ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
DRITTER BAND
3

# THEORIE DER FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXER VERÄNDERLICHEN

VON

H. BEHNKE UND P. THULLEN

Published and Distributed in the Public Interest by
Authority of the Attorney General under License No. A-1381

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1934



ISBN-13: 978-3-642-98844-8 e-ISBN-13: 978-3-642-99659-7
DOI: 10.1007/978-3-642-99659-7

# Vorwort.

Die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen war in den letzten Jahren in zahlreichen Ländern Gegenstand mathematischer Forschung. Die große Zahl wissenschaftlicher Untersuchungen auf diesem Gebiete — in wenigen Jahren mehr als vorher in Jahrzehnten — macht es den interessierten Gelehrten schwer, sich in der Spezialliteratur zurechtzufinden. Hinzu kommt, daß der Ausgangspunkt und die Voraussetzungen — vor allem die unausgesprochenen — bei den verschiedenen Autoren mehr oder minder voneinander abweichen. Das veranlaßte den Herausgeber, uns zu einem Bericht über das gesamte Gebiet aufzufordern.

Nun darf keineswegs übersehen werden, daß mehrere allgemein verbreitete Gesamtdarstellungen vorliegen. Als ältestes Lehrbuch ist hier zu nennen: FORSYTH: Theorie of functions of two variables. Cambridge 1914, sodann der Enzyklopädieartikel von BIEBERBACH, abgeschlossen im Jahre 1922. Wenige Jahre später (1924, in zweiter Auflage 1929) erschien dann das Werk von OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie Band $II_1$, eine Darstellung, der wohl die meisten von uns ihre Einführung in diesen Stoff verdanken. Schließlich hat F. SEVERI 1931 einen Bericht verfaßt, der die rasche Entwicklung der Untersuchungen lebhaft widerspiegelt.

Die vorliegende Schrift steht in ihrem Aufbau zwischen einem Lehrbuch und einem enzyklopädischen Bericht.

Wir waren bestrebt, unter Verarbeitung der neuen Veröffentlichungen eine einheitliche Darstellung zu geben, in der die zugrunde liegenden Voraussetzungen klar herausgearbeitet sind. Bei diesem Ziel konnten wir uns im Aufbau nicht nach historischen Gesichtspunkten richten. Vielmehr schien es uns erforderlich, als erstes Kapitel eine neue Theorie der Bereiche *über* dem Raume von $n$ komplexen Veränderlichen — als Analogon zu den RIEMANNschen Flächen in der klassischen Funktionentheorie — aufzustellen. Bei der Eigenart der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist es nach den neuen Ergebnissen nicht möglich, einen großen Teil der allgemeinen Theorie zuerst für schlichte Bereiche aufzubauen, ohne nachher im Prinzip die Grundlagen noch einmal zu behandeln.

Das zweite Kapitel bringt die geometrischen Grundlagen. Mit dem dritten Kapitel — der Behandlung der elementaren Reihen — beginnt dann die Untersuchung der Funktionen selbst. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit dem von HARTOGS und E. E. LEVI bewiesenen

Kontinuitätssatz für Singularitätenmannigfaltigkeiten und seinen Folgerungen. Im Mittelpunkt des fünften Kapitels steht der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz; aus ihm folgt die Verteilung der Nullstellen und der außerwesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Das sechste Kapitel — die Theorie der Regularitätsbereiche — wird vom Begriff der Regularitätshüllen und dem Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit beherrscht. Der Abbildungstheorie ist das letzte Kapitel gewidmet. Hier schließen wir uns vor allem den Untersuchungen von H. CARTAN an, während die Metrik von CARATHÉODORY das Kapitel beschließt, obwohl sie historisch zuerst zu nennen wäre und einen so großen Anstoß zur Entwicklung der Abbildungstheorie gegeben hat; doch steht sie mit den vorangehenden Abschnitten in loserem Zusammenhang. Es folgt als Anhang dieses Kapitels ein kurzer Bericht über die BERGMANNsche Abbildungstheorie.

Wir haben uns bemüht, drei allgemeine Forderungen zu beachten, die uns dem Wesen einer Theorie der analytischen Funktionen zu entsprechen scheinen, aber in der Literatur keineswegs immer zur Geltung kommen.

1. Die endlichfernen Punkte des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind vor den unendlichfernen Punkten nicht ausgezeichnet, und darum ist eine Ausnahmestellung der unendlichfernen Punkte möglichst zu beseitigen.

2. Eine *komplexe* Funktionentheorie ist *komplex* aufzubauen; ein Zurückgreifen auf Real- und Imaginärteile ist zu vermeiden.

3. Die verschiedenen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind gleichberechtigt. Deshalb ist eine Zerlegung nach den einzelnen Veränderlichen und damit ein stufenweiser Aufbau der Probleme mit Hilfe der klassischen Funktionentheorie nach Möglichkeit zu unterlassen. Solche Zerlegungen, ständig angewandt, führen leicht zu rein formalen Übertragungen der klassischen Theorie.

Der von vornherein festgesetzte Umfang dieser Schrift legt uns starke Beschränkungen auf. Es ist uns aus diesem Grunde unmöglich, auf die Untersuchung spezieller Funktionen (so der algebraischen, periodischen, automorphen und ganzen Funktionen) einzugehen. Aber auch die ausführlichen Beweise für die zahlreichen Aussagen können nicht gebracht werden, ohne den Umfang der Schrift zu vervielfachen. Trotzdem haben wir an den wichtigsten Stellen den Beweisgang so zu skizzieren versucht, daß der geübte Leser die Grundzüge des Beweises daraus erkennen kann. Das mußte auch dort geschehen, wo der durch unser Programm bestimmte Aufbau in der Literatur nicht vorkommt. Sonst haben wir lediglich auf die veröffentlichten Beweise hingewiesen. Auch galt uns als Grundsatz, Dinge, die in den obenerwähnten Gesamtdarstellungen (insbesondere im OSGOODschen Lehrbuch) ausführlich behandelt werden, so kurz wie möglich zu besprechen.

Eine schwierige Entscheidung verlangte von uns die Frage, ob wir die Theorie von $n$ komplexen Veränderlichen nur für die *beiden* Veränderlichen $w$ und $z$ oder für die $n$ komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durchführen sollten. Zweifellos birgt die Verwendung der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Gefahr in sich, daß die Darstellung technisch zu kompliziert wird und dann der Plastik, um die wir redlich gerungen haben, entbehrt. Auf der anderen Seite belastet die alleinige Verwendung von $w$ und $z$ — immer unter der Voraussetzung, daß es sich hier um eine Funktionentheorie *mehrerer* Veränderlichen handelt — nicht nur das Gewissen mathematischer Pedanten. Als Ausweg haben wir einen Kompromiß gewählt. Überall dort, wo der Formelapparat für die Funktionen über dem Raume von $n$ komplexen Veränderlichen nicht erheblich größer ist als jener für die Funktionen $f(w, z)$ — und das gilt für den weit überwiegenden Teil dieser Schrift —, behandeln wir die Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. An den übrigen Stellen beschränken wir uns auf die Veränderlichen $w$ und $z$, das gilt vor allem dort, wo anschaulich Geometrisches wie die Kreiskörper und andere spezielle Bereiche hineinspielen. Nur in einzelnen Fällen werden wir durch sachliche Schwierigkeiten hierzu gezwungen. Wo dies eintritt, ist es jeweils hervorgehoben.

Zahlreiche Kollegen und jüngere Mathematiker haben mittelbar zur Gestaltung dieser Schrift beigetragen. Junge Kommilitonen gaben, seitdem der ältere von uns beiden vor einigen Jahren eine Vorlesung über dieses Gebiet und daran anschließend regelmäßig Seminare abhielt, durch ihr Interesse unserer Arbeit eine fruchtbare Resonanz. Manche Fachgenossen haben, im Anschluß an die Lektüre der ausgearbeiteten Vorlesung und an Gastvorträge in Münster, in Diskussionen und Korrespondenz mit uns zur Klärung vieler hier behandelter Fragen beigetragen. Erwähnt seien die Herren St. Bergmann, Carathéodory, H. Cartan, L. Fantappiè, Hartogs, Kneser, Toeplitz, Welke.

Eine ganz besondere Pflicht ist es uns, Herrn Professor H. Cartan in Straßburg, Herrn Professor H. Kneser in Greifswald und Ecc. Professor Severi in Rom für die ausführlichen Kritiken des Manuskriptes unsern Dank auszusprechen, die uns zu manchen Verbesserungen veranlaßten. Ebenso haben wir Herrn Privatdozenten Dr. G. Köthe und Herrn Dr. Peschl in Münster sowie Herrn Eichelbrenner in Rom für die Bereitwilligkeit und Mühe zu danken, mit der sie uns beim Lesen der Korrekturen unterstützt haben.

Münster i. W., Oktober 1933.

**H. Behnke. P. Thullen.**

# Inhaltsverzeichnis.

**Die abgekürzten Literaturhinweise im Text beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Berichtes. Dort befindet sich außerdem ein alphabetisches Verzeichnis der hier definierten Begriffe.**

* Die ab 1921 erschienene Literatur ist nach Möglichkeit vollständig berücksichtigt. (Ältere Literatur siehe auch BIEBERBACH, Enzyklopädieartikel.)

# Über den Begriff des analytischen Funktionselementes.

Den Begriff der analytischen Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ führen wir mit Hilfe konvergenter ($n$-facher) Potenzreihen

$$(1) \qquad \sum_{m_1, \ldots, m_n}^{\infty} a_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(z_1 - \alpha_1)^{m_1}(z_2 - \alpha_2)^{m_2} \ldots (z_n - \alpha_n)^{m_n}$$

ein. Die Reihe (1) mit dem Entwicklungspunkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ heiße dabei im Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ konvergent, wenn mindestens eine der einfachen Reihen, in die (1) angeordnet werden kann, im Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ konvergiert. *Aus der Konvergenz dieser Reihe im Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz für jede abgeschlossene Punktmenge, die ganz im Innern des* **Polyzylinders** $|z_i - \alpha_i| < |\beta_i - \alpha_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *liegt* (zitiert als Satz **A**). Ferner gibt es zu je $n-1$ nichtnegativen Zahlen $r_1, \ldots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \ldots, r_{n-1}$ eine nichtnegative Zahl $r_\nu$, so daß die Reihe (1) für alle Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ konvergiert, für die $|z_i - \alpha_i| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und divergiert für alle Punkte, für die $|z_i - \alpha_i| > r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Aus der ersten dieser beiden Aussagen ergibt sich insbesondere, daß die Punkte, in denen (1) konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, niemals innere Punkte der Menge von Konvergenzpunkten sein können. Die inneren Punkte dieser Menge bilden — falls überhaupt vorhanden — einen den Entwicklungspunkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ enthaltenden offenen Bereich, der als Konvergenzbereich von (1) bezeichnet wird. In bezug auf Konvergenzfragen der Reihe (1) interessieren uns späterhin nur die Punkte dieser Konvergenzbereiche. *Da hier absolute Konvergenz vorliegt, erübrigt es sich, anzugeben, in welcher Reihenfolge die Potenzreihe summiert werden soll.*

Wir können jetzt definieren: Die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — oder das Funktionselement $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — ist **analytisch im Punkte** $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, wenn sich $f$ in einem $2n$-dimensionalen Polyzylinder $\mathfrak{Z}$ durch eine dort konvergente Potenzreihe darstellen läßt. Da dann die Reihe (1) um jeden anderen Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ des Polyzylinders $\mathfrak{Z}$ in eine in der Umgebung von $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ konvergente Potenzreihe [mit $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ als Entwicklungspunkt] umgebildet werden kann, folgt, daß $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in sämtlichen inneren Punkten des Polyzylinders analytisch ist. (Völlig gleichbedeutend mit dem Ausdruck „analytische Funktion" gebrauchen wir den Ausdruck „**reguläre** Funktion".)

Wir halten uns also bei der Einführung der analytischen Funktionen ganz an den WEIERSTRASSschen Aufbau. Wollte man sich dem RIEMANNschen Vorgehen anschließen, so hätte man zu definieren: $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ heißt regulär im $2n$-dimensionalen Bereiche $\mathfrak{B}$, wenn in jedem Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ von $\mathfrak{B}$ die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existieren, d. h. die Funktionen $f(z_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, $f(\alpha_1, z_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), \ldots,$ $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, z_n)$ jeweils in den entsprechenden zweidimensionalen Bereichen im Sinne der klassischen Funktionentheorie (abgekürzt **Kl.Th.**) analytisch sind. Um die Äquivalenz beider Definitionen zu zeigen, hat man eine besondere Schwierigkeit zu überwinden. Damit eine nach RIEMANN in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von $P$ reguläre Funktion $f$ um $P$ in eine Potenzreihe nach den $n$ Veränderlichen entwickelt werden kann, muß der Nachweis der Stetigkeit von $f$ in $\mathfrak{U}$ erbracht werden (bzw. der Beschränktheit, woraus sich nach OSGOOD[1] allerdings schon die Stetigkeit schließen läßt). Das ist recht mühselig[2], während umgekehrt offensichtlich eine Funktion, die um $P$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, in einer Umgebung von $P$ nach $z_1, z_2, \ldots, z_n$ differentiierbar ist.

*Der Satz von der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung längs eines gegebenen Weges gilt* hier wie in der Kl.Th. Grundlegend ist dafür: $f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei regulär in dem $2n$-dimensionalen Polyzylinder $\mathfrak{Z}_1$, $f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in dem Polyzylinder $\mathfrak{Z}_2$; $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ mögen innere Punkte gemeinsam haben. In diesen Punkten möge $f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sein. Dann gibt es eine und nur eine Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die in $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ regulär, in $\mathfrak{Z}_1$ mit $f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und in $\mathfrak{Z}_2$ mit $f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ identisch ist.

---

[1] OSGOOD: Math. Ann. Bd. 62 (1905).

[2] Siehe HARTOGS [1]; OSGOOD: Lb. Kap. III, §§ 17—21 und oben S. 15.

Erstes Kapitel.

# Bereiche über dem erweiterten Raume.

## § 1. Der erweiterte Raum.

Wie in der Kl.Th. denken wir uns den (schlichten) endlichen Raum der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch geeignete Einführung unendlichferner Punkte so erweitert, daß jede unendliche Punktmenge des erweiterten Raumes dort mindestens einen Häufungspunkt besitzt, der erweiterte Raum also *geschlossen* (d. h. in sich kompakt) ist.

In der Kl.Th. führt man bekanntlich den Punkt „$\infty$" mit Hilfe der Transformationen $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ ein. Während diese Erweiterung der $z$-Ebene zugleich die einzig mögliche ist, kommen hier zur Abschließung des $R_{2n}$ viele Gruppen rationaler Transformationen in Frage. Üblich ist die Abschließung mittels der Gruppe $G$ der gebrochen linearen Transformationen

$$(G) \qquad Z_i = \frac{a_i z_i + b_i}{c_i z_i + b_i}, \qquad |a_i d_i - b_i c_i| \neq 0$$

wie mittels der Gruppe $\Gamma$ der projektiven Transformationen

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} Z_i = \dfrac{a_{0,i} + a_{1,i} z_1 + a_{2,i} z_2 + \cdots + a_{n,i} z_n}{b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_n z_n}, \\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad \dfrac{D(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \neq 0. \end{cases}$$

Für $n = 2$ sind zugleich $G$ und $\Gamma$ ($G$ evtl. kombiniert mit $Z_1 = z_2, Z_2 = z_1$) und ihre Untergruppen die *einzigen Gruppen* gebrochen linearer Transformationen. In diesem Falle gehört nämlich jede gebrochen lineare Transformation, deren Inverse wieder eine solche ist, entweder zu $G$ oder zu $\Gamma$ (evtl. nach Vertauschung der Koordinaten)[1].

Wir haben uns im folgenden für die Abschließung des $R_{2n}$ durch die projektive Gruppe $\Gamma$ — oder, was dasselbe bedeutet, mit Hilfe homogener komplexer Koordinaten — entschlossen.

Im projektiv erweiterten Raume sind sämtliche analytischen ($2n-2$-dimensionalen) Ebenen[2] gleichberechtigt; jede solche Ebene kann durch eine geeignete eineindeutige Transformation des (erweiterten) Raumes auf sich in jede andere übergeführt werden. Dagegen sind im $R_G$ —

[1] Zur Einführung der durch $G$ und $\Gamma$ (und andere Gruppen) erweiterten Räume siehe auch Osgood: Lb. und Severi [7]; bei Osgood wird der mittels $G$ erweiterte Raum $R_G$ der „Raum der Funktionentheorie" genannt.

[2] Vgl. Def. auf S. 26.

so sei der mittels der Gruppe $G$ erweiterte Raum bezeichnet — die Koordinatenebenen und die zu ihnen parallelen Ebenen $z_i =$ konst. vor den übrigen ausgezeichnet; bei einer eineindeutigen analytischen Transformation von $R_G$ auf sich gehen sie nur wieder in Ebenen $z_i = c$ über[1]. Weiter besitzt der projektiv erweiterte Raum $R_\Gamma$ genau *eine* „unendlichferne Ebene", $R_G$ aber deren $n$, die nur in die Ebenen $z_i = c$ übergeführt werden können, während in $R_\Gamma$ die unendlichferne Ebene durch eine eineindeutige analytische Transformation von $R_\Gamma$ in sich auf jede beliebige analytische Ebene abgebildet werden kann. Man beachte ferner, daß die ganzen linearen Transformationen, die den endlichen Raum eineindeutig auf sich abbilden, wohl $R_\Gamma$, nicht aber $R_G$ wieder eineindeutig in sich transformieren[2].

Es ist hiermit natürlich keineswegs gesagt, daß nicht bei speziellen Problemen eine andere Erweiterung des Raumes als die durch $\Gamma$ zweckmäßiger ist.

Homogene Koordinaten. Zur Definition des projektiv erweiterten Raumes führen wir zunächst homogene Koordinaten ein. Hierzu betrachten wir die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Systeme $(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ von $n + 1$ beliebigen komplexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$ mit Ausnahme von $(0, 0, \ldots, 0, 0)$. Zwei Systeme $(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ und $(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n, \tilde{w}_{n+1})$ heißen dabei *äquivalent,* falls es ein komplexes $\lambda \neq 0$ gibt, so daß $w_i = \lambda \tilde{w}_i$ $(i = 1, \ldots, n, n + 1)$.

Diese Äquivalenz ruft in $\mathfrak{S}$ eine Klasseneinteilung hervor. *Eine solche Klasse heißt ein Punkt $P$ des projektiven Raumes von $n$ komplexen Veränderlichen,* ferner ein System $(w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, w_{n+1}^{(0)})$ ein Repräsentant seiner Klasse bzw. des Punktes $P$ — wir schreiben $P(w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, w_{n+1}^{(0)})$. Die Gesamtheit aller Punkte $P(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ bildet den *projektiven Raum* von $n$ komplexen Veränderlichen — wir nennen ihn den **erweiterten $R_{2n}$** oder, falls keine Verwechslung möglich ist, kurz den $R_{2n}$.

*Die Punkte, für die $w_{n+1} = 0$, nennen wir die* **unendlichfernen Punkte,** *ihre Gesamtheit die* **unendlichferne Ebene** *des* $R_{2n}$. Jeder vorgegebene unendlichferne Punkt ist durch eine geeignete Transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} W_i = a_{i,1} w_1 + \cdots + a_{i,n} w_n + a_{i,n+1} w_{n+1} \\ i = 1, \ldots, n, n+1, \quad |a_{ik}| \neq 0 \end{cases}$$

in einen vorgegebenen endlichen Punkt transformierbar; ebenso läßt sich die unendlichferne Ebene $w_{n+1} = 0$ durch eine solche Transformation in jede beliebige $2n - 2$-dimensionale analytische Ebene überführen. Die

[1] Nach Osgood: Lb., S. 299 sind die Transformationen aus $G$ zugleich die einzigen überall eineindeutigen und analytischen Abbildungen von $R_G$ auf sich.

[2] Auf die Vorteile der Verwendung des Raumes $R_\Gamma$ hat insbesondere Severi hingewiesen; vgl. etwa Severi [7]. Siehe dort auch über die Abbildung des $R_\Gamma$ im Falle $n = 2$ auf eine endliche Mannigfaltigkeit des reell proj. $\bar{R}_8$.

Transformationen (1) bilden zugleich den erweiterten $R_{2n}$ eineindeutig auf sich ab.

Jedem *endlichen* Punkte $(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ entspricht auf Grund der Beziehung

$$(2) \qquad z_i = \frac{w_i}{w_{n+1}} \quad \text{bzw.} \quad w_i = \lambda z_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad w_{n+1} = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$$

eineindeutig ein Punkt $(z_1, \ldots, z_n)$ des gewöhnlichen (endlichen) Raumes der $n$ Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$; die $w_i$ nennen wir zum Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$ gehörige homogene Koordinaten.

Die Begriffe des Häufungspunktes, der Konvergenz und der *Stetigkeit* einer Funktion im erweiterten Raume führt man wie üblich ein; als *Umgebungen* eines unendlichfernen Punktes $P$ betrachte man dabei diejenigen $P$ enthaltenden Punktmengen, die bei einer Transformation (1), die $P$ in einen endlichen Punkt $P^*$ wirft, in Umgebungen von $P^*$ übergehen [dessen Umgebungen mittels der Zuordnungen (2) durch Umgebungen im gewöhnlichen endlichen Raume gegeben sind].

Jede unendliche Punktmenge im erweiterten $R_{2n}$ hat dort mindestens einen Häufungspunkt — *der erweiterte Raum ist* also, wie verlangt, *geschlossen*; *zugleich bildet die Gesamtheit aller Transformationen* (1) *eine geschlossene Gruppe.*

Die analytischen Funktionen im erweiterten Raume. Wir werden eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ der $n$ komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ im endlichen Punkte $P_0(w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, w_{n+1}^{(0)})$ des erweiterten Raumes *analytisch* nennen, falls $f(z_1, \ldots, z_n)$ in dem Punkte $(z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ des gewöhnlichen Raumes analytisch ist, wobei $z_i^{(0)} = \dfrac{w_i^{(0)}}{w_{n+1}^{(0)}}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Das analytische Verhalten einer Funktion in einem unendlichfernen Punkte legen wir so fest:

Definition. $f(z_1, \ldots, z_n)$ heißt im **unendlichfernen Punkte** $P_0(w_1, \ldots, w_n, 0)$ **analytisch**, wenn — es sei $w_\nu^{(0)} \neq 0$ — die Funktion $f\left(\dfrac{z_1}{z_\nu}, \ldots, \dfrac{z_{\nu-1}}{z_\nu}, \dfrac{1}{z_\nu}, \dfrac{z_{\nu+1}}{z_\nu}, \ldots, \dfrac{z_n}{z_\nu}\right)$ im Punkte $P_0(w_1^{(0)}, \ldots, w_{\nu-1}^{(0)}, 0, w_{\nu+1}^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, w_\nu^{(0)})$ analytisch ist.

Das analytische Verhalten von $f(z_1, \ldots, z_n)$ ist invariant gegenüber einer Transformation (1) bzw. der zugehörigen projektiven Transformation (1a) (s. S. 6).

Analog werden das *meromorphe* bzw. das *singuläre Verhalten* und die *a-Stellen* einer Funktion in einem unendlichfernen Punkte definiert.

Es fehlt noch der Begriff des Bereiches im erweiterten Raume, den wir wie folgt einführen:

Eine Menge $\mathfrak{B}$ von Punkten des erweiterten Raumes heißt ein **Bereich im $R_{2n}$** (oder auch *des* $R_{2n}$), falls 1. $\mathfrak{B}$ mit einem Punkte $P$ stets eine volle Umgebung von $P$ enthält, 2. zu je zwei Punkten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ aus $\mathfrak{B}$ sich eine endliche Folge $P_1 = P^{(1)}, P_2, \ldots, P_m = P^{(2)}$

und sie enthaltende Umgebungen $\mathfrak{U}(P_l)$ angeben lassen, so daß sämtliche $\mathfrak{U}(P_l)$ nur Punkte aus $\mathfrak{B}$ enthalten und je zwei aufeinander folgende Umgebungen $\mathfrak{U}(P_l)$ und $\mathfrak{U}(P_{l+1})$ Punkte gemeinsam haben.

Bemerkung. Wir können im erweiterten Raume für die Punkte die alten Symbole $(z_1, \ldots, z_n)$ beibehalten. Wir verstehen nämlich im folgenden unter $(z_1, \ldots, z_n)$ den Punkt $P$ des erweiterten Raumes mit einem Repräsentanten $(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n, \lambda)$, $\lambda \neq 0$ [vgl. (2)]. Hierzu ist bezüglich der unendlichfernen Punkte folgende Ergänzung zu machen: Hat der unendlichferne Punkt $P_0$ den Repräsentanten $(a_1, \ldots, a_{\nu_0}, \ldots, a_n, 0)$ und ist $\nu_0$ der erste Index, so daß $\alpha_\nu \neq 0$ — also $P_0 = P_0(0, \ldots, 0, a_{\nu_0}, \ldots, a\ , 0)$, $a_{\nu_0} \neq 0$ —, so ordnen wir $P_0$ das Symbol $\left(0, \ldots, 0, \infty, \frac{a_{\nu_0+1}}{a_{\nu_0}}, \ldots, \frac{a_n}{a_{\nu_0}}\right)$ zu. Symbole, in denen mehr als einmal das Zeichen $\infty$ auftritt, sind hier nicht definiert; jedem unendlichfernen Punkte ist genau ein Symbol zugeordnet[1].

Statt der Transformationen (1) haben wir in den $z_1$ entsprechend die zugehörigen projektiven Transformationen zu betrachten:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad Z_i = \frac{a_{i,1} z_1 + \cdots + a_{i,n} z_n + a_{i,n+1}}{a_{n+1,1} z_1 + \cdots + a_{n+1,n} z_n + a_{n+1,n+1}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

## § 2. Bereiche.

Das gesamte Verhalten einer analytischen Funktion in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ ist an ihr Verhalten in der zugehörigen „Regularitätshülle“[2] gebunden — der aus $\mathfrak{B}$ durch gleichzeitige Fortsetzung sämtlicher in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen hervorgegangenen „Hülle“; diese braucht jedoch nicht mehr schlicht zu sein, wenn auch der gegebene Grundbereich $\mathfrak{B}$ schlicht ist (in der Kl.Th. ist die Regularitätshülle eines Bereiches $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch). Wir lassen daher von vornherein die Beschränkung auf schlichte Bereiche fallen und legen beliebige Bereiche zugrunde.

Definition. Ein Ding $P$ mit einem ihm zugeordneten System von $n$ komplexen Zahlen $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ heiße **ein Punkt über dem $R_{2n}$.** Wir schreiben $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ oder kürzer $P$ und nennen $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ den **Grundpunkt,** $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Koordinaten des Punktes $P$. Wir sagen auch, der Punkt $P$ ist dem Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $R_{2n}$ *überlagert*. Wir nennen $P$ einen endlichen oder unendlichfernen Punkt, je nachdem sein Grundpunkt endlich oder unendlichfern ist. Den zu einem Punkte $P$ gehörigen Grundpunkt bezeichnen wir meist mit $\underline{P}$ und entsprechend mit $\underline{\mathfrak{M}}$ die Gesamtheit der zu einer gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ gehörigen Grundpunkte.

---

[1] Die eingeführten Symbole für die unendlichfernen Punkte enthalten natürlich eine gewisse Willkür; so hätte man an die Stelle jeder anderen von Null verschiedenen homogenen Koordinate das Zeichen $\infty$ setzen können. Man beachte daher, daß etwa die Folge der Punkte $(0, \ldots, 0, m, 1, \ldots, 1)$ $m = 1, 2, \ldots$ gegen den unendlichfernen Punkt $(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0)$ und *nicht* gegen $(0, \ldots, 0, \infty, 1, \ldots, 1)$ konvergiert.

[2] Vgl. Kap. VI.

Eine Punktmenge über dem $R_{2n}$ heißt *schlicht*, falls sie keine zwei verschiedenen Punkte mit gleichen Koordinaten enthält. Eine schlichte Punktmenge $\mathfrak{B}$ heißt dabei ein *schlichter Bereich*, falls die Menge $\underline{\mathfrak{B}}$ der Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ einen Bereich des $R_{2n}$ bildet (vgl. § 1). $\underline{\mathfrak{B}}$ nennen wir den zu $\mathfrak{B}$ gehörigen *Grundbereich.*

Den Begriff eines beliebigen Bereiches über dem $R_{2n}$ können wir jetzt wie folgt einführen:

Definition. Eine Punktmenge $\mathfrak{B}$ über dem $R_{2n}$ nennen wir einen **Bereich über dem $R_{2n}$**, falls sich in $\mathfrak{B}$ ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen $\mathfrak{V}$ — die wir **Umgebungen** nennen — so definieren läßt, daß diese den fünf Forderungen genügen:

1. Jede Umgebung $\mathfrak{V}$ ist ein schlichter Bereich.
2. Jeder Punkt aus $\mathfrak{B}$ liegt in mindestens einer Umgebung.
3. Haben zwei Umgebungen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ einen Punkt $P$ gemeinsam, so gibt es eine $P$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{V}$, die nur aus gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ besteht.
4. Sind $P_1$ und $P_2$ zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{B}$, so gibt es eine $P_1$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{V}_1$ und eine $P_2$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{V}_2$, die keinen Punkt gemeinsam haben.
5. Zu zwei Punkten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ lassen sich endlich viele Umgebungen $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_m$ angeben, so daß $\mathfrak{V}_l$ und $\mathfrak{V}_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots, m-1)$ mindestens je einen Punkt gemeinsam haben und ferner $P^{(1)}$ in $\mathfrak{V}_1$ und $P^{(2)}$ in $\mathfrak{V}_m$ enthalten ist — wir sagen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ sind miteinander *verbindbar*.

Die Forderungen 1 bis 4 sind die eigentlichen „Umgebungspostulate"; eine Menge, die diesen vier Forderungen genügt, nennen wir eine $2n$-dimensionale Punktmenge über dem $R_{2n}$. In der Forderung 5 wird lediglich der Zusammenhang verlangt — es läßt sich leicht zeigen, daß diese Forderung durch die vielfach übliche ersetzt werden kann, daß zwei Punkte stets durch eine Kurve verbindbar sind[1].

Auf Grund der Postulate 1 bis 4 folgt, daß man zu jedem Punkte „beliebig kleine" Umgebungen angeben kann; es gilt nämlich:

*Gegeben sei eine Umgebung $\mathfrak{V}$, $\underline{\mathfrak{V}}$ sei der zugehörige Grundbereich, ferner $\underline{\mathfrak{B}}_0$ ein beliebiger in $\underline{\mathfrak{V}}$ enthaltener Bereich des $R_{2n}$. Ist dann $M$ ein Punkt aus $\mathfrak{V}$, dessen Grundpunkt $\underline{M}$ in $\underline{\mathfrak{B}}_0$ liegt, so gibt es eine $M$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{V}_M$, die nur Punkte aus $\mathfrak{V}$ enthält und deren Grundpunkte in $\underline{\mathfrak{B}}_0$ enthalten sind*[2].

*Beweis.* $M$ habe die Koordinaten $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$; zu $\underline{M}$ gibt es ein $r > 0$, so daß noch sämtliche Punkte

$$(\underline{\mathfrak{D}}_0) \quad |z_i - z_i^{(0)}| \leq r, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] Siehe auch weiter unten (S. 8).

