Uber Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum.

Habilitationsschrift

eingereicht im Sommer-Semester 1920 der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Hamburgischen Universität

zur

Erlangung der Venia legendi

für

Reine und angewandte Mathematik

von

Dr. Bernard Baule

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1921.

Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum.

Habilitationsschrift

eingereicht im Sommer-Semester 1920 der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Hamburgischen Universität

zur

Erlangung der Venia legendi

für

Reine und angewandte Mathematik

von

Dr. Bernard Baule

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1921.

ISBN 978-3-662-22893-7 ISBN 978-3-662-24835-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-24835-5

Inhalt.

I. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

II. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf die Geometrie im „Riemannschen Raum", in dem die Maßbestimmung dadurch festgelegt wird, daß das Quadrat des Bogenelementes als eine beliebige positiv definite quadratische Differentialform mit veränderlichen Koeffizienten gegeben ist. Es wird unter anderem gezeigt:

1. Nur auf den Flächen mit konstantem Gaußschem Krümmungsmaß gibt es geschlossene Kurven mit konstanter geodätischer Krümmung, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Flächenpunkt zusammenziehen lassen.
2. Nur in den Räumen mit konstantem Riemannschem Krümmungsmaß (Krümmungstensor) haben die geodätischen Kugeln $r =$ konst. in jedem Flächenpunkt dieselbe mittlere Krümmung.
3. Nur in Räumen mit konstantem Gaußschen (skalaren) Krümmungsmaß kann es geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung geben, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Raumpunkt zusammenziehen lassen.

In einer folgenden Arbeit werden verwandte Probleme behandelt[1]).

I. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Problemstellung.

In der euklidischen Ebene kann man den Kreis auf zweierlei Art definieren:

1. als Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte die gleiche Entfernung haben,
2. als Kurve konstanter Krümmung, oder, was auf dasselbe hinausläuft, als Extremale des isoperimetrischen Problems.

Geht man von der ebenen Geometrie zur Geometrie auf einer krummen Fläche über, so behalten beide Arten der Definition ihren guten Sinn, und es fragt sich: Welche Kurve soll man auf der krummen Fläche als „Kreis" bezeichnen, die auf die erste, oder die auf die zweite Art definierte?

Es soll der kurzen Ausdrucksweise halber, entsprechend den beiden Definitionen, zwischen „*Entfernungskreisen*" und „*Krümmungskreisen*" unterschieden werden.

Es liegen die Fragen auf der Hand:

I. Wie muß die Fläche beschaffen sein, damit die Entfernungskreise zugleich Krümmungskreise sind?

II. Wie muß die Fläche beschaffen sein, damit die Krümmungskreise ebenso wie die hinreichend kleinen Entfernungskreise sämtlich geschlossene Kurven sind, jene also vor diesen nichts voraus haben.

Die Fläche werde als analytisch vorausgesetzt.

---

[1]) Die Fragen, die hier und später untersucht werden, sind zum großen Teil von W. Blaschke aufgeworfen worden. Ich will nicht unterlassen, ihm an dieser Stelle für die reichen Anregungen, die ich im letzten Jahr von ihm erfahren habe, zu danken.

§ 2.

Die Metrik der krummen Fläche

kann auf verschiedene Weise gegeben werden. Sie ist einerseits bestimmt, wenn man das Bogenelement ds bezogen auf irgendein Koordinatensystem der Fläche kennt, andererseits, wenn die Gaußsche Krümmung der Fläche als Funktion des Ortes bekannt ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn in einem Flächenpunkte die Krümmung und ihre sämtlichen Ableitungen nach der geodätischen Entfernung r von dem betr. Punkt, K_0, $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}\right)_0$, ..., gegeben sind.

Legt man als Koordinaten auf der Fläche Polarkoordinaten zugrunde, indem man einen beliebigen Flächenpunkt O als Nullpunkt und eine beliebige Richtung in ihm als Nullrichtung wählt und jeden Punkt der Fläche durch seine geodätische Entfernung r von O und durch den Winkel φ bezeichnet, unter dem die den Punkt mit dem Nullpunkt verbindende geodätische Linie im Nullpunkt einläuft, so nimmt das Bogenelement nach Gauß die Gestalt an

$$\underline{ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)\, d\varphi^2\,.} \tag{1}$$

Durch $G(r, \varphi)$ ist dann die Metrik der Fläche vollständig bestimmt. Das Gaußsche Krümmungsmaß $K(r, \varphi)$ der Fläche im Punkte r, φ drückt sich durch $G(r, \varphi)$ folgendermaßen aus:

$$\underline{K(r, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{G(r, \varphi)}} \frac{\partial^2 \sqrt{G(r, \varphi)}}{\partial r^2}}\,. \tag{2}$$

Ist umgekehrt $K(r, \varphi)$ gegeben, so ist (2) eine Differentialgleichung für $\sqrt{G(r, \varphi)}$. Ihre Lösung ist vollständig bestimmt, wenn noch zwei Nebenbedingungen für $\sqrt{G(r, \varphi)}$ vorhanden sind, die die beiden in der allgemeinen Lösung von (2) auftretenden willkürlichen Funktionen von φ festlegen.

Zwei solche Nebenbedingungen für $\sqrt{G(r, \varphi)}$ sind vorhanden. Da im Unendlich-Kleinen jede krumme Fläche als eben angesehen werden kann, jeder Kreis also beim Zusammenschrumpfen seines Radius in einen ebenen Kreis übergeht, so muß der zum Winkel φ gehörige Bogen des Kreises $r =$ konst. in der Grenze $r \to 0$ zu null werden, für jedes φ; und es muß die Änderung des Bogens mit dem Radius in der Grenze $r \to 0$ gleich φ werden für jeden Wert von φ

$$\lim_{r=0} \int_0^{\varphi} \sqrt{G(r, \varphi)}\, d\varphi = 0; \qquad \lim_{r=0} \int_0^{\varphi} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\, d\varphi = \varphi,$$

d. h. es muß

$$(\sqrt{G(r,\varphi)})_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial \sqrt{G(r,\varphi)}}{\partial r}\right)_0 = 1 \tag{3}$$

sein. Diese beiden Nebenbedingungen zu (2) hinzugefügt gestatten $G(r, \varphi)$ aus $K(r, \varphi)$ eindeutig zu bestimmen.

Für $K =$ **konst.** läßt sich die Lösung von (2) sofort hinschreiben. In diesem Falle ist (2) die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung, und es ist, unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen,

$$\underline{\sqrt{G(r,\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\, r).} \tag{4}$$

Ist $K = K(r, \varphi)$ gegeben, so kann man, da nach (3) $(\sqrt{G})_0$ und $\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\right)_0$ bekannt sind, die folgenden Ableitungen von $\sqrt{G}$ an der Stelle 0 aus (2) der Reihe nach berechnen und für $\sqrt{G}$ die Reihenentwicklung im Nullpunkt angeben. Es ist

$$(\sqrt{G})_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_0 = -K_0; \quad \left(\frac{\partial^4 \sqrt{G}}{\partial r^4}\right)_0 = -2\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0, \quad \ldots,$$

sodaß

$$\underline{\sqrt{G(r,\varphi)} = r - \frac{K_0}{3!} r^3 - \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^4 + \ldots} \tag{5}$$

und

$$\underline{ds^2 = dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{K_0}{3} r^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) d\varphi^2.} \tag{6}$$

§ 3.

Die geodätische Krümmung der Kurve $r = r(\varphi)$

bestimmt sich bei bekanntem $G(r, \varphi)$ aus

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{G \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\left(1 + 2\dfrac{r'^2}{G}\right) - \sqrt{G}\, r'' + r' \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial \varphi}}{G^{3/2} \cdot \left(1 + \dfrac{r'^2}{G}\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

Darin bedeutet r' und r'' die erste und zweite Ableitung von r nach φ [2]).

Ersetzt man $\sqrt{G(r,\varphi)}$ durch den gefundenen Ausdruck (5), so bekommt man die geodätische Krümmung der Kurve $r = r(\varphi)$ für die auf die vorliegende Art durch K_0, $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$, … gegebene Fläche.

---

[2]) Die Formel (7) ist aus der Formel von Bonnet für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve (siehe etwa L. Bianchi, Differentialgeometrie 1910, § 76) sofort herzuleiten.

Es ist

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt{G} = r\left(1 - \frac{K_0}{3!}r^2 - \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) \\ \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1 - \frac{K_0}{2}r^2 - \frac{2}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots \\ \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \varphi} = -\frac{2}{4!}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^4 + \ldots \\ G = r^2\left(1 - \frac{K_0}{3}r^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) \\ \frac{1}{G} = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 - \ldots\right) \\ \frac{1}{G^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{K_0}{2}r^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) \end{cases}$$

in (7) eingeführt, wird

$$(9)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\left\{\left(1 - \frac{K_0}{3}r^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{2r'^2}{r^2}\left[1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right]\right)\right.$$
$$\left. - \frac{r''}{r}\left(1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right) - \frac{2}{4!}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r' \cdot r + \ldots\right\}$$
$$\cdot \left\{1 + \frac{r'^2}{r^2}\left(1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right)\right\}.$$

§ 4.

Die Entfernungskreise $r =$ konst.

