

А. Н. КРЫЛОВ**О РАСЧЕТЕ НАГРЕВАНИЯ МАСЛЯНОГО КАБЕЛЯ ПРИ КОРОТКОМ
ЗАМЫКАНИИ¹**

Дается численный метод расчета нагревания кабеля при коротком замыкании на основе применения метода наименьших квадратов к приближенному решению уравнения теплопроводности.

§ 1. Завод «Севкабель» обратился ко мне за указаниями о способе расчета нагревания масляного кабеля в течение непродолжительного времени (около 3 сек.), следующего за коротким замыканием.

Я указал на обычный прием решения подобного рода задач по методе фундаментальных функций, в данном случае бесселевых, с применением для определения коэффициентов разложений, удовлетворяющих начальным условиям, способа наименьших квадратов, если не удастся представить эти коэффициенты в виде определенных интегралов.

Некоторые предварительные расчеты, произведенные заводом, давали основание полагать, что в разложениях достаточно брать 8 первых членов; тогда вычисление по методе наименьших квадратов, если его вести на три знака логарифмической линейкой, взяв 48 условных уравнений и не вычисляя ни весов, ни вероятных ошибок, занимает у привычного к такой работе вычислителя около 16—20 час.

Но затем у меня возникло сомнение, не встретятся ли при решении этой задачи такие затруднения, при которых обычный способ решения окажется неприменимым. Поэтому я сделал попытку развить все необходимые общие формулы, не производя числовых расчетов. Оказалось, что единственное затруднение состоит в том, что, строго говоря, те функции, которыми приходится пользоваться, не являются фундаментальными, ибо они между собою не ортогональны, нахождение же «весов», которыми ортогональность достигается, весьма затруднительно; поэтому практически приходится прибегать к методу наименьших квадратов, чтобы получить приближенные разложения, наметив в буквенной форме лишь общий ход вычислений, как о том указывается ниже.

¹ Доложено 21 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

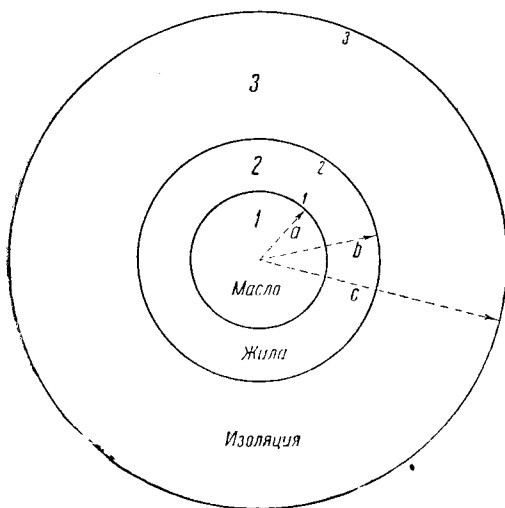
В виду этой особенности поставленной задачи я позволяю себе изложить ее в надежде, что кто-либо другой укажет более изящный способ решения, а главное, требующий меньшей затраты вычислительной работы.

§ 2. Поперечное сечение кабеля изображено схематически на чертеже. Напряжение весьма высокое (100 000 V), но сечение кабеля таково, что при нормальной силе тока устанавливается тепловое состояние кабеля, которое не вызывает его порчи.

Не то будет при случайном коротком замыкании: ток почти мгновенно достигнет громадной силы (свыше 10 000 А); между тем автома-

тические выключатели требуют около 3 сек., чтобы выключить генератор. Отсюда задача об определении теплового состояния кабеля в любой момент времени после короткого замыкания, причем время это не превышает 3 сек.

Итак, мы делаем следующее основное допущение: сила тока в жиле устанавливается гораздо быстрее, нежели происходит нагревание кабеля, поэтому принимаем, что все время процесса сила тока постоянная, а значит, с момента



$t = 0$ происходит постоянное на каждую единицу длины кабеля выделение тепла в жиле и с этого же момента происходит усиленная против нормальной отдача тепла маслу и изоляции.

Кроме того, делается допущение, что все термические элементы (теплоемкость, теплопроводность, теплоотдача) от температуры не зависят и остаются постоянными. Таково задание, сформулированное в соответствии с предъявленными мне «Севкабелем» требованиями.