[2] Die Aussage dieses Satzes wird häufig (in etwas abgeänderter Form) als Umgebungspostulat benutzt; vgl. etwa E. CARTAN: La théorie des groupes finis ect. Mém. Sci. math. Paris 1930. — WEYL, H.: Die Idee der RIEMANNschen Fläche.

in $\underline{\mathfrak{B}}_0$ liegen (ist $M$ ein unendlichferner Punkt, so wähle man eine entsprechende in $\underline{\mathfrak{B}}_0$ liegende Umgebung). $\underline{P}_0$ sei ein Randpunkt von $\underline{\mathfrak{D}}_0$, $P_0$ der ihm überlagerte Punkt aus $\mathfrak{B}$. Nach Forderung 4 gibt es dann zwei punktfremde Umgebungen $\mathfrak{B}_{P_0}$ und $\mathfrak{B}_M^{(0)}$, so daß $\mathfrak{B}_{P_0}$ den Punkt $P_0$, $\mathfrak{B}_M^{(0)}$ den Punkt $M$ enthält. Nach Forderung 3 dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{B}_{P_0}$ und $\mathfrak{B}_M^{(0)}$ nur Punkte aus $\mathfrak{B}$ enthalten. Auf diese Weise lassen sich *endlich* viele Paare von Umgebungen $\mathfrak{B}_{P_1}, \mathfrak{B}_M^{(1)}; \mathfrak{B}_{P_2}, \mathfrak{B}_M^{(2)}; \ldots; \mathfrak{B}_{P_m}, \mathfrak{B}_M^{(m)}$ angeben, so daß 1. sämtliche $\mathfrak{B}_{P_l}$ und $\mathfrak{B}_M^{(l)}$ nur Punkte aus $\mathfrak{B}$ und die $\mathfrak{B}_M^{(l)}$ insbesondere den Punkt $M$ enthalten, 2. die zu den $\mathfrak{B}_{P_l}$ gehörigen Grundbereiche den Rand von $\underline{\mathfrak{D}}_0$ vollständig überdecken, 3. $\mathfrak{B}_{P_l}$ und $\mathfrak{B}_M^{(l)}$ punktefremd sind ($l = 1, 2, \ldots, m$). Nach Forderung 3 gibt es dann eine $M$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{B}_M$, deren Punkte in sämtlichen $\mathfrak{B}_M^{(l)}$ enthalten sind und die mit allen $\mathfrak{B}_{P_l}$ punktefremd ist. $\mathfrak{B}_M$ hat offenbar die behauptete Eigenschaft, w. z. b. w.

Den Begriff des *Konvergenzpunktes* und des *Häufungspunktes* einer Punktmenge eines Bereiches denken wir uns mit Hilfe der Umgebungen wie üblich eingeführt, ebenso (mittels des Konvergenzbegriffes) die **Stetigkeit** der Zuordnung von Punkten eines Bereiches $\mathfrak{B}_1$ zu Punkten eines Bereiches $\mathfrak{B}_2$ und entsprechend die Stetigkeit einer in den Punkten eines Bereiches definierten Funktion (vgl. auch § 4).

Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines Bereiches $\mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft, daß jede unendliche Punktfolge aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt, so heiße $\mathfrak{M}$ **in $\mathfrak{B}$ abgeschlossen** (oder kurz abgeschlossen). Für eine abgeschlossene Punktmenge gilt wie bei schlichten Mengen der HEINE-BORELsche Überdeckungssatz: *Ist jedem Punkte $P$ einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine $P$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{B}_P$ aus $\mathfrak{B}$ zugeordnet, so gibt es in $\mathfrak{M}$* endlich *viele $P_l$, so daß die den $P_l$ zugeordneten Umgebungen $\mathfrak{B}_{P_l}$ die Menge $\mathfrak{M}$ überdecken.*

*Beweis.* Nehmen wir an, der Satz wäre falsch! Analog wie bei schlichten Mengen schließen wir zunächst, daß mindestens ein Grundpunkt $\underline{O}$ existiert, so daß die einer noch so kleinen Umgebung von $\underline{O}$ überlagerten Punkte aus $\mathfrak{M}$ sich *nicht* durch endlich viele der gegebenen Umgebungen überdecken lassen. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ können über $\underline{O}$ nur endlich viele Punkte $O^{(1)}, \ldots, O^{(s)}$ aus $\mathfrak{M}$ liegen; $\mathfrak{B}_{O^{(i)}}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) seien die zugehörigen Umgebungen. Nach unserer Annahme läßt sich in $\mathfrak{M}$ eine Punktfolge $Q_m$ so wählen, daß ihre Grundpunkte gegen $\underline{O}$ konvergieren, die $Q_m$ aber keinem der $\mathfrak{B}_{O^{(i)}}$ angehören; die $Q_m$ können sich also gegen kein $O^{(i)}$ und somit überhaupt in $\mathfrak{M}$ nicht häufen. Dies widerspricht der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$, w. z. b. w.

Eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{C}$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ heißt ein (*abgeschlossenes*) **Kurvenstück,** falls sie sich eineindeutig und stetig den Punkten eines Stückes der reellen Achse $A \leqq t \leqq B$ zuordnen läßt[1].

Zwei Punkte eines Bereiches lassen sich stets durch ein solches Kurvenstück miteinander verbinden.

Zwischen den Bereichen haben wir nunmehr die Beziehungen der „Äquivalenz“, „liegt im Innern“ usf. einzuführen. Wir sagen:

[1] Vgl. auch Kap. II, § 1.

Definition 1[1]. Die Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind äquivalent oder — falls kein Irrtum möglich ist — **identisch**, wenn man zwischen den Punkten aus $\mathfrak{B}_1$ und den Punkten aus $\mathfrak{B}_2$ eine eineindeutige und umkehrbar stetige Zuordnung so angeben kann, daß zwei einander entsprechende Punkte stets gleiche Koordinaten besitzen; wir schreiben $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$.

Definition 2. Der Bereich $\mathfrak{B}_1$ **liegt im Innern** des Bereiches $\mathfrak{B}_2$ (wir sagen auch „$\mathfrak{B}_2$ *umfaßt* $\mathfrak{B}_1$“), falls man den Punkten aus $\mathfrak{B}_1$ eindeutig und stetig die Punkte einer Teilmenge von $\mathfrak{B}_2$ so zuordnen kann, daß zwei entsprechende Punkte stets gleiche Koordinaten besitzen; wir schreiben $\boldsymbol{\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2}$.

Ist diese Zuordnung zugleich eineindeutig, so nennen wir $\mathfrak{B}_1$ einen **Teilbereich** von $\mathfrak{B}_2$. Wenn wir im folgenden eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ zugleich als einen Teilbereich von $\mathfrak{B}$ voraussetzen, so soll die Zuordnung stets so verstanden sein, daß die Punkte aus $\mathfrak{M}$ sich je selbst zugeordnet sind — wir setzen allerdings nicht voraus, daß das den Teilbereich $\mathfrak{M}$ definierende Umgebungssystem in dem Umgebungssystem von $\mathfrak{B}$ enthalten ist.

*Gilt für zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}_1$, so ist $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$.*

Definition 3. Der Bereich $\mathfrak{B}_1$ **liegt ganz im Innern** des Bereiches $\mathfrak{B}_2$, falls 1. $\mathfrak{B}_1$ im Innern von $\mathfrak{B}_2$ liegt und 2. jede unendliche Folge von Punkten aus $\mathfrak{B}_2$, die Punkten aus $\mathfrak{B}_1$ zugeordnet sind, in $\mathfrak{B}_2$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt; wir schreiben $\boldsymbol{\mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{B}_2}$.

Definition 4. Der Bereich $\mathfrak{B}_1$ ist ein **Überlagerungsbereich** des Bereiches $\mathfrak{B}_2$, falls die beiden Bedingungen erfüllt sind: 1. $\mathfrak{B}_1$ liegt im Innern von $\mathfrak{B}_2$. 2. Ist $P^{(1)}$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}_1$, $P^{(2)}$ der ihm zugeordnete Punkt aus $\mathfrak{B}_2$, ist ferner $\mathfrak{C}^{(2)}$ irgendein in $P^{(2)}$ beginnendes und in $\mathfrak{B}_2$ verlaufendes Kurvenstück, so gibt es stets in $\mathfrak{B}_1$ genau ein in $P^{(1)}$ beginnendes Kurvenstück $\mathfrak{C}^{(1)}$, so daß die den Punkten auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ zugeordneten Punkte aus $\mathfrak{B}_2$ die Kurve $\mathfrak{C}^{(2)}$ (und nur diese) ganz bedecken.

Bisher haben wir nur von Umgebungen $\mathfrak{V}$ schlechthin gesprochen, nicht aber von „den Umgebungen eines Punktes $P$“ des gegebenen Bereiches; diese können wir jetzt wie folgt definieren:

Definition. Jede *schlichte*, den Punkt $P$ enthaltende Teilmenge des Bereiches $\mathfrak{B}$, die zugleich einen Teilbereich von $\mathfrak{B}$ bildet, nennen wir eine **Umgebung des Punktes $P$** — *Bezeichnung* $\mathfrak{U}(P)$.

Man beachte, daß keineswegs jede Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ notwendig eine Umgebung $\mathfrak{V}$ des den Bereich definierenden Systems $\mathfrak{S}$ ist. Wohl ist umgekehrt eine Umgebung $\mathfrak{V}$, die $P$ enthält, auch eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$.

**Grundeigenschaften** eines Bereiches.

Eigenschaft A. *Gegeben seien zwei Umgebungen $\mathfrak{U}_1(P)$ und $\mathfrak{U}_2(P)$ eines Punktes $P$ des Bereiches $\mathfrak{B}$. Ist dann $\underline{\mathfrak{B}_0}$ irgendein $\underline{P}$ enthaltender,*

[1] Zu den Definitionen 1 bis 4 siehe auch CARTAN-THULLEN: S. 620—622.

*den Grundbereichen von* $\mathfrak{U}_1(P)$ *und* $\mathfrak{U}_2(P)$ *gemeinsamer Teilbereich, so gehören sämtliche* $\underline{\mathfrak{B}}_0$ *überlagerten Punkte aus* $\mathfrak{U}_1(P)$ *auch* $\mathfrak{U}_2(P)$ *an (und umgekehrt)*. Eigenschaft A gilt natürlich erst recht für zwei Umgebungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ des den Bereich $\mathfrak{B}$ definierenden Umgebungssystems (Verschärfung von Forderung 3).

Zum Beweise zeige man zunächst, daß eine $P$ enthaltende Umgebung $\mathfrak{B}_0$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ existiert, die nur aus gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{U}_1(P)$ und $\mathfrak{U}_2(P)$ besteht. Da ferner ein Häufungspunkt von gemeinsamen Punkten wieder ein solcher ist, folgt dann leicht die Behauptung.

Eigenschaft A besagt insbesondere, daß das System der Umgebungen $\mathfrak{U}(P)$ sämtlicher Punkte eines Bereiches der Forderung 3 genügt. Da die Forderungen 1, 2, 4, 5 trivialerweise erfüllt sind, können wir also das ursprüngliche, den Bereich $\mathfrak{B}$ definierende System $\mathfrak{S}$ durch dieses „allgemeinste" Umgebungssystem ersetzt denken.

Auf Grund der Eigenschaft A können wir jedem Punkte $P$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig eine ausgezeichnete Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ — den zu $P$ gehörigen **Elementarbereich** von $\mathfrak{B}$ — zuordnen. Es sei nämlich $P_0$ ein beliebiger Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$, $P_0$ habe die Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw., falls $P_0$ ein unendlichferner Punkt ist, die Koordinaten $0, \ldots, 0, \infty, a_{\nu+1}, \ldots, a_n$. Zu $P_0$ gibt es dann sicher eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$, deren Grundbereich mit einem „Polyzylinder" $|z_i - a_i| < r$ $(r > 0)$ bzw. einem Bereiche $\left|\frac{z_i}{z_\nu} - a_i\right| < r\ (i \neq \nu)$, $\left|\frac{1}{z_\nu}\right| < r$ identisch ist; eine solche Umgebung wollen wir allgemein eine *Polyzylinderumgebung* mit dem Radius $r$ nennen. Sind $\mathfrak{U}_1(P_0)$ und $\mathfrak{U}_2(P_0)$ zwei solcher Polyzylinderumgebungen mit den Radien $r_1$ und $r_2$ und ist $r_1 < r_2$, so ist $\mathfrak{U}_1(P_0)$ eine Teilmenge von $\mathfrak{U}_2(P_0)$ (vgl. Grundeigenschaft A). Hieraus folgt, daß unter allen Polyzylinderumgebungen des Punktes $P_0$ genau einer mit größtem Radius $r_0$ existiert, den wir *den zu* $P_0$ *gehörigen Elementarbereich* des Bereiches $\mathfrak{B}$ nennen (wir lassen auch $r_0 = \infty$ zu).

Ist $P_0$ ein endlicher Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$, so heiße der Radius $r_0$ des zu $P_0$ gehörigen Elementarbereiches die **Randdistanz** von $P_0$. Liegt der Bereich $\mathfrak{B}_0$ *ganz* im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$, so besitzen die Randdistanzen sämtlicher endlicher Punkte aus $\mathfrak{B}_0$, die (auf Grund von Definition 2) Punkten aus $\mathfrak{B}$ zugeordnet sind, eine untere Grenze $\varrho \neq 0$, die wir die **Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$** nennen.

Ist andererseits die Minimaldistanz $\varrho$ des Bereiches $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf den Bereich $\mathfrak{B}$ von Null verschieden, so braucht keineswegs $\mathfrak{B}_0 \ll \mathfrak{B}$ — auch dann nicht, falls $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}$ *beschränkt* sind.

*Beispiel.* $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}$ seien beide je unendlichblättrige Bereiche auf der zu $\log z$ gehörigen Riemannschen Fläche, und zwar mögen die Punkte von $\mathfrak{B}_0$ der Ungleichung $1 < |z| < 2$, die von $\mathfrak{B}$ der Ungleichung $0 < |z| < 3$ genügen. Die Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ ist 1, ohne daß $\mathfrak{B}_0 \ll \mathfrak{B}$.

Hat dagegen $\mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{B}_0$) nur *endlich viele Blätter* (d. h. sind jedem Punkte des $R_{2n}$ höchstens eine beschränkte Anzahl von Punkten aus $\mathfrak{B}$ überlagert) und ist $\mathfrak{B}$ beschränkt, so gilt stets $\mathfrak{B}_0 \ll \mathfrak{B}$, falls nur $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}$ und die Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ von Null verschieden ist.

Eigenschaft B. *In einem Bereich $\mathfrak{B}$ läßt sich eine abzählbare Menge von Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ so auswählen, daß die zu den $P_m$ gehörigen Elementarbereiche den Bereich $\mathfrak{B}$ vollständig überdecken*[1].

Sicher gibt es nämlich in $\mathfrak{B}$ nur abzählbar viele Punkte mit rationalen Koordinaten. Die zu diesen rationalen Punkten gehörigen Elementarbereiche bilden dann bereits eine gewünschte Überdeckung.

Der Durchschnitt einer Menge von Bereichen[2]. In jedem Bereiche $\mathfrak{B}$ einer endlichen oder unendlichen Menge $\{\mathfrak{B}\}$ von Bereichen sei ein Punkt $O_{\mathfrak{B}}$ und dazu eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}(O_{\mathfrak{B}})$ gegeben, so daß alle $O_{\mathfrak{B}}$ denselben Grundpunkt $\underline{O}$ und die $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}}(O_{\mathfrak{B}})$ den gleichen Grundbereich $\underline{\mathfrak{U}}(\underline{O})$ besitzen. Hat dann der Bereich $\mathfrak{D}$ die Eigenschaften:

1. $\mathfrak{D}$ liegt im Innern aller $\mathfrak{B}$;
2. Die auf Grund von Definition 2 (S. 9) den Punkten von $\mathfrak{D}$ zugeordnete Teilmenge $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}$ des jeweiligen Bereiches $\mathfrak{B}$ enthält $O_{\mathfrak{B}}$ (für alle $\mathfrak{B}$ der Menge $\{\mathfrak{B}\}$);
3. Jeder Bereich mit den Eigenschaften 1 und 2 liegt in $\mathfrak{D}$,

so nennen wir $\mathfrak{D}$ **den Durchschnitt der Menge $\{\mathfrak{B}\}$ bezüglich der Punkte $O_{\mathfrak{B}}$.**

*Beweis der Existenz.* Ein System $\{P_{\mathfrak{B}}^{(0)}\}$ von Punkten der Bereiche $\mathfrak{B}$ nennen wir einen Punkt $\tilde{P}_0$ der „Durchschnittsmenge“ $\tilde{\mathfrak{D}}$ der Bereiche $\mathfrak{B}$, falls 1. sämtliche Punkte des Systems den gleichen Grundpunkt $\underline{P}_0$ besitzen, 2. in *jedem* Bereiche $\mathfrak{B}'$ der Bereichmenge $\{\mathfrak{B}\}$ *genau ein* Punkt $P_{\mathfrak{B}'}^{(0)}$ des Systems und ferner eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathfrak{B}'}(P_{\mathfrak{B}'}^{(0)})$ liegt, deren Grundbereich für alle $\mathfrak{B}'$ mit einem festen Bereiche $\underline{\mathfrak{U}}_0(\underline{P}_0)$ identisch ist. Zwei Punkte $\tilde{P}^{(1)} = \{P_{\mathfrak{B}}^{(1)}\}$ und $\tilde{P}^{(2)} = \{P_{\mathfrak{B}}^{(2)}\}$ sollen dann und nur dann identisch sein, falls in jedem Bereiche $\mathfrak{B}'$ aus $\{\mathfrak{B}\}$ der Punkt $P_{\mathfrak{B}'}^{(1)}$ mit dem Punkte $P_{\mathfrak{B}'}^{(2)}$ zusammenfällt. Die Menge $\tilde{\mathfrak{D}}$ aller Punkte $\tilde{P} = \{P_{\mathfrak{B}}\}$ bildet eine Punktmenge über dem $R_{2n}$ im früher definierten Sinne.

Die Punkte $\tilde{P}^{(1)}$ und $\tilde{P}^{(2)}$ aus $\tilde{\mathfrak{D}}$ nennen wir *benachbart*, falls es in *jedem* Bereiche $\mathfrak{B}'$ eine Polyzylinderumgebung gibt, die $P_{\mathfrak{B}'}^{(1)}$ und $P_{\mathfrak{B}'}^{(2)}$ enthält und deren Grundbereich für alle $\mathfrak{B}$ mit einem festen Polyzylinder

---

[1] Aus den Eigenschaften $A$ und $B$ folgt, daß man jeden Bereich durch eine geeignete „Verkettung“ einer endlichen oder unendlichen Folge von Polyzylindern konstruieren kann (s. CARTAN-THULLEN: S. 619—620). Ein Bereich in unserem Sinne ist also auch stets mit einem „Bereiche“ identisch, wie sie in der zitierten Arbeit eingeführt werden, und umgekehrt. (Da in der Arbeit CARTAN-THULLEN nur endliche Bereiche vorkommen, denke man sich dort die unendlichfernen Punkte und ihre „Polyzylinderumgebungen“ entsprechend definiert.) Der Überdeckung durch Elementarbereiche entspricht bei CARTAN-THULLEN eine „kanonische Überdeckung“. Aus den Grundeigenschaften ergibt sich insbesondere die „Triangulierbarkeit“ der Bereiche.

[2] Zu einem Begriff des Durchschnitts siehe auch CARTAN-THULLEN.

des $R_{2n}$ identisch ist. Zwei Punkte $\tilde{P}^{(1)}$ und $\tilde{P}^{(2)}$ aus $\tilde{\mathfrak{D}}$ heißen ferner *verbindbar,* falls man eine endliche Folge von Punkten $\tilde{P}^{(1)} = \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_m = \tilde{P}^{(2)}$ angeben kann, so daß $\tilde{P}_{l-1}$ benachbart mit $\tilde{P}_l$ $(l = 2, \ldots, m)$.

Man erkennt jetzt ohne weiteres, daß jede Gesamtheit miteinander verbindbarer Punkte aus $\tilde{\mathfrak{D}}$ einen Bereich bildet; man hat hierzu als *Umgebungen* $\mathfrak{B}$ nur jede schlichte Menge einander benachbarter Punkte einzuführen, deren Grundpunkte einen Bereich bilden.

$\tilde{\mathfrak{D}}$ kann in mehrere Bereiche zerfallen. Da nun das System der vorgegebenen Punkte $O_{\mathfrak{B}}$ genau einen Punkt $\tilde{O}$ der Menge $\tilde{\mathfrak{D}}$ bildet, werden wir unter dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ der Menge $\{\mathfrak{B}\}$ bezüglich $\tilde{O} = \{O_{\mathfrak{B}}\}$ die Gesamtheit aller mit $\tilde{O}$ verbindbaren Punkte aus $\tilde{\mathfrak{D}}$ verstehen. $\mathfrak{D}$ erfüllt offenbar die vom Durchschnitt verlangten Eigenschaften.

*Ergänzung.* Gegeben sei wieder eine Menge $\{\mathfrak{B}\}$ von Bereichen, die sämtlich einen Bereich $\mathfrak{G}$ im Innern enthalten mögen; $\mathfrak{G}$ braucht nicht notwendig schlicht zu sein. $O$ sei ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{G}$. Auf Grund von Definition 2 (S. 9) ist $O$ in jedem Bereiche $\mathfrak{B}$ der Menge $\{\mathfrak{B}\}$ genau ein Punkt $O_{\mathfrak{B}}$ zugeordnet. Als *Durchschnitt der Menge* $\{\mathfrak{B}\}$ *bezüglich des Bereiches* $\mathfrak{G}$ definieren wir dann den Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\{\mathfrak{B}\}$ bezüglich der Punkte $O_{\mathfrak{B}}$. $\mathfrak{D}$ ist nur von dem Bereiche $\mathfrak{G}$, nicht aber von der Auswahl des Punktes $O$ abhängig.[1]

Wir wollen uns die Durchschnittsbildung an einem einfachen Beispiele im $R_2$ klarmachen:

Gegeben sei der zweiblättrige Bereich $\mathfrak{B}_1$: $0 < |z| < 1$ auf der zu $\sqrt{z}$ gehörigen RIEMANNschen Fläche, ferner die schlichten Bereiche $\mathfrak{B}_2$: $0 < |z| < 1$ und $\mathfrak{B}_3$: $0 < |z| < 2$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ oder von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$ ist $\mathfrak{B}_1$, der Durchschnitt von $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ bezüglich $\mathfrak{B}_1$ ist $\mathfrak{B}_2$ (also schlicht).

Der Kern einer Folge von Bereichen[2]. Den Begriff des Kernes bauen wir auf dem des Durchschnittes auf. Gegeben sei eine Folge $\{\mathfrak{B}_m\}$ von Bereichen über dem $R_{2n}$, die einen gemeinsamen Durchschnitt $\mathfrak{D}_1$ besitzen mögen. $\mathfrak{D}_{m_0}$ sei dann der Durchschnitt aller Bereiche $\mathfrak{B}_m$ mit $m \geqq m_0$ bezüglich $\mathfrak{D}_1$ $(m_0 = 1, 2, \ldots)$. Es gilt offenbar $\mathfrak{D}_i < \mathfrak{D}_k$ für $i < k$.

Unter dem **Kern $\mathfrak{K}$ der Folge $\{\mathfrak{B}_m\}$** *bezüglich* $\mathfrak{D}_1$ verstehen wir dann denjenigen Bereich über dem $R_{2n}$, der sämtliche Bereiche $\mathfrak{D}_m$ enthält, aber im Innern eines jeden Bereiches liegt, der gleichfalls diese Eigenschaft hat.

Die Existenz von $\mathfrak{K}$ läßt sich ähnlich wie die des Durchschnittes zeigen.

Besitzen sämtliche Teilfolgen der Bereiche $\mathfrak{B}_m$ denselben Kern $\mathfrak{K}$, so sagen wir: *die* $\mathfrak{B}_m$ *konvergieren gegen ihren Kern* und schreiben $\mathfrak{K} = \lim \mathfrak{B}_m$ (wir nennen $\mathfrak{K}$ auch den *Grenzbereich der* $\mathfrak{B}_m$).

---

[1] Zum Begriff des Durchschnittes vgl. auch den Aufsatz der Verfasser: Semesterberichte Münster-Bonn 1932 Heft 2.

[2] Über den Begriff des Kernes von schlichten Bereichen siehe CARATHÉODORY [4].

Es ist klar, daß eine Folge von Bereichen $\mathfrak{B}_m$, für die entweder stets $\mathfrak{B}_m < \mathfrak{B}_{m+1}$ oder stets $\mathfrak{B}_{m+1} < \mathfrak{B}_m$, immer gegen ihren Kern konvergiert; im ersten Falle ist $\mathfrak{B}_m \equiv \mathfrak{D}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, im zweiten Falle ist $\mathfrak{K}$ identisch mit dem Durchschnitt aller $\mathfrak{B}_m$.[1]

## § 3. Rand- und Verzweigungspunkte.

Definition. Eine unendliche Folge $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ von Punkten eines Bereiches $\mathfrak{B}$, die sich in $\mathfrak{B}$ *nicht* häuft, nennen wir einen **Randpunkt** $R = [P_m]$ von $\mathfrak{B}$, falls 1. die Folge der zugehörigen Grundpunkte gegen einen Punkt $\underline{R}$ konvergiert; 2. es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\underline{R})$ von $\underline{R}$ ein $m_0$ gibt, so daß je zwei Punkte $P_{m_1}$ und $P_{m_2}$ mit $m_1, m_2 > m_0$ in $\mathfrak{B}$ stets durch ein Kurvenstück verbindbar sind, deren Grundpunkte ganz in $\underline{\mathfrak{U}}(\underline{R})$ liegen.

Eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ in $\mathfrak{B}$, die unendlich viele der Punkte $P_m$ enthält, nennen wir eine *an den Randpunkt R grenzende Umgebung*.

Können wir den Bereich $\mathfrak{B}$ als Teilbereich in einen ihn ganz umfassenden Bereich $\mathfrak{B}_1$ „einbetten", so dürfen wir von einem *Rande* des Bereiches $\mathfrak{B}$ schlechthin sprechen, indem wir diejenigen Punkte von $\mathfrak{B}_1$ als Randpunkte von $\mathfrak{B}$ betrachten, die zwar Häufungspunkte von Punkten aus $\mathfrak{B}$ sind, aber nicht mehr zu $\mathfrak{B}$ gehören.

Umgebungen eines Randpunktes. Gegeben sei ein Randpunkt $R$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ mit dem Grundpunkt $\underline{R}$, ferner ein Grundbereich $\underline{\mathfrak{W}}$, der $\underline{R}$ enthält. Unter der **Umgebung $\mathfrak{W}(R)$ des Randpunktes $R$** verstehen wir die Menge sämtlicher Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, die irgendeiner an $R$ grenzenden Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ angehören, deren Grundbereich in $\underline{\mathfrak{W}}$ liegt. $\mathfrak{W}(R)$ ist ein Teilbereich von $\mathfrak{B}$.

Eine Folge von inneren Punkten oder Randpunkten eines Bereiches $\mathfrak{B}$ heißt eine *gegen den Randpunkt R konvergierende Folge*, falls in jeder Umgebung $\mathfrak{W}(R)$ fast alle Punkte der Folge liegen bzw. (wenn es sich um Randpunkte handelt) durch Punkte aus $\mathfrak{W}(R)$ darstellbar sind.

Mit Hilfe der Konvergenz können wir nun auch die *Stetigkeit* einer Zuordnung oder einer Funktion auch in den Randpunkten eines Bereiches definieren.

Verzweigungspunkte. Ist jede Umgebung eines Randpunktes $R$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ nicht schlicht, so heißt $R$ ein **Verzweigungspunkt** von $\mathfrak{B}$.

Gibt es zu einem Verzweigungspunkte $R$ eine Umgebung $\mathfrak{W}_0(R)$, so daß zu jeder andern, in $\mathfrak{W}_0(R)$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{W}(R)$ mindestens ein Punkt $\underline{P}$ existiert, dem in $\mathfrak{W}(R)$ genau $m$ Punkte überlagert sind, es aber nie vorkommt, daß $\mathfrak{W}(R)$ mehr als $m$ einander überlagerte Punkte enthält, so wollen wir $m$ die **Ordnung des Verzweigungs-**

[1] Zum Aufbau allgemeiner funktionentheoretischer Bereiche vgl. neben Cartan-Thullen auch Carathéodory [**5**]; ferner in der Kl.Th.: (1) Weyl, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. — (2) Rado, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Litt. Sci. Szeged Bd. 2.

**punktes** nennen (es ist auch $m = \infty$ zugelassen). Wie man leicht sieht, ist jedem Verzweigungspunkte eindeutig eine Ordnung zugeordnet.

Unter den Verzweigungspunkten können uns hier nur diejenigen interessieren, deren Umgebungen uniformisierbar sind, die also den isolierten Verzweigungspunkten endlicher Ordnung der Kl.Th. entsprechen. Im $R_{2n}$ $(n > 1)$ treten solche Verzweigungspunkte nie isoliert auf, sondern bilden zusammenhängende ($2n$—2-dimensionale) Mannigfaltigkeiten. Analog der Kl.Th. definieren wir:

Die Umgebung $\mathfrak{W}(Q)$ eines Verzweigungspunktes $Q$ endlicher Ordnung ist **uniformisierbar**, falls ein Polyzylinder $|\tau_k| < d$, $k = 1, 2, \ldots, n$, und $n$ dort analytische Funktionen

$$(T) \qquad z_i = g_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

existieren, die den Polyzylinder eineindeutig und umkehrbar stetig auf $\mathfrak{W}(Q)$ mit Einschluß einer $Q$ enthaltenden Verzweigungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ so abbilden, daß dabei $Q$ in den Nullpunkt übergeht. (Die Bilder von $\mathfrak{M}$ im Polyzylinder liegen genau dort, wo die Funktionaldeterminante von $T$ verschwindet[1].) Die $\tau_k$ nennen wir die *„ortsuniformisierenden" Parameter.*

Wir können jetzt nachträglich den Bereichbegriff von § 2 erweitern, indem wir gewisse Verzweigungspunkte zu den (inneren) Punkten des gegebenen Bereiches hinzuzählen. Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: Soll eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von Verzweigungspunkten zu den inneren Punkten eines Bereiches $\mathfrak{B}$ gerechnet werden, so muß 1. zu jedem Punkte $Q$ aus $\mathfrak{M}$ eine uniformisierbare Umgebung $\mathfrak{W}(Q)$ existieren, 2. sämtliche weiteren Verzweigungspunkte, die bei der Uniformisierung in das Innere des zugehörigen Polyzylinders übergehen, gleichfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören[2].

Wir können also definieren:

Eine Punktmenge $\mathfrak{B}$ über dem $R_{2n}$ heißt ein im Innern **verzweigter Bereich**, falls $\mathfrak{B}$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. Eine gewisse Teilmenge $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ ist ein Bereich im früher definierten Sinne (vgl. § 2).

2. Jeder Punkt $Q$ von $\mathfrak{B}$, der nicht zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ gehört (es existiere mindestens ein solcher Punkt), ist uniformisierbarer Verzweigungspunkt von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Ferner gibt es zu $Q$ mindestens eine uniformisierbare Umgebung $\tilde{\mathfrak{W}}(Q)$ in $\tilde{\mathfrak{B}}$, so daß alle Verzweigungspunkte von $\tilde{\mathfrak{B}}$, die bei der Uniformisierung von $\tilde{\mathfrak{W}}(Q)$ inneren Punkten des zugehörigen Polyzylinders $|\tau_k| < d$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zugeordnet sind, gleichfalls in $\mathfrak{B}$ liegen.

[1] Vgl. § 5 dieses Kapitels.

[2] Es hat für die Funktionentheorie kein Interesse, auch solche Verzweigungspunkte zu den inneren Punkten eines Bereiches hinzuzuzählen, deren Umgebung sich zwar topologisch, nicht aber durch ein analytisches Funktionssystem auf einen schlichten Bereich abbilden läßt.

$\tilde{\mathfrak{W}}(Q)$ mit Einschluß dieser $Q$ benachbarten Verzweigungspunkte bezeichnen wir als eine Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ in $\mathfrak{B}$.

Die Begriffe „liegt im Innern", „Überlagerungsbereich" usw. lassen sich ohne weiteres auf verzweigte Bereiche übertragen.