Die geodätische Krümmung der Entfernungskreise ist nach (9):

$$(10)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{K_0}{3}r^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^3 + \ldots\right\}.$$

Daraus folgt:

Die Entfernungskreise $r =$ konst. haben nur dann konstante geodätische Krümmung, wenn $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0$ von φ unabhängig ist. D. h. aber, im Nullpunkt muß K stationär sein. Da nun der Nullpunkt ganz beliebig auf der Fläche gewählt war, so folgt, daß die Krümmung K auf der ganzen Fläche konstant sein muß. Diese Bedingung ist bekanntlich auch hinreichend.

Nur auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes haben die Entfernungskreise konstante geodätische Krümmung, sind also die Entfernungskreise zugleich Krümmungskreise.

Ihre Krümmung ist

$$(11)\quad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{K}\operatorname{ctg}(\sqrt{K}\,r),$$

bzw. ihr Radius durch ϱ ausgedrückt:

$$(12)\quad r = \frac{1}{\sqrt{K}}\operatorname{arctg}(\sqrt{K}\,\varrho) = \varrho - \frac{K}{3}\varrho^3 + \frac{K^2}{5}\varrho^5 - \ldots$$

§ 5.

Die Krümmungskreise $\frac{1}{\varrho} =$ konst.

Die Gleichung (7) bzw. (9) stellt die Differentialgleichung der Krümmungskreise $1:\varrho =$ konst. dar. Es handelt sich darum, diese Differentialgleichung für eine beliebige Fläche, d. h. ein beliebiges $K(r, \varphi)$ zu lösen.

Im Unendlich-Kleinen ist jede krumme Fläche als eben anzusehen, d. h. im Unendlich-Kleinen fallen auf jeder Fläche die Krümmungskreise mit den Entfernungskreisen zusammen, die ihrerseits in ebene Kreise übergehen. Jede Schar von Krümmungskreisen endet also bei Unendlich-Kleinwerden ihres Parameters ϱ in einer Schar von ebenen Entfernungskreisen. Es gibt somit eine Schar von Krümmungskreisen, die die unendlich kleinen konzentrischen Kreise um den Nullpunkt in sich enthält. Diese Schar hat die Gleichung

$$(13) \qquad \underline{r = \varrho + b(\varphi)\varrho^2 + c(\varphi)\varrho^3 + d(\varphi)\varrho^4 + \ldots,}$$

worin $b(\varphi)$, $c(\varphi)$, $d(\varphi)$, ... noch unbekannte Funktionen von φ sind. Es handelt sich für uns darum, diese Funktionen zu bestimmen und festzustellen, wie die Fläche, d. h. das $K(r, \varphi)$, beschaffen sein muß, damit sie alle periodisch sind in φ mit der Periode 2π; nur dann sind die durch (13) dargestellten Krümmungskreise nach einem Umlauf geschlossen.

Gehen wir mit (13) in die Differentialgl. (9) hinein, so bekommen wir eine Identität in ϱ, und eine Koeffizientenvergleichung liefert uns die erforderlichen Differentialgleichungen für unsere unbekannten Funktionen $b(\varphi)$, $c(\varphi)$, $d(\varphi)$, ...

Zunächst sei jedoch der kürzere Ansatz: $r = \varrho + b(\varphi)\varrho^2$, $r' = b'(\varphi)\varrho^2$; $r'' = b''(\varphi)\varrho^2$, in (9) eingeführt. Indem wir demgemäß alle höheren als 1. Potenzen von ϱ gegen 0. Potenzen vernachlässigen, erkennen wir sofort, daß alle die Glieder in (9), die von der Krümmung der Fläche herrühren, nicht in Wirkung treten. Es wird einfach

$$(14) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\{1 - (b + b'')\varrho + \ldots\},$$

d. h. in zweiter Näherung ist die Geometrie der Fläche noch als euklidisch anzusehen, was man übrigens auch direkt aus dem Linienelement (6) hätte entnehmen können.

$b = 0$ ist eine Lösung der aus (14) folgenden Differentialgleichung

$$\text{I.} \quad b'' + b = 0.$$

Wir dürfen also für die Lösung der Differentialgl. (9) den Ansatz machen:

(15) $$\underline{r = \varrho + c(\varphi)\varrho^3 + d(\varphi)\varrho^4 + \dots}$$

Gehen wir nunmehr mit diesem Ansatz (15) in die Gl. (9) hinein, so wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}(1 - c\varrho^2 - d\varrho^3 - \dots)\Big\{\Big(1 - \frac{K_0}{3}\varrho^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 \varrho^3 + \dots\Big)(1 + (\varrho^4) + \dots)$$
$$- \varrho^2(c'' + d''\varrho + \dots)(1 - c\varrho^2 - d\varrho^3 - \dots)\Big(1 + \frac{K_0}{3}\varrho^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 \varrho^3 + \dots\Big)$$
$$- (\varrho^4) + \dots\Big\} \cdot \{1 + (\varrho^4) + \dots\}$$

(16) $$\underline{\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\Big\{1 - \Big(c + c'' + \frac{K_0}{3}\Big)\varrho^2 - \Big(d + d'' + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0\Big)\varrho^3 - \dots\Big\}.}$$

Wir bekommen somit für $c(\varphi)$ und $d(\varphi)$ die Differentialgleichungen:

(17) $$\begin{cases} \text{II.} \quad c'' + c = -\dfrac{K_0}{3}, \\ \text{III.} \quad d'' + d = -\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{\partial K}{\partial r}\Big)_0. \end{cases}$$

Die Gleichung II hat wie I nur periodische Lösungen in φ von der Periode 2π. Sie sagt aus, daß in 3. Näherung jede Fläche als Fläche konstanter Krümmung angesehen werden kann (vgl. (12)). Die Gleichung III dagegen hat keine periodische Lösung mehr. III ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung mit Resonanz. Da nämlich $K(r, \varphi)$ eine Ortsfunktion ist, so hat $\frac{\partial K}{\partial r}$ an jeder Stelle in einer Richtung einen Maximalwert und in jeder zu dieser Richtung unter einem Winkel φ geneigten Richtung den Wert $\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\text{Max}} \cdot \cos\varphi$. Es ist also

(18) $$\text{III.} \quad d'' + d = -\frac{1}{4}\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\text{Max}} \cdot \cos\varphi;$$

ihre Lösung ist:

(19) $$\underline{d = -\frac{1}{8}\left|\frac{\partial K}{\partial r}\right|_{\text{Max}} \cdot \varphi\sin\varphi + A\cos\varphi + B\sin\varphi.}$$

Es muß also, damit III eine periodische Lösung hat, notwendigerweise $\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 = 0$, die Gaußsche Krümmung der Fläche im Nullpunkt also stationär sein. Da der Nullpunkt kein ausgezeichneter Punkt der Fläche war, so folgt, *daß die Fläche notwendig eine Fläche konstanter Krümmung sein muß, damit die Krümmungskreise sämtlich geschlossen sind.*

Es findet damit eine Behauptung von G. Darboux[3]) ihre Bestätigung.

---

[3]) G. Darboux, Théorie des surfaces, **3** (1894), S. 151.

II. Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 6.

Problemstellung.

Wie in der euklidischen Ebene den Kreis, so kann man im euklidischen Raum die Kugel auf zweierlei Art erklären: 1. als geometrischen Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung haben; 2. als geschlossene Fläche konstanter mittlerer Krümmung, wobei die mittlere Krümmung einer Fläche entweder als arithmetisches Mittel der Hauptkrümmungen oder durch die erste Variation der Oberfläche definiert ist. Wir wollen im folgenden die zweite Art der Definition für die mittlere Krümmung zugrunde legen (Genaueres darüber in § 7).

Gehen wir aus dem Raum mit euklidischer Geometrie in einen Raum, dessen Geometrie durch eine beliebige positiv definite quadratische Form: $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ gegeben ist, so haben auch hier die Begriffe „Entfernung" und „mittlere Krümmung" ihren guten Sinn, und es liegen die Fragen nahe:

I. Wie muß die Metrik des Raumes beschaffen sein, damit die auf die erste Art als „Entfernungskugeln" definierten Flächen konstante mittlere Krümmung haben?

II. Wie muß die Metrik des Raumes beschaffen sein, damit es in ihm geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, und zwar derart, daß sich diese geschlossenen Flächen konstanter mittlerer Krümmung auf jeden Raumpunkt zusammenziehen lassen?

§ 7.

Die „mittlere Krümmung" einer Fläche

sollte definiert sein durch die erste Variation der Oberfläche dieser Fläche. Genauer: Verschiebt man jeden Punkt eines Oberflächenelementes dO der Fläche um ein kleines Stückchen δn in Richtung der Flächennormalen, so soll die proportionale Änderung der Flächengröße $\frac{\delta dO}{dO}$, dividiert durch $-2\delta n$, als „mittlere Krümmung" der Fläche an der Stelle von dO bezeichnet werden. Wir schreiben

$$\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = -\frac{1}{2\delta n}\frac{\delta dO}{dO}.} \tag{20}$$

Die Schreibweise, die auf die andere Definition der mittleren Krümmung als arithmetisches Mittel der Hauptkrümmungen deutet, soll ungeachtet dessen beibehalten werden.

