstanden denken durch einen Siebungsvorgang, bei dem von der Gesamtzahl der an dem Vorgang Beteiligten nur eine Anzahl in die höhere Klasse aufsteigt, wobei aber die Bedingungen des Aufsteigens fortschreitend milder werden (analytisch ausgedrückt dadurch, daß der Differentialquotient mit wachsendem x immer kleiner wird). Die Paretosche Kurve ist nun eine Kurvenform, die dieser Bedingung entspricht, da der Differentialquotient seinem absoluten Wert nach lautet $\frac{A\,a}{x^{(a+1)}}$, das wachsende x also im Nenner, das ist im Sinn einer fortschreitenden Verkleinerung des Wertes des Bruches, wirksam wird.

Wir wollen die Gültigkeit der Paretoschen Annahme an unserem auf S. 95 angeführten Beispiel der Einkommensverteilung im Deutschen Reiche im Jahre 1928 bewahrheiten. Wir setzen in die Gleichung $\log y = \log A - a \log x$ die Logarithmen der Besetzungszahlen (y) und die Logarithmen der Gruppenmitten (x) ein, wobei wir die untere offene Gruppe — 1500 RM nach unten mit 900 RM, der Grenze des regelmäßigen Existenzminimums, abschließen, die obere offene Gruppe aber nicht mehr berücksichtigen. Log A und a sind dann die beiden Unbekannten der Gleichung. Wenn wir die Werte für die neun verwendbaren Gruppen in die obige Gleichung einsetzen, so erhalten wir folgende 9 Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
6{,}2704662 = \log A - 3{,}0791812\,a & 5{,}3252303 = \log A - 4{,}0000000\,a \\
6{,}0688153 = \log A - 3{,}3521825\,a & 4{,}9348922 = \log A - 4{,}1461280\,a \\
5{,}7024461 = \log A - 3{,}6020600\,a & 4{,}8596126 = \log A - 4{,}3117539\,a \\
5{,}3832317 = \log A - 3{,}8129134\,a & 4{,}6260939 = \log A - 4{,}5740313\,a \\
 & 4{,}0911392 = \log A - 4{,}8750613\,a
\end{array}$$

Wir haben hier zwei Unbekannte aus 9 Gleichungen zu bestimmen. Die Unbekannten sind also überbestimmt, und es können für sie nur Lösungen gefunden werden, die den Gleichungen annähernd genügen. Das üblichste Verfahren hierzu ist die Methode der kleinsten Quadrate, das wir erst später (Abschnitt II, 13d) besprechen werden. Wir wollen hier ein einfaches Ersatzverfahren verwenden, das zu weniger genauen Ergebnissen führt als die Methode der kleinsten Quadrate, dafür aber leichter und schneller durchführbar ist: das Verfahren der Zusammenfassung je eines Teiles der Gleichungen in je eine Summe. Wir bilden so aus den ersten vier, dann aus den nachfolgenden fünf Gleichungen je eine Summengleichung, die wir beide als nebeneinander bestehend betrachten und lösen. So erhalten wir die beiden Gleichungen

$$23{,}4249593 = 4 \log A - 13{,}8463371 a$$

$$23{,}8369682 = 5 \log A - 21{,}9069745 a\,.$$

Die Lösung ergibt für $\log A$ 9,9539595, für a — 1,18377. Die Gleichung lautet somit

$$\log y = 9{,}9539595 - 1{,}18377 \log x \quad \text{und entlogarithmiert}$$

$$y = \frac{8994130000}{x^{1{,}18377}}\,.$$

Aus der obigen Gleichung berechnen wir für die 9 Gruppenmitten folgeweise die Werte 2036654, 967713, 489721, 275643, 165531, 111147, 70767, 34622, 15240. Die Einsetzung der beobachteten wie der berechneten Werte in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem ergibt die Abb. 12 auf S. 102, aus der wir entnehmen, daß die Paretosche Annahme auch für die Einkommensverteilung im Deutschen Reiche im Jahre 1928 ausgezeichnet zutrifft.

Ein weiteres Beispiel eines Falles, in dem das Ausgehen von einer abstrakten Annahme zur Ableitung einer Kurve führte, die sich nachher praktisch als brauchbar bewährte, bietet die Gompertz-Makehamsche Formel für die Überlebenden aus einer dem Sterbevorgang unterworfenen Masse (rein dargestellt in den Sterbetafeln)

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x},$$

worin x das jeweilige Alter, l_x die Überlebenden des Alters x und k, s, g, c Konstanten bedeuten, die nach dem jeweiligen Fall zu bestimmen sind.

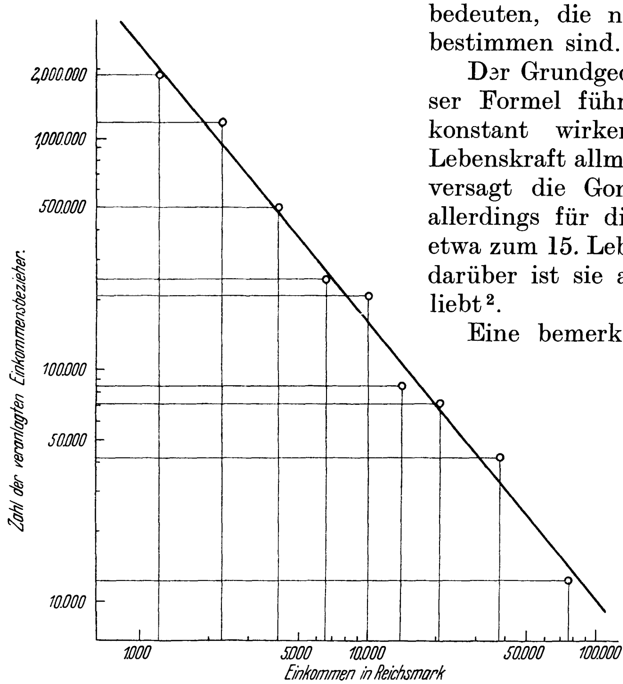


Abb. 12. Die Paretosche Kurve in doppelt-logarithmischer Darstellung, gezeigt an der Einkommensverteilung im Deutschen Reich im Jahre 1928.

Der Grundgedanke, der zur Ableitung dieser Formel führte, ist die Annahme einer konstant wirkenden Todeskraft, die die Lebenskraft allmählich auflöst[1]. In der Praxis versagt die Gompertz-Makehamsche Formel allerdings für die jüngsten Altersklassen bis etwa zum 15. Lebensjahr. Für die Lebensjahre darüber ist sie als Ausgleichsformel sehr beliebt[2].

Eine bemerkenswerte Kurve zusammengesetzter Art ergibt die Altersgliederung der Gestorbenen, wie sie sich entweder in der Altersgliederung einer wirklichen Sterbemasse oder noch besser in der idealisierten Form der Altersgliederung der Gestorbenen aus 100000 Geborenen nach der Sterbetafel darstellt (Abb. 13). Lexis hat darauf hingewiesen[3], daß in dieser Kurve drei Bestandteile deutlich ausscheidbar sind, eine J-Kurve bei den im frühesten Alter Gestorbenen, eine Normalkurve im zweiten Höhepunkt der Kurve, um das sogenannte Normalalter von (damals) ungefähr 70 Jahren herum, schließlich ein Bereich der dazwischen liegenden Sterbefälle. (In der Abb. sind die drei Bereiche durch die Buchstaben a, b und c gekennzeichnet). Das Zutreffen der Normalkurve um das 70. Jahr hat Lexis an Beispielen aus zahlreichen Staaten gezeigt. Lexis teilt demnach die Lebenden in 3 Gruppen ein: die Normallebigen, die eine Lebensdauer von etwa 60 Lebensjahren und mehr erreichen, die Lebensunfähigen, die in den ersten Lebensjahren sterben, und eine Zwischengruppe der minderwertigen Leben, die etwa zwischen dem 10. und dem 60. Lebensjahr sterben. In der Zergliederung der Lebenstypen ist Karl Pearson, der sich mit dem gleichen Stoffe befaßt hat[4], noch weiter gegangen, indem er die Kurve der Gestorbenen in fünf Kurven zerlegte: 1. Gestorbene Säuglinge, 2. gestorbene Kinder, 3. gestorbene Jugendliche, 4. gestorbene Angehörige des mittleren Lebensabschnittes und 5. gestorbene alte Personen.

---

[1] Die nähere Ableitung dieser Formel siehe bei Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung **2**, 171ff.

[2] Man vgl. z. B. die Ausgleichung der österreichischen Sterbetafel von 1910, Österr. Statistik N. F., **1**, H. 4. In der deutschen Sterbetafel 1924/26 wurde die Gompertz-Makehamsche Formel zur Ausgleichung der Zahlen für die Altersstufen von über 90 bis 100 Jahren verwendet. Statistik des Deutschen Reiches **401**, I, 467.

[3] Zur Theorie der Massenerscheinungen, S. 42ff. — Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, S. 111ff.

[4] Phil. Trans. London, A **186**. S. 406ff. (1895). Vgl. auch Czuber: Wahrscheinlichkeitstheorie **2**, 3. Aufl., S. 76.

Die Kurve der nach dem Alter ausgegliederten Gestorbenen hat auf die **zusammengesetzten** Kurven geführt. In der Regel wird sich die Hinzufügung einer andersartigen Masse in einer Verzerrung des Kurvenbildes auswirken: so finden wir z. B. Körpergrößenverteilungen, die einen ausgesprochen schiefen Verteilungstypus darstellen. Augenfällig wird die Zusammengesetztheit der Kurven aus ungleichartigen Bestandteilen dann, wenn die Unterschiede so groß sind, daß sie sich in einer Zweigipfeligkeit der Kurve äußern. Es gliederten sich z. B. die Volksschulen im Freistaat Preußen im Jahre 1929 nach der Zahl der Stufen[1] in

einstufige	13895
zweistufige	6649
dreistufige	4793
vierstufige	1885
fünfstufige	841
sechsstufige	1179
siebenstufige	2248
acht- u. mehrstufige Schulen	1923
Insgesamt	33413

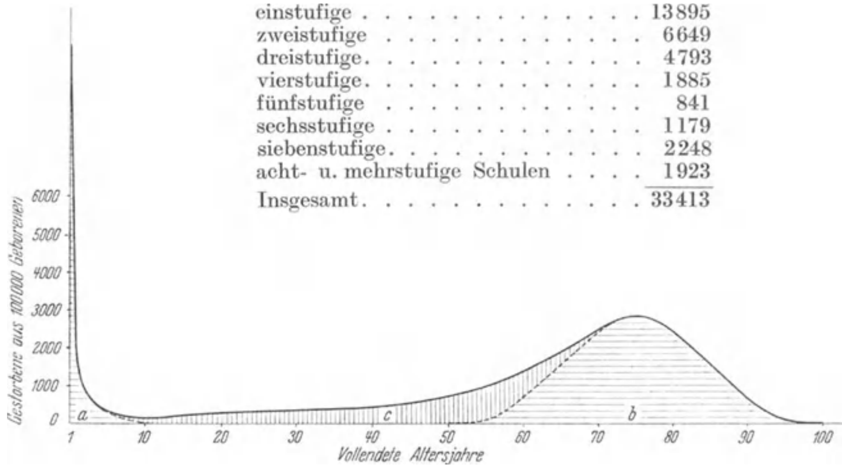


Abb. 13. Häufigkeitskurve der Altersgliederung der Gestorbenen im Deutschen Reiche nach der Sterbetafel für 1924/25.

Hier sehen wir deutlich zwei Kurventypen sich mischen (vgl. auch Abb. 14): eine J-Kurve und eine schiefe Verteilungskurve. Wir finden zwei Höhepunkte vor: bei den einstufigen und bei den siebenstufigen Schulen. Offenbar hat hier die Zusammenfassung der beiden verschiedenartigen Bereiche der Land- und Stadtschulen die Zweigipfeligkeit dieser Kurve verursacht.

Bei der Feststellung der Zweigipfeligkeit von Kurven ist wohl darauf zu achten, daß die Beobachtungszahl genügend groß sei, denn wie wir in den Abb. 3b und c auf S. 26 und 27 feststellen konnten, können auch zufällige Schwankungen bei kleinen Beobachtungszahlen das Bild einer zweigipfeligen Kurve hervorrufen.

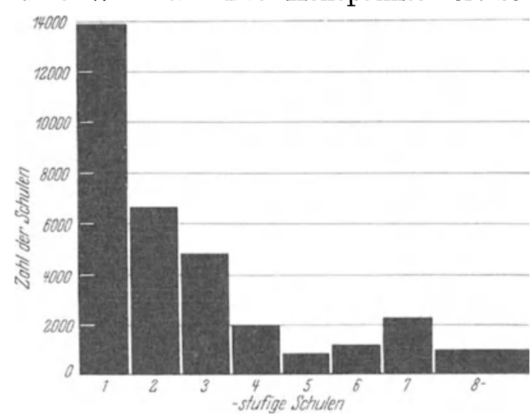


Abb. 14. Häufigkeitspolygon der Volksschulverteilung in Preußen nach Stufen im Jahre 1926.

Eine sehr allgemeine Fassung des Kurvenanpassungsproblems bedeutet EDGEWORTHS Translationstheorie[2], die besagt, daß jede Kurvenform aus der Normalkurve abgeleitet werden könne, wenn an Stelle des Exponenten x ganz allgemein eine beliebig zu bildende Funk-

---

[1] Stat. Jahrbuch f. d. Freistaat Preußen **25**, 236f. (1929).

[2] J. roy. Stat. Soc. **1898**, 670ff.; **1899**, 373ff., 534ff.

tion von x, $f(x)$, eingeführt werde. Es ergibt sich daraus die Funktionsgleichung $y = e^{-\frac{1}{2}[f(x)]^2}$. Für gewisse besondere Formen von $f(x)$ wurde diese Formel näher untersucht. Eine praktische Bedeutung hat dieser Gedanke nicht erlangt. Nahe verwandt mit der genannten Formel ist eine auf die Annahme beruhende, an Stelle der Konstanten k und $c(= l \cdot C)$ in der Häufigkeitskurve

$$y = e^{-\frac{x^2}{k^2} + c}$$

bestimmte Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ einzuführen. Dieses Verfahren führt unter bestimmten Voraussetzungen zu Formeln einer weiteren Anwendbarkeit.

Bei Einführung von $F(x) = lA + mlx$, $f(x) = \gamma x^2$ gestaltet sich z. B. die obige Formel zu

$$y = A x^m e^{n x^p},$$

einer „biegsamen" Formel, so genannt, weil sie, je nach der Beschaffenheit der Gleichungskonstanten A, m, n und p, die verschiedensten Gestalten annehmen, daher den verschiedensten Kurvenformen entsprechen kann[1].

Eine andere Bildungsart einer allgemeinen Kurve besteht in der Projektion einer Normalkurve auf eine zur Kurvenebene schiefe Projektionsebene. Schneidet diese die Kurvenebene parallel zur Symmetrieachse der Normalkurve, so ergeben sich in dem der ersten Ebene zugewendeten Teil der projizierten Kurve Verkürzungen, in dem ihr abgewandten Teil Verlängerungen der Abszissenachse, während die Ordinatenprojektionen unverändert bleiben. Daraus folgt die Umwandlung der Normalkurve in eine schiefe Kurve. Dieser Projektionsvorgang bietet wegen der Möglichkeit der verschiedensten Annahmen über die Gestalt der Projektionsebene und der Möglichkeit einer Rückprojizierung auf die erste Ebene den weitesten Spielraum. Die analytische Durchführung des Gedankens führt zu der ganz allgemeinen Kurvenform

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{x^p}{k \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{ma} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{mb}}}.$$

Die beiden letzten Kurvenformen kennen wir zwar nach ihrer analytischen Ent stehungsweise, aber sie können mit den obigen auf ursprünglichen Annahmen aus der Wirklichkeit beruhenden Kurven von Gauss, Pearson, Gompertz-Makeham und in gewissem Sinn auch Pareto nicht gleichgestellt werden, da wir ihre Entstehungsweise nur rechnerisch formell, nicht reell erfassen können. Sie haben daher für die Erkenntnis der Entstehung solcher Kurvenformen im statistischen Material kaum einen größeren Wert als die gleich im folgenden zu behandelnden empirischen Kurven, die wir aus rein praktischen, rechnerischen Gründen über eine statistische Verteilung legen.

c) Empirische Kurvengleichungen. Man kann in der allgemeinsten Weise jede statistische Kurve (die durch mehr als zwei Angaben bestimmt ist) durch eine Parabel von der Form $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ darstellen. Hierbei kann man entweder so verfahren, daß man den Grad der Gleichung (die oben abgebrochene Gleichung ist in dieser Form 3. Grades, weil die höchste Potenz von x die dritte ist), so groß wählt, daß die Zahl der Angaben gleich ist der Zahl der zu berechnenden Konstanten, oder um einen Grad niedriger, wenn man den Nullpunkt des Koordinatensystems durch die erste Angabe leitet, wodurch der Ordinatenwert dieser Angabe $= a$ wird, das also dann bekannt ist. Die Konstanten werden dann durch Einsetzen jedes jeweiligen x und y berechnet. Man kann aber auch so verfahren, daß man den Grad der Gleichung nach der Zahl der in der Kurve vorhandenen Wende-

[1] Näheres darüber wie über den folgenden Formeltypus bei Czuber: Mathematische Bevölkerungstheorie, S. 37ff.

punkte[1] bestimmt, in der Weise, daß der einfachen parabolischen Krümmung eine Kurve 2. Grades, der mit einem Wendepunkt versehenen Krümmung eine Kurve 3. Grades usw. beigeordnet wird. Da dann in der Regel mehr Angaben vorhanden sind, als der Grad der gewählten algebraischen Gleichung beträgt, also Überbestimmung vorliegt, werden im Wege der Methode der kleinsten Quadrate die Konstanten der Kurvengleichung ermittelt (siehe Abschnitt II, 13d).

Ein Beispiel mag den erstgenannten Vorgang veranschaulichen (vgl. auch Abb. 15)

Die Bevölkerung des Deutschen Reiches betrug:

	Mill. Personen
am 1. XII. 1871	41,06
„ 1. XII. 1880	45,23
„ 1. XII. 1890	49,43
„ 1. XII. 1900	56,37
„ 1. XII. 1910	64,93

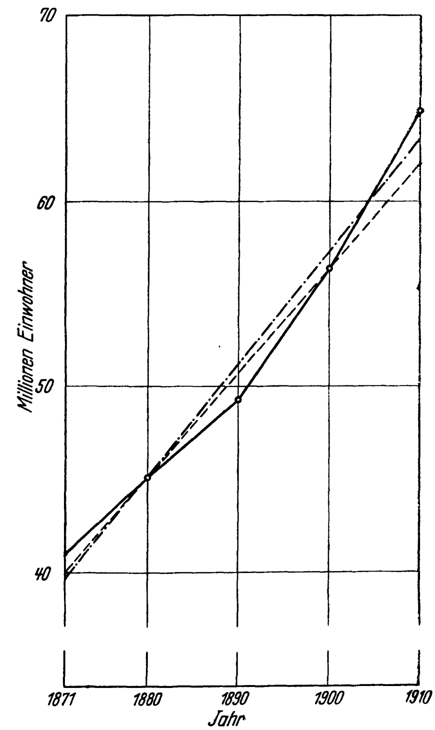


Abb. 15. Kurve der Bevölkerungszahlen des Deutschen Reiches von 1871 bis 1910.
——— beobachtete Werte
—·—·— ausgeglichen nach der Methode der kleinsten Quadrate
— — — ausgeglichen nach einem Ersatzverfahren.

Die Aufgabe ist die, eine Kurve zu finden, die sich dem durch diese Zahlen gegebenen Bevölkerungsverlauf möglichst anpaßt. Legen wir dem Vorgang die Gleichung zugrunde

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4$$

und nehmen wir das Jahr 1890 als Nullpunkt unseres Koordinatensystems, dann ergeben sich für die Jahre 1871 usw. folgeweise die Abszissenwerte -19, -10, 0, $+10$ und $+20$, während die Bevölkerungszahlen 41,06 usw. folgeweise y_1, y_2 usw. darstellen. Es ergibt sich sonach folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
41{,}06 &= a - 19b + 361c - 6859d + 130321e\\
45{,}23 &= a - 10b + 100c - 1000d + 10000e\\
49{,}43 &= a\\
56{,}37 &= a + 10b + 100c + 1000d + 10000e\\
64{,}93 &= a + 20b + 400c + 8000d + 160000e.
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen führt zu der Lösung:

$$\begin{aligned}
a &= 49{,}43\\
b &= 0{,}538\\
c &= 0{,}0156\\
d &= 0{,}000192\\
e &= -0{,}0000189.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit für unsere Kurve die Gleichung:

$$y = 49{,}43 + 0{,}538x + 0{,}0156x^2 + 0{,}000193x^3 - 0{,}0000189x^4\,.$$

Setzen wir folgeweise unsere Abszissenwerte -19, -10, 0, $+10$ und $+20$ in die Gleichung ein, so müssen wir selbstverständlich auf die obigen Angaben für die Jahre 1871 usw. gelangen. Wollen wir Zwischenwerte berechnen, so brauchen wir nur die diesen entsprechenden Abszissenwerte in die Gleichung einzusetzen (vgl. unten S. 122).

[1] Ein Kurvenwendepunkt ist ein solcher Punkt, bei dem die Kurve von einer (zur Abszissenachse) konkaven zu einer konvexen Krümmung (oder umgekehrt) übergeht.

Die Verwendung von empirischen Kurven zur Darstellung irgendeiner statistischen Reihe beschränkt sich aber keinesfalls auf die Verwendung algebraischer Gleichungen des n-ten Grades. Je nach der Form der Kurve stehen die verschiedensten analytischen Gleichungen in Verwendung. Einen Überblick über solche verwendete oder verwendbare Formeln mag man aus Czuber, Mathematische Bevölkerungslehre (siehe u. a. dort die Zusammenstellungen auf S. 21ff.), Huntington in Rietz-Baur, Handbuch der math. Statistik, S. 82 und aus Th. R. Running, Empirical Formulas, New York 1917, gewinnen.

12. Die zeitlichen Reihen[1].

Wir haben mit dem obigen Beispiel über die Bevölkerungskurve des Deutschen Reiches von 1871 bis 1910 bereits ein Beispiel aus dem Gebiete der zeitlichen Reihen gebracht, über die nun in diesem Kapitel näher gehandelt werden soll. Die zeitlichen Reihen kommen in der Statistik sehr häufig vor. Denn nichts liegt näher, als sich durch die zeitliche Nebeneinanderreihung der Zahlen statistischer Tatbestände, der Zahlen für die Bevölkerung, die Geburten, Sterbefälle, die Wanderungen, die Erzeugung, die Ein- und Ausfuhr usw. ein Bild von der zeitlichen Entwicklung dieser Tatbestände zu machen. Ein solches Bild hat nicht nur geschichtliche Bedeutung, es erleichtert auch das Verständnis des gegenwärtigen Zustandes und läßt, beim Walten gleichbleibender Voraussetzungen, sogar Blicke in die Zukunft zu.

Zeitliche Reihen sind sowohl für Bestands- als auch für Ereignismassen möglich. Bei Bestandsmassen werden Stichtagsergebnisse aneinander gereiht, bei Ereignismassen die Monats- oder Jahresergebnisse des Ereignisses. Dabei gilt die aus der Reihenbildung fließende Forderung der Gleichartigkeit der Glieder auch in zeitlicher Hinsicht. In einer streng richtigen statistischen Reihe müßten die zeitlichen Abstände der Zählungen, sowie die Zeiträume, die die Ereignisse fassen, gleich sein (vgl. oben S. 65, 69). In der Praxis ist diese strenge Forderung nicht durchführbar. Der Zeitpunkt der Volkszählungen z. B. wird oft von anderen als rein statistischen Erwägungen mitbestimmt. Bei den Ereignismassen tritt die in der Praxis nicht bedeutsame Ungleichheit der Jahre durch Schaltjahre und die praktisch viel wichtigere Ungleichheit der Monate als Störung der zeitlichen Gleichartigkeit auf. Die Störung aus ungleichartigen Abständen beseitigen wir dort, wo die Reihenmäßigkeit, z. B. bei Betrachtung der Zunahme der Zahlen von einem zum anderen Zeitpunkt, besonders unterstrichen wird, dadurch, daß wir die Zunahmen auf die gleichartigen Abstände, z. B. durch Bildung von Jahresdurchschnitten, beziehen. Die Ungleichheit der Monate wird dadurch beseitigt, daß wir alle Zahlen mit Hilfe von Tagesdurchschnitten auf 30tägige Einheitsmonate umrechnen.

Die Forderung der Gleichartigkeit der Reihenglieder gilt aber nicht nur in Hinsicht ihrer zeitlichen Fassung, sondern in allgemeiner Weise. Bilden wir eine zeitliche Reihe aus Preisen, so darf in der Zwischenzeit die Qualität nicht gewechselt haben, bilden wir eine Reihe von Bevölkerungszahlen, so darf im Gebietsumfang keine Änderung eingetreten sein (oder wenn sie eingetreten ist, so müssen die Zahlen auf das gleiche Gebiet zurückberechnet werden). Sind die Ergebnisse einer der zu vergleichenden Erhebungen nicht vollständig (oder wechselt gar, wie bei privaten

[1] Persons, W. M.: Indices of General Business Conditions. Cambridge, Harvard Univ. Press 1919. — Korrelation von Zeitreihen, in Rietz-Baur: Handbuch der math. Statistik, S. 197ff. Hennig, H.: Die Analyse von Wirtschaftskurven. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 4, Berlin 1927. Donner, O.: Die Saisonschwankungen als Problem der Konjunkturforschung. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 6. Berlin 1928. Lorenz, P.: Der Trend. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 9, 2. Aufl. Berlin 1931. Anderson, O.: Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung. Ein Beitrag zur Analyse von Zeitreihen. Bonn: Schröder 1929. Wagemann, E.: Konjunkturlehre. Berlin: Reimar Hobbing 1928.

Statistiken häufig, der Berichtsumfang von Jahr zu Jahr), so darf der Vergleich nur in einem allen Erhebungen gemeinsamen Umfang (also mit Beschränkung auf diejenigen Teile, die in allen Jahren vollständig waren) durchgeführt werden. Sünden gegen diese einfachen Grundregeln sind sehr häufig. Es genügt auch nicht, irgendwo, an einer mehr oder minder verborgenen Stelle, auf diesen Mangel hinzuweisen. Man unterlasse am besten die Aufstellung solcher Zerrbilder von zeitlichen Reihen — außer wenn nicht die nur in einer gleichartigen Reihe zu beobachtenden Eigenschaften, sondern eben das Ungleichartige beleuchtet werden soll: bei Gebietsveränderungen z. B. die Wirkung der Gebietsänderung.

Die hier erwähnten, nicht aus der Eigenart der Masse folgenden, sondern durch äußere, formale Umstände hineingebrachten Veränderungen oder Verschiedenheiten gehören in das Gebiet der formalen Ursachenforschung, die weiter unten noch eine nähere Behandlung erfahren soll.

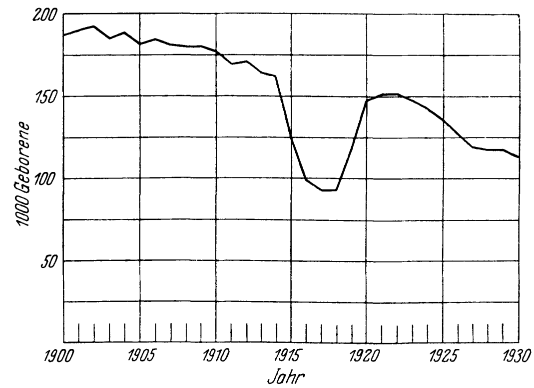


Abb. 16. Kurve der Geborenenzahlen auf dem Gebiete der Republik Österreich von 1900 bis 1930.

Die zeitlichen Entwicklungen, die wir durch die Bildung zeitlicher Reihen erkennen wollen, können der verschiedensten Art sein. In sehr seltenen Fällen können wir eine annähernde Stetigkeit bei Vorhandensein bloßer Zufallsschwankungen beobachten. (Der Fall der Lexisschen „normalen Dispersion", vgl. oben S. 51.) Meistens bietet die Kurve das Bild einer Entwicklungsrichtung nach oben, wie z. B. die Kurve der Bevölkerungszahlen des Deutschen Reiches (Abb. 15), ferner, zusammenhängend mit der zunehmenden Volkszahl, die Kurve fast aller wirtschaftlichen Entwicklungen seit dem Beginn des vorigen Jahrhunderts. Eine rückläufige Entwicklung zeigen dagegen in beinahe allen Kulturstaaten seit einigen Jahrzehnten die absoluten und die Verhältniszahlen der Geburten — „Geburtenrückgang" — (Abb. 16). Eine besondere Form der zeitlichen Kurve entsteht durch regelmäßige (periodische) Auf- und Niederbewegungen, wie wir sie in wirtschaftlichen Zeitreihen häufig beobachten können.

Wir führen als Beispiel dafür die folgende Tabelle (s. S. 108) über die Schweinepreise in Berlin in den Jahren 1894 bis 1913 und die darauf bezügliche Abb. 17 an.

Aus dem Anblick der Zahlen der Tabelle, aber noch deutlicher aus der zeichnerischen Darstellung dieser Zahlen in Abb. 17 (die ausgezogene Linie) erkennen wir, daß wir es hier mit einer Reihe zu tun haben, die vier verschiedene Bestandteile aufweist:

1. Deutliche jahreszeitliche Schwankungen mit einem Tiefpunkt in der ersten Hälfte des Jahres (etwa April, Mai) und einem Höhepunkt in der zweiten Hälfte des Jahres (etwa August, September).

2. Deutliche Konjunkturschwankungen mit einem ungefähr vierjährigen Rhythmus.

3. Eine deutliche Aufwärtsbewegung als Hauptrichtung des Ganzen.

4. Die in allen statistischen Zahlen unvermeidlichen zufälligen Schwankungen.

Das Interesse des Betrachters wendet sich naturgemäß den unter 1 bis 3 genannten Komponenten der Kurve zu und es ist ein wichtiges Ziel der Erforschung wirtschaftlicher Zeitreihen, diese drei Komponenten auseinanderzulegen. Dabei gibt es grundsätzlich zwei Arten des Vorgehens.

A. Man beseitigt durch ein beliebtes, sogleich näher zu erörterndes Ausgleichungsverfahren, das Verfahren der gleitenden Durchschnitte, zunächst die in der Regel

Die Schweinepreise in Berlin in Mark für je 100 kg Lebendgewicht in den Jahren 1894 bis 1913[1].

Jahr	Jänner	Feber	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1894	85	84	83	78	77	77	81	84	86	83	82	77
1895	79	77	73	66	66	65	71	76	76	74	72	69
1896	70	67	64	64	61	57	65	72	77	77	78	76
1897	79	79	78	74	73	75	86	91	93	95	94	91
1898	92	92	89	83	83	84	92	94	94	91	89	85
1899	83	80	76	73	73	72	75	78	77	76	75	73
1900	73	72	71	69	69	69	77	83	84	83	84	82
1901	85	86	86	84	83	85	89	93	95	96	98	96
1902	95	96	95	93	92	89	95	101	99	98	94	92
1903	90	85	79	79	74	74	79	84	83	79	77	74
1904	73	73	71	74	74	75	81	85	85	84	83	82
1905	85	90	97	100	100	100	102	108	108	113	116	111
1906	115	120	116	107	96	100	104	110	111	109	99	96
1907	94	89	83	79	77	80	94	103	95	91	87	87
1908	87	84	83	86	89	90	92	98	101	102	103	103
1909	105	105	102	98	96	98	108	115	116	115	113	110
1910	108	105	103	103	101	98	103	104	106	104	101	94
1911	91	88	85	86	85	84	88	92	92	90	89	88
1912	91	94	103	111	110	108	115	126	127	125	129	128
1913	126	121	119	108	106	105	118	122	118	116	111	106

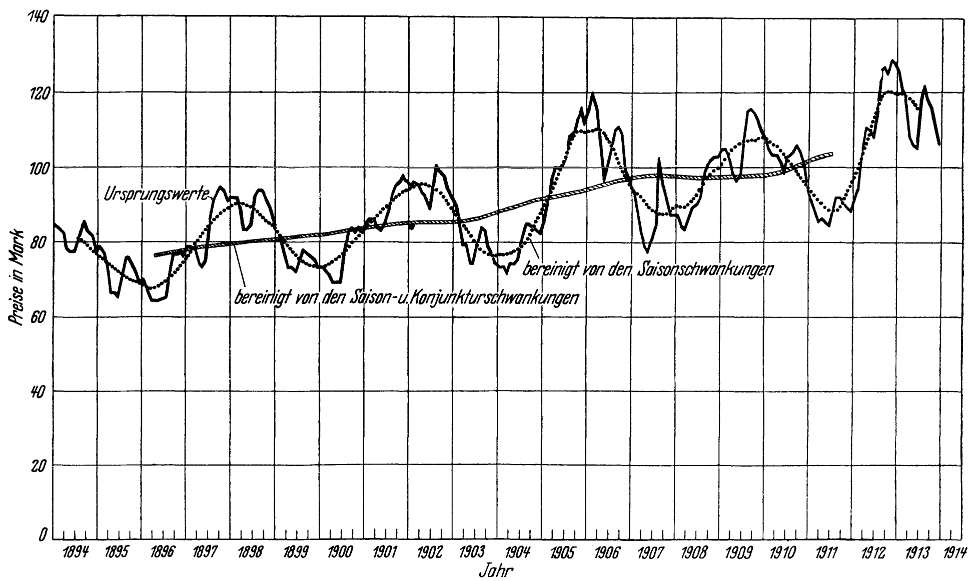


Abb. 17. Die Schweinepreise in Berlin in Mark für je 100 kg Lebendgewicht in den Jahren 1894 bis 1913.

am wenigsten interessierenden Saisonschwankungen, worauf man die Kurve der Hauptrichtung, versehen mit den Konjunkturschwankungen, erhält. Man schreitet im Ausgleichungsvorgang fort und es bleibt schließlich die Hauptrichtung übrig. Durch die zweimalige vielgliedrige Ausgleichung sind gleichzeitig auch die zufälligen Schwankungen beseitigt worden. Mit Hilfe der Hauptrichtung werden hernach die Saisonschwankungen berechnet und die Konjunkturschwankungen dargestellt.

[1] Vierteljahrshefte für Konjunkturforschung, Sonderheft 7, S. 19. Berlin 1928.

B. Man ermittelt durch analytische Gleichung die Hauptrichtung, berechnet darauf die Saisonschwankungen und erhält als Rest die Konjunkturschwankungen (Verfahren der Havardschule).

Der Unterschied zwischen den beiden Verfahrensweisen scheint auf den ersten Blick ziemlich groß zu sein. Es sieht bei oberflächlicher Betrachtung so aus, als ob die Ermittlung der Hauptrichtung der Kurve im ersteren Falle das Endglied, im zweiten das Anfangsglied der Kette von Rechenvorgängen wäre. Dem ist aber nicht so. Die Hauptrichtung ist in beiden Fällen das Anfangsglied der Rechnungsreihe, wenngleich dieses Anfangsglied im Fall A auf einem viel mühevolleren Wege gewonnen wird als im Falle B. Die Hauptrichtung ist gar nicht das volkswirtschaftlich Interessante, um dessentwillen wir die ganze verwickelte Berechnung vornehmen. Interessant ist die Konjunkturschwankung. Diese steht in beiden Fällen am Ende der Berechnung. Die Ermittlung der Saisonschwankungen ist bei der zweiten Berechnungsart ein notwendiges Zwischenglied. Bei der ersten Berechnungsart ist sie nicht notwendig, kann aber mitgenommen werden, wenn dafür ein Interesse besteht.