Систему единиц берем CGS. Температуру выражаем в градусах Цельсия, причем за начальный уровень принимаем не температуру таяния льда, а температуру почвы, ибо это удобнее при развитии формул. Теплоемкость будем выражать в малых калориях, относя ее к единице массы, т. е. к грамму. Таким образом единицы будут:

Количество тепла	кал (малая калория),
Теплопроводность	$\frac{\text{кал}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}}$,
Теплоемкость	$\frac{\text{кал}}{\text{г}} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}}$,
Теплоотдача	$\frac{\text{кал}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}}$,
Плотность	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Соответственно схеме сечения кабеля примем следующие обозначения термических элементов различных средин, приписывая маслу индекс 1, жиле—индекс 2, изоляции— индекс 3:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Плотность} & \delta_i \\ \text{Теплоемкость} & K_i \\ \text{Теплопроводность} & \eta_i \\ \text{Постоянная} & k_i = \frac{\eta_i}{K_i \delta_i} \\ \text{Теплоотдача} & H_i \\ \text{Постоянная} & h_i = \frac{H_i}{K_i \delta_i} \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3)$$

Индекс i у H соответствует номеру поверхности.

§ 3. Обозначим через $v_i(r, t) = v_i$, ($i = 1, 2, 3$) температуру в момент времени t в слое, лежащем в расстоянии r от оси кабеля, беря значок i соответственно среде.

Поставленная задача сводится к следующей математической: требуется определить функции v_1, v_2, v_3 , удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям (I), граничным условиям (II) и начальным условиям (III).

1°. Дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial v_1}{\partial t} = k_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right), & (1) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = k_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) + \frac{2Qr}{K_2(b^2 - a^2)}, & (2) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} = k_3 \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} \right). & (3) \end{array} \right\} \quad (I)$$

Здесь Q есть выделяемое в 1 сек. на каждый сантиметр длины кабеля количество тепла после короткого замыкания.

2°. Для составления граничных условий принимаем: сквозь каждую поверхность раздела двух смежных средин проходит в 1 сек. количество тепла, пропорциональное разности (перепаду) температур по обе стороны этой поверхности, так что это количество протекающего тепла будет:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a & \dots 2\pi a \cdot H_1 [v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ \text{» } r = b & \dots 2\pi b \cdot H_2 [v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ \text{» } r = c & \dots 2\pi c \cdot H_3 v_3(c, t). \end{aligned}$$

Соответствующие этому количеству тепла тепловые потоки в смежности с поверхностью раздела будут пропорциональны градиенту температуры и теплопроводности, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \text{ будет: для масла} & \quad 2\pi a \eta_1 \left(-\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r=a}, \\ \text{» жилы} & \quad 2\pi a \eta_2 \left(-\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=a}, \\ \text{при } r = b \text{ будет: »} & \quad 2\pi b \eta_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=b}, \end{aligned}$$

для изоляции $2\pi b \gamma_{13} \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} \right)_{r=b}$,
 при $r=c$ будет: » » $2\pi c \gamma_{13} \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} \right)_{r=c}$.

Положим для сокращения письма

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_1}{\gamma_{11}} &= h_1, & \frac{H}{\gamma_{12}} &= l_1, \\ \frac{H_2}{\gamma_{12}} &= h_2, & \frac{H_2}{\gamma_{13}} &= l_2, \\ \frac{H_3}{\gamma_{13}} &= h_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда получим следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } v_1: \text{ при } r=0 & \text{ должно быть } v_1(0, t) = \text{конечной величины;} \\ & \text{» } r=a & \text{» } \left(-\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= h_1[v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ \text{для } v_2: \text{ при } r=a & \text{» } \left(-\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=a} &= l_1[v_2(a, t) - v_1(a, t)], \\ & \text{» } r=b & \text{» } \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=b} &= h_2[v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ \text{для } v_3: \text{ при } r=b & \text{» } \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} \right)_{r=b} &= l_2[v_2(b, t) - v_3(b, t)], \\ & \text{» } r=c & \text{» } \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} \right)_{r=c} &= h_3 v_3(c, t). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Все эти равенства должны иметь место при всяком значении времени t .

3°. Наконец, начальные условия относятся к начальному моменту $t=0$ и выражаются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } v_1: \dots (v_1)_{t=0} &= v_1(r, 0) & 0 \leq r \leq a, \\ & \text{» } v_2: \dots (v_2)_{t=0} &= v_2(r, 0) & a \leq r \leq b, \\ & \text{» } v_3: \dots (v_3)_{t=0} &= v_3(r, 0) & b \leq r \leq c, \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

причем $v_1(r, 0)$, $v_2(r, 0)$, $v_3(r, 0)$ будут известные функции от r в каждом из указанных промежутков. Определение этих функций показано ниже.