Allgemein sei die mittlere Krümmung einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche im n-dimensionalen Raum erklärt durch:

$$(21)\qquad \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\dots+\frac{1}{\varrho_{n-1}}\right)=\frac{-1}{(n-1)\,\delta n}\cdot\frac{\delta dO}{dO}.$$

Diese Definition der mittleren Krümmung ist für jede Riemannsche Metrik brauchbar. Ist die Geometrie des Raumes gegeben durch $ds^2=\Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$, so ist die Geometrie der *Fläche* $x_i=x_i(u,v)$, die sich in diesem Raume befindet, gegeben durch ihr Linienelement

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

worin

$$(22)\qquad E=\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u};\qquad F=\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v};\qquad G=\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial v}$$

ist, und als ihr Oberflächenelement ergibt sich:

$$(23)\qquad dO=(EG-F^2)^{1/2}\,du\,dv.$$

Im Raum von n Dimensionen ist entsprechend das Oberflächenelement dO der $n-1$-dimensionalen Fläche $x_i=x_i(u_1\dots u_{n-1})$

$$(24)\qquad dO=|\gamma_{\mu\nu}|^{1/2}\cdot du_1\,du_2\dots du_{n-1},$$

worin $|\gamma_{\mu\nu}|$ die Diskriminante von dem ds^2 der betreffenden Fläche darstellt.

Zur Bestimmung der mittleren Krümmung haben wir noch die Flächennormale nötig. Die Komponenten der Flächennormale von der Länge 1 seien ξ_1, ξ_2, ξ_3. Dann gilt:

$$(25)\qquad \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\xi_k=0;\qquad \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\xi_k=0;\qquad \sum g_{ik}\xi_i\xi_k=1.$$

Daraus sind die ξ_i zu berechnen.

Variieren wir nunmehr die Fläche in der vorgeschriebenen Weise, indem wir setzen:

$$x_i^*=x_i(u,v)+\delta n\,\xi_i,$$

so wird

$$\begin{aligned}E^*&=\sum g_{ik}^*\frac{\partial x_i^*}{\partial u}\frac{\partial x_k^*}{\partial u}=\sum(g_{ik}+\delta g_{ik})\frac{\partial x_i^*}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_k^*}{\partial u}\\&=\sum\left(g_{ik}+\delta n\sum\xi_i\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}+\delta n\frac{\partial\xi_i}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}+\delta n\frac{\partial\xi_k}{\partial u}\right)\\&=E+2\,\delta n\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial\xi_k}{\partial u}+\delta n\sum\delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u}+\delta n\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\xi_k\end{aligned}$$

$$E^*=E+\delta n\left(2\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial\xi_k}{\partial u}+\sum\delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right).$$

In gleicher Weise findet man die variierten Ausdrücke F^* und G^* von F und G. Man bekommt:

$$(26)\qquad \begin{cases} E^* = E - \delta n \cdot E' = \underline{E - \delta n (2L + \bar{E})}, \\ F^* = F - \delta n \cdot F' = \underline{F - \delta n (2M + \bar{F})}, \\ G^* = G - \delta n \cdot G' = \underline{G - \delta n (2N + \bar{G})}. \end{cases}$$

Darin bedeuten:

$$(27)\qquad \begin{cases} \underline{L = -\sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_k}{\partial u};} & \underline{\bar{E} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u};} \\ \underline{M = -\frac{1}{2} \sum g_{ik} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_k}{\partial v} + \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right);} & \underline{\bar{F} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v};} \\ \underline{N = -\sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial \xi_k}{\partial v};} & \underline{\bar{G} = -\sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial v};} \\ \underline{\delta g_{ik} = -\sum \xi_i \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}.} & \end{cases}$$

Es wird somit

$$\begin{aligned} dO^* &= (E^* G^* - F^{*2})^{1/2} du\, dv \\ &= dO - \frac{\delta n}{2} \{ E(2N + \bar{G}) + G(2L + \bar{E}) - 2F(2M + \bar{F}) \} du\, dv \end{aligned}$$

und demnach die mittlere Krümmung $-\frac{1}{2\delta n} \frac{\delta dO}{dO}$ $(\delta n \to 0)$

$$(28)\qquad \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{4} \frac{E(2N + \bar{G}) + G(2L + \bar{E}) - 2F(2M + \bar{F})}{EG - F^2}.}$$

Die mittlere Krümmung der $(n-1)$*-dimensionalen Fläche* $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ *im Raum von* n *Dimensionen* berechnet sich ganz entsprechend.

Bezeichnet man die Matrix des Linienelementes der Fläche mit $|\gamma_{\mu\nu}|$, so daß

$$(26\,\mathrm{a})\qquad \gamma_{\mu\nu} = \sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} \frac{\partial x_k}{\partial u_\nu}$$

ist, bezeichnet man ferner die zum Element $\gamma_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante der Matrix $|\gamma_{\mu\nu}|$ mit $\Gamma_{\mu\nu}$, und setzt man schließlich noch entsprechend den früheren Bezeichnungen

$$-\gamma'_{\mu\nu} = 2 \sum g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} \frac{\partial \xi_k}{\partial u_\nu} + \sum \delta g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} \frac{\partial x_k}{\partial u_\nu},$$

so wird die mittlere Krümmung der Fläche $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$

$$(28\,\mathrm{a})\qquad \underline{\frac{1}{(n-1)} \left\{ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_{n-1}} \right\} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum \gamma'_{\mu\nu} \cdot \frac{\Gamma_{\mu\nu}}{|\gamma_{\mu\nu}|}.}$$

§ 8.

Koordinaten.

Es sollen zweierlei Koordinaten nebeneinander benutzt werden, die Riemannschen Normalkoordinaten und geodätische Polarkoordinaten; diese zur Durchführung der Rechnung, jene zur Deutung der Resultate.

Riemannsche Normalkoordinaten. Das die Metrik unseres Raumes bestimmende Linienelement $ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$; $ds^2 > 0$ läßt sich immer so transformieren, daß es für irgendeinen herausgegriffenen Punkt O des Raumes die Form hat: $ds^2 = \Sigma dx_i^2$. Wir haben dann im Punkte O ein orthogonales Dreibein festgelegt. Wir können nun, bezogen auf dieses orthogonale Dreibein (bzw. n-Bein), jeden Punkt des Raumes durch seine Polarkoordinaten benennen, durch seine geodätische Entfernung r von O und durch die Richtung, in der der Punkt von O aus gesehen wird. Die Riemannschen Normalkoordinaten sind dann erklärt durch

$$y_i = r\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0.$$

Die $\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$ sind die Richtungskosinus im Nullpunkt,

$$\sum y_i^2 = r^2.$$

In diesen Koordinaten hat das Linienelement des Raumes die Form:

$$\underline{ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum\sum \mathfrak{P}_{ik,rs}\, p_{ik}\, p_{rs}.} \tag{29}$$

Darin bedeuten: $p_{ik} \equiv y_i dy_k - y_k dy_i$, und die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ sind Potenzreihen in den y_i, die die einzige Bedingung erfüllen müssen, daß sie für kleine y_i konvergieren.

$$\underline{\mathfrak{P}_{ik,rs} \equiv \alpha_{ik,rs} + \beta^{(1)}_{ik,rs} y_1 + \beta^{(2)}_{ik,rs} y_2 + \beta^{(3)}_{ik,rs} y_3 + \cdots} \tag{30}$$

$$\mathfrak{P}_{ik,rs} = \mathfrak{P}_{rs,ik} = \mathfrak{P}_{ki,sr} = \mathfrak{P}_{sr,ki}; \quad \mathfrak{P}_{ik,rs} = -\mathfrak{P}_{ki,rs} = -\mathfrak{P}_{ik,sr}.$$

Durch die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ ist die Metrik des Raumes eindeutig festgelegt, umgekehrt sind aber die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ durch die Metrik des Raumes noch nicht völlig bestimmt. Wegen der Identität $\sum\limits_{ik \neq rs} p_{ir} p_{rs} \equiv 0$ und $y_i p_{kr} + y_r p_{ik} + y_k p_{ri} \equiv 0$ ist das erst der Fall, wenn man noch *Normierungsgleichungen* für die Koeffizienten der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ hinzufügt. Die am nächsten liegenden Normierungen, die ihren Zweck vollständig erfüllen, lauten:

$$1.\ \mathfrak{P}_{ik,rs} + \mathfrak{P}_{ir,sk} + \mathfrak{P}_{is,kr} = 0; \quad 2.\ \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,rs}}{\partial y_t} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ik,tr}}{\partial y_s} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{ir,st}}{\partial y_r} = 0 \text{ [4]}. \tag{31}$$

[4]) Vgl. H. Vermeil, Math. Annalen **79** (1917), S. 289.

Für den Raum von 3 Dimensionen kommen nur die 2. Normierungsgleichungen zur Geltung. Sie bedeuten für die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$:

$$\beta^{(1)}_{ik,23} + \beta^{(2)}_{ik,31} + \beta^{(3)}_{ik,12} = 0 \tag{32}$$

für $ik = 23, 31, 12$.