Im allgemeinen werden wir uns auf die in § 2 eingeführten Bereiche beschränken können. Nur bei speziellen Fragen der Abbildungstheorie müssen wir auch verzweigte Bereiche betrachten. *Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt ist, legen wir deshalb im folgenden — abgesehen von § 5 dieses Kapitels und vom siebenten Kapitel, wo wir beliebige verzweigte und unverzweigte Bereiche zulassen — stets Bereiche zugrunde, die keinen Verzweigungspunkt als inneren Punkt enthalten.*

## § 4. Funktionen und Bereiche.

Ist jedem Punkte $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ einer Menge $\mathfrak{M}$ über dem $R_{2n}$ eine komplexe Zahl $f(P)$ zugeordnet, so werden wir $f(P)$ eine Funktion der Menge $\mathfrak{M}$ nennen — statt $f(P)$ schreiben wir auch, falls keine Verwechslung möglich, $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ oder kürzer $f$. Eine Funktion $f$ heißt in einem endlichen Punkte $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bzw. in dem unendlichfernen Punkte $P_0(0, \ldots, 0, \infty, a_{\nu+1}, \ldots, a_n)$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ **analytisch**, falls es in $\mathfrak{B}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ und eine im zugehörigen Grundbereich $\underline{\mathfrak{U}}(\underline{P}_0)$ konvergierende Potenzreihe

$$(1) \qquad \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} c_{m_1, \ldots, m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} (z_2 - a_2)^{m_2} \ldots (z_n - a_n)^{m_n}$$

bzw. eine Reihe

$$(2) \qquad \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} c_{m_1, \ldots, m_n} \left(\frac{z_1}{z_\nu}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{z_{\nu-1}}{z_\nu}\right)^{m_{\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{z_\nu}\right)^{m_\nu} \cdot \left(\frac{z_{\nu+1} - a_{\nu+1}}{z_\nu}\right)^{m_{\nu+1}} \cdots \left(\frac{z_n - a_n}{z_\nu}\right)^{m_n}$$

gibt, so daß die Funktion $f$ in jedem Punkte $P$ aus $\mathfrak{U}(P_0)$ definiert ist und ihr Wert in $P$ mit dem Werte der Reihe (1) bzw. (2) in dem zugehörigen Grundpunkte $\underline{P}$ übereinstimmt. $f$ heißt in dem **Bereiche $\mathfrak{B}$ analytisch** oder regulär, falls $f$ in jedem Punkte aus $\mathfrak{B}$ analytisch ist.

Ist $\mathfrak{B}$ ein *verzweigter Bereich* und $Q$ ein innerer Verzweigungspunkt von $\mathfrak{B}$ (also sicher uniformisierbar), so heiße $f$ in $Q$ analytisch, falls $f$ als Funktion der ortsuniformisierenden Parameter dort analytisch ist.

Ist die Funktion $f$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ beschränkt, so bezeichnen wir mit $\mathbf{Max}|f(\mathfrak{B})|$ das Maximum der Absolutbeträge von $f$ in $\mathfrak{B}$.

Entsprechend definieren wir eine in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ **meromorphe** Funktion $f$:

Die Funktion $f$ heißt in $\mathfrak{B}$ meromorph, falls 1. $f$ in einem Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ erklärt und analytisch ist, 2. jeder Punkt von $\mathfrak{B}$, der nicht zu $\mathfrak{B}_0$ gehört, Häufungspunkt von Punkten aus $\mathfrak{B}$ ist, 3. zu jedem Punkte $P$ aus $\mathfrak{B}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und zwei dort analytische Funktionen $g$ und $h$ existieren, so daß $f \equiv \frac{g}{h}$ (bzw. gleich dem Grenzwert dieses Quotienten) in sämtlichen Punkten des Durchschnittes von $\mathfrak{U}(P)$ und $\mathfrak{B}_0$.

Regularitätsbereiche. Der Begriff des Regularitätsbereiches stützt sich auf den des Funktionselementes. Unter einem **analytischen Funktionselement** $p_0(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ über dem endlichen bzw. über dem unendlichfernen Punkte $\underline{P}_0$ verstehen wir dabei eine Potenzreihe (1) bzw. eine Reihe (2) mit $P_0(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ als Entwicklungspunkt, die in einer *vollen* Umgebung von $\underline{P}_0$ konvergiert. Zwei Elemente über dem gleichen Grundpunkte heißen dann und nur dann *identisch*, falls sämtliche Koeffizienten der zugehörigen Entwicklungen übereinstimmen. Ein analytisches Funktionselement ist ein Punkt im früher definierten Sinne.

Zwei analytische Funktionselemente $p_1$ und $p_2$ wollen wir *benachbart* nennen, falls es einen die Grundpunkte von $p_1$ und $p_2$ enthaltenden Polyzylinder gibt, in dem $p_1$ und $p_2$ beide zugleich konvergieren und dieselben Werte annehmen. Gibt es ferner zu zwei Elementen $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ eine endliche Folge von Elementen $p_1 \equiv p^{(1)}, p_2, \ldots, p_m \equiv p^{(2)}$, so daß $p_l$ benachbart mit $p_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots, m-1)$, so heißen $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ miteinander *verbindbar*. Es ist klar, daß zwei Elemente dann und nur dann miteinander verbindbar sind, falls sie durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

Eine Gesamtheit $\mathfrak{R}$ miteinander verbindbarer analytischer Funktionselemente bildet offenbar einen Bereich, wenn wir als Umgebungen in $\mathfrak{R}$ jede schlichte Menge einander benachbarter Elemente aus $\mathfrak{R}$ ansehen, deren Grundpunkte einen Bereich bilden. Wir definieren deshalb:

Gegeben sei ein analytisches Funktionselement $p_0$. Die Gesamtheit $\mathfrak{R}_0$ aller mit $p_0$ verbindbaren analytischen Funktionselemente heiße **der Regularitätsbereich der** *durch Fortsetzung des Elementes $p_0$ definierten analytischen* **Funktion $f$.**

Ist die Funktion $f$ in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ analytisch, so liegt $\mathfrak{B}$ im Innern des Regularitätsbereiches der Funktion $f$. Enthält ferner $\mathfrak{B}$ jeden anderen Bereich, in dem sich $f$ gleichfalls noch regulär verhält, so ist $\mathfrak{B}$ mit dem Regularitätsbereiche der Funktion $f$ identisch.

Ein Bereich $\mathfrak{R}$ heißt schlechthin ein **Regularitätsbereich,** wenn er mit dem Regularitätsbereiche von mindestens einer Funktion $f$ identisch ist.

Meromorphiebereiche. Den Meromorphiebereich einer Funktion $f$ führen wir mit Hilfe meromorpher Funktionselemente ganz analog ein — unter einem meromorphen Funktionselemente $q(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ verstehen wir dabei ein Paar analytischer Funktionselemente $p(z_1, z_2, \ldots, z_n)$,

$r(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ mit $r(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ und unter dem Wert des Elementes $q$ den Wert bzw. Grenzwert des Quotienten $p/r$, falls dieser existiert; und so fort wie bei regulären Elementen.

Einen Bereich nennen wir wieder schlechthin einen **Meromorphiebereich,** wenn er mit dem Meromorphiebereiche einer Funktion $f$ identisch ist.

Der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ einer Funktion $f$ ist ein Teilbereich des Meromorphiebereiches $\tilde{\mathfrak{R}}$ der durch $f$ definierten meromorphen Funktion. Diejenigen Randpunkte von $\mathfrak{R}$, die im Innern von $\tilde{\mathfrak{R}}$ liegen, heißen *außerwesentlich singuläre Stellen* der Funktion $f$. Alle übrigen Randpunkte von $\mathfrak{R}$ und sämtliche Randpunkte von $\tilde{\mathfrak{R}}$ nennen wir *wesentliche Singularitäten*[1] (man beachte, daß sämtliche Punkte aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ Häufungspunkte von Punkten aus $\mathfrak{R}$ sind).

Ein Meromorphiebereich braucht nicht notwendig auch ein Regularitätsbereich zu sein; diese Frage ist erst bei speziellen Bereichen gelöst[2], im übrigen aber noch vollkommen ungeklärt.

Folgen analytischer Funktionen[3]. Über einem Grundpunkte $\underline{P}_0$ sei eine unendliche Folge von analytischen Funktionselementen $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ gegeben, die in einer Umgebung von $\underline{P}_0$ gleichmäßig konvergieren mögen (gegen eine analytische Funktion oder die Konstante $\infty$). Die Funktion $f_m$ sei die durch Fortsetzung von $p_m$ entstandene analytische Funktion, $\mathfrak{R}_m$ der zugehörige Regularitätsbereich $(m = 1, 2, \ldots)$; ferner sei $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt aller Bereiche $\mathfrak{R}_m$ bezüglich der „Punkte" $p_m$.

Die Menge $\mathfrak{K}$ der Punkte aus $\mathfrak{D}$, zu denen es 1. eine Umgebung in $\mathfrak{D}$ gibt, in der die Folge der $f_m$ gleichmäßig konvergiert, die 2. mit dem Punkte $P_0 = \{p_m\}$ aus $\mathfrak{D}$ so durch ein Kurvenstück verbindbar sind, daß die $f_m$ in jeweils geeigneten Umgebungen sämtlicher Punkte der Kurve noch gleichmäßig konvergieren, bildet dann einen Teilbereich von $\mathfrak{D}$, den wir **den Bereich der gleichmäßigen Konvergenz** der Folge $f_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ nennen.

Ganz entsprechend führt man den Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge meromorpher Funktionen ein und ebenso den **Normalitätsbereich** einer normalen Familie.

---

[1] Wenn wir von Singularitäten einer *meromorphen* Funktion sprechen, so sind darunter natürlich stets *wesentliche* Singularitäten zu verstehen.

[2] Vgl. Kap. IV, § 3.

[3] Eine Folge von in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $f_m$ heißt *in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergent,* falls es zu jedem ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereiche $\mathfrak{B}_0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0$ gibt, so daß $|f_{m+p}(P) - f_m(P)| < \varepsilon$ für alle $m > m_0$, $p \geqq 1$ und alle $P$ aus $\mathfrak{B}_0$ (entsprechend für die Konvergenz gegen $\infty$). Eine Familie $\mathfrak{F}$ von in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen heißt *in $\mathfrak{B}$ normal,* falls man aus jeder Folge von Funktionen aus $\mathfrak{F}$ eine in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann.

## § 5. Analytische Abbildungen[1].

I. Abbildungen mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante. Die $n$ Funktionen $f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ seien in dem endlichen nichtverzweigten Bereiche $\mathfrak{B}$ analytisch. Die Funktionaldeterminante des Systems

$$(S) \qquad Z_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

verschwinde nirgends in $\mathfrak{B}$. *Dann gibt es genau einen (endlichen) Bereich* $\mathfrak{B}^*$, *so daß durch* $S$ *jedem Punkte* $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *von* $\mathfrak{B}$ *eineindeutig und umkehrbar stetig ein Punkt* $P^*(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ *aus* $\mathfrak{B}^*$ *mit* $Z_i = f_i(P)$ *zugeordnet ist,* $\mathfrak{B}$ *also topologisch* auf $\mathfrak{B}^*$ abgebildet wird.

*Beweis.* Jedem Punkt $P$ aus $\mathfrak{B}$ ordnet die Transformation $S$ eineindeutig ein System $P^* = (P; Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = S(P)$ zu, das wir den Bildpunkt von $P$ nennen; mit $\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$ sei die Menge aller so gewonnenen Punkte $P^* = S(P)$ bezeichnet. Als Umgebungen $\mathfrak{V}^*$ in $\mathfrak{B}^*$ führen wir jede schlichte Menge von Punkten $S(P)$ ein, die die Eigenschaft besitzt, daß die ihr in $\mathfrak{B}$ zugeordnete Punktmenge eine Umgebung $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{B}$ bildet. Das System dieser Umgebungen $\mathfrak{V}^*$ genügt den fünf Umgebungspostulaten (§ 2); $\mathfrak{B}^*$ ist offenbar der gesuchte Bildbereich.

Das zu $S$ inverse System, wir bezeichnen es mit

$$(S^{-1}) \qquad z_i = f_i^{-1}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ist in $\mathfrak{B}^*$ analytisch und bildet $\mathfrak{B}^*$ topologisch auf $\mathfrak{B}$ ab.

Lassen wir jetzt die Beschränkung auf endliche Bereiche fallen, so haben wir in dem vorgegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ ein System $\tilde{S}$ von $n$ *meromorphen* Funktionen

$$(\tilde{S}) \qquad Z_i = F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

zu betrachten, von dem wir folgendes verlangen: Sind sämtliche $F_i$ in einem endlichen Punkte aus $\mathfrak{B}$ analytisch, so soll die Funktionaldeterminante dort nicht verschwinden. Ist dagegen eine der Funktionen in einem Punkte $P$ singulär, so verlangen wir von wenigstens einem der Systeme

$$(\tilde{S}_\nu) \quad \tilde{Z}_i = \frac{Z_i}{Z_\nu} = \frac{F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{F_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_n)}, \quad i \neq \nu, \quad \tilde{Z}_\nu = \frac{1}{Z_\nu} = \frac{1}{F_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

daß es in $P$ regulär ist und seine Funktionaldeterminante dort nicht verschwindet. Ganz entsprechende Modifikationen sind in den unendlich-

[1] Zu den Grundlagen der Abbildungstheorie vgl. auch CARATHÉODORY [4], H. CARTAN [8] und B. SEGRE [1]. Die analytischen Abbildungen werden von vielen Autoren auch *pseudokonforme* Abbildungen genannt (vgl. ELIE CARTAN, B. SEGRE, SEVERI). Bekannt ist, daß die analytischen Abbildungen im $R_{2n}$ im allgemeinen nicht mehr konform sind, dies gilt schon für die meisten linearen Transformationen. Dagegen bleibt stets der Winkel zweier auf derselben analytischen Fläche liegender Kurven erhalten; vgl. etwa B. ALMER und REINHARDT [1].

fernen Punkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ vorauszusetzen. Dann gibt es wie im Falle endlicher Bereiche genau einen Bildbereich $\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$, auf den $\mathfrak{B}$ durch $\tilde{S}$ topologisch abgebildet wird. Wir wollen ganz allgemein eine Transformation, die den verlangten Bedingungen genügt, eine *eineindeutige* **meromorphe** Transformation nennen.

II. Gegeben sei ein *beliebiges* System

$$(S) \qquad Z_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

von $n$ in einem endlichen nichtverzweigten Bereiche $\mathfrak{B}$ analytischen Funktionen.

*Die Funktionaldeterminante* $\Delta_S \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$ *verschwinde in* $\mathfrak{B}$, *ohne dort identisch zu verschwinden!* $\mathfrak{B}_0$ sei der größte Teilbereich von $\mathfrak{B}$, in dem $\Delta_S$ von Null verschieden ist. Auf Grund von I. existiert ein Bildbereich $\mathfrak{B}_0^* = S(\mathfrak{B}_0)$, auf den $\mathfrak{B}_0$ durch $S$ topologisch abgebildet wird. Schwierigkeiten treten also nur in denjenigen Punkten $Q$ aus $\mathfrak{B}$ auf, in denen $\Delta_S = 0$. Diese Punkte $Q$ zerfallen nach Osgood[1] in zwei Klassen:

*1. Klasse.* Es gibt in jeder Umgebung eines solchen Punktes $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mindestens einen von $Q$ verschiedenen Punkt $\tilde{Q}$, der das Gleichungssystem

$$f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

befriedigt. Wir nennen in diesem Falle $Q$ einen **Ausnahmepunkt** der Transformation $S$.

*2. Klasse.* Es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}_Q$, eine ganze Zahl $k \geq 2$ und ein reelles $d > 0$, so daß für jedes $(Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)})$ aus

$$|Z_i - a^*| < d, \quad a_i^* = f(Q) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

die Gleichungen

$$(1) \qquad f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = Z_i^{(0)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

genau $k$ Lösungen aus $\mathfrak{U}_Q$ aufweisen. In einem Punkte, in dem $\Delta_S = 0$, können mehrere Lösungen von (1) zusammenfallen.

Aus all dem folgt, daß $\mathfrak{U}_Q$ auf einen verzweigten Bereich $\mathfrak{U}_{Q^*}^* \doteq S(\mathfrak{U}_Q)$ mit $k$ „Blättern" topologisch abgebildet wird. Durch $Q^* = S(Q)$ laufen endlich viele ($2n - 2$-dimensionale analytische[2]) uniformisierbare Verzweigungsmannigfaltigkeiten, längs derer die einzelnen Blätter zusammenhängen; diese Mannigfaltigkeiten sind Bilder derjenigen Punkte aus $\mathfrak{B}$, in denen $\Delta_S = 0$; $Q^*$ ist Verzweigungspunkt $k$ter Ordnung.

Es ergibt sich also:

Liegen in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ *keine Ausnahmepunkte* einer dort analytischen Transformation $S$, so gibt es wie im Falle I einen Bereich

[1] Vgl. Osgood: Lb. S. 139—140; siehe auch H. Cartan [8].

[2] Vgl. Kap. V, § 2.

$\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$, auf den $\mathfrak{B}$ durch $S$ topologisch und analytisch abgebildet wird; verschwindet dabei $\Delta_S$ in $\mathfrak{B}$, so enthält $\mathfrak{B}^*$ innere Verzweigungspunkte.

*Existieren dagegen Ausnahmepunkte,* so ist die eineindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und seinem Bilde gestört. Man denke etwa an die Transformation $S_0$: $W = wz$, $Z = z$, die den Dizylinder $|w| < 1$, $|z| < 1$ auf den im Innern liegenden (mehrfach zusammenhängenden) Bereich $|w| < |z|$, $|z| < 1$ und dessen Randpunkt $(0, 0)$ abbildet; $(0, 0)$ ist dabei Bildpunkt *aller* auf der Ebene $z = 0$ liegenden Punkte des Dizylinders. Für die Abbildungsfunktionen der inversen Transformation $S_0^{-1}$ ist $(0, 0)$ eine Stelle der Unbestimmtheit (eine dieser Funktionen hat dort eine außerwesentliche Singularität zweiter Art[1]).

Wir müssen daher stets, falls Punkte der 1. Klasse auftreten, zu $\mathfrak{B}$ den Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ betrachten, der aus $\mathfrak{B}$ durch Herausnahme der Ausnahmemannigfaltigkeiten hervorgeht. $\mathfrak{B}_0$ wird dann topologisch auf $\mathfrak{B}_0^* = S(\mathfrak{B}_0)$ abgebildet. Diejenigen Randpunkte von $\mathfrak{B}_0^*$, die Bildpunkte der Ausnahmemannigfaltigkeiten sind, stellen Unbestimmtheitspunkte der inversen Transformation $S^{-1}$ dar. $\mathfrak{B}_0^*$ *mit Einschluß* dieser Randpunkte bezeichnen wir wieder als das Bild $S(\mathfrak{B})$ des Bereiches $\mathfrak{B}$.[2]

*Verschwindet die Funktionaldeterminante* $\Delta_S \equiv \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$ *in* $\mathfrak{B}$ *identisch,* so nennen wir $S$ eine **ausgeartete Transformation.** Wir erhalten keinen Bildbereich mehr; $\mathfrak{B}$ wird auf eine höchstens $2n-2$-dimensionale Mannigfaltigkeit abgebildet.

Legen wir statt der endlichen Bereiche beliebige endliche und nichtendliche Bereiche zugrunde, so haben wir wie oben (vgl. S. 18) über das System $S$ entsprechende Voraussetzungen zu machen.

*Lassen wir ferner noch die Voraussetzung fallen, daß der Grundbereich* $\mathfrak{B}$ *ein nichtverzweigter Bereich ist,* so bleiben sämtliche vorangehenden Aussagen bestehen. In der Umgebung eines Verzweigungspunktes $Q$ haben wir nur statt des Systems $S$ das System

$$S(T) \quad Z_i = f_i(g_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), g_2(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, g_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = f_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

(die $g_i$ seien die zu $Q$ gehörigen Uniformisierungsfunktionen) zu betrachten bzw. seine Determinante

$$\Delta_{S(T)} \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)}.$$

III. *Untersuchen wir kurz neben den eineindeutigen Bildbereichen eines (nichtverzweigten) Bereiches* $\mathfrak{B}$ *auch die einmehrdeutigen Bilder!* Durch eine Transformation $S$ mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante sei jedem Punkte $P$ aus $\mathfrak{B}$ eindeutig und stetig ein Punkt $P^{**}$ eines Bereiches $\mathfrak{B}^{**}$ zugeordnet und jeder Punkt aus $\mathfrak{B}^{**}$

[1] Vgl. Kap. V, § 2.

[2] Näheres über die Verteilung der Ausnahmepunkte siehe in der gerade erschienenen Arbeit H. CARTAN [**10**].

sei Bild von mindestens einem Punkte aus $\mathfrak{B}$. Wir verlangen ferner, daß $S$ im Kleinen überall in $\mathfrak{B}$ topologisch ist. Offenbar gilt unter diesen Voraussetzungen:

Ist $\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$ das unter I definierte eineindeutige Bild des Bereiches $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}^*$ ein Überlagerungsbereich von $\mathfrak{B}^{**}$.

## Zweites Kapitel.

# Geometrische Grundlagen.

## § 1. $m$-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Wenn wir in diesem Kapitel die geometrischen Grundlagen für die Funktionentheorie aufstellen, so haben wir zu berücksichtigen, daß die vorkommenden Punktmannigfaltigkeiten keineswegs immer im $R_{2n}$, sondern in beliebigen Bereichen über dem $R_{2n}$ liegen können.

*Soweit wir allerdings Eigenschaften von Punktmengen nur im Kleinen betrachten, dürfen wir uns diese stets im $R_{2n}$ eingebettet denken.*

Definition. Eine Teilmenge $\Pi$ der inneren Punkte (bzw. Randpunkte) eines Bereiches $\mathfrak{B}$ über dem $R_{2n}$ wollen wir ein **$m$-dimensionales Flächenelement in $\mathfrak{B}$** ($m < 2n$) nennen, falls es in dem kartesischen Raum der $m$ reellen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ einen Bereich $\mathfrak{A}$ und dort stetige Funktionen

$$(1)\quad x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_m),\ y_k = \psi_k(t_1, t_2, \ldots, t_m),\ (z_k = x_k + i y_k,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

gibt, die $\Pi$ eineindeutig und umkehrbar stetig auf $\mathfrak{A}$ abbilden.

$\Pi$ heißt ein *$\varrho$-mal* **differentiierbares** Element, falls bei geeigneter Wahl der Parameter $t_\nu$ sämtliche partiellen Ableitungen der Funktionen $\varphi_k$ und $\psi_k$ bis mindestens zur $\varrho$ten Ordnung existieren und stetig sind. Ist dabei insbesondere die Funktionalmatrix des Systems (1) in einem Punkte $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_m^{(0)})$ aus $\mathfrak{A}$ vom Range $m$, so heiße der ihm zugeordnete Punkt auf $\Pi$ eine **gewöhnliche Stelle** des differentiierbaren Elementes $\Pi$.

In der Umgebung einer solchen gewöhnlichen Stelle lassen sich die $t_\nu$ aus $m$ der obigen Parametergleichungen bestimmen; wir erhalten $2n - m$ Gleichungen zwischen den $x_k$, $y_k$ mit einer Funktionalmatrix vom Range $2n - m$. Es gilt also:

Satz 1. *Zu einer gewöhnlichen Stelle $P$ eines $m$-dimensionalen, $\varrho$-mal differentiierbaren Flächenelementes $\Pi$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, so daß $\Pi$, soweit es in $\mathfrak{U}(P)$ liegt, durch $2n - m$ Gleichungen*

$$\Phi_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, 2n - m$$

*darstellbar ist, wobei die $\Phi_\mu$ $\varrho$-mal differentiierbar sind und die Matrix der ersten partiellen Ableitungen in jedem Punkte des Durchschnittes von $\Pi$ und $\mathfrak{U}(P)$ vom Range $2n - m$ ist.*

Umgekehrt gilt:

Sind die Koordinaten eines Punktes $P$ Lösungen der $2n-m$ reellen Gleichungen

(2) $\Phi_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, 2n-m,$

wobei die $\Phi_\mu$ in der Umgebung von $P$ $\varrho$-mal stetig differentiierbar seien und die zugehörige Funktionalmatrix in $P$ vom Range $2n-m$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ von $P$, so daß die Gesamtheit aller Punkte aus $\mathfrak{U}(P)$, die dem System (2) genügen, ein $m$-dimensionales, $\varrho$-mal differentiierbares Flächenelement $\Pi$ bilden; zugleich sind alle diese Punkte gewöhnliche Stellen des Elementes $\Pi$.

Eine Punktmenge $\mathfrak{F}$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ heißt ein **$m$-dimensionales** ($\varrho$-mal differentiierbares) **Flächenstück in $\mathfrak{B}$**, wenn es

1. zu jedem ihrer Punkte $P$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ gibt derart, daß die in $\mathfrak{U}(P)$ enthaltene Teilmenge von $\mathfrak{F}$ ein $m$-dimensionales ($\varrho$-mal differentiierbares) Element ist,

2. zu je zwei Elementen $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$ auf $\mathfrak{F}$ endlich viele $m$-dimensionale Elemente $\Pi_1 \equiv \Pi^{(1)}, \Pi_2, \ldots, \Pi_s \equiv \Pi^{(2)}$ in $\mathfrak{F}$ existieren, so daß der Durchschnitt von $\Pi_l$ und $\Pi_{l+1}$ stets wieder ein $m$-dimensionales Element ist, $l = 1, \ldots, s$.

Ein Flächenstück $\mathfrak{F}$ in einem Bereiche $\mathfrak{B}_1$ braucht, als Teilmenge eines anderen Bereiches $\mathfrak{B}_2$ betrachtet, in $\mathfrak{B}_2$ kein Flächenstück mehr zu bilden (vgl. Beispiel 5 auf S. 27).

Im allgemeinen werden wir (über dem $R_{2n}$) nur 1-, $(2n-2)$- und $(2n-1)$-dimensionale Flächenstücke zu betrachten haben, wir wollen sie kurz **Kurven-, Flächen-** und **Hyperflächenstücke** — oder, falls kein Irrtum möglich ist, Kurve, Fläche und Hyperfläche — nennen, je nachdem $m = 1$, $2n-2$ oder $2n-1$ ist.

Die Hyperflächen zerlegen die Umgebung eines ihrer Punkte in zwei getrennte Teile, wir dürfen also dort von den zwei „Seiten" einer Hyperfläche sprechen.

Bei späteren Untersuchungen wird eine gewisse Normalform der Darstellung einer Fläche bzw. Hyperfläche wichtig sein. Es läßt sich zeigen:

Satz 2.[1] *Zu jeder gewöhnlichen Stelle $P$ eines differentiierbaren Flächenstückes $\mathfrak{F}$ kann man eine ganze lineare analytische Koordinatentransformation angeben, so daß in einer Umgebung von $P$ die Fläche $\mathfrak{F}$ in den neuen Koordinaten sich darstellen läßt durch*

$$x_1 = g_1(x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n), \qquad y_1 = g_2(x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n),$$

*also durch $z_1 = g(z_2, \ldots, z_n)$ mit eindeutig komplexer Funktion $g$.*

Entsprechend:

*Ein differentiierbares Hyperflächenstück läßt sich in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes $P$ nach Ausführung einer ganzen linearen*

[1] Vgl. Osgood: Lb. S. 193ff.

*Transformation darstellen durch* $x_1 = \Phi(x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *mit eindeutig reeller Funktion* $\Phi$.

Lineare Mannigfaltigkeiten. Ein $m$-dimensionales Flächenstück heißt *linear*, falls bei geeigneter Wahl der Parameter die Parameterfunktionen $\varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ und $\psi_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ lineare Funktionen der $t_\nu$ sind.

Ein Flächenstück ist dann und nur dann ein $m$-dimensionales lineares Flächenstück, falls es sich durch $2n - m$ voneinander unabhängige lineare Gleichungen zwischen den $x_k$ und $y_k$ darstellen läßt.

Berührung und Tangente. Die beiden $\varrho_1$- bzw. $\varrho_2$-mal differentiierbaren $m$-dimensionalen Flächenelemente $\Pi_1$ und $\Pi_2$:

$$(\Pi_1) \qquad x_k = \varphi_k^{(1)}(t_1, \ldots, t_m), \quad y_k = \psi_k^{(1)}(t_1, \ldots, t_m),$$

$$(\Pi_2) \qquad x_k = \varphi_k^{(2)}(s_1, \ldots, s_m), \quad y_k = \psi_k^{(2)}(s_1, \ldots, s_m)$$

**berühren sich im Punkte $P_0$ von $l$ter Ordnung** $(l \leqq \varrho_1, \varrho_2)$, falls bei geeigneten Parametern $t_\nu$ bzw. $s_\nu$ sämtliche nullten bis $l$ten Ableitungen in $P_0$ übereinstimmen.

Entsprechend definieren wir die Berührung zweier Elemente verschiedener Dimension: *Ein $p$-dimensionales Flächenelement $\Pi_1$ berührt ein $m$-dimensionales Flächenelement $\Pi_2$* $(p < m)$ im Punkte $P_0$ von $l$ter Ordnung, wenn $\Pi_2$ ein $p$-dimensionales Element enthält, daß $\Pi_1$ in $P_0$ von $l$ter Ordnung berührt.

Wir sprechen von der *Berührung zweier $p$- und $m$-dimensionalen Flächen***stücke** $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in $P_0$, wenn in ihnen enthaltene $p$- bzw. $m$-dimensionale Elemente sich in $P_0$ berühren.

Definition. Ein *lineares* $p$-dimensionales Flächenstück $\mathfrak{T}$ heißt eine **Tangente** an ein gegebenes $m$-dimensionales Flächenstück $\mathfrak{F}$, falls es dieses in mindestens erster Ordnung berührt. Ist $p = m$, so nennen wir $\mathfrak{T}$ die **Haupttangente.**

Ein differentiierbares Flächenstück besitzt in jeder gewöhnlichen Stelle genau eine Haupttangente. Offenbar gilt auch umgekehrt, daß jeder Punkt, in dem eine Haupttangente existiert, eine gewöhnliche Stelle des Flächenstückes ist.

*Ein $m$-dimensionales differentiierbares Flächenstück besitzt also dann und nur dann in einem Punkte $P$ eine Haupttangente, falls $P$ eine gewöhnliche Stelle ist.*

## § 2. Analytische (charakteristische) Flächen[1].

Funktionentheoretisch werden diejenigen Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet sein, die durch analytische Gleichungen bzw. analytische

[1] Zum Begriff der analytischen Fläche und des analytischen Gebildes siehe auch Osgood: Lb. und B. Segre [1], [2]. — Daneben Kommerell: Math. Ann. Bd. 60 (1905). — Levi-Civita u. Eisenhart: Amer. J. Math. Bd. 34 (1912).

Funktionen dargestellt werden können. Solche Mannigfaltigkeiten treten z. B. als Nullstellen- oder Singularitätenflächen einer regulären Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ auf.

Definition. Ein $2n-2$-dimensionales Flächenstück $\mathfrak{F}$ heißt ein **charakteristisches Flächenstück** oder auch — wenn eine Verwechselung mit einer nur *reell*-analytisch darstellbaren Fläche[1] unmöglich ist — ein **analytisches Flächenstück**, falls es zu jedem Flächenpunkte $P$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ gibt, so daß die in $\mathfrak{U}(P)$ liegenden Punkte von $\mathfrak{F}$ und nur diese Punkte einer Gleichung $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ genügen, wobei $g$ eine im Punkte $P$ reguläre Funktion bedeutet. $g$ ist im Punkte $P$ *irreduzibel*, d. h. es gibt keine zwei in $P$ reguläre, dort verschwindende Funktionen $g_1$ und $g_2$, so daß $g \equiv g_1 g_2$.