Wir führen an unserer Tabelle das unter A dargestellte Verfahren durch und wollen hernach noch auf einige Besonderheiten des Verfahrens B eingehen. Das Hauptverfahrensmittel der ersten Reihendarstellung ist das Ausgleichungsverfahren der gleitenden Durchschnitte. Wir wollen daher, einem späteren Abschnitt vorgreifend, zunächst über dieses einige Bemerkungen machen. Das einfachste Mittel zur Beseitigung periodischer und auch sonstiger Schwankungen bestünde in der Zusammenfassung so vieler Reihenglieder, als die Schwankungsperiode Glieder aufweist. Wollten wir also z. B. die jahreszeitlichen Monatsschwankungen verschwinden lassen, so müßten wir nur die Ergebnisse zu Jahresergebnissen zusammenfassen; wollten wir die Konjunkturschwankungen verschwinden lassen, so müßten wir die Zahlen innerhalb der Konjunkturperioden zu mehrjährigen Summen zusammenfassen. Wie aus diesem letzteren Falle ersichtlich ist, könnte dieses brutal einfache Mittel nicht befriedigen, weil dadurch zu viele Einzelheiten der Reihe verloren gehen würden. Der genannte Zweck wird aber in einer verfeinerten Form durch das unten bei der Ausgleichung näher zu besprechende „Verfahren der gleitenden Durchschnitte" erreicht, bei dem immer aus einer Zahl benachbarter Glieder der arithmetische Durchschnitt gezogen und für die ursprüngliche Mittelzahl eingesetzt wird. Natürlich muß die Zahl der jeweils zu summierenden Glieder der durchschnittlichen Periodenlänge oder einem Vielfachen derselben entsprechen, weil bei einer anderen Summierungszahl wieder periodische Schwankungen, wenn auch in einem abgeschwächten Ausmaße, eintreten würden. Das Verfahren der gleitenden Durchschnitte hat den Vorteil, daß es ohne eine Annahme über den Hauptverlauf auskommt, während eine solche Annahme bei dem weiter unten zu besprechenden Verfahren der Kurvendarstellung durch eine analytische Gleichung gemacht werden muß. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß sich im Falle der Änderungen der Hauptrichtung infolge grundlegender Änderungen in den Voraussetzungen die neue Kurve schmiegsam an die ursprüngliche anpaßt. Als ein Nachteil muß dem entgegengestellt werden, daß das Verfahren der gleitenden Durchschnitte rein mechanisch wirkt, daher unter Umständen auch die Wesensform der Hauptrichtung angreift und entstellt. Auch gehen bei vielgliedriger Ausgleichung zahlreiche Glieder am Anfang und am Ende der Reihe verloren (vgl. Abb. 17).

Wenn wir also als ersten Schritt die Beseitigung der Saisonschwankungen vornehmen wollen, müssen wir das Verfahren der gleitenden Durchschnitte zwölfgliedrig durchführen. Würden wir das ohne weiteres tun, so hätte das den Nachteil, daß der gewonnene Durchschnitt sich nicht auf eine Monatsmitte beziehen würde, wie alle gegebenen Monatsangaben, sondern auf die Grenze zwischen dem sechsten und siebenten der zur Durchschnittsbildung herangezogenen Monate. Um dies zu vermeiden, müssen wir den jeweilig zu ersetzenden Monat in die Mitte nehmen, was in der Weise geschehen kann, daß 5 Monate oberhalb, 5 Monate unterhalb, dazu noch die angrenzenden Halbmonate in Rechnung gesetzt werden. Soll also z. B. für den Monat Juli 1894 ein ausgeglichener Wert gefunden werden, so werden wir addieren: den halben Monatswert für Jänner, den ganzen für Februar, März usw. bis Dezember und noch den halben Wert für Jänner 1895, und diese Summe dann durch 12 dividieren. Der gefundene Wert ist der ausgeglichene Juliwert. So wird in einer etwas langwierigen Rechnung fortgefahren, bis wir alle ursprünglichen Werte der Reihe durch ausgeglichene ersetzt haben. Das Ergebnis dieser Arbeit finden wir in unserer Abb. 17 in der punktierten Linie (...) dargestellt. Die Saisonschwankungen sind verschwunden, es sind nur noch die Konjunkturschwankungen + Hauptrichtung übriggeblieben.

Die Ausschaltung der Konjunkturschwankungen wird ähnlich durchgeführt. Zufällig sind alle hier erlangten Perioden gerade 46 Monate lang, so daß wir die Gliederzahl des neuen Ausgleichungsverfahrens deutlich gegeben haben. Sind Perioden von verschiedener Länge zu beseitigen, so hilft man sich bei kleineren Unter-

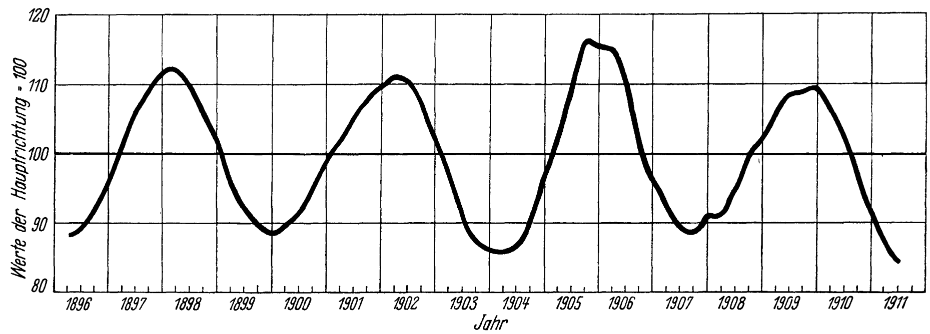


Abb. 18. Die von der Hauptrichtung der Entwicklung und den Saisonschwankungen bereinigte Konjunkturkurve der Schweinepreise in Berlin in den Jahren 1896 bis 1911.

schieden der Periodenzahlen mit dem Durchschnitt der Perioden; sind die Schwankungen aber beträchtlicher, so muß wohl eine allmählich fortschreitende Anpassung der Gliederzahl der Ausgleichung an die verschiedene Periodenlänge vorgenommen werden.

Das Ergebnis der zweiten Ausgleichung ist die gestrichelte Kurve in Abb. 17. Wir sehen, daß sie zuerst langsam ansteigt, dann im Jahre 1902 annähernd eben verläuft, wieder, und zwar etwas stärker ansteigt, im Jahre 1907 einen kleinen Rückfall erfährt, von da an wieder, und zwar noch stärker als im zweiten Abschnitt ansteigt. Die Kurve besitzt also zwei Wendepunkte, könnte also analytisch durch eine algebraische Kurve vierten Grades dargestellt werden (vgl. S. 104f.).

Von hier zur reinen Darstellung der Konjunkturperiode ist nur ein kleiner Schritt. Wir können die Differenzen der einander zugehörigen Werte der zweiten (saisonbereinigten, punktierten) und der dritten (konjunkturbereinigten, gestrichelten) Reihe bestimmen und sie in Prozenten dieser dritten Reihe ausdrücken oder noch kürzer, wir können die Werte der zweiten durch die zugehörigen Werte der dritten Reihe dividieren und erhalten dann die Konjunkturschwankung in Meßzahlen (S. 126) der dritten Reihe (Abb. 18).

In einer ganz ähnlichen Weise können wir durch Differenzen- und Prozentberechnung aus der ersten Reihe der beobachteten Werte und der zweiten (saisonbereinigten) oder durch unmittelbare Division der beiden die Saisonschwankungen ermitteln; nur müssen wir zum Schluß aus den beobachteten 20 Jahren den Durchschnitt ziehen, wobei wir von der vorher zu untersuchenden Annahme ausgehen, daß dem Rhythmus der Saisonschwankungen eine gleichbleibende Wesensform zugrunde liege, für die also der arithmetische Durchschnitt der richtige Ausdruck sei. (Vgl. Abb. 19.)

Der im wesentlichen von WARREN M. PERSONS entwickelte Rechnungsvorgang B der Harvard-Schule weicht davon einigermaßen ab. Zunächst wird mit Hilfe einer analytischen Gleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. unten S. 117) die Hauptrichtung der Entwicklungsreihe bestimmt. Hierzu ist es notwendig, über den gesamten Gang der Reihe eine Annahme zu machen. Dabei ist aber der Zweck dieser Darstellung wohl zu beachten: nicht diejenige Kurve, die die kleinsten Abweichungen ergibt, sondern diejenige, die die Hauptrichtung der Kurve am richtigsten darstellt, wird hier die brauchbarste sein. Wenn wir weiter unten bei der Ausgleichung für deren Zwecke die Forderung einer möglichst genauen Anpassung stellen müssen, so tritt diese Forderung hier gegenüber der erstgenannten zurück. Bei den in der Regel zu beobachtenden zeitlichen Aufwärts- oder Abwärtsentwicklungen wird daher eine durch die schwankenden Kurvenpunkte zu legende Gerade oder algebraische Kurve 2. Grades meistens eine entsprechende Darstellung

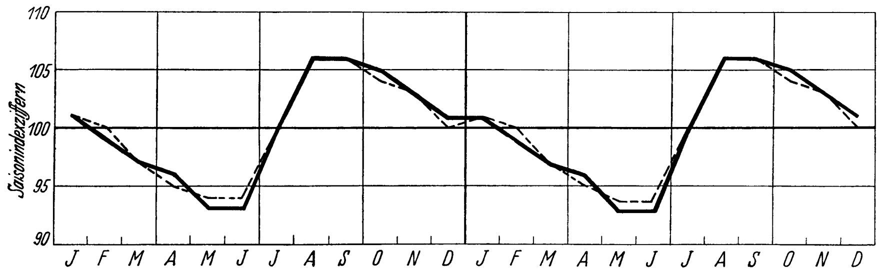


Abb. 19. Die typische Periodenfigur der Saisonschwankungen der Berliner Schweinepreise 1894 bis 1913.
------ Berechnet nach dem Verfahren der gleitenden Durchschnitte.
——— Berechnet nach dem Gliedziffernverfahren von PERSONS.

der Hauptrichtung ergeben. Im Falle der Schweinepreise ist in der angeführten Quelle, wo die Berechnung nach der Harvard-Methode durchgeführt ist, die Annahme einer Geraden gemacht worden, eine Annahme, die nach unserer vorausgehenden Feststellung als der Hauptrichtung nur annähernd entsprechend bezeichnet werden kann.

Ist die Gleichung der Hauptrichtung ermittelt und sind neben die beobachteten Monatswerte die berechneten gestellt worden, so ist der nächste Schritt der, in einem ziemlich verwickelten Verfahren die Saisonschwankungen zu bestimmen. Es werden für alle in Frage kommenden Monate Verhältniszahlen in der Weise gebildet, daß das erste betrachtete Jännerergebnis durch dasjenige des vorausgegangenen Dezembers, das Februarergebnis durch dasjenige des vorausgegangenen Jänners usw. dividiert wird. So erhalten wir für alle Jänner, für alle Feber usw. eine Reihe von Gliedziffern, aus denen PERSONS den mittleren Wert (Zentralwert) wählt. Die Reihe dieser mittleren Werte wird weiter behandelt, indem der Jännerwert = 100 gesetzt wird und die Verhältniszahlen der anderen Monate in der Weise umgebildet werden, daß die jeweilige Monatsmeßzahl der neuen (zweiten) Reihe durch Multiplikation der entsprechenden Gliedziffer der ersten Reihe mit dem vorausgehenden Gliede der zweiten Reihe gewonnen wird. So wird z. B. die Februarzahl der zweiten Reihe durch die Multiplikation $\frac{\text{Februargliedziffer} \times 100}{100}$. gewonnen, die Märzzahl $\frac{\text{Märzgliedziffer} \times \text{neue Februarzahl}}{100}$ usw. Diese Reihe wird aber in der Regel noch weiter behandelt werden müssen. Denn die Dezemberzahl der zweiten Reihe multipliziert mit der Jännergliedziffer der ersten Reihe müßte als neuerliche Jänner-zahl 100 ergeben. In Wirklichkeit wird sie wegen der Gesamtbewegung der Reihe eine andere Zahl, z. B. a geben. Die Differenz $a - 100$ ist eine Störung, die offenbar auf die Hauptrichtung der Reihe zurückzuführen ist und die wir in unseren Werten ausschalten müssen, entweder indem wir, vom Februar angefangen, je $^1/_{12}$ der Differenz folgeweise abziehen, oder durch die zwölfte Wurzel der Differenz folgeweise dividieren.

Schließlich wird noch der Durchschnitt dieser korrigierten Reihe = 100 gesetzt und es werden danach in einer 4. Reihe von Verhältniszahlen die Glieder der 3. (korrigierten) Reihe abgeändert. Diese letztere Reihe gibt PERSONS Kennziffern der Saisonschwankungen an.

Das Verfahren der Bestimmung der Saisonschwankungen durch die Gliedziffern ist, wie ersichtlich, von der Bestimmung der Hauptrichtung unabhängig. (Anders als das noch im weiteren zu erwähnende Verfahren.) Es kann daher auch selbständig vorgenommen werden, wenn es nicht darauf ankommt, die Konjunktur schwankungen darzustellen.

Wir wollen das Gliedzifferverfahren an dem Beispiel unserer Berliner Schweinepreise veranschaulichen. Es handelt sich zuerst darum, die Gliedziffern zu bestimmen. Dies geschieht, wie erwähnt, durch folgeweise Division des Monatswertes des betreffenden Monates durch den Wert des vorausgehenden. Wollen wir z. B. die Gliedziffer für Jänner 1894 bestimmen, so haben wir den Schweinepreis im Jänner 1894 von 85 RM durch den in unserer Tabelle auf S. 108 nicht mehr ausgewiesenen Preis im Dezember 1893 von 83 RM zu dividieren, was, mit 100 multipliziert, als Gliedziffer für Jänner 1894 102,4 ergibt. Die Division des Feberpreises 1894 von 84 RM durch den Jännerpreis 1894 von 85 RM ergibt die Febergliedziffer 98,8 usw. Die folgende Tabelle gibt uns sämtliche Gliedziffern der obigen Schweinepreistabelle.

Gliedziffern der Berliner Schweinepreise 1894 bis 1913.

Jahr	Jänner	Feber	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1894	102,4	98,8	98,8	94,0	98,7	100,0	105,2	103,7	102,4	96,5	98,8	93,9
1895	102,6	97,5	94,8	90,4	100,0	98,5	109,2	107,0	100,0	97,4	97,3	95,8
1896	101,4	95,7	95,5	100,0	95,3	93,4	114,0	110,8	116,9	100,0	101,3	97,4
1897	103,9	100,0	98,7	94,9	98,6	102,7	114,7	105,8	102,2	102,2	98,9	96,8
1898	101,1	100,0	96,7	93,3	100,0	101,2	109,5	102,2	100,0	96,8	97,8	95,4
1899	97,6	96,4	95,0	96,1	100,0	98,6	104,2	104,0	98,7	98,7	98,7	97,3
1900	100,0	98,6	98,6	97,2	100,0	100,0	111,6	107,8	101,2	98,9	101,2	97,6
1901	103,7	101,2	100,0	97,7	98,8	102,4	104,7	104,5	102,2	101,1	102,1	98,0
1902	99,0	101,1	99,0	97,9	98,9	96,7	106,7	106,3	98,0	99,0	95,9	97,9
1903	97,8	94,4	92,9	100,0	93,7	100,0	106,8	106,3	98,8	95,2	97,4	96,1
1904	98,6	100,0	97,3	104,2	100,0	101,4	108,0	104,9	100,0	98,8	98,8	98,8
1905	103,7	105,9	107,8	103,1	100,0	100,0	102,0	105,9	100,0	104,6	102,7	95,7
1906	103,6	104,3	96,7	92,2	89,7	104,2	104,0	105,8	100,9	98,2	90,8	97,0
1907	97,9	94,7	93,3	95,2	97,4	103,9	117,5	109,6	92,2	95,8	95,6	100,0
1908	100,0	96,6	98,8	103,6	103,4	101,1	102,2	106,5	103,1	101,0	101,0	100,0
1909	101,9	100,0	97,1	96,1	98,0	102,1	110,2	106,4	100,9	99,1	98,3	97,3
1910	98,2	97,2	98,1	100,0	98,1	97,0	105,1	101,0	101,9	98,1	97,1	93,1
1911	96,8	96,7	96,6	101,2	98,8	98,8	104,8	104,5	100,0	97,8	98,9	98,9
1912	103,4	103,3	109,6	107,8	99,1	98,2	106,5	109,6	100,8	98,4	103,2	99,2
1913	98,4	96,0	98,3	90,8	98,1	99,1	112,4	103,4	96,7	98,3	95,7	95,5

Diese Gliedziffern werden nun durch Strichelung in eine Hilfstabelle eingetragen, in deren Kopf die Monate, in deren Vorspalte die vorkommenden Stufen der Gliedziffern verzeichnet sind. Diese Hilfstabelle soll dazu dienen, zuerst einmal über das Vorhandensein und die Art der vorkommenden Saisonschwankungen eine vorläufige Auskunft zu geben, dann, einen Hinweis auf den für die Gliedziffern jedes Monates zu wählenden kennzeichnenden Mittelwert zu liefern. Als Regel gilt, daß der mittlere

Wert oder das arithmetische Mittel aus den zentral gelegenen Fällen zu wählen ist, während der arithmetische Durchschnitt aus allen Fällen wegen der gerade hier häufig auftretenden Außenfälle weniger beliebt ist. PERSONS selbst gibt dem mittleren Wert (Zentralwert) den Vorzug.

Verteilungstafel der Gliedziffern über die Schweinepreise in Berlin 1894—1913.

Stufung der Gliedziffern[1]	Jänner	Feber	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
90	—	—	—	—	I	—	—	—	—	—	—	—
91	—	—	—	II	—	—	—	—	—	—	I	—
92	—	—	—	I	—	—	—	—	I	—	—	—
93	—	—	II	I	—	I	—	—	—	—	—	I
94	—	I	—	I	I	—	—	—	—	—	—	I
95	—	I	II	II	I	—	—	—	—	I	—	I
96	—	III	I	II	—	—	—	—	—	I	III	IIII
97	I	III	卌	I	I	II	—	—	I	III	III	卌
98	卌	I	II	II	III	I	—	—	I	卌	II	III
99	II	II	卌	—	卌I	IIII	—	—	II	卌	卌	III
100	II	IIII	I	III	卌I	IIII	—	—	卌	I	—	II
101	I	II	—	I	—	III	—	I	IIII	II	III	—
102	III	—	—	—	—	II	II	I	IIII	I	I	—
103	II	I	—	I	I	I	—	I	I	—	II	—
104	IIII	I	—	II	—	II	II	III	—	—	—	—
105	—	—	—	—	—	—	IIII	II	—	I	—	—
106	—	I	—	—	—	—	I	卌I	—	—	—	—
107	—	—	—	—	—	—	III	II	I	—	—	—
108	—	—	I	I	—	—	I	I	—	—	—	—
109	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—	—
110	—	—	I	—	—	—	II	II	—	—	—	—
111	—	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—
112	—	—	—	—	—	—	II	—	—	—	—	—
113	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
114	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—	—
115	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—	—
116	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
117	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
118	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—	—

Schon der erste Anblick der Verteilungstafel der mittleren Werte der Gliedziffern läßt das Vorhandensein von Saisonschwankungen erkennen, bietet uns also ein ähnliches Hilfsmittel wie die Kurve der beobachteten Zahlen im obigen Schaubild 17. Wir erfahren aber auch einiges über die Streuung der Gliedziffern. Einzelne Monate, wie Jänner und Dezember, weisen eine enge Streuung auf, andere wieder, wie März, April oder Juli eine weite. Es kommen auch weitab liegende Außenfälle vor, wie im März oder Juli. Es zeigt sich nach dieser Betrachtung, daß wir den von PERSONS bevorzugten mittleren Wert auch hier mit Vorteil anwenden können.

Die folgende Zusammenstellung (s. Tab. S. 114) zeigt dann in Spalte 1 die mittleren Werte der Gliedziffern, in Spalte 2 deren Umrechnung auf den stetig bezogenen Ausgangswert Jänner, in Spalte 3 die von der Dezember—Jänner-Unstimmigkeit bereinigten Werte, in Spalte 4 schließlich die Kennziffern der Saisonschwankungen.

---

[1] Die angegebenen Werte bedeuten jeweils die Gruppenmitte, also 90 statt 89,5 bis unter 90,5 usw.

Berechnung von Saisonziffern der Schweinepreise in Berlin nach der Gliedziffernmethode.

Monat	Mittlere Werte der Gliedziffern 1	Stetig bezogene Meßzahlen, unberichtigt 2	Berichtigte Meßzahlen 3	Saison-kennziffern 4	Saisonkenn-ziffern nach dem Verfah-ren der glei-tendenDurch-schnitte 5
Jänner	101,3	100,00	100,00	101,3	101,5
Feber	98,7	98,70	98,58	99,9	99,2
März	97,7	96,43	96,18	97,5	97,2
April	97,5	94,02	93,65	94,9	96,6
Mai	98,8	92,89	92,40	93,6	93,2
Juni	100,0	92,89	92,28	93,5	92,5
Juli	106,6	99,02	98,28	99,6	100,3
August	106,3	105,26	104,40	105,8	105,9
September	100,4	105,68	104,70	106,1	106,2
Oktober	98,6	104,20	103,10	104,5	105,2
November	98,8	102,95	101,72	103,1	103,2
Dezember	97,3	100,17	98,82	100,2	100,6
Jänner	101,3	101,47	100,00	101,3	100,5

Der Rechnungsgang in dieser Tabelle war folgender: zuerst wurden auf die bekannte Art (S. 77) die mittleren Werte der Gliedziffern aus der obigen Tabelle S. 112 gewonnen. Dann wurden stetig bezogene Meßzahlen der Spalte 2 in der oben angegebenen Weise berechnet, also

$$\begin{array}{ll} \text{Jännerwert} = 100, & \\ \text{Feberwert:} & 100{,}00 \times 98{,}7 = 98{,}70, \\ \text{Märzwert:} & 98{,}70 \times 97{,}7 = 96{,}43, \\ \text{Aprilwert:} & 96{,}43 \times 97{,}5 = 94{,}02 \text{ usw.} \end{array}$$

Der letzt errechnete Wert dieser Reihe (der neue Jännerwert) ergab 101,47, die Abweichung von dem zu erwartenden Werte = 100 beträgt also 1,47. Diese haben wir hier in arithmetischem Verfahren beseitigt, also

$$98{,}70 - \frac{1{,}47}{12} = 98{,}58$$

$$96{,}43 - \frac{2 \cdot 1{,}47}{12} = 96{,}18 \text{ usw.}$$

Die Reihe der berichtigten Meßzahlen (Sp. 3) ergab nach der Durchführung 98,6758 als Durchschnitt. Indem wir den Durchschnitt = 100 setzten, also alle Werte der Reihe 3 mit $\frac{100}{98{,}6758}$ multiplizierten, erhielten wir die Werte der Reihe 4, die eigentlichen Kennziffern der Saisonschwankungen. Neben diese haben wir zu Vergleichszwecken die nach dem Verfahren der gleitenden Durchschnitte berechneten Kennziffern gesetzt. Wie ersichtlich, stimmen die Kennziffern der Saisonschwankungen mit den oben gefundenen ganz nahe überein.

Mit den Saisonkennziffern multipliziert W. M. Persons die Werte der Hauptrichtung und erhält auf diese Weise eine Reihe, in der nur Hauptrichtung und Saisonschwankungen wirksam sind. Die Differenzen der beobachteten Werte von den ausgeglichenen und deren Verhältniszahlen von den ausgeglichenen Werten ergeben dann ähnlich wie oben die Gestalt der Konjunkturschwankungsreihe.

Für die Berechnung der Saisonschwankungen sind auch einfachere Verfahren ermittelt worden. Das einfachste besteht darin, daß für eine längere Reihe von Jahren arithmetische Durchschnitte für jeden Monat berechnet werden. Eine solche 10 oder mehr Jahre umfassende Durchschnittsreihe der Jahresmonate könnte als die reine Periodengestalt dann betrachtet werden, wenn die Abweichungen in den einzelnen Jahren als zufällig gelten könnten und wenn der ganzen Entwicklung nicht eine Hauptrichtung in irgendeinem Sinne zugrunde läge. Die erste Voraussetzung wird wohl zumeist zutreffen. Wenn keine Anhaltspunkte dafür vorliegen, daß in der beobachteten Zeit eine wesentliche Änderung im Rhythmus der Saisonschwankungen vor sich gegangen sein könnte, so darf der Durchschnitt aus vielen Jahren recht wohl als die wahrscheinlichste Form dieser Saisoneinwirkung betrachtet werden. Was aber die zweite Voraussetzung, das Fehlen einer Hauptrichtung, anlangt, so wird sie in den seltensten Fällen zutreffen. Das macht das Verfahren aber nicht wertlos, weil die Verschiebung, die durch die Hauptrichtung in der Reihe der Monatsdurchschnitte hervorgerufen wird, leicht beseitigt werden kann. Liegt z. B. eine lineare Hauptrichtung vor und ist der jährliche Zuwachs z, so ist der Monatszuwachs $\frac{z}{12}$, weshalb das Februarergebnis um $\frac{z}{12}$, das Märzergebnis um $\frac{2z}{12}$ usw. zu verringern ist, um die Periodenform von der Entstellung durch die Wirkung der Hauptrichtung zu befreien. Verläuft die Hauptrichtung nicht linear, dann sind diese Zuwächse der ausgeglichenen Reihe der Monatswerte zu entnehmen. Zum Schluß wird der Durchschnitt der Reihe = 100 gesetzt, und es werden alle Werte entsprechend abgeändert (Kennziffern der Saisonschwankungen).

Es ist auch versucht worden, periodische Reihen durch analytische Funktionen auszudrücken. Man hat hierzu eine Sinus-Funktion oder die Fouriersche Reihe verwendet. Auf das Nähere kann hier nicht eingegangen werden[1].

13. Die Reihenausgleichung[2].

a) Allgemeines. Die Betrachtungen über die zufälligen Abweichungen von der Wesensform einer Verteilung (S. 22ff.), sowie über sonstige Abweichungen von einer vorhandenen Hauptrichtung (Saisonschwankungen, Konjunkturschwankungen, S. 107ff.) legen den Wunsch nahe, die Wesensform einer Verteilung oder die Hauptrichtung einer Entwicklung klar und ohne die zufälligen und die sonstigen Schwankungen herauszuarbeiten. Im einzelnen ist allerdings die Zielsetzung eine verschiedene, je nachdem es sich nur um die Beseitigung zufälliger Schwankungen oder um die Darstellung einer Hauptrichtung handelt. Da in der letzteren Beziehung schon im vorausgehenden das Wichtigste gesagt worden ist, wollen wir uns hier auf die Bereinigung statistischer Reihen von Zufallsschwankungen beschränken. Die Ausgleichung in diesem Sinne ist dann nichts anderes als die Beschaffung eines Ersatzes für die dem Statistiker unzugängliche Wesensform in der unendlich großen Zahl. Dabei ist allerdings zu beachten, daß nicht jede Unregelmäßigkeit an einer sonst in Regelmäßigkeit beobachteten Form eine zufällige Abweichung sein muß. Wir beobachten im Gegenteil sehr häufig solche Entstellungen als massenindividuelle Eigenart. Sie

---

[1] Vgl. dazu W. L. CRUM: Art. Die Periodogramm-Analyse in RIETZ-BAUR: Handbuch der mathem. Stat. S. 218ff. und das dort angeführte Schrifttum. Ferner CZUBER: Mathem. Bevölkerungstheorie, S. 25ff.

[2] BLASCHKE, E: Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen, Wien 1893. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung **2**, 3. Aufl. 167ff., 185ff. WESTERGAARD, H. u. H. NYBØLLE: Grundzüge der Theorie der Statistik. 2. Aufl., S. 318ff. Jena 1928. LAGUNOW, B.: Zur Praxis der Ausgleichung der statistischen Reihen. Metron **6**, H. 3/4. WHITTAKER u. ROBINSON: The Calculus of Observations. A Treatise on Numerical Mathematics. London: Blackie and Sons Ltd. 1926. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Aufl., Leipzig und Berlin. ANDERSON, O.: Über die Anwendung der Differenzenmethode bei Reihenausgleichungen, Stabilitätsmessungen und Korrelationsuntersuchungen, 1. In Biometrika **18**, 1926, 293ff. PEARSON, K.: On the χ^2 Test of Goodness of Fit. Biometrika **14** (1922/23).

unterscheiden sich aber von den zufälligen Schwankungen dadurch, daß sie systematisch gerichtet sind, also Ausbuchtungen oder Aushöhlungen einer sonst in regelmäßiger Form verlaufenden Kurve vorstellen[1], während zufällige Abweichungen mit der gleichen Häufigkeit nach oben wie nach unten zu erwarten sind. Die Gefahr, Unebenheiten der Wesensform durch ein Ausgleichungsverfahren abzuschneiden, liegt besonders dort vor, wo für die Ausgleichung eine analytische Formel verwendet wird, die eine bestimmte strenge Regelmäßigkeit der Form voraussetzt, also z. B. die Gaußsche Normalkurve, oder einer der Pearsonschen Kurventypen. Stellt sich dann nach vollzogener Anpassung der Kurve auf längeren Strecken ein Zurückbleiben oder ein Hinausgehen über die angepaßte Kurve ein, so ist es sehr wahrscheinlich, daß hier systematische Abweichungen vorliegen. Wenn wir z. B. den Mittelteil und den ihm unmittelbar vorangehenden Teil der oben nach der Gaußschen Verteilung ausgeglichenen Körpergrößenreihe unserer Mistelbacher Rekruten (Körpergrößenstufen 159 cm bis 167 cm) betrachten, so muß wegen der Aufeinanderfolge von 6 negativen und 3 positiven zum Teil ziemlich starken Abweichungen die Möglichkeit zugelassen werden, daß hier aufeinanderfolgend Ausbauchung und Wulst in einem allerdings geringen Maße vorliegen, die bei einer mechanischen Ausgleichung, etwa vermittels fünfgliedriger gleitender Durchschnitte, nicht in dem gleichen Maße vorhanden sind.

Körpergröße in cm	Beobachtete Zahl	Ausgleichung nach Gauss	Ausgleichung nach dem Verfahren der gleitenden Durchschnitte (5gliedrig)
157	14	15,5 (−)	15,8 (−)
158	25	20,3 (+)	20,6 (+)
159	22	25,7 (−)	25,2 (−)
160	30	31,7 (−)	31,0 (−)
161	35	38,0 (−)	35,6 (−)
162	43	44,2 (−)	40,6 (+)
163	48	50,0 (−)	46,6 (+)
164	47	54,9 (−)	52,2 (−)
165	60	58,7 (+)	58,4 (+)
166	63	60,8 (+)	60,8 (+)
167	74	61,3 (+)	64,2 (+)
168	60	60,0 (−)	61,6 (−)
169	64	57,0 (+)	58,6 (+)
170	47	52,7 (−)	51,0 (−)

Die Ausdeutung solcher Abweichungen ist nicht mehr Aufgabe des Statistikers. Für ihn ist genug getan, wenn er die Aufmerksamkeit der jeweiligen Stoffwissenschaft auf das Vorhandensein und das Ausmaß solcher systematischer Abweichungen von den sonst als regelmäßig beobachteten Formen hinlenkt.

b) Die Ausgleichung durch Obergruppen und durch gleitende Durchschnitte. Das roheste Ausgleichungsverfahren ist das der Bildung von Obergruppen (vgl. oben das Beispiel auf S. 49 oder 88). Es beruht auf dem Gesetz der großen Zahl; durch die Zusammenfassung jeweils mehrerer Gruppen entstehen größere Zahlen, in denen sich die Zufallswirkungen der ursprünglichen Gruppenzahlen aufheben. Allerdings werden dabei die Einzelheiten der früheren Gruppenverteilung geopfert (vgl. oben auf S. 109 den ähnlichen rohen Vorgang zur Beseitigung von periodischen Schwankungen). Als ein verfeinertes Verfahren, das sich gleichfalls auf das Gesetz der großen Zahl stützt, aber die Einzelheiten der Reihe beibehält, ist das Verfahren der gleitenden Durchschnitte zu betrachten. Es besteht, wie bereits oben auf S. 109f. erwähnt, darin, daß statt der ursprünglichen Reihenglieder folgeweise die arithmetischen Durchschnitte aus einer Zahl von aufeinanderfolgenden Gliedern genommen werden, wobei die Durchschnittsberechnungen einander übergreifen. Haben wir also die Gruppenbesetzungszahlen z_1, z_2, z_3, z_4 usw., so tritt bei einem dreigliedrigen Verfahren $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ für z_2, $\frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}$ für z_3 usw.

[1] Vgl. z. B. die Ausbuchtungen, die sich bei der Ausgleichung der österreichischen Sterbetafel von 1910 nach Gompertz-Makeham ergeben haben und die durch ein eigenes Verfahren besonders ausgeglichen und dem Gesamtverlaufe wieder angeklebt werden mußten. Österr. Statistik 1, N. F., H. 4, Österr. Sterbetafeln, Anhang: Blaschke, E.: Die Ausgleichung von Absterbeordnungen aus der Bevölkerungsstatistik.

lich

Bei einer geraden Anzahl von Gliedern würde der Durchschnitt für die Mitte zwischen den beiden Mittelgliedern gelten, was in der Regel nicht gewünscht wird. Man wählt darum dort, wo die Wahl freigestellt ist, eine ungerade Anzahl von Gliedern; wo sie aber gegeben ist (wie oben auf S. 110 mit 12 oder 46 Gliedern), nimmt man doch das zu ersetzende Reihenglied in die Mitte, in der Weise, daß man vorn und rückwärts halbe Reihenglieder anhängt. Die erwähnte zwölfgliedrige Ausgleichung ging also nach der Formel vor sich $\frac{\frac{z_1}{2} + z_2 + z_3 \cdots + z_{11} + z_{12} + \frac{z_{12}}{2}}{12}$.

Beginnt oder endet die Reihe bei 0, so kann auch das erste (letzte) Reihenglied durch einen Durchschnitt ersetzt werden, indem die fehlenden Reihenglieder nach vorn oder nach hinten durch 0 ergänzt werden.

Diese Ausgleichung wirkt um so schärfer, je mehr Glieder mit herangezogen werden. Sie kann auch wiederholt an einer gleichen Reihe vorgenommen werden. Freilich darf nicht übersehen werden, daß sie bei scharfer Wirkung auch die Wesensform selbst angreift, indem sie bei allen (zur Abszissenachse) konvexen Kurven höhere, bei allen konkaven Kurven niedrigere Ergebnisse liefert, als der Wirklichkeit entsprechen würde. Das Verfahren muß darum mit Vorsicht angewendet werden.