Die geometrische Bedeutung der $\alpha_{ik,rs}$ *und* $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ läßt sich leicht erkennen. Setzt man alle y außer y_i und y_k gleich null, so wird das Linienelement der durch die Buchstaben i und k charakterisierten geodätischen Fläche für die Umgebung des Nullpunktes

$$ds^2 = dy_i^2 + dy_k^2 + \alpha_{ik,ik} \cdot p_{ik}^2$$

oder in Polarkoordinaten:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(1 + \alpha_{ik,ik} r^2) d\varphi^2.$$

Ein Vergleich mit (6) zeigt, daß die $\alpha_{ik,ik}$ bis auf einen Proportionalitätsfaktor nichts anderes sind als die Gaußschen Krümmungen der geodätischen Flächen ik im Nullpunkt. Es ist $\alpha_{ik,ik} = -\frac{1}{3}(K_{ik})_0$.

(33) Die Gesamtheit der $\alpha_{ik,rs}$ stellt den *Krümmungstensor des Raumes im Nullpunkt* dar.

(34) Die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ sind — das läßt sich ebenso leicht einsehen — die *Ableitungen der Tensorkomponenten nach* y_t *im Nullpunkt* (wiederum nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor).

Die höheren Koeffizienten in den Potenzreihen $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ hängen ebenfalls in bestimmter, einfacher Weise mit den Ableitungen der Tensorkomponenten im Nullpunkt zusammen[5]).

Durch einmaliges Verjüngen des Krümmungstensors bekommt man die *Richtungsinvariante der Krümmung*, z. B.

bei 3 Dimensionen für die y_1-Richtung: $\alpha_{12,12} + \alpha_{13,13}$,

„ 4 „ „ „ „ $\alpha_{12,12} + \alpha_{13,13} + \alpha_{14,14}$,

durch zweimaliges Verjüngen die *Ortsinvariante der Krümmung*, die *skalare Krümmung* $\Sigma \alpha_{ik,ik}$ (auch die „*Gaußsche Krümmung*" des Raumes genannt).

Die *skalare Krümmung* eines Raumes ist also (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) das arithmetische Mittel der Gaußschen Krümmungen der $\frac{n(n-1)}{2}$ zweidimensionalen geodätischen Flächen, die sich in das orthogonale n-bein des betr. Raumpunktes einspannen lassen, und die *Richtungsinvariante der Krümmung* ist das arithmetische Mittel der Gaußschen

[5]) Vgl. H. Vermeil, l. c.

Krümmungen der $n-1$ zueinander orthogonalen geodätischen Flächen, die die betreffende Richtung enthalten.

Die Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich durch ein Ellipsoid veranschaulichen, daß „*Krümmungsellipsoid*“ genannt werde:

$$R_{ik}\,\eta_i\,\eta_k = 1\,, \quad \text{wobei im Nullpunkt } R_{ik} = \sum_r \alpha_{ir,kr}.$$

Als Richtungsinvariante der Krümmung läßt sich auch die Differenz aus Ortsinvariante und der obigen Richtungsinvariante, für die y_r-Richtung im Nullpunkt also $\sum\limits_{ik} \alpha_{ik,ik} - \sum\limits_{k} \alpha_{rk,rk}$, verwenden. Die so definierte Richtungsinvariante ist dann die skalare Krümmung des zu der betreffenden Richtung (y_r) orthogonalen Unterraumes in dem betreffenden Punkt.

Ein Raum von 3 Dimensionen ist ein „***Raum konstanter Krümmung***“, wenn die skalare Krümmung sich von Ort zu Ort nicht ändert, und wenn obendrein die Richtungsinvariante der Krümmung einen von der Richtung unabhängigen Wert hat, oder anschaulich ausgedrückt, wenn das Krümmungsellipsoid überall eine Kugel ist. In diesem Falle sind die $\alpha_{ik,ik}$ alle einander gleich und die $\alpha_{ik,rs} = 0\ (ik \neq rs)$. Es mag noch bemerkt werden, daß aus der zweiten Eigenschaft die erste folgt. Hat in jedem Punkt des Raumes die Richtungsinvariante einen von der Richtung unabhängigen Wert, so ändert sich auch die skalare Krümmung von Ort zu Ort nicht[6]).

Hat ein Raum mehr als 3 Dimensionen, so ist seine Metrik durch das Krümmungsellipsoid noch keineswegs gekennzeichnet, wie das bei nur 3 Dimensionen der Fall ist. Ein R_n ist erst dann ein „Raum konstanter Krümmung“, wenn in sämtlichen dreidimensionalen Unterräumen das Krümmungsellipsoid eine Kugel ist.

Zwischen „kovarianten“ und „kontravarianten“ Vektor- und Tensorkomponenten ist in der Schreibweise aus Bequemlichkeitsgründen nicht unterschieden worden. Es hätten sonst bei den η_i wie bei den y_i und den p_{ik} die Indizes oben, bei den $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ aber sämtlich unten stehen müssen.

Polarkoordinaten. Wir wollen nunmehr dazu übergehen, das Linienelement der Riemannschen Normalkoordinaten in Polarkoordinaten umzusetzen. Es sei

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos\varphi\,, \\ y_2 &= r\sin\varphi\cos\psi\,, \\ y_3 &= r\sin\varphi\sin\psi\,, \end{aligned}$$

oder im Raum von n Dimensionen:

---

[6]) F. Schur, Math. Ann. 27, S. 563. — G. Herglotz, Leipz. Ber. 1916, S. 203.

$$(35)\quad \begin{cases} y_1 = r\cos\varphi_1 \\ y_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ y_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\,. \\ y_n \;\;\;= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\,. \end{cases}$$

Es ist dann $\Sigma y_i^2 = r^2$, und es wird

$$(36)\quad \begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi_1^2 + r^2\sin\varphi_1^2 d\varphi_2^2 + \ldots + r^2\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\ldots\sin\varphi_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 \\ &+ r^4\{P_{11}d\varphi_1^2 + P_{22}\sin\varphi_1^2 d\varphi_2^2 + \ldots + P_{n-1,\,n-1}\sin\varphi_1^2\sin\varphi_2^2\ldots\sin\varphi_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 \\ &+ P_{12}\sin\varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2 + P_{13}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_3 + \ldots \\ &+ P_{n-2,\,n-1}\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}d\varphi_{n-1}\}\,. \end{aligned}$$

Darin sind die P_{ik} Potenzreihen in r, deren Koeffizienten gewisse, noch zu bestimmende Funktionen der $\alpha_{ik,\,rs}$, $\beta_{ik,\,rs}$, ... und der φ_i sind,

$$(37)\qquad P_{ik} = A_{ik} + B_{ik}r + C_{ik}r^2 + \ldots$$

Es handelt sich jetzt darum, die A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, ... auszurechnen. Transformiert man die $p_{ik} = y_i\,dy_k - y_k\,dy_i$, so findet man

$$(38)\quad \begin{aligned} p_{ik} = r^2\{&(s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot c_1 s_2 s_3\ldots s_{k-1}c_k - s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot c_1 s_2 s_3\ldots s_{i-1}c_i)\,d\varphi_1 \\ &+ (s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 c_2 s_3\ldots s_{k-1}c_k - s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot s_1 c_2 s_3\ldots s_{i-1}c_i)\,d\varphi_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2\ldots c_i s_{i+1}\ldots s_{k-1}c_k + s_1 s_2\ldots s_{k-1}c_k\cdot s_1 s_2\ldots s_i - s_i)\,d\varphi_i \\ &+ s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2 s_i c_{i+1}s_{i+2}\ldots s_{k-1}c_k\,d\varphi_{i+1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- s_1 s_2\ldots s_{i-1}c_i\cdot s_1 s_2\ldots s_{k-1}s_k\,d\varphi_k\}\,. \end{aligned}$$

s_i und c_i ist der bequemeren Schreibweise halber gesetzt für $\sin\varphi_i$ und $\cos\varphi_i$. Diese Bezeichnungsweise soll im folgenden immer gelten. Zu dem Bildungsgesetz der p_{ik} ist noch zu bemerken, daß die hervorstechenden c_i bzw. s_i (die sich von ihrer Umgebung unterscheiden) bei etwa eintretender Konkurrenz mit ihren Nachbarn (wenn z. B. $i = 1$ oder $k = 2$ ist) die stärkeren sind, und daß $c_n = 1$ und $s_n = 0$ zu setzen ist.

Für den Raum von 3 und 4 Dimensionen bekommt man für die p_{ik} die durch die Tabellen (39) und (40) wiedergegebenen Ausdrücke.