§ 4. Решение начинаем с определения начального теплового состояния кабеля, когда по нему идет ток нормальной силы и в жиле на 1 см длины развивается в 1 сек. количество тепла q . Ясно, что при таком установившемся состоянии температура масла (предполагая, что оно не просачивается) есть величина постоянная, равная температуре жилы при $r=a$. Вместе с тем температуры жилы и изоляции не зависят от времени t , тепловой же поток постоянный и равен q .

Таким образом для определения начального состояния имеем следующие уравнения, при само собой понятном обозначении:

$$\begin{aligned} v_{10} &= v_{20}(a), \\ r \frac{\partial v_{20}}{\partial r} &= \frac{q}{2\pi\gamma_{12}}, \\ r \frac{\partial v_{30}}{\partial r} &= \frac{q}{2\pi\gamma_{13}} \end{aligned}$$

и условия

$$\begin{aligned} 2\pi b \cdot H_2 [\varphi_{20}(b) - \varphi_{30}(b)] &= q, \\ 2\pi c H_3 \varphi_{30}(c) &= q. \end{aligned}$$

Откуда легко находим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{10} = \varphi_1(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{\eta_2} \lg \frac{a}{b} + \frac{1}{\eta_3} \lg \frac{b}{c} + \frac{1}{cH_3} + \frac{1}{bH_2} \right], \\ \varphi_{20} = \varphi_2(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{\eta_2} \lg \frac{r}{b} + \frac{1}{\eta_3} \lg \frac{b}{c} + \frac{1}{cH_3} + \frac{1}{bH_2} \right], \\ \varphi_{30} = \varphi_3(r, 0) &= \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{\eta_3} \lg \frac{r}{c} + \frac{1}{cH_3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

§ 5. Заменяя в формулах (5) величину q через Q , получим те предельные значения функций φ_1 , φ_2 , φ_3 , которые они получают при $t = \infty$; но эти предельные значения имеют лишь чисто математический смысл, физического же смысла не имеют, ибо они получаются в предположении, что все термические постоянные сохраняют свои значения, не зависящие от температуры, сколь бы эта температура высока ни была; между тем эта температура окажется столь высока, что весь кабель сгорит гораздо раньше, нежели φ_1 , φ_2 , φ_3 достигнут своих предельных значений.

§ 6. Переходя к определению неустановившегося теплового состояния кабеля, мы начнем с разыскания частных решений уравнений § 3, чтобы в дальнейшем иметь дело лишь с уравнениями однородными, т. е. без свободного члена.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(r, t) &= u_1(r, t) + V_1(r), \\ \varphi_2(r, t) &= u_2(r, t) + V_2(r), \\ \varphi_3(r, t) &= u_3(r, t) + V_3(r), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

мы видим, что величины $V_1(r)$, $V_2(r)$, $V_3(r)$ определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_1}{dr} &= 0, \\ \frac{d^2 V_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_2}{dr} + \frac{2Q}{k_2 K_2 (b^2 - a^2)} \cdot r &= 0, \\ \frac{d^2 V_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_3}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и граничными условиями, которые мы выберем так, чтобы условия для $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$ были те же самые, как и для $\varphi_1(r, t)$, $\varphi_2(r, t)$, $\varphi_3(r, t)$, т. е. (II) с заменой в них букв φ на u .

Таким образом граничные условия для V_1 , V_2 , V_3 будут:

$$\left. \begin{aligned} V_1(0) &= \text{конечной величине,} \\ -\left(\frac{dV_1}{dr}\right)_{r=a} &= h_1[V_2(a) - V_1(a)], \\ -\left(\frac{dV_2}{dr}\right)_{r=a} &= l_1[V_2(a) - V_1(a)], \\ \left(\frac{dV_2}{dr}\right)_{r=b} &= h_2[V_2(b) - V_3(b)], \\ \left(\frac{dV_3}{dr}\right)_{r=b} &= l_2[V_2(b) - V_3(b)], \\ \left(\frac{dV_3}{dr}\right)_{r=c} &= h_3 V_3(c). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обозначим для краткости