Wir nennen $P$ eine **gewöhnliche Stelle** *des analytischen Flächenstückes* $\mathfrak{F}$, falls wenigstens eine der (komplexen) Ableitungen von $g$ in $P$ nicht verschwindet.

Auf Grund von Satz 2 und des später angeführten Vorbereitungssatzes[2] läßt sich leicht zeigen, daß eine gewöhnliche Stelle $P$ einer differentiierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ stets auch eine gewöhnliche Stelle im eben definierten Sinne ist, falls $\mathfrak{F}$ in der Umgebung von $P$ ein analytisches Flächenstück darstellt.

In der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle $P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ eines analytischen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ läßt sich die zugehörige Gleichung $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ nach einer der Veränderlichen auflösen:

$$z_q = h(z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_n),$$

$h$ eine in der Umgebung von $z_k = z_k^{(0)}$ reguläre Funktion der $z_k (k \neq q)$.

Hat umgekehrt eine analytische Gleichung $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ die Eigenschaft, daß in einer Lösung $P$ mindestens eine der partiellen Ableitungen von $g$ nicht verschwindet, so ergibt sich unmittelbar aus der Auflösbarkeit von $g$, daß $g = 0$ in der Umgebung von $P$ ein analytisches Flächenstück darstellt; $P$ ist dabei eine gewöhnliche Stelle von $\mathfrak{F}$.

*Sind weiterhin $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei verschiedene analytische Flächen über dem $R_4$, so können sich $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nur in isolierten Punkten schneiden.*

Parameterdarstellung einer analytischen Fläche. Der Punkt $P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ sei eine gewöhnliche Stelle des durch die Gleichung $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ dargestellten analytischen Flächenstückes $\mathfrak{F}$, es sei also in $P$ mindestens eine partielle Ableitung von $g$ von Null verschieden — wir können ohne Einschränkung $\dfrac{\partial g(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_1} \neq 0$ in $P$ voraussetzen.

[1] Falls von einer Mannigfaltigkeit nur eine reell-analytische Darstellung vorausgesetzt wird, so heben wir dies ausdrücklich hervor.

[2] Vgl. Kap. V, § 1.

Ist dann $z_1 = h(z_2, \ldots, z_n)$ die in der Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ gültige Auflösung der Gleichung $g = 0$ nach $z_1$, so wird in $\mathfrak{U}(P)$ die Fläche $\mathfrak{F}$ dargestellt durch das System

$$z_1 = h(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}), \quad z_k = \tau_{k-1} \; (k = 2, \ldots, n);$$

hierbei ist $h$ eine in der Nachbarschaft von $\tau_{k-1}^{(0)} = z_k^{(0)}$ $(k = 2, \ldots, n)$ reguläre Funktion der Veränderlichen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ und ferner die zugehörige komplexe Matrix im Punkte $(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \ldots, \tau_{n-1}^{(0)})$ vom Range $n - 1$.

Läßt auf der anderen Seite eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ eine komplex-analytische Parameterdarstellung zu:

$$z_k = h_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

($h_k$ in der Umgebung von $(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \ldots, \tau_{n-1}^{(0)})$ eindeutig und regulär in den komplexen Veränderlichen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$), und hat dort die zugehörige Funktionalmatrix den Rang $n - 1$, so ist $\mathfrak{F}$ in der Umgebung des Punktes $P_0(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$, $z_k^{(0)} = h_k(\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}, \ldots, \tau_{n-1}^{(0)})$, ein analytisches Flächenstück und $P_0$ eine gewöhnliche Stelle von $\mathfrak{F}$.

Randpunkte. Ist $P_0$ ein Randpunkt eines analytischen Flächenstückes $\mathfrak{F}$, so kann es vorkommen, daß sich $\mathfrak{F}$ durch Hinzunahme von Punkten aus einer Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ von $P_0$ so erweitern läßt, daß das erweiterte Flächenstück auch noch in $\mathfrak{U}(P_0)$ ein analytisches Flächenstück darstellt. In diesem Falle wollen wir $P_0$ einen **uneigentlichen Randpunkt** des analytischen Flächenstückes nennen. Alle übrigen Randpunkte von $\mathfrak{F}$ nennen wir **eigentliche Randpunkte.**

Hat ferner ein eigentlicher Randpunkt $P$ eines analytischen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ die Eigenschaft, daß sämtliche in seiner Umgebung liegenden Punkte von $\mathfrak{F}$ mit Einschluß von $P$ selbst einer in $P$ analytischen Gleichung $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ genügen, so heiße $P$ ein **unwesentlicher Randpunkt;** alle andern eigentlichen Randpunkte bezeichnen wir als **wesentliche** Randpunkte oder **wesentlich singuläre** Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$.

Unwesentliche Randpunkte sind etwa solche Punkte, in denen sich mehrere „Zweige" der Fläche schneiden (vgl. Beispiel 2, S. 26.)

Es ist oft zweckmäßig, ein Flächenstück durch Hinzunahme gewisser unwesentlicher Randpunkte zu erweitern; wir definieren deshalb:

Eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ heißt ein **ergänztes analytisches (charakteristisches) Flächenstück,** falls $\mathfrak{M}$ die beiden Bedingungen erfüllt:

1. Es existiert ein analytisches Flächenstück $\mathfrak{F}$, so daß jeder Punkt auf $\mathfrak{M}$ entweder zu $\mathfrak{F}$ gehört oder ein unwesentlicher Randpunkt von $\mathfrak{F}$ ist.

2. Zu jedem Punkt $P$ auf $\mathfrak{M}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort reguläre, in $P$ verschwindende Funktion $h$, so daß alle Punkte aus $\mathfrak{M}$, die in $\mathfrak{U}(P)$ liegen, der Gleichung $h = 0$ genügen und umgekehrt jede in $\mathfrak{U}(P)$ liegende Lösung von $h = 0$ zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Die Punkte von $\mathfrak{M}$, die zugleich auf $\mathfrak{F}$ liegen, wollen wir **reguläre** Punkte des ergänzten Flächenstückes nennen.

Analytisches Gebilde. Besitzt das ergänzte analytische Flächenstück $\mathfrak{F}$, eingebettet in den $R_{2n}$, dort höchstens *wesentliche* Randpunkte, so heiße $\mathfrak{F}$ ein **analytisches Gebilde** des $R_{2n}$.

Ein analytisches Gebilde (erst recht ein analytisches Flächenstück) ist bereits durch eines seiner Elemente vollkommen bestimmt. Es führt aber nicht umgekehrt die Fortsetzung eines analytischen Flächenelementes stets zu einem analytischen Gebilde des $R_{2n}$; hierzu muß man erst einen geeigneten Regularitätsbereich über dem $R_{2n}$ zugrunde legen (vgl. Beispiel 5 auf S. 27).

Analytische Ebenen. Die einfachste Klasse der analytischen Flächen im $R_{2n}$ sind die analytischen ($2n-2$-dimensionalen) Ebenen. Während eine beliebige $2n-2$-dimensionale Ebene durch die Gleichungen

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k x_k + b_k y_k) = 0, \quad c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k x_k + d_k y_k) = 0 \tag{3}$$

darstellbar ist, müssen die analytischen Ebenen, d. h. diejenigen Ebenen, die zugleich analytische Flächen sind, noch gewissen Bedingungen (den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen) genügen. (3) stellt dann und nur dann eine analytische Ebene dar, wenn es ein $\lambda \neq 0$ gibt, so daß $a_k = \lambda d_k$, $b_k = -\lambda c_k$. Denn nur in diesem Falle können wir die Gleichungen (3) zu einer linear komplexen Gleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n = 0$$

zusammenfassen.

Zwei verschiedene analytische Ebenen schneiden sich in genau *einer* $2n-4$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit, also zwei Ebenen des $R_4$ in genau einem Punkte (durch zwei ihrer Punkte ist ferner eine Ebene des $R_4$ vollständig bestimmt).

Die Haupttangenten an ein analytisches Flächenstück sind sämtlich analytische Ebenen.

Im $R_4$ gilt sicher auch die Umkehrung dieses Satzes:

***Besitzt ein differentiierbares 2-dimensionales Flächenstück $\mathfrak{F}$ des $R_4$ in jedem seiner Punkte eine analytische Haupttangente, so ist $\mathfrak{F}$ ein analytisches Flächenstück und jeder Punkt auf $\mathfrak{F}$ eine gewöhnliche Stelle***[1].

Beispiele analytischer Flächen. 1. Die Funktion $w = \sqrt{z}$ liefert die überall im Endlichen (auch im Punkte (0,0)) analytische Fläche $w^2 - z = 0$; es braucht also nicht jede singuläre Stelle einer Funktion $w = f(z)$ eine singuläre Stelle der dargestellten Fläche zu liefern.

2. Umgekehrt kann ein regulärer Punkt einer mehrdeutigen Funktion $f(z)$ einen Randpunkt des Flächenstückes $w - f(z) = 0$ liefern. So besitzt die durch $w = \sqrt{z} - z\sqrt{z}$ dargestellte Fläche $\mathfrak{F}$ den Punkt (0, 1) als Randpunkt (Doppelpunkt). (0, 1) ist jedoch nach unserer Definition *unwesent-*

[1] Vgl. LEVI-CIVITA.

*licher Randpunkt*, liegt also auf dem zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Gebilde $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ wird hier dargestellt durch die Gleichung $h(w, z) = w^2 - z + 2z^2 - z^3 = 0$; $h$ ist im Punkte $(0, 1)$ reduzibel und zerfällt dort in $h(wz) = (w - z + z\sqrt{z}) \cdot (w + \sqrt{z} - z\sqrt{z})$; jeder Faktor verschwindet in $(0, 1)$. Übrigens sind alle anderen endlichen Punkte auf $\mathfrak{F}$ gewöhnliche Stellen, da nur in $(0, 1)$ $h_w$ und $h_z$ zugleich verschwinden.

3. Gegeben sei die Funktion $h(w, z) \equiv w^3 - z^2$. Im Punkte $(0, 0)$ verschwinden beide Ableitungen von $h$. $(0, 0)$ ist also sicher keine gewöhnliche Stelle der durch $h = 0$ dargestellten analytischen Fläche $\mathfrak{F}$. Da aber andererseits das Parametersystem $w = t^2, z = t^3$ die in der Umgebung von $(0, 0)$ liegenden Punkte der Fläche eineindeutig und umkehrbar stetig den inneren Punkten eines Kreises zuordnet, wobei $(0, 0)$ in den Mittelpunkt übergeht, gehört $(0, 0)$ sicher zu den Punkten der Fläche. In $(0, 0)$ besitzt $\mathfrak{F}$ keine Haupttangente.

4. Die durch die Gleichung $\frac{1}{\log w} = z$ dargestellte analytische Fläche $\mathfrak{F}$ wird von jeder Ebene $w = c$ in den Punkten $z_k = \frac{1}{\log c + 2k\pi i}$ ($\log c$ sei der Hauptwert) geschnitten. Die $z_k$ häufen sich gegen $z = 0$ (und nur gegen $z = 0$). Daraus folgt, daß sämtliche Punkte der Ebene $z = 0$ *wesentlich singuläre* Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$ sind.

5. In der Umgebung eines Punktes $(w_0, z_0 \neq 0)$, der die Gleichung $w = z^\beta$ mit *irrationalem* $\beta$ befriedigt, wird durch diese Gleichung ein analytisches Flächenstück definiert. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit aller Lösungen von $w = z^\beta$, so gehören mit einem Punkte $(w_0 = e^{\beta \log z_0}, z_0)$ auch alle Punkte $(e^{\beta \log z_0} \cdot e^{\beta 2k\pi i}, z_0)$ zu $\mathfrak{G}$. Da $\beta$ irrational vorausgesetzt ist, häufen sich die Zahlen $e^{\beta 2k\pi i}$ gegen jeden Punkt des Einheitskreises. Hieraus folgt, daß sämtliche Punkte der Hyperfläche $|w| = |z|^\beta$ Häufungspunkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ sind und hieraus wiederum, daß $\mathfrak{G}$ keine analytische Fläche oder ein analytisches Gebilde des $R_4$ sein kann. Betrachten wir dagegen $\mathfrak{G}$ in dem Regularitätsbereich der Funktion $f(w, z) \equiv wz^{-\beta} - 1$ (oder auch der Funktion $w^{-\beta} z - 1$), so stellt $\mathfrak{G}$ dort ein analytisches Flächenstück dar.

Neben den $2n - 2$-dimensionalen Flächenstücken des $R_{2n}$ betrachten wir gelegentlich auch analytische Mannigfaltigkeiten niederer Dimension. Eine solche Mannigfaltigkeit $2(n - m)$ ter Dimension (oder $(n - m)$-ter „*Stufe*") wird ganz entsprechend durch ein System von $m$ voneinander unabhängigen analytischen Gleichungen definiert[1].

## § 3. Hyperflächen.

Ein Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ läßt sich in der Umgebung jedes seiner Punkte durch die in der Nachbarschaft liegenden analytischen Flächen charakterisieren. Die Kenntnis von dem Verhalten dieser Flächen liefert uns später die Möglichkeit, zu entscheiden, wann eine gegebene Hyperfläche von einer gegebenen Seite „natürlicher Grenze" einer regulären Funktion sein kann (vgl. Kap. IV, § 3). Wir sagen: Ein Hyperflächenstück $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ heißt im Punkte $P$ **pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$** (bzw. $\varphi < 0$), wenn jede durch $P$

[1] Vgl. hierzu Osgood: Lb.

gehende analytische Fläche mit der gewöhnlichen Stelle $P$ in jeder Umgebung von $P$ Punkte auf der Seite $\varphi \geqq 0$ (bzw. $\varphi \leqq 0$) aufweist[1].

Diese Eigenschaft ist offenbar invariant gegenüber eineindeutigen Transformationen des $R_{2n}$, die in einer Umgebung von $P$ regulär sind. Es wird sich später zeigen, daß die Eigenschaft, pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$ (bzw. $\varphi < 0$) zu sein, für diejenigen Hyperflächen charakteristisch ist, die in der Richtung $\varphi > 0$ (bzw. $\varphi < 0$) „natürliche Grenze" einer analytischen Funktion sind.

Um nun ein Kriterium für das pseudokonvexe Verhalten aufstellen zu können, setzen wir das gegebene Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ im folgenden stets als zweimal stetig differentiierbar voraus und ferner, daß $\mathfrak{S}$ in jedem seiner Punkte eine Haupttangente besitzt, d. h. jeder Punkt eine gewöhnliche Stelle ist. Um uns komplizierte Rechnungen zu ersparen, führen wir die folgenden Überlegungen nur für Hyperflächen des $R_4$ durch — da es sich hier um Eigenschaften im „Kleinen" handeln wird, können wir uns die Hyperflächen im schlichten $R_4$ eingebettet denken[2].

Gegeben sei also ein 2mal stetig differentiierbares Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ des $w$-$z$-Raumes ($w = u + iv$, $z = x + iy$). $P$ sei ein Punkt auf $\mathfrak{S}$; durch eine geeignete lineare analytische Transformation können wir $P$ in den Punkt (0, 0) und die zu $P$ gehörige Haupttangente in die Hyperebene $x = 0$ überführen. Für $\mathfrak{S}$ gilt dann um $P$ die Entwicklung

$$\varphi(u, v, x, y) = x + a_1 u^2 + a_2 v^2 + a_3 uv + a_4 uy + a_5 vy + a_6 y^2 + \cdots. \tag{4}$$

Führen wir bis zu den quadratischen Gliedern statt der Veränderlichen $u, v, x, y$ die Veränderlichen $w, \bar{w}, z, \bar{z}$ ($\bar{w} = u - iv$, $\bar{z} = x - iy$) ein, so geht (4) über in

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} &\varphi(u, v, x, y) = \frac{z + \bar{z}}{2} + \alpha w^2 + \bar{\alpha}\bar{w}^2 + b w \bar{w} \\ &+ \text{quadr. Glieder, die mindestens } z \text{ oder } \bar{z} \text{ enthalten} + \text{höh. Glieder,} \end{aligned} \right.$$

hierbei ist $b = \frac{a_1 + a_2}{2}$, also *reell.*

Nach Definition ist die Hyperfläche $\varphi = 0$ dann und nur dann im Punkte $P$ *nicht* pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$, falls es eine durch $P$ gehende analytische Fläche (mit $P$ als gewöhnlicher Stelle) gibt, die in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ außer $P$ nur Punkte auf der Seite $\varphi < 0$ aufweist (entsprechend für die Seite $\varphi < 0$).

$$z = f(w) = Aw + Bw^2 + \cdots \tag{6}$$

sei eine durch $P$ laufende analytische Fläche. (Für diejenigen Flächenstücke, die sich um $P$ nach $w$ auflösen lassen, ist von vornherein klar,

[1] Vgl. Behnke [5].

[2] Über die Verallgemeinerung des Folgenden auf Hyperflächen des $R_{2n}$ siehe Krzoska; vgl. auch Kap. IV, § 3.

daß sie in der Nachbarschaft von $P$ Punkte aufweisen, für die $\varphi < 0$, und Punkte, für die $\varphi > 0$.) (6) in (5) eingesetzt, ergibt:

$$(7) \qquad \frac{A w + \bar{A} \bar{w}}{2} + (B + \alpha) w^2 + (\bar{B} + \bar{\alpha}) \bar{w}^2 + b w \bar{w} + \cdots.$$

Liegt (5) bis auf $P$ selbst in $\mathfrak{U}(P)$ ganz auf der Seite $\varphi < 0$, so muß (7) in $\mathfrak{U}(P)$ negativ definit sein. Dies ist aber nur dann möglich, falls $A = \bar{A} = 0$ und die zu (7) gehörige quadratische Form $(B + \alpha) w^2 + (\bar{B} + \bar{\alpha}) \bar{w}^2 + b w \bar{w}$ negativ definit ist; hierzu ist notwendig, daß $b \leqq 0$. Ist umgekehrt $b < 0$, so können wir sofort eine analytische Fläche angeben, nämlich $z = -\alpha w^2 + \cdots$, die in einer Umgebung von $P$ ganz auf der Seite $\varphi < 0$ liegt. Für $b < 0$ ist demnach $\varphi = 0$ in $P$ sicherlich nicht pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$, muß aber pseudokonvex von der Seite $\varphi < 0$ sein, da sonst nach dem Obigen $b \geqq 0$ wäre.

Aus all dem ergibt sich:

Satz 3[1]. (1). *Ist das Hyperflächenstück $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in $P = (0, 0)$ pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$* (bzw. $\varphi < 0$), *so ist* $\mathbf{b}$, *der Koeffizient des Gliedes $w\bar{w}$ in der normierten Entwicklung von $\varphi(u, v, x, y)$, größer oder gleich Null* (bzw. $b \leqq 0$).

(2). *Ist in der normierten Entwicklung von $\varphi(u, v, x, y)$ der Koeffizient von $w\bar{w}$ größer (bzw. kleiner) als Null, so ist die Hyperfläche $\varphi = 0$ in $P$ pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$ (bzw. $\varphi < 0$).*

(3). *Unter der Voraussetzung von (2) gibt es sogar ein analytisches Flächenstück durch $P$, das seine $P$ benachbarten Punkte* **alle** *auf der Seite $\varphi > 0$ (bzw. $< 0$) hat.* Wir nennen in diesem Falle das Hyperflächenstück in $P$ **total** *pseudokonvex* von der Seite $\varphi > 0$ (bzw. $< 0$).

Eine Hyperfläche kann offenbar in einem Punkte nie total pseudokonvex von beiden Seiten zugleich sein. Doch sind gewisse, nämlich die analytischen Hyperflächen dadurch ausgezeichnet, daß sie in allen Punkten nach beiden Seiten schlechthin pseudokonvex sind.

Es soll nun eine entsprechende, von der Normierung im Punkte $P$ unabhängige Bedingung für die Pseudokonvexität aufgestellt werden, die gestattet, für jeden Punkt sofort anzugeben, ob das Hyperflächenstück dort in einer Richtung pseudokonvex ist. Diese Bedingung liefert das Vorzeichen des LEVIschen Differentialausdrucks[2]:

$$L(\varphi) = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_{\bar{w}} & \varphi_{w\bar{w}} & \varphi_{z\bar{w}} \\ \varphi_{\bar{z}} & \varphi_{w\bar{z}} & \varphi_{z\bar{z}} \end{vmatrix}$$

[1] Vgl. BEHNKE [**5**].

[2] Zur komplexen Differentiation siehe etwa KRZOSKA.

in der WIRTINGERschen[1] Schreibweise oder nach E. E. LEVI[2] in den vier reellen Veränderlichen:

$$16L(\varphi) = \Delta_2'\varphi\Delta_1''\varphi + \Delta_2''\varphi\Delta_1'\varphi - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial y}\right)$$
$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial x}\right),$$

wobei

$$\Delta_1'\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \quad \Delta_2'\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

($\Delta_1''\varphi$, $\Delta_2''\varphi$ gleiche Ausdrücke in $x, y$).

Hilfssatz. *Das Vorzeichen von $L(\varphi)$ ist invariant gegenüber einer in der Umgebung von $\varphi(u, v, x, y) = 0$ eineindeutigen und regulären Transformation.*

Ist nämlich $w = f(W, Z)$, $z = g(W, Z)$, $\frac{D(f, g)}{D(W, Z)} \neq 0$ eine solche Transformation, die $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in $\Phi(U, V, X, Y) = 0$ überführt, so gilt $L(\Phi) = L(\varphi)\left|\frac{D(f, g)}{D(W, Z)}\right|^2$.

Satz 4. *Damit das Hyperflächenstück $\varphi(u, v, x, y) = 0$ in $P$ pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$ (bzw. $< 0$) ist, ist notwendig, daß $L(\varphi) \geqq 0$ (bzw. $L(\varphi) \leqq 0$), und hinreichend, daß $L(\varphi) > 0$ (bzw. $L(\varphi) < 0$).*

Entwickelt man nämlich $\varphi$ in der normierten Form (4) bzw. (5), so ist $L(\varphi) = \frac{b}{4}$. Die Behauptung ergibt sich dann aus dem Hilfssatze und Satz 3.

Bei den geometrischen Untersuchungen in unserm Raume spielen diejenigen Hyperflächenstücke eine besondere Rolle, die sich durch eine in den vier reellen Veränderlichen $u, v, x, y$ reell-analytische Gleichung $\varphi(u, v, x, y) = 0$ darstellen lassen[3]; in diesem Falle können wir die Hyperfläche auch in der Form $\Phi(w, \bar{w}, z, \bar{z}) = 0$ angeben. Einer solchen Hyperfläche $\mathfrak{S}$ läßt sich in jedem ihrer Punkte $P_0(w_0, z_0)$ eine ausgezeichnete *analytische* Fläche — nämlich die Fläche $\mathfrak{F}_{P_0}$: $\Phi(w, \bar{w}_0, z, \bar{z}_0) = 0$ — *invariant gegenüber eineindeutigen und analytischen Transformationen* zuordnen. Ist ferner $\mathfrak{S}$ in $P_0$ *total* pseudokonvex — etwa $L(\varphi) > 0$, so berührt diese Fläche $\mathfrak{F}_{P_0}$ das Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ und liegt in einer Umgebung von $P_0$ *ganz* auf der Seite $\varphi > 0$[4].

Analytische (charakteristische) Hyperflächen[5]. Ein **Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ heißt analytisch,** wenn es sich durch eine Gleichung

$$h(w, z; t) = 0, \quad A < t < B$$

[1] Vgl. WIRTINGER [2]. [2] Vgl. E. E. LEVI [1].

[3] Vgl. ELIE CARTAN [1], [2]; ferner die Arbeiten von B. SEGRE.

[4] Vgl. etwa ELIE CARTAN [1] S. 25—26.

[5] Eine analytische Hyperfläche wird häufig auch *Hyperplanoid* genannt (vgl. B. ALMER, E. CARTAN, SEVERI). Wir setzen im allgemeinen nicht voraus, daß sich die gegebene analytische Hyperfläche zugleich durch ein reell-analytisches Parametersystem ausdrücken läßt; trifft das zu, so wird dies ausdrücklich hervorgehoben.

darstellen läßt, wobei $t$ einen stetigen reellen Parameter bedeutet und $h(w, z; t_0)$ für jedes feste $t_0$ ($A < t_0 < B$) eine in der Umgebung von $\mathfrak{S}$ analytische Funktion von $w, z$ und insbesondere $h(w, z; t_0) = 0$ ein analytisches Flächenstück ist (entsprechend die Definition einer analytischen Hyperfläche im $R_{2n}$).

Ein analytisches Hyperflächenstück besteht also aus einer einparametrigen Schar analytischer Flächenstücke. Umgekehrt bildet eine Schar analytischer Flächenstücke, wenn überhaupt ein Hyperflächenstück, so stets ein solches analytisches Hyperflächenstück. Der analytische Charakter eines Hyperflächenstückes ist invariant gegenüber Transformationen, die eineindeutig und analytisch in seiner Umgebung sind.

Satz 5. *Ein zweimal stetig differentiierbares Hyperflächenstück* $\varphi(u, v, x, y) = 0$ *ist dann und nur dann analytisch, wenn in allen seinen Punkten* $L(\varphi)$ *verschwindet*[1].

*Beweis.* 1. Ist nämlich $\mathfrak{S}$ ein analytisches Hyperflächenstück, so gibt es durch jeden Flächenpunkt $P$ eine analytische Fläche $\mathfrak{F}$, für die überall $\varphi(\mathfrak{F}) = 0$. Infolgedessen muß (es sei $P$ eine gewöhnliche Stelle von $\mathfrak{F}$) in dem normierten Ausdruck (7) $A = 0$, $B = -\alpha$, $b = 0$, also $L(\varphi) = 0$ sein, w. z. b. w. [Ist $P$ keine gewöhnliche Stelle, so ist $P$ jedenfalls Häufungspunkt gewöhnlicher Punkte; da $L(\varphi)$ stetig, ist also auch $L(\varphi(P)) = 0$.]

2. Der Beweis für die zweite Behauptung ist im allgemeinen Falle mühselig (siehe E. E. Levi [**2**]). Ist aber in der die gegebene Hyperfläche $\mathfrak{S}$ darstellenden Gleichung $\varphi(u, v, x, y) = 0$ die Funktion $\varphi$ reell-analytisch in $u, v, x, y$, so läßt sich der Beweis besonders einfach führen[2]:

$\Phi(w, \bar{w}, z, \bar{z}) = 0$ sei wieder die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Gleichung in den komplexen Veränderlichen. Die zu einem Punkte $P(\alpha, \beta)$ auf $\mathfrak{S}$ zugeordnete Fläche $\mathfrak{F}_{P_0}$: $\Phi(w, \bar{w}_0, z, \bar{z}_0) = 0$ genügt dann der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{\Phi_w(w, \alpha, z, \beta)}{\Phi_z(w, \alpha, z, \beta)}. \tag{8}$$

Rechts wird mittels der Gleichung $\Phi(w, \alpha, z, \beta) = 0$ die Größe $\beta$ eliminiert. Damit jetzt (8) in eine reine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $w$ und $z$ übergegangen ist, ist notwendig, daß die rechte Seite nicht mehr von $\alpha$ abhängt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\Phi_w(w, \alpha, z, \beta(w, \alpha, z))}{\Phi_z(w, \alpha, z, \beta(w, \alpha, z))}\right\} = 0$, oder nach Ausrechnung, wenn $\frac{L(\Phi)}{(\Phi_z)^2} = 0$. Ist also $L(\Phi) = 0$, so genügen die der Hyperfläche $\mathfrak{S}$ zugeordneten Flächen $\mathfrak{F}_{P_0}$ einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $w$ und $z$, bilden somit eine kontinuierliche Flächenschar, die von genau

[1] Vgl. E. E. Levi; neuere Beweise (im Falle einer reell-analytischen Funktion $\varphi(u, v, x, y)$) siehe B. Almer, E. Cartan, B. Segre und Severi [**5**].

[2] Vgl. Elie Cartan [**1**].

einem komplexen Parameter abhängt. Dies ist aber nach E. CARTAN eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{S}$ eine analytische Hyperfläche ist[1].

## § 4. Spezielle Bereiche über dem $R_4$.

Um den Leser mit den Bereichen über dem $R_{2n}$ vertraut zu machen, sei hier eine Übersicht über eine Reihe der wichtigsten speziellen Bereiche des $R_4$ gegeben, die wir im folgenden besonders häufig benötigen werden. Die Verallgemeinerung dieser Bereiche auf den $R_{2n}$ bietet keine Schwierigkeit, obwohl die Vielfältigkeit der entsprechenden Bereiche mit wachsender Dimension immer größer wird.

1. Dizylinder. Unter einem **Zylinderbereich** $\mathfrak{Z}$ des $w$-$z$-Raumes verstehen wir eine Gesamtheit von Punkten $(w, z)$, die entsteht, wenn $w$ sämtliche Werte eines (einfach- oder mehrfachzusammenhängenden) Bereiches $\mathfrak{b}^{(w)}$ der $w$-Ebene und $z$ sämtliche Werte eines Bereiches $\mathfrak{b}^{(z)}$ der $z$-Ebene durchläuft.

Sind $\mathfrak{b}^{(w)}$ und $\mathfrak{b}^{(z)}$ Kreisscheiben, so heiße $\mathfrak{Z}$ normiert oder schechthin ein **Dizylinder**; ein Dizylinder besteht also aus der Gesamtheit aller Punkte $(w, z)$ mit $|w - w_0| < r_1$, $|z - z_0| < r_2$. Ist $r_1 = r_2 = 1$, so sprechen wir vom *Einheits-Dizylinder.*

Das Innere jedes Zylinderbereiches mit einfachzusammenhängendem $\mathfrak{b}^{(w)}$ und $\mathfrak{b}^{(z)}$ läßt sich (auf Grund des RIEMANNschen Abbildungssatzes der Kl.Th.) topologisch und analytisch auf das Innere des Einheits-Dizylinders abbilden. Der Rand eines solchen Zylinderbereiches wird aus zwei *analytischen* Hyperflächen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gebildet. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ schneiden sich in einem (nichtanalytischen) Flächenstück $\mathfrak{F}$, das aus allen Punkten $(w, z)$ gebildet ist, für die $w$ auf dem Rande von $\mathfrak{b}^{(w)}$, $z$ auf dem Rande von $\mathfrak{b}^{(z)}$. Diese Fläche $\mathfrak{F}$ heißt die **Bestimmungsfläche** des Zylinderbereiches. Bei einem Dizylinder besteht die Bestimmungsfläche aus den Punkten $|w - w_0| = r_1$, $|z - z_0| = r_2$.[2]

Aus dem Satze vom Maximum der Kl.Th. kann man leicht folgern, daß eine in einem *abgeschlossenen* Dizylinder reguläre Funktion $f(w, z)$ das Maximum ihres Absolutbetrages auf der Bestimmungsfläche annimmt.

Hieraus ergibt sich dann:

Satz 6. *Stimmen zwei in einem abgeschlossenen Dizylinder reguläre Funktionen $f_1$ und $f_2$ in jedem Punkte der Bestimmungsfläche überein, so sind sie im ganzen Dizylinder identisch*[3]. Eine im abgeschlossenen

---

[1] Zum ausführlichen Studium der geometrischen Eigenschaften im $R_4$, insbesondere der Hyperflächen, siehe ELIE CARTAN [1] und [2], BOL und die zitierten Arbeiten von B. SEGRE.

[2] Die Bestimmungsfläche eines Dizylinders ist topologisch einem Torus des $R_3$ homöomorph.

[3] Vgl. auch Kap. III, § 2.

Dizylinder reguläre Funktion ist also bereits durch ihre Werte auf der Bestimmungsfläche vollständig bestimmt (wogegen in der Kl.Th. eine Funktion $f(z)$ erst durch Vorgabe der Werte auf dem *ganzen* Rande eines Bereiches im Innern bekannt ist).