(39)

	$r^2\,d\varphi$	$r^2 s_1\,d\psi$
p_{23}		s_1
p_{31}	$-s_2$	$-c_1 c_2$
p_{12}	c_2	$-c_1 s_2$

(40)

	$r^2\,d\varphi_1$	$r^2 s_1\,d\varphi_2$	$r^2 s_1 s_2\,d\varphi_3$
p_{12}	c_2	$-c_1 s_2$	
p_{13}	$s_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3$	$c_1 s_3$
p_{14}	$s_2 s_3$	$c_1 c_2 s_3$	$s_1 c_3$
p_{23}		$s_1 \cdot c_3$	$-s_1 c_2 s_3$
p_{24}		$s_1 \cdot s_3$	$s_1 c_2 c_3$
p_{34}			$s_1 s_2$

Daraus kann man nun sofort die A_{ik}, B_{ik}, ... entnehmen. Vergegenwärtigt man sich die Definition der A_{ik}, B_{ik}, ... durch einen Blick auf (29), (30), (36) und (37), so liefert die Tabelle (39) z. B. für den Raum von 3 Dimensionen:

$$(41)\qquad \begin{cases} A_{11} = \alpha_{12,12}\,c_2^2 + \alpha_{31,31}\,s_2^2 - 2\,\alpha_{12,31}\,s_2\,c_2\,, \\ A_{22} = \alpha_{12,12}\,c_1^2\,s_2^2 + \alpha_{31,31}\,c_1^2\,c_2^2 + \alpha_{23,23}\,s_1^2 - 2\,\alpha_{23,31}\,s_1\,c_1\,c_2 \\ \qquad\qquad - 2\,\alpha_{23,12}\,s_1\,c_1\,s_2 + 2\,\alpha_{12,31}\,c_1^2\,s_2\,c_2\,, \\ A_{12} = 2\,c_1\,s_2\,c_2\,(\alpha_{31,31} - \alpha_{12,12}) + \alpha_{12,31}\,c_1\,(s_2^2 - c_2^2) \\ \qquad\qquad - \alpha_{23,31}\,s_1\,s_2 + \alpha_{23,12}\,s_1\,c_2\,. \end{cases}$$

Für den Raum konstanter Krümmung ($\alpha_{ik,ik} = \alpha$; $\underset{ik \neq rs}{\alpha_{ik,rs}} = 0$) wird $A_{11} = A_{22} = \alpha$; $A_{12} = 0$.

Für den Raum von 4 und mehr Dimensionen ergeben sich ähnliche Ausdrücke für die A_{ik}, die indessen für die weiteren Betrachtungen nicht erforderlich sind. Was wir von ihnen wissen müssen, werden wir ohne Schwierigkeit aus den Tabellen für die p_{ik} entnehmen können.

Die B_{ik} gehen aus den A_{ik} hervor, wie man erkennt, wenn man (30) und (37) beachtet, ***indem man in den*** A_{ik} ***die*** $\alpha_{ik,rs}$ ***ersetzt durch***

$$(42)\qquad \beta^{(1)}_{ik,rs}\cos\varphi + \beta^{(2)}_{ik,rs}\sin\varphi\cos\psi + \beta^{(3)}_{ik,rs}\sin\varphi\sin\psi.$$

Entsprechend die C_{ik} und höheren Koeffizienten der Potenzreihen P_{ik}.

Für den Raum mit der konstanten Krümmung K ist:

$$\alpha_{ik,ik} = \alpha = -\frac{K}{3}; \quad \underset{ik \neq rs}{\alpha_{ik,rs}} = 0 \quad \text{und} \quad \beta^{(l)}_{ik,rs} = 0$$

$$P_{ii} = \frac{1}{K}\sin^2\sqrt{K}\,r; \qquad P_{ik} = 0, \quad (i \neq k) \qquad \text{(vgl. (4))}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zu unseren Problemen zurückkehren.

§ 9.

Die Flächen $r =$ konst.

Das Linienelement der Entfernungskugeln $r =$ konst. ist nach (36)

$$ds^2 = r^2 \{(1 + P_{11} r^2) d\varphi_1^2 + (1 + P_{22} r^2) s_1^2 d\varphi_2^2 + \ldots + (1 + P_{n-1,n-1} r^2) s_1^2 s_2^2 \ldots s_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2 + r^2 P_{12} s_1 d\varphi_1 d\varphi_2 + \ldots + r^2 P_{n-2,n-1} \cdot s_1^2 \cdot s_2^2 \ldots s_{n-3}^2 s_{n-2} d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1}\},$$

somit die Matrix des Linienelementes ($P_{ik} = A_{ik} + B_{ik} r + \ldots$):

$$(43)\quad |\gamma_{\mu\nu}| = \left|\begin{matrix} r^2(1+A_{11}r^2+B_{11}r^3+\ldots); & s_1 A_{12} r^4 + \ldots; & \ldots\ldots \\ s_1 A_{12} r^4 + \ldots; & r^2(1+A_{22}r^2+B_{22}r^3+\ldots)\cdot s_1^2; & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots; & r^2(1+A_{n-1,n-1}r^2+B_{n-1,n-1}r^3+\ldots)s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-2}^2 & \end{matrix}\right|.$$

Da für die Flächen $r =$ konst. $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $\delta n = -\delta r$ ist, wenn wir die Normale nach innen nehmen, so wird

$$(44)\quad |\gamma'_{\mu\nu}| = |-\delta g_{\mu\nu}| = \left|\begin{matrix} 2r(1+2A_{11}r^2+\frac{5}{2}B_{11}r^3+\ldots); & 4s_1 A_{12} r^3 + \ldots; & \ldots \\ 4s_1 A_{12} r^3 + \ldots; & 2r(1+2A_{22}r^2+\frac{5}{2}B_{22}r^3+\ldots)s_1^2; & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots; & 2r(1+2A_{n-1,n-1}r^2+\frac{5}{2}B_{n-1,n-1}r^3+\ldots)s_1^2\ldots s_{n-2}^2 & \end{matrix}\right|$$

und damit nach (28a) die *mittlere Krümmung der Entfernungskugeln*

$$(45)\quad \underline{\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_{n-1}}\right) = \frac{1}{r}\left\{1 + r^2 \frac{\Sigma A_{\mu\mu}}{n-1} + \ldots\right\}}.$$

Die Frage war: Unter welchen Voraussetzungen hat die mittlere Krümmung dieser Kugeln überall denselben Wert?

Die Antwort ist nach (45): Es muß $\Sigma A_{\mu\mu}$ einen vom Ort unabhängigen, konstanten Wert haben. Was das für die $\alpha_{ik,rs}$ bedeutet, ist sofort zu erkennen, wenn man $\Sigma A_{\mu\mu}$ bildet.

Wie man für 3 Dimensionen aus (41), für 4 Dimensionen aus der Tabelle (40) und allgemein aus den p_{ik} (38) ablesen kann, ist

$$(46)\quad \underline{\sum A_{\mu\mu}} = \sum_{ik} \alpha_{ik,ik}(y_i^2 + y_k^2) + 2\sum_{i,k}\Big(\sum_r \alpha_{ir,kr}\Big) y_i y_k$$
$$\underline{= \sum_i \Big(\sum_r \alpha_{ir,ir}\Big) y_i^2 + 2\sum_{i,k}\Big(\sum_r \alpha_{ir,kr}\Big) y_i y_k}$$
$$(\text{bei } \Sigma y_i^2 = 1).$$

Man sieht: Damit $\Sigma A_{\mu\mu}$ auf der ganzen Einheitskugel denselben Wert hat, muß notwendig $\sum\limits_r \alpha_{ir,ir}$ von i unabhängig und $\sum\limits_r \alpha_{ir,kr} = 0$ sein, d. h. die Richtungsinvariante der Krümmung muß im Nullpunkt einen von der Richtung unabhängigen Wert haben. Da der Nullpunkt ein beliebiger Raumpunkt war, so gilt das für jeden Punkt des Raumes, und nach dem früher erwähnten Satz von F. Schur und Herglotz (S. 298) folgt daraus, daß dann auch die Ortsinvariante der Krümmung (die „Gaußsche Krümmung" des Raumes) sich von Ort zu Ort nicht ändert. Ein Raum von 3 Dimensionen muß also ein „*Raum konstanter Krümmung*" sein.

Die mittlere Krümmung dieser Kugeln im Raum konstanter Krümmung ist, wie man erkennt, wenn man $P_{ii} = \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}\, r$, $P_{\substack{ik\\ i \neq k}} = 0$, setzt:

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_{n-1}}\right) = \sqrt{K} \operatorname{ctg}(\sqrt{K}\, r)$$

§ 10.

Die Flächen $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) =$ konst. im R_3.

Die Differentialgleichung dieser Flächen im Raum mit dem Linienelement $ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ haben wir bereits früher aufgestellt. Es ist die Gleichung (28), wenn wir in ihr $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \text{konst.} = \frac{1}{\varrho}$ setzen.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4} \frac{E(2N + \bar{G}) + G(2L + \bar{E}) - 2F(2M + \bar{F})}{EG - F^2}. \tag{47}$$

Die Bedeutung von E, F, G, L, M, N, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ zeigen die Formeln (22) und (27).

Ist das Linienelement gemäß (36) und (37) in Polarkoordinaten gegeben:

$$ds^2 = dr^2 + G_{11}\, d\varphi^2 + G_{22}\, d\psi^2 + 2\, G_{12}\, d\varphi\, d\psi,$$

worin

$$\left\{\begin{aligned} G_{11} &\equiv r^2 (1 + A_{11} r^2 + B_{11} r^3 + C_{11} r^4 + \ldots), \\ G_{22} &\equiv s_1^2 r^2 (1 + A_{22} r^2 + B_{22} r^3 + C_{22} r^4 + \ldots), \\ G_{12} &\equiv s_1 \cdot r^4 (A_{12} + B_{12} r + C_{12} r^2 + \ldots), \end{aligned}\right. \tag{48}$$

so können wir für jede Fläche $r = r(\varphi, \psi)$ die E, F, G; L, M, N; $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ berechnen. Wir haben dann auf der rechten Seite von (47) eine Funktion von $r_{\varphi\varphi}$, $r_{\varphi\psi}$, $r_{\psi\psi}$, r_φ, r_ψ, r und φ und damit die Differentialgleichung für die Flächen konstanter mittlerer Krümmung in der gewünschten Form.