$$\frac{2Q}{k_2 K_2(b^2 - a^2)} = \frac{2Q \delta_2}{\eta_2(b^2 - a^2)} = m. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (7) получим:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= L_1 \lg r + L_2, \\ V_2 &= -\frac{mr^3}{9} + L_3 \lg r + L_4, \\ V_3 &= L_5 \lg r + L_6, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. Именно будет:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0; \\ L_2 &= \frac{m}{9}(b^3 - a^3) - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[\frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] - \frac{ma^3}{3} \lg \frac{a}{b}, \\ L_3 &= \frac{ma^3}{3}; \\ L_4 &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[\frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] + \frac{mb^3}{9} - \frac{ma^3}{3} \lg b, \\ L_5 &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3} \cdot \frac{l_2}{h_2}, \\ L_6 &= -\frac{m}{3}(b^3 - a^3) \frac{l_2}{h_2} \left[\frac{1}{h_3 c} - \lg c \right]. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} V_1(r) &= \frac{m}{9}(b^3 - a^3) - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[\frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right] - \frac{ma^3}{3} \lg \frac{a}{b}, \\ V_2(r) &= \frac{m}{9}(b^3 - r^3) + \frac{ma^3}{3} \lg \frac{r}{b} - \frac{m(b^3 - a^3)}{3h_2} \left[\frac{1}{b} + \frac{l_2}{h_3 c} + l_2 \lg \frac{b}{c} \right], \\ V_3(r) &= -\frac{m(b^3 - a^3)}{3} \frac{l_2}{h_2} \left[\lg \frac{r}{c} + \frac{1}{h_3 c} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти частные решения и надо прибавить к $u_1(r, t)$, $u_2(r, t)$, $u_3(r, t)$, определяемым однородными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= k_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= k_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= k_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и граничными условиями (II), в которых надо вместо букв $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ написать соответственно u_1, u_2, u_3 .

Что же касается начальных условий, то они будут:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, 0) + V_1(r) &= \varphi_1(r, 0), \\ u_2(r, 0) + V_2(r) &= \varphi_2(r, 0), \\ u_3(r, 0) + V_3(r) &= \varphi_3(r, 0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

причем $\varphi_1(r, 0), \varphi_2(r, 0), \varphi_3(r, 0)$ даются формулами (5) и величина $V_1(r), V_2(r), V_3(r)$ —формулами (11).

§ 7. Переходим к нахождению величин u_1, u_2, u_3 , определяемых уравнениями (12), граничными условиями (II), с указанной выше заменой букв, и начальными условиями (13).

Как видно, все три дифференциальные уравнения (12) одного типа, именно (опустив значки):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (14)$$

Будем, как обычно, искать решение этого уравнения под видом суммы

$$u = \sum RT, \quad (15)$$

каждый член которой в отдельности удовлетворяет уравнению (14) и граничным условиям, вся же сумма сверх того и начальным условиям, причем R есть функция только переменной r , T —функция только переменной t .

Отсюда, обозначая производные значками, следует:

$$RT' = kT(R'' + \frac{1}{r}R'). \quad (16)$$

Следовательно, должно быть

$$\frac{T'}{T} = \frac{k}{R} \left[R'' + \frac{1}{r}R' \right] = -\lambda^2, \quad (17)$$

причем λ^2 —любое постоянное число.

Из уравнений (17), которые напомним так:

$$\left. \begin{aligned} T' + \lambda^2 T &= 0, \\ R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} \right)^2 R &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

имеем:

$$\begin{aligned} T &= L e^{-\lambda^2 t}, \\ R &= M I_0 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right) + N Y_0 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right), \end{aligned}$$

причем L, M, N —произвольные постоянные, I_0, Y_0 —бесселевы функции нулевого индекса.

Так как в сумму $\sum RT$ войдут лишь произведения LM и LN , которые суть такие же произвольные постоянные, как M и N , то без ущерба общности можно полагать $L = 1$ и писать

$$\left. \begin{aligned} T &= e^{-\lambda^2 t} \\ R &= M I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right) + N Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k}} r \right), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

опуская индексы «нуль», ибо функций иного индекса в нашей задаче встречаться не будет. Что же касается аргументов, то для функции u_1 надо полагать $k = k_1$, для функций u_2 и u_3 соответственно брать $k = k_2$ и $k = k_3$. Таким образом будет:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, t) &= \sum \left[AI \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r \right) + BY \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \\ u_2(r, t) &= \sum \left[CI \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r \right) + DY \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \\ u_3(r, t) &= \sum \left[EI \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r \right) + FY \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} r \right) \right] e^{-\lambda^2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

причем $A, B, C, D, E, F, \lambda$ могут принимать какие-угодно постоянные значения. Выражения (20) будут удовлетворять однородным дифференциальным уравнениям (12).