Aufgabe 14. Die Reihe auf S. 88 ist durch dreigliedrige gleitende Durchschnitte auszugleichen.

c) Die zeichnerische (graphische) Ausgleichung. Eine weitere leichte Art der Ausgleichung, die besonders dort angewendet werden kann, wo es nicht auf eine besondere Genauigkeit der ausgeglichenen Werte ankommt, ist die graphische. Es werden auf einem rastrierten Papier, sogenanntem „Millimeterpapier", nach einem bestimmten Maßstab die Endpunkte der Mittelordinaten der einzelnen Gruppen (die Endpunkte der Ordinaten bei zeitlichen Reihen) aufgetragen und es wird dann mit freier Hand eine Kurve so durch sie gelegt, daß annähernd die Summe der Abweichungen nach oben gleich ist derjenigen nach unten. Dieses Verfahren ist schmiegsam. Die ausgeglichene Kurve paßt sich schön den angegebenen ursprünglichen Werten an und berücksichtigt auch systematische Abweichungen von einer etwa vorliegenden, sonst regelmäßigen Form. Die ausgeglichenen Werte werden von der an der Seite befindlichen Maßeinteilung abgelesen.

d) Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ein häufig verwendetes Ausgleichungsverfahren ist die von Gauss gefundene „Methode der kleinsten Quadrate", richtiger der kleinsten Quadratsummen. Es ist dies ein Verfahren, das der Bedingung entspricht, eine frei zu wählende Kurve einer gegebenen statistischen Reihe so anzupassen, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen für diese Kurvenform ein Minimum wird. Die anzupassende Kurve muß nach der gesamten Form gewählt werden. In vielen Fällen (vgl. oben S. 111 über die Bestimmung der Hauptrichtung einer zeitlichen Reihe) genügt es, eine Gerade oder eine algebraische Kurve zweiten Grades zu wählen. Bezüglich der Ableitung des Verfahrens sei auf Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, I, 3. Aufl. S. 318 verwiesen. Hier soll nur die Anwendung des Verfahrens gezeigt werden.

Wollen wir z. B. eine Reihe von Werten mit einer Geraden $y = a + bx$ ausgleichen, so muß der Vorgang in ein Koordinatensystem verlegt gedacht werden, in dem die y die jeweiligen Zahlenwerte, die x die darzustellenden Gruppenmitten, Zeitpunkte usw. darstellen. Es ist also in Wirklichkeit für alle gegebenen auszugleichenden Werte x und y bekannt, dagegen a und b unbekannt. Um sie zu bestimmen, brauchen wir zwei Gleichungen. In Wirklichkeit haben wir aber vorläufig so viele Gleichungen, als Angaben vorhanden sind. Wir setzen also alle laufenden Werte in die Gleichung ein und bilden die Summe, was für uns die erste Gleichung ergibt. In unserem obigen Beispiel der Bevölkerungszahlen des Deutschen Reiches erhalten wir

$$\begin{array}{rl} 41{,}06 &= a - 19b \\ 45{,}23 &= a - 10b \\ 45{,}43 &= a \\ 56{,}37 &= a + 10b \\ 64{,}93 &= a + 20b \\ \hline 257{,}02 &= 5a + b \end{array} \quad \text{(1. Normalgleichung).}$$

Nun wird ein zweites Gleichungssystem gebildet, indem jede Gleichung mit ihrem x multipliziert wird. Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rl} -780{,}14 &= -19a + 361b \\ -452{,}30 &= -10a + 100b \\ 563{,}70 &= 10a + 100b \\ 1298{,}60 &= 20a + 400b \\ \hline 629{,}86 &= a + 961b \end{array} \quad \text{(2. Normalgleichung).}$$

Die Auflösung dieser beiden Normalgleichungen ergibt

$$\text{für } a = 51{,}284$$
$$\text{,,}\quad b = 0{,}60206.$$

Die ausgeglichene Kurvengleichung lautet daher:

$$y = 51{,}284 + 0{,}60206\, x.$$

Die ausgeglichenen Werte sind demnach (vgl. Abb. 15)

Jahr	ausgeglichen	beobachtet
1871	39,85 Mill. P.	41,06
1880	45,26 ,, ,,	45,23
1890	51,28 ,, ,,	49,43
1900	57.31 ,, ,,	56,37
1910	63,34 ,, ,,	64,93

In allgemeiner Form schreiben wir die Normalgleichung also:

$$\text{1. Normalgleichung:}\quad \Sigma y = n a + b \Sigma x$$
$$\text{2. Normalgleichung:}\quad \Sigma x y = a x + b \Sigma x^2 .$$

Dabei bedeutet n die Zahl der Glieder der Reihe, also auch die Zahl der ursprünglich aufzustellenden Gleichungen. Als Bildungsgesetz dieser Normalgleichungen ist festzuhalten: jede dieser Normalgleichungen ist entstanden durch Summierung eines Gleichungssystems, das aus den ursprünglichen Gleichungen in der Weise gebildet wurde, daß diese Gleichungen folgeweise mit den Koeffizienten der a, b, c usw. durchmultipliziert wurden. Der Koeffizient der $a = 1$, weshalb das ursprüngliche Gleichungssystem unverändert in die Summierung eingeht. Die Koeffizienten der b sind die x-Werte; daher wird das zur zweiten Normalgleichung führende Gleichungssystem mit den jeweiligen x durchmultipliziert. Die Koeffizienten der c sind die x^2-Werte, mit denen die jeweilige Gleichung durchmultipliziert werden muß, usw. Auf diese Weise können die $n + 1$ Normalgleichungen, die für die Auffindung einer Ausgleichungskurve n-ten Grades nötig sind, abgeleitet werden. So lauten z. B. die drei Normalgleichungen, die bei Ausgleichung mit einer Kurve 2. Grades $y = a + bx + cx^2$ notwendig sind, folgendermaßen:

$$\text{1. Normalgleichung:}\quad \Sigma y = n a + b \Sigma x + c \Sigma x^2$$
$$\text{2. Normalgleichung:}\quad \Sigma x y = a \Sigma x + b \Sigma x^2 + c \Sigma x^3$$
$$\text{3. Normalgleichung:}\quad \Sigma x^2 y = a \Sigma x^2 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^4 .$$

In der Praxis werden die Gleichungen nicht, wie wir es oben in unserem Beispiel taten, ausgeführt, sondern es werden gleich die Koeffizienten der Normalgleichungen berechnet, wozu man sich eines kleinen Tabellchens bedient. Für unser Beispiel der Ausgleichung mit einer Geraden wäre also nebenstehendes Tabellchen notwendig:

Jahr	x	y	xy	x^2
1871	-19	41,06	$-780{,}14$	361
1880	-10	45,23	$-452{,}30$	100
1890	0	49,43	0,00	0
1900	$+10$	56,37	563,70	100
1910	$+20$	64,93	1298,60	400
Summe	$+1$	257,02	$+629{,}86$	961

Damit sind sowohl die linken Seiten, als auch die Koeffizienten der a und b bestimmt. Das n lesen wir unmittelbar ab, es ist 5, die Zahl unserer Jahre und die Zahl unserer Gleichungen; die Summen der y, x, xy und x^2 entnehmen wir der unteren Summenzeile. So wird Schreibarbeit erspart, die besonders bei der Verwendung algebraischer Gleichungen höheren Grades lästig ist.

Die Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist nicht auf algebraische Gleichungen beschränkt, sondern es sind diesem Verfahren alle analytischen Gleichungen zugänglich, die sich durch Logarithmierung auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen. So gewinnt z. B. die Paretosche Gleichung $y = Ax^{-a}$ durch Logarithmieren die Form $\log y = \log A - a \log x$. Es ergeben sich demnach die Normalgleichungen

$$\text{1. Normalgleichung:} \quad \Sigma \log y = n \log A - a\Sigma \log x$$

$$\text{2. Normalgleichung:} \quad \Sigma \log x \log y = \log A \Sigma \log x - a\Sigma \log^2 x\,.$$

Die Auflösung dieser beiden Normalgleichungen ergibt a unmittelbar, während A aus dem $\log A$ durch Entlogarithmieren gefunden werden muß. Diese Werte werden dann in die ursprüngliche Paretosche Gleichung eingesetzt.

Aufgabe 15. Für das oben auf S. 95 mitgeteilte Beispiel der Einkommensverteilung ist die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichene Paretosche Kurvengleichung zu berechnen. Hierzu können die Besetzungszahlen (Zahl der Einkommensbezieher) auf Tausender abgerundet und die Berechnungen mit vierstelligen Logarithmen durchgeführt werden. Es sind hiernach in einem Tabellchen neben die beobachteten die ausgeglichenen Werte zu setzen. —

Auf die Berechnung der mittleren Abweichung der ausgeglichenen Geraden S_y gehen wir erst unten auf S. 137 bei der Darstellung der Korrelationsrechnung ein, für die dieses Maß eine große Rolle spielt.

e) Ähnliche, aber weniger strenge Ausgleichungsverfahren. Daß neben der strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate dort, wo es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, auch vereinfachte Methoden Anwendung finden können, ist bereits aus der oben (S. 101) gegebenen Berechnung der Paretoschen Kurve ersichtlich. Dort wurden eine Art Normalgleichungen dadurch gewonnen, daß aus den ursprünglichen Gleichungen durch Summierung nicht nur eine, sondern durch Teilung zwei Gleichungen gewonnen wurden, die für das ganze Gleichungssystem als gleichzeitig geltend angenommen wurden. Ein anderes, abgekürztes Verfahren besteht darin, daß nur so viele Punkte der Reihe zur Berechnung der Kurve herangezogen werden, als zur Lösung der zur Ausgleichung gewählten algebraischen Kurve notwendig sind. An dem obigen Beispiel der Bevölkerungsentwicklung des Deutschen Reiches von 1871 bis 1910 erprobt, würden wir z. B. bei der Wahl der beiden Jahre 1880 und 1900 als Stützpunkte die beiden Gleichungen finden:

$$45{,}23 = a - 10b\,,$$

$$56{,}37 = a + 10b\,.$$

Daraus ergibt sich $a = 50{,}80$, $b = 0{,}557$.

Die Gleichung würde demnach lauten: $y = 50{,}80 + 0{,}557\, x$ und die Werte für die einzelnen Jahre wären folgeweise:

1871	 40,22	Mill.
1880	 45,23	„
1890	 50,80	„
1900	 56,37	„
1910	 61,93	„

Wie ersichtlich, sind die Werte für 1880 und 1900 die unveränderten Pfeiler der Rechnung, während die übrigen Werte durch die Ausgleichung verschoben sind. Das Ergebnis weicht, wie aus der Abb. 15 auf S. 105 hervorgeht, von dem strengen Ergebnis nach der Methode der kleinsten Quadrate besonders im 2. Teile der Kurve mehr und mehr ab. Für 1910 ergibt sich für die nach den beiden Verfahren ausgeglichenen Werte bereits ein Unterschied von 3,00 Millionen. Es zeigt sich somit, daß diese Art Ausgleichung, die sich auf einige wenige von den beobachteten, mit zufälligen Fehlern behafteten Zahlen stützt, auf kurze Strecken zulässig ist, während sie auf längere Strecken unverwendbar wird, weil dann an und für sich kleine Fehler zu verstärkter Wirkung gelangen.

f) Andere Ausgleichungsverfahren. Die bereits oben (S. 98) erwähnte Brunssche Reihe beruht auf dem Grundgedanken, daß sich die Glieder einer jeden statistischen Reihe welcher Kurvenform immer durch eine konvergierende Reihe darstellen lassen, die aus einer analytischen Funktion, hier der Gaußschen Fehlerfunktion, und deren höheren Ableitungen gebildet ist, wenn nur eine genügende Zahl von Gliedern dieser Funktionenreihe mit herangezogen wird. Ist die Funktionenreihe gefunden, so genügt es, eine Anzahl von Reihengliedern zu vernachlässigen, um eine ausgeglichene Reihe zu erzielen. Hierbei wird die Anpassung um so geringer, je mehr Glieder vernachlässigt werden. Die Reihe verliert also dadurch an Brauchbarkeit z. B. für Zwecke der Berechnung von Zwischenwerten, gewinnt aber an Brauchbarkeit für Zwecke der Beseitigung von Schwankungen jedweder Art und Darstellung der Hauptrichtung. Auf das rechnerische Verfahren, das ziemlich umständlich ist, kann hier nicht näher eingegangen werden. Es sei diesbezüglich auf die Darstellung bei Bruns, Czuber und Blaschke[1] verwiesen.

Auf die theoretisch interessanten, aber umständlichen Ausgleichungsverfahren nach der Methode der Flächenmomente (Pearson) und der Flächen (Cantelli) kann hier nur hingewiesen werden[2].

g) Die Probe auf die Güte der Anpassung. Die Güte der Anpassung einer ausgeglichenen Kurve ist ohne Zweifel an den Abweichungen zu messen, die zwischen den als richtig angenommenen (ausgeglichenen) Werten y und den beobachteten Werten y' entstehen. Es ist somit deren Differenz $y' - y$ der Ausgangspunkt für jede Messung der Güte der Anpassung. Da diese Differenz aber nur die absoluten Werte ergibt, die weder übersichtlich noch zum Vergleich mit anderen Ausgleichungen tauglich sind, so wird die Messung an den relativen Differenzen $\frac{y' - y}{y}$ vorgenommen, aus denen ein Mittelwert als Maß der Abweichungen zu bilden ist.

Ein ähnliches Maß hat K. Pearson abgeleitet:

$$\chi^2 = \sum \frac{(y' - y)^2}{y}.$$

[1] Vgl. hierzu die auf S. 98 angeführten Schriften, ferner E. Blaschke im Anhang zu den österreichischen Sterbetafeln von 1910, Österr. Statistik **1**, N. F., H. 4.

[2] Vgl. hierzu die oben auf S. 86 zu der Berechnung der Flächenmomente angegebene Literatur, ferner Cantelli: Sull' adattamento delle curve ad una serie di misure o di osservazioni. Rom 1905. Hierzu auch Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung **2**, 3. Aufl., S. 30.

Da χ^2 je nach der Zahl der auszugleichenden Glieder eine verschiedene Bedeutung besitzt, hat K. Pearson ein Einheitsmaß P gefunden. Unter der Annahme, daß die durch die Ausgleichung beseitigten Abweichungen nur zufällige seien, bedeutet P die Wahrscheinlichkeit, eine schlechtere als die gegebene Anpassung zu finden, ist also, da diese Wahrscheinlichkeiten zwischen 1 und 0 liegen müssen, ein klares und übersichtliches allgemeines Maß der Güte der Anpassung. Dabei bedeutet $P = 1$ die Gewißheit, eine schlechtere Anpassung zu finden, also das Zusammenfallen der ausgeglichenen Kurve mit der beobachteten Kurve, $P = 0$ die Unmöglichkeit, eine schlechtere Anpassung zu finden, also den Höhepunkt der schlechten Ausgleichung.

χ^2	P	χ^2	P	χ^2	P
1	0,962566	11	0,051380	21	0,000810
2	0,849146	12	0,034787	22	0,000524
3	0,699986	13	0,023379	23	0,000338
4	0,549416	14	0,015609	24	0,000217
5	0,415880	15	0,010363	25	0,000139
6	0,306219	16	0,006844	26	0,000090
7	0,220640	17	0,004500	27	0,000057
8	0,156236	18	0,002947	28	0,000037
9	0,109064	19	0,001922	29	0,000023
10	0,075235	20	0,001250	30	0,000015

Die den verschiedenen χ^2 bei einer Zahl von n' $(= n + 1)$ Reihengliedern entsprechenden P sind in einer Tafel niedergelegt worden[1]. Es soll hier ein Stück dieser Tafel für $n' = 6$ abgedruckt werden (s. obenstehende Tabelle).

Wir wollen das Verfahren an dem Beispiel der Ausgleichung der Bevölkerungszahlen des Deutschen Reiches 1871 bis 1910 nach der Methode der kleinsten Quadrate (S. 117ff.) erklären.

Jahr	Beobachtete Werte y'	Ausgeglichene Werte y	$y' - y$	$(y' - y)^2$	$\frac{(y' - y)^2}{y}$
1871	41,06	39,85	+ 1,21	1,4641	0,0367
1880	45,23	45,26	− 0,03	0,0009	0,0000
1890	49,43	51,28	− 1,85	3,4225	0,0667
1900	56,37	57,31	− 0,94	0,8836	0,0154
1910	64,93	63,34	+ 1,59	2,5281	0,0399
					$\chi^2 = 0,1587$

Aus den Tafeln finden wir für n' $(= n + 1) = 6$,

$$\chi^2 = 0, \qquad P = 1,0000,$$

$$\chi^2 = 1, \qquad P = 0,9626.$$

Durch Interpolation ergibt sich für

$$\chi^2 = 0,1587 \text{ der Wert von } P = 0,9941.$$

Wenn wir, der Grundauffassung des Verfahrens folgend, die ausgeglichene Reihe als die Wesensform der Reihe, die Reihe der tatsächlich beobachteten Werte dagegen als eine mit zufälligen Schwankungen behaftete einmalige Darstellung der Wesensform in der Wirklichkeit denken, dann drückt P die Wahrscheinlichkeit aus, daß in einer sehr großen Zahl von Wiederholungen dieser Darstellung in der Wirklichkeit unter je 100 solchen Darstellungen durchschnittlich 99,4 solche sind, die eine minder gute Darstellung der Wesensform vorstellen als die vorliegende. Die vorliegende Ausgleichung ist daher als hervorragend gut zu bezeichnen.

Aufgabe 16. χ^2 und P ist in der gleichen Weise wie hier für das auf S. 119 dargestellte abgekürzte Ausgleichungsverfahren der gleichen Reihe zu berechnen.

[1] Pearson, K.: Tables for Statisticians and Biometricians, S. XXXIff. u. 26ff.

14. Statistische Einschaltung (Interpolation) und Weiterführung (Extrapolation)[1].

Wurde die Ausgleichung einer Reihe vermittels einer analytischen Kurve vorgenommen, so ist damit auch gleichzeitig für die Einschaltung der ausgeglichenen Werte Sorge getragen. Es genügt dann, das gegebene, dem gesuchten y-Werte entsprechende x in die Gleichung einzusetzen, um den gesuchten y-Wert zu erhalten.

Wir wollen z. B. die Bevölkerung des Deutschen Reiches für 1885 berechnen und dazu die auf S. 104ff. berechnete algebraische Kurve 4. Grades benützen. Wir setzen in die Gleichung für x den Wert -5 ein und erhalten daraus für y, das ist die Bevölkerung am 1. Dezember 1885, den Wert von 47,09 Mill. Personen. Vergleichen wir diesen Wert mit der bei der Volkszählung am 1. Dezember 1885[2] tatsächlich ermittelten Zahl, so finden wir dafür den Wert von 46,86 Mill. Personen, also um nur 0,23 Mill. Personen weniger.

Wir können an der gleichen Formel gleich auch den Vorgang bei der statistischen Weiterführung zeigen, der nur mit Hilfe einer analytischen Funktion auf Grund des bisherigen Verlaufes möglich ist.

Wollten wir die Reichsbevölkerung für den 1. XII. 1919 und 1925 auf Grund der Entwicklung von 1871 bis 1910 berechnen, so brauchten wir nur als x nacheinander 29 und 35 in die obige Gleichung einzusetzen. Die Durchführung der Rechnung für den 8. Oktober 1919 ($x = 28{,}855$) ergibt eine Bevölkerungszahl von 68,65 Mill. gegenüber der wirklich gezählten von 59,85[3], für den 16. Juni 1925 ($x = 34{,}542$) eine Bevölkerungszahl von 72,08 Mill. gegenüber der wirklich gezählten von 63,18[4].

Das vorliegende Beispiel zeigt die Schwäche jeder statistischen Voraussage für die Zukunft. Die zeitlichen Entwicklungen in der menschlichen Gesellschaft weisen in der Regel eine ziemlich große Stetigkeit auf (S. 53f.), weswegen Voraussagen für kurze Zeit, unter der Voraussetzung des Weiterwirkens der gleichen Kräfte, die den bisherigen Gang der Entwicklung bewirkt haben, zulässig sind. Wir werden ihrer nie entraten können, weil der Wert statistischer Zahlen dadurch erst voll aufgeschlossen wird. Schon darin, daß wir in der Regel um einige Jahre zurückliegende statistische Zahlen für die Gegenwart verwenden, liegt eine im großen und ganzen berechtigte statistische Weiterführung, die noch dadurch an wahrscheinlicher Gültigkeit gewinnt, daß wir diese Zahlen nach der vorausgegangenen Entwicklung, soweit deren Voraussetzungen nach unserem Wissen auch weiter in Kraft stehen, berichtigen. Ändern sich aber die Voraussetzungen, was wir für die Zukunft nie voraus wissen können, so verliert auch eine solche Voraussage ihren Wert. In unserem Falle rechnet die Weiterführung mit einem Gleichbleiben der Voraussetzungen der Bevölkerungsentwicklung, wie sie in den Jahren vor dem Kriege herrschten. Nun ist aber der Krieg mit seinen Bevölkerungsverlusten und dem den Krieg beendenden Staatsvertrag von Versailles mit seinen Gebietsabtrennungen dazwischen gekommen. Die Bevölkerungsentwicklung des Deutschen Reiches ist daher während des Krieges wie nach diesem ganz andere Wege gegangen als vor dem Kriege. Als Voraussage der weiteren Bevölkerungsentwicklung des Deutschen Reiches im Jahre

---

[1]) WESTERGAARD, H.: Die Anwendung der Interpolation in der Statistik. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 9/III. F. BLASCHKE, E.: Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig u. Berlin 1906. BAUSCHINGER, J.: Interpolation, in: Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften **1**, H. 6 (1901). GUMBEL, E. J.: Die Berechnung des Bevölkerungsstandes durch Interpolation. Erg.-H. 2 zu Arch. f. Soziale Hygiene u. Demographie. Leipzig 1916. WHITTAKER u. ROBINSON: A Short Course in Interpolation. London: Blackie and Sons 1924. STEFFENSEN, J. F.: Interpolation. Baltimore: The William Wilkins Co. 1927.

[2] Statistik des Deutschen Reiches **32**, N. F., 17.

[3] Ortsanwesende Bevölkerung.

[4] Wohnbevölkerung. Von dem Einflusse des Überganges von der anwesenden auf die Wohnbevölkerung wurde bei dieser Berechnung abgesehen.

1911 wäre diese Berechnung natürlich irrtümlich gewesen. So wie hier angestellt und neben die infolge der veränderten Verhältnisse tatsächlich eingetretene Bevölkerungsentwicklung gesetzt, ist sie aber nicht ohne geschichtliches und politisches Interesse.

Ist eine analytische Gleichung nicht gegeben oder ist sie von einer solchen Schwierigkeit, daß Zwischenwerte aus ihr nur mit großer Mühe berechnet werden können, so kann der gesuchte Wert nach einer der bekannten Interpolationsformeln berechnet werden. Wir führen hier die Interpolationsformel von NEWTON an:

$$y_x = y_0 + A_0 (x - x_0) + A_1 (x - x_0)(x - x_1) + A_2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots$$ [1].

Darin ist y_x der einzuschaltende (unbekannte) Wert, x der ihm zugehörige (bekannte) Abszissenwert, x_0, x_1, x_2 usw. und y_0, y_1, y_2 usw. die gegebenen Abszissen- und Ordinatenwerte, auf Grund deren die Einschaltung vorgenommen werden soll; A_0, A_1, A_2 sind gewisse einfache Funktionen dieser Werte.

Es ist zu beachten, daß die Interpolation mit n Gliedern nach dieser Formel zu dem gleichen Ergebnis führt wie die Interpolation mit einer Kurve $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades[2] (vgl. die Lösungen zu Aufgabe 17 u. 18). Das folgende Schema mag den Gang der Rechnung beleuchten.

x	y	A_0, B_0, C_0, D_0	A_1, B_1, C_1	A_2, B_2	A_3
x_0	y_0				
		$A_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_1	y_1		$A_1 = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}$		
		$B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}$	
x_2	y_2		$B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}$		$A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_4 - x_0}$
		$C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_4 - x_1}$	
x_3	y_3		$C_1 = \frac{D_0 - C_0}{x_4 - x_2}$		
		$D_0 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$			
x_4	y_4				

Aufgabe 17. In dieses Schema sind die 5 ungekürzten Volkszählungswerte der genannten Volkszählungen 41058792 (1871), 45234061 (1880), 49428470 (1890), 56367178 (1900) und 64925993 (1910) einzusetzen. (Zu beobachten ist dabei, daß nach dem verwendeten Schema der Abszissenwert von 1871 gleich Null gesetzt wird, die Abszissenwerte der folgenden Volkszählungen daher 9, 19, 29 und 39 sind.) Es ist nach der angegebenen Formel die Bevölkerungszahl für 1885 zu berechnen. —

---

[1] Nach GLOVER, J. W.: Artikel „Interpolation, Summenbildung und Glättung" in RIETZ-BAUR: Handbuch der mathematischen Statistik, S. 47f., soll diese Formel nur für gleichweit abstehende x-Werte verwendbar sein; anders z. B. bei SPORER, B: Niedere Analysis, Sammlung Göschen, S. 77. In der statistischen Theorie und Praxis wird die Formel jedenfalls auch für die ungleich weit abstehenden x-Werte mit gutem Erfolge verwendet. Vgl. z. B. WESTERGAARD-NYBØLLE: Theorie der Statistik, 2. Aufl., S. 336.

[2] GUMBEL, E. J.: Die Berechnung des Bevölkerungsstandes durch Interpolation S. 61ff. u. 71ff. GLOVER, J. W., wie oben S. 47ff.

Wenn man die immerhin umständliche Einschaltung mit Hilfe mehrerer Reihenglieder vermeiden will oder wenn man nur eine Reihe mit zwei Gliedern zur Verfügung hat, zwischen denen der Wert eingeschaltet werden soll, so ist die einfachste Einschaltung die arithmetische. Sie beruht auf der Annahme gleichbleibenden absoluten Zuwachses, also sinkenden relativen Zuwachses von Jahr zu Jahr. Soll also z. B. die Bevölkerungszahl am 1. Dezember 1885, das ist die Hälfte des Zwischenraumes zwischen 1. Dezember 1880 und 1. Dezember 1890, berechnet werden, so ist nach der arithmetischen Einschaltung der Bevölkerungszuwachs von 4194409 Personen in die Hälfte zu teilen. Es würde demnach die Bevölkerungszahl am 1. Dezember 1885 47331266 Personen betragen haben. Glaubt man Grund zu haben, daß die Bevölkerungszunahme nicht in arithmetischer, sondern in geometrischer Weise, das ist bei gleichbleibenden Zuwachsraten mit naturgemäß wachsenden absoluten Jahreszuwächsen, vor sich gegangen ist, so kann für die Einschaltung die Zinseszinsformel $A_n = A_0 \cdot a^n$ verwendet werden, worin A_n die Endbevölkerung (1890), A_0 die Anfangsbevölkerung (1880), n die Zahl der Jahre (10) und a den Aufzinsungsfaktor, hier die Zuwachsrate, bedeutet. Es ist demnach:

$$a = \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}}$$

und der gesuchte Wert der Bevölkerung für 1885 $= A_0 \cdot a^5$, d. i. hier:

$$45234061 . 1{,}04533573 = 47284780.$$

Da der einzuschaltende Zeitpunkt gerade in die Mitte zwischen die beiden gegebenen Zählungen fällt, kann in den beiden letztgenannten Fällen auch einfach das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der Bevölkerungszahlen statt der angegebenen allgemein gültigen Berechnungsweisen verwendet werden.

Es zeigt sich aus der vorausgehenden Nebeneinanderstellung der Erfolge verschiedener Einschaltungsverfahren, daß die Werte verhältnismäßig nicht stark vom beobachteten Ergebnis abweichen. Die beste Annäherung an die tatsächlich gezählte Bevölkerungszahl ergab die Verwendung der algebraischen Gleichung 4. Grades, dieser gleich war die Einschaltung nach der Newtonschen Einschaltungsformel. Etwas weiter lag diejenige nach der geometrischen, noch etwas weiter die nach der arithmetischen Vermehrungsannahme.

Aufgabe 18. Nach den vier hier angeführten Einschaltungsverfahren sind auch die Bevölkerungszahlen für 1875, 1895 und 1905 zu errechnen.

15. Die statistischen Verhältniszahlen[1].

a) Wesen und Zweck. Neben der Betrachtung der statistischen Masse in ihrem ergebenen Umfang besteht für den Statistiker vielfach das Bedürfnis nach einer verhältnismäßigen Betrachtung der Masse. Wir betrachten einmal die Bevölkerung von Gebietsteilen an sich, dann im Verhältnis zur Gesamtbevölkerung; die Sterbefälle an sich, dann im Verhältnis zur Bevölkerungszahl; die Ernteerträge an

[1] Knapp, G. F.: Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik. Leipzig 1868. — Theorie des Bevölkerungswechsels. Abhandlungen zur angewandten Mathematik. Braunschweig 1874. Lexis, W.: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- u. Moralstatistik, 1ff., 25ff., 60ff. v. Bortkiewicz, L.: Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, 3. Aufsatz in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, III. F., **11**, 671ff. Mortara, G.: Nozioni elementari intorno ad alcune categorie di rapporti statistici, in: Giornale degli. Economisti **40**, 217ff. (1910). Zizek, F.: Zur Methode der statistischen Verhältniszahlen, in: Allgemeines Statistisches Archiv **12** (1920). Winkler, W.: Die statistischen Verhältniszahlen. Leipzig u. Wien: Deuticke 1923. (Wiener staatswissenschaftliche Studien N. F. 2.)

sich, dann im Verhältnis zur Größe der Erntefläche; die Spareinlagen an sich, dann im Verhältnis zur Bevölkerungszahl usw. Das Wesen einer Verhältniszahl besteht also darin, daß wir eine statistische Masse in ein Verhältnis zu einer anderen bringen, mit anderen Worten, daß wir eine statistische Masse an einer anderen messen. Dabei tritt die zu messende Masse in den Zähler, die als Maß dienende Masse in den Nenner, und das Ergebnis der Rechnung ist die Verhältniszahl, als Ausdruck dafür, wie oft das Maß in der zu messenden Masse enthalten ist. Da das Ergebnis der Berechnung sehr häufig ein echter Dezimalbruch würde, und es dem Gefühle der Menschen im allgemeinen widerspricht, von ungeteilten (und unteilbaren) Einheiten in Bruchteilen zu denken, so wird in der Regel die Beziehung nicht auf die als Maß dienende Masse hergestellt, sondern auf ein dekadisches Vielfaches, z. B. auf 100 oder 1000 Einheiten der Bevölkerung. So berechnet man beispielsweise den verhältnismäßigen Anteil der Bevölkerung Preußens im Jahre 1925 (38175989 Personen) von 100 der Gesamtbevölkerung des Deutschen Reiches (62410619 Personen) mit 61,2%.

Der Zweck der Verhältniszahlen ist mehrfach. Die verhältnismäßige Betrachtung einer Größe soll zunächst dazu dienen, einen statistischen Tatbestand klarer und übersichtlicher darzustellen. 61,2% ist deutlicher und übersichtlicher als 38175989 von 62410619. Über diese erhöhte Deutlichkeit hinaus, die nur einen formalen Vorteil bedeutet, kann die Verhältniszahl aber eine selbständige materielle Aussage werden. Wenn wir z. B. feststellen, daß auf einem Gebiete von je 100 Neugeborenen 10 im ersten Lebensjahre gestorben sind, so liegt in dieser Verhältniszahl eine Aussage über die Stärke des Sterbevorganges der Geborenen. Noch weiter über diese formale und materielle Bedeutung hinaus besitzt die Verhältniszahl einen Wert für den Vergleich, wenn man nämlich nicht bei der Bildung einer einzigen Verhältniszahl stehen bleibt, sondern zwei oder mehrere Verhältniszahlen der gleichen Art bildet, um die gleichen Verhältnisse an verschiedenen Massen der gleichen Art, an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten miteinander zu vergleichen. Nur so wird es möglich, richtige Vergleichsvorstellungen z. B. über die Sterbehäufigkeit an verschieden großen Bevölkerungen, die Ernteergiebigkeit an verschieden großen Ernteflächen usw. zu gewinnen.

Die erwähnten drei Bedeutungen der Verhältniszahlen treten uns in der Praxis nicht sehr scharf abgegrenzt, sondern zumeist gehäuft gegenüber.

b) Die Einteilung der statistischen Verhältniszahlen. α) Vorbemerkungen. Statistische Verhältniszahlen sind das Ergebnis einer rechnungsmäßigen Beziehung zweier sinnmäßig einander verbundenen Massen. Da sowohl der Sinn der Beziehung als auch die Art der rechnerischen Betrachtung verschieden sein kann, ergibt sich eine doppelte Einteilung der statistischen Verhältniszahlen. Nach der logischen Art der Beziehung unterscheiden wir Gliederungszahlen, Meßzahlen, Verursachungszahlen und Entsprechungszahlen, nach der rechnerischen Art der Beziehung Wahrscheinlichkeiten und Ziffern. (Dabei ist allerdings die Gegenüberstellung von logisch und rechnerisch nicht allzu streng zu nehmen, da selbstverständlich auch der rechnerischen Beziehung ein logischer Sinn zugrunde liegt, aber anderer Art als der erstgenannte logische Sinn der Massenbeziehung.)

β) Die statistischen Gliederungszahlen. Wird eine statistische Masse in Teile zerlegt, so können Gliederungszahlen in der Weise gebildet werden, daß die Teile auf die gesamte Masse bezogen werden, daß also dargestellt wird, wie viele Einheiten der Teile auf die Einheit der Gesamtmasse (oder 100, 1000 usw. Einheiten der Gesamtmasse) entfallen. In der rechnerischen Durchführung werden die Teile durch die Gesamtmasse dividiert, und es wird gegebenenfalls das Ergebnis mit 100, 1000 usw. multipliziert. Dementsprechend entstehen Vonhundert-Teile (v. H., Prozente, %), Vontausend-Teile (v. T., Promille, ‰) usw. Ein einfaches Beispiel mag den Vorgang erläutern.

Die Gliederung der Erwerbstätigen nach Wirtschaftsabteilungen im Deutschen Reiche im Jahre 1925[1].

Wirtschaftsabteilungen	Grundzahlen	%
Land- und Forstwirtschaft, Gärtnerei usw.	9762426	30,5
Industrie und Handwerk	13239223	41,4
Handel und Verkehr	5273502	16,5
Verwaltung, Heerwesen, Kirche und freie Berufe	1502379	4,7
Gesundheitswesen usw.	588788	1,8
Häusliche Dienste usw.	1642982	5,1
Insgesamt	32009300	100,0

Statt die Teile auf das Ganze zu beziehen, wird im Falle einer Zweiteilung ein Teil häufig auf den anderen bezogen. Das häufigste Beispiel ist die Darstellung des Geschlechterverhältnisses der Bevölkerung (auf 100 Personen männlichen Geschlechtes entfielen ... Personen weiblichen Geschlechtes), des Geschlechterverhältnisses der Geborenen, der Gestorbenen usw. Die Umrechnung der einen Berechnungsweise auf die andere ist, wie sich algebraisch leicht zeigen läßt, einfach[2].

γ) Die statistischen Meßzahlen („Indexziffern"). Bringt man eine Anzahl statistischer Massen gleicher Art miteinander in einen Vergleich, so ist es üblich, durch Beziehung auf eine von ihnen oder auf ihren Durchschnitt ein vereinfachtes Vergleichsbild zu schaffen. In diesem Falle dient die als Maß gewählte Masse als Nenner, alle einzelnen Massen der Reihe nach als Zähler. Auch hier ist die Beziehung auf 100, auf 1000 der Nennermasse üblich und wird wie im vorausgehenden Beispiel durch Multiplikation der Ergebnisse mit 100, mit 1000 errechnet.

Beispiel:

Die Zahl der Lebendgeborenen auf dem heutigen Gebiete der Republik Österreich von 1900 bis 1930[3]. (Vgl. Abb. 16 auf S. 107.)
(Durchschnitt 1901/03 = 100.)