Wir verfahren dann weiter so, wie wir es früher bei der Behandlung des analogen Problems für krumme Flächen taten. Wir bedenken, daß im Unendlich-Kleinen der Raum als eben, seine Geometrie als euklidisch, angesehen werden kann und machen für die Differentialgleichung den Lösungsansatz:

$$r = \varrho + b(\varphi, \psi)\, \varrho^2 + c(\varphi, \psi)\, \varrho^3 + \ldots.$$

Indem wir gleich noch einen Schritt weitergehen und berücksichtigen, daß auch in zweiter Näherung der Raum noch als eben anzusehen ist, was in genau der gleichen Weise folgt wie damals, setzen wir

$$(49) \qquad \underline{r = \varrho + c(\varphi, \psi)\,\varrho^3 + d(\varphi, \psi)\,\varrho^4 + e(\varphi, \psi)\,\varrho^5 + \dots}$$

Mit diesem Ansatz gehen wir dann in die Differentialgleichung hinein. Wir bekommen dann eine Identität in ϱ, und es liefert uns eine Koeffizientenvergleichung die für die unbekannten Funktionen $c(\varphi, \psi)$, $d(\varphi, \psi)$, $e(\varphi, \psi)$, ... erforderlichen Differentialgleichungen.

Falls es geschlossene Flächen mittlerer Krümmung gibt, die den Nullpunkt in der verlangten Weise umschließen, so müssen die Differentialgleichungen für alle Koeffizienten $c(\varphi, \psi)$, $d(\varphi, \psi)$, $e(\varphi, \psi)$, ... Lösungen haben, die auf der ganzen Einheitskugel stetig sind. Wir werden erkennen, daß dazu notwendig ist, daß der Raum konstante skalare Krümmung hat.

Verfahren wir nunmehr in der angegebenen Weise!

$$r = \varrho(1 + c\varrho^2 + d\varrho^3 + \dots); \quad r_\varphi = \varrho^3(c_\varphi + d_\varphi\varrho + \dots),$$
$$r_\psi = \varrho^3(c_\psi + d_\psi\varrho + \dots),$$
$$G_{11} \equiv r^2(1 + A_{11}r^2 + B_{11}r^3 + \dots)$$
$$= \varrho^2\cdot\{1 + (2c + A_{11})\varrho^2 + (2d + B_{11})\varrho^3 + \dots\},$$
$$G_{22} \equiv s_1^2 r^2(1 + A_{22}r^2 + B_{22}r^3 + \dots)$$
$$= \varrho^2\cdot s_1^2\cdot\{1 + (2c + A_{22})\varrho^2 + (2d + B_{22})\varrho^3 + \dots\},$$
$$G_{12} = s_1\cdot\varrho^4\cdot\{A_{12} + B_{12}\varrho + \dots\},$$
$$\underline{D \equiv G_{11}\cdot G_{22} - G_{12}^2}$$
$$= s_1^2\cdot\varrho^4\cdot\{1 + (4c + A_{11} + A_{22})\varrho^2 + (4d + B_{11} + B_{22})\varrho^3 + \dots,$$
$$E \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial u} = r_\varphi^2 + G_{11} = \varrho^2\{1 + (2c + A_{11})\varrho^2 + (2d + B_{11})\varrho^3 + \dots\},$$
$$G \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial v} = r_\psi^2 + G_{22} = s_1^2\varrho^2\{1 + (2c + A_{22})\varrho^2 + (2d + B_{22})\varrho^3 + \dots\},$$
$$F \equiv \sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} = r_\varphi r_\psi + G_{12} = s_1\cdot\varrho^4\{A_{12} + \dots\},$$
$$\underline{EG - F^2} = s_1^2\cdot\varrho^4\cdot\{1 + (4c + A_{11} + A_{22})\varrho^2 + (4d + B_{11} + B_{22})\varrho^3 + \dots\}.$$

Zur Bestimmung der $L, M, N; \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ haben wir zunächst die Komponenten ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Flächennormalen aus den Gleichungen (25) zu berechnen. Für unser Linienelement lauten die Gleichungen (25):

$$(50) \qquad \begin{cases} r_\varphi\cdot\xi_1 + G_{11}\xi_2 + G_{12}\xi_3 = 0, \\ r_\psi\cdot\xi_1 + G_{12}\xi_2 + G_{22}\xi_3 = 0, \\ \xi_1^2 + G_1\xi_2^2 + 2G_{12}\xi_2\xi_3 + G_{22}\xi_3^2 = 1, \end{cases}$$

daraus

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{1}{D}(G_{12} r_\psi - G_{22} r_\varphi),$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{1}{D}(G_{12} r_\varphi - G_{11} r_\psi),$$

$$\frac{1}{\xi_1^2} = 1 + \frac{1}{D}(G_{11} r_\psi^2 - 2 G_{12} r_\varphi r_\psi + G_{22} r_\varphi^2) = \frac{E G - F^2}{D},$$

somit:

$$\xi_1 = -1 + \frac{1}{2}\left(c_\varphi^2 + \frac{1}{s_1^2} c_\psi^2\right) \varrho^4 + \ldots,$$

$$\xi_2 = \varrho \{c_\varphi + d_\varphi \varrho + \ldots\}.$$

$$\xi_3 = \frac{\varrho}{s_1^2}\{c_\psi + d_\psi \varrho + \ldots\}.$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} = (\varrho^7); \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} = (\varrho^7).$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} = \varrho \{c_{\varphi\varphi} + d_{\varphi\varphi} \varrho + \ldots\},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} = \varrho \{c_{\varphi\psi} + d_{\varphi\psi} \varrho + \ldots\},$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} = \frac{\varrho}{s_1^2}\left\{\left(c_{\varphi\psi} - \frac{2 c_1}{s_1} c_\psi\right) + \left(d_{\varphi\psi} - \frac{2 c_1}{s_1} d_\psi\right) \varrho + \ldots\right\},$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \psi} = \frac{\varrho}{s_1^2}\{c_{\psi\psi} + d_{\psi\psi} \varrho + \ldots\}.$$

Zur Berechnung der $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ haben wir noch die Ableitungen der G_{ik} nötig. Es ist

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial r} = 2 r + 4 A_{11} r^3 + 5 B_{11} r^4 + \ldots$$
$$= 2 \varrho \left\{1 + (c + 2 A_{11}) \varrho^2 + \left(d + \frac{5}{2} B_{11}\right) \varrho^3 + \ldots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial \varphi} = \varrho^4 \{(2 c_\varphi + A_{11\varphi}) + (2 d_\varphi + B_{11\varphi}) \varrho + \ldots\},$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial \psi} = \varrho^4 \{(2 c_\psi + A_{11\psi}) + (2 d_\psi + B_{11\psi}) \varrho + \ldots\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial r} = 2 s_1^2 \cdot \varrho \left\{1 + (c + 2 A_{22}) \varrho^2 + \left(d + \frac{5}{2} B_{22}\right) \varrho^3 + \ldots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial \varphi} = 2 s_1^2 \cdot \varrho^2 \left\{\frac{c_1}{s_1} + \left(\frac{c_1}{s_1}(2 c + A_{22}) + c_\varphi + \frac{1}{2} A_{22\varphi}\right) \varrho^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{s_1}{c_1}(2 d + B_{22}) + d_\varphi + \frac{1}{2} B_{22\varphi}\right) \varrho^3 + \ldots\right\},$$

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial \psi} = \varrho^4 \cdot s_1^2 \cdot \{(2 c_\psi + A_{22\psi}) + (2 d_\psi + B_{22\psi}) \varrho^2 + \ldots\},$$

somit (vgl. (27)):

$$\bar{E} = -\delta G_{11} \equiv -\left(\frac{\partial G_{11}}{\partial r}\xi_1 + \frac{\partial G_{11}}{\partial \varphi}\xi_2 + \frac{\partial G_{11}}{\partial \psi}\xi_3\right)$$
$$= 2\varrho\left\{1 + (c + 2A_{11})\varrho^2 + \left(d + \tfrac{5}{2}B_{11}\right)\varrho^3 + \dots\right\},$$
$$\bar{G} = -\delta G_{22} = 2\varrho s_1^2\left\{1 + \left(c - \frac{c_1}{s_1}c_\varphi + 2A_{22}\right)\varrho^2 + \left(d - \frac{c_1}{s_1}d_\varphi + \tfrac{5}{2}B_{22}\right)\varrho^3 + \dots\right\},$$
$$\bar{F} = -\delta G_{12} = 4\varrho^3 s_1 A_{12} + \dots.$$

Ferner wird:

$$L \equiv -\left(r_\varphi \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + G_{11}\frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} + G_{12}\frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi}\right)$$
$$= -\varrho^3\{c_{\varphi\varphi} + d_{\varphi\varphi}\varrho + \dots\},$$
$$N = -\varrho^3\{c_{\psi\psi} + d_{\psi\psi}\varrho + \dots\},$$
$$M = -\varrho^3\{c_{\varphi\psi} + d_{\varphi\psi}\varrho + \dots\}.$$