Чтобы удовлетворить граничным условиям (II), надо выбрать постоянные A, B, C, D, E, F и λ так, чтобы каждая из функций R в отдельности удовлетворяла граничным условиям.

Первое из этих условий дает $AI(0) + BY(0) = \text{конечной величине}$; отсюда следует $B = 0$.

Затем имеем:

$$\begin{aligned} A \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} I' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) - h_1 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) \right] + Ch_1 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + Dh_1 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) &= 0, \\ -Al_1 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_1}} a \right) + C \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + l_1 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) \right] + \\ + D \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) + l_1 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} a \right) \right] &= 0, \\ C \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} I' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - h_2 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) \right] + D \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} Y' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - \right. \\ \left. - h_2 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) \right] + Eh_2 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + Fh_2 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) &= 0, \\ -Cl_2 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) - Dl_2 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_2}} b \right) + E \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + \right. \\ \left. + l_2 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) \right] + F \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) + l_2 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} b \right) \right] &= 0, \\ E \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} I' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) - h_3 I \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) \right] + \\ + F \left[\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} Y' \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) - h_3 Y \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k_3}} c \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

$\frac{\lambda}{V k_1} I' \left(\frac{\lambda}{V k_1} a \right) - h_1 I \left(\frac{\lambda}{V k_1} a \right)$	$h_1 I \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right)$	$h_1 Y \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right)$	0	0
$-l_1 I \left(\frac{\lambda}{V k_1} a \right)$	$\frac{\lambda}{V k_2} I' \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right) + l_1 I \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right)$	$\frac{\lambda}{V k_2} Y' \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right) + l_1 Y \left(\frac{\lambda}{V k_2} a \right)$	0	0
0	$\frac{\lambda}{V k_2} I' \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right) - h_2 I \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right)$	$\frac{\lambda}{V k_2} Y' \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right) - h_2 Y \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right)$	$h_2 I \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right)$	$h_2 Y \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right)$
0	$-l_2 I \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right)$	$-l_2 I \left(\frac{\lambda}{V k_2} b \right)$	$\frac{\lambda}{V k_3} I' \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right) + l_2 I \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right)$	$\frac{\lambda}{V k_3} Y' \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right) + l_2 Y \left(\frac{\lambda}{V k_3} b \right)$
0	0	0	$\frac{\lambda}{V k_3} I' \left(\frac{\lambda}{V k_3} c \right) - h_3 I \left(\frac{\lambda}{V k_3} c \right)$	$\frac{\lambda}{V k_3} Y' \left(\frac{\lambda}{V k_3} c \right) - h_3 Y \left(\frac{\lambda}{V k_3} c \right)$

$$0 = \Delta(\lambda) =$$

Условие совместности этих уравнений выражается уравнением (22), приведенным на отдельном листке.

Пусть корни этого уравнения суть:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i. \quad (23)$$

Это суть так называемые характеристические числа. Обозначим через $\Delta_1(\lambda_i)$, $\Delta_2(\lambda_i)$, $\Delta_3(\lambda_i)$, $\Delta_4(\lambda_i)$, $\Delta_5(\lambda_i)$ миноры определителя $\Delta(\lambda_i)$, соответствующие какой-либо строке, например первой. Тогда соответствующие корню λ_i значения постоянных A , C , D , E , F получаются из равенств:

$$\frac{A_i}{\Delta_1(\lambda_i)} = \frac{C_i}{\Delta_2(\lambda_i)} = \frac{D_i}{\Delta_3(\lambda_i)} = \frac{E_i}{\Delta_4(\lambda_i)} = \frac{F_i}{\Delta_5(\lambda_i)} = N_i, \quad (24)$$

т. е. будут

$$A_i = N_i \Delta_1(\lambda_i); \quad C_i = N_i \Delta_2(\lambda_i); \quad D_i = N_i \Delta_3(\lambda_i); \quad E_i = N_i \Delta_4(\lambda_i); \quad F_i = N_i \Delta_5(\lambda_i).$$

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \Delta_1(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}} r\right) \cdot e^{-\lambda_i^2 t}, \\ u_2(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[\Delta_2(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) \right] e^{-\lambda_i^2 t}, \\ u_3(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[\Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) \right] e^{-\lambda_i^2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Эти выражения при всяких значениях постоянных удовлетворяют дифференциальным уравнениям (12) и граничным условиям (II). Остается удовлетворить начальным условиям (13).