2. Hyperkugel. Die Hyperkugel mit dem Mittelpunkte $(w_0, z_0)$ und dem Radius $r$ ist die Gesamtheit aller Punkte $(w, z)$, die von dem Punkte $(w_0, z_0)$ einen Abstand $d = \sqrt{|w - w_0|^2 + |z - z_0|^2} < r$ haben.

Alle Hyperkugeln sind durch ganze lineare Transformationen ineinander überführbar. Der Rand einer Hyperkugel ist von außen total pseudokonvex, da in jedem Punkte des Randes $L(\varphi) = 2$ ist. Daraus folgt sofort, daß ein Stück des Randes der Hyperkugel sich nicht topologisch und analytisch auf ein Stück des Randes des Dizylinders abbilden läßt [auf dem Rand eines Dizylinders ist $L(\varphi) = 0$].

3. Reinhardtsche Körper[1]. Dizylinder und Hyperkugel gehören einer allgemeineren Klasse von Bereichen, den Reinhardtschen Körpern, an. Diese sind insbesondere als die Bereiche der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen bekannt.

Unter einem **Reinhardtschen Körper** mit dem endlichen Mittelpunkte $M(w_0, z_0)$ verstehen wir einen Bereich über dem $R_4$, der durch sämtliche Transformationen der zweiparametrigen Drehungsgruppe

$$T(\vartheta, \varphi) \qquad W = (w - w_0)\, e^{i\vartheta} + w_0, \quad Z = (z - z_0)\, e^{i\varphi} + z_0$$
$$(\vartheta, \varphi \text{ beliebig reell})$$

auf sich abgebildet wird.

Jede Ebene $w =$ konst. sowie jede Ebene $z =$ konst. schneidet — sofern sie überhaupt den Bereich trifft — Kreisringe oder eine Kreisscheibe mit $z_0$ bzw. $w_0$ als Mittelpunkt heraus.

Diejenigen Reinhardtschen Körper, bei denen von jeder dieser Ebenen stets genau eine volle Kreisscheibe herausgeschnitten wird, nennt man **vollkommene** Reinhardt*sche Körper*; ein solcher Körper ist immer schlicht und enthält mit einem Punkte $(w^*, z^*)$ auch alle Punkte $(k(w^* - w_0) + w_0,\ h(z^* - z_0) + z_0)$ mit $|k| \leqq 1$, $|h| \leqq 1$.

Einen Reinhardtschen Körper nennen wir **eigentlich**, wenn er seinen Mittelpunkt $M$ als inneren Punkt enthält (und in $M$ nicht verzweigt ist).

Wir werden im folgenden als Mittelpunkt $M$ eines Reinhardtschen Körpers meist den Koordinatenanfang wählen. Zur Darstellung dieser Körper mit dem Mittelpunkt (0, 0) benutzt man zweckmäßig die Viertelebene der absoluten Beträge von $w$ und $z$ (kürzer: **Absolute Ebene**). Ein Bereich in der absoluten Ebene repräsentiert immer einen solchen Reinhardtschen Körper, und umgekehrt läßt sich ein Reinhardtscher

[1] Die Reinhardtschen Körper wurden zuerst von Reinhardt untersucht; vgl. Reinhardt [1]. Bei Severi werden die Reinhardtschen Körper Sphäroide genannt.

Körper mit dem Mittelpunkt (0, 0) stets in der absoluten Ebene darstellen.

Die Fixpunkte der Transformationen $T(\vartheta, \varphi)$ sind die Punkte $(w_0, z_0)$ und die unendlichfernen Punkte $(0, \infty)$ und $(\infty, 0)$. Bei linearen Transformationen, die diese drei Punkte untereinander vertauschen, geht der REINHARDTsche Körper wieder in einen solchen über.

4. Kreiskörper und HARTOGSsche Körper. Die REINHARDTschen Körper liegen ihrerseits in der umfassenderen Klasse der Kreiskörper. Die Kreiskörper nehmen hier eine dem Kreise in der Kl.Th. ähnliche Stellung ein.

Unter einem **Kreiskörper** mit dem endlichen Mittelpunkte $M(w_0, z_0)$ verstehen wir einen Bereich über dem $R_4$, der durch sämtliche Transformationen

$$T(\vartheta) \qquad W = (w - w_0)\, e^{i\vartheta} + w_0, \quad Z = (z - z_0)\, e^{i\vartheta} + z_0$$
$$(\vartheta \text{ beliebig reell})$$

auf sich abgebildet wird.

Liegt der Mittelpunkt im Kreiskörper selbst, so sprechen wir wieder von einem **eigentlichen Kreiskörper.** Einen eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ nennen wir **vollkommen**, falls jede analytische Ebene durch den Mittelpunkt $M$ — also jede Ebene $\frac{w - w_0}{z - z_0} = s$ mit beliebigem, aber festem komplexem $s$ — genau eine Kreisscheibe herausschneidet[1]. Ein vollkommener Kreiskörper ist stets schlicht und sternartig und umgekehrt ein eigentlicher sternartiger Kreiskörper stets vollkommen.

Der Radius $r$ des aus einem vollkommenen Kreiskörper durch eine Ebene $s = c$ herausgeschnittenen Kreises ist eine Funktion von $s$: $r = r(s)$.

Die Randpunkte eines vollkommenen Kreiskörpers genügen also einer Gleichung

$$(1) \qquad |z - z_0| = R(s) = \frac{r(s)}{\sqrt{1 + |s|^2}}$$

oder bei Einführung der Veränderlichen $t = \frac{z - z_0}{w - w_0}$ einer Gleichung

$$(2) \qquad |w - w_0| = R^*(t) = |s|\, R(s)\,.$$

Die Darstellung (1) versagt für $z = z_0$, (2) für $w = w_0$.

Die Gesamtheit der inneren Punkte eines vollkommenen Kreiskörpers sind die Punkte $|z - z_0| < R(s)$ bzw. $|w - w_0| < R^*(t)$.

Bei den Transformationen der Drehungsgruppe $T(\vartheta)$ bleiben außer dem Mittelpunkt auch sämtliche unendlichfernen Punkte fest. Bringt man nun den Mittelpunkt $(w_0, z_0)$ durch die Transformation

$$(S_0) \qquad W = \frac{w - w_0}{z - z_0}, \qquad Z = \frac{1}{z - z_0} + z_1$$

[1] D. h., falls $\mathfrak{K}$ mit einem Punkte $(w^*, z^*)$ auch alle Punkte $(h(w^* - w_0) + w_0,\ h(z^* - z_0) + z_0)$ mit $|h| \leqq 1$ enthält.

in den unendlichfernen Punkt $(0, \infty)$, so geht dabei die Gruppe $T(\vartheta)$ in die Gruppe $T_z(\vartheta) = S_0 T(\vartheta) S_0^{-1}$:

$$T_z(\vartheta) \qquad W = w, \qquad Z = (z - z_1)\, e^{i\vartheta} + z_1$$

über, ferner die unendlichferne Ebene in die Ebene $z = z_1$, deren sämtliche Punkte Fixpunkte der Gruppe $T_z(\vartheta)$ sind, weiterer Fixpunkt ist nur noch der unendlichferne Punkt $(0, \infty) = S_0(w_0, z_0)$.

Ein Kreiskörper $\mathfrak{B}$ mit dem Mittelpunkt $(w_0, z_0)$ wird also bei der Transformation $S_0$ auf einen Bereich abgebildet, der die Gruppe $T_z(\vartheta)$ zuläßt.

Einen solchen Bereich (nämlich einen Bereich, der durch sämtliche Transformationen der Gruppe $T_z(\vartheta)$ bzw. einer entsprechenden Gruppe $T_w(\vartheta)$ in sich übergeht) nennen wir einen **Hartogsschen Körper.** Die Ebene $z = z_1$ bzw. $w = w_1$ heißt die **Symmetrieebene** des Körpers.

Ein Hartogsscher Körper heißt **eigentlich**, wenn es auf der Symmetrieebene innere Punkte gibt, *vollkommen*, wenn jede den Körper überhaupt schneidende Ebene $z = c$ bzw. $w = c$ eine volle Kreisscheibe herausschneidet.

*Ein vollkommener* Hartogs*scher Körper braucht nicht schlicht zu sein.*

Die Konvergenzbereiche der Reihen $\sum f_\nu(z)\,(w - w_0)^\nu$ bzw. $\sum f_\nu(w)\,(z - z_0)^\nu$ sind vollkommene Hartogssche Körper.

Unter der *Projektion* $\mathfrak{b}^{(w)}$ eines Hartogsschen Körpers $\mathfrak{B}$ mit der Symmetrieebene $z = z_1$ verstehen wir denjenigen Bereich über der $w$-Ebene, in dem 1. sämtliche in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $f(w)$ von $w$ allein eindeutig und regulär sind, der 2. jeden Bereich über der $w$-Ebene enthält, der die erste Eigenschaft besitzt.

Die Projektion eines Hartogsschen Körpers ist funktionentheoretisch von Wichtigkeit. Falls $\mathfrak{B}$ schlicht ist, braucht die Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ keineswegs schlicht zu sein (vgl. etwa Kap. VI, § 4). Ein vollkommener schlichter Hartogsscher Körper besitzt dagegen stets eine schlichte Projektion.

5. Cartansche Körper[1]. Die bisher aufgeführten Bereiche haben alle die Eigenschaft, eine Gruppe analytischer Drehungen in sich zuzulassen. Die allgemeinsten Bereiche dieser Art sind die Cartanschen Körper.

Definition. Unter einem **Cartanschen Körper** oder einem $(m, p)$-*Bereich* verstehen wir einen Bereich über dem $R_4$, der durch sämtliche Transformationen der Gruppe

$$T_{m,p}(\vartheta) \qquad W = (w - w_0)\, e^{im\vartheta} + w_0, \qquad Z = (z - z_0)\, e^{ip\vartheta} + z_0$$
$$(m, p \text{ teilerfremd, } \vartheta \text{ beliebig reell})$$

auf sich abgebildet wird.

[1] Vgl. H. Cartan [**5**].

Entsprechend wie oben führen wie die eigentlichen und vollkommenen $(m, p)$-Bereiche ein.

REINHARDTsche Körper, Kreiskörper, HARTOGSsche- und CARTANsche Körper fassen wir unter dem Begriff der *kreissymmetrischen Körper* zusammen.

Wir wollen kurz die wichtigsten Typen der kreissymmetrischen Körper über dem $R_{2n}$ kennenlernen. Wir sagen:

1. Der Bereich $\mathfrak{Z}$ im $R_{2n}$ ist ein **Polyzylinder** mit dem Mittelpunkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wenn er aus der Gesamtheit aller Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $R_{2n}$ besteht, die der Ungleichung

$$|z_m - a_m| < r_m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (r_m \text{ reell und fest})$$

genügen. Ist $r_m = r_0$ für alle $m$, so heiße $\mathfrak{Z}$ ein *gleichseitiger Polyzylinder mit dem Radius* $r_0$.

2. Die Gesamtheit $\mathfrak{K}$ der Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $R_{2n}$, für die $\sqrt{\sum_{m=1}^{n} |z_m - a_m|^2} < r_0$, bildet eine **Hyperkugel** mit dem Mittelpunkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und dem Radius $r_0$.

3. Ein Bereich $\mathfrak{B}$ über dem $R_{2n}$ ist ein **Kreiskörper (bzw. REINHARDTscher Körper) über dem $R_{2n}$** mit dem Mittelpunkte $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, falls er alle Transformationen

$$Z_m = (z_m - a_m)\, e^{i\vartheta} + a_m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

bzw. alle Transformationen

$$Z_m = (z_m - a_m)\, e^{i\vartheta_m} + a_m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n \text{ reell})$$

in sich zuläßt. Liegt $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in $\mathfrak{B}$, so heiße $\mathfrak{B}$ wieder ein *eigentlicher* Kreiskörper bzw. eigentlicher REINHARDTscher Körper. Entsprechend definieren wir einen vollkommenen Kreiskörper bzw. REINHARDTschen Körper.

## Drittes Kapitel.

# Darstellung regulärer Funktionen durch elementare Reihen.

Um uns komplizierte Rechnungen zu ersparen, führen wir sämtliche Überlegungen dieses Kapitels nur für Funktionen der beiden Veränderlichen $w$ und $z$ durch. Doch lassen sich fast alle Ergebnisse auf Funktionen von $n$ Veränderlichen übertragen[1].

### § 1. Der Bereich der absoluten Konvergenz von Potenzreihen.

Bei der Untersuchung der Potenzreihen nach $w - w_0$ und $z - z_0$ können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Koordinaten-

[1] Vgl. FABER, HARTOGS [1].

anfang als Entwicklungspunkt wählen, uns also auf Potenzreihen der Form

$$p(w, z) \equiv \sum_{m,l=0}^{\infty} a_{m,l} w^m z^l$$

beschränken. Aus Satz A geht hervor[1], daß der Bereich der absoluten und zugleich gleichmäßigen Konvergenz von $p(w, z)$ einen *vollkommenen*, also schlichten REINHARDT*schen Körper* $\mathfrak{K}$ bildet. *Gewöhnliche* Konvergenz kann außerdem nur auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ und ferner auf den Ebenen $w = 0$ und $z = 0$ in aus $\mathfrak{K}$ herausragenden Kreisen stattfinden; solche evtl. auftretenden zweidimensionalen Flächenstücke der gewöhnlichen Konvergenz außerhalb von $\mathfrak{K}$ nennen wir *Stachel* des Konvergenzkörpers.

Beispiel. Der Konvergenzbereich $|z| < 1$ der Reihe $\sum w \cdot z^n$ besitzt den Stachel $w = 0$, $|z| \geqq 1$.

Zur näheren Beschreibung des Konvergenzbereiches $\mathfrak{K}$ führen wir den Begriff der zusammengehörigen Konvergenzradien ein:

Ein Paar positiver Zahlen $r_0, r_0'$ heißt ein Paar **zusammengehöriger** oder **assoziierter Konvergenzradien** der Potenzreihe $p(w, z)$, falls diese in $|w| < r_0$, $|z| < r_0'$ konvergiert, in $|w| > r_0$, $|z| > r_0'$ dagegen divergiert[1].

Setzt man $|w| = r$, $|z| = r'$, so erfüllen die Paare zusammengehöriger Konvergenzradien von $p(w, z)$ in der *absoluten* Ebene eine Kurve $\Phi(r, r') = 0$, im $w$-$z$-Raume also eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit — den Rand des Konvergenzbereiches $\mathfrak{K}$.

Die obere Grenze aller vorkommenden $r$ bzw. $r'$ sei mit $R$ bzw. $R'$ bezeichnet; $R$ und $R'$ heißen die zu $p(w,z)$ gehörigen **Maximalradien**; sie geben die Radien der Kreise an, in denen die Koordinatenebenen den Bereich $\mathfrak{K}$ schneiden, so daß also $|w| < R$, $|z| < R'$ der kleinste $\mathfrak{K}$ umfassende Dizylinder um $(0, 0)$ ist.

Eigenschaften zusammengehöriger Konvergenzradien[2].

(I). (Monotonie.) *Ist* $r_1 < r_2$ *und* $r_1'$ *zu* $r_1$, $r_2'$ *zu* $r_2$ *assoziiert, so gilt stets* $r_1' \geqq r_2'$ (folgt aus der Vollkommenheit des Konvergenzbereiches).

(II). *Ist* $(r, r')$ *ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe* $\sum_{m,l=0}^{\infty} a_{m,l} w^m z^l$, *so ist stets* $\overline{\lim} \sqrt[m+l]{|a_{m,l}| r^m r'^l} = 1$.

Hieraus ergibt sich leicht die von HARTOGS bewiesene Grundeigenschaft:

(III). *Sind* $(r_1, r_1')$, $(r_2, r_2')$, $(r_3, r_3')$ *drei Paare zusammengehöriger Konvergenzradien und ist* $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$ (oder $0 < r_3' < r_2' < r_1' < R'$), *so gilt die Ungleichung*

$$\begin{vmatrix} 1 & \log r_1 & \log r_1' \\ 1 & \log r_2 & \log r_2' \\ 1 & \log r_3 & \log r_3' \end{vmatrix} \leqq 0. \tag{1}$$

[1] Vgl. S. 1.

[2] Vgl. B. ALMER, FABER, FABRY, HARTOGS [1], TIETZE, LEMAIRE; NAKANO hat eine Reihe der folgenden Sätze auf Laurentreihen zweier Veränderlicher übertragen.

Diese Ungleichung besagt geometrisch: Faßt man $\zeta' = \log r'$ als Funktion von $\zeta = \log r$ auf[1], also $\zeta' = \Psi(\zeta)$, und sind $P_1, P_2, P_3$ drei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve $\zeta' = \Psi(\zeta)$, so liegt $P_2$ niemals unterhalb der Sehne $\overline{P_1 P_3}$. Ist also insbesondere $\Psi(\zeta)$ zweimal differentiierbar, so ist $\frac{d^2 \log r'}{d(\log r)^2} \leqq 0$ oder, da $d(\log r) = \frac{1}{r}\,dr$, $d(\log r') = \frac{1}{r'}\,dr'$:

$$\frac{d^2 r'}{d r^2} \leqq \frac{1}{r'}\left(\frac{d r'}{d r}\right)^2 - \frac{1}{r}\,\frac{d r'}{d r}\,. \tag{2}$$

Folgerung. Gilt für zwei Paare $(r_1, r_1')$, $(r_2, r_2')$ zusammengehöriger Konvergenzradien $r_1 < r_2$, aber $r_1' = r_2'$, so sind alle $r \leqq r_2$ zu $R'$ assoziiert, insbesondere ist $r_2' = R'$; entsprechend gilt: Ist $r_1' < r_2'$, $r_1 = r_2$, so ist $r_1 = r_2 = R$ und jedes $r' \leqq r_2'$ zu $R$ assoziiert.

Dies besagt: Die Kurve $\Phi(r, r') = 0$ der zusammengehörigen Konvergenzradien läuft höchstens längs einer bei $r = 0$ bzw. $r' = 0$ beginnenden Strecke den Achsen (in der absoluten Ebene) parallel. In Verbindung mit (I) folgt, daß zu jedem $r < R$ *eindeutig* ein $r'$ assoziiert ist (zu jedem $r' < R'$ eindeutig ein $r$), daß also $\Phi(r, r') = 0$ sich in $0 < r < R$ (bzw. $0 < r' < R'$) nach $r'$ (bzw. $r$) auflösen läßt: $r' = \varphi(r)$ (bzw. $r = \psi(r')$). *$\varphi(r)$ und $\psi(r')$ sind dabei monotone, nichtwachsende, stetige Funktionen.*

Das System der zusammengehörigen Konvergenzradien ist bereits vollständig durch $\varphi(r)$ bestimmt; es wird nämlich gebildet durch alle Paare $(r, r')$ positiver Zahlen, für die entweder $r' = \varphi(r)$ oder $\left(\text{falls } \lim\limits_{r=R} \varphi(r) \neq 0\right)$ $r = R$, $0 < r' < \lim \varphi(r)$; das Innere des Konvergenzbereiches läßt sich also darstellen durch $|z| < \varphi(|w|)$, $|w| < R$. *Im folgenden werden wir daher das System der assoziierten Konvergenzradien stets in der Form $r' = \varphi(r)$ gegeben denken.*

Es zeigt sich, daß die Monotonie von $\varphi(r)$ und die Grundeigenschaft für das System der zusammengehörigen Konvergenzradien einer Potenzreihe charakteristisch sind:

Satz 7. *Genügt die für $0 < r < R$ definierte, positive Funktion $r' = \varphi(r)$ den beiden Bedingungen: 1. $r' = \varphi(r)$ nimmt mit wachsendem $r$ niemals zu, 2. die Wertepaare $(r, r' = \varphi(r))$ genügen der Grundeigenschaft* (III), *so gibt es stets eine Potenzreihe $p(w, z)$, deren System der zusammengehörigen Konvergenzradien durch $r' = \varphi(r)$ bestimmt ist*[2].

(IIIa). Bemerkt sei, daß Monotonie und Grundeigenschaft sich durch andere ihnen äquivalente Eigenschaften ersetzen lassen. So zeigte Hartogs:

$r' = \varphi(r)$ bestimmt dann und nur dann ein System zusammengehöriger Konvergenzradien einer Potenzreihe, falls es durch jeden Punkt

[1] Über die Möglichkeit einer solchen Darstellung vgl. weiter unten.
[2] Vgl. Hartogs [1] S. 84ff.

der Kurve $r' = \varphi(r)$ eine „Hyperbel" $C r^{\alpha} r'^{\beta} = 1$ $(\alpha \geqq 0,\ \beta > 0,\ C > 0)$ gibt, die keine Punkte mit $r' < \varphi(r)$ gemeinsam hat[1].

Ferner bewies FABER[2]:

*$r' = \varphi(r)$ genügt der charakteristischen Differentialungleichung:*

$$\text{(2a)} \qquad \overline{\left(\frac{d^2 r'}{d r^2}\right)}_+ \leqq \frac{1}{r'}\left(\frac{d r'}{d r}\right)_+^2 - \frac{1}{r}\left(\frac{d r'}{d r}\right)_+,$$

*wobei*

$$\overline{\left(\frac{d^2 r'}{d r^2}\right)}_+ = \overline{\lim_{h=0}} \frac{\left(\frac{d\varphi(r+h)}{dr}\right)_+ - \left(\frac{d\varphi(r)}{dr}\right)_+}{h}.$$

Es existieren also insbesondere einseitige Ableitungen in jedem inneren Punkte. Ist $\varphi(r)$ zweimal differentiierbar, so ist (2a) mit der Ungleichung (2) identisch.

Wie wir später zeigen (vgl. Kap. IV, § 3), ist ferner die Pseudokonvexität von außen für diejenigen REINHARDTschen Körper charakteristisch, die zugleich Konvergenzkörper von Potenzreihen sind.

(IV). Ist $(r_0, r'_0)$ ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe $p(w, z)$, so gibt es mindestens einen Punkt $(w_0, z_0)$ mit $|w_0| = r_0$, $|z_0| = r'_0$, in dem die durch $p(w, z)$ dargestellte reguläre Funktion singulär wird[3].

Hieraus ergibt sich die überraschende Folgerung:

Satz 8. *Jede in einem eigentlichen* REINHARDT*schen Körper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ ist in eine in ganz $\mathfrak{K}$ konvergente Potenzreihe entwickelbar und damit zugleich auch in das ganze Innere des kleinsten $\mathfrak{K}$ umfassenden vollkommenen* REINHARDT*schen Körpers analytisch fortsetzbar*[4].

Die um $O(0, 0)$ sicher existierende Potenzreihe der Funktion $f(w, z)$ kann nämlich nach (IV) in keinem inneren Punkte von $\mathfrak{K}$ aufhören zu konvergieren, ist also nach Satz A auch noch im kleinsten $\mathfrak{K}$ umfassenden vollkommenen REINHARDTschen Körper konvergent und damit $f$ dort regulär.

Ist somit $\mathfrak{K}$ ein *nicht*vollkommener, eigentlicher REINHARDTscher Körper, so läßt sich stets die Gesamtheit aller in $\mathfrak{K}$ regulären Funktionen *gleichzeitig* in einen größeren Bereich hinein fortsetzen; ein solcher Bereich kann insbesondere kein Regularitätsbereich sein[5] — ganz im Gegensatz zur Kl.Th., wo es zu jedem Bereich der $z$-Ebene eine Funktion $f(z)$ gibt, die ihn als ihren Regularitätsbereich hat.

[1] (IIIa) besagt im wesentlichen das gleiche wie ein Satz von B. ALMER (vgl. ALMER S. 15).

[2] Vgl. FABER S. 300.

[3] Verschärfungen dieses Satzes vgl. FABER und HARTOGS [1].

[4] Vgl. auch H. CARTAN [5]; THULLEN [1], [3]. CARTAN beweist den Satz aus einer in $\mathfrak{K}$ gültigen Integraldarstellung (s. S. 42ff.), woraus dann umgekehrt die Eigenschaft (IV) folgt.

[5] Vgl. auch Kap. VI.

## § 2. Potenzreihen und das Integral von CAUCHY.

Ist $f(w, z)$ im Innern des Dizylinders

$$(1) \qquad |w| < d_1, \quad |z| < d_2$$

regulär und auf dem Rande noch stetig, so läßt sich $f$ — wie man durch zweimalige Anwendung der CAUCHYschen Integralformel der Kl.Th. einsieht — so darstellen:

$$(2) \qquad f(w, z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\mathfrak{C}_1} d\eta \int\limits_{\mathfrak{C}_2} \frac{f(\eta, \zeta)}{(\eta - w)(\zeta - z)} d\zeta;$$

der Integrationsweg $\mathfrak{C}_1$ ist dabei der Kreis $|\eta| = d_1$, $\mathfrak{C}_2$ der Kreis $|\zeta| = d_2$.

Entwickelt man $\frac{1}{(\eta - w)(\zeta - z)}$ in eine Potenzreihe nach $w$ und $z$, so kann man Integration und Summation vertauschen und erhält im Innern von (1)

$$f(w, z) \equiv \sum_{m,l=0}^{\infty} a_{m,l}\, w^m z^l,$$

wobei
$$a_{m,l} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int d\eta \int \frac{f(\eta, \zeta)}{\eta^{m+1}\zeta^{l+1}} d\zeta = \frac{1}{m!\, l!} \frac{\partial^{m+l} f(0, 0)}{\partial w^m \partial z^l}.$$

Aus der Darstellung (2) folgt als Verschärfung von Satz 6:

*Stimmen die Randwerte zweier im Innern eines Dizylinders regulärer Funktionen $f$ und $g$ auf der (zweidimensionalen) Bestimmungsfläche überein und sind die Randwerte dort noch stetig, so sind $f$ und $g$ vollkommen identisch*[1].

Damit nun für eine Funktion $f(w, z)$ die Darstellung durch das Doppelintegral (2) gilt, genügt es bereits, die Regularität von $f$ in den Punkten des Randstückes $|w| = d_1$ $(|z| < d_2)$ und des (zweidimensionalen) Stückes $z = z_0$, $|w| \leqq d_1$ irgendeiner Ebene $z = z_0$ mit $|z_0| < d_2$ zu fordern. Wir gewinnen daraus den interessanten, von HARTOGS aufgestellten

Satz 9. *Die Funktion $f(w, z)$ genüge folgenden Bedingungen:*

1. *für jedes $\eta$ mit $|\eta| = d_1$ ist $f(\eta, z)$ in $|z| < d_2$ analytisch in $z$ und auf $|z| = d_2$ noch stetig,*

2. *es gibt ein $z_0$ mit $|z_0| < d_2$, so daß $f(w, z)$ in allen Punkten $(w, z_0)$ mit $|w| \leqq d_1$ sich regulär verhält* (als Funktion der beiden Veränderlichen $w, z$),

3. *$f(\eta, \zeta)$ ist stetig auf $|\eta| = d_1$, $|\zeta| = d_2$.*

*Dann ist $f(w, z)$ ins ganze Innere des Dizylinders $|w| < d_1$, $|z| < d_2$ analytisch fortsetzbar*[2].

Die CAUCHYsche Integralformel (2) gilt natürlich wörtlich im $R_{2n}$. Ebenso läßt sich unmittelbar der CAUCHYsche Integralsatz übertragen,

[1] Hierzu und zu gewissen Verallgemeinerungen vgl. BERGMANN [4], [15], [16].

[2] Vgl. HARTOGS [8]. HÖSSJER gibt eine Verallgemeinerung dieses Satzes an.

wenn man als Integrationsfläche die Bestimmungsfläche eines Polyzylinders wählt. Hier können aber auch allgemeinere Integrationswege zugelassen werden. Es gilt[1]:

$\mathfrak{F}$ *sei eine n-dimensionale, geschlossene zweiseitige Fläche, die eine reell-analytische Darstellung* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *gestattet und die sich ferner innerhalb eines Bereiches* $\mathfrak{B}$ *stetig auf einen Punkt oder eine Kurve zusammenziehen läßt. Ist dann die Funktion* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *in* $\mathfrak{B}$ *regulär und auf* $\mathfrak{F}$ *noch stetig, so ist*

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_n = 0\,.$$

Die Umkehrung des CAUCHYschen Integralsatzes, der Satz von MORERA, ist zuerst von VOLTERRA übertragen worden:

Satz 10[2]. *Verschwindet für eine in einem Bereiche* $\mathfrak{B}$ *stetige Funktion* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *stets das Integral*

$$\int f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_n\,,$$

*erstreckt über die Bestimmungsfläche eines beliebigen ganz in* $\mathfrak{B}$ *liegenden Polyzylinders, so ist* $f$ *eine in* $\mathfrak{B}$ *analytische Funktion.*

SEVERI gab für diesen Satz einen besonders einfachen Beweis an.

## § 3. Der invariante Konvergenzkörper.

Der in § 1 dieses Kapitels betrachtete Konvergenzbereich $\mathfrak{K}$ der Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f(w, z)$ hängt noch von der willkürlichen Auswahl der Koordinatenebenen ab. Nach einer nullpunktstreuen linearen *Koordinaten*transformation (einer anderen Auswahl der Koordinatenebenen) ist nämlich im allgemeinen der Konvergenzkörper der Potenzreihenentwicklung von $f$ nach den neuen Veränderlichen von $\mathfrak{K}$ verschieden.

Beispiel. $f(w, z) \equiv \dfrac{1}{1 - wz}$.

Der Konvergenzkörper $\mathfrak{K}$ der zugehörigen Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(wz)^m$ wird von den Punkten $|w| \cdot |z| < 1$ gebildet. Nach der Koordinatentransformation $w = W + Z, z = Z$ geht $\sum (wz)^m$ über in $\sum (WZ)^m + \sum Z^{2m} + p'(W, Z)$. Der Konvergenzkörper der neuen Reihe liegt im Durchschnitt von $|W| \cdot |Z| < 1$ und $|Z| < 1$, wogegen $\mathfrak{K}$ (im $W$-$Z$-System betrachtet) über $|Z| < 1$ hinausragt.

Um nun den Konvergenzbereich $\mathfrak{K}$ durch einen anderen zu ersetzen, der diese Willkür nicht mehr aufweist, gehen wir so vor:

Wir bilden die Menge $\mathfrak{M}$ aller Punkte $P(w, z)$ des $R_4$ mit der Eigenschaft, daß nach einer geeigneten ganzen linearen und nullpunktstreuen Transformation der Koordinaten $w, z$ in die Koordinaten $W, Z$ die

[1] Vgl. POINCARÉ [2]; FORSYTH: Kap. VI; PASCAL, NALLY-ANDREOLI.

[2] Vgl. VOLTERRA und SEVERI [3].

Potenzreihenentwicklung von $f(w(W, Z), z(W, Z))$ nach $W, Z$ in einer Umgebung von $P$ (im $W$-$Z$-System betrachtet) konvergiert. Der offene Kern von $\mathfrak{M}$ ist ein schlichter Bereich $\mathfrak{J}$, den wir den **invarianten Konvergenzkörper**[1] der ursprünglichen Potenzreihe $p(w, z)$ von $f(w, z)$ nennen. Seine Invarianz läßt sich auch so ausdrücken: Durch eine ganze lineare, nullpunktstreue Transformation

$$W = aw + bz, \qquad Z = cw + dz, \qquad ad - bc \neq 0$$

des *Raumes* wird $\mathfrak{J}$ in einen Bereich $\mathfrak{J}^*$ übergeführt, der mit dem invarianten Konvergenzkörper der Potenzreihenentwicklung von $f(w(W, Z), z(W, Z))$ um $(0, 0)$ nach $W, Z$ identisch ist.

Es gilt nun:

Satz 11. *Der invariante Konvergenzkörper $\mathfrak{J}$ einer Funktion $f(w, z)$ mit der Potenzreihenentwicklung $\sum a_{m,l} w^m z^l$ ist mit dem Bereiche $\mathfrak{G}$ der gleichmäßigen Konvergenz der „Diagonalreihe“ $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{m-l,l} w^{m-l} z^l\right\}$ identisch.*

*$\mathfrak{G}$ ist zugleich derjenige vollkommene Kreiskörper um $(0, 0)$, bei dem jede analytische Ebene durch $(0, 0)$ den Rand in einem Kreise durch den nächsten singulären Punkt auf ihr schneidet*[2].