Setzen wir nunmehr die für E, F, G, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, L, M, N gefundenen Ausdrücke in unsere Differentialgleichung (48) ein, so geht sie über in die Identität:

$$(51)\qquad \frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(2c + \frac{c_1}{s_1}c_\varphi + c_{\varphi\varphi} + \frac{1}{s_1^2}c_{\psi\psi} - (A_{11} + A_{22})\right)\varrho^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(2d + \frac{c_1}{s_1}d_\varphi + d_{\varphi\varphi} + \frac{1}{s_1^2}d_{\psi\psi} - \frac{3}{2}(B_{11} + B_{22})\right)\varrho^3 + (\varrho^4) + \dots\right\}.$$

Daraus folgen nun sofort die für $c(\varphi, \psi)$ und $d(\varphi, \psi)$ gesuchten Differentialgleichungen. Damit die Identität erfüllt wird, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\text{(I)}\qquad 2c + \Delta_2 c = A_{11} + A_{22},$$
$$\text{(II)}\qquad 2d + \Delta_2 d = \tfrac{3}{2}(B_{11} + B_{22}).$$

Δ_2 ist der 2. Differentiator von Beltrami. Für eine auf der Einheitskugel definierte Funktion $u(\varphi, \psi)$ ist nämlich

$$\Delta_2 u \equiv u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}u_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot u_{\psi\psi}.$$

Die Frage ist jetzt: Unter welchen Bedingungen existieren für die Differentialgleichungen (II) und (III) Lösungen, die auf der ganzen Einheitskugel stetig sind? Nur dann, so hatten wir früher erkannt, kann es geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung geben, die sich auf einen Punkt, den Nullpunkt, zusammenziehen lassen.

Eine solche inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, wie (I) und (II), besitzt nur dann eine im ganzen Variabilitätsbereich stetige Lösung, wenn die zugehörige homogene Gleichung, die durch Nullsetzen der rechten Seite hervorgeht, keine Lösung hat, oder falls sie

Lösungen besitzt, wenn die Funktion auf der rechten Seite orthogonal ist zu den Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Man kann das leicht einsehen, indem man etwa linker Hand und rechter Hand nach Kugelfunktionen entwickelt ($u = \Sigma P_\nu$; wobei $\Delta_2 P_\nu + \nu(\nu-1)P_\nu = 0$) und vergleicht.

Die homogene Differentialgleichung $2u + \Delta_2 u = 0$ hat als einzige Lösung die Kugelfunktionen erster Ordnung P_1, d. h. $u = y_1, y_2, y_3$ (bei $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$), wie man durch Einsetzen von $u = \Sigma P_\nu$ erkennt. Die Gleichungen (I) und (II) besitzen somit nur dann auf der ganzen Einheitskugel stetige Lösungen, wenn

$$(53)\quad \begin{cases} 1. \displaystyle\int\limits_{\Sigma y_i^2 = 1} (A_{11} + A_{22}) \cdot y_i \, dO = 0, \\ 2. \displaystyle\int\limits_{\Sigma y_i^2 = 1} (B_{11} + B_{22}) \, y_i \, dO = 0. \end{cases}$$

Ein Blick auf (46) lehrt, daß die Orthogonalitätsbedingung 1. identisch erfüllt ist für jedes Wertsystem der $\alpha_{ik,\,rs}$.

Die Orthogonalitätsbedingung 2. ist dagegen nicht identisch erfüllt.

$\Sigma B_{\mu\mu}$ geht aus $\Sigma A_{\mu\mu}$ dadurch hervor, daß man die $\alpha_{ik,\,rs}$ in den $A_{\mu\mu}$ durch $\sum\limits_t \beta^{(t)}_{ik,rs} \cdot y_t$ ersetzt. Demgemäß ist nach (46)

$$(54)\qquad \sum B_{\mu\mu} = \sum_{i,k,t} \beta^{(t)}_{ik,ik} y_i^2 y_t - 2 \sum_{i,k,r,t} \beta^{(t)}_{ir,rk} y_i y_k y_t.$$

Es wird somit die zweite Orthogonalitätsbedingung:

$$(55)\qquad \int\limits_{\Sigma y_i^2 = 1} \Big\{ \sum_{i,k,t} \beta^{(t)}_{ik,ik} y_i^2 y_t \cdot y_\nu - 2 \sum_{\substack{i,k,r,t \\ i \neq k}} \beta^{(t)}_{ir,rk} y_i y_k y_t y_\nu \Big\} dO = 0$$

für $\nu = 1, 2, 3$.

Von der ersten Summe verschwinden nun sämtliche Integrale bis auf die, für die $t = i = \nu$, und für die $i \neq \nu$, $t = \nu$ ist; und von der zweiten Summe bis auf die, für die $t = i$, $k = \nu$, und für die $t = k$, $i = \nu$ ist. Es wird somit (55):

$$(56)\begin{cases} \displaystyle\int y_i^4 \, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + \int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - 2\int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \Big(\sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ir,r\nu} + \sum_{\substack{r,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{\nu r,rk} \Big) = 0, \\ \displaystyle\int y_i^4 \, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + \int y_i^2 y_\nu^2 \, dO \cdot \Big\{ \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu,\, k = \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} + \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu,\, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - 2 \Big(\sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ir,r\nu} + \sum_{\substack{r,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{rk,\nu r} \Big) \Big\} = 0 \\ \displaystyle\int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2) \, dO \cdot \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + 2\int y_i^2 y_k^2 \, dO \cdot \Big\{ \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu,\, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} - \sum_{\substack{i,k \\ i \neq \nu}} \beta^{(i)}_{ik,k\nu} - \sum_{\substack{i,k \\ k \neq \nu}} \beta^{(k)}_{ik,\nu k} \Big\} = 0. \end{cases}$$

Wir hatten früher, um der Metrik des Raumes ein Linienelement eindeutig zuzuordnen, Normierungen eingeführt, und zwar neben anderen die Normierungsgleichungen (31):

$$\beta^{(t)}_{ik,rs} + \beta^{(s)}_{ik,tr} + \beta^{(r)}_{ik,st} = 0.$$

Es ist also

$$-\beta^{(k)}_{ik,\nu i} - \beta^{(i)}_{ik,k\nu} = \beta^{(\nu)}_{ik,ik}.$$

Es wird somit (56):

$$\text{(57)} \qquad \int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2)\, dO \sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + 4 \cdot \int y_i^2 y_k^2\, dO \cdot \sum_{\substack{ik \\ i \neq \nu,\, k \neq \nu}} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} = 0$$

für $\nu = 1, 2, 3.$

Für unseren vorliegenden Fall von 3 Dimensionen lautet (57) für $\nu = 1$ ausführlich geschrieben:

$$\text{(58)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{15}\pi \left(\beta^{(1)}_{12,12} + \beta^{(1)}_{31,31}\right) + \frac{16}{15}\pi \beta^{(1)}_{23,23} = 0\,, \\ \qquad \beta^{(1)}_{23,23} + \beta^{(1)}_{31,31} + \beta^{(1)}_{12,12} = 0\,, \\ \text{für } \nu = 2 \text{ und } \nu = 3 \\ \qquad \beta^{(2)}_{23,23} + \beta^{(2)}_{31,31} + \beta^{(2)}_{12,12} = 0\,, \\ \qquad \beta^{(3)}_{23,23} + \beta^{(3)}_{31,31} + \beta^{(3)}_{12,12} = 0\,. \end{array} \right.$$

Was bedeutet das nun für die Geometrie des Raumes? $\Sigma \alpha_{ik,\,ik}$ war die Ortsinvariante der Raumkrümmung, die $\alpha_{ik,\,rs}$ waren die Komponenten des Krümmungstensors im Nullpunkt, die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ deren Ableitungen in der y_t-Richtung (34). Es ist somit die Änderung der Ortsinvariante — der Gaußschen Krümmung des Raumes — bei einer Verrückung des Nullpunktes um $\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3$:

$$\delta K = \left(\beta^{(1)}_{23,23} + \beta^{(1)}_{31,31} + \beta^{(1)}_{12,12}\right)\delta y_1 + \left(\beta^{(2)}_{23,23} + \beta^{(2)}_{31,31} + \beta^{(2)}_{12,12}\right)\delta y_2 + \left(\beta^{(3)}_{23,23} + \beta^{(3)}_{31,31} + \beta^{(3)}_{12,12}\right)\delta y_3\,.$$

Die Gleichungen (58) besagen also:

Im Nullpunkt muß die skalare, die Gaußsche Krümmung des Raumes stationär sein. Da der Nullpunkt ein beliebiger Raumpunkt war, so folgt der Satz:

Wenn es in einem Riemannschen Raum geschlossene Flächen konstanter mittlerer Krümmung gibt, die sich in der gekennzeichneten Weise zusammenziehen lassen, so hat notwendig der Raum überall die gleiche Gaußsche Krümmung.

Dieser Satz gilt nicht nur für einen Raum von 3 Dimensionen, er gilt in gleicher Weise auch für den n-dimensionalen Riemann-Raum. Das soll noch kurz gezeigt werden.

wir bereits, auch für n Dimensionen gültig, gefunden. Sie sind durch (57) ausgedrückt, wo jetzt ν von 1 bis n läuft.