§ 8. На основании выражений (25) начальные условия будут:

$$\left. \begin{aligned} (0 \leq r \leq a), \quad & \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \Delta_1(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_1}} r\right) = u_1(r, 0), \\ (a \leq r \leq b), \quad & \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[\Delta_2(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_2}} r\right) \right] = u_2(r, 0), \\ (b \leq r \leq c), \quad & \sum_{i=1}^{i=\infty} N_i \left[\Delta_4(\lambda_i) I\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_i) Y\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{k_3}} r\right) \right] = u_3(r, 0), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

причем значения $u_1(r, 0)$, $u_2(r, 0)$, $u_3(r, 0)$ для соответствующих промежутков определяются формулами (13).

Положим, что каждый из промежутков

$$0 \text{ до } a; \quad a \text{ до } b; \quad b \text{ до } c$$

подразделен на $[n]$ частей, скажем, равных между собой, тогда, взяв в суммах (26) какое-либо конечное число j первых членов, выбирая это число j так, чтобы при $t = 0$ всеми дальнейшими членами можно было пренебречь, мы применим для вычисления коэффициентов N_i методу

причем функции $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \text{если } 0 \leq r \leq a, \text{ то } a(r) &= \Delta_1(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_1}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_1(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_1}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_1(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_1}} r\right); \\ \text{если } a \leq r \leq b, \text{ то } a(r) &= \Delta_2(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_1) Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_2}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_2(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_2) Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_2(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right) + \Delta_3(\lambda_3) Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_2}} r\right); \\ \text{если } b \leq r \leq c, \text{ то } a(r) &= \Delta_4(\lambda_1) I\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_1) Y\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k_3}} r\right), \\ b(r) &= \Delta_4(\lambda_2) I\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_2) Y\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{k_3}} r\right), \\ c(r) &= \Delta_4(\lambda_3) I\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right) + \Delta_5(\lambda_3) Y\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}} r\right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если бы удалось (например, применяя методу Коши и производя все сложные выкладки ею вызываемые) найти такие множители (веса) $p(r)$, $q(r)$, $s(r)$, при которых все функции $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ становятся ортогональными, то нормальные уравнения приняли бы вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \int_0^c p(r) [a(r)]^2 dr &= \int_0^c p(r) a(r) u(r) dr, \\ N_2 \int_0^c q(r) [b(r)]^2 dr &= \int_0^c q(r) b(r) u(r) dr, \\ N_3 \int_0^c s(r) [c(r)]^2 dr &= \int_0^c s(r) c(r) u(r) dr. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Но практически даже при $j=8$ потребуется меньше работы на вычисление всех 36 интегралов таких, как (29), нежели на развитие всех формул в методе Коши. Работа по вычислению интегралов значительно сократится, если взять $n=7$ и применять для вычисления интегралов формулу Чебышева для каждого из трех интервалов в отдельности.

Решение нормальных уравнений «приведением первого коэффициента к единице» подобно тому, как это изложено в моих «Лекциях о приближенных вычислениях», если вычисление вести на три знака при помощи 50-см логарифмической линейки, требует написания всего около 2200 цифр.

Наиболее трудная часть есть вычисление корней трансцендентного уравнения $\Delta(\lambda)=0$. Эта работа может быть облегчена тем, что для жилы постоянная k_2 весьма велика по сравнению с k_1 и k_3 , и в первом приближении можно принять $k_2=\infty$. Тогда уравнение $\Delta(\lambda)$ значительно упрощается и доставит приближенные значения корней λ , после чего нахождение более точных значений становится простым.

На подробностях численных вычислений, их расположения, схем, избежания утраты значащих цифр и пр. мы останавливаться не будем—всякий вычислитель распорядится применительно своим навыкам и привычкам.

В заключение я считаю долгом высказать свою глубочайшую благодарность В. А. Фоку, который, ознакомившись с содержанием этой работы по черновой рукописи, дал мне ряд весьма ценных указаний.

Академия Наук СССР.

**A. KRILOFF. ON THE HEATING OF A CABLE HAVING AN OIL CORE
DURING A SHORT CIRCUIT**

SUMMARY

A solution of the above problem is shown using for the determination of the coefficients in the developments the method of least squares.