Zum Beweise ist zu bemerken:

1. $\mathfrak{G}$ hat sicher die von $\mathfrak{J}$ behauptete Invarianz, denn bei homogenen linearen Transformationen werden jeweils nur die einzelnen inneren Summen unter sich transformiert. 2. $\mathfrak{G}$ ist ein vollkommener Kreiskörper; $f$ ist in $\mathfrak{G}$ regulär und wird dort durch die Diagonalreihe dargestellt. 3. $\mathfrak{G}$ umfaßt $\mathfrak{J}$, denn nach geeigneter zulässiger Koordinatentransformation konvergiert die Potenzreihenentwicklung von $f$ in einer Umgebung eines vorgegebenen Punktes $P$ aus $\mathfrak{J}$ gleichmäßig, also erst recht die zugehörige Diagonalreihe. 4. $\mathfrak{J}$ umfaßt $\mathfrak{G}$, da in jedem vorgegebenen Punkte von $\mathfrak{G}$ nach jeweils geeigneten homogenen linearen Koordinatentransformationen auf Grund von Satz 8 dort $\sum a_{m,l} w^m z^l$ schon konvergiert. 6. Wäre für eine Ebene $s = w/z =$ konst. $= c$ (wir können $c = 0$ voraussetzen) keine Singularität von $f$ auf dem Kreise $\mathfrak{k}_0$, den $s = 0$ aus $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{G}$ herausschneidet, so gäbe es einen $\mathfrak{k}_0$ im Innern enthaltenden Dizylinder $\mathfrak{D}$, in dem $f$ noch regulär wäre; $\mathfrak{D}$ läge in $\mathfrak{G}$, also erst recht in $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{k}_0$ könnte somit gegen unsere Annahme nicht zum Rande von $\mathfrak{J}$ gehören.

Im obigen Satze ist insbesondere auch enthalten, daß sich eine in einem vollkommenen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ in eine überall in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergente Diagonalreihe entwickeln läßt.

Dieser Satz ist auf beliebige eigentliche Kreiskörper übertragbar. Ist nämlich $f$ eine im eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion, so stimmt das Integral

$$F(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tilde{s}| = \varrho} f(w\tilde{s}, z\tilde{s}) \frac{d\tilde{s}}{\tilde{s} - 1} \qquad (\varrho > 1)$$

[1] Zum Begriff des invarianten Konvergenzkörpers vgl. Behnke [2], ferner Severi [7].

[2] Vgl. Behnke [2].

für jedes $\varrho > 1$ und $(w, z)$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}_\varrho(O)$ von $O(0, 0)$ mit der Funktion $f$ überein. $F$ und damit $f$ ist aber in jedem $\mathfrak{K}_\varrho$ — dem aus $\mathfrak{K}$ durch $W = \frac{1}{\varrho} w$, $Z = \frac{1}{\varrho} z$ entstehenden Bildbereich — regulär. Für $\varrho \to \infty$ erfüllen die $\mathfrak{K}_\varrho$ gerade den kleinsten $\mathfrak{K}$ umfassenden vollkommenen Kreiskörper $\tilde{\mathfrak{K}}$; $f$ ist also in $\tilde{\mathfrak{K}}$ regulär, demnach dort (somit erst recht in $\mathfrak{K}$) in eine Diagonalreihe entwickelbar. Die Entwicklung von $f$ erhält man, indem man $\frac{1}{\tilde{s} - 1}$ in eine geometrische Reihe entwickelt und dann Integration und Summation vertauscht. Die einzelnen Integrale sind homogene Polynome in $w, z$, für die sich bei $\varrho \to 1$ die untenstehende Darstellung ergibt. Wir können also sagen:

Satz 12[1]. *Jede in einem eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ ist ins ganze Innere des kleinsten $\mathfrak{K}$ umfassenden vollkommenen Kreiskörpers $\tilde{\mathfrak{K}}$ analytisch fortsetzbar; zugleich läßt sich $f$ in eine im Innern von $\tilde{\mathfrak{K}}$ gleichmäßig konvergente Diagonalreihe entwickeln:*

$$f(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{m} a_{m-l,\,l}\, w^{m-l} z^l \right\} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} P_m(w, z),$$

*wobei*

$$P_m(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\vartheta} f(w e^{i\vartheta}, z e^{i\vartheta})\, d\vartheta .$$

Weitere Aussagen über den invarianten Konvergenzkörper bzw. die Diagonalreihen werden wir auf Grund der Ergebnisse des nächsten Paragraphen machen können.

Hier sei zum Schluß auf die zu den allgemeinen kreissymmetrischen Körpern (mit $mp \neq 0$) gehörigen Reihenentwicklungen hingewiesen. Es gelten die Sätze:

Satz 13[1]. a) $mp > 0$.

*Ist die Funktion $f(w, z)$ in einem* CARTAN*schen Körper $\mathfrak{B}_{m,p}$ mit $mp > 0$ regulär, so läßt sich $f$ in eine im Innern von $\mathfrak{B}_{m,p}$ gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen in $w$ und $z$ entwickeln: $f(w, z) = \sum P_l(w, z)$, wobei die $P_l(w, z)$ als Funktionen von $w^{1/m}, z^{1/p}$ zugleich homogene Polynome vom Grade $l$ sind und ferner*

$$P_l(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\vartheta} f(w e^{im\vartheta}, z e^{ip\vartheta})\, d\vartheta .$$

b) $mp < 0$ $(m > 0,\ p = -p' < 0)$.

*Ist die Funktion $f(w, z)$ in einem* CARTAN*schen Körper $\mathfrak{B}_{m,p}$ mit $mp < 0$ regulär, so läßt sich $f$ in eine im Innern von $\mathfrak{B}_{m,p}$ gleichmäßig konvergente Reihe regulärer Funktionen entwickeln von der Form:*

[1] Vgl. H. CARTAN [**5**]. Satz 12 gilt wörtlich für $n$ Veränderliche. Zu Satz 12 vgl. auch THULLEN [**3**].

$f(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (w^{\lambda} z^{\mu})^l f_l(w^{p'} z^m) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(w, z)$. *Hierbei sind* $\lambda$ *und* $\mu$ *so zu wählen, daß* $\lambda m + \mu p = 1$; *ferner ist*

$$\varphi_l(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\vartheta} f(w e^{im\vartheta}, z e^{ip\vartheta})\, d\vartheta .$$

Der Beweis wird ganz analog dem des Satzes 12 geführt. Die Entwicklungen in den HARTOGSschen Körpern ($mp = 0$) werden wir im nächsten Paragraphen gesondert behandeln.

## § 4. Die Entwicklungen nach je einer Veränderlichen[1].

Ist die Funktion $f(w, z)$ im Punkte $P_0(w_0, z_0)$ regulär, so gelten in der Umgebung von $P_0$ neben der Potenzreihenentwicklung von $f$ nach $w - w_0$, $z - z_0$ auch die Entwicklungen nach je einer Veränderlichen:

(1) $\sum_0^{\infty} f_m(w)(z - z_0)^m$ und (1*) $\sum_0^{\infty} g_m(z)(w - w_0)^m$.

Hierbei sind die $f_m$ bzw. $g_m$ in der Umgebung von $w_0$ bzw. $z_0$ reguläre Funktionen von $w$ bzw. $z$. Ist ferner $\sum a_{k,l}(w - w_0)^k (z - z_0)^l$ die Potenzreihenentwicklung von $f$ um $P_0$, so lassen sich die $f_m$ und $g_m$ darstellen durch

$$f_m \equiv \sum a_{k,m}(w - w_0)^k, \qquad g_m(z) \equiv \sum a_{m,k}(z - z_0)^k .$$

Wir können im folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Entwicklungspunkt einen Punkt mit den Koordinaten 0, 0 wählen und uns zugleich auf die Untersuchung der Reihen $\sum f_m(w) z^m$ beschränken.

Wir bemerken noch, daß man eine Diagonalreihe in eine Reihe $\sum f_m(s) z^m$ überführen kann, indem man $w$ durch $sz$ ersetzt; die $f_m(s)$ sind dann Polynome in $s$.

Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe $\sum f_m(w) z^m$ ist ein *vollkommener* HARTOGS*scher Körper* $\mathfrak{B}$ mit der Symmetrieebene $z = 0$. Den Rand von $\mathfrak{B}$ können wir also durch eine positive Funktion $|z| = R(w) = R(u, v)$, das Innere durch $|z| < R(w)$ angeben, wobei $w$ die (nicht notwendig schlichte) Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ durchläuft. $R(w)$ nennen wir für jeweils festes $w$ den zu $w$ gehörigen *Radius der gleichmäßigen Konvergenz* der gegebenen Reihe.

Ist umgekehrt eine Funktion $f$ in einem eigentlichen (nicht notwendig vollkommenen oder schlichten) HARTOGSschen Körper $\mathfrak{B}$ mit der Symmetrieebene $z = 0$ regulär, so kann man ähnlich wie im Beweise von Satz 11 schließen, daß $f$ sich in eine im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ und damit auch im Innern des kleinsten $\mathfrak{B}$ umfassenden vollkommenen HARTOGSschen Körpers $\tilde{\mathfrak{B}}$ gleichmäßig konvergente Reihe $\sum f_m(w) z^m$ entwickeln läßt. Hieraus folgt dann insbesondere, *daß jede in einem*

[1] Diese Reihen wurden zuerst von HARTOGS untersucht; vgl. HARTOGS [1].

*eigentlichen* HARTOGS*schen Körper reguläre Funktion notwendig ins ganze Innere des kleinsten umfassenden vollkommenen* HARTOGS*schen Körpers analytisch fortsetzbar ist*[1].

Untersuchen wir nun die Bereiche der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe $\sum f_m(w) z^m$ ausführlicher!

Grundlegend für das Folgende ist der

Satz 14[2] (HARTOGSscher Hauptsatz). *Die Funktionen* $f_m(w)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *seien sämtlich in einem Bereiche* $\mathfrak{b}^{(w)}$ *der* $w$*-Ebene regulär, ferner konvergiere die Reihe* $\sum f_m(w) z^m$ *für alle* $w$ *aus* $\mathfrak{b}^{(w)}$ *und* $|z| < A$. *Gibt es dann ein* $z_0 \neq 0$, *für welches die Reihe* $\sum f_m(w) z_0^m$ *im Innern von* $\mathfrak{b}^{(w)}$ *gleichmäßig konvergiert, so konvergiert* $\sum f_m(w) z^m$ *gleichmäßig in der Umgebung jedes Punktes* $P(w, z)$ *mit* $w$ *aus* $\mathfrak{b}^{(w)}$ *und* $z$ *aus* $|z| < A$.

Eine der wichtigsten Folgerungen dieses Satzes ist ein schon von OSGOOD 1900 aufgestellter und von HARTOGS 1905 bewiesener Satz, der insbesondere besagt, daß man den Begriff einer regulären Funktion statt durch Potenzreihen (nach WEIERSTRASS) auch durch die Forderung der Differentiierbarkeit nach $w$ und $z$ einführen kann — also analog der RIEMANNschen Definition einer regulären Funktion $f(z)$. Es gilt:

Satz 15[3]. *Ist die Funktion* $f(w, z)$ *in dem Dizylinder* $|w| < a$, $|z| < b$ *eindeutig erklärt und dort für jedes feste* $z$ *mit* $|z| < b$ *eine in* $|w| < a$ *reguläre Funktion von* $w$ *und umgekehrt für jedes feste* $w$ *aus* $|w| < a$ *eine in* $|z| < b$ *reguläre Funktion von* $z$, *so ist* $f(w, z)$ *eine im ganzen Innern des Dizylinders reguläre Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen* $w$ *und* $z$.

Eigenschaften des Radius $R(w)$ der gleichmäßigen Konvergenz[4]. Der vollkommene HARTOGSsche Körper $\mathfrak{B}$: $|z| < R(w)$ mit der Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ sei der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum f_m(w) z^m$; $f(w, z)$ sei die durch die Reihe in $\mathfrak{B}$ dargestellte reguläre Funktion. Dann gilt:

(I)[5]. *Für jedes feste* $w'$ *aus* $\mathfrak{b}^{(w)}$ *liegt auf dem Kreise* $|z| = R(w')$ *mindestens eine singuläre Stelle der Funktion* $f$. $R(w')$ gibt also die Entfernung an zwischen der regulären Stelle $(w', 0)$ und der nächsten auf der Ebene $w = w'$ gelegenen Singularität der Funktion $f$. Man bezeichnet daher auch $R(w)$ als den zur Ebene $z = 0$ gehörigen **Regularitätsradius** der Funktion $f$. (Allgemein: $R(w' | z_0)$ = Entfernung zwischen $(w', z_0)$ und der nächsten auf $w = w'$ gelegenen Singularität.)

[1] Vgl. H. CARTAN [5]; THULLEN [3]. Man beachte, daß der kleinste einen schlichten HARTOGSschen Körper umfassende vollkommene Körper keineswegs schlicht zu sein braucht (s. auch Kap. VI, § 4).

[2] Beweis von Satz 14 siehe auch OSGOOD: Lb. HARTOGS führt den Beweis mit Hilfe reeller (harmonischer) Funktionen.

[3] Vgl. HARTOGS [1] (hier auch für $n$ Veränderliche); ferner OSGOOD Lb.

[4] Vgl. HARTOGS [1].

[5] Folgt auch unmittelbar aus der Möglichkeit, eine in einem HARTOGSschen Körper reguläre Funktion dort in eine Reihe $\sum f_m z^m$ zu entwickeln (vgl. S. 44).

Daneben kommt in der Literatur der **Meromorphieradius** $Q(w'|z_0)$ einer meromorphen Funktion $F(w, z)$ vor. Unter ihm versteht man entsprechend den Radius des Kreises auf der Ebene $w = w'$ um den für $F$ meromorphen Punkt $(w', z_0)$, der durch den nächsten (wesentlich) singulären Punkt von $F$ auf $w = w'$ geht. $R(w|z_0)$ und $Q(w|z_0)$ spielen bei einer Reihe grundlegender Sätze eine wesentliche Rolle (über $Q(w|z_0)$ vgl. auch S. 51)[1].

(II). *$R(w)$ ist eine nach oben halbstetige Funktion von $w$,* d. h. für jede Folge $w_i \to w_0$ ist $\underline{\lim} R(w_i) \geqq R(w_0)$.

(III). *Bezeichnet man für festes $w_0$ mit $R^*(w_0)$ den Radius der gewöhnlichen Konvergenz der gegebenen Reihe $\sum f_m(w_0) z^m$, so gilt entweder* $R(w_0) = \underline{\lim}_{w \to w_0} R^*(w)$ *oder* $R(w_0) = 0$ (Beweis mit Hilfe des Hartogsschen Hauptsatzes).

Sind insbesondere die $f_m(w)$ *ganze rationale* Funktionen vom Grade $\nu_m$, *so gilt stets* $R(w_0) = \underline{\lim} R^*(w)$, falls nur der Quotient $\nu_m/m$ für alle $m$ beschränkt ist; diese Voraussetzung ist z. B. bei Diagonalreihen erfüllt.

(IV). Grundeigenschaft[2]. *Verschwindet $R(w)$ in keinem Punkte eines Bereiches $\mathfrak{b}_0^{(w)}$, so ist $\log R(w) \equiv \log R(u, v)$ dort superharmonisch.* Ist also $R(w)$ zweimal differentiierbar nach $u$ und $v$ $(w = u + iv)$, so gilt

$$\Delta(\log R(w)) \equiv \frac{\partial^2 \log R(w)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log R(w)}{\partial v^2} \leqq 0\,.$$

Die Eigenschaften (II) und (IV) gelten auf Grund des Kontinuitätssatzes (vgl. Kap. IV, § 1) auch für den Meromorphieradius einer meromorphen Funktion.

Die Grundeigenschaft ist unter gewissen Voraussetzungen für $R(w)$ charakteristisch:

Satz 16[3]. *Die im beschränkten Bereiche $\mathfrak{b}^{(w)}$ der $w$-Ebene eindeutig erklärte positive Funktion $R(w)$ besitze die Eigenschaften:*

1. *$R(w)$ verschwindet in keinem Punkte aus $\mathfrak{b}^{(w)}$,*
2. *$R(w)$ ist zweimal stetig differentiierbar,*
3. *in jedem Punkte aus $\mathfrak{b}^{(w)}$ gilt $\Delta(\log R(w)) \leqq 0$.*

*Dann gibt es stets eine Reihe $\sum f_m(w) z^m$, deren Glieder $f_m(w)$ in $\mathfrak{b}^{(w)}$ eindeutig und regulär sind, so daß der Radius der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe für jedes $w$ aus $\mathfrak{b}^{(w)}$ mit $R(w)$ übereinstimmt.*

Für die Diagonalreihen $\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{m} a_{m-l,l}\, w^{m-l} z^l \right\} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} P_m(s)\, z^m$ $\left(s = \frac{w}{z} = \sigma + i\tau\right)$ sind die meisten der oben angegebenen Resultate unmittelbar anwendbar, lassen sich zu dem oft noch verschärfen. So gilt:

a) *Es ist stets* $R(s) = \underline{\lim} R^*(s)$, wenn man unter $R(s) = R(\sigma, \tau)$ den Radius der gleichmäßigen, unter $R^*(s)$ den der gewöhnlichen Konvergenz der Reihe $\sum f_m(s) z^m$ versteht[3].

b) $\log R(s)$ *ist überall superharmonisch*[3].

[1] Über den Zusammenhang zwischen Pseudokonvexität und Regularitätsradius siehe Blumenthal.

[2] Vgl. den Anhang zu diesem Kapitel. [3] Vgl. Hartogs [1].

Satz 16a[1]. *Ist der Rand* $|z| = R(s)$ *eines vollkommenen Kreiskörpers* $\mathfrak{B}$ *zweimal stetig differentiierbar nach* $\sigma, \tau$, *existiert* $\lim\limits_{s\to\infty} |s| R(s)$ *und ist* $\log R(s)$ *überall superharmonisch, so ist* $\mathfrak{B}$ *der Regularitätsbereich einer Funktion* $f(w, z)$ *und damit auch der invariante Konvergenzkörper der zu* $f$ *gehörigen Potenzreihenentwicklung von* $f$ *um den Mittelpunkt* (0, 0).

Aus dem HARTOGSschen Hauptssatze (Satz 13) folgt noch für Diagonalreihen, daß der Bereich der gewöhnlichen Konvergenz einer Diagonalreihe mit dem Bereiche $\mathfrak{G}$ der gleichmäßigen Konvergenz identisch ist, falls $\mathfrak{G}$ den Entwicklungspunkt (0, 0) im Innern enthält. Dieser Satz läßt sich wesentlich verschärfen. Es gilt nämlich:

*Konvergiert eine Diagonalreihe in der Umgebung eines Punktes* $P$, *so konvergiert sie dort stets auch gleichmäßig. Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz enthält zudem stets den Entwicklungspunkt* (0, 0) *als inneren Punkt, ist also ein vollkommener Kreiskörper*[2].

Eine Diagonalreihe besitzt daher dann und nur dann einen Konvergenzbereich, wenn die zugehörige Potenzreihe im $R_4$ einen solchen besitzt.

Aus dem Obigen folgt insbesondere, daß bei einer Potenzreihe die Stachel aller gewöhnlichen Konvergenzkörper, die man erhält, wenn man irgend zwei analytische Ebenen durch (0, 0) als Koordinatenebenen wählt, nirgends einen vierdimensionalen Bereich vollständig ausfüllen.

# Anhang.

## Superharmonische Funktionen[3].

Zur Charakterisierung der Singularitäten benötigen wir öfters besondere reelle Funktionen zweier reeller Veränderlichen, die sog. superharmonischen Funktionen (wir erinnern etwa an die Grundeigenschaft der Regularitätsradien, vgl. § 4).

Definition. Die reelle Funktion $q(x, y)$ heißt in einem Bereiche $\mathfrak{b}^{(z)}$ der $z$-Ebene **superharmonisch**, wenn sie dort folgender Bedingung genügt:

**(B).** Ist $\mathfrak{C}$ eine beliebige geschlossene, sich nicht überschneidende Jordankurve in $\mathfrak{b}^{(z)}$, $\varphi(x, y)$ eine im Innern von $\mathfrak{C}$ harmonische und auf $\mathfrak{C}$ noch stetige Funktion, für die $q(x, y) \geqq \varphi(x, y)$ auf $\mathfrak{C}$, so gilt stets auch $q(x, y) \geqq \varphi(x, y)$ im Innern von $\mathfrak{C}$.

F. RIESZ hat die superharmonischen Funktionen näher untersucht, führt diese allerdings anders ein, indem er die im folgenden Satze

[1] Vgl. BEHNKE [2]. Siehe auch S. 55.

[2] Dieser Satz gilt nicht mehr für die Reihen $\sum f_m z^m$ allgemein. Vgl. das Gegenbeispiel in HARTOGS [1].

[3] Vgl. FREDERIC RIESZ: Acta math. Bd. 48 (1926); Bd. 54 (1930); s. auch HARTOGS [1] und BEHNKE [5].

auftretende charakteristische Eigenschaft der superharmonischen Funktionen zu ihrer Definition benutzt.

Satz. *Die in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *stetige Funktion* $q(x, y)$ *ist dann und nur dann dort superharmonisch, wenn für jeden ganz in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *liegenden Kreis* $\mathfrak{k}$ *mit dem Mittelpunkt* $(x_0, y_0)$ *und dem Radius* $r$ *gilt:*

$$(1) \qquad q(x_0, y_0) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(x_0 + r \cdot \cos\vartheta, y_0 + r \cdot \sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

Die zweite Hälfte dieser Aussage ist selbstverständlich. Zum Beweise der ersten zeigt man:

a) Mit $q(x, y)$ genügt auch $d(x, y) \equiv q(x, y) - \varphi(x, y)$ der Ungleichung (1), wo $\varphi(x, y)$ irgendeine in $\mathfrak{b}^{(z)}$ harmonische Funktion bedeutet.

b) Eine in $\mathfrak{b}^{(z)}$ stetige, dort der Ungleichung (1) genügende Funktion $d(x, y)$, die im Innern von $\mathfrak{b}^{(z)}$ ein Minimum annimmt, ist in $\mathfrak{b}^{(z)}$ konstant. Aus a) und b) folgt dann auch die erste Hälfte des Satzes.

Aus dem zweiten Teile des vorstehenden Beweises und dem Satze selbst ergibt sich:

*Ist* $q(x, y)$ *stetig und superharmonisch in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *und genügen* $\varphi(x, y)$ *und* $\mathfrak{C}$ *der Bedingung* (B), *so ist entweder in jedem im Innern von* $\mathfrak{C}$ *liegenden Punkte stets* $q(x, y) > \varphi(x, y)$ *oder in ganz* $\mathfrak{b}^{(z)}$ $q(x, y) \equiv \varphi(x, y)$.

Ebenso ergibt sich:

*Gilt bei einer in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *stetigen und superharmonischen Funktion* $q(x, y)$ *für einen Kreis* $\mathfrak{k}_0$ *in* (1) *das Gleichheitszeichen, so ist* $q(x, y)$ *im Innern von* $\mathfrak{k}_0$ *harmonisch.*

Unter denselben Voraussetzungen ist das in (1) auftretende Integral $I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(x_0 + r \cdot \cos\vartheta, y_0 + r \cdot \sin\vartheta)\, d\vartheta$ als Funktion von $r$ monoton fallend und konvex; $r$ ist dabei so klein zu wählen, daß der Integrationsweg und sein Inneres noch ganz in $\mathfrak{b}^{(z)}$ liegen.

Setzt man die Funktion $q(x, y)$ nicht nur stetig, sondern auch zweimal stetig differentiierbar voraus, so läßt sich zeigen:

Satz. *Eine in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *zweimal stetig differentiierbare Funktion* $q(x, y)$ *ist stets dann in* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *superharmonisch, falls* $\Delta q(x, y) \equiv \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} < 0$, *und nur dann superharmonisch, falls* $\Delta q(x, y) \leqq 0$.

Ein wichtiges Beispiel einer superharmonischen Funktion ist die Grenzfunktion $q(x, y) = \underline{\lim}\, \varphi_m(x, y)$ einer Folge $\varphi_m(x, y)$, $m = 1, 2, \ldots$ in $\mathfrak{b}^{(z)}$ harmonischer Funktionen. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich auch umgekehrt eine superharmonische Funktion als Limes inferior harmonischer Funktionen darstellen[1].

[1] Vgl. HARTOGS [1].

# Viertes Kapitel.

# Singuläre Mannigfaltigkeiten.

## § 1. Der Kontinuitätssatz und seine unmittelbaren Folgerungen.

Die heutigen Kenntnisse über die singulären Mannigfaltigkeiten einer Funktion $f$ gründen sich fast ausschließlich auf den zuerst von HARTOGS[1] für reguläre Funktionen und dann von E. E. LEVI[1] für meromorphe Funktionen bewiesenen „Kontinuitätssatz". Wir geben den Satz in einer im wesentlichen von H. KNESER[1] herrührenden Fassung an (bei seiner Formulierung müssen wir eine Veränderliche, die wir mit $w$ bezeichnen, vor den übrigen $z_2, \ldots, z_n$ auszeichnen):

Satz 17 (Kontinuitätssatz)[1]. *Die Funktion $f(w, z_2, \ldots, z_n)$ sei regulär (bzw. meromorph) in sämtlichen Punkten des auf der zweidimensionalen Ebene $\mathfrak{E}_0$: $z_i = a_i$, $i = 2, \ldots, n$, liegenden Kreises*

$$|w - a_1| = r, \qquad z_i = a_i, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

*Gibt es dann eine Folge von (zweidimensionalen) gegen $\mathfrak{E}_0$ sich häufenden Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$:*

$$(\mathfrak{E}_\nu) \qquad z_i = \varepsilon_i^{(\nu)}, \qquad i = 2, \ldots, n \qquad \left(\lim_{\substack{\nu=\infty \\ i=2,\ldots,n}} \varepsilon_i^{(\nu)} = a_i\right),$$

*auf denen sich $f$ innerhalb des Kreises $|w - a_1| \leqq r$ regulär (bzw. meromorph) verhält, so ist $f$ auch regulär (bzw. meromorph) in sämtlichen im Innern von $|w - a_1| \leqq r$ liegenden Punkten der Ebene $\mathfrak{E}_0$.*

Betrachtet man nur *eindeutige* Funktionen, so kann man den Kontinuitätssatz auch so aussprechen:

*$f(w, z_2, \ldots, z_n)$ sei regulär (meromorph) in sämtlichen Punkten*

$$|w - a_1| = r, \qquad z_i = a_i, \qquad i = 2, \ldots, n,$$

*dagegen singulär[2] in $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dann gibt es stets ein $d > 0$, so daß auf jeder zweidimensionalen Ebene*

$$z_i = \varepsilon_i, \qquad i = 2, \ldots, n \quad \text{mit} \quad |a_i - \varepsilon_i| < d$$

*innerhalb $|w - a_1| < r$ mindestens je eine weitere singuläre Stelle der Funktion $f$ liegt.*

Der Beweis des Kontinuitätssatzes wird mit Hilfe des CAUCHYschen Integralsatzes (siehe HARTOGS, KNESER) oder der Laurententwicklung nach $w - a_1$ (siehe E. E. LEVI) geführt.

[1] Vgl. HARTOGS [3], [5]; E. E. LEVI [1]; KNESER [3], [4] (dort für $n$ Veränderliche); ferner OSGOOD: Lb., Kap. III.

[2] Vgl. S. 17, Anm. 1.

Der Kontinuitätssatz ist verschiedentlich verallgemeinert worden. So kann an die Stelle des Kreises $|w - a_1| = r$ ein beliebiger beschränkter Bereich der $w$-Ebene treten (vgl. KNESER).

Folgerung 1. Ist eine Funktion $f$ in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ über dem $R_{2n}$ bis auf eine höchstens $(2n - 3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit regulär (bzw. meromorph), so verhält sich $f$ im ganzen Innern von $\mathfrak{B}$ regulär (bzw. meromorph).

Folgerung 2. Im Innern des Polyzylinders $\mathfrak{Z}$: $|w| < d_1$, $|z_i| < d_i$, $i = 2, \ldots, n$, liege auf jeder zweidimensionalen Ebene $z_i = z_i'$, $i = 2, \ldots, n$ ($z_i'$ laufend in $|z_i| < d_i$), *höchstens* eine singuläre Stelle der regulären (bzw. meromorphen) Funktion $f(w, z_2, \ldots, z_n)$. In mindestens einem Punkte $P$ aus $\mathfrak{Z}$ sei $f$ singulär. Dann gibt es genau eine durch $P$ gehende $(2n - 2)$-dimensionale Fläche $\mathfrak{F}$, so daß sämtliche in $\mathfrak{Z}$ liegenden Singularitäten von $f$ auf $\mathfrak{F}$ liegen und umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ singuläre Stelle von $f$ ist. $\mathfrak{F}$ genügt einer Gleichung $w = g(z_2, \ldots, z_n)$, $g$ stetig für $|z_i| < d_i$.

Aus Voraussetzung und Kontinuitätssatz folgt nämlich zunächst, daß jedem $(z_2', \ldots, z_n')$ aus $|z_i| < d_i$ *eindeutig* ein $w' = g(z_2', \ldots, z_n')$ zugeordnet ist, so daß $f$ im Punkte $(w', z_2', \ldots, z_n')$ singulär wird. Die Stetigkeit von $g$ ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Kontinuitätssatzes. $w = g(z_2, \ldots, z_n)$ mit stetigem $g$ stellt aber stets ein $(2n - 2)$-dimensionales Flächenstück dar. Später zeigt sich sogar, daß dieses Flächenstück analytisch ist.

Folgerung 3. Der Punkt $P$ sei ein Randpunkt einer $2n$-dimensionalen Hyperkugel $\mathfrak{K}$. Ist dann die Funktion $f$ in allen Punkten einer Umgebung von $P$ analytisch (bzw. meromorph), soweit diese außerhalb der abgeschlossenen Hyperkugel liegt, so ist $f$ notwendig auch in $P$ selbst analytisch (bzw. meromorph), läßt sich also über $P$ hinaus mindestens ein Stück ins Innere der Kugel fortsetzen[1].

Zum Beweise wende man den Kontinuitätssatz auf eine die Kugel in $P$ berührende zweidimensionale analytische Ebene an.

Die wichtigste Folgerung ist:

Satz 18. *Ist die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in sämtlichen Randpunkten eines schlichten endlichen Bereiches $\mathfrak{B}$ mit zusammenhängendem Rande regulär (bzw. meromorph), so läßt sich $f$ in jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch (bzw. meromorph) fortsetzen*[2].

Ist also eine Funktion im Innern eines endlichen Bereiches des $R_{2n}$ irgendwo singulär, so notwendig auch in mindestens einem Randpunkte. Der Satz gilt sicher nicht mehr allgemein für nichtendliche Bereiche, so nicht für das Äußere irgendeines beschränkten Bereiches.

---

[1] Vgl. E. E. LEVI; OSGOOD: Lb.

[2] Vgl. HARTOGS [3]; POINCARÉ [3] (für reguläre Funktionen); E. E. LEVI; ferner OSGOOD: Lb. Einen neuen Beweis siehe B. SEGRE [1]. Über eine interessante Verallgemeinerung dieses Satzes auf eine Funktion einer komplexen und einer reellen Veränderlichen siehe SEVERI [8] und SEVERI [7], S. 24f.; ferner FUBINI [2].