Jahr	Zahl der Lebend-geborenen	Meßzahl	Jahr	Zahl der Lebend-geborenen	Meßzahl	Jahr	Zahl der Lebend-geborenen	Meßzahl
1900	187094	99,22	1911	168916	89,58	1922	150958	80,05
1901	189539	100,51	1912	170555	90,45	1923	146885	77,89
1902	191926	101,78	1913	163354	86,63	1924	142141	75,38
1903	184244	97,71	1914	161692	85,75	1925	135841	72,04
1904	187963	99,68	1915	125680	66,65	1926	127254	67,48
1905	181685	96,35	1916	98895	52,45	1927	118741	62,97
1906	184477	97,83	1917	92289	48,94	1928	116783	61,93
1907	181026	96,00	1918	92560	49,09	1929	116729	61,90
1908	180034	95,47	1919	118518	62,85	1930	112601[4]	59,71[4]
1909	180106	95,51	1920	146644	77,77			
1910	176588	93,65	1921	151138	80,15			

Meßzahlen können auch so berechnet werden, daß die Beziehung nicht stetig auf einen Ausgangspunkt vorgenommen wird, sondern daß der Ausgangspunkt ständig wechselt, indem jedes Reihenglied auf das vorausgehende Reihenglied be-

[1] Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich **49**, 19 ff. (1930).

[2] Bezeichnen wir z. B. den Anteil der Frauen auf 100 Männer mit w', so ist der Prozentanteil der Frauen vom Ganzen $w = \frac{100\,w'}{100 + w'}$.

[3] Statistisches Handbuch für die Republik Österreich **10**, 12 (1929); **11**, 32 (1930). Statistische Nachrichten **9**, Nr. 5, S. 136 (1931).

[4] Vorläufige Ergebnisse.

zogen wird („Gliedziffern". Vgl. oben S. 111ff. die „Gliedziffernmethode" bei der Darstellung der Saisonschwankungen).

Während die Anwendung der Meßzahlenrechnung auf dem ganzen Gebiet der Statistik verbreitet ist und sowohl für zeitliche als örtliche als sachliche Vergleiche dient, ist die Berechnung von Hauptmeßzahlen, das ist der Zusammenfassung von zahlreichen Meßzahlen in einer einzigen hauptsächlich auf dem Gebiete der Preisstatistik üblich, wo wir Preishauptmeßzahlen bilden. Darüber soll im II. Teil dieses Grundrisses eingehender gehandelt werden.

δ) Die statistischen Verursachungszahlen. Wir gebrauchen hier den Begriff „Verursachung" in allgemeinster Bedeutung, wobei wir jedes Hervorgehen einer statistischen Masse aus einer anderen, jedes Vorsichgehen einer Ereignismasse an einer anderen als Verursachung auffassen. (Über den statistischen Ursachenbegriff siehe Näheres in Abschnitt II, 16a). Es fällt unter den Begriff der Verursachungszahlen also z. B. die Beziehung der Eheschließungen auf die Bevölkerung (Eheschließungsziffer), der Geburten auf die Bevölkerung (Geburtenziffer), der Geburten auf die gebärfähigen Frauen (Fruchtbarkeitsziffer), der Sterbefälle auf die Bevölkerung (Sterbeziffer), der Auswanderer auf die Bevölkerung (Auswanderungsziffer), der Ernteerträge auf die Erntefläche (Ernteziffer), der erzeugten Mengen überhaupt auf die Erzeugungsmittel (Erzeugungsziffer), der gemusterten Rekruten auf die Erschienenen (Aushebungsziffer) u. dgl. mehr.

Die statistischen Verursachungszahlen spielen in der Statistik eine große Rolle. Sie hat man meist im Auge, wenn den „Gliederungszahlen" die „Beziehungszahlen" gegenübergestellt werden. (Die Unterscheidung ist nicht scharf, da auch die Gliederungszahlen durch eine Beziehung statistischer Massen aufeinander zustande kommen, also in gewissem Sinne Beziehungszahlen sind.) Die statistischen Verursachungszahlen bilden auch das Hauptanwendungsgebiet der weiter unten folgenden Einteilung nach dem rechnerischen Vorgang in Wahrscheinlichkeiten und Ziffern. Wir werden uns daher dort nochmals mit ihnen etwas näher zu befassen haben.

ε) Die statistischen Entsprechungszahlen. Unter dieser Gruppe fassen wir alle übrigen Verhältniszahlen zusammen, die nicht Meß- oder Verursachungszahlen sind, die aber doch auf einer sinnmäßigen Beziehung der beiden aufeinander bezogenen Massen, einem Sich-entsprechen, Sich-dienen, Aufeinander-angewiesensein und dergleichen beruhen. Solche Entsprechungszahlen sind z. B. die Bevölkerungsdichte (Beziehung der Bevölkerung auf die von ihr bewohnte Fläche), die Dichte des Eisenbahnnetzes (Streckenkilometer, bezogen auf die davon belegte Fläche), die Schülerdichte (die Schülerzahl bezogen auf die Schulen-, Klassen-, Lehrerzahl), ferner die Beziehung der Geburten auf die Eheschließungen (nicht auf die stehenden Ehen, das wäre eine Verursachungszahl), die früher sehr häufig vorgenommene Beziehung der Sterbefälle auf die Geburten, die oben erwähnte Beziehung der Frauen auf die Männer, der Knabengeburten auf die Mädchengeburten u. dgl. mehr.

ζ) Die Wahrscheinlichkeiten und Ziffern. Diese Einteilung ist darum von großer Wichtigkeit für die Statistik, weil die Verhältniszahlen, die Wahrscheinlichkeiten vorstellen, naturgemäß der nächste und verständlichste Bereich der Anwendung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Denkformen in der Statistik sind. W. Lexis, der sich mit der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischen Denkens in der Statistik viel befaßt hat, unterschied analytische und genetische Wahrscheinlichkeiten. Die analytischen Wahrscheinlichkeiten sind dargestellt durch die bekannten und viel verwendeten Gliederungszahlen. (Wir können darum statt analytische Wahrscheinlichkeiten ebenso gut sagen „Gliederungswahrscheinlichkeiten".) Die Vorstellungsweise ist eine rein statische. In einem gegebenen Augenblick waren die die Verteilung bestimmenden Umstände so gestaltet, daß in der Wesensform jedem Teile eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zukam, die in der statistischen Darstellung bei einer unendlich großen Zahl von Beobachtungen hätte zum Ausdruck kommen müssen. Da die Zahl der Beobachtungen aber nur beschränkt war, so konnte die Wesensform der Verteilung nur mit zufälligen Fehlern behaftet zum Ausdruck kommen. Die statistischen Gliederungszahlen stellen also die empirische, zufallsentstellte Form der der Verteilung in der Wesensform zugrunde liegenden Grundwahrscheinlichkeiten dar.

Etwas schwieriger liegt die Sache bei den genetischen Wahrscheinlichkeiten, d. i. den Wahrscheinlichkeiten aus einem der erwähnten Verursachungsverhältnisse, weil hier vielfach statistische Massen in Verwendung kommen, die nicht unmittelbard urch die Statistik gegeben sind, sondern aus dieser erst berechnet werden müssen. Die genetischen Wahrscheinlichkeiten, die wir, den Ausdruck verdeutschend, Entwicklungswahrscheinlichkeiten nennen können, sollen darstellen, welche Wahrscheinlichkeit den Einheiten einer Ausgangsmasse zukommt, in einem bestimmten Zeitraum von einem gewissen Ereignis betroffen zu werden. Wir wollen z. B. die Wahrscheinlichkeit der 30jährigen Männer kennen, bis vor Erreichung des 31. Jahres zu sterben, oder die Wahrscheinlichkeit der 20jährigen ledigen Frauen, bis vor Erreichung des 21. Jahres zu heiraten und dgl. mehr. Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Massen der 30jährigen Männer, 20jährigen Frauen, kurz der n-jährigen Personen in der Statistik nicht unmittelbar erhoben werden, da hierzu eine mühevolle Registrierung das ganze Jahr hindurch notwendig wäre.

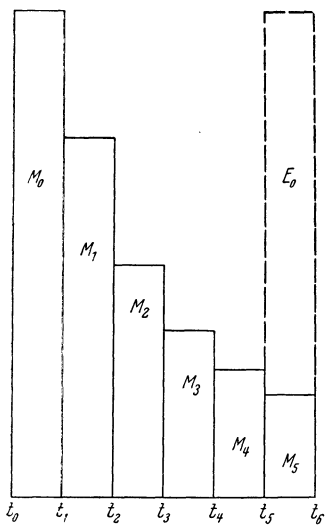


Abb. 20. Veranschaulichung des Unterschiedes von Wahrscheinlichkeit und Häufigkeitsziffer an einem Ereignisablauf.

Von den Entwicklungswahrscheinlichkeiten heben sich streng die Häufigkeitsziffern („-koeffizienten") ab. Auch sie sollen einen Tatbestand, z. B. die Sterbefälle, die Heiraten usw. auf ihre Häufigkeit messen; aber sie tun es in der grundsätzlich anderen Weise, daß sie das Ereignis nicht am Anfangsstand, sondern an der Zeit messen, die die unter der Ereignisentwicklung stehende Masse verlebt hat. Der Sinn dieser zunächst noch wenig einleuchtenden Messungsart soll aus folgendem klarer werden (Abb. 20).

In der Abbildung bedeutet M_0 den Anfangsstand einer Masse, aus der — wir nehmen das hier der Einfachheit halber an — am Ende der Zeitperiode t_0 bis t_1 E_1 Einheiten infolge eines Austrittsereignisses (Tod oder Wanderung aus der Masse der Bevölkerung, Eheschließung aus der Masse der Unverehelichten, endgültige Abfertigung aus der Masse der zur militärischen Stellung Erschienenen (bei allgemeiner Wehrpflicht), Prüfung aus der Masse der Studierenden usw.) ausscheiden. Die Masse tritt somit mit M_1 Einheiten in die Zeitperiode t_1 bis t_2 ein. Am Ende dieser scheiden ähnlich E_2 Einheiten aus usw. Am Ende von t_4 bis t_5 wird der gesamte Austritt $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$ betragen. Die Wahrscheinlichkeit der Masse M_0 gegenüber dem Ergebnis E beträgt nun für die Zeit t_0 bis t_5 definitionsgemäß $w = \frac{E}{M_0}$.

Die Häufigkeitsziffer (der Häufigkeitskoeffizient) dagegen

$$q = \frac{E}{M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4},$$

das ist die Ereigniszahl, gemessen an der von der Masse verlebten Zeit (die Zeiträume t_0 bis t_1, t_1 bis t_2 usw. jeweils als Einheit genommen).

Es ist nun klar, daß die beiden Maße ein verschiedenes Ergebnis zeigen werden, selbstverständlich zunächst hinsichtlich der allgemeinen Höhe; denn der Nenner von q ist bedeutend größer als derjenige von w, weshalb die Ziffer immer niedriger sein wird als die Wahrscheinlichkeit. Darüber hinaus sehen wir aber noch eine weitere Verschiedenheit: dadurch, daß die Wahrscheinlichkeit immer nur den Ausgangsstand der Masse berücksichtigt, ist sie unabhängig von allen Verschiebungen, die im Gang des Ereignisses eintreten können. Die Ziffer dagegen ist für solche Verschiebungen empfindlich. Es kann bei gleichbleibendem E der Gang der E_1, E_2 usw. einmal so beschaffen sein, daß das Ereignis zuerst stark, dann immer schwächer wirkt; es ergibt sich dann als obere Umrandung der M eine Konvexkurve wie hier in der Zeichnung. Es kann aber auch sein, daß das Ereignis zuerst schwach, dann immer stärker wirkt. Das Ergebnis wird eine Konkavkurve sein. Die Wahrscheinlichkeit w wird in beiden Fällen unverändert bleiben, die Ziffer aber wird von dieser Verschiedenheit beeinflußt. Sie wird im ersten Falle (des konvexen Verlaufes) größer, im zweiten Falle kleiner sein.

Desgleichen können wir verstehen, daß w und q auf die verschiedene Größe von E verschieden antworten. Die Wahrscheinlichkeit w wird einer Größenverschiebung an E proportional gehen, q wird auf ein Kleinerwerden von E schwächer, auf ein Größerwerden stärker Bezug nehmen als w, weil in q nicht nur die Änderung von E, sondern auch deren erhöhender oder vermindernder Einfluß auf die verlebte Zeit ΣM_i wirksam wird.

Es sei hier noch bemerkt, daß das ganze Ereignis in der Regel nicht am Ende einer Zeitperiode stattfindet (ein Beispiel wären die Abfertigungen bei der militärischen Stellung oder die Prüfungen), sondern daß es sich über einen Zeitraum in irgendeiner Weise verteilt (Sterbefälle, Wanderungen). Dieser Umstand nimmt auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit keinen Einfluß, da hier als Maß der Anfangsstand der Masse verwendet wird, wohl aber auf die Berechnung der Ziffer, da die verlebte Zeit offenkundig eine andere Gestaltung annimmt, als in dem obigen vereinfachten Beispiel. Ist die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des Ereignisses über eine Zeitstrecke begründet, so hilft man sich einfach, indem man aus den Anfangsständen M_0 und M_1 usw. das arithmetische Mittel nimmt. Entfernt sich diese Annahme zu weit von der Wirklichkeit (z. B. bei den Sterbefällen im ersten Lebensjahre), so muß die verlebte Zeit genauer berechnet werden.

Aus den oben dargestellten Eigenschaften der beiden Maße ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit dort das richtigere Maß ist, wo es auf die Lagerung des Ereignisablaufes nicht ankommt; die Ziffer wird dagegen dort zu verwenden sein, wo dies der Fall ist. Wenn wir z. B. den Sterbeablauf ins Auge fassen, so ist es eben die Frage des Früher oder Später dieses Ereignisses, das die größere oder geringere Sterblichkeit ausmacht. Das Sterbeereignis ist somit ein Ereignis wesentlicher Verschiebung, und das zutreffende Maß dafür ist die Sterbeziffer. Bei der Messung der Tauglichkeit bei den militärischen Stellungen dagegen kann nicht behauptet werden, daß es von einem wesentlichen Belange wäre, ob aus militärpolitischen Gründen die Hauptmasse der Auszuhebenden schon von den Stellungspflichtigen des ersten Stellungsjahres oder erst von denen des dritten (bei dreijähriger Stellungspflicht) genommen wird. Es ist somit die militärische Aushebung ein Ereignis unwesentlicher Verschiebung und das zutreffende Maß ist nicht die Aushebungsziffer, sondern die Aushebungswahrscheinlichkeit.

Die oben erwähnte Sterbeziffer ist gemeint am reinen Sterbeablauf, wie er uns nur in den Sterbetafeln (siehe Bd. II) entgegentritt. Diese Sterbeziffer bezeichnen wir als die „reine" Sterbeziffer. Die in der statistischen Praxis durch Messung der Sterbefälle am mittleren Bevölkerungsstande eines Jahres gewonnene Sterbeziffer ist nur eine rohe Sterbeziffer. Ihr innerer Zusammenhang mit der reinen Sterbeziffer wird durch folgende Erwägung klar. Für die Gestalt des Altersaufbaues, der sich in größerer oder geringerer Annäherung einer Pyramidenform nähert, ist vor allem die Sterblichkeit der Bevölkerung maßgebend. Sie ist der Hauptgrund, warum es weniger ältere Leute und mehr jüngere Leute in der Bevölkerung gibt. Daneben kommen aber gegenüber dem Bilde, das uns eine nur auf Grund des Sterbeablaufes aus den Sterbetafeln berechnete Bevölkerung bieten würde, Verschiebungen hinzu, die teils durch die Änderungen in der Bevölkerungsbewegung, teils durch die Wanderungen bewirkt sind. Wären solche Störungen nicht vorhanden, so müßte der Altersaufbau der Bevölkerung mit dem idealisierten Altersaufbau der Sterbetafeln (auf Grund dessen die „reine" Sterbeziffer berechnet wird), übereinstimmen. Wegen des Vorhandenseins solcher Störungen können wir die zweite Sterbeziffer nur als „rohe" Sterbeziffer bezeichnen[1].

Für die Ermittlung der Gesamtheiten, die zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeitsziffern benötigt werden, leistet die oben auf S. 18 in Abb. 2 mitgeteilte Beckersche Darstellung des Bevölkerungsablaufes gute Dienste. Wollen wir z. B. die Wahrscheinlichkeit der Einjährigen, vor Erreichung des zweiten Lebensjahres zu sterben, bestimmen, so wird diese Wahrscheinlichkeit ohne Zweifel dargestellt durch $\frac{G_I^{1J}}{L_I^{1J}}$, wenn wir unter L_I eine Lebendgesamtheit Gleichaltriger (erste Lebendgesamtheit) und unter G_I die aus dieser Lebendgesamtheit vor Erreichung des nächsten Lebensjahres Gestorbenen (erste Gestorbenengesamtheit) verstehen. G_I^{1J} wird statistisch in der Weise ermittelt werden müssen, daß wir von den aus dem Geburtsjahrgang J_1 Stammenden (Bezeichnung nach Abb. 2) die im Kalenderjahre J einjährig Gestorbenen erheben (die im Rahmen des Dreiecks $\tau_1 h_1 \tau_2$ vorkommenden Sterbefälle, auch untere Dreiecksgesamtheit ${}_uG_I^{1J}$ der einjährig Gestorbenen genannt) und daß wir zu diesen die aus dem gleichen Geburtsjahrgang J_1 im Kalenderjahre J_3 noch einjährig Gestorbenen hinzufügen (die im Rahmen des Dreiecks $\tau_2 h_1 i_1$ vorkommenden Sterbefälle, auch obere Dreiecksgesamtheit ${}_oG_I^{1J}$ der einjährig Gestorbenen genannt). Die einjährig Gestorbenen müssen also aus zwei Kalenderjahren zusammengefaßt werden, wobei als Bestimmungsstücke das Geburtsjahr und das Alter notwendig sind. Auch die Gesamtheit der gleichaltrig Lebenden L_I können wir in der Statistik nicht unmittelbar erheben. Wir können nur, etwa bei einer Volkszählung, die Gesamtheit der gleichzeitig im Alter von 1 bis 2 Jahren Lebenden ermitteln (zweite Gesamtheit der Lebenden L_{II}, in der Abbildung dargestellt durch die Strecke $\tau_2 h_1$). Zu dieser Gesamtheit müssen wir die untere Dreiecksgesamtheit der Gestorbenen hinzufügen, um auf die erste Lebendgesamtheit L_I zu kommen. Die obige Formel wandelt sich daher um in

$$w_I = \frac{{}_uG_I^{1J} + {}_uG_I^{1J}}{L_{II} + {}_uG_I^{1J}} = \frac{\tau_1 h_1 \tau_2 + \tau_2 h_1 i_1}{\tau_2 h_1 + \tau_1 h_1 \tau_2}.$$

Diese Art, eine Sterbewahrscheinlichkeit zu berechnen, ist die allgemein übliche. Daneben kommt es seltener vor, daß nach der Sterbewahrscheinlichkeit gleichzeitig Lebender (w_{II}) gefragt wird. Die Wahrscheinlichkeit der 1- bis 2jährigen, im nächsten Kalenderjahr zu sterben, ist in einer ähnlichen Weise

$$w_{II} = \frac{G_{II}^{1-2J}}{L_{II}^{1-2J}} = \frac{{}_uG_I^{1J} + {}_uG_I^{2J}}{L_{II}^{1-2J}} = \frac{\tau_2 h_1 i_1 + \tau_2 i_1 \tau_3}{\tau_2 h_1}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit der aus dem Geburtsjahrgang J_1 stammenden 1- und 2jährigen, im nächsten Kalenderjahr zu sterben, müssen also die Gestorbenen aus zwei Lebensjahren zusammengesetzt werden.

Eine häufigere Fragestellung als die zweite ist die dritte, daß nämlich die einjährig Gestorbenen eines Kalenderjahres an den 1 bis 2jährigen zu Anfang oder zur Mitte dieses Jahres gemessen werden. Wir erkennen in dieser Maßzahl die Häufigkeitsziffer q wieder. In unserer Darstellung finden wir, daß sich die im Jahre J_3 einjährig Gestorbenen, d. i. die durch das Parallelogramm $\tau_2 h_1 h_2 i_1$ dargestellte Masse (die dritte Gesamtheit der Gestorbenen G_{III}), zusammensetzen aus zwei Geburtsjahrgängen J_1 und J_2. Wir erhalten daher

$$q = \frac{\tau_2 h_1 i_1 + h_1 h_2 i_1}{\tau_2 h_1} = \frac{G_{III}^{1J}}{L_{II}^{1-2J}}.$$

[1] Näheres darüber sowie über den etwas schwierigen Gegenstand „Wahrscheinlichkeit und Ziffer" überhaupt siehe in des Verfassers „Statistischen Verhältniszahlen", a. a. O., S. 42ff., 58ff.

Wahrscheinlichkeiten und Ziffern dienen hauptsächlich dazu, die Häufigkeit von Ereignissen zu messen. Keinesfalls dürfen Gliederungszahlen zu diesem Zwecke verwendet werden. Die bloße Gliederung der Gestorbenen nach dem Alter gibt noch keinen Ausdruck für die Stärke der Sterbegefährdung der verschiedenen Altersstufen ab, denn die Zahl der Gestorbenen wird auch durch die Besetzung der Altersstufen bestimmt. Die Sterbehäufigkeit kann also nur durch die Sterbewahrscheinlichkeiten oder Sterbeziffern nach Altersstufen gemessen werden. Ähnlich gibt die Gliederung der Heiratenden nach der Konfession nicht einen Ausdruck für die Ehehäufigkeit der Konfessionen ab, denn die Zahl der Angehörigen der Konfession ist verschieden groß; einzig und allein die Beziehung der konfessionszugehörigen Heiratenden auf die Konfessionszugehörigen im ehefähigen Alter überhaupt wird uns ein Bild der Heiratshäufigkeit der verschiedenen Konfessionen vermitteln. So ist immer, wo wir die Häufigkeit von Ereignissen messen wollen, die an verschieden starken Grundmassen vor sich gehen, die Beziehung auf diese Grundmassen vorzunehmen.

16. Die statistische Ursachenforschung[1].

a) Vorbemerkungen. Wir haben in den vorausgehenden Abschnitten gesehen, wie eine statistische Masse gefaßt und dargestellt, wie sie in Gruppen zerlegt, zu Reihen gefügt wird, wie daraus statistische Durchschnitte, Streuungsmaße und Verhältniszahlen berechnet werden. Diese Tätigkeit des Statistikers bliebe aber im Äußerlichen stehen, wenn nicht an den so bearbeiteten Stoff noch die Frage nach dem Warum? der beobachteten Gestaltung geknüpft würde. Von diesem „Warum" und seiner Beantwortung handelt die statistische Ursachenforschung.

Wir müssen hier allerdings eine wichtige Einschränkung voranstellen. Die Frage nach dem Warum der statistisch dargestellten Erscheinungen obliegt ohne Zweifel nicht der Statistik, sondern dem jeweils behandelten Stoffgebiet: warum die Geburten abnehmen, das muß die Bevölkerungslehre erkunden, warum die Zahlen des Außenhandels wachsen oder die Preise sinken, wird die Volkswirtschaftslehre zu erklären haben, warum gewisse Verbrechen in der Kriegszeit zu-, andere wieder abnehmen, das zu erforschen, gehört in den Bereich der Kriminalistik usw. Die statistische Ursachenforschung wird sich auf einige wenige Gebiete zu beschränken haben:

a) auf die Erklärung aller Änderungen und Unterschiede, die auf der Änderung (oder Verschiedenheit) in den statistischen Grundbegriffen, im statistischen Erhebungs- oder Aufbereitungsverfahren beruhen;

b) auf die Erklärung der an statistischen Massen zu beobachtenden regelmäßigen Formen;

c) auf die Erklärung der an diesen regelmäßigen Formen, sowie an allen statistischen Beobachtungen auftretenden Störungen;

d) auf die Feststellung des Vorhandenseins eines ursächlichen Zusammenhanges

---

[1] March, L.: Comparaison Numérique des Courbes Statistiques, in: Journ. de la Soc. Statistique de Paris **46**, 47, 255ff., 307f., (1905). Tschuprow, Al. A.: Die Aufgaben der Theorie der Statistik, in Jahrbücher f. Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft **29** (1905). Zizek, F.: Ursachenbegriffe und Ursachenforschung in der Statistik, in Allgemeines Statistisches Archiv **17**, 380ff. Wechselrede hierzu in Protokolle der Jahresversammlung der Deutschen Statistischen Gesellschaft i. J. 1927 (als Manuskript gedruckt). Gini, C.: Quelques considérations au sujet de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues. Contribution à l'étude des méthodes d'élimination, in Metron **4**, 3ff. Zizek, F.: Nichtvergleichbare statistische Zahlen, in Schmollers Jahrbuch **51**/1, 29ff. (1927). — „Scheinbare" Veränderungen statistischer Zahlenergebnisse und scheinbare „Unterschiede" zwischen solchen, in Dtsch. St. Zentralblatt **18**, 129 (1926). Vgl. auch die zu Abschnitt II, 4b und 5b u. d (S. 53ff.) angegebenen Schriften.

zwischen zwei Erscheinungen und auf die Herausarbeitung der diesen Zusammenhang zahlenmäßig beleuchtenden Verfahren.

Die Punkte a bis c sind bereits an anderer Stelle berührt oder behandelt worden. Wir haben zu a auf S. 15f. und S. 57f. die Wichtigkeit der Beobachtung einer einheitlichen Begriffsabgrenzung bei Vornahme örtlicher oder zeitlicher Vergleiche betont. Aus der Nichtbeachtung dieser Regel können sich Fehlerquellen für die ursächliche Deutung ergeben. Sind z. B. bei einer landwirtschaftlichen Betriebszählung die Zwergbetriebe enthalten, bei der anderen nicht, bei einer Berufszählung die Hausfrauen mitgezählt, bei der anderen nicht, ist bei einer Statistik des Außenhandels die Durchfuhr mitgezählt, bei der anderen nicht, sind bei einer Arbeitslosenstatistik nur die unterstützten Arbeitslosen gezählt, bei der anderen nicht, so treten Verschiedenheiten in den Zahlen auf, wo vielleicht in Wirklichkeit gar keine Unterschiede in den Verhältnissen oder gar Unterschiede im entgegengesetzten Sinne vorliegen. Nahe mit den erwähnten Fehlerquellen hängen die Fehlerquellen zusammen, die sich für die Deutung von Verschiedenheiten oder Veränderungen beim Vergleich von Durchschnitts- oder Verhältniszahlen aus ungleichartig zusammengesetzten Massen ergeben. Die verschiedene durchschnittliche Körpergröße der Schüler der gleichen Klasse an zwei verschiedenen Orten muß noch nicht auf eine anthropologische Wesensverschiedenheit zurückgehen, wenn die Schüler der Klasse hinsichtlich der Körpergröße ungleichartig zusammengesetzt sind, wenn z. B. in der einen Klasse nur Knaben, in der anderen Klasse Knaben und Mädchen vorhanden sind. Die verschiedene Analphabetenziffer zweier Staaten muß nicht auf Wesensverschiedenheit der Bildungsverhältnisse beruhen, wenn die Massen ungleichartig erfaßt sind, in dem einen Falle vielleicht die Gesamtbevölkerung einschließlich der unmündigen Kinder, in dem anderen Falle die Bevölkerung unter Ausschluß dieser, im dritten Falle nur die Bevölkerung von über 20 Jahren, oder gar nur die bei der Militärmusterung erscheinenden Männer. Solche Fehlerquellen werden natürlich dadurch vermieden, daß man die zu vergleichenden Massen gleichartig faßt (vgl. S. 16). Ähnliche Deutungsschwierigkeiten können sich aus der verschiedenen örtlichen oder zeitlichen Abgrenzung ergeben. Vergleichen wir z. B. die zeitliche Entwicklung der Bevölkerungszahlen und -eigenschaften einer Stadt und ist der Umfang der Stadt durch Eingemeindung gewachsen, so haben wir in der Volkszunahme diejenige aus Gründen der Bevölkerungsbewegung (der natürlichen Bevölkerungsbewegung und der Wanderbewegung), aber auch diejenige aus Gründen der Gebietsänderung enthalten. Wir dürfen daher, wenn wir die erstere Tatsache beleuchten wollen, uns mit den Zahlen in der rohen Form nicht begnügen, sondern müssen sie für die ganze Zeit auf das Gebiet des letzten Umfanges umrechnen. Eine ähnliche Deutungsstörung ergibt sich aus Gebietsänderungen eines Staates (z. B. des Deutschen Reiches vor und nach dem Friedensvertrage von Versailles). Ähnlich ist es bei Verschiedenheiten der zeitlichen Abgrenzung. Aus der kleineren Geburten-, Kohlenförderungs-, Ausfuhrzahl für den Monat Februar kann, wenn die Monate nicht auf einen einheitlichen Umfang von 30 Tagen umgerechnet wurden, nicht ohne weiteres auf eine geringere Intensität des betrachteten Ereignisses in diesem Monate geschlossen werden.

In engem Zusammenhange damit stehen diejenigen Vorspiegelungen von Verschiedenheiten oder Änderungen, die aus Verfahrensverschiedenheiten oder -änderungen hervorgehen. Gelingt es, von Zählung zu Zählung die Erhebungsgegenstände, sofern sie schwer erfaßbar sind, z. B. die obdachlose Bevölkerung, die wirtschaftliche Erzeugung, das Einkommen, die Tätigkeit der privaten Organisationen usw. besser und vollständiger zu erfassen, so dürfen die Zunahmen der Zahlen an sich noch nicht als wirkliche Zunahme der Bevölkerung, der Erzeugung usw. angesehen werden. So ging die Zunahme der Herzerkrankungen, die bei den Militärmusterungen vor dem Kriege festgestellt wurden, gewiß wenigstens teilweise auf die fortschreitend bessere Kunst der Militärärzte, Herzkrankheiten zu erkennen, zurück, so können Zunahmen von Prostituierten, von Verurteilungen, von Arbeitslosen auf eine Änderung in der Erfassung und Beurteilung zurückzuführen sein. Auch aus der Verschiedenheit (Änderung) der statistischen Darstellung können Vorspiegelungen einer tatsächlichen Verschiedenheit (Änderung) hervorgehen, wo eine solche gar nicht vorliegt. Wenn in einer Darstellung der zeitlichen Entwicklung des Heiratsalters mitten in der Reihe vom häufigsten Heiratsalter zum durchschnittlichen übergegangen wird (vgl. oben S. 80), so liegt schon darin eine formale Ursache zur Erhöhung, wenn auch die Verhältnisse vielleicht gleichgeblieben sind.

Auch über die Erklärung der regelmäßigen statistischen Formen (zu b), soweit diese Erklärung auf analytischem Wege versucht wird, haben wir bereits oben (S. 86ff.) gehandelt. Wir haben dort z. B. die aus der Fehlertheorie übernommene Erklärung des Zustandekommens der Gaußschen Normalkurve dargestellt. Die Prüfung, ob eine solche Erklärung zutrifft, muß freilich der für das Stoffgebiet zuständigen Fachwissenschaft überlassen bleiben (z. B. die Erklärung der Körpergrößenverteilung der Anthropologie).

So wie die Regelmäßigkeiten, so erklärt auch die statistische Theorie die an ihnen bei kleinen Beobachtungszahlen eintretenden Unregelmäßigkeiten (zu c). Über diese Unregelmäßigkeiten, die sich als „zufällige Störungen" der Wesensform darstellen, haben wir bereits aus Anlaß des Gesetzes der großen Zahl (S. 21ff.) gehandelt.

Für die eingehendere Behandlung in diesem Zusammenhange bleibt nur der letzte Punkt d, Feststellung des Vorhandenseins ursächlicher Zusammenhänge zwischen zwei Erscheinungen und Herausarbeitung der diese Zusammenhänge zahlenmäßig beleuchtenden Verfahren, übrig.

Bevor auf diese Dinge näher eingegangen werden kann, mögen hier noch einige Bemerkungen zum statistischen Ursachenbegriff eingefügt werden. Der allgemein bekannte, hier daher als bekannt vorauszusetzende Begriff der „Ursache" gehört dem naturwissenschaftlichen Denken an. Die Ursache stellt dort die innere Verbindung her zwischen zwei Vorgängen individueller Art, und die Aussage darüber lautet: „wenn A geschieht, tritt a ein" („Hypothetisches Urteil"). Wenn wir, einer allgemeinen Übung folgend, die Bezeichnung „Ursache" in der Statistik verwenden, so ist es ohne weiteres klar, daß sie hier infolge der besonderen Eigenart der statistischen Massen einen anderen Sinn annehmen muß. Hat schon oben der besondere Charakter der statistischen Masse den statistischen Vergleich gegenüber dem individuellen Vergleich als etwas Besonderes, Arteigenes erscheinen lassen, so gilt das gleiche bezüglich der statistischen Ursachenforschung gegenüber der naturwissenschaftlichen (Individual-) Ursachenforschung. Das einfache Schema in der Statistik ist folgendes: wenn A geschieht, tritt $a, b, c, d \ldots$ ein („disjunktives Urteil"), z. B. wenn die Niederschlagsmenge im April und Mai den Grad A erreicht, werden auf m Hektar Wiesen a dz Heu, auf n ha Wiesen b dz, auf o ha c dz usw. geerntet; oder, wenn in den Betrieben eines gewissen Betriebszweiges die gegebene Arbeitszeit um A Stunden verkürzt wird, tritt in m Betrieben eine Erhöhung der Arbeitsleistung um a %, in n Betrieben eine Minderung um b %, in o Betrieben eine Minderung um c % usw. ein. Die beiden Beispiele entsprechen dem angegebenen Schema aber nur dann, wenn die Aufnahmefähigkeit der Böden für die Niederschläge eine für alle Wiesen, die gegebene Arbeitszeit eine für alle Betriebe gleiche Größe ist. Ist sie es nicht, so wird der Tatbestand noch verwickelter, indem der Streuung im Erfolge noch eine Streuung in der Ursache gegenübertritt, also entsprechend dem Schema, wenn A, B, C usw. geschieht, so tritt a, b, c usw. ein. Dieses verwickelte Schema wird überall dann in Geltung treten, wenn an dem erregenden Tatbestande eine statistische Masse beteiligt ist: z. B. hier die nach der Aufnahmefähigkeit gegliederte Masse der Wiesen, die nach der

Arbeitszeit gegliederte Masse der Betriebe. Ebenso tritt etwa der Wirkungsmasse der Sterbefälle die erregende Masse der Bevölkerung, der Wirkungsmasse der Verbrechen die erregende Masse der strafmündigen Bevölkerung, der Wirkungsmasse des Verbrauches die erregende Masse der Einkommen usw. gegenüber.

Es besteht also durch die Streuungstatsache eine Verwicklungsmöglichkeit nicht nur nach der Seite der die Wirkung ausdrückenden, sondern auch der an der Verursachung beteiligten Masse, und zwar infolge der Zufallsstreuung schon bei den verhältnismäßig gleichartigen Massen, um so mehr natürlich dort, wo die Gleichartigkeit nicht gewahrt ist, und die verschiedenartigsten Tatbestände in einer Masse zusammengefaßt sind. Solche verschiedenartige Tatbestände werden in der Praxis mit Vorliebe gebildet. Man spricht z. B. vom Einfluß des Wohnens auf die Sterblichkeit, der Konjunktur auf die Eheschließungen, des Wohlstandes auf den Verbrauch usw. Gegenüber solchen weitläufigen und vieldeutigen Bildungen von Ursachenkreisen muß der Statistiker kritisch und vorsichtig sein und sich immer bemühen, verwickelte Tatbestände möglichst in ihre Elemente zu zerlegen und den Einfluß dieser zu bestimmen.