Es ist nun wegen $(\Sigma y_i^2)^2 = 1$

$$\int y_i^4 dO + (n-1)\int y_i^2 y_k^2 = \frac{O}{n},$$

worin O die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel bedeutet:

$$O = \int\limits_{\varphi_1=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi_2=0}^{\pi} \cdots \int\limits_{\varphi_{n-2}=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi_{n-1}=0}^{2\pi} s_1^{n-2} \cdot s_2^{n-3} \cdots s_{n-2} \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}.$$

Ferner ist

$$\int y_i^4 dO = \int y_1^4 dO = \int c_1^4 \cdot s_1^{n-2} \cdot s_2^{n-3} \ldots s_{n-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1} = \frac{3O}{n(n+2)},$$

so daß

$$\int y_i^2 y_k^2 dO = \frac{O}{n(n+2)}$$

und

$$\int (y_i^4 + y_i^2 y_k^2) dO = 4 \int y_i^4 y_k^2 \, dO$$

und damit wird die Bedingung für die $\beta^t_{ik,rs}$ (57)

$$\sum_k \beta^{(\nu)}_{\nu k,\nu k} + \sum_{i \neq \nu, k \neq \nu} \beta^{(\nu)}_{ik,ik} = 0,$$

was für die Metrik des n-dimensionalen Raumes die gleiche Bedeutung hat wie die Gleichungen (58) für den Raum von 3 Dimensionen.

Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Mathematisches Seminar der Hamburgischen Universität, Oktober 1920.

§ 11.

Die Flächen $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_{n-1}}\right)=$ konst. im Raum von n Dimensionen.

Für den Raum von n Dimensionen läßt sich in ganz entsprechender Weise schließen wie für den dreidimensionalen. Nach (28a) ist die mittlere Krümmung der Fläche $x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$

$$\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\ldots+\frac{1}{\varrho_{n-1}}\right)=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\sum\gamma'_{\mu\nu}\,\frac{\Gamma_{\mu\nu}}{|\gamma_{\mu\nu}|}\,.$$

Für die Fläche $r = r(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1})$ ist nach (26a) und (49)

$$|\gamma_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} r_{\varphi_1}^2+G_{11}; & r_{\varphi_1}r_{\varphi_2}+G_{12}; & \ldots\ldots \\ r_{\varphi_1}r_{\varphi_2}+G_{12}; & r_{\varphi_2}^2+G_{22}; & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & r_{\varphi_{n-1}}^2+G_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Bedenkt man, daß die r_{φ_ν} von der Ordnung ϱ^3, die $G_{\mu\mu}$ von der Ordnung ϱ^2 und die $G_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ von der Ordnung ϱ^4 sind, so erkennt man leicht, daß bis zu der Näherung, die uns die Differentialgleichungen (II) und (III) lieferten, folgendes gilt: Die Glieder $\mu \neq \nu$ kommen neben den Gliedern $\mu = \nu$ nicht zur Geltung. Es ist [vgl. die Gleichungen (50), die sich gemäß (25) für n Dimensionen fortsetzen lassen]

$$\xi_1 = -1 + (\varrho^4) + \ldots$$

$$\xi_{\nu+1} = \frac{r_{\varphi_\nu}}{G_{\nu\nu}} + \ldots \quad = \frac{\varrho}{s_1^2\ldots s_{\nu-1}^2}\left(c_{\varphi_\nu} + d_{\varphi_\nu}\varrho + \ldots\quad\right); \quad (s_0 = 1)$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned}\delta G_{\mu\mu} &= \frac{\partial G_{\mu\mu}}{\partial r}\,\xi_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial G_{\mu\mu}}{\partial\varphi_\nu}\,\xi_{\nu+1} \\ &= -2\varrho\cdot s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{\mu-1}^2\cdot\Big\{1+\Big(c+2A_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}-\frac{c_2}{s_2}\cdot\frac{1}{s_1^2}c_{\varphi_2}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{\mu-1}}\cdot\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-2}^2}\cdot c_{\varphi_{\mu-1}}\Big) \\ &\qquad + \Big(d+\frac{5}{2}B_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}d_{\varphi_1}-\frac{c_2}{s_2}\cdot\frac{1}{s_1^2}d_{\varphi_2}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{n-1}}\cdot\frac{1}{s_1^2\ldots s_{n-2}^2}\cdot d_{\varphi_{n-1}}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

$$\underset{\mu\neq\nu}{\delta G_{\mu\nu}} = (\varrho^3) + \ldots$$

Nunmehr wird

$$\begin{aligned}\gamma'_{\mu\mu} &= -\left(2\sum g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial\xi_k}{\partial u_\mu}+\sum\delta g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}\frac{\partial x_k}{\partial u_\mu}\right) \\ &= -\left(2G_{\mu\mu}\frac{\partial\xi_{\mu+1}}{\partial\varphi_\mu}+\ldots+\delta G_{\mu\mu}+\ldots\right) \\ &= -2\varrho^3\left\{c_{\varphi_\mu\varphi_\mu}+d_{\varphi_\mu\varphi_\mu}\varrho+\ldots\right\}-\delta G_{\mu\mu} \\ &= 2\varrho s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{\mu-1}^2\Big\{1+\varrho^2\Big(c+2A_{\mu\mu}-\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}-\ldots\frac{c_{\mu-1}}{s_{\mu-1}}\,\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-2}^2}\,c_{\varphi_{\mu-1}}-\frac{1}{s_1^2\ldots s_{\mu-1}^2}\cdot c_{\varphi_\mu\varphi_\mu}\Big) \\ &\qquad + \varrho^3(d+\ldots)\,.\end{aligned}$$

Da schließlich

$$\frac{\Gamma_{\mu\mu}}{|\gamma_{\mu\nu}|}=\frac{1}{G_{\mu\mu}}=\frac{1}{\varrho^2\cdot s_1^2\ldots s_{\mu-1}^2}\cdot\{1-(2c+A_{\mu\mu})\varrho^2-(2d+B_{\mu\mu})\varrho^3-\ldots\}$$

zu setzen ist, so bekommen wir die Identität

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho}\Big\{1-\frac{\varrho^2}{n-1}\Big((n-1)c+(n-2)\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}+\frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}c_{\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\ldots s_{n-3}^2}\cdot\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}}c_{\varphi_{n-2}}$$

$$+c_{\varphi_1\varphi_1}+\frac{1}{s_1^2}c_{\varphi_2\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\ldots s_{n-2}^2}c_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}}-\Sigma A_{\mu\mu}\Big)$$

$$+\Big((n-1)d+(n-2)\frac{c_1}{s_1}d_{\varphi_1}+\frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}d_{\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}}d_{\varphi-2}$$

$$+d_{\varphi_1\varphi_1}+\frac{1}{s_1^2}d_{\varphi_2\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-2}^2}\cdot d_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}}-\frac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}\Big)+\ldots$$

Koeffizientenvergleichung liefert:

$$\text{(I)}\quad (n-1)c+(n-2)\frac{c_1}{s_1}c_{\varphi_1}+\frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}c_{\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}}\cdot c_{\varphi_{n-2}}$$

$$+c_{\varphi_1\varphi_1}+\frac{1}{s_1^2}c_{\varphi_2\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-2}^2}c_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}}=\Sigma A_{\mu\mu}\,.$$

$$\text{(II)}\quad (n-1)d+(n-2)\frac{c_1}{s_1}d_{\varphi_1}+\frac{n-3}{s_1^2}\frac{c_2}{s_2}d_{\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-3}^2}\frac{c_{n-2}}{s_{n-2}}d_{\varphi_{n-2}}$$

$$+d_{\varphi_1\varphi_1}+\frac{1}{s_1^2}d_{\varphi_2\varphi_2}+\ldots\frac{1}{s_1^2\cdot s_2^2\ldots s_{n-2}^2}d_{\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}}=\frac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}\,.$$

Und das sind genau dieselben Differentialgleichungen für den Raum von n Dimensionen, wie wir früher für den dreidimensionalen gefunden hatten. Wir können schreiben:

$$\text{(I)}\qquad (n-1)c+\Delta_2 c=\Sigma A_{\mu\mu}\,,$$

$$\text{(II)}\qquad (n-1)d+\Delta_2 d=\tfrac{3}{2}\Sigma B_{\mu\mu}\,.$$

Darin ist $\Delta_2 u$ wieder der 2. Differentiator für die auf der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel definierte Funktion $u(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{n-1})$.

Entwickelung nach Kugelfunktionen ($u=\Sigma P_\nu$; wobei jetzt $\Delta_2 P_\nu+\nu(\nu+n-2)P_\nu=0$ [7])) liefert die gleichen Schlüsse wie früher. Die einzige Lösung der homogenen Gleichung $(n-1)u+\Delta_2 u=0$ ist die erste Kugelfunktion. Denn die Differentialgleichung der Kugelfunktionen, in sie eingeführt, gibt für ν die Gleichung:

$$\nu(\nu+n-2)=n-1,$$

aus der $\nu=1$ folgt.

Es müssen also einerseits $\Sigma A_{\mu\mu}$, andererseits $\Sigma B_{\mu\mu}$ zu sämtlichen y_i orthogonal sein, wenn jede der Gleichungen (I) und (II) eine auf der ganzen Einheitskugel stetige Lösung haben soll. Die Bedingungen dafür hatten

[7]) Vgl. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 1 (1878), S. 461.