Als weitere Folgerung des Kontinuitätssatzes ist noch die Grundeigenschaft der Meromorphieradien zu nennen:

Folgerung 5. Ist der Meromorphieradius $Q(w\,|\,z_0)$ einer meromorphen Funktion $f(w, z)$ in allen Punkten eines Bereiches $\mathfrak{b}^{(w)}$ der $w$-Ebene von Null verschieden, so ist $\log Q(w\,|\,z_0)$ im Innern von $\mathfrak{b}^{(w)}$ *superharmonisch*[1].

Ebenso folgt natürlich auch die bereits früher bewiesene Grundeigenschaft der Regularitätsradien einer regulären Funktion.

Folgerung 6. *Jede in einem eigentlichen Kreiskörper bzw.* REINHARDT*schen bzw.* HARTOGS*schen Körper meromorphe Funktion $F(w, z)$ läßt sich überall ins Innere des kleinsten umfassenden vollkommenen Kreiskörpers bzw.* REINHARDT*schen bzw.* HARTOGS*schen Körpers hinein fortsetzen*[2].

Für reguläre Funktionen war diese Aussage schon früher bewiesen (vgl. Satz 8 und 12 und S. 44—45).

## § 2. (2$n$ – 2)-dimensionale singuläre Mannigfaltigkeiten.

Nur ganz spezielle Flächen können als singuläre Mannigfaltigkeiten in einem im übrigen nur von regulären (meromorphen) Punkten einer Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ausgefüllten Bereiche auftreten.

Satz 19. *Die Punktmenge $\mathfrak{F}$ liege im Bereiche $\mathfrak{B}$ und werde von jeder zweidimensionalen Ebene $z_i = z_i'$, $i = 2, \ldots, n$, höchstens einmal geschnitten. Ist dann die Funktion $f(w, z_2, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, der nicht zu $\mathfrak{F}$ gehört, regulär (bzw. meromorph), in wenigstens einem Punkte von $\mathfrak{F}$ aber singulär, so ist $\mathfrak{F}$ ein analytisches Flächenstück und $f(w, z_2, \ldots, z_n)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ singulär*[3].

Aus der Folgerung 2 des Kontinuitätssatzes und den Voraussetzungen ergibt sich unmittelbar, daß $\mathfrak{F}$ eine $(2n-2)$-dimensionale Fläche ist. Der analytische Charakter wird mit Hilfe der Grundeigenschaft der Regularitätsradien bzw. Meromorphieradien nachgewiesen. HARTOGS bewies den obigen Satz nur für reguläre Funktionen. Sein Beweis läßt sich aber wörtlich auf meromorphe Funktionen übertragen. Man hat nur den Regularitätsradius durch den Meromorphieradius zu ersetzen. Den letzten Teil des HARTOGSschen Beweises kann man vereinfachen, indem man das KNESERsche Beweisverfahren des Kantensatzes benutzt[4].

Satz 19 läßt sich nach zwei Seiten hin verallgemeinern:

1. Bildet die Punktmenge $\mathfrak{F}$ eine einmal stetig differentiierbare $(2n-2)$-dimensionale Fläche, so können wir in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle $P$ die Voraussetzung fallen lassen, daß $\mathfrak{F}$ von jeder Ebene $z_i = z_i'$ $(i = 2, \ldots, n)$ höchstens einmal geschnitten wird. In diesem Falle läßt sich nämlich nach Satz 2 zu $P$ eine ganze lineare Transformation mit dem Fixpunkte $P$ angeben, so daß die transformierte Fläche in der Umgebung von $P$ einer Gleichung $w = g(z_2, \ldots, z_n)$ und damit den Voraussetzungen von Satz 19 genügt.

[1] Vgl. E. E. LEVI; vgl. ferner S. 46.

[2] Vgl. H. CARTAN [5]; Folgerung 6 gilt wörtlich für REINHARDTsche Körper und Kreiskörper über dem $R_{2n}$.

[3] Vgl. HARTOGS [5]; s. auch LEJA [2]. [4] Vgl. KNESER [1], [5].

2. Eine andere Verallgemeinerung rührt von HARTOGS selbst her[1]: Die im Polyzylinder $\mathfrak{Z}$:

$$|w| < d_1, \quad |z_i| < d_i \qquad i = 2, \ldots, n$$

reguläre Funktion $f(w, z_2, \ldots, z_n)$ möge im Innern von $\mathfrak{Z}$ auf jeder zweidimensionalen Ebene $z_i = z_i'$, $i = 2, \ldots, n$, mit $0 < |z_i'| < d_i$ *höchstens* $r$ singuläre Stellen $\eta_1(z_2', \ldots, z_n'), \ldots, \eta_r(z_2', \ldots, z_n')$ besitzen. Dabei möge, wenn man $n-2$ der Veränderlichen $z_2, \ldots, z_n$ festhält (es sei $z_i = c_i, i \neq i_0$), die Menge der Systeme $(c_2, \ldots, z_{i_0}, \ldots, c_n)$ mit $|z_{i_0}| < d_{i_0}$, für welche die Anzahl der zugehörigen singulären Stellen kleiner als $r$ ist, stets *endlich* sein. Dann sind die $r$ elementarsymmetrischen Funktionen $T_l(z_2, \ldots, z_n)$ der $\eta_1, \ldots, \eta_r$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ im Innern von $|z_i| < d_i$ analytische Funktionen der $z_i$. Die singulären Stellen von $f(w, z_2, \ldots, z_n)$ sind genau diejenigen Punkte, die der „pseudoalgebraischen Gleichung“ $w^r - T_1(z_2, \ldots, z_n) w^{r-1} + \cdots (-1)^r T_r(z_2, \ldots, z_n) = 0$ genügen; sie erfüllen damit in der Umgebung von $(0, 0, \ldots, 0)$ notwendig ein oder mehrere (ergänzte) analytische Flächenstücke[2].

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die vorstehenden Sätze auch für *mehrdeutige* analytische Funktionen gelten. Daraus folgt insbesondere, daß die Verzweigungsmannigfaltigkeiten dieser Funktionen unter den übrigen Voraussetzungen der obigen Sätze analytische Flächenstücke ausfüllen (Näheres siehe HARTOGS [**5**]).

Eine Verallgemeinerung anderer Art ist der „Kantensatz“. Wesentlich bei Satz 19 ist die Voraussetzung der Regularität (bzw. Meromorphie) der gegebenen Funktion in der vollen $2n$-dimensionalen Umgebung der gegebenen singulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$. Der Kantensatz verlangt im Gegensatz hierzu nur die Regularität (Meromorphie) im Innern einer gewissen Teilumgebung des Flächenstückes $\mathfrak{F}$, falls dieses als Schnittfläche zweier zweimal stetig differentiierbaren Hyperflächen dargestellt werden kann. Der Kantensatz gibt insbesondere eine notwendige Bedingung für Regularitätsbereiche (Meromorphiebereiche), die eine den Voraussetzungen des Satzes genügende „Kante“ besitzen.

Satz 20 (Kantensatz)[3]. *Die zweimal stetig differentiierbaren Hyperflächenstücke $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ mit den Gleichungen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ und $\varphi_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ mögen das gemeinsame Schnittflächenstück $\mathfrak{F}$ haben. In jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ mögen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ verschiedene Haupttangenten aufweisen*[4]. *Gibt es dann eine Funktion*

---

[1] Vgl. HARTOGS [**5**]; s. auch LEJA [**2**]. [2] Vgl. Kap. V.

[3] Zum Beweis siehe KNESER [**5**], ältere Beweise (für $n = 2$) siehe BEHNKE [**1**]; KNESER [**1**]; BEHNKE [**5**].

[4] Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_n} \end{pmatrix}$ ist also vom Range 2, $\mathfrak{F}$ ist eine $2n-2$-dimensionale differentiierbare Mannigfaltigkeit mit nur gewöhnlichen Punkten.

*$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die in denjenigen Punkten einer Umgebung von $\mathfrak{F}$ regulär (bzw. meromorph) ist, für die* $\operatorname{Max}(\varphi_1, \varphi_2) > 0$, *die sich aber auf $\mathfrak{F}$ singulär verhält, so ist $\mathfrak{F}$ ein analytisches Flächenstück.*

Man beachte, daß die beiden Hyperflächenstücke $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Umgebung von $\mathfrak{F}$ in vier Teile zerlegen. Die Regularität (Meromorphie) der Funktion $f$ wird in drei Teilen dieser Umgebung verlangt. Falls diese nicht schon der Beziehung $\operatorname{Max}(\varphi_1, \varphi_2) > 0$ genügen, so ersetze man etwa $\varphi_1 = 0$ durch $-\varphi_1 = 0$ oder $\varphi_2 = 0$ durch $-\varphi_2 = 0$.

Zum Kantensatz seien folgende einfache Beispiele genannt:

1. Die beiden Hyperflächen

$$\varphi_1 = |w|^2 - 1 = u^2 + v^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi_2 = |z|^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

haben die zweidimensionale Fläche $\mathfrak{F}$: $u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = 1$ gemeinsam; $\mathfrak{F}$ ist die Bestimmungsfläche des Einheits-Dizylinders. Da diese kein analytisches Flächenstück ist, muß nach dem Kantensatz jede Funktion, die in sämtlichen Punkten einer Umgebung von $\mathfrak{F}$ regulär oder meromorph ist, soweit diese außerhalb $|w| < 1$, $|z| < 1$ liegen, notwendig über $\mathfrak{F}$ hinaus ein Stück weit ins Innere des Dizylinders fortsetzbar sein. Der Bereich $\operatorname{Max}(\varphi_1, \varphi_2) > 0$ ist hier die Gesamtheit aller Punkte $(w, z)$, für die entweder mindestens $|w| > 1$ oder $|z| > 1$.

2. Ganz ähnlich folgt, daß der Vereinigungsbereich $\mathfrak{B}$ der beiden Punktmengen

$$|w| < 2, \quad |z| < 1 \quad \text{und} \quad |w| < 1, \quad |z| < 2$$

kein Regularitätsbereich sein kann. Träfe dies nämlich doch zu, so wäre die nichtanalytische Fläche $|w| = |z| = 1$ eine Kante des Regularitätsbereiches im Widerspruch zum Kantensatz. Man beachte, daß $\mathfrak{B}$ hierbei ein *vollkommener* REINHARDTscher Körper ist und ferner, daß auf dem ganzen Rande (mit Ausnahme der auftretenden Kanten) überall $L(\varphi) = 0$ (vgl. auch S. 55).

## § 3. Natürliche Grenzen[1].

Das Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$: $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ heißt *natürliche Grenze* einer regulären (bzw. meromorphen) Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *von der Seite* $\varphi < 0$, falls $f$ in allen denjenigen Punkten einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$, für die $\varphi < 0$, regulär (bzw. meromorph) ist, aber in allen Punkten von $\mathfrak{S}$ singulär wird.

Über die natürlichen Grenzen gelten die beiden Sätze von E. E. LEVI[2]:

Satz 21. *Ist die einmal stetig differentiierbare Hyperfläche $\mathfrak{S}$: $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ natürliche Grenze einer regulären (bzw. meromorphen) Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ von der Seite $\varphi < 0$, so hat jede durch einen beliebigen gewöhnlichen Punkt $P$ von $\mathfrak{S}$ gehende analytische Fläche (die $P$ als gewöhnliche Stelle hat) in jeder noch so kleinen Umgebung von $P$ Punkte auf der Seite $\varphi > 0$. $\mathfrak{S}$ ist also pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$.*

Der Beweis des Satzes läßt sich auf den Kontinuitätssatz zurückführen. In Verbindung mit Satz 4 ergibt sich unmittelbar für den $R_4$:

[1] Zu diesem Paragraphen vgl. auch Kap. II, § 3.

[2] Vgl. E. E. LEVI [1], [2].

Folgerung 1. *Ist die Hyperfläche $\varphi(u, v, x, y) = 0$ zweimal stetig differentiierbar und natürliche Grenze einer regulären oder meromorphen Funktion von der Seite $\varphi < 0$, so ist $L(\varphi) \geqq 0$.*

Für den allgemeinen Fall $n \geqq 2$ bewies KRZOSKA:

Ist die hinreichend oft differentiierbare Hyperfläche $\varphi = 0$ in einer Umgebung einer gewöhnlichen Stelle $P(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ natürliche Grenze von der Seite $\varphi < 0$, so ist die HERMITEsche Form $\sum \varphi_{\mu, \bar{\nu}}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) z_\mu \bar{z}_\nu$ mit der Nebenbedingung $\sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}) z_\mu = 0$ positiv halbdefinit. (Hierbei ist $\varphi_{\mu, \bar{\nu}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}$.)

Folgerung 2. *Ist die zweimal stetig differentiierbare Hyperfläche $\mathfrak{S}$: $\varphi(u, v, x, y) = 0$ von beiden Seiten natürliche Grenze, so ist in jedem Punkte von $\mathfrak{S}$ $L(\varphi) = 0$, d. h. aber $\mathfrak{S}$ ist eine analytische Hyperfläche* (vgl. Satz 5). Entsprechendes gilt für den Fall $n > 2$.[1]

Im wesentlichen gelten auch die Umkehrungen dieser Sätze:

Satz 22. *In jedem Punkte $P$ des zweimal stetig differentiierbaren Hyperflächenstückes $\mathfrak{S}$: $\varphi(u, v, x, y) = 0$ sei $L(\varphi) > 0$. Dann gibt es zu jedem gewöhnlichen Punkte $P$ von $\mathfrak{S}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, so daß $\mathfrak{S}$, soweit es in $\mathfrak{U}(P)$ liegt, natürliche Grenze einer regulären Funktion von der Seite $\varphi < 0$ ist.*

Für den allgemeinen Fall des $R_{2n}$ gilt wieder:

Ist die HERMITEsche Form $\sum_{\mu, \nu=1}^{n} \varphi_{\mu, \bar{\nu}} z_\mu \bar{z}_\nu$ in $P_0$ positiv definit unter der Nebenbedingung $\sum_{1}^{n} \varphi_\mu z_\mu = 0$, so kann man eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ und dazu eine Funktion $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ angeben, die auf der Seite $\varphi < 0$ regulär ist und das Hyperflächenstück $\varphi = 0$, soweit es in $\mathfrak{U}(P_0)$ liegt, zur natürlichen Grenze hat[1].

Ist nun die LEVIsche Bedingung $L(\varphi) > 0$ auch *im Großen* hinreichend? D. h. gibt es unter den Voraussetzungen von Satz 22 eine Funktion $f(w, z)$, die das gesamte Hyperflächenstück $\mathfrak{S}$ zur natürlichen Grenze hat; ist also insbesondere ein Bereich, der von einer geschlossenen, zweimal stetig differentiierbaren Hyperfläche $\mathfrak{S}$: $\varphi(u, v, x, y) = 0$ begrenzt wird, stets dann ein Regularitätsbereich, falls überall auf $\mathfrak{S}$ $L(\varphi) > 0$?

Die Wichtigkeit dieser Frage wurde zuerst von BLUMENTHAL[2] gesehen und bildet seitdem eines der ungelösten Hauptprobleme der Theorie der Singularitäten. Bisher können wir sie nur für wenige Einzelfälle lösen, so für REINHARDTsche Körper, Kreiskörper und HARTOGSsche Körper.

1. REINHARDTsche Körper. $\varphi = |z| - \psi(|w|) < 0$ sei die Ungleichung eines vollkommenen REINHARDTschen Körpers des $R_4$; der Rand $\varphi = \sqrt{z\bar{z}} - \psi(\sqrt{w\bar{w}}) = 0$ bilde eine zweimal stetig differentiierbare Hyperfläche und sei in jedem Punkte pseudokonvex von der Seite $\varphi > 0$.

[1] Vgl. KRZOSKA. [2] Vgl. BLUMENTHAL; s. auch BEHNKE [1], [2].

Es ist also[1] (es sei $|w| = r$, $|z| = r'$):

$$L(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_{\bar w} & \varphi_{w\bar w} & 0 \\ \varphi_{\bar z} & 0 & \varphi_{z\bar z} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{r'}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right\} \geqq 0$$

oder

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} \leqq \frac{1}{r'}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr};$$

das wiederum heißt, daß $r' = \psi(r)$ die Grundeigenschaft für ein System assoziierter Konvergenzradien aufweist[2].

Nun zeigte FABER, daß es zu jeder solchen Funktion $r' = \psi(r)$ eine Potenzreihe nach $w$ und $z$ gibt, deren System der assoziierten Konvergenzradien durch $r' = \psi(r)$ bestimmt ist und die über ihren Konvergenzbereich hinaus nicht fortsetzbar ist[3]. Damit ist bewiesen:

*Der zweimal stetig differentiierbare Rand $\varphi = |z| - \psi(|w|) = 0$ eines* REINHARDT*schen Körpers $\mathfrak{K}$: $\varphi < 0$ ist dann und nur dann natürliche Grenze einer im Innern regulären Funktion (und damit $\mathfrak{K}$ der Konvergenzkörper einer Potenzreihe), falls der Rand überall von außen pseudokonvex ist.*

2. Kreiskörper. Ähnlich ist leicht nachzuweisen, daß für den Rand eines vollkommenen Kreiskörpers $|z| = R(s) = R(\sigma, \tau)$, $\left(s = \frac{w}{z} = \sigma + i\tau\right)$ mit zweimal stetig differentiierbarem $R(s)$ dann und nur dann $L(|z| - R(s)) \geqq 0$, wenn $\Delta(\log R(s)) \equiv \frac{\partial^2 \log R(s)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \log R(s)}{\partial \tau^2} \leqq 0$.

In Verbindung mit Satz 16a folgt:

*Zu einem vollkommenen Kreiskörper $\mathfrak{K}$: $|z| < R(s)$, bei dem $R(s)$ zweimal stetig differentiierbar ist und $\lim\limits_{s=\infty} |s| R(s)$ existiert, gibt es dann und nur dann eine im Innern reguläre Funktion, die den Kreiskörperrand als natürliche Grenze (und damit $\mathfrak{K}$ als invarianten Konvergenzkörper) hat, falls der Rand in jedem Punkte pseudokonvex von außen ist*[4].

3. HARTOGSsche Körper. Ganz entsprechend ergibt sich aus Satz 16:

*Ist der Rand $|z| = R(w)$ eines vollkommenen* HARTOGS*schen Körpers $\mathfrak{B}$ zweimal stetig differentiierbar (für alle $w$ im Innern der Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$) und verschwindet $R(w)$ für kein $w$ der abgeschlossenen Projektion, so ist $|z| = R(w)$ dann und nur dann natürliche Grenze einer in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion, falls $L(|z| - R(w)) \geqq 0$, der Rand also überall pseudokonvex von außen ist.*

Man kann nämlich auch hier zeigen, daß $\varphi$ nicht nur der Konvergenzbereich einer Reihe, sondern auch ein Regularitätsbereich ist (vgl. hierzu Satz 42).

---

[1] Man beachte, daß wir hier auch $L(\varphi) = 0$ zulassen, während in Satz 22 überall $L(\varphi) > 0$ vorausgesetzt wird.

[2] Vgl. die Formeln (2) und (2a) in Kap. III, § 1.

[3] Neben FABER vgl. auch Satz 42. [4] Vgl. BEHNKE [2].

Ist übrigens der gegebene HARTOGSsche Körper $\mathfrak{B}$ schlicht und einfachzusammenhängend — und damit auch die Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ —, so können wir die Einschränkung, daß $R(w)$ auf dem Rande von $\mathfrak{b}^{(w)}$ nicht verschwindet, fallen lassen.

Es sei nämlich $\mathfrak{b}_i^{(w)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von Bereichen der $w$-Ebene mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{b}_i^{(w)} \ll \mathfrak{b}_{i+1}^{(w)} \ll \mathfrak{b}^{(w)}$ und $\lim \mathfrak{b}_i^{(w)} \equiv \mathfrak{b}^{(w)}$. Es ist $m_i = \operatorname{Min} R(w)$, gebildet für alle $w$ aus $\mathfrak{b}_i^{(w)}$, sicher von Null verschieden ($\mathfrak{B}$ sei vollkommen). Zu jedem $\mathfrak{b}_i^{(w)}$ konstruieren wir dann denjenigen HARTOGSschen Körper $\mathfrak{B}_i$, der $\mathfrak{b}_i^{(w)}$ zur Projektion hat und für den $R_i(w) = R(w) - \frac{m_i}{i}$ ist. Es gilt offenbar $\mathfrak{B}_i \ll \mathfrak{B}_{i+1}$ und $\lim \mathfrak{B}_i \equiv \mathfrak{B}$.

Ist $L(|z| - R(w)) = L(|z| - R_i(w)) \geqq 0$, so müssen nach dem eben Gezeigten sämtliche $\mathfrak{B}_i$ Regularitätsbereiche sein. Wir werden nun später beweisen, daß der Grenzbereich einer solchen Folge von Regularitätsbereichen $\mathfrak{B}_i$ stets wieder ein Regularitätsbereich ist, falls $\mathfrak{B}$ ein einfachzusammenhängender schlichter HARTOGSscher Körper mit stetigem $R(w)$ ist [1].

Es ergibt sich also:

*Der zweimal stetig differentiierbare Rand $|z| = R(w)$ eines schlichten, einfachzusammenhängenden (vollkommenen)* HARTOGS*schen Körpers $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann natürliche Grenze einer im Innern regulären Funktion, falls $L(|z| - R(w)) \geqq 0$ für alle inneren Punkte der Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$.*

Im ersten Kapitel hatten wir auf die Frage hingewiesen, ob ein Meromorphiebereich stets auch ein Regularitätsbereich ist. Für REINHARDT*sche* sowie HARTOGS*sche* [2] *Körper und Kreiskörper* mit zweimal stetig differentiierbarem Rande können wir auf Grund des Vorangehenden diese Frage leicht beantworten.

*Ist nämlich ein solcher Körper ein Meromorphiebereich, so ist er notwendig pseudokonvex von außen, also nach dem oben Gezeigten zugleich ein Regularitätsbereich.*

## Fünftes Kapitel.

# Die Verteilung der Nullstellen und außerwesentlichen Singularitäten.

### § 1. Der Vorbereitungssatz [3].

Wir können ohne Einschränkung die vorgegebene Nullstelle im Endlichen voraussetzen. Soweit wir ferner Eigenschaften nur im Kleinen betrachten, beschränken wir uns auf Punktmengen und Funktionen des schlichten $R_{2n}$.

[1] Vgl. BEHNKE-THULLEN [4] und oben Kap. VI, § 5.

[2] Soweit sie den obengenannten Voraussetzungen genügen.

[3] Über die zahlreiche Literatur zum Vorbereitungssatze siehe OSGOOD: Lb. S. 86; darüber hinaus vgl. RÜCKERT, SPÄTH, WIRTINGER [3].

Ist der Punkt $P$ eine Nullstelle der in $P$ regulären Funktion $f$, so folgt bereits aus dem Kontinuitätssatze (angewandt auf $1/f$), daß in beliebiger Nähe von $P$ weitere Nullstellen von $f$ liegen müssen. Der Vorbereitungssatz von WEIERSTRASS gibt nun genauere Auskunft darüber, welche Mannigfaltigkeiten diese Nullstellen in der Umgebung der gegebenen Stelle $P$ ausfüllen.

Satz 23. a) Der Vorbereitungssatz für Funktionen zweier Veränderlichen. *Ist die Funktion $f(w, z)$ im Punkte $P_0(w_0, z_0)$ regulär und $f(P_0) = 0$, aber $f \not\equiv 0$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$:*

$$|w - w_0| < d_1, \qquad |z - z_0| < d_2$$

*und eine in $\mathfrak{U}(P_0)$ reguläre, dort nirgends verschwindende Funktion $\Omega(w, z)$, ferner eine ganze Zahl $\mu \geqq 0$, so daß für alle $(w, z)$ aus $\mathfrak{U}(P_0)$*

$$f(w, z) \equiv (z - z_0)^\mu \psi(w, z) \cdot \Omega(w, z).$$

*Hierbei ist $\psi \equiv 1$ oder von der Form*

$$\psi(w, z) \equiv (w - w_0)^m + A_1(z)(w - w_0)^{m-1} + \cdots + A_m(z), \tag{1}$$

*wobei die $A_i(z)$ sich in der Umgebung von $z_0$ regulär verhalten und in $z_0$ verschwinden.*

Ist $f(w, z_0) \not\equiv 0$, so fällt natürlich der Faktor $(z - z_0)^\mu$ fort.

Eine Funktion $\psi(w, z)$ der eben genannten Art [siehe (1)] wird ein **ausgezeichnetes Pseudopolynom mit der Spitze $z_0$** genannt.

b) Der Fall von $n$ Veränderlichen. Wir bezeichnen wieder zweckmäßig die erste Veränderliche mit $w$, die übrigen mit $z_2, \ldots, z_n$. Die Funktion $f(w, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ sei im Punkte $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ regulär und $f(P_0) = 0$. Wir müssen hier die zusätzliche Annahme machen, daß $f(w, a_2, \ldots, a_n) \not\equiv 0$, was sich jedoch stets durch eine ganze lineare Transformation erreichen läßt[1]. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann wie eben:

*Es existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$*

$$|w - a_1| < d_1, \qquad |z_i - a_i| < d_i, \qquad i = 2, \ldots, n$$

*und eine in $\mathfrak{U}(P_0)$ reguläre, dort nicht verschwindende Funktion $\Omega(w, z_2, \ldots, z_n)$, so daß für alle $(w, z_2, \ldots, z_n)$ aus $\mathfrak{U}(P_0)$*

$$f(w, z_2, \ldots, z_n) \equiv \psi(w, z_2, \ldots, z_n)\, \Omega(w, z_2, \ldots, z_n), \tag{2}$$

*wobei $\psi$ wieder ein ausgezeichnetes Pseudopolynom darstellt, also*

$$\psi(w, z_2, \ldots, z_n) \equiv (w - a_1)^m + A_1(z_2, \ldots, z_n)(w - a_1)^{m-1} + \cdots + A_m(z_2, \ldots, z_n)$$

*($A_i$ regulär in der Umgebung von $(a_2, \ldots, a_n)$ und $A_i(a_2, \ldots, a_n) = 0$).*

Die Bedeutung des Vorbereitungssatzes liegt insbesondere darin, daß die Funktion $f$ — soweit es auf ihre Nullstellen ankommt — im Punkte $P_0$ durch ein Pseudopolynom ersetzt werden kann, dessen Nullstellen leicht zu übersehen sind.

[1] Vgl. OSGOOD: Lb. S. 87—88.

Die Identitäten (1) und (2) besagen, daß die Gleichung $f = 0$ für jedes System $(z_2, \ldots, z_n)$ mit $|z_i - a_i| < d_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ im Kreise $|w - a_1| < d_1$ genau $m$ Wurzeln $w_i(z_2, \ldots, z_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ besitzt, die der pseudoalgebraischen Gleichung

$$\psi(w, z_2, \ldots, z_n) \equiv (w - a_1)^m + A_1(z_2, \ldots, z_n)(w - a_1)^{m-1} + \cdots + A_1(z_2, \ldots, z_n) = 0$$

genügen, und daß umgekehrt jede Wurzel von $\psi = 0$ — soweit sie innerhalb $\mathfrak{U}(P_0)$ liegt — auch eine Nullstelle von $f$ liefert.

Es kommt also jetzt auf die Untersuchung derjenigen Mannigfaltigkeiten an, die durch eine solche pseudoalgebraische Gleichung definiert werden.

## § 2. Null- und Polstellenflächen.

Zunächst einige Sätze über Pseudopolynome, die ähnlichen Gesetzen unterworfen sind wie gewöhnliche Polynome[1]!

Ein ausgezeichnetes *Pseudopolynom* $\psi(w, z_2, \ldots, z_n)$ nach Potenzen von $w - a_1$ und der Spitze $(a_2, \ldots, a_n)$ heiße (algebraisch) **irreduzibel**, falls es keine zwei ausgezeichnete Pseudopolynome $\psi_1$ und $\psi_2$ der gleichen Art gibt, so daß $\psi \equiv \psi_1 \cdot \psi_2$.

Analog wollen wir allgemein eine in $P$ *reguläre, dort verschwindende Funktion* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ **in $P$ irreduzibel** nennen, falls es keine zwei in $P$ reguläre, dort verschwindende Funktionen $g$ und $h$ gibt, so daß $f \equiv g \cdot h$. Existieren dagegen solche Funktionen $g$ und $h$, so sagen wir, **$f$ hat in $P$ die Teiler $g$ und $h$**. Ein ausgezeichnetes Pseudopolynom nach Potenzen von $w - a_1$ und der Spitze $(a_2, \ldots, a_n)$ ist dann und nur dann *in* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ irreduzibel, falls es algebraisch irreduzibel ist.

Es gilt dann unter anderem:

Hilfssatz 1. Ein ausgezeichnetes Pseudopolynom läßt sich auf *genau eine* Weise in ein *endliches* Produkt irreduzibler Pseudopolynome der gleichen Art zerlegen.

In Verbindung mit dem Vorbereitungssatze folgt:

*Jede beliebige in einem Punkte $P$ reguläre, dort verschwindende Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ läßt sich eindeutig* (von in der Umgebung von $P$ nicht verschwindenden Faktoren abgesehen) *in endlich viele in $P$ irreduzible Funktionen zerlegen.*

Hilfssatz 2. Verschwindet ein ausgezeichnetes Pseudopolynom $\psi_1$ nach Potenzen von $w - a_1$ und der Spitze $(a_2, \ldots, a_n)$ in sämtlichen Punkten einer Umgebung des Punktes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, in denen ein *irreduzibles* Pseudopolynom $\psi_2$ der gleichen Art verschwindet, so ist $\psi_1$ durch $\psi_2$ teilbar.

Aus Hilfssatz 1 und dem Vorbereitungssatze ergibt sich wiederum für beliebige Funktionen:

*Verschwindet die in $P$ reguläre Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in $P$ und in sämtlichen Punkten einer Umgebung von $P$, in denen die in $P$ reguläre*

[1] Ausführliches über Pseudopolynome siehe OSGOOD: Lb.

*Funktion $g$ verschwindet, so ist $f$ in $P$ durch jeden in $P$ irreduziblen Faktor der Funktion $g$ teilbar.* ($f$ braucht dagegen in $P$ nicht durch $g$ selbst teilbar zu sein; dies ist nur dann der Fall, wenn $f$ in den genannten Punkten stets von derselben oder höherer Ordnung wie $g$ verschwindet; vgl. S. 60.)

Hilfssatz 3. Ist $\psi$ ein irreduzibles ausgezeichnetes Pseudopolynom, so stellt $\psi = 0$ ein „Element eines analytischen Gebildes", nach unserer Definition ein ergänztes *analytisches Flächenstück* dar.

Entsprechend:

*Die Nullstellenmannigfaltigkeit einer in $P$ regulären, dort verschwindenden und irreduziblen Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ fällt in einer Umgebung von $P$ mit den Punkten eines (ergänzten) analytischen Flächenstückes zusammen.*

Aus all dem ergibt sich:

Satz 24. *Verschwindet die im Punkte $P$ reguläre Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ in $P$, so liegen in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ die Nullstellen der Funktion $f$ auf endlich vielen $2n - 2$-dimensionalen (ergänzten) analytischen Flächenstücken, und umgekehrt sind sämtliche Punkte dieser Flächenstücke, soweit sie in $\mathfrak{U}(P)$ liegen, Nullstellen von $f$.*

Folgerung. Verschwindet die Funktion $f$ in den Punkten eines (noch so kleinen) nichtanalytischen $(2n - 2)$-dimensionalen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ und ist $f$ in einer Umgebung von $\mathfrak{F}$ regulär, so ist notwendig $f \equiv 0$.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

*Stimmen zwei Funktionen $f$ und $g$ auf einem noch so kleinen Stück $\mathfrak{F}$ eines nicht-analytischen $(2n - 2)$-dimensionalen Flächenstückes überein und sind $f$ und $g$ in einer Umgebung von $\mathfrak{F}$ regulär, so ist notwendig $f \equiv g$.*

Die bisherigen Aussagen, die nur in einer genügend kleinen Umgebung der vorgegebenen Nullstelle galten, lassen sich noch wie folgt ergänzen:

Satz 25. *Das durch $P$ gehende $(2n - 2)$-dimensionale (ergänzte) analytische Flächenstück $\mathfrak{F}$ sei in einer Umgebung von $P$ Nullstellenmannigfaltigkeit der in $P$ regulären Funktion $f$. Ist dann $Q$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{F}$, der sich mit $P$ durch eine auf $\mathfrak{F}$ liegende Kurve $\mathfrak{C}$ verbinden läßt, die nur aus regulären Punkten der Fläche $\mathfrak{F}$ und der Funktion $f$ besteht, so ist $Q$ ebenfalls eine Nullstelle von $f$* ($P$ und $Q$ selbst dürfen unwesentliche Randpunkte von $\mathfrak{F}$ sein).