Als Tatbestände der Statistik, in denen das Verhältnis statistischer Ursächlichkeit in Frage kommt, sind folgende zu bezeichnen: alle Zergliederungen einer Masse auf Grund eines wesentlichen (d. h. andere als zufällige Unterschiede hervorrufenden) Merkmales, z. B. die Zergliederung der Schülerzahl nach der Klassenzahl; die weitere Zergliederung einer ausgegliederten Masse nach einem neuen Merkmal (Merkmalsverbindung): z. B. Ausgliederung der nach dem Geschlecht gegliederten Universitätshörer nach Fakultäten, innerhalb dieser etwa nach dem väterlichen Berufe; dann die Beziehung von „Fruchtmasse" und „Stammasse" (O. Spann), z. B. von Ernteertrag und Erntefläche, Geborenen und gebärfähigen Frauen; im weiteren Sinne auch die Beziehung von Zuwächsen oder Abgängen auf die Grundmasse, z. B. Zuwanderern oder Gestorbenen auf die Bevölkerung.

Wenn wir den Zusammenhang zweier statistischer Merkmale A und B an der Masse N prüfen wollen, so haben wir es, wie erwähnt, auf beiden Seiten mit gestreuten Tatbeständen A_1, $A_2 \ldots A_n$ und B_1, $B_2 \ldots B_n$ zu tun. Es ist also zu untersuchen, wie sich jedes einzelne A mit jedem einzelnen B verbindet, welche Werte also die A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3 usw., die A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3 usw. ... annehmen. Es ergibt sich aus dieser Problemstellung ohne weiteres, daß eine Tabelle mit doppelter (oder mehrfacher) Ausgliederung (S. 67) die statistische Ausdrucksform für die vorliegende Untersuchung ist. In der Praxis wird der Hergang zumeist der sein, daß wir den zergliederten Tatbestand B, z. B. mit den Teilmassen B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$ vorfinden und uns nun die Frage stellen, ob ein anderer Tatbestand A in seiner Ausgliederung A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ auf die Ausgliederung des B einen Einfluß nimmt, also in der Zergliederung verhältnismäßig andere Werte hervorbringt als die B_1, $B_2 \ldots B_n$ (unter Berücksichtigung der nach der Größe der vorhandenen Zahlen zulässigen zufälligen Abweichungen). Trifft das letztere zu, unterscheiden sich also die Gliederungszahlen der Werte A_1B_1, A_2B_1 usw. von derjenigen von B_1, die der Werte A_1B_2, A_2B_2 usw. von derjenigen von B_2 usw. nur durch Abweichungen, die den Rahmen zufälliger Fehler nicht überschreiten, so werden wir sagen, daß zwischen den Tatbeständen A und B kein ursächlicher Zusammenhang bestehe; anderenfalls werden wir ihn als bestehend feststellen. Der geschilderte Vorgang, die bereits nach B zergliederte Masse auch noch nach A zu unterscheiden (zu „differenzieren", das Wort nicht etwa im Sinne der höheren Mathematik genommen), hat dem Verfahren zu dem Namen „Verfahren des Unterschiedes" verholfen („Differenzmethode", entsprechend dem gleichnamigen Verfahren der Logik).

Dabei ist nachdrücklich zu bemerken, daß die Statistik nur das Vorhandensein eines ursächlichen Zusammenhanges, dagegen nicht die Art dieses Zusammenhanges feststellen kann (z. B. ob A von B, B von A, oder A und B von C ursächlich beeinflußt werden). Die Feststellung der Art des Zusammenhanges obliegt nicht der Statistik, sondern der zuständigen Stoffwissenschaft. In vielen Fällen kann die Art eines möglichen ursächlichen Zusammenhanges allerdings auch schon von jedem denkenden Laien, also auch vom bearbeitenden Statistiker, festgestellt werden. Wenn wir z. B. den Zusammenhang zwischen Lebenseigenschaft der Geborenen und Konfession der Eltern untersuchen, so kann, wenn ein solcher Zusammenhang aufgedeckt wird, schon der Laie feststellen, daß nur ein Einfluß der Konfession der Eltern (oder einer mit der Konfession zusammenhängenden anderen Tatsache) auf die Gliederung in Lebend- und Totgeborene, aber nicht umgekehrt ein Einfluß der Lebenseigenschaft der Geborenen auf die Konfession der Eltern stattfinden kann.

Der oben erwähnte Ausdruck „Verfahren des Unterschiedes" kennzeichnet allerdings nur die erste Hälfte des statistischen Verfahrens. Nach ihr gabelt es sich, je nachdem es sich um artmäßige oder zahlenmäßige Merkmale handelt. Das eine Verfahren untersucht also die gegenseitige Abhängigkeit artmäßiger Merkmale (Kontingenz), das zweite die gegenseitige Abhängigkeit zahlenmäßiger Merkmale (Korrelation).

b) Die Messung der Abhängigkeit artmäßiger Merkmale[1]**.** Wir wollen zunächst den logisch-statistischen Vorprozeß, der zu der Bezeichnung „Verfahren des Unterschiedes" geführt hat, an einem Beispiele veranschaulichen. Im Deutschen Reiche gliederte sich im Jahre 1925 die Bevölkerung in 32009300 erwerbstätige und 30401319 nicht erwerbstätige Personen. Wir erheben nun die Frage, ob die Häufigkeit der Erwerbstätigkeit mit dem Geschlecht in einem Zusammenhang steht. (Auch hier ist die Art eines möglichen Zusammenhangs für den Laien auf den ersten Blick ersichtlich; denn es kann wohl das Geschlecht den Beruf, aber nicht der Beruf das Geschlecht beeinflussen). Wir haben, um die Frage zu beantworten, nichts anderes zu tun, als die vorliegende nach dem Gesichtspunkte der Berufstätigkeit in zwei Gruppen (bei Verwendung von Zählblättchen in zwei Päckchen) gegliederte Zähl masse weiter nach dem Geschlechte unterzuteilen, so daß wir im ganzen also $2 \times 2 = 4$ Gruppen (Päckchen) bekommen. Das Tabellchen, das sich aus dieser einfachsten Möglichkeit einer Merkmalsverbindung ergibt, sieht folgendermaßen aus:

Erwerbstätige und nichterwerbstätige Bevölkerung des Deutschen Reiches im Jahre 1925 nach dem Geschlecht[2]. Grundzahlen.

Geschlecht (A)	Erwerbstätigkeit (B)		Insgesamt
	erwerbstätig	nicht erwerbstätig	
Männlich	20531288 ($A_1 B_1$)	9665535 ($A_1 B_2$)	30196823 (A_1)
Weiblich	11478012 ($A_2 B_1$)	20735784 ($A_2 B_2$)	32213796 (A_2)
Insgesamt	32009300 (B_1)	30401319 (B_2)	62410619 (N)

Die einfachste Form der Ermittlung des Zusammenhanges ist hier die der Ermittlung der relativen Verteilung der gesamten Bevölkerung N auf die Berufstätigen, ferner die gleiche Ermittlung für die Teilmassen der männlichen und der weiblichen Bevölkerung:

Erwerbstätige und nichterwerbstätige Bevölkerung des Deutschen Reiches im Jahre 1925 nach dem Geschlecht. Verhältniszahlen.

Geschlecht	Erwerbstätigkeit		Insgesamt
	Erwerbstätige	Nichterwerbstätige	
Männlich	0,6799	0,3201	1,0000
Weiblich	0,3563	0,6437	1.0000
Insgesamt	0,5129	0,4871	1,0000

[1] YULE, G. U.: Introduction, S. 25ff. CZUBER: Die statistischen Forschungsmethoden, S. 10ff.

[2] Statistik des Deutschen Reiches **408**, 11. Berlin 1931.

Es taucht hierbei die Frage auf, ob A_1B_1 und A_2B_1 als zufällige Abweichungen einer gemeinsamen Wesensform B_1, A_1B_2 und A_2B_2 als zufällige Abweichungen einer gemeinsamen Wesensform B_2 betrachtet werden können (Problem 2 auf S. 38ff.). Wenn wir die Rechnung für das erstgenannte Paar durchführen, so ist die mittlere Abweichung des Unterschiedes 0,6799 — 0,5129 $\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_1} + \frac{p_0 q_0}{s_2}}$, wobei p_0 bereits mit 0,5129 gegeben ist. Wir erhalten somit für

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}5129 \times 0{,}4871}{30\,196\,823} + \frac{0{,}5129 \times 0{,}4871}{32\,213\,796}} = 0{,}00013\,.$$

3σ ist somit gleich 0,00039. Der vorliegende Unterschied 0,167 ist 428mal so groß als die dreifache Zufallsabweichung des vorliegenden Unterschiedes, beruht somit keinesfalls auf Zufall, sondern auf einer ausgiebigen wesentlichen Verschiedenheit.

Ein anderes Verfahren geht von folgendem Gedanken aus. Die (empirische) Wahrscheinlichkeit, in der gegebenen Bevölkerung männlichen Geschlechtes zu sein, ist $\frac{A_1}{N}$, die Wahrscheinlichkeit, in der gegebenen Bevölkerung berufstätig zu sein $\frac{B_1}{N}$. Unabhängigkeit der beiden Tatbestände vorausgesetzt, müßte (nach dem multiplikativen Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) die Wahrscheinlichkeit, männlichen Geschlechtes und berufstätig zu sein, betragen

$$\frac{A_1}{N} \cdot \frac{B_1}{N} = \frac{A_1 \cdot B_1}{N^2}\,.$$

Der dieser Wahrscheinlichkeit entsprechende absolute Wert ist

$$N \cdot \frac{A_1 \cdot B_1}{N^2} = \frac{A_1 \cdot B_1}{N}\,,$$

d. h. es ist, um die Unabhängigkeitszahl für jedes Feld zu berechnen, die Spaltensumme mit der Zeilensumme zu multiplizieren und durch die Gesamtzahl der Fälle zu dividieren. Diese einfache Formel gibt uns das Mittel an die Hand, diejenigen Werte für unser Tabellchen zu berechnen, die wir erwarten müßten, wenn eine Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen nicht bestünde. Die Durchrechnung führt zu folgender Nebeneinanderstellung, in der an erster Stelle jeweils die beobachteten Zahlen (*BZ*) in normalem Druck, an zweiter Stelle die berechneten Unabhängigkeitszahlen (*UZ*) in Kursivdruck, dazu noch die Abweichungen der beobachteten Werte von den unabhängigen Werten in Prozenten dieser dargestellt sind.

Beobachtungs- und Unabhängigkeitswerte der Geschlechtsgliederung der Erwerbstätigen im Deutschen Reiche 1925.

Geschlecht	Erwerbstät gkeit		Insgesamt
	Erwerbstätige	Nichterwerbstätige	
Männlich	*BZ* 20531288 (+ 32,56%) *UZ 15487415*	*BZ* 9665535 (— 34,29%) *UZ 14709408*	30196823
Weiblich	*BZ* 11478012 (— 30,53%) *UZ 16521885*	*BZ* 20735784 (+ 32,14%) *UZ 15691911*	32213796
Insgesamt	32009300	30401319	62410619

Auch in dieser Darstellung ist die große Abweichung der wirklichen Werte von den berechneten Unabhängigkeitswerten offensichtlich. [Im Falle einer einfachen Doppelgliederug wie der unseren (mit insgesamt vier Gliederungsfeldern) müssen alle vier *BZ* — *UZ* den absoluten Werten nacheinander gleich sein (hier 5043873)].

Man kann noch ein Weiteres tun und einen einzigen Ausdruck für die Stärke der Abhängigkeit zweier Tatbestände anstreben. Ein naheliegendes Maß ist der gewogene arithmetische Durchschnitt aus den Fehlerprozenten, der, wie man sich

[1] Vgl. z. B. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung 1, 48.

leicht überzeugen kann, gleich ist $\frac{|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + \cdots}{N} \times 100$, wobei mit dem Symbol $|\delta|$ der absolute Wert der Abweichung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen verstanden wird. In unserem Falle beträgt dieser Durchschnitt 32,33 %.

Aufgabe 19. Die folgende Tabelle ist nach dem zuletzt angegebenen Verfahren auf eine etwaige Abhängigkeit der beiden dargestellten Tatbestände (bisheriger Familienstand der beiden Heiratenden) zu prüfen.

Bisheriger Familienstand der Eheschließenden des Deutschen Reiches im Jahre 1928[1].

Bisheriger Familienstand des Mannes	Bisheriger Familienstand der Frau			Zusammen
	ledig	verwitwet	geschied.	
Ledig	502640	8550	9701	520891
Verwitwet . . .	30691	8339	4178	43208
Geschieden . . .	16146	2373	4557	23076
Zusammen . . .	549477	19262	18436	587175

c) Die Messung der Abhängigkeit zahlenmäßiger Merkmale[2]. (Korrelationstheorie). α) Vorbemerkung. Bei der Verbindung artmäßiger Merkmale war es grundsätzlich gleichgültig, in welcher Reihung wir die

1. Beispiel. Positive Korrelation. Korrelation der Arbeitszeit und des Arbeitslohnes, gezeigt am Beispiele der deutschen Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten im Jahre 1928[3].

Bruttowochenverdienst	Zahl der Wochenarbeitsstunden in der Erhebungszeit										
	über 28-32	über 32-36	über 36-40	über 40-44	über 44-48	über 48-52	über 52-56	über 56-60	über 60-64	über 64-68	überhaupt
Über 25,00—30,00 RM .	9	3	—	1	—	—	—	—	—	—	13
„ 30,00—35,00 „ .	6	20	15	4	—	—	—	—	—	—	45
„ 35,00—40,00 „ .	2	17	27	18	24	6	2	1	1	—	98
„ 40,00—45,00 „ .	—	1	16	24	100	72	61	31	4	—	309
„ 45,00—50,00 „ .	—	—	6	18	74	173	209	170	37	—	687
„ 50,00—55,00 „ .	—	—	1	3	23	171	470	322	135	3	1128
„ 55,00—60,00 „ .	—	—	—	—	4	108	437	494	218	9	1270
„ 60,00—65,00 „ .	—	—	—	—	—	32	208	377	388	30	1035
„ 65,00—70,00 „ .	—	—	—	—	—	4	48	109	245	26	432
„ 70,00—75,00 „ .	—	—	—	—	—	—	11	27	100	10	148
„ 75,00—80,00 „ .	—	—	—	—	—	—	11	9	44	9	73
„ 80,00—85,00 „ .	—	—	—	—	—	—	7	8	23	7	45
Überhaupt	17	41	65	68	225	566	1464	1548	1195	94	5283[4]

[1] Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich **1930**, 33.

[2] Walker, Helen M.: Studies in the History of Statistical Method 92ff. Bravais, A.: Analyse Mathématique sur les Probabilités des Erreurs de Situation d'un Point, in Mém. prés. par divers savants à l'Acad. royale des sciences de l'Inst. de France, **9**, 225ff. (1846). Galton, Francis: Correlations and Their Measurements. In: Proceedings of the Royal Soc., **45**, 135ff., (1880). Pearson, Karl: Regression, Heredity and Panmixia. In: Philos. Transactions of the Royal Soc. of London, A. **187**, 253ff., (1896). Elderton, E. W. P.: Frequency Curves usw., 2. Aufl., 136ff. Yule, G. U.: Introduction, S. 157ff. (Mit reichhaltigen Schriftennachweisen.) Tschuprow, Al. A.: Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Leipzig u. Berlin: Teubner 1925. Baur, F.: Korrelationsrechnung. Teubners Mathem.-physik. Bibl. H. 75. Leipzig u. Berlin 1928. Anderson, O.: Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung. Ein Beitrag zur Analyse von Zeitreihen. Bonn: Schroeder 1929. Guldberg, A.: On Correlation. Norsk. Mat. Foreningssk. Ser. I, Nr 5 (1921). Ezekiel, M.: Methods of Correlation Analysis. New York: John Wiley & Sons 1930. Mills, F. C.: Statistical Methods Applied to Economics and Business, S. 362ff. New York: Henry Holt & Company 1925.

[3] Quelle: Wirtschaft und Statistik **10**, 147 (1930).

[4] Außerdem 71 Fälle, die in der Quelle in offenen Gruppen „— 25 RM" und „— 28 Wochenarbeitsstunden" ausgewiesen waren und die wir wegen der Unbestimmtheit der darin gelegenen Aussagen hier weglassen mußten. Über die offenen Gruppen am Ende der beiden Reihen „über 80 RM" und „über 64 Wochenarbeitsstunden" haben wir uns mit der Annahme der fortgesetzten Gruppengleichheit (Gruppe über 80—85 RM und über 64—68 Wochenarbeitsstunden) hinweggeholfen.

2. Beispiel. Negative Korrelation. Korrelation zwischen dem Alter und dem höchsten wahrnehmbaren Ton[1].

Höchster wahrnehmbarer Ton in tausend Schwingungen in der Sekunde	Alter in Jahren																									Insgesamt
	5,5—8,5	8,5—11,5	11,5—14,5	14,5—17,5	17,5—20,5	20,5—23,5	23,5—26,5	26,5—29,5	29,5—32,5	32,5—35,5	35,5—38,5	38,5—41,5	41,5—44,5	44,5—47,5	47,5—50,5	50,5—53,5	53,5—56,5	56,5—59,5	59,5—62,5	62,5—65,5	65,5—68,5	68,5—71,5	71,5—74,5	74,5—77,5	77,5—80,5	
5—6	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	3
7—8	—	—	1	1	3	2	—	3	1	1	—	2	1	3	1	3	3	5	2	4	3	2	1	3	—	45
9—10	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2	2	—	1	1	—	—	1	—	—	—	1	10
11—12	—	—	1	2	2	3	2	4	2	4	2	5	7	6	12	14	5	11	6	8	3	2	—	2	1	104
13—14	—	—	2	3	7	2	1	4	7	5	10	8	4	6	11	4	6	2	4	4	2	—	1	—	—	93
15—16	—	2	7	21	40	32	33	27	18	20	21	22	19	15	16	6	5	3	1	1	1	—	—	—	—	310
17—18	3	4	26	49	121	105	72	50	36	28	21	21	18	13	4	3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	576
19—20	3	23	74	153	261	178	110	103	47	34	25	18	13	3	3	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	1051
21—22	9	39	112	158	303	164	68	47	24	21	6	2	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	957
23—24	—	10	27	37	50	22	11	4	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	165
25—26	—	4	5	14	11	3	2	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41
27—29	—	1	4	3	6	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16
29—30	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
31—32	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
33—34	—	1	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
Insgesamt	15	84	262	442	805	514	301	244	138	115	87	78	65	49	49	31	22	24	14	17	10	4	2	5	2	3379

[1] Koga, Y., u. G. M. Morant: On the Degree of Association between Reaction Times usw. in: Biometrika **15**, 348ff (1923).

ausgegliederten Teile einander folgen ließen; den artmäßigen Aneinanderreihungen fehlte der zwingende Reihungsgrund (vgl. oben S. 69). Anders ist es dagegen, wenn wir zahlenmäßige Merkmale miteinander verbinden. Hier gilt selbstverständlich die Reihung nach der natürlichen Zahlenreihe. Dies begründet einen grundlegenden Unterschied in der Messung der Abhängigkeit zweier Merkmale voneinander. Mußte es uns bei der Messung der Abhängigkeit artmäßiger Merkmale genügen, für die einzelnen Felder die Stärke der Anziehung und Abstoßung zu bestimmen, woraus sich dann gegebenenfalls ein Gesamtausdruck für die Tabellenform ableiten ließ, so tritt hier infolge der zwangsmäßigen Reihung der Merkmalsstufen ein neues Problem hinzu: ob die gesamte Gruppierung innerhalb der kombinierten Tabelle eine bestimmte Anordnung in der Weise zeigt, daß sich niedrige Werte des einen Merkmals in der Regel mit niedrigen Werten des anderen Merkmals verbinden, hohe Werte des einen mit hohen Werten des anderen; oder aber, ob sich niedrige Werte des einen grundsätzlich mit hohen Werten des anderen verbinden, hohe Werte des einen mit niedrigen des anderen; oder schließlich, ob eine solche Anziehung nicht nachweisbar ist, also Unabhängigkeit des einen Merkmals von dem anderen besteht. Im ersteren Falle sprechen wir von positiver, im zweiten von negativer Korrelation, im dritten vom Fehlen einer Korrelation. (S. Beisp. 1 bis 3, S. 137 bis 139.)

3. Beispiel. Fehlen einer Korrelation. Gewicht der Mutterbohnen und deren Tochterbohnen in einer reinen Linie. 1902[1].

Gewicht der Mutterbohnen in Zentgr.	Gewicht der Tochterbohnen in Zentgr.										Summe
	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	
27,5	—	—	1	5	6	11	4	8	5	—	40
32,5	—	—	—	1	3	7	16	13	12	1	53
37,5	—	1	2	6	27	43	45	27	11	2	164
42,5	1	—	1	7	25	45	46	22	8	—	155
47,5	—	—	5	9	18	28	19	21	3	—	103
52,5	—	1	4	3	8	22	23	32	6	3	102
57,5	—	—	1	7	17	16	26	17	8	3	95
Summe	1	2	14	38	104	172	179	140	53	9	712

β) Die lineare Korrelation[2]. *αα*) Betrachtung am ungruppierten Rohmaterial. Um das Wesen der Korrelation und ihre statistische Behandlung zu verstehen, wollen wir nicht von einer der drei angeführten Tabellen, in denen die einzelnen Werte bereits in Gruppen eingereiht sind, den Ausgangspunkt nehmen, sondern von einer Rohtabelle, in der wir die einzelnen Beobachtungsfälle noch in ihrer ursprünglichen Form vorfinden. Die Tabelle betrifft die Geborenen und Gestorbenen in den 35 Regierungsbezirken Preußens im Jahre 1928 (s. Tab. S. 140).

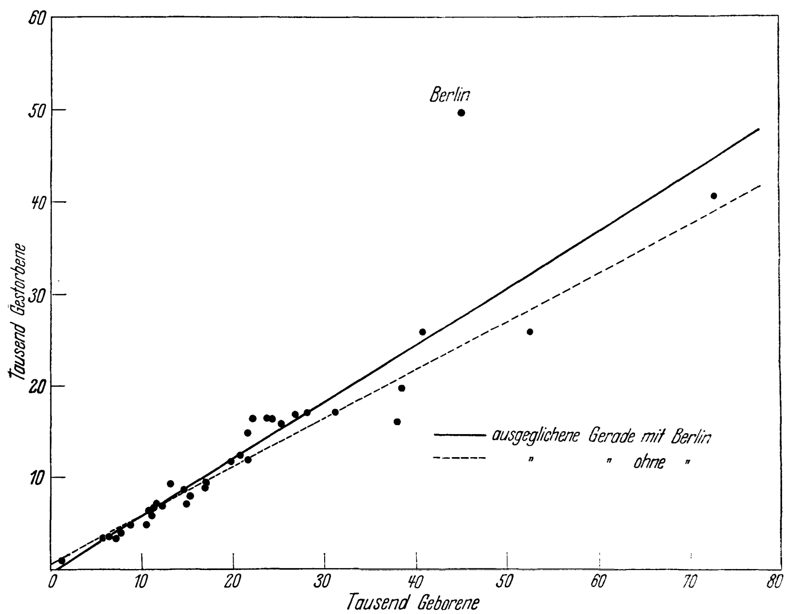


Abb. 21. Streuungsschaubild für die Darstellung der Korrelation zwischen den Zahlen der Geborenen und Gestorbenen in 35 preußischen Regierungsbezirken im Jahre 1928.

Die uns zunächst angehenden Zahlen sind in den beiden ersten Spalten der folgenden Tabelle ausgedrückt. Die Spalten 3 und 4 der Tabelle enthalten Berechnungen, die wir bei der gleich unten vorzunehmenden Berechnung einer nach der

[1] Johannsen, W.: Elemente der exakten Erblichkeitslehre 3. Aufl., S. 387, Jena 1926.

[2] Wir folgen hier der pädagogisch ausgezeichneten Darstellungsweise des Millsschen Lehrbuches.

Geborene und Gestorbene im Freistaat Preußen während des Jahres 1928 nach Regierungsbezirken[1].

Regierungsbezirke	Zahl der Geborenen in Tausenden (x)	Zahl der Gestorbenen in Tausenden (y)	xy	x^2	y^2
	1	2	3	4	5
1. Königsberg	20,8	12,2	253,76	432,64	148,84
2. Gumbinnen	12,2	6,8	82,96	148,84	46,24
3. Allenstein	14,8	6,9	102,12	219,04	47,61
4. Westpreußen	6,4	3,5	22,40	40,96	12,25
5. Potsdam	22,2	16,3	361,86	492,84	265,69
6. Frankfurt	24,1	16,2	390,42	580,81	262,44
7. Berlin	45,1	49,6	2236,96	2034,01	2460,16
8. Stettin	19,8	11,6	229,68	392,04	134,56
9. Köslin	15,3	7,8	119,34	234,09	60,84
10. Stralsund	5,8	3,4	19,72	33,64	11,56
11. Schneidemühl	7,7	3,9	30,03	59,29	15,21
12. Breslau	40,8	25,7	1048,56	1664,64	660,49
13. Liegnitz	25,3	15,7	397,21	640,09	246,49
14. Oppeln	38,5	19,8	762,30	1482,25	392,04
15. Magdeburg	23,8	16,2	385,56	566,44	262,44
16. Merseburg	31,3	17,0	532,10	979,69	289,00
17. Erfurt	11,4	6,6	75,24	129,96	43,56
18. Schleswig	28,0	16,9	473,20	784,00	285,61
19. Hannover	13,1	9,1	119,21	171,61	82,81
20. Hildesheim	11,6	7,0	81,20	134,56	49,00
21. Lüneburg	11,2	6,5	72,80	125,44	42,25
22. Stade	8,7	4,7	40,89	75,69	22,09
23. Osnabrück	10,5	4,7	49,35	110,25	22,09
24. Aurich	7,2	3,2	23,04	51,84	10,24
25. Münster	38,0	15,9	604,20	1444,00	252,81
26. Minden	16,9	8,7	147,03	285,61	75,69
27. Arnsberg	52,5	25,8	1354,50	2756,25	665,64
28. Kassel	21,6	11,7	252,72	466,56	136,89
29. Wiesbaden	21,6	14,6	315,36	466,56	213,16
30. Koblenz	16,7	9,3	155,31	278,89	86,49
31. Düsseldorf	72,8	40,6	2955,68	5299,84	1648,36
32. Köln	26,8	16,8	450,24	718,24	282,24
33. Trier	11,1	5,8	64,38	123,21	33,64
34. Aachen	14,7	8,5	124,95	216,09	72,25
35. Sigmaringen	1,3	0,9	1,17	1,69	0,81
Summe	749,6	449,9	14335,45	23641,60	9341,49

Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Geraden benötigen werden, die fünfte Spalte schließlich Werte, die uns im weiteren Verlaufe unserer Betrachtung von Nutzen sein werden.

Wir fassen die Werte des einen Tatbestandes, der Geborenen, als Abszissenwerte x, die Werte des zweiten Tatbestandes, der Gestorbenen, als Ordinatenwerte y auf und entwerfen von der Anordnung des Ganzen zuerst eine Zeichnung (Abb. 21).

Wir ersehen aus der Zeichnung, daß es sich um eine Häufungsverteilung der y-Punkte handelt, die recht wohl durch eine Gerade ausgeglichen werden könnte. Wir besinnen uns auf deren Formeln nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$1.\ \text{Normalgleichung:}\quad \Sigma y = n \cdot a + b \cdot \Sigma x$$

$$2.\ \text{Normalgleichung:}\quad \Sigma x y = a \cdot \Sigma x + b \cdot \Sigma x^2$$

[1] Statistisches Jahrbuch für den Freistaat Preußen **26**, 44, 55. Berlin 1930.

und gelangen somit für unser Beispiel zu den beiden Normalgleichungen:

1. Normalgleichung: $449{,}9 = 35\,a + 749{,}6\,b$

2. Normalgleichung: $14\,335{,}45 = 749{,}6\,a + 23\,641{,}60\,b$.

Ihre Auflösung führt zu den Werten für $a = -0{,}412328$, $b = 0{,}619439$, somit zu der Gleichung

$$y = -0{,}412328 + 0{,}619439\,x.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Geraden, die bei $x = 0$ den Wert $a = -0{,}412328$ hat und mit einer Neigung

$\operatorname{tg}\alpha = b = 0{,}619439$

ansteigt.

Eine solche Richtung der Geraden entspricht positiver Korrelation (kleine y-Werte mit kleinen x-Werten, große y-Werte mit großen x-Werten verbunden). Wäre b negativ, so würde das einer absteigenden Geraden entsprechen, also negative Korrelation ausdrücken (große y-Werte mit kleinen x-Werten, kleine y-Werte mit großen x-Werten verbunden). Wäre $b = 0$, die Gleichung also von der Form $y = a$, so wäre das der Ausdruck für eine zur Abszissenachse parallel, also horizontal verlaufende Gerade. Sie würde ausdrücken, daß die y-Werte von der Höhe des x unabhängig sind, daß also keine Korrelation vorliegt.

Berechnung der mittleren Abweichung S_y der beobachteten von den ausgeglichenen Werten.

Regierungsbezirk	Beobachtete Zahl der Sterbefälle in Tausenden y'	Berechnete Zahl der Sterbefälle in Tausenden y	$(y' - y)$ d	$(y' - y)^2$ d^2
	1	2	3	4
1	12,2	12,472	− 0,272	0,073984
2	6,8	7,145	− 0,345	0,119025
3	6,9	8,755	− 1,855	3,441025
4	3,5	3,552	− 0,052	0,002704
5	16,3	13,339	+ 2,961	8,767521
6	16,2	14,516	+ 1,684	2,835856
7	49,6	27,524	+ 22,076	487,349776
8	11,6	11,853	− 0,253	0,064009
9	7,8	9,065	− 1,265	1,600225
10	3,4	3,180	+ 0,220	0,048400
11	3,9	4,357	− 0,457	0,208849
12	25,7	24,861	+ 0,839	0,703921
13	15,7	15,260	+ 0,440	0,193600
14	19,8	23,436	− 3,636	13,220496
15	16,2	14,330	+ 1,870	3,496900
16	17,0	18,976	− 1,976	3,904576
17	6,6	6,649	− 0,049	0,002401
18	16,9	16,932	− 0,032	0,001024
19	9,1	7,702	+ 1,398	1,954404
20	7,0	6,773	+ 0,227	0,051529
21	6,5	6,525	− 0,025	0,000625
22	4,7	4,977	− 0,277	0,076729
23	4,7	6,092	− 1,392	1,937664
24	3,2	4,048	− 0,848	0,719104
25	15,9	23,126	− 7,226	52,215076
26	8,7	10,056	− 1,356	1,838736
27	25,8	32,108	− 6,308	39,790864
28	11,7	12,968	− 1,268	1,607824
29	14,6	12,968	+ 1,632	2,663424
30	9,3	9,932	− 0,632	0,399424
31	40,6	44,683	− 4,083	16,670889
32	16,8	16,189	+ 0,611	0,373321
33	5,8	6,463	− 0,663	0,439569
34	8,5	8,693	− 0,193	0,037249
35	0,9	0,393	+ 0,507	0,257049

$$\Sigma d^2 = 647{,}067672$$

$$\frac{\Sigma d^2}{N} = 18{,}487648$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = 4{,}2997\,.$$

Der nächste Schritt unserer Rechnung ist der, daß wir in einem Tabellchen neben die wirklich beobachteten y-Werte die nach der analytischen Gleichung berechneten ausgeglichenen Werte setzen, und daß wir die Differenz d und deren Quadrate d^2 für jeden einzelnen Fall berechnen. (Vgl. die obige Tabelle.)

Die mittlere Abweichung der beobachteten Werte von den ausgeglichenen ist somit

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = 4{,}300\,.$$

Ist, wie in der Mehrzahl der Fälle, die Ausgleichungsgerade so gezogen, daß sich die beobachteten Werte um sie wie zufällige Abweichungen gruppieren, folgen also die Abweichungen der Anordnung einer Normalkurve, so ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,997 zu erwarten, daß alle Beobachtungen innerhalb eines Gürtels von $\pm 3\,S_y$ oberhalb und unterhalb der Geraden liegen werden. Es ist dies bei unserem Beispiel 34mal der Fall[1]. Für die praktische Statistik hat die Kenntnis von S_y also den Wert, daß wir dann, wenn wir die Gleichung der ausgeglichenen Geraden kennen, von ihr aus für jedes beliebige x einen Schätzungswert mit seinen Fehlergrenzen $\pm 3\,S_y$ ermitteln können. Außer S_y können wir für die beobachteten y-Werte natürlich auch σ_y vom arithmetischen Mittel aus berechnen. Dieses σ_y wird in aller Regel größer sein als S_y, da es von einem starren Mittelpunkt berechnet ist, während S_y gewissermaßen von einem gleitenden Mittelpunkte berechnet wurde, der der Änderung der y bei wachsendem x Rechnung trug. In unserem Falle beträgt $\sigma = 10{,}0832$. (Über die Berechnung vergl. S. 81f.) Auch das arithmetische Mittel $A_y = 12{,}8543$ würde, wenn wir von der Korrelation zwischen den y und x keine Kenntnis genommen hätten, einen Anhaltspunkt für eine Schätzung bieten. Wir müßten als wahrscheinlichsten Wert für das irgend einem beliebigen x entsprechende y den Wert des arithmetischen Mittels annehmen, mit den Fehlergrenzen $\pm 3\,\sigma = 30{,}2496$. Eine solche Schätzung wäre, wie ersichtlich, viel ungenauer.

Es ist nun naheliegend, das Verhältnis dieser beiden Streuungen $\frac{S_y}{\sigma_y}$, d. i. der Streuung der y-Werte hinsichtlich der ausgeglichenen Werte und der Streuung der y-Werte an sich, zu einem Maß für die Stärke der Korrelation zu verwenden. K. Pearson hat dies getan, indem er der schon auf anderem rechnerischen Wege (vgl. weiter unten) gefundenen Korrelationsziffer r die Form gab $r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$. In diesem Maße finden wir das erwähnte Verhältnis in quadratischer Form, und zwar als Subtrahenden. Der Wert von r wird zwischen 0 und 1 zu suchen sein. Den Wert 0 wird der Ausdruck annehmen, wenn S_y^2 und σ_y^2 einander gleich werden. Dies wird offenbar nur dann zutreffen können, wenn sich alle y-Beobachtungen als Abweichungen von einer horizontal verlaufenden ausgeglichenen Geraden darstellen.

In dem Maße, als sich die Neigung der Geraden von der Horizontalen entfernt, wird S_y hinter σ_y zurückbleiben, der Wert des Bruches $\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$ also ab-, derjenige von r daher zunehmen. Würde $S_y = 0$, was dann eintreten würde, wenn alle beobachteten y genau auf einer ausgeglichenen Geraden lägen, so würde r den Wert 1 annehmen. Für unser obiges Beispiel errechnen wir

$$r = \sqrt{1 - 0{,}18184503} = 0{,}9045\,.$$

Die hier beobachtete Korrelation ist sehr hoch; sie wird noch höher, wenn wir, wie im folgenden (S. 150) Berlin weglassen. Die hohe Korrelation kommt nicht nur davon, daß zwischen den Zahlen der Geborenen und Gestorbenen ein Zusammenhang besteht, sondern auch davon, daß die Größe des Erhebungsbezirkes auf die Zahl der Geborenen und Gestorbenen gleichzeitig einen Einfluß nimmt.