Der Beweis ergibt sich sehr einfach aus dem Vorbereitungssatze und der Eindeutigkeit der Fortsetzung eines analytischen Flächenstückes[1].

Analog der Kl.Th. können wir nunmehr auch die Ordnung eines Nullstellengebildes einführen:

In der Umgebung des Punktes $P$ verschwinde die in $P$ reguläre Funktion $f$ auf dem durch $P$ gehenden analytischen Flächenstück $\mathfrak{F}$,

[1] Beweis für $n = 2$ vgl. BEHNKE-THULLEN [**4**].

$P$ sei dabei eine gewöhnliche Stelle von $\mathfrak{F}$. In einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ läßt sich dann $\mathfrak{F}$ durch eine dort analytische, in $P$ irreduzible Gleichung $h = 0$ darstellen. $f/h$ ist in $P$ regulär. Ist dann $p$ diejenige ganze positive Zahl, für die $f/h^p$ in $P$ regulär, $f/h^{p+1}$ aber in $P$ (außerwesentlich) singulär ist, so heiße $p$ **die Ordnung der Nullstellenfläche $\mathfrak{F}$ in $P$.**[1]

Solange $\mathfrak{F}$ im Regularitätsbereiche $\mathfrak{R}$ der Funktion $f$ verläuft und dort nicht in zwei punktfremde Stücke zerfällt, hat $\mathfrak{F}$ in jedem seiner gewöhnlichen Punkte als Nullstellenfläche von $f$ die gleiche Ordnung $p$. Da nun alle in $\mathfrak{R}$ liegenden Flächenpunkte und auch die dort vorhandenen unwesentlichen Randpunkte Häufungspunkte gewöhnlicher Punkte sind (und jene $\mathfrak{F}$ nicht in zwei Stücke zerlegen[2]), können wir dann von *der Ordnung der (ergänzten) Nullstellenfläche* $\mathfrak{F}$ schlechthin sprechen.

Zerfällt dagegen $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{R}$ in zwei punktfremde Stücke $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so kann es vorkommen, daß $f$ auf $\mathfrak{F}_1$ in der Ordnung $p_1$, auf $\mathfrak{F}_2$ in der Ordnung $p_2$ verschwindet[3].

Die Ordnung einer Nullstellenfläche ist invariant gegenüber Transformationen, die in der Umgebung von $\mathfrak{F}$ eineindeutig und analytisch sind. Ferner gilt das folgende wichtige Kriterium: *$\mathfrak{F}$ ist dann und nur dann eine Nullstellenfläche $p$-ter Ordnung der* (in einer Umgebung von $\mathfrak{F}$ regulären) *Funktion $f$, falls diese und ihre sämtlichen Ableitungen bis einschließlich zur $(p-1)$-ten Ordnung auf ganz $\mathfrak{F}$ verschwinden, aber mindestens eine Ableitung $p$-ter Ordnung $\mathfrak{F}$ nicht mehr als Nullstellenfläche besitzt*[4].

Sämtliche angegebenen Sätze gelten natürlich nicht nur für Nullstellen, sondern entsprechend auch für *beliebige a-Stellen* einer regulären Funktion.

Nun die Folgen für die außerwesentlich singulären Stellen!

Ist die in der Umgebung des Punktes $P$ meromorphe Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in $P$ außerwesentlich singulär, so gibt es nach Definition (vgl. Kap. I, § 4) zwei in $P$ reguläre Funktionen $g$ und $h$, so daß $F \equiv \frac{g}{h}$ und $h(P) = 0$.

Nach Hilfssatz 1 dürfen wir voraussetzen, daß $g$ und $h$ in $P$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. *Die Funktion $F$ ist also dann und nur dann in $P$ außerwesentlich singulär, falls zwei in $P$ reguläre, dort teilerfremde Funktionen $g$ und $h$ existieren, so daß $F \equiv \frac{g}{h}$ und $h(P) = 0$.*

Auf Grund dieses Satzes lassen sich zwei Arten von außerwesentlichen Singularitäten unterscheiden:

1. $g(P) \neq 0$.

$F$ strebt bei Annäherung an $P$ gleichmäßig gegen $\infty$. Wir nennen in diesem Falle $P$ eine **Polstelle** oder außerwesentlich singuläre Stelle erster Art der Funktion $F$ und ordnen $P$ den Funktionswert $\infty$ zu.

---

[1] Eine andere Einführung der Ordnung einer Null*stelle* siehe SEVERI [7] S. 39.
[2] Vgl. OSGOOD: Lb. S. 132. [3] Vgl. BEHNKE-THULLEN [4].
[4] Vgl. für den Fall ganzer Funktionen auch H. CARTAN [4].

2. Ist dagegen $g(P) = 0$, so ist für *jedes* endliche konstante $\alpha$ die Gleichung $g - \alpha h = 0$ in $P$ und damit nach dem Vorbereitungssatze mindestens auf einem durch $P$ gehenden (erg.) analytischen Flächenstück erfüllt (das mit keinem der durch $h = 0$ bestimmten Flächenstücke identisch ist). Das aber heißt, daß $F$ in jeder Umgebung des Punktes $P$ jeden endlichen Wert $\alpha$ annimmt. Wir nennen in diesem Falle $P$ eine *Unbestimmtheitsstelle* oder auch eine **außerwesentlich singuläre Stelle zweiter Art** der Funktion $F$.

Für $n = 2$ können außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art einer Funktion $F(w, z)$ nur isoliert liegen, da die durch $g = 0$ und $h = 0$ bestimmten Flächenstücke sich höchstens in diskreten Punkten schneiden; sie sind dagegen immer Häufungspunkte von Polstellen der Funktion $F$.

Ist $P$ ein unendlichferner Punkt, so werden wir eine in $P$ meromorphe Funktion $F$ in $P$ außerwesentlich singulär von erster bzw. zweiter Art nennen, falls $F$ nach einer geeigneten projektiven Transformation, die $P$ in einen endlichen Punkt $P'$ wirft, in $P'$ außerwesentlich singulär von erster bzw. zweiter Art ist.

Fassen wir zusammen!

Satz 26. *Ist in einem Punkte $P$ die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ außerwesentlich singulär, so liegen in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ sämtliche Singularitäten der Funktion $F$ auf endlich vielen (erg.) analytischen Flächenstücken, und umgekehrt sind sämtliche Punkte dieser Flächenstücke, soweit sie in $\mathfrak{U}(P)$ liegen, außerwesentliche Singularitäten der Funktion $F$.*

Entsprechend Satz 25 gilt ferner:

Satz 25a. *Das durch den Punkt $P$ gehende (erg.) analytische Flächenstück $\mathfrak{F}$ sei in der Umgebung von $P$ Singularitätenfläche der in $P$ meromorphen Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Ist dann $Q$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{F}$, der sich mit $P$ durch eine auf $\mathfrak{F}$ liegende Kurve verbinden läßt, die aus regulären Punkten der Fläche $\mathfrak{F}$ und aus meromorphen Punkten der Funktion $F$ besteht, so ist $Q$ ebenfalls eine singuläre Stelle von $F$* ($P$ und $Q$ selbst dürfen unwesentliche Randpunkte von $\mathfrak{F}$ sein).

## § 3. Meromorphe Funktionen im erweiterten Raume.

Ist eine Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten des erweiterten Raumes analytisch, so ist sie nach dem Satze von LIOUVILLE bei festgehaltenen $n - 1$ Veränderlichen stets eine Konstante; daraus folgt, daß $f$ schlechthin konstant ist. Dieser Satz läßt sich in ganz überraschender Weise verschärfen:

Satz 27. *Ist die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten einer geschlossenen $(2n - 2)$-dimensionalen analytischen Ebene regulär, so ist $f$ eine Konstante.*

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nämlich annehmen, daß $f$ auf der ganzen unendlichfernen (analytischen) Ebene regulär ist. Das aber heißt, daß $f$ für $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geqq r$ ($r$ eine genügend große positive Zahl) und damit nach Satz 18 überall im erweiterten $R_{2n}$ regulär, also konstant ist.

Für meromorphe Funktionen gilt unter den entsprechenden Voraussetzungen der Satz von HURWITZ-WEIERSTRASS:

Satz 28. *Ist die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten des erweiterten Raumes meromorph, so ist $F$ eine rationale Funktion*[1].

Wir geben den Beweis für den Fall einer Funktion $F(w, z)$ von zwei Veränderlichen an, der aber auch unmittelbar auf den Fall von $n$ Veränderlichen übertragen werden kann.

Wir können annehmen, daß der unendlichferne Punkt $(\infty, 0)$ ein regulärer Punkt von $F(w, z)$ ist und daß zugleich $F(\infty, 0) \neq 0$. Dann gibt es ein $r > 0$ und ein $d > 0$, so daß $F$ regulär und verschieden von Null für alle $(w, z)$ aus

$$(1) \qquad |w| > r, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| < d.$$

Ferner ist die Anzahl der Nullstellen und der außerwesentlich singulären Stellen auf jeder der Ebenen $z =$ konst. endlich. Zu jedem endlichen $z_0$ gibt es zwei zueinander teilerfremde, ausgezeichnete Pseudodopolynome

$$\psi_{z_0}(w, z) \equiv \sum_{\nu=0}^{k(z_0)} A_{z_0}^{(\nu)}(z)\, w^\nu, \qquad \varphi_{z_0}(w, z) \equiv \sum_{\nu=0}^{l(z_0)} B_{z_0}^{(\nu)}(z)\, w^\nu \qquad (A_{k(z_0)} \equiv B_{l(z_0)} \equiv 1)$$

und ein positives $\varepsilon(z_0)$, so daß alle $A_{z_0}^{(\nu)}(z)$ und $B_{z_0}^{(\nu)}(z)$ regulär für $|z - z_0| < \varepsilon(z_0)$ und ferner $F(w, z)\,\dfrac{\psi_{z_0}(w, z)}{\varphi_{z_0}(w, z)}$ regulär und von Null verschieden für $|z - z_0| < \varepsilon(z_0)$ und alle endlichen $w$.

Die $A_{z_0}^{(\nu)}(\zeta)$ und $B_{z_0}^{(\nu)}(\zeta)$ sind die elementarsymmetrischen Funktionen der Pol- und Nullstellen von $F$ auf $z = \zeta$. Daraus folgt wiederum, daß die $A_{z_0}^{(\nu)}(z)$ und $B_{z_0}^{(\nu)}(z)$ unabhängig von $z_0$ und regulär für alle endlichen $w$ sind. Weil weiter die Wurzeln der beiden Pseudopolynome $\psi_{z_0}$ und $\varphi_{z_0}$ niemals in (1) liegen, für jede Wurzel $w(z)$ also entweder $|w| \leqq r$ oder $|w| \leqq \dfrac{|z|}{d}$, so folgt, daß

$$|A^{(\nu)}(z)| < C \cdot \operatorname{Max}\{r^{k_0}, |z|^{k_0}\}, \qquad |B^{(\nu)}(z)| < C \cdot \operatorname{Max}\{r^{l_0}, |z|^{l_0}\}.$$

Die $A^{(\nu)}$ und $B^{(\nu)}$ sind also ganze rationale Funktionen von $z$. Die Funktion $\tilde{F}(w, z) \equiv F(w, z)\,\dfrac{\psi(w, z)}{\varphi(w, z)}$ ist somit im Endlichen überall regulär, von Null verschieden und hat im Unendlichen höchstens außerwesentlich singuläre Stellen. Es existiert daher mindestens ein unendlichferner Punkt — er sei $(a, \infty)$ —, in dem $F$ höchstens einen Pol hat. Dann ist aber die Funktion $\dfrac{1}{\tilde{F}(w, z)}$ auf der geschlossenen analytischen Ebene $\dfrac{w}{z} = a$ überall regulär, also nach Satz 27 eine Konstante, womit unser Satz bewiesen ist.

[1] Vgl. OSGOOD: Lb. S. 275ff., wo der Satz noch wesentliche Erweiterungen findet; siehe ferner KNESER [6]; SEVERI [2], [9]; vgl. auch Satz 29.

Folgerung 1. Ist die Funktion $F$ in allen Punkten einer geschlossenen $(2n-2)$-dimensionalen analytischen Ebene meromorph, so ist $F$ eine rationale Funktion (Beweis auf Grund von Satz 28 wie bei Satz 27).

Folgerung 2. Jede ganze, nichtrationale Funktion ist in *jedem* unendlichfernen Punkte *wesentlich singulär.*

SEVERI zeigt nun, daß man in den obigen Sätzen die analytischen Ebenen durch ein beliebiges algebraisches Gebilde ersetzen kann, d. h. durch ein analytisches Gebilde, das einer ganzen rationalen Gleichung genügt:

Satz 29. *Ist die Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ in allen Punkten eines geschlossenen algebraischen Gebildes regulär (bzw. meromorph), so ist $F$ eine Konstante (bzw. eine rationale Funktion)*[1].

Aus Satz 29 folgt unmittelbar wieder Satz 28[1]. Ferner sei bemerkt, daß Satz 27, die Folgerungen aus Satz 28 und Satz 29 in der obigen Fassung nicht mehr im $R_G$, erst recht nicht in beliebig erweiterten Räumen gelten; Näheres sowie Verallgemeinerungen der genannten Sätze vgl. OSGOOD: Lb. Kap. 3, § 29—32.

Wir zeigen schließlich, daß eine rationale Funktion, die nur Pole besitzt, eine Konstante ist; es gilt nämlich:

Satz 30. *Jede rationale, nichtkonstante Funktion $R(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n > 1$, besitzt mindestens eine außerwesentlich singuläre Stelle zweiter Art.*

a) $R$ sei ganz rational. Wäre der Satz falsch, so wäre $1/R$ in sämtlichen unendlich fernen Punkten regulär, also konstant. Entsprechend, falls $R$ die Reziproke einer ganzen Funktion ist.

b) Es sei $R \equiv \frac{G}{H}$, wobei $G$ und $H$ teilerfremde, nichtkonstante Polynome bedeuten mögen. In den Schnittpunkten der durch $G = 0$ und $H = 0$ bestimmten algebraischen Gebilde (solche Punkte existieren nach dem Satze von BÉZOUT sicher) muß dann $R$ außerwesentlich singulär von zweiter Art sein, w. z. b. w.

Nunmehr können wir auch sämtliche überall eineindeutigen und meromorphen Abbildungen unseres Raumes bestimmen:

Satz 31. *Die einzigen überall eineindeutigen und meromorphen Abbildungen des erweiterten Raumes ($R_\Gamma$) auf sich sind die projektiven Transformationen*[2]

$$Z_i = \frac{a_{i0} + a_{i1} z_1 + \cdots + a_{in} z_n}{b_0 + b_1 z_1 + \cdots + b_n z_n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ist nämlich $Z_i = F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, eine den Bedingungen des Satzes genügende Transformation, so sind nach Satz 28 die $F_i$ rationale Funktionen. Aus der Betrachtung der Funktionaldeterminante folgt dann noch, daß Zähler und Nenner linear und die Nenner alle gleich sein müssen.

[1] Vgl. SEVERI [2] und [9].

[2] Vgl. OSGOOD: Lb. III, § 33; siehe dort auch den entsprechenden Satz für den Raum $R_G$ (Raum der Funktionentheorie).

## § 4. Funktionen zu vorgegebenen Pol- und Nullstellenflächen.

Bereits die frühesten Untersuchungen zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, so die Arbeiten von POINCARÉ und COUSIN, beschäftigen sich damit, die Sätze von MITTAG-LEFFLER und WEIERSTRASS über die Existenz einer meromorphen bzw. ganzen Funktion zu vorgegebenen Pol- bzw. Nullstellen auf Funktionen von $n$ Veränderlichen zu übertragen und zugleich die hiermit zusammenhängenden Fragen nach der Quotientendarstellung meromorpher Funktionen zu lösen. Bei der Übertragung der genannten Sätze entsteht insbesondere dadurch eine Schwierigkeit, daß — wie wir in den vorangehenden Paragraphen gesehen haben — die Pol- und Nullstellen einer Funktion hier nicht mehr isoliert auftreten, sondern $(2n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten ausfüllen.

Zum Verständnis des Folgenden müssen wir zunächst den Begriff der „Äquivalenz" von Funktionen einführen:

a) Zwei in einer Umgebung des Punktes $P$ *meromorphe* Funktionen $f$ und $h$ heißen *im Punkte $P$ äquivalent in bezug auf Subtraktion*, falls die Differenz $f - h$ in $P$ regulär ist.

b) Zwei in einer Umgebung des Punktes $P$ *reguläre* Funktionen $f$ und $h$ heißen *in $P$ äquivalent in bezug auf Division*, falls der Quotient $f/h$ in $P$ regulär und von Null verschieden ist.

Die COUSINsche Übertragung des MITTAG-LEFFLERschen Satzes lautet dann[1]:

Satz 32. *Jedem Punkte $P$ des endlichen Raumes (bzw. eines Zylinderbereiches $\mathfrak{Z}$) sei eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort meromorphe Funktion $f_P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ so zugeordnet, daß stets, falls $Q$ einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{U}(P)$, $f_Q$ die $Q$ zugeordnete Funktion bedeutet, die Funktionen $f_P$ und $f_Q$ in $Q$ äquivalent in bezug auf Subtraktion sind. Dann gibt es eine überall im Endlichen (bzw. in $\mathfrak{Z}$) meromorphe Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die in jedem Punkte $P$ mit der zugehörigen Funktion $f_P$ äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.*

Die Funktionen $f_P$ treten hier an die Stelle der Hauptteile des MITTAG-LEFFLERschen Satzes.

Wir skizzieren den Beweis für den Fall, daß $n = 2$ und der vorgegebene Bereich mit dem endlichen $w$-$z$-Raume identisch ist:

Grundlegend für den Beweis ist das Verhalten der durch das Integral

$$\underset{m,p}{I}(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{m,p}} \frac{f_p(w,\zeta) - f_m(w,\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

definierten Funktion $I_{m,p}(w, z)$. Über $l_{m,p}$ wird vorausgesetzt, daß es ein einfaches, nichtgeschlossenes, reell-analytisches Kurvenstück der $z$-Ebene ist; von $f_p$ und $f_m$ wird angenommen, daß sie in einer Umgebung eines Hyperflächenstückes $(\mathfrak{b}^{(w)}, l_{m,p})$ regulär sind ($w$ aus einem Bereiche $\mathfrak{b}^{(w)}$ der

[1] Neben der Arbeit von COUSIN vgl. HAHN; OSGOOD: Lb. III, § 3; FORSYTH: Lb. V.

$w$-Ebene, $z$ auf $l_{m,p}$). Dann ist $I_{m,p}$ regulär für alle $(w, z)$, für die $w$ aus $\mathfrak{b}^{(w)}$ und $z$ kein Endpunkt von $l_{m,p}$. Doch ist $I_{m,p}$ mehrdeutig und wird durch $(\mathfrak{b}^{(w)}, l_{m,p})$ in eindeutige Zweige zerlegt, von denen einer durch das obige Integral dargestellt wird. Die Differenz der Werte von $I_{m,p}$ auf dem linken und rechten Ufer der Hyperfläche $(\mathfrak{b}^{(w)}, l_{m,p})$ ist $f_p(w, z) - f_m(w, z)$.

Durch genügend feine Einteilung der $w$- und $z$-Ebene zerlegen wir jetzt einen vorgegebenen beschränkten Dizylinder $\mathfrak{D}_0$ so in endlich viele kleine Teil-Dizylinder, daß folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem der Teilzylinder $\mathfrak{Z}'$ existiert ein Punkt $P'$, so daß $\mathfrak{Z}'$ ganz im Innern der auf Grund der Voraussetzung des Satzes dem Punkte $P'$ zugeordneten Umgebung $\mathfrak{U}(P')$ liegt; es ist dann die zugehörige Funktion $f_{P'}$ in $\mathfrak{Z}'$ und auf seinem Rande noch regulär, und ferner sind, falls $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ zwei nebeneinander liegende Dizylinder bedeuten, die zugehörigen Funktionen $f_{P'}$ und $f_{P''}$ auf dem gemeinsamen Randstück äquivalent in bezug auf Subtraktion.

Wir greifen nun zwei angrenzende Teilzylinder mit gleicher $w$-Projektion heraus — sie seien mit $(\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_m^{(z)})$ und $(\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_p^{(z)})$ und die zugehörigen Funktionen mit $f_m$ und $f_p$ bezeichnet. Dann ist die durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} g(w, z) &\equiv \underset{m,p}{\int}(w, z) + f_m(w, z) \quad \text{in} \quad (\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_m^{(z)}), \\ &\equiv \underset{m,p}{\int}(w, z) + f_p(w, z) \quad \text{in} \quad (\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_p^{(z)}) \end{aligned}$$

definierte Funktion in beiden Dizylindern und auf deren gemeinsamen Rande eindeutig und meromorph, ferner $g - f_m$ im ersten, $g - f_p$ im zweiten Dizylinder regulär, also $g$ äquivalent $f_m$ in $(\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_m^{(z)})$, äquivalent $f_p$ in $(\mathfrak{b}_0^{(w)}, \mathfrak{b}_p^{(z)})$.

Dieses Verfahren zur Definition von $g$ läßt sich entsprechend gleichzeitig auf alle Teilzylinder $\mathfrak{Z}'$ ausdehnen, soweit sie dieselbe $w$-Projektion $\mathfrak{b}_0^{(w)}$ besitzen, und schließlich auf den ganzen Bereich $\mathfrak{D}_0$ selbst, wodurch wir zu einer Funktion $F_0$ gelangen, die innerhalb $\mathfrak{D}_0$ die im Satze verlangten Eigenschaften aufweist. Man hat nun noch den endlichen $w$-$z$-Raum durch eine Folge genügend großer Dizylinder $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots$ zu approximieren und dann mittels der üblichen Limesprozesse aus den zu den $\mathfrak{D}_i$ erhaltenen Funktionen $F_i$ die gesuchte Funktion $F$ zu konstruieren.

Mit Hilfe von Satz 32 läßt sich nunmehr auch die Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Produktsatzes beweisen:

Satz 33[1]. *Jedem Punkte $P$ des endlichen Raumes (bzw. eines einfachzusammenhängenden[2] Zylinderbereiches $\mathfrak{Z}$) sei eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort reguläre Funktion $f_P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ so zugeordnet, daß stets, falls $Q$ einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{U}(P)$, $f_Q$ die $Q$ zugeordnete Funktion bedeutet, die Funktionen $f_P$ und $f_Q$ in $Q$ äquivalent in bezug auf Division sind. Dann gibt es eine ganze (bzw. in $\mathfrak{Z}$ reguläre) Funktion $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die in jedem Punkte $P$ mit der zugehörigen Funktion $f_P$ äquivalent in bezug auf Division ist.*

Man beachte, daß Satz 32 für jeden Zylinderbereich, Satz 33 nur für einfachzusammenhängende Zylinderbereiche ausgesprochen ist.

Satz 33 besagt insbesondere:

---

[1] Vgl. S. 64, Anm. 1.

[2] Wir nennen hier einen Bereich *einfachzusammenhängend*, wenn er topologisch vom Typus der Hyperkugel ist, alle übrigen Bereiche *mehrfachzusammenhängend*.

Satz 33a. *Gegeben sei eine abzählbare Menge von analytischen Gebilden $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m, \ldots$, die je im Endlichen keine wesentlichen Singularitäten aufweisen, jedem $\mathfrak{G}_m$ sei eine Ordnung $l_m$ zugeordnet; ferner mögen durch jeden beschränkten Bereich jeweils nur endlich viele $\mathfrak{G}_m$ hindurchgehen. Dann gibt es eine ganze Funktion $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, die auf allen $\mathfrak{G}_m$ und nur auf den $\mathfrak{G}_m$ verschwindet, und zwar jedesmal in der vorgeschriebenen Ordnung $l_m$.*[1]

Zum Beweise wähle man $f_P \equiv 1$, falls $P$ zu keinem der Gebilde $\mathfrak{G}_m$ gehört. Liegt dagegen $P$ auf einem der $\mathfrak{G}_m$ oder ist $P$ Schnittpunkt mehrerer Gebilde $\mathfrak{G}_{m_1}, \mathfrak{G}_{m_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{m_s}$, ist ferner $h_P^{(i)} = 0$ eine in $P$ zulässige[2] Darstellung von $\mathfrak{G}_{m_i}$, so sei $f_P \equiv \prod_1^s \{h_P^{(i)}\}^{l_{m_i}}$. Die $f_P$ genügen bei geeigneter Wahl von Umgebungen $\mathfrak{U}(P)$ den Bedingungen von Satz 33, woraus sich die Behauptung ergibt.

Ein überall im Endlichen singularitätenfreies analytisches Gebilde kann also insbesondere stets durch eine Gleichung $G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ dargestellt werden, wobei $G$ eine *ganze* Funktion bedeutet.

Zerlegung einer ganzen Funktion in irreduzible Faktoren. Ist umgekehrt $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine ganze Funktion, so definiert die Gleichung $G = 0$ ein oder mehrere (höchstens abzählbar viele) analytische Gebilde $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m, \ldots$, die den Bedingungen von Satz 33a genügen; die ganzen Zahlen $l_m$ seien die Ordnungen, in denen dabei die $\mathfrak{G}_m$ auftreten. Zu jedem $\mathfrak{G}_m$ gibt es nach Satz 33a eine ganze Funktion $G_m$, die auf $\mathfrak{G}_m$ und nur auf $\mathfrak{G}_m$ (in der ersten Ordnung) verschwindet. $G_m$ ist notwendig im Großen irreduzibel, d. h. es gibt kein Paar ganzer Funktionen $G_m^{(1)}$ und $G_m^{(2)}$, die beide im Endlichen Nullstellen besitzen, so daß $G_m \equiv G_m^{(1)} \cdot G_m^{(2)}$.

$G$ ist sicher durch jede der Funktionen $\{G_m\}^{l_m}$ teilbar ($m = 1, 2, \ldots$). Es läßt sich nun leicht zeigen, daß zu den $G_m$ geeignete konvergenzerzeugende Faktoren bestimmt werden können (wir denken sie uns bereits in die $G_m$ hineingezogen), so daß das Produkt der $\{G_m\}^{l_m}$ überall gleichmäßig konvergiert und

$$G \equiv \prod_{m=1}^{\infty} \{G_m\}^{l_m}.$$

Eine solche Produktzerlegung einer ganzen Funktion in irreduzible Faktoren ist bis auf nullstellenfreie Funktionen stets nur auf eine Weise möglich[3].

---

[1] Über die Nullstellenflächen ganzer Funktionen siehe H. CARTAN [4a] und THULLEN [4].

[2] Das soll heißen: Es gibt keine zwei in $P$ reguläre, dort verschwindende Funktionen $h_1$ und $h_2$, so daß $h_P^{(i)} \equiv h_1 h_2$ und $\mathfrak{G}_{m_i}$ in einer Umgebung von $P$ bereits durch $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$ dargestellt wird.

[3] Näh. s. GRONWALL; HAHN; OSGOOD: Lb., daneben BEHNKE-THULLEN [5].

Satz 33a ist von H. CARTAN[1] für Funktionen zweier Veränderlichen wesentlich erweitert worden. Er zeigt, daß man auf den Gebilden $\mathfrak{G}_m$ nicht nur den Wert 0 (bzw. einen konstanten Wert $c \neq 0$), sondern beliebige Funktionswerte vorgeben kann; man hat nur vorauszusetzen, daß diese Werte meromorphe Funktionen der Gebilde $\mathfrak{G}_m$ bilden. Es gibt dann stets eine überall im Endlichen *meromorphe* Funktion, die auf den $\mathfrak{G}_m$ die vorgeschriebenen Werte annimmt. Man kann sogar auf den $\mathfrak{G}_m$ die ersten $r$ Ableitungen nach $w$ (oder nach $z$) vorgeben.

Mit Hilfe dieser Erweiterungen des COUSINschen Satzes beweist H. CARTAN einige interessante Sätze über das Verhalten ganzer Funktionen des $R_4$. Es seien hier folgende genannt:

1. Wenn die beiden ganzen Funktionen $F(w, z)$ und $G(w, z)$ nirgends gleichzeitig verschwinden, so gibt es zwei ganze Funktionen $U(w, z)$ und $V(w, z)$, so daß $U \cdot F + V \cdot G \equiv 1$.

2. Zu zwei teilerfremden ganzen Funktionen $F(w, z)$ und $G(w, z)$ gibt es stets zwei ganze Funktionen $U(w, z)$ und $V(w, z)$, so daß $U(w, z) \cdot F(w, z) + V(w, z) \cdot G(w, z) \equiv W(w) \cdot Z(z)$, wobei $W(w)$ und $Z(z)$ ganze Funktionen von $w$ bzw. $z$ allein sind.

3. $G(w, z), F(w, z), H(w, z)$ seien drei untereinander teilerfremde ganze Funktionen. Die Funktion $H$ läßt sich dann und nur dann in der Form $H \equiv U \cdot F + V \cdot G$ ($U$ und $V$ ganze Funktionen) darstellen, falls in jeder gemeinsamen Nullstelle $Q$ von $F$ und $G$ die Funktion $H$ eine Darstellung $H \equiv f \cdot F + g \cdot G$ gestattet, wobei $f$ und $g$ regulär in der Umgebung von $Q$ sind[2].

Die Sätze von H. CARTAN lassen sich *nicht* ohne weiteres auf Funktionen von $n$ Veränderlichen übertragen.

Quotientendarstellung meromorpher Funktionen. Satz 33 hängt eng mit der zuerst von POINCARÉ untersuchten Frage zusammen, ob eine in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion sich dort als Quotient zweier in $\mathfrak{B}$ regulärer Funktionen darstellen läßt (was bekanntlich in der Kl.Th. immer möglich ist).

Ist nämlich $F$ eine in $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion, $P$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}$, so gibt es ein Paar in $P$ regulärer, dort teilerfremder Funktionen $f_P$ und $h_P$, so daß $F \equiv \frac{h_P}{f_P}$ in einer Umgebung von $P$; ist $F$ in $P$ regulär, so sei $f_P \equiv 1$. Diese Funktionen $f_P$ genügen offenbar bei geeigneten $\mathfrak{U}(P)$ der Verträglichkeitsbedingung des Satzes 33. Ist also $\mathfrak{B}$ mit dem endlichen Raume (oder einem einfachzusammenhängenden Zylinderbereiche $\mathfrak{Z}$) identisch, so gibt es eine ganze (bzw. in $\mathfrak{Z}$ reguläre) Funktion $G$, die mit allen $f_P$ jeweils in $P$ äquivalent ist. Hieraus folgt, daß die Funktion $F \cdot G \equiv H$ ganz (bzw. in $\mathfrak{Z}$ regulär) ist; zugleich müssen

[1] Vgl. H. CARTAN [4] und [4a].

[2] Mit Hilfe dieser Sätze stellt H. CARTAN eine der Theorie der algebraischen Flächen analoge Theorie der ganzen Flächen auf, siehe H. CARTAN [4a].

$G$ und $H$ in jeder evtl. vorhandenen gemeinsamen Nullstelle teilerfremd zueinander sein. Wir können also sagen:

Satz 34[1]. *Ist $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine überall im