---

[1] Eine Abweichung: Berlin. Vgl. dazu unten S. 150.

Die geschilderte Bewegung von 0 zu 1 ist sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite möglich. Das Vorzeichen von r wird jeweils durch das Vorzeichen von b in der Gleichung bestimmt.

In der praktischen Durchführung ist es nicht notwendig, zwecks Errechnung des S_y jede einzelne Abweichung und ihre Quadrate usw. zu berechnen, sondern man kann von der Formel Gebrauch machen[1]

$$S_y^2 = \frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma x y}{N}.$$

In unserem Falle nimmt diese Formel die Gestalt an

$$S_y^2 = \frac{9341{,}49 + 185{,}506367 - 8879{,}936813}{35},$$

daher $S_y^2 = 18{,}487416$.

Durch Einsetzung dieser Formel in die Formel von r ergibt sich auch die Möglichkeit, dieses unter Umgehung der Berechnung von S_y^2 zu bestimmen. Es ergibt sich die Formel

$$r^2 = \frac{a\Sigma y + b\Sigma x y - N c_y^2}{\Sigma y^2 - N c_y^2},$$

worin c_y der Abstand des gewählten Einfallspunktes des Koordinatensystems vom arithmetischen Mittel der y ist. Ist der Einfallspunkt gleichzeitig der Nullpunkt der Reihe der beobachteten (nicht ausgeglichenen) y, so ist c_y gleich A_y, dem arithmetischen Mittel der y.

Im vorliegenden Falle wäre c_y somit 12,8543.

$$r^2 = \frac{-185{,}506367 + 8879{,}936813 - 5783{,}143415}{9341{,}49 - 5 \times 703{,}143415}.$$

Die Durchführung der Berechnung ergibt für $r^2 = 0{,}818157$ und für $r = 0{,}9045$, ganz wie oben. Für diese abgekürzte Berechnung war es oben auf S. 140 notwendig, auch das y^2 in Spalte 5 zu berechnen.

In der Theorie und Praxis der Statistik wird das dargestellte Verfahren, das wir wegen seiner Durchsichtigkeit hier vorgeführt haben, dadurch vereinfacht und abgekürzt, daß man den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Punkt des arithmetischen Mittels der y und der x verlegt. Da unter diesen Umständen $\Sigma x = 0$, $\Sigma y = 0$ ist, bleibt von den oben (S. 140) angeführten Normalgleichungen nur ein Rest der zweiten übrig,

$$\Sigma x y = b\Sigma x^2,$$

woraus $b = \frac{\Sigma x y}{\Sigma x^2}$ folgt.

Die oben dargestellte Formel für r^2 verwandelt sich, im Hinblicke darauf, daß unter dieser Voraussetzung auch $c_y = 0$ wird, in

$$r^2 = \frac{b\Sigma x y}{\Sigma y^2}.$$

Bei Einsetzung des obigen Ausdruckes für b und unter Berücksichtigung dessen, daß $\Sigma x^2 = N\sigma_x^2$ und $\Sigma y^2 = N\sigma_y^2$ ist, folgt für $r = \frac{\Sigma x y}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$ und, wenn $\frac{\Sigma x y}{N} = p$ gesetzt wird, erhalten wir schließlich

$$r = \frac{p}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

[1] Vgl. die Ableitung bei Mills: a. a. O. S. 377f.

Dies ist die üblichere, auf BRAVAIS zurückgehende Fassung der Formel der Korrelationsziffer.

Da die Wahl des wirklichen arithmetischen Mittels als Ausgangspunkt der Betrachtung unbequem ist, wählt man irgendeinen runden, rechnerisch bequemeren Wert anstelle des arithmetischen Mittels. Sind x' und y' die Ordinaten von dem neuen Hilfsursprung aus, c_x und c_y die Abstände der arithmetischen Mittel von diesem Hilfsursprung, dann errechnen sich $p' = \frac{\Sigma x' y'}{N}$ und $p = p' - c_x c_y$.

Desgleichen muß in der bereits genannten Weise (S. 82) auf die Verlegung des Ausgangspunktes bei der Berechnung von σ_x und σ_y Rücksicht genommen werden. Es ist darnach

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} - c_x^2}\,, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N} - c_y^2}\,.$$

Wir wollen an unserem obigen Beispiel der Geburten und Sterbefälle in 35 preußischen Regierungsbezirken den Rechnungsvorgang veranschaulichen. Da dort der Nullpunkt der Geburtenreihe auch der Nullpunkt unseres Koordinatensystems war, ist jetzt, da wir den Nullpunkt durch das arithmetische Mittel der Geburtenreihe legen, der Abstand des Nullpunktes der Geburtenreihe (des Hilfsursprunges unserer Rechnung) vom arithmetischen Mittel c_x gleich diesem selbst $= 21{,}4171$. Ähnlich ist $c_y = A_y = 12{,}8543$. Die x' sind jetzt die früheren x, die y' die früheren y. Wir können daher das oben berechnete Produkt Σxy jetzt als $\Sigma x'y'$ verwenden, ebenso die Summe Σx für $\Sigma x'$ und die Summe Σy für $\Sigma y'$. So erhalten wir

$$p' = \frac{\Sigma x' y'}{N} = \frac{14\,335{,}45}{35} = 409{,}584286\,,$$

$$p = p' - c_x \cdot c_y = 409{,}584286 - 275{,}302081 = 134{,}282205\,,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N} - c_y^2} = \sqrt{\frac{9\,341{,}49}{35} - 165{,}232629} = \sqrt{101{,}667045} = 10{,}0832\,.$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} - c_x^2} = \sqrt{\frac{23{,}641{,}60}{35} - 458{,}694014} = 14{,}7234\,.$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = 14{,}7234 \cdot 10{,}0832 = 148{,}458987\,,$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{134{,}282205}{148{,}458987} = 0{,}9045 \quad \text{wie oben.}$$

Es ist zu beachten, daß auf diesem Wege, anders als auf dem vorher betrachteten, r zuerst gewonnen wird, während die Gleichung der y und S_y erst aus r abgeleitet wird. Die nach den Methoden der kleinsten Quadrate ausgeglichene y-Gleichung nimmt hier die Form an $y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x$. Es gewinnt die Richtungskonstante b somit den Wert $r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. S_y wird aus der oben mitgeteilten Formel zurückberechnet

$$S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}\,.$$

In unserem Falle ergeben sich folgende Ausrechnungen für y und S_y:

$$y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = 0{,}9045 \cdot \frac{10{,}0832}{14{,}7234} \cdot x = 0{,}6194\,x\,.$$

Die Richtungskonstante $b_1 = 0{,}6194$ stimmt naturgemäß mit derjenigen der oben (S. 141) berechneten Beziehungsgleichung überein.

$$S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 10{,}0832 \cdot \sqrt{1 - 0{,}818165} = 4{,}300 \quad \text{wie oben.}$$

Wir haben im vorausgehenden einen ungruppierten Zahlenstoff für die Korrelationsbetrachtung in der Weise gewonnen, daß wir preußische Regierungsbezirke als statistische Einheiten wählten und die Aussagen über die Zahl der in ihnen vorkommenden Geborenen und Gestorbenen des Jahres 1928 als Merkmale dieser Regierungsbezirke einführten. (Vgl. den ähnlichen Vorgang an den sächsischen Gemeinden S. 64 und 68.) In einer ähnlichen Weise hätten wir für einen einzigen Regierungsbezirk oder für den Freistaat Preußen die Zahlen der Geborenen und Gestorbenen (oder andere einen Zusammenhang aufweisende Tatsachen) für eine Reihe von Jahren nebeneinander stellen können. Das Verfahren der Korrelationsuntersuchung wäre dabei das gleiche geblieben wie oben.

Wirtschaftsstatistische Zeitreihen nehmen wegen der gemeinsamen Grundbedingungen wie wachsende Bevölkerung, Entwicklung der Kaufkraft des Geldes u. dgl. oft eine sehr übereinstimmende Hauptrichtung an, zeigen also positive Korrelation, ohne daß zwischen ihnen ein näherer Zusammenhang herrschte als der erwähnte allgemeine. Man wird dem bei der Beurteilung solcher Gleichläufigkeit Rechnung zu tragen haben.

Für die Korrelationsuntersuchung an den auseinandergelegten Elementen wirtschaftlicher Zeitreihen (vgl. S. 107ff.) sind besondere Verfahren ausgebildet worden, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann[1].

ββ) Durchführung der Korrelationsrechnung an einer in Gruppen gefaßten Masse. Das Bild positiver Korrelation einer in Gruppen gefaßten Masse wird uns durch die Tabelle über die Korrelation der Arbeitslöhne und Arbeitszeit deutscher Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten im Jahre 1928 (S. 137) vermittelt.

Aus der großen Fülle der Punkte, die sich bei 5283 Fällen in einer Darstellung wie oben S. 139 ergeben müßte, ist hier eine beschränkte Anzahl von Gruppenfeldern geworden, die den Zusammenhang der beiden Merkmale zeigen. Trotzdem wir es mit einer ziemlich starken Streuung zu tun haben, also zahlreiche Fälle finden, in denen auch niedriger entlohnte Facharbeiter eine längere Arbeitszeit und hoch entlohnte eine kürzere Arbeitszeit hatten, ist die positive Korrelation, Verbindung kurzer Arbeitszeit mit niedrigem Wochenverdienst, längerer Arbeitszeit mit höherem Wochenverdienst, offenkundig. Die diagonale Anordnung ist hier entgegengesetzt wie im vorausgehenden Falle, weil nämlich die y-Werte (Wochenverdienst) nicht wie dort von unten nach oben, sondern, wie es in der Statistik üblich ist, von oben nach unten angeordnet sind (vgl. hierzu die Fußnote 1 auf S. 146f.).

Die rechnerische Behandlung der Masse erfolgt grundsätzlich in gleicher Weise wie beim nicht gruppierten Material. Wenn die Grundgedanken, die für die Korrelationsmessung an dem ursprünglichen Stoffe (ohne Gruppenbildung) entwickelt wurden, recht verstanden worden sind, kann die Übertragung dieser Grundsätze auf eine in Gruppen gefaßte Masse nicht schwer sein. Wir könnten ja geradezu den Fall so behandeln wie bisher, wobei wir nur jedem einzelnen Werte nicht die Ordinaten x und y, die ihm individuell, vor seiner Einreihung in die Gruppe, zukamen, sondern die Ordinaten x und y der Gruppenmitte zuteilen, in der alle Fälle nach der Einreihung vereinigt gedacht werden (vgl. S. 65). Das folgende Verfahren ist darum nicht etwas von dem vorausgehenden Wesensverschiedenes, sondern es baut sich in entsprechender Weise auf den oben entwickelten Grundgedanken auf.

Das Verfahren an einer in Gruppen gefaßten Korrelationstabelle geht folgendermaßen vor sich. Es werden zunächst für die Summenreihen der x und y die arithmetischen Mittel A_x und A_y berechnet, von diesen aus dann unter Verwertung des

[1] Vgl. hierzu z. B. F. C. Mills: Statistical Methods, S. 410ff., und das dort angegebene Schrifttum.

bekannten Vorteils (S. 82) die σ_x und σ_y. Nun kommt es weiter darauf an, die Σxy zu berechnen. Zu diesem Behufe wird das ganze Feld so geteilt, daß alle Gruppen, die das arithmetische Mittel A_x oder A_y enthalten, das Entfernungszeichen 0 bekommen (vgl. die Tabelle). Das bedeutet, daß wir durch die Mitten dieser Gruppen

Herrichtung der Korrelationstabelle für die Durchführung der Korrelationsberechnung[1].

Brutto-wochenverdienst	Zahl der Wochenarbeitsstunden										
	über 28–32	über 32–36	über 36–40	über 40–44	über 44–48	über 48–52	über 52–56	über 56–60	über 60–64	über 64–68	überhaupt
Über 25,00—30,00 RM .	9	3	—	1	—	—	—	—	—	—	13
	36	*30*	*24*	*18*	—	—	—	—	—	—	
„ 30,00—35,00 „ .	6	20	15	4	—	—	—	—	—	—	45
„	*30*	*25*	*20*	*15*	—	—	—	—	—	—	
„ 35,00—40,00 „ .	2	17	27	18	24	6	2	1	1	—	98
	24	*20*	*16*	*12*	*8*	*4*	*0*	*4*	*8*	—	
„ 40,00—45,00 „ .	—	1	16	24	100	72	61	31	4	—	309
	—	*15*	*12*	*9*	*6*	*3*	*0*	*3*	*6*	—	
„ 45,00—50,00 „ .	—	—	6	18	74	173	209	170	37	—	687
	—	—	*8*	*6*	*4*	*2*	*0*	*2*	*4*	—	
„ 50,00—55,00 „ .	—	—	1	3	23	171	470	322	135	3	1128
	—	—	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*	
„ 55,00—60,00 „ .	—	—	—	—	4	108	437	494	218	9	1270
	—	—	—	—	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	
„ 60,00—65,00 „ .	—	—	—	—	—	32	208	377	388	30	1035
	—	—	—	—	—	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*	
„ 65,00—70,00 „ .	—	—	—	—	—	4	48	109	245	26	432
	—	—	—	—	—	*2*	*0*	*2*	*4*	*6*	
„ 70,00—75,00 „ .	—	—	—	—	—	—	11	27	100	10	148
	—	—	—	—	—	—	*0*	*3*	*6*	*9*	
„ 75,00—80,00 „ .	—	—	—	—	—	—	1	9	44	9	73
	—	—	—	—	—	—	*0*	*4*	*8*	*12*	
„ 80,00—85,00 „ .	—	—	—	—	—	—	7	8	23	7	45
	—	—	—	—	—	—	*0*	*5*	*10*	*15*	
Überhaupt	17	41	65	68	225	566	1464	1548	1195	94	5283

die rechtwinkligen Koordinaten unseres Systems gelegt haben. Der Nullpunkt des Systems liegt in der Mitte derjenigen mittleren Gruppe, die A_x und B_x beherbergt. Es ist damit also das bequeme System der Hilfskoordinaten aufgerichtet, von dem oben die Rede war. Die Abstände c_x und c_y geben die Abstände der beiden arithmetischen Mittel von dem neuen Hilfsursprung an. Nun werden weiter die Abstände der Mittel jedes Feldes von den Achsen des Hilfskoordinatensystems x' und y' ermittelt und miteinander multipliziert ($x'y'$); das ergibt die kursiv gedruckten Zahlen in jedem Feld. Dieses Produkt $x'y'$ ist nun für jedes Feld sovielmal zu nehmen, als darin Fälle vorhanden sind. Dabei werden die so erhaltenen Produkte im 1. und 3. Quadranten positive, im 2. und 4. Quadranten negative Vorzeichen zu erhalten haben[2].

---

[1] Vgl. die Tabelle auf S. 137 und die dort daran geknüpften Anmerkungen.

[2] Die übliche Quadranteneinteilung eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist bekanntlich folgende:

II (−)	I (+)
III (+)	IV (−)

Diese Einteilung gilt allerdings nur für den Fall, daß die Gruppen des x von links nach rechts, die Gruppen des y dagegen von unten nach oben steigend angeordnet sind. Wird dagegen die

Sind alle einzelnen $x'y'z$ gebildet, so wird deren Summe $\Sigma x'y'z$ gewonnen, und das Verfahren bewegt sich weiter in den schon bekannten Bahnen.

Zu beachten ist, daß alle Maße, die aus den Koordinaten x und y berechnet sind, in Gruppeneinheiten ausgedrückt sind. Wir müssen daher bei Berechnung der Korrelationsziffer r auch die dabei verwendeten mittleren Abweichungen der x (σ_x) und der y (σ_y) in Gruppeneinheiten ausgedrückt verwenden.

Diese Berechnung nach Gruppeneinheiten ist allerdings nur dort ohne weiteres zulässig, wo die Gruppen sowohl der Abszissen- als der Ordinateneinteilung gleich sind (wie z. B. in der Tabelle in unserer Lösung zur Aufgabe 8 auf S. 165 je 5%). Sind die Gruppen in einer oder in beiden Richtungen ungleich, so können für die ungleichen Gruppen natürlich nicht die gleichen Entfernungszahlen verwendet werden, sondern es muß dieser Änderung entsprechend Rechnung getragen werden. Würde z. B. für die alljährlich im Statistischen Handbuch des Deutschen Reiches vorkommende Korrelationstabelle des gegenseitigen Heiratsalters der Eheschließenden, die beiderseits zuerst einjährige, dann, in den höheren Altersstufen, 5jährige Altersgruppen aufweist, die Korrelationsziffer berechnet werden, so müßten die Entfernungszahlen für die einzelnen Felder (x' und y') naturgemäß dieser verschiedenen Gruppenbildung angepaßt werden, soferne man nicht vorzöge, alle Entfernungen nicht in Gruppeneinheiten, sondern gleich in Altersjahren (also in der Maßeinheit) auszudrücken.

Sind die Gruppen der x und y zwar untereinander gleich, aber gegenseitig ungleich wie in unserer unten folgenden Tabelle, wo die Gruppen der x von 4 zu 4 Wochenstunden, die Gruppen der y von 5 zu 5 RM fortschreiten, so ist es für die Berechnung der Korrelationsziffer r gleichgültig, ob wir die Rechnung in Gruppeneinheiten oder in Maßeinheiten durchführen; dagegen dürfen bei der Aufstellung der Beziehungsgleichung $y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x$ σ_y und σ_x nur in ihren Maßeinheiten ausgedrückt werden, weil ihr Ausdruck in Gruppeneinheiten hier ein verschobenes Bild ergeben würde. Das gleiche gilt auch für die zweite im nächsten Abschnitt zu besprechende Beziehungsgleichung $x = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y$.

Der Rechnungsgang soll an unserer Tabelle veranschaulicht werden. Die beiden arithmetischen Mittel $A_x = 55{,}8421$ Arbeitsstunden und $A_y = 56{,}3037$ RM, sowie die beiden mittleren Abweichungen $\sigma_x = 1{,}43035$ Gruppeneinheiten $= 5{,}721$ Arbeitsstunden und $\sigma_y = 1{,}73503$ Gruppeneinheiten $= 8{,}675$ RM sind uns schon aus früheren Beispielen und Aufgaben (S. 73, 82 und 85) bekannt.

Da der Hilfsursprung bei $x = 54$ und $y = 57{,}5$ (d. s. die Mitten der Gruppe 52 bis 56 Arbeitsstunden und 55 bis 60 RM) gewählt ist, betragen die Entfernungen des Hilfsursprungs von den beiden arithmetischen Mitteln $c_x = A_x - 54 = 1{,}8421$ Arbeitsstunden $(:4) = +\,0{,}46053$ Gruppeneinheiten, $c_y = A_y - 57{,}5 = -\,1{,}1963$ RM $= -\,0{,}23926$ Gruppeneinheiten.

Nun gilt es $p' = \frac{\Sigma x'y' \cdot z}{N}$ zu berechnen. Wir führen die Rechnung nach den 4 Quadranten getrennt durch (vgl. Fußnote 2 auf S. 146f.).

---

in der Statistik allgemein übliche Anordnung der y steigend von oben nach unten gewählt, dann tauschen der I. und IV., sowie der II. und III. Quadrant ihre Plätze wie folgt:

$$\begin{array}{c|c} \text{III}\,(+) & \text{IV}\,(-) \\ \hline \text{II}\,(-) & \text{I}\ \ (+) \end{array}.$$

Dies muß wegen der richtigen Setzung der Vorzeichen beachtet werden. Im letzteren Falle wird allerdings die Diagonalrichtung der positiven Korrelation absteigend, diejenige der negativen Korrelation ansteigend sein.

I	III	II	IV
1 × 377 = 377	36 × 9 = 324	32	4
2 × 109 = 218	30 × 6 = 180	8	93
. 81	. 48	− 40	340
. 36	. 90		322
. 40	. 500		8
. 776	. 340		24
. 980	. 15		148
600	300		270
352	432		9
230	192		− 1218
90	48		
156	4		
90	18		
108	60		
105	216		
+ 4239	216		
	108		
	9		
	192		
	600		
	296		
	46		
	24		
	216		
	346		
	171		
	+ 4991		

I + 4239	II − 40	+ 9230
III + 4991	IV − 1218	− 1258
+ 9230	− 1258	+ 7972

$\Sigma x' y' \cdot z$ ist somit $+ 7972$, $\quad p' = \frac{\Sigma x' y' \cdot z}{N} = 1{,}50899$,

$$p = p' - c_x c_y = 1{,}50899 + 0{,}11019 = 1{,}61918\,,$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1{,}61918}{2{,}48170} = 0{,}6524\,.$$

Bis hierher konnten wir die Berechnung in Gruppeneinheiten durchführen. Jetzt müssen wir uns darauf besinnen, daß die Gruppen der x und y verschieden groß sind. Wir müssen daher von hier an die σ_y und σ_x in Maßeinheiten ausdrücken (vgl. oben S. 147):

$$y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = 0{,}6524 \cdot \frac{8{,}675}{5{,}721}\, x = 0{,}989\, x\,,$$

$$S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 8{,}675 \cdot \sqrt{1 - 0{,}425626} = 6{,}5748 \text{ RM}\,.$$

$\gamma\gamma$) Die Beziehungsgeraden (Regressionsgeraden). Wir haben bis hierher bei der Aufstellung der Gleichung zweier Merkmale x und y x als die unabhängige, y als die abhängige Veränderliche betrachtet und sind dabei zu der Gleichung gelangt

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x\,.$$

Nun ist aber in Wirklichkeit der Zusammenhang beiderseitig und wir hätten ebensogut y als die unabhängige und x als die abhängige Veränderliche betrachten können. Wir wären in einer ganz ähnlichen Ableitung zu dem Ergebnis gelangt

$$x = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y\,.$$

Die Richtungskonstante dieser Gleichung b_2 ist somit ähnlich gebaut wie die Richtungskonstante b_1 der obigen Gleichung; sie beträgt hier $r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$. Die beiden Geraden, die diesen zwei Gleichungen entsprechen, decken sich nicht. Täten sie es, so wäre der in der Wirklichkeit der Statistik gar nicht denkbare (weil der Streuungseigenschaft widersprechende) Fall der vollständigen Korrelation gegeben. Die beiden Geraden werden in der Regel einen Winkel einschließen, dessen Größe den Grad der Korrelation ausdrückt. Wir können uns nach dem zuletzt betrachteten Beispiele eine Vorstellung von den beiden Beziehungsgeraden machen (Abb. 22). Zu einem rohen Ausdruck der ersten Beziehungsgleichung ($y =$ usw.) gelangen wir, wenn wir für jede Gruppe der x den Durchschnitt der y berechnen. Wir haben in unserer Zeichnung diese Punkte mit kleinen Kreisen (o) eingetragen. In ganz ähnlicher Weise gelangen wir zur obigen Form der 2. Beziehungsgleichung ($x =$ usw.), wenn wir für jede Gruppe der y den Durchschnitt der x berechnen. In der Abbildung sind diese Durchschnitte durch Punkte • ausgedrückt. Die obigen Beziehungsgleichungen selbst sind nichts anderes als die lineare Ausgleichung dieser Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wir könnten also in einer rohen, aber abgekürzten Weise die Beziehungsgeraden und damit auch ihre Gleichungen unmittelbar gewinnen, indem wir in unserer Zeichnung die gewonnenen Punkte graphisch durch eine Gerade ausglichen und die Richtungswinkel α_1 und α_2 mäßen, deren tg aus Tafeln oder durch Abmessung in der Zeichnung berechneten, womit die Richtungskonstante b_1 für die erste Beziehungsgleichung und b_2 für die zweite Beziehungsgleichung gewonnen wäre. Wir hätten damit also die beiden Beziehungsgleichungen $y = b_1 x$ und $x = b_2 y$ ermittelt. Die Korrelationsziffer ergibt sich dann aus den beiden Richtungskonstanten als $r = \sqrt{b_1 b_2}$. Der Sinn der ausgeglichenen Beziehungsgeraden ist schon an dem Beispiel der oben auf S. 141 abgeleiteten y-Geraden dargetan worden. In einer ganz ähnlichen Weise kann aus der gegebenen x-Geraden auf die Werte der x irgendwelcher zugehöriger y geschlossen werden. Freilich ist nicht zu übersehen, daß die x und y in dieser vereinfachten Form der Gleichung die Abstände von den beiden arithmetischen Mitteln bedeuten, daß also die gesuchten Werte erst mittelbar berechnet werden können.

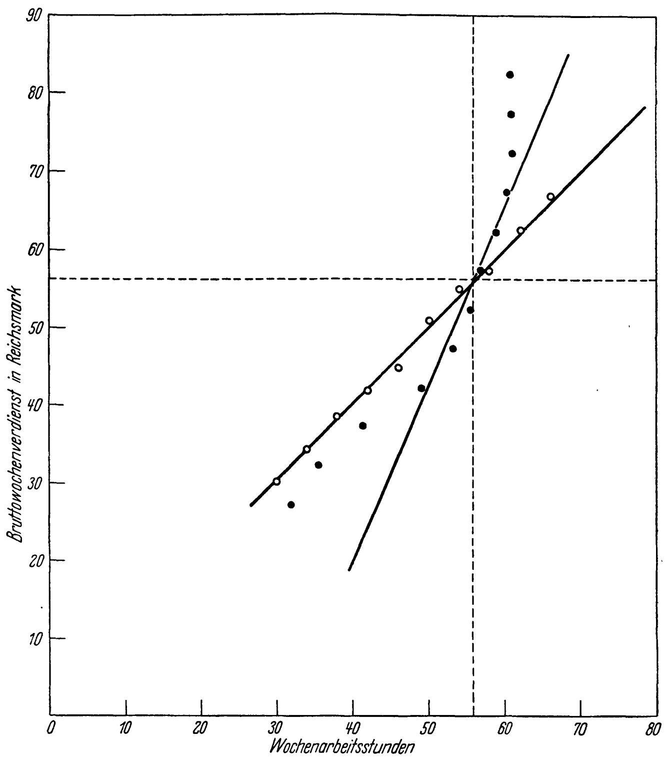


Abb. 22. Darstellung der Beziehungsgeraden der Korrelation zwischen Wochenlohn und Arbeitsstunden der deutschen Facharbeiter in mechanischen und elektrischen Werkstätten.
ooooo Spaltendurchschnitte des Lohnes nach der Arbeitszeit,
••••• Zeilendurchschnitte der Arbeitszeit nach dem Lohne.

Der Name „Regressionsgerade“ stammt von GALTON her, der sich als einer der ersten mit den Fragen der Korrelation von Merkmalen der Eltern und Kinder für die Zwecke der Vererbungsforschung beschäftigte. Der Name selbst ist von einem Beispiel hergenommen, für das er paßte, — GALTON hatte gefunden, daß die Körpergröße der Söhne die Neigung hatte, gegen den Durchschnitt zurückzukehren (to regress), auch wenn die Körpergröße der Väter starke Abweichungen von diesem Durchschnitte zeigte. Der Name ist aber trotz seiner Sinnlosigkeit für alle anderen Fälle geblieben und ins angelsächsische Schrifttum so allgemein übernommen worden, daß an seine Abänderung nicht mehr zu denken ist.

Wollen wir aus unserer Beziehungsgleichung $y = 0{,}989\ x$ einen Wert ermitteln, z. B. den schätzungsweise für 50 Wochenarbeitsstunden durchschnittlich zu erwartenden Wochenverdienst, so müssen wir uns zunächst erinnern, daß x hier die Abstände vom arithmetischen Mittel bedeutet, daß also $x = 50 - 55{,}8421 = -5{,}8421$ ist. Dieser Wert, in die Gleichung eingesetzt, ergibt $y = -0{,}989 \cdot 5{,}8421 = -5{,}7790$. Auch dieser y-Wert ist nur ein Entfernungswert von A_y; wir haben daher noch zu berechnen $56{,}3037 - 5{,}7790$ und erhalten den gesuchten Wert von 50,52 RM. Hierzu berechnen wir noch die Fehlergrenzen in Gestalt von

$$\mp 3\, S_y = 19{,}72 \text{ RM}.$$

Aufgabe 20. Für das in der Lösung zur Aufgabe 8 gefundene Tabellchen der männlichen und weiblichen Wahlbeteiligung in den sächsischen Gemeinden sind die Korrelationsziffer, die Beziehungsgleichungen und die mittleren Abweichungen zu berechnen. Es ist ferner das einer männlichen Wahlbeteiligung von 80% entsprechende durchschnittliche weibliche Wahlbeteiligungsprozent samt Fehlergrenzen zu ermitteln. — Bei der Lösung dieser Aufgabe ist zu beachten, daß hier die einzelnen Gemeinden als gleichwertige Fälle aufgefaßt werden, daß daher das arithmetische Mittel sowie die mittlere Abweichung ohne Berücksichtigung der Einwohnerzahlen berechnet werden kann, was sonst geschehen müßte, wenn es sich etwa darum handelte, den arithmetischen Durchschnitt und die unmittelbare mittlere Abweichung der Wahlbeteiligung der Bevölkerung dieser Gemeinden zu ermitteln, wenn also nicht die Gemeinden, sondern die Personen der Bevölkerung Zähleinheit wären.

$\delta\delta$) Die Bewertung der Korrelationsziffer. Zum Gebrauch der Korrelationsziffer ist noch folgendes zu bemerken: Ihr Wert hängt von der Güte ab, die der zugrunde gelegten linearen Ausgleichung zukommt. Voll berechtigt ist ihr Gebrauch dort, wo die ausgleichende Gerade die tatsächlichen Beobachtungen so durchschneidet, daß sie sich um sie wie zufällige Abweichungen legen. Dies wird dort nicht zutreffen, wo die Beobachtungen sich nicht linear entlang einer Geraden, sondern in einer anderen Weise, z. B. nach Art einer algebraischen Kurve zweiten Grades (vgl. S. 104f.) lagert. In diesem Falle wäre die Wahl einer linearen Ausgleichung ein Grundfehler, der natürlich auch den Wert der auf der Voraussetzung linearer Verbundenheit beruhenden Korrelationsziffer r mindern würde. Über diesen Fall soll noch kurz im weiteren gesprochen werden. Ein anderer in der Praxis häufiger vorkommender Fall ist der, daß die Beobachtungen untereinander nicht gleichwertig sind, daß ihnen also verschiedene Gewichte zukommen, wobei ein Außenfall durch sein Gewicht die Verhältnisse recht entstellen kann. Wenn wir im obigen Beispiele der Korrelation zwischen Geborenen und Gestorbenen den Regierungsbezirk Berlin weglassen, so sinkt die mittlere Abweichung S_y von 4,300 Tausend Gestorbenen auf 1,753, σ_y von 10,083 auf 7,986 und es steigt die Korrelationsziffer r von 0,9045 auf 0,9756. Dabei wird der Einfluß Berlins dadurch abgeschwächt, daß es nur einer von 47 Fällen ist. Unter weniger Fällen würde ein solcher Außenfall von großem Gewicht das Ergebnis der Korrelationsrechnung noch stärker beeinflussen.

Aufgabe 21. Die soeben mitgeteilten Ergebnisse von Geborenen und Gestorbenen ohne Berlin sind rechnerisch zu bestätigen.

γ) *Die nichtlineare Korrelation.* $\alpha\alpha$) Allgemeines. Unter nichtlinearer Korrelation wird derjenige Fall der Korrelation verstanden, in dem die Anordnung der

y (oder in gruppierten Tabellen ihrer Spaltendurchschnitte oder umgekehrt der x oder ihrer Zeilendurchschnitte) eine andere als eine lineare ist. Der einfachste Fall ist der einer einfachen parabolischen Krümmung, die mit Hilfe einer algebraischen Kurve zweiten Grades ausgeglichen werden kann. Der Grundgedanke der Durchführung ist ein ganz ähnlicher wie bei der linearen Korrelation. Es wird durch die einzelnen y-Fälle (oder ihre Spaltendurchschnitte) nach der Methode der kleinsten Quadrate eine algebraische Kurve zweiten Grades gelegt, es werden die Abweichungen der wirklichen Beobachtungen (Gruppendurchschnitte) von den ausgeglichenen Werten festgestellt und aus ihnen in der bekannten Weise S_y berechnet. σ_y ist gleichfalls leicht zugänglich, so daß das Korrelationsmaß, das wir hier zum Unterschiede von dem der linearen Korrelation Korrelationsindex nennen und mit ϱ bezeichnen wollen, ausgerechnet werden kann wie oben r.

$$\varrho = \sqrt{1 - \frac{S_y}{\sigma_y}}\,.$$

Soweit das Grundsätzliche. In der praktischen Durchführung ergeben sich auch Vereinfachungen des rechnerischen Vorganges, auf die jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann.

$\beta\beta$) Das Korrelationsverhältnis. Ein anderes Maß nichtlinearer Korrelation ist das von Karl Pearson gefundene „Korrelationsverhältnis". Es beruht auf einem ähnlichen Gedanken wie die Korrelationsziffer r und der Korrelationsindex ϱ, nur daß die Ausgleichung viel strenger geführt wird, und zwar so, daß die Ausgleichungskurve durch jeden der Gruppendurchschnitte der y gehend gedacht wird (also ähnlich wie bei der Kurvendarstellung oben auf S. 105). Eine Aufstellung der Gleichung selbst ist nicht notwendig, da nur die Gruppendurchschnitte der y für die Berechnung des S_y in Betracht kommen, diese aber bekannt sind. Es wird also auch für diese Rechnung die Formel $\eta = \sqrt{1 - \frac{S_y}{\sigma_y}}$ zu verwenden sein, nur mit dem Unterschiede, daß die Abweichungen nicht auf einen durch die Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen Kurvenpunkt, sondern auf die Spaltendurchschnitte der y berechnet werden. In der praktischen Durchführung wird eine noch einfachere Formel für η verwendet, deren Identität mit der vorausgehenden sich algebraisch leicht nachweisen läßt, nämlich

$$\eta = \frac{\sigma_{A_y}}{\sigma_y}\,,$$

worin σ_{A_y} die mittlere quadratische Abweichung der Reihendurchschnitte der y vom arithmetischen Mittel der y bedeutet. Der Vorgang ist folgender: Es wird für jede Spalte der Spaltendurchschnitt der y berechnet, es werden weiter die Abstände dieser Durchschnitte vom arithmetischen Mittel der y berechnet, quadriert und mit den Häufigkeitszahlen der betreffenden Reihe multipliziert, durch die Gesamtzahl der Beobachtungen dividiert und es wird daraus die Quadratwurzel gezogen. Der erhaltene Wert ist σ_{A_y}. σ_y wird in der bekannten Weise ermittelt, worauf η durch Division gewonnen wird. η nimmt ebenso wie r und ϱ im Falle vollständiger Korrelation den Wert 1 an, wenn $\sigma_{A_y} = \sigma_y$ wird, was nur dann möglich ist, wenn alle Beobachtungen auf der Kurve der Reihendurchschnitte lagern. Im Falle des Fehlens einer Korrelation nimmt η den Wert 0 an, wenn nämlich $\sigma_{A_y} = 0$ wird; das ist dann der Fall, wenn die Reihendurchschnitte mit dem arithmetischen Mittel der y in eine horizontale Gerade fallen. Im Falle nicht vollständiger Korrelation nimmt η einen Wert zwischen 0 und 1 je nach der Stärke der Korrelation an. η hat immer ein positives Vorzeichen. Das Vorhandensein positiver oder negativer Korrelation muß der Gruppierung der Fälle in der Korrelationstabelle entnommen werden. Ein Nachteil von η ist es, daß aus ihm nicht die Beziehungsgleichungen abgeleitet werden können wie aus r. Will man die Gleichung der y hinsichtlich der x-Achse oder diejenige der x hinsichtlich der y-Achse erhalten, so muß diese in einem umständlichen Rechnungsgang besonders berechnet werden.

η wird dort, wo nichtlineare Korrelation vorliegt, infolge der engeren Anschmiegung der als zugrunde liegend gedachten beiden Kurven eine größere Korrelation nachweisen als es r im gleichen Falle infolge seiner minderen Anpassung an den nichtlinearen Verlauf täte. Wird aber η für einen linearen Verlauf berechnet, dann muß es naheliegenderweise mit r eine nahe Übereinstimmung zeigen. Weist also

$$\zeta = \eta - r$$

einen beträchtlichen Wert auf, so ist das ein Kennzeichen dafür, daß nichtlineare Korrelation vorliegt.

Berechnung des Korrelationsverhältnisses η für unsere Korrelationstabelle (S. 137).

Wochenarbeitsstunden (Gruppenmitte) x	Spaltendurchschnitt des Wochenverdienstes in RM A_{y_i}	Abstand der Spaltendurchschnitte vom arithmetischen Mittel der Wochenverdienste $A_y - A_{y_i} = d$	Quadrat des Abstandes d^2	Gruppenbesetzungszahl z	Produkt $z \cdot d^2$
	1	2	3	4	5
30	30,44	$-$ 25,86	668,7396	17	11368,5732
34	34,45	$-$ 21,85	477,4225	41	19574,3225
38	38,73	$-$ 17,57	308,7049	65	20065,8185
42	42,13	$-$ 14,17	200,7889	68	13653,6452
46	44,90	$-$ 11,40	129,9600	225	29241,0000
50	51,17	$-$ 5,13	26,3169	566	14895,3654
54	55,24	1,06	1,1236	1461	1641,5796
58	57,48	+ 1,18	1,3924	1548	2155,4352
62	62,71	+ 6,41	41,0881	1195	49100,2795
66	67,01	+ 10,71	114,7041	94	10782,1854
				5283	172478,2045

$$\sigma_{A_y} = \sqrt{\frac{\Sigma z d^2}{N}} = \sqrt{172\,478{,}2045 : 5283} = \sqrt{32{,}647777} = 5{,}7138$$

$$\eta = \frac{\sigma_{A_y}}{\sigma_y} = \frac{5{,}7138}{8{,}6752} = 0{,}6586\,.$$

Das Korrelationsverhältnis ist also nur ganz unmerklich größer als die Korrelationsziffer. $\zeta = 0{,}6586 - 0{,}6524 = 0{,}0062$. Wir haben es hier somit mit einer linearen Korrelation zu tun, oder, wenn wir die Lage der Stundendurchschnitte in der Abb. 22 betrachten, zwar mit einer etwas nichtlinearen Korrelation, die sich aber sehr gut durch lineare Beziehungsgerade darstellen läßt, um so mehr, als den nichtlinearen Enden der einen Kurve infolge der geringen Besetzungszahlen nur ein geringes Gewicht zukommt.

Aufgabe 22. Für die folgende Tabelle mit einer nichtlinearen Korrelation ist das Korrelationsverhältnis η, die Korrelationsziffer r und der Unterschied der beiden ζ zu berechnen.

Man beachte die Krümmung in der diagonalen Anordnung der Fälle, die schon bei bloßer Betrachtung der Tabelle besagt, daß eine gesteigerte Zufuhr von Stickstoffdünger von einem gewissen Grade an nicht mehr eine entsprechende Steigerung des Ernteertrages bewirkt.

Korrelation zwischen der Weizenernte auf einem acre und der aufgewendeten Menge Stickstoffdünger[1].

Bushels Weizen auf einem acre	Stickstoffdünger in Pfund auf einem acre									
	0 bis 19,9	20 bis 39,9	40 bis 59,9	60 bis 79,9	80 bis 99,9	100 bis 119,9	120 bis 139,9	140 bis 159,9	160 bis 179,9	Summe
0 bis 3,9	8	—	—	—	—	—	—	—	—	8
4 „ 7,9	10	—	—	—	—	—	—	—	—	10
8 „ 11,9	3	5	—	—	—	—	—	—	—	8
12 „ 15,9	—	8	—	—	—	—	—	—	—	8
16 „ 19,9	—	12	—	—	—	—	—	—	—	12
20 „ 23,9	—	—	13	—	—	—	—	—	—	13
24 „ 27,9	—	—	16	19	—	—	—	—	—	35
28 „ 31,9	—	—	1	20	21	8	4	1	—	55
32 „ 35,9	—	—	—	5	16	12	4	5	2	44
Summe	21	25	30	44	37	20	8	6	2	193

δ) *Mehrfache und Teilkorrelation.* Bis hierher haben wir nur den Fall behandelt, daß zwei veränderliche Größen in ihrem Zusammenhang untereinander betrachtet werden. In der Wirklichkeit, besonders im wirtschaftlichen Leben, sind aber die Zusammenhänge oft vielfältiger. Dann ist die bisherige Betrachtung der einfachen Korrelation nur insoweit berechtigt, als die als unabhängige Veränderliche gewählte Tatsache unter anderen gleichzeitig wirkenden Tatsachen einen hervortretenden Rang einnimmt. Ist dies nicht der Fall, dann ist das Verfahren der mehrfachen Korrelation zu verwenden.

Wir können z. B. die Abhängigkeit der Größe eines Fabrikserzeugnisses von der Zahl der Arbeiter und der Stärke der verwendeten motorischen Kräfte prüfen, die Größe des Ernteertrages einer Feldfrucht von der durchschnittlichen Temperatur und der Niederschlagsmenge während der kritischen Zeit usw.

Das Verfahren baut durchaus auf den Grundgedanken der einfachen Korrelation auf. Es soll zunächst eine Beziehungsgleichung gefunden werden, die den gesamten Zusammenhang in den ausgeglichenen Linien richtig ausdrückt. Diese Gleichung hätte, wenn wir z. B. die Erntemenge als abhängige Veränderliche x_1 nehmen, die durchschnittliche Regenmenge der kritischen Zeit als x_2, diejenige der durchschnittlichen Temperaturen mit x_3, die Formel

$$x_1 = a + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 ,$$

worin die Anzeiger 12 und 13 nicht etwa als zwölf und dreizehn gelesen werden dürfen, sondern als eins, zwei und eins, drei und ausdrücken, daß damit die Richtungskonstanten von x_1 in Beziehung auf x_2, im Falle 13 auf x_3 verstanden sind. Die Ausrechnung dieser Gleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfordert wegen der drei unbekannten Konstanten a_1, b_{12} und b_{13} die Aufstellung von drei Normalgleichungen.

Die Berechnung der mittleren Abweichung dieser Beziehungsgleichung $S_{1,23}$ ebenso wie schließlich der Korrelationskoeffizient der mehrfachen Korrelation $R_{1,23}$ erfolgt nach Verfahren, die denen der einfachen Korrelation nachgebildet sind, auf die aber hier nicht näher eingegangen werden kann.

Unter Teilkorrelation versteht man die Korrelation zweier Veränderlichen unter mehreren gegebenen, wobei — ähnlich wie dies der Physiker in seinem Experiment tut — die anderen Veränderlichen als konstant angenommen werden. Für die rechnerische Bearbeitung der Teilkorrelation hat die statistische Theorie Verfahren aufgestellt, auf die hier gleichfalls nicht näher eingegangen werden kann.

[1] Davenport, E.: Comparative Agriculture, in Boiley's Cyclopedia of American Agriculture. Angeführt bei Frederic C. Mills: Statistical Methods, S. 443. 1 acre = 4046,71 m^2; 1 bushel = 35,24 l.

17. Das statistische Schaubild[1].

Hat die statistische Tabelle den Zweck, dem Leser alle Einzelheiten des dargestellten Stoffes zu vermitteln, wobei sich für das geübte Auge unter Umständen, z. B. bei Beurteilung der Kurvengestalt einer zeitlichen oder sachlichen Reihe oder der in einer Tabelle hervortretenden Korrelation, auch ein Gesamtüberblick ergeben kann, so hat das statistische Schaubild nahezu ausschließlich den Zweck, einen solchen Überblick leicht und schnell zu vermitteln. Das Schaubild soll etwas zeigen, darf somit alle Mittel verwenden, die den zu zeigenden Tatbestand recht augenfällig machen. Das statistische Schaubild darf eine Absicht verfolgen, es darf tendenziös sein. Damit verläßt es aber den Boden der strengen Wissenschaft und bildet ein Grenzgebiet der Wissenschaft und Politik (Bevölkerungspolitik, Wirtschaftspolitik, Nationalitätenpolitik usw.). Ein Beispiel soll dies veranschaulichen. Wir können, wie in Abb. 16 auf S. 107, den Geburtenrückgang als Kurve in einem Koordinatensystem darstellen. Für die Wahl der Maßstäbe auf der Abszissen- und der Ordinatenachse kann eine objektive Regel nicht aufgestellt werden. Wählen wir nun den Maßstab auf der Ordinatenachse klein, die Jahresabstände auf der Abszissenachse aber groß, so wird der Rückgang geringfügig erscheinen. Vertauschen wir dagegen das Verhältnis der Maßstäbe, so wird sich ein erschreckender Sturz der Geburten ergeben. Es kann also der gleiche Gegenstand, je nachdem er von einem bevölkerungspolitischen Optimisten oder Pessimisten dargestellt wird, ein ganz verschiedenes Bild liefern. Dieses Beispiel macht uns auch das Verhältnis von Tabelle und Schaubild klar. Niemals darf der Statistiker auf die Tabelle verzichten. Sie ist und bleibt die Grundlage seiner Arbeit. Das Schaubild kommt als ein willkommener Behelf hinzu, indem es manche Zusammenhänge klarer als die Tabelle hervortreten läßt; es kann aber niemals die Zahlentabelle ersetzen. Darum wird der Statistiker in einer ernsten Darstellung manchmal auf ein Schaubild, niemals aber auf die Tabelle verzichten können.

Am häufigsten wird das statistische Schaubild für die Darstellung zeitlicher Reihen verwendet. Die der zeitlichen Reihe entsprechende Darstellungsform ist die Kurvenform. Wir tragen auf die Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die zeitlichen Abstände (Zeiträume) auf und ordnen diesen die beobachteten Größen als Ordinaten zu. Durch die Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten kommt die Kurve zustande (vgl. die erwähnte Abb. 16 und Abb. 15 auf S. 105). Für die Darstellung absoluter Größen (Grundzahlen) wird der gewöhnliche arithmetische Maßstab verwendet, bei dem gleiche Teilstrecken des Maßstabes zur Darstellung gleich großer Massen (oder Massenteile) bestimmt sind. Bedeutet z. B. eine Einheit des Maßstabes 100 Fälle, so bedeutet die nächste Einheit wieder 100 Fälle usw. Soll aber auf die Darstellung der verhältnismäßigen Änderungen von einem Zeitpunkt zum andern Gewicht gelegt werden, so bedient man sich des logarithmischen Maßstabes: gleiche Teile der Ordinatenachse entsprechen dann nicht gleichen Massen oder Massenteilen, sondern gleichen Logarithmen dieser. Bedeutet z. B. die erste Teilstrecke des Maßstabes 50 bis 100 Fälle, so umfaßt die zweite gleiche Teilstrecke nicht 100 bis 150 Fälle wie auf der arithmetischen Skala, sondern 100 bis 200, die dritte 200 bis 400, die vierte 400 bis 800 Fälle usw. Es wird dann

[1] March, L.: Les Représentations Graphiques et la Statistique Comparative, in Journ. de la Soc. de Stat. de Paris **45** (1904), 407ff. Auerbach: Die graphische Darstellung, Leipzig 1918. Karsten, G. u. Breazuell: Graphic Representation. New York 1922. Brinton, Willard C.: Graphic Methods for presenting facts. New York: The Engineering Magazine Company 1923. Mills, F. C.: Statistical Methods, 11—60. Mortara, G.: Nozioni elementari sull' impiego delle representazione grafiche nella statistica, in Giorn degli Econ., Rom **45**, H. 11 (1930), Beilage 1—35. Ein reiches Anschauungsmaterial findet sich auch in den Anhängen zu den Stat. Jahrbüchern des Deutschen Reichs, der Monatsschrift Wirtschaft und Statistik, ferner auch bei W. Woytinsky: Die Welt in Zahlen. 7 Bände. Berlin 1925 bis 28.

eine Vermehrung von 400 auf 800 in der gleichen Steigerung, also in dem gleichen Ausmaß erscheinen wie eine von 50 auf 100 oder von 100 auf 200. Das Gemeinsame ist hier die Vermehrung um 100%, die immer durch das gleiche Ausmaß an Steigerung ausgewiesen wird, auf welcher Ebene immer sie sich ergeben mag. Andererseits wird eine Steigerung von 20 auf 30, also um 50%, doppelt so stark zum Ausdruck kommen als eine solche von 200 auf 250, d. i. um 25%. Das Grundsätzliche der Darstellung dürfte aus der Abb. 12 auf S. 102 klar werden, wo der logarithmische Maßstab sowohl für die Abszissen- als auch die Ordinatenachse angewendet wurde (doppelte logarithmische Darstellung.) Für die Ausführung solcher logarithmischer Darstellungen ist eigenes „Logarithmenpapier" im Handel erhältlich.

Das Kurvenschaubild ist aber nicht etwa eingeschränkt auf die Darstellung zeitlicher Reihen, sondern es kann sehr wohl auch für sachliche Zusammenhänge verwendet werden, freilich immer nur solcher Art, bei denen ein Fortschreiten auf der arithmetischen Zahlenreihe erfolgt (vgl. z. B. Abb. 13 auf S. 103).

Die zweithäufigst verwendete Form des Schaubildes ist das Stäbchenschaubild, das dort Anwendung findet, wo nicht in Entwicklung begriffene, sondern nebeneinander als ruhend gedachte Größen dargestellt werden sollen (vgl. die zahlreichen „Häufigkeitspolygone" im Text, z. B. S. 95). Die Anwendung solcher Stäbchenbilder ist nicht etwa eingeschränkt auf die Darstellung von Massenausgliederungen wie in den gezeigten Beispielen, sondern auch möglich für örtliche oder sachliche Nebeneinanderstellungen gleichartiger Massen (z. B. für einen Vergleich der Geburten-, Sterbe- und Geburtenüberschußziffern verschiedener Staaten).

Eine Abart der Stäbchendarstellung liegt darin, daß nicht durch die verschiedene Länge der Stäbchen eine Größenverschiedenheit, sondern durch die verschiedene Einteilung gleichlanger Stäbchen eine verschiedene relative Ausgliederung veranschaulicht werden soll. Von da führt ein Schritt zum Flächenbild, in dem gleichzeitig der Umfang einer Masse und ihre Ausgliederung durch die Größe der Fläche und ihre Einteilung zum Ausdruck gebracht werden kann. Es werden hier die verschiedensten Flächenformen, Quadrate, Rechtecke, Kreise als Ausdrucksmittel verwendet. Besonders beliebt sind die Kreise. Die ausgegliederten Teile erscheinen dann als Sektoren, die Gliederungsprozente als Zentriwinkel. Bei Kreisbildern darf nicht übersehen werden, daß das Auge bei der Beurteilung der Flächengröße zweier Kreise gern die Länge des Halbmessers als Stütze nimmt, dieser aber nur im Verhältnis der Quadratwurzel aus den Flächen sich ändert.

Möglichst zu vermeiden ist die in volkstümlichen Darstellungen so beliebte Verwendung von Menschengestalten für die Bevölkerung, Särgen für die Sterbefälle, Erntegarben für das Ernteausmaß, Bierfässern für den Bierverbrauch u. dgl. Solche Darstellungen verwenden, obzwar vom Leser zwei- oder dreidimensional gesehen und verstanden, als Größenausdruck in der Regel nur eine Dimension, z. B. die Höhe des dargestellten Gegenstandes, weshalb sie falsche Vorstellungen in dem Betrachter erwecken. Die einfacheren Mittel der statistischen Schaubilddarstellung wirken zwar weniger dekorativ, vermitteln aber in der Regel ein richtigeres Bild.

Auf die vielfältige weitere Ausgestaltung der Schaubildertechnik kann hier nicht eingegangen werden. Es sei deswegen auf das einschlägige Fachschrifttum verwiesen.

III. Schluß. Lügt die Statistik[1]?

Wir haben in der vorausgehenden Darstellung das System der theoretischen Statistik entwickelt. Es hat sich gezeigt, wie vielgestaltig und verwickelt die Denkformen der modernen Statistik sind, und wie töricht der Glaube vieler Menschen,

[1] Vgl. auch des Verfassers Referat bei der 10. Jahresversammlung der deutschen statistischen Gesellschaft in Köln 1929, abgedruckt im Allgemeinen statistischen Archiv **19**, 327ff. (1929), dessen Verwertung hier mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers, Präsidenten Prof. Dr. F. Zahn und des Verlages G. Fischer, Jena, erfolgt.

es genüge die Kenntnis der vier einfachen Rechnenoperationen, um ein guter Statistiker zu sein. Die Statistik ist eine, wenn auch junge, so doch bereits reich entwickelte Wissenschaft, die ebenso studiert sein will wie jede andere Wissenschaft. Wir glauben, nicht besser einen zusammenfassenden Überblick über das behandelte Gebiet geben zu können, als indem wir hier eine Antwort auf die viel gestellte Frage geben: „Lügt die Statistik?“

Die folgende Untersuchung über die Lügenhaftigkeit der Statistik soll in drei Teile zerfallen. Sie soll die drei Fragen beantworten:

1. Trifft ein Vorwurf der Lügenhaftigkeit die statistische Wissenschaft, d. h. ist die Statistik der Lüge fähig, wenn sie von kundiger Hand, mit lauteren Absichten gehandhabt wird?
2. Kann die Statistik durch unkundige Handhabung zum Lügen gebracht werden?
3. Kann sie durch unehrliche Handhabung zum Lügen gebracht werden?

1. Trifft ein Vorwurf der Lügenhaftigkeit die statistische Wissenschaft?

Wir müssen hier, da es sich um eine Wissenschaft und nicht um eine Person handelt, unter Lüge jede Aussage verstehen, die objektiv unwahr ist, die also von der „Wirklichkeit“ eine unrichtige Vorstellung gibt. Hier begegnen wir der ersten Schwierigkeit: Was ist „wahr“ an den Tatbeständen der Massen des gesellschaftlichen Lebens? Bekanntlich faßt die moderne Statistik jede statistische Masse, möge sie auch in größter Vollständigkeit erfaßt worden sein, als eine Musterprobe („sample“) aus einer unendlich großen Masse gleicher Wesensbeschaffenheit („Wesensform“) auf, eine Probe, die je nach ihrer absoluten Größe mehr oder weniger dem Einflusse der „Zufallsstreuung“ unterliegt, also eine von der Grundform abweichende Gestalt annimmt (S. 24ff.). Die Theorie berechnet auch die Grenzen, innerhalb deren sich das Schwanken abspielt. Für große Gesamtheiten, solche von 100000 Fällen und mehr, wie sie dem amtlichen Statistiker beinahe immer entgegentreten, ist der Schwankungsspielraum so eng, daß die Abweichung des tatsächlichen Bildes von dem „wahren“ Bilde kaum nennenswert ist. Für kleine Gesamtheiten, wie sie der private Forscher, z. B. der Kliniker, häufig bildet, spielt diese Fehlermöglichkeit schon eine beträchtlichere Rolle. Hier ist die Gefahr einer falschen Aussage gegeben, allerdings mehr für den unerfahrenen Laien, als für den geschulten Statistiker, der die Zufallsfehlergrenzen berechnen und seine Folgerungen aus dem Material danach einrichten kann (S. 35).

Eine zweite Fehlermöglichkeit liegt im betrachteten Stoffe, meist einer Menschenmasse. Menschen sind eigennützig und bequem; sie machen falsche Angaben, wo sie irgendein eigenes Interesse berührt glauben und entziehen sich überhaupt gerne einer nicht für notwendig gehaltenen Arbeit. So werden Volkszählungen unvollständig, weil sich ihnen die Verbrecher, die politischen Flüchtlinge und alle sonstigen, die mit der Behörde nicht gern in eine Berührung kommen, zu entziehen suchen. Die Fragen nach dem Viehstande, nach dem Einkommen und Vermögen, die Fragen nach dem Alter, nach dem Familienstande, nach der Nationalität oder Muttersprache, nach dem Nebenberuf sind bekannte Anlässe zu Verheimlichungen oder Entstellungen. Ganz ähnliche Abweichungen ergeben sich, wenn Vertreter entgegengesetzter Interessen, z. B. Arbeitgeber und Arbeitnehmer, über einen und denselben statistischen Tatbestand befragt werden. Auf Fahrlässigkeit geht das Vergessen der Säuglinge bei Volkszählungen und manche andere Lücke in den Angaben zurück.

Auch diese Fehler sind bis zu einem gewissen Grade unvermeidlich, wenngleich sie durch richtige Handhabung einer Erhebung, Gewährleistung einer genauen Aufnahme und Prüfung, aber auch strenge Geheimhaltung der Einzelangaben auf ein geringeres Maß herabgedrückt werden können. Der erfahrene Bearbeiter wird von dem Vorhandensein des Fehlers wissen; er wird seine Richtung, vielleicht sogar sein annäherndes Ausmaß feststellen können.

Immer bleibt zu bedenken, daß jede Wissenschaft Grenzen hat, die ihrer Erkenntnis gezogen sind, und daß das Gebiet solcher von berührten Empfindlichkeiten beeinflußter Ergebnisse doch ziemlich eingeschränkt ist und an Bedeutung weitaus zurücktritt gegenüber den viel weiteren Gebieten der statistischen Ergebnisse, bei denen die gleiche Fehlerquelle nicht vorliegt.

In eine nahe Nachbarschaft dieser Fehlerquelle gehört diejenige der Schätzungen. Wie der Name sagt, handelt es sich hier nicht um statistische Ergebnisse, die nach allen Regeln der Kunst gewonnen wurden, sondern um einen Ersatz; es muß eben das Fehlen richtig gewonnener Zahlen vermittels eines von gewissen Anhaltspunkten ausgehenden, oft etwas gewagten Induktionsschlusses überbrückt werden. Naturgemäß können zwei Schätzer zu verschiedenen Ergebnissen gelangen, sowohl, wenn sie von verschiedenen Schätzungsgrundlagen, als auch, wenn sie von der gleichen, aber verschieden bewerteten Schätzungsgrundlage ausgehen. Schätzungen sind nicht strenge Statistik, sondern ein Notbehelf dafür. Fehler in ihnen dürfen darum auch nicht der Statistik angerechnet werden.

Nahe bei den Schätzungen stehen die Berechnungen über gewisse Sammelbegriffe, Volkseinkommen, Volksvermögen, Zahlungsbilanz u. dgl. Da die statistischen Unterlagen hierfür in der Regel nur lückenhaft sind, muß das Fehlende durch Schätzungen ergänzt werden. Auch hier können die Ergebnisse, zu denen verschiedene Verfasser gelangen, recht weit auseinander gehen. Trotzdem kann man solchen Aufstellungen, wie den Schätzungen überhaupt, einen Nutzen nicht absprechen. Es ist gewiß besser, von einem Tatbestande eine Rahmenvorstellung zu besitzen, als überhaupt keine.

Ein leidiges Kapitel sind die Zähl-, Rechen-, Schreib- und Druckfehler, die in Anbetracht der Massenarbeit, die sich aus dem Wesen der Statistik ergibt, mit jeder Statistik verknüpft sind. Indessen läßt sich auch hier Abhilfe schaffen. Die Frage dieser Fehler ist eine reine Geldfrage. Wenn wir bei einer Zählung jede einzelne Arbeit gründlich prüfen lassen können, wenn wir neben jeden Auszeichner oder Locher einen Prüfer setzen, der die Arbeit im vollen Umfang prüft, wenn wir jede Rechnung zweimal rechnen, jede Korrektur zweimal lesen lassen können, wenn wir überhaupt so viele Mittel zur Verfügung haben, daß wir den technischen Vorgang möglichst mechanisieren und das notwendige Personal auf Grund einer strengen Auslese einstellen können, so wird auch die Bedeutung dieser Fehler auf ein Mindestmaß herabgedrückt sein.

2. Kann die Statistik durch unkundige Handhabung zum Lügen gebracht werden?

Mit dem Vorausgehenden ist streng genommen der Umkreis der Fehlerquellen, die der Statistik berechtigter- oder unberechtigterweise zur Last gelegt werden können, erschöpft. Ihre Wirksamkeit ist bei einiger Fachkenntnis und Aufmerksamkeit so unbedeutend, daß der Statistik daraus nicht der Vorwurf der Lügenhaftigkeit gemacht werden kann, um so weniger, als jede andere Wissenschaft auch ihre dunkeln Winkel hat, in denen sie Ergebnisse hervorbringt, für die sie nicht mit voller Strenge eintreten kann.

Es gibt aber noch eine ganze Reihe von weiteren Umständen, die infolge von Unkenntnis gewisser Feinheiten der statistischen Begriffs- und Verfahrenswelt als Fehlerquellen der Statistik aufgefaßt werden könnten. Da aus ihnen sehr häufig ein Vorwurf gegen die Statistik abgeleitet wird, müssen sie hier mitbehandelt werden.

In Frage kommen hier vor allem die verschiedenen Möglichkeiten von Begriffs- und Stoffassungen. Eine Besitzstatistik ist keine Betriebsstatistik, eine Statistik der Nationalität keine Statistik der Muttersprache, die Erfassung der anwesenden Bevölkerung nicht die der Wohnbevölkerung usw. Solche verschiedene Begriffs- oder Stoffassungen müssen selbstverständlich zu verschiedenen Ergebnissen führen (S. 132). Hier liegen keine Widersprüche vor, sondern verschiedene Problemstellungen. Ähnlich erklären sich die häufigen Widersprüche der Einfuhrstatistik des einführenden und der Ausfuhrstatistik des ausführenden Staates aus verschiedenen Fassungen der Begriffe „Herkunfts-" und „Bestimmungsland", aus verschiedenen Bewertungsverfahren u. ä.

Neben die Vielheit der Begriffs- und Stoffassungsmöglichkeiten tritt die Vielheit der methodischen Aufarbeitungsmöglichkeiten. So können zwei Bearbeiter des gleichen Stoffes sich zu einer verschiedenen Gruppenbildung entschließen; sie können z. B. bei Herstellung des Berufsverzeichnisses je nach der Auffassung die Hausfrauen unter die Berufstätigen rechnen oder nicht; sie können die erhobenen Doppelsprachigen entweder als eigene Gruppe darstellen oder irgendwie aufteilen oder ganz einer der beiden Sprachen zurechnen. Oder es können zwei Bearbeiter unter den methodischen Wegen, die das Nebeneinanderbestehen von mehreren Mittelwerten, Verteilungsmaßen, von verschiedenen technischen oder logischen Beziehungsmöglichkeiten ergibt, wählen. Das durchschnittliche Heiratsalter ist ein anderes als das häufigste Heiratsalter, die durchschnittliche Abweichung der Preisverteilung eine andere als die mittlere, Sterbeziffern ergeben ein anderes Bild als Sterbewahrscheinlichkeiten, die Gliederungszahlen der Verurteilten nach dem Alter ein anderes Bild als die Beziehungszahlen auf die Lebenden der verschiedenen Altersstufen. Auch hier handelt es sich um verschiedene Problemstellungen, denen verschiedene methodische Mittel und verschiedene Ergebnisse zukommen. Der bearbeitende Statistiker hat die Freiheit, zwischen den Methoden und damit den hinter ihnen stehenden Problemstellungen zu wählen. Hat er das getan, so hat er in der technischen Ausführung und in dem Sinne, der den Ergebnissen zukommt, gebundene Hände. Ich möchte darum auch nicht, wie ZIZEK es in diesem Falle tut, von Willkür sprechen, nur von Freiheit in der Wahl der Problemstellung.

Allerdings liegen besonders auf methodisch noch weniger geklärten Gebieten die Dinge nicht immer einfach und durchsichtig. Die Statistik in ihrer heutigen Gestalt ist eben eine junge Wissenschaft, und ist, wie alle jungen Wissenschaften, über manche Probleme noch nicht zur letzten Klarheit vorgedrungen. So ist es denn auch nicht zu verdenken, daß auch namhafte Verfasser über die wahre Natur von Verschiedenheiten statistischer Ergebnisse im Unklaren bleiben. Als Beispiel möchte ich den in meinem Artikel „Einkommen" im Handwörterbuch der Staatswissenschaften näher dargetanen Streit JULIUS WOLFS mit einer Anzahl von Gegnern über die beste Methode der Messung von Einkommensverschiebungen nach der Einkommenshöhe erwähnen. Es hatte sich herausgestellt, daß JULIUS WOLF mit dem von ihm befürworteten Verfahren der „Aufstiegsprozente" zu anderen Ergebnissen gelangte als die Nebeneinanderstellung der Einkommensgliederung zu den verglichenen Zeitpunkten ergab. Es handelt sich auch hier einfach um zwei verschiedene Problemstellungen, und die ihnen zugehörigen Ergebnisse verhalten sich zueinander etwa wie zwei Aufnahmen einer und derselben Person von verschiedenen Seiten. Keine ist „wahrer" als die andere, noch besteht zwischen ihnen ein Widerspruch.

Andere schwere methodische Fehler könnten leichter vermieden werden: bei der Erhebung die Anwendung unklarer oder verwickelter Begriffe und Stoffassungen, die Stellung von Fragen, die über das Fassungsvermögen eines Teiles der Befragten hinausgehen u. dgl.; bei der Aufarbeitung das bereits erwähnte Ziehen von Schlüssen aus zu kleinen Zahlen, unfachmännische Gruppenbildung, die das eigentliche Bild einer nach einem zahlenmäßigen Merkmal gegliederten Masse entstellt, sinnwidrige

Beziehungen bei Verhältniszahlen, das Übersehen der Gefügeungleichheit zweier durch Mittelwerte oder Verhältniszahlen verglichenen Massen, die Verwendung von Teilergebnissen, die für das zu beurteilende Ganze keine richtige Vertretung darstellen u. ä.

Alle diese Fehler, die aus mangelnder Bildung in der Statistik begangen werden, werden ihr, wieder aus mangelnder Bildung, als „Lügen" zur Last geschrieben. Eine spätere besser unterrichtete Zeit wird hier gerechter urteilen.

Ein Feld, auf dem ein gegebener statistischer Stoff gleichfalls zu verschiedenen Ergebnissen führen kann, ist das der Ausdeutung der Zahlen. Ich meine hier nicht verschiedene Ausdeutungen auf Grund verschiedener Problemstellungen, wie oben im Streite um die richtige Messung der Einkommensverschiebungen, sondern die verschiedene Ausdeutung eines und desselben gegebenen Tatbestandes. So wird z. B. bei dem parallelen Rückgang von Geburtenhäufigkeit und Sterblichkeit von der einen Seite der Sterblichkeitsrückgang als Folge des Geburtenrückganges, von der anderen Seite der Geburtenrückgang als Folge des Sterblichkeitsrückganges hingestellt. Oder es ergeben sich Meinungsverschiedenheiten in der Vorhersage aus einem gegebenen Ablaufe, z. B. der Preiskurve, der Konjunkturgestaltung. Man vergleiche auch die Folgerungen, die Sombart auf der Tagung des „Vereins für Sozialpolitik" in Zürich 1928 in seinem Berichte „Wandlungen des Kapitalismus" aus der laufenden Entwicklung zog, mit den Folgerungen, die Harms zwei Jahre vorher in seinem Berichte „Strukturwandlungen der Weltwirtschaft" gezogen hatte.

In allen Fällen solcher Deutungsverschiedenheiten ist zuerst die Zuständigkeitsfrage aufzuwerfen. Deutungswidersprüche könnten der Statistik — oder richtiger den Statistikern — nur dann zugerechnet werden, wenn der Beurteiler der Zahlen diese Schlüsse auch wirklich als Statistiker zöge. Nun hat der Statistiker auf die von ihm zustandegebrachten Zahlen ohne Zweifel ein weitgehendes Recht. Sie sind sein, weil er die Begriffswelt, auf der sie fußen, die methodischen Verfahren, die sie hervorgebracht haben, kennt wie kein anderer. Und doch gehören die Zahlen schließlich dem Vertreter des Stoffgebietes, dem er sie zur Ausbeutung und Ausdeutung darbringt. Zwischen diesen beiden Strecken unzweideutigen Besitzrechtes liegt ohne Zweifel eine Strecke des Mitbesitzes (S. 131). Der Statistiker ist zuständig, alle formalen Zahlenbewegungen und -unterschiede, also solche, die auf verschiedenen Begriffen oder verschiedenen Verfahren beruhen, aufzuklären („formale Ursachenforschung"). Er ist auch zuständig, diejenigen Mittel, die die statistische Methodik eigens für die Ursachenforschung bereitgestellt hat, zu handhaben, wobei er natürlich auch die Begriffs- und Tatsachenwelt des Stoffgebietes kennen muß. Diese Kenntnis kann ihn dann leicht dazu verleiten, auch materielle Schlußfolgerungen aus den Zahlen zu ziehen. Er muß sich aber dessen bewußt bleiben, daß er in diesem Falle nicht mehr als Statistiker, sondern schon als Vertreter des jeweiligen Stoffgebietes, z. B. bei der Wirtschaftsstatistik als Volkswirt, bei der Kriminalstatistik als Kriminalist, spricht. Irrtümer, die ihm in der materiellen Deutung der Zahlen unterlaufen, belasten darum auch nicht das Schuldkonto der Statistik, sondern dasjenige des behandelten Stoffgebietes.

3. Der böswillige Mißbrauch der Statistik.

Das statistische Denken geht ähnlich wie das logische nach strengen Regeln vor sich. Es bedarf einer ausgiebigen theoretischen und praktischen Schulung, um sie zu beherrschen. Darum gibt es auch so viele Fehlerquellen aus der Unkenntnis der Handhabung dieses Apparates. Wenn wir nun an die Stelle des versehentlichen Fehlers den absichtlichen Fehler setzen, um die Zahlenergebnisse nach einer bestimmten Richtung zu beeinflussen, so haben wir den recht häufigen Tatbestand der böswilligen statistischen Entstellung, der Tendenz-Statistik, vor uns. Sie kann sowohl durch absichtlich unklare oder irreführende Begriffsfassung als auch durch die Art der Erhebung als auch durch die Art der Aufarbeitung und Darstellung der Zahlen bewirkt werden. Die Sprachen- und Nationalitätenstatistik mancher Staaten, die Preisindexstatistik, die private Geschäftsstatistik hat allgemein bekannte Beispiele dafür geliefert. Daß Tendenz-Statistik möglich ist, spricht nicht gegen die Statistik. Es gibt kaum eine Wissenschaft, die nicht zu irgendeinem Zweck gefälscht und mißbraucht worden wäre. Welche Verbiegungen hat nicht die geschichtliche Wahrheit durch „wissenschaftliche" Geschichtsforschung, welche Verdrehungen das Recht durch „wissenschaftliche" Rechtskunde erfahren? Das mathematische Denken ist gewiß ein exaktes Denken; und doch haben wir uns als kleine Knaben gerne damit befaßt, auf streng mathematischem Wege etwa zu beweisen, daß $1 = 0$ ist. Der Unkundige fällt darauf herein, wie der logisch Ungeschulte, dem man unter (angeblicher) Befolgung der strengsten Denkregeln ein X für ein U vormacht. Der Kenner merkt den Trugschluß und deckt den Fehler auf.

Keineswegs berechtigt also der vielfache Mißbrauch der Statistik zu der Aussage: Die Statistik lügt. Sie lügt ebensowenig wie die wissenschaftliche Forschung überhaupt, die Mathematik, Logik, Geschichts- und Rechtskunde. Die Menschen lügen auf allen Gebieten des Lebens, warum denn gerade nicht auf demjenigen der Statistik? Auch hier könnte allerdings eine bessere allgemeine Durchbildung in der Statistik zu einer Einschränkung des Mißbrauches führen.

Die vorangehende Untersuchung hat gezeigt, daß nur ein kleiner Kreis von Fehlern aus dem Wesen der Statistik folgt, der aber durch Achtsamkeit auf ein ganz geringfügiges Maß gebracht werden kann. Die große Menge der Fehlerquellen, die zu dem Vorwurfe der Lügenhaftigkeit der Statistik führen, folgt nicht aus dem Wesen der Statistik, sondern aus der mangelnden statistischen Bildung der Erzeuger und Verbraucher der Statistik und — damit zusammenhängend — aus dem Mißbrauch der Statistik. Mit der statistischen Bildung sieht es bei uns noch ziemlich traurig aus. Nur ganz wenige deutsche Universitäten besitzen statistische Lehrstühle; an anderen wird Statistik zwar gelehrt, aber nur nebenbei von Vertretern anderer Fächer oder nebenamtlich von beruflich überlasteten statistischen Praktikern. Auch mit dem statistischen Prüfungswesen ist es unbefriedigend bestellt. Weite Kreise, die beruflich viel in Berührung mit Statistik kommen, wie z. B. die Verwaltungsjuristen, bleiben dem statistischen Unterrichte an den deutschen Universitäten ganz fern. Hier wird der Hebel anzusetzen sein, wenn wir mit der fehlerfreien Herstellung und Benützung der Statistik, damit auch mit der Achtung vor der Statistik vorwärts kommen wollen.

Anhang.

Aufgabenlösungen.

Aufgabe 1 auf S. 26.

Die Durchführung des aufgegebenen Münzwurfes kann, dem Zufallscharakter der einzelnen Würfe entsprechend, zu den verschiedensten Ergebnissen führen. Ein Beispiel der Durchführung eines ähnlichen Münzwurfes findet der Leser in des Verfassers Bändchen „Statistik", S. 11ff.

Aufgabe 2 auf S. 35.

1. Berechnung von $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}}$.

Körpergröße 164 cm		Körpergröße 165 cm	
λ	λ^2	λ	λ^2
5,8 − 5 = + 0,8	0,64	6,5 − 10 = − 3,5	12,25
− 6 = − 0,2	0,04	− 10 = − 3,5	12,25
− 6 = − 0,2	0,04	− 6 = + 0,5	0,25
− 2 = + 3,8	14,44	− 7 = − 0,5	0,25
− 7 = − 1,2	1,44	− 8 = − 1,5	2,25
− 4 = + 1,8	3,24	− 5 = + 1,5	2,25
− 6 = − 0,2	0,04	− 5 = + 1,5	2,25
− 4 = + 1,8	3,24	− 2 = + 4,5	20,25
− 7 = − 1,2	1,44	− 6 = + 0,5	0,25
	$\Sigma \lambda^2 = 24{,}56$		$\Sigma \lambda^2 = 52{,}25$

$\sigma_{164} = \sqrt{\frac{24{,}56}{8}} = \sqrt{3{,}0700} = 1{,}752.$ $\sigma_{165} = \sqrt{\frac{52{,}25}{8}} = \sqrt{6{,}5313} = 2{,}556.$

Körpergröße 166 cm		Körpergröße 168 cm	
λ	λ^2	λ	λ^2
6,7 − 9 = − 2,3	5,29	6,8 − 4 = + 2,8	7,84
− 4 = + 2,7	7,29	− 10 = − 3,2	10,24
− 7 = − 0,3	0,09	− 6 = + 0,8	0,64
− 10 = − 3,3	10,89	− 5 = + 1,8	3,24
− 6 = + 0,7	0,49	− 8 = − 1,2	1,44
− 4 = + 2,7	7,29	− 9 = − 2,2	4,84
− 7 = − 0,3	0,09	− 9 = − 2,2	4,84
− 8 = − 1,3	1,69	− 6 = + 0,8	0,64
− 8 = − 1,3	1,69	− 3 = + 3,8	14,44
	$\Sigma \lambda^2 = 34{,}81$		$\Sigma \lambda^2 = 48{,}16$

$\sigma_{166} = \sqrt{\frac{34{,}81}{8}} = \sqrt{4{,}3513} = 2{,}086.$ $\sigma_{168} = \sqrt{\frac{48{,}16}{8}} = \sqrt{6{,}0200} = 2{,}454.$

Körpergröße 169 cm		Körpergröße 170 cm	
λ	λ^2	λ	λ^2
$6{,}5 - 9 = -2{,}5$	6,25	$5{,}6 - 3 = +2{,}6$	6,76
$- 6 = +0{,}5$	0,25	$- 3 = +2{,}6$	6,76
$- 9 = -2{,}5$	6,25	$- 7 = -1{,}4$	1,96
$- 5 = +1{,}5$	2,25	$- 4 = +1{,}6$	2,56
$- 6 = +0{,}5$	0,25	$- 6 = -0{,}4$	0,16
$- 13 = -6{,}5$	42,25	$- 6 = -0{,}4$	0,16
$- 5 = +1{,}5$	2,25	$- 10 = -4{,}4$	19,36
$- 6 = +0{,}5$	0,25	$- 5 = +0{,}6$	0,36
$- 5 = +1{,}5$	2,25	$- 3 = +2{,}6$	6,76
	$\Sigma\lambda^2 = 62{,}25$		$\Sigma\lambda^2 = 44{,}84$

$$\sigma_{169} = \sqrt{\frac{62{,}25}{8}} = \sqrt{7{,}7813} = 2{,}790. \qquad \sigma_{170} = \sqrt{\frac{44{,}84}{8}} = \sqrt{5{,}6050} = 2{,}367$$

2. Berechnung von $\sigma_0 = \sqrt{s\,p\,q}$.

$$\sigma_{164} = \sqrt{100 \cdot 0{,}058 \cdot 0{,}942} = \sqrt{5{,}4636} = 2{,}337\,,$$

$$\sigma_{165} = \sqrt{100 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}935} = \sqrt{6{,}0775} = 2{,}465\,,$$

$$\sigma_{166} = \sqrt{100 \cdot 0{,}067 \cdot 0{,}933} = \sqrt{6{,}2511} = 2{,}500\,,$$

$$\sigma_{168} = \sqrt{100 \cdot 0{,}068 \cdot 0{,}932} = \sqrt{6{,}3376} = 2{,}517\,,$$

$$\sigma_{169} = \sqrt{100 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}935} = \sqrt{6{,}0775} = 2{,}465\,,$$

$$\sigma_{170} = \sqrt{100 \cdot 0{,}056 \cdot 0{,}944} = \sqrt{5{,}2864} = 2{,}299\,.$$

3. Vergleich der σ und σ_0 und ihres Durchschnittes.

Körpergrößenstufe cm	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\lambda^2}{n-1}}$	$\sigma_0 = \sqrt{spq}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
164	1,752	2,337	0,750
165	2,556	2,465	1,037
166	2,086	2,500	0,834
167	2,205	2,568	0,859
168	2,454	2,517	0,975
169	2,790	2,465	1,132
170	2,367	2,299	1,030
Durchschn.	2,316	2,450	0,945

Es zeigt sich, daß die σ und σ_0 für die einzelnen Körpergrößenstufen ziemlich große Schwankungen aufweisen, die aber nur durch das Wirken des Zufalls infolge der kleinen Zahl von Beobachtungen (9) hervorgerufen werden. Im Durchschnitt verschwinden diese Schwankungen und die beiden σ zeigen eine erhebliche Annäherung aneinander, was uns zu dem Schlusse berechtigen würde, daß hier eine reine Zufallsstreuung vorliegt, wenn wir dies nicht schon nach dem Verlaufe des Experimentes ohnedies wüßten.

Aufgabe 3 auf S. 38.

Unter 300 Nachkommen müßten nach der Mendelschen Regel ¼ von 300 = 75 weißblühende Erbsen sein. Tatsächlich beobachtet wurden 86; der Unterschied beträgt also 11.

$$\sigma = \sqrt{s\,p\,q} = \sqrt{300 \cdot 1/4 \cdot 3/4} = \sqrt{\frac{900}{16}} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5\,.$$

$$3\sigma = 22{,}5\,.$$

Die Abweichung von der Erwartung beträgt demnach nur etwa die Hälfte des dreifachen σ, liegt also noch innerhalb der Zufallsgrenzen. Die Mendelsche Regel ist somit durch die vorliegende Beobachtung nicht widerlegt.

Aufgabe 4 auf S. 40.

$$s_1 = 16089, \qquad p_1 = 0{,}4862,$$
$$s_2 = 15492, \qquad p_2 = 0{,}4830,$$
$$p_0 = \frac{16\,089 \cdot 0{,}4862 + 15\,492 \cdot 0{,}4830}{16\,089 + 15\,492} = 0{,}4846,$$
$$q_0 = 1 - p_0 = 0{,}5154,$$
$$p_0 \cdot q_0 = 0{,}249763,$$
$$\frac{p_0 \cdot q_0}{s_1} = \frac{0{,}249763}{16\,089} = 0{,}000015524,$$
$$\frac{p_0 \cdot q_0}{s_2} = \frac{0{,}249763}{15\,492} = 0{,}000016122,$$
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s_1} + \frac{p_0 q_0}{s_2}} = \sqrt{0{,}000031646} = 0{,}00563,$$
$$3\sigma_v = 0{,}0169,$$
$$p_1 - p_2 = 0{,}4862 - 0{,}4830 = 0{,}0032.$$

Der tatsächlich beobachtete Unterschied $p_1 - p_2$ beträgt somit weniger als ein Fünftel des Höchstunterschiedes, der durch Zufallswirkung zustande kommen könnte; der Unterschied der Anteile der männlichen Personen von den 70jährigen Gestorbenen der Jahre 1927 und 1928 darf also als zufällig betrachtet werden. Es darf somit ein Gleichbleiben der wesentlichen Umstände, die das Geschlechtsverhältnis der 70jährigen Gestorbenen im Jahre 1927 bestimmten, für das Jahr 1928 angenommen werden.

Aufgabe 5 auf S. 53.

Jahr	Im ersten Lebensjahr Gestorbene		p	λ	λ^2
	insgesamt	dar. ehelich			
	1	2	3	4	5
1901	420223	361745	0,861	0,000	0,000000
1902	370799	321055	0,866	0,005	0,000025
1903	404523	351086	0,868	0,007	0,000049
1904	397781	344972	0,867	0,006	0,000036
1905	407996	353342	0,866	0,005	0,000025
1906	374636	324592	0,866	0,005	0,000025
1907	351046	302920	0,863	0,002	0,000004
1908	359022	308680	0,860	− 0,001	0,000001
1909	335430	288202	0,859	− 0,002	0,000004
1910	311458	267171	0,858	− 0,003	0,000009
1911	359522	308765	0,859	− 0,002	0,000004
1912	275571	234544	0,851	− 0,010	0,000100
1913	277196	235272	0,849	− 0,012	0,000144
1914	297382	252844	0,850	− 0,011	0,000121
Durchschn.	353042	303942	0,861		$\Sigma\lambda^2 = 0{,}000547$

$$\sqrt{\frac{\Sigma\lambda^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}000547}{13}} = 0{,}0064867,$$
$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{p \cdot q}{s}} = \sqrt{\frac{0{,}861 \cdot 0{,}139}{353\,042}} = 0{,}0005822,$$
$$Q = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{0{,}0064867}{0{,}0005822} = 11{,}14.$$

Wir haben somit eine beträchtliche übernormale Dispersion zu verzeichnen. Ihre Ursache dürfte zum größten Teil in der ständigen Abnahme des Ehelichenanteils der gestorbenen Säuglinge liegen, der aus folgenden Zahlen klar wird:

	Anteil d. gest. ehel. Säuglinge im Durchschnitt
1901/07	86,47 %
1908/14	85,47 %

Dieser Rückgang ist daraus zu erklären, daß der allgemeine Rückgang der Sterblichkeit den ehelichen Kindern in stärkerem Maße zugute gekommen ist als den unehelichen.

Außer dieser einen Ursache dürfte, wenn auch in viel geringerem Maße, die positive Verbundenheit durch Zwillingsgeburten an der übernormalen Dispersion mitbeteiligt gewesen sein.

Aufgabe 6 auf S. 64.

Die Wahlbeteiligung der weiblichen Wahlberechtigten bei den sächsischen Gemeinderatswahlen 1924 in 85 Gemeinden mit über 1000 Einwohnern.

Von je 100 wahlberechtigten Frauen wählten	Anzahl der Gemeinden	
	gestrichelt	ausgezählt
über 50 bis 55%	I	1
„ 55 „ 60%	II	2
„ 60 „ 65%	III	3
„ 65 „ 70%	卌 I	6
„ 70 „ 75%	卌 卌 I	11
„ 75 „ 80%	卌 卌 卌 卌 I	21
„ 80 „ 85%	卌 卌 卌 卌	20
„ 85 „ 90%	卌 卌 卌 I	16
„ 90 „ 95%	卌	5
Insgesamt		85

Aufgabe 7 auf S. 67.

I. Obergruppen zu je 3 cm:

1. Obergruppenlage Gruppenmitte cm	Zahl der Fälle	2. Obergruppenlage Gruppenmitte cm	Zahl der Fälle	3. Obergruppenlage Gruppenmitte cm	Zahl der Fälle
146	1	148	1	147	1
149	2	151	9	150	6
152	11	154	17	153	14
155	25	157	51	156	32
158	61	160	87	159	77
161	108	163	138	162	126
164	155	166	197	165	170
167	197	169	171	168	198
170	159	172	115	171	131
173	100	175	78	174	85
176	58	178	31	177	46
179	21	181	10	180	15
182	8	184	1	183	5
	906		906		906

II. Obergruppen zu je 5 cm, das arithmetische Mittel in die Mitte genommen.

Gruppenmitte cm	Zahl der Fälle
147	1
152	20
157	79
162	203
167	321
172	195
177	76
182	11
	906

Es zeigt sich, daß bei der Obergruppenbildung von 3 cm-Gruppen die 1. Obergruppenlage, die als Mitte der Mittelgruppe die Gruppe des arithmetischen Mittels (167 cm) wählt, die richtigste Darstellung der symmetrischen Ausgliederung bietet, während die anderen beiden Obergruppenbildungen den irrtümlichen Eindruck einer schiefen Kurve erwecken.

Ebenso wie die erste Obergruppenlage bei der Obergruppenbildung von 3 cm-Gruppen, gibt auch die hier gewählte Obergruppenbildung mit 5 cm-Gruppen die Verteilung richtig wieder, während die vier anderen möglichen Obergruppenlagen eine in Wirklichkeit nicht vorhandene Schiefe der Verteilung vortäuschen würden.

Aufgabe 8 auf S 68.

Die Wahlbeteiligung der männlichen und weiblichen Wahlberechtigten bei den sächsischen Gemeinderatswahlen 1924 in 85 Gemeinden mit über 1000 Einwohnern.

Wahlbeteiligung der Männer je 100	Wahlbeteiligung der Frauen									
	über 50 bis 55%	über 55 bis 60%	über 60 bis 65%	über 65 bis 70%	über 70 bis 75%	über 75 bis 80%	über 80 bis 85%	über 85 bis 90%	über 90 bis 95%	Insgesamt
Zahl der Gemeinden a) gestrichelt.										
Über 70 bis 75% .	I		II				I			4
„ 75 „ 80% .		II		I	II	II				7
„ 80 „ 85% .			I	IIII	卌	卌 III	III	I		22
„ 85 „ 90% .				I	II	卌 IIII	卌 IIII	IIII	I	26
„ 90 „ 95% .					I	II	卌 II	卌 IIII	IIII	23
„ 95 „ 100% .					I			II		3
Insgesamt	1	2	3	6	11	21	20	16	5	85
b) ausgezählt.										
Über 70 bis 75% .	1	—	2	—	—	—	1	—	—	4
„ 75 „ 80% .	—	2	—	1	2	2	—	—	—	7
„ 80 „ 85% .	—	—	1	4	5	8	3	1	—	22
„ 85 „ 90% .	—	—	—	1	2	9	9	4	1	26
„ 90 „ 95% .	—	—	—	—	1	2	7	9	4	23
„ 95 „ 100% .	—	—	—	—	1	—	—	2	—	3
Insgesamt	1	2	3	6	11	21	20	16	5	85

Aufgabe 9 auf S. 76.

$$A = 169{,}421 \text{ cm},$$

$$\sigma = 6{,}483 \text{ cm},$$

$$\sigma_A = \frac{6{,}483}{\sqrt{25875}} = 0{,}04030 \text{ cm},$$

$$3\sigma_A = 0{,}121 \text{ cm}.$$

Das wirkliche arithmetische Mittel ist somit im Spielraum von 169,421 cm $\pm$ 0,121 cm zu denken.

Aufgabe 10 auf S. 76.

Der Unterschied zwischen der durchschnittlichen Körpergröße der amerikanischen und der Mistelbacher Rekruten beträgt

$$169{,}421 \text{ cm} - 166{,}768 \text{ cm} = 2{,}653 \text{ cm}.$$

Die mittlere Abweichung dieses Unterschiedes ist

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2} = \sqrt{0{,}0403^2 + 0{,}1956^2} = 0{,}1997, \qquad 3\,\sigma = 0{,}599 \text{ cm}.$$

Der Unterschied beträgt also mehr als das 13fache von σ. Es ist somit vollständig ausgeschlossen, daß es sich bei dem Unterschiede der beiden Durchschnitte um zufällige Abweichungen von einer gemeinsamen Wesensform handle.

Aufgabe 11 auf S. 80.

1. Berechnung des arithmetischen Mittels (auf doppelte Weise berechnet):

$$A = 55{,}8421 \text{ Stunden}.$$

2. Berechnung des mittleren Wertes:

$$\begin{array}{r} E = 1548 \\ V = 2446 \\ \underline{N = 1289} \\ 5283 \end{array}$$

$$\frac{E + N - V}{2E} = 391 : 3096 = 0{,}1263 \text{ Klasseneinheiten} = 0{,}505 \text{ Stunden}.$$

Untere Gruppengrenze der Einfallsgruppe: 56,00 Std.

$$M = 50{,}51 \text{ Std.}$$

Probe: Der mittlere Fall ist der 2642., das ist der 196. der Einfallsgruppe. Er teilt also die Gruppe im Verhältnis von 195,5 : 1548. Das gesuchte Stück beträgt 0,1263 Gruppeneinheiten = 0,505 Std. wie oben.

3. Berechnung des dichtesten Wertes:
Mittelstück der Verteilung:

	Gruppe	Besetzungszahl
a	52 bis 56 Std.	1464
b	56 „ 60 „	1548
c	60 „ 64 „	1195

$$b - a = +\ 84\,,$$
$$c - b = -\ 353\,,$$
$$(c - b) - (b - a) = -\ 437\,.$$

$$-\frac{b-a}{(c-b)-(b-a)} = -\frac{84}{-437} = +\ 0{,}1922 \text{ Klasseneinheiten} = 0{,}769 \text{ Std.}$$

$$D = 56{,}77 \text{ Std.}$$

Die Mittelwerte liegen in der richtigen Lage zueinander:

$$A = 55{,}84 \text{ Std.}$$
$$M = 56{,}51 \text{ „}$$
$$D = 56{,}77 \text{ „}$$

Die Abstände folgen jedoch nicht der Regel:

$$D - M = 0{,}26,$$
$$M - A = 0{,}67.$$

Es verhält sich also $D - M$ zu $M - A$ wie 0,4 : 1. Auch hier dürfte die Zusammenfassung des Rohstoffes in zu weite Gruppen an der Verletzung der Lageregel schuld sein.

Aufgabe 12 auf S. 85.

1. Mittlere quadratische Abweichung, ohne Vorteil berechnet: $\sigma = \sqrt{32{,}7345} = 5{,}721$ Std.

Mittlere quadratische Abweichung mit Vorteil berechnet (die Gruppenmitte 58,00 als Nullpunkt verwendet): $\sigma = 1{,}43035$ Gruppeneinheiten = 5,721 Std.

2. Einfacher durchschnittlicher Abstand (von der Gruppenmitte 58 aus berechnet).

Unterer Abstand:

$$-\ 4233 : 2446 = -\ 1{,}7306 \text{ Gruppeneinheiten} = -\ 6{,}92 \text{ Std.}$$

Oberer Abstand:

$$+\ 1384 : 1289 = +\ 1{,}0737 \text{ Gruppeneinheiten} = 4{,}29 \text{ Std.}$$

Durchschnittlicher Abstand:

$$5616 : 5283 = 1{,}0630 \text{ Gruppeneinheiten} = 4{,}25 \text{ Std.}$$

3. Viertelwerte und Viertelwertabstände:
Der untere Viertelwert entspricht dem 1320,75., der obere dem 3962,25. Fall.

Berechnung des unteren Viertelwertes:

$$E = 1464, \quad V = 982, \quad N = 2837.$$

$$\frac{E + N - 3\,V}{4\,E} = \frac{1464 + 2837 - 2946}{5856} = +\ 0{,}2314 \text{ Gr.} = 0{,}93 \text{ Std.}$$

Untere Gruppengrenze = 52,00, unterer Viertelwert = 52,93 Std.

Berechnung des oberen Viertelwertes:

$$E = 1548, \quad V = 2446, \quad N = 1289.$$

$$\frac{3 \cdot (E + N) - V}{4\,E} = \frac{6065}{6192} = 0{,}9795 \text{ Gr.} = 3{,}92 \text{ Std.}$$

Untere Gruppengrenze = 56,00, oberer Viertelwert = 59,92 Std.

Unterer Viertelwertsabstand = 56,51 − 52,93 = 3,58 Std.

Oberer Viertelwertsabstand = 56,51 − 59,92 = 3,41 Std.

Die beiden Viertelwertabstände sind also nicht sehr verschieden, was auf eine geringe, sich beinahe der Symmetrie nähernde Schiefe der Verteilung hinweist.

$$\text{Durchschnittlicher Viertelwertsabstand} = \frac{6{,}99}{2} = 3{,}50 \text{ Std.}$$

Aufgabe 13 auf S. 85.

Berechnung der Kurvenschiefe.

a) Mistelbacher Rekruten	b) Lohnverteilung der Facharbeiter	c) Arbeitszeitverteilung der Facharbeiter
$A =$ 166,768 cm	$A =$ 56,304 RM	$A =$ 55,842 Std.
$D =$ 167,100 cm	$D =$ 56,883 RM	$D =$ 56,769 Std.
$\sigma =$ 5,888 cm	$\sigma =$ 8,675 RM	$\sigma =$ 5,721 Std.
$A - D = -$ 0,332 cm	$A - D = -$ 0,579 RM	$A - D = -$ 0,927 Std.
$\frac{A-D}{\sigma} = -0{,}0564$	$\frac{A-D}{\sigma} = -0{,}0667$	$\frac{A-D}{\sigma} = -0{,}1620$.

Die Körpergrößenverteilung der Mistelbacher Rekruten zeigt eine geringe Schiefe der Verteilung, die Lohnverteilung der Facharbeiter eine etwas stärkere, die Arbeitszeitverteilung der Facharbeiter eine schon beträchtlichere.

Aufgabe 14 auf S. 117.

Die ausgeglichenen Zahlen lauten folgeweise:

1,0, 4,3, 17,0, 31,7, 44,7, 49,7, 50,3, 44,3, 31,0, 17,0, 6,7, 2,3.

Die symmetrische Gestalt dieser Fehlerkurve tritt in der ausgeglichenen Form noch deutlicher zutage.

Aufgabe 15 auf S. 119.

$\log x$	$\log y$	$\log x \log y$	$\log^2 x$
3,0792	6,2705	19,3081	9,4815
3,3522	6,0688	20,3438	11,2372
3,6021	5,7024	20,5406	12,9751
3,8129	5,3833	20,5260	14,5382
4,0000	5,3253	21,3012	16,0000
4,1461	4,9350	20,4610	17,1901
4,3118	4,8597	20,9541	18,5916
4,5740	4,6263	21,1607	20,9215
4,8751	4,0899	19,9387	23,7666
Summe 35,7534	47,2612	184,5342	144,7018

1. Normalgleichung: $47{,}2612 = 9 \log A - 35{,}7534\, a$,

2. „ : $184{,}5342 = 35{,}7534 \log A - 144{,}7018\, a$,

$$a = 1{,}20534$$

$$\log A = 10{,}03958$$

$$A = 10\,955\,000\,000$$

$$\log y = 10{,}03958 - 1{,}20534\, x$$

$$y = \frac{10\,955\,000\,000}{x^{1,20534}}.$$

Einkommensgruppen RM.	Zahl der Einkommensbezieher in Tausenden	
	a) beobachtet	b) ausgeglichen
900— 1500	1864,1	2128,6
1500— 3000	1171,7	997,8
3000— 5000	504,0	498,7
5000— 8000	241,7	277,8
8000— 12000	211,5	165,3
12000— 16000	86,1	110,2
16000— 25000	72,4	69,5
25000— 50000	42,3	33,6
50000—100000	12,3	14,6

Aufgabe 16 auf S. 121.

Jahr	Beobachtete Werte y'	Ausgeglichene Werte y	$y' - y$	$(y' - y)^2$	$\frac{(y' - y)^2}{y}$
1871	41,06	40,22	+ 0,84	0,7056	0,018
1880	45,23	45,23	0,00	0,0000	0,000
1890	49,43	50,80	— 1,37	1,8769	0,037
1900	56,37	56,37	0,00	0,0000	0,000
1910	64,93	61,94	+ 2,99	8,9401	0,144
					$\chi^2 = 0{,}199$

$$n' = n + 1 = 6\,, \qquad \left.\begin{array}{ll} \chi^2 = 0 & P = 1{,}0000 \\ \chi^2 = 1 & P = 0{,}9626 \end{array}\right\} \text{Differenz } 0{,}0374.$$

Diese Differenz entspricht einem Argumentsabstande von 1; einem Abstande von 0,199 entspricht daher 0,0074

$$P = 1{,}0000 - 0{,}0074 = 0{,}9926.$$

Es zeigt sich, daß diese Ausgleichung noch immer sehr gut ist, aber etwas weniger gut als diejenige nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Der Wert der Größe des P wird allerdings dadurch beeinträchtigt, daß gemäß dem Verfahren die Abweichungen für zwei Punkte 0 betragen müssen, weshalb die übrigen drei Abweichungen um so größer sein können, um den obigen Durchschnitt zu ergeben. Wir sehen aus diesem Beispiel, daß statistische Maßzahlen niemals mechanisch gedeutet werden dürfen, sondern daß man bei ihrer Beurteilung auf die besondere Lage des Falles Rücksicht nehmen muß. (Ein ähnliches Beispiel vergleiche unten auf Seite 150 bei der Berechnung der Korrelationsziffer für die Geborenen und Gestorbenen in 35 preußischen Regierungsbezirken mit und ohne Berlin.)

Aufgabe 17 auf S. 123.

x	y	A_0, B_0, C_0, D_0	A_1, B_1, C_1	A_2, B_2	A_3
(1871) 0	41,058792	$\mathbf{A_0 = 463918{,}78}$	$\mathbf{A_1 = -2340{,}94}$	$\mathbf{A_2 = 553{,}88}$	$\mathbf{A_3 = -19{,}01}$
(1880) 9	45,234061	$B_0 = 419440{,}90$	$B_1 = 13721{,}50$	$B_2 = -187{,}37$	
(1890) 19	49,428470	$C_0 = 693870{,}80$	$C_1 = 8100{,}55$		
(1900) 29	56,367178	$D_0 = 855881{,}70$			
(1910) 39	64,925995				

$$x = 14;\ x - x_0 = 14;\ x - x_1 = 5;\ x - x_2 = -5;\ x - x_3 = -15\,.$$

$$y_x = y_0 + A_0(x - x_0) + A_1(x - x_0)(x - x_1) + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ A_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$y_{1885} = 41058792 + 463918{,}78 \times 14 + (-2340{,}94) \times 14 \times 5$$
$$+ 553{,}88 \times 14 \times 5 \times (-5) + (-19{,}01) \times 14 \times 5 \times (-5) \times (-15) \doteq \mathbf{47096129}.$$

Aufgabe 18 auf S. 124.

a) gezählte Bevölkerung; b) mittels der Ausgleichungskurve 4. Grades, c) arithmetisch, d) geometrisch, e) mittels der Newtonschen Formel interpoliert.

Jahr	a)	b)	c)	d)	e)
1875	42727360	43,27	42,91	42,86	43,27
1885	46855704	47,09	47,33	47,28	47,09
1895	52279901	52,52	52,90	52,79	52,52
1905	60641278	60,69	60,65	60,50	60,69

Aufgabe 19 auf S. 137.

Bisheriger Familienstand des Mannes	Bisheriger Familienstand der Frau			Zusammen
	ledig	verwitwet	geschieden	
ledig . . .	*BZ* 502640 (+ 3,12%) *UZ* 487449	*BZ* 8550 (+ 49,96%) *UZ* 17088	*BZ* 9701 (− 40,68%) *UZ* 16354	520891
verwitwet .	*BZ* 30691 (−24,10%) *UZ* 40434	*BZ* 8339 (+488,50%) *UZ* 1417	*BZ* 4178 (+207,89%) *UZ* 1357	43208
geschieden	*BZ* 16146 (−25,23%) *UZ* 21594	*BZ* 2373 (+213,47%) *UZ* 757	*BZ* 4557 (+528,55%) *UZ* 725	23076
Zusammen	549477	19262	18436	587175

Die beigesetzten Prozentzahlen lassen die bei der Verheiratung vorliegende Anziehung und Abstoßung des bisherigen Familienstandes der beiden Eheschließenden deutlich erkennen. Die Gesamtprozentzahl der Abweichungen von den Unabhängigkeitszahlen ergibt

$$\frac{100 \cdot (|\delta_1| + |\delta_2| + \cdots |\delta_9|)}{N} = 10{,}35\,\%.$$

Aufgabe 20 auf S. 150.

$$\begin{array}{rl} & \text{Gruppen-einheiten} \quad \text{Prozent} \\ A_x = & \qquad\qquad 78{,}79 \\ A_y = & \qquad\qquad 86{,}38 \\ c_x = & + 0{,}2588 = + 1{,}29 \\ c_y = & - 0{,}2235 = - 1{,}12 \\ \sigma_x = & \quad 1{,}6884 = \quad 8{,}442 \\ \sigma_y = & \quad 1{,}1720 = \quad 5{,}860 \end{array}$$

$$p' = \frac{\Sigma\, x'\, y' \cdot z}{N} = 107 : 85 = 1{,}2588 \text{ Gruppeneinh.}$$

$$c_x \cdot c_y = 0{,}2588 \cdot -0{,}2235 = -0{,}0578 \text{ Gruppeneinh.}$$

$$p = p' - c_x c_y = 1{,}2588 + 0{,}0578 = 1{,}3166 \text{ Gruppeneinh.}$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1{,}3166}{1{,}6884 \cdot 1{,}1720} = +0{,}665.$$

Die Wahlbeteiligung der Männer und der Frauen weist somit eine ausgesprochene positive Korrelation auf.

Berechnung der Beziehungsgeraden.

$$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = 0{,}665 \cdot \frac{5{,}860}{8{,}442} \cdot x\,^1 = 0{,}462\,x,$$

$$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y = 0{,}665 \cdot \frac{8{,}442}{5{,}860} \cdot y = 0{,}958\,y,$$

[1] Zur Berechnung der Beziehungsgleichung könnten hier ebensogut σ_y und σ_x in Gruppeneinheiten verwendet werden, da die Gruppenbreite beiderseitig gleich ist.

$$S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 5{,}860 \sqrt{1 - 0{,}442225} = 4{,}376\,,$$
$$S_y = 4{,}38\,\%\,,$$
$$S_x = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} = 8{,}442 \sqrt{0{,}557775} = 8{,}442 \cdot 0{,}7468 = 6{,}304\,\%\,.$$
$$y = 80\%$$
$$x = ?$$
$$x = 0{,}958\,y$$
$$x = 0{,}958 \cdot 80 = 76{,}64\%$$

Die Sicherheit dieser Schätzung wird durch die Grenzen des dreifachen S_x, das ist $\pm$ 18,91% bestimmt.

Aufgabe 21 auf S. 150.

Durch Subtraktion der in der Übersicht auf S. 140 ausgewiesenen Werte für Berlin von den Endsummen findet man:

$$\Sigma x = 704{,}5 \qquad \Sigma x^2 = 21\,607{,}59 \qquad \Sigma x\,y = 12\,098{,}49$$
$$\Sigma y = 400{,}3 \qquad \Sigma y^2 = 6\,881{,}33$$
$$A_x = c_x = 20{,}7206\,,$$
$$A_y = c_y = 11{,}7735\,,$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} - c_x^2} = \sqrt{206{,}1746} = 14{,}3588,$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N} - c_y^2} = \sqrt{63{,}7761} = 7{,}9860\,,$$
$$p' = \frac{\Sigma x'\,y'}{N} = 355{,}8379\,,$$
$$p = p' - c_x\,c_y = 355{,}8379 - 243{,}9540 = 111{,}8739\,,$$
$$r = \frac{p}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{111{,}8739}{114{,}6694} = 0{,}9756\,,$$
$$S_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 7{,}9860 \sqrt{0{,}048205} = 1{,}7534\,,$$
$$y = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = 0{,}9756\,\frac{7{,}9860}{14{,}3588} = 0{,}5426\,x\,,$$
$$x = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y = 0{,}9756\,\frac{14{,}3588}{7{,}9860} = 1{,}7541\,y\,.$$

Aufgabe 22 auf S. 152f.

Berechnung des r

	Gruppeneinheiten	Maßeinheiten
$A_x =$		69,171 Pfd.,
$A_y =$		25,005 bush.,
$c_x =$	$-$ 0,04145 =	$-$ 0,829 Pfd.,
$c_y =$	$-$ 0,24870 =	$-$ 0,995 bush.,
$\sigma_x =$	1,84035 =	36,807 Pfd.,
$\sigma_y =$	2,29672 =	9,187 bush.,

$$\Sigma x'\,y'\,z = +\,695 \text{ Gr.},$$
$$p' = \frac{\Sigma x'\,y'\,z}{N} = +\,695 : 193 = 3{,}6010 \text{ Gr.},$$

$$c_x c_y = + 0{,}0103 \text{ Gr.},$$

$$p = p' - c_x c_y = 3{,}5907 \text{ Gr.},$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = 4{,}2268 \text{ Gr.},$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \, \sigma_y} = 0{,}850 .$$

Berechnung des η:

$$\sigma_{A_y} = \sqrt{\frac{15\,162{,}769}{193}} = 8{,}864 \text{ bush.},$$

$$\sigma_y = 9{,}187 \text{ bush.},$$

$$\eta = \frac{8{,}864}{9{,}187} = \mathbf{0{,}995} .$$

Berechnung des ζ:

$$\zeta = 0{,}995 - 0{,}850 = \mathbf{0{,}145} .$$

Der erhebliche Betrag des ζ weist auf eine starke Nichtlinearität der Korrelation hin, die auch schon beim bloßen Anblick der Tabelle zu erkennen ist.

Namensverzeichnis.

Sachverzeichnis.

(Die unter mehreren Stellenhinweisen vorkommenden **fettgedruckten** Zahlen bezeichnen diejenigen Stellen, an denen der Gegenstand hauptsächlich behandelt ist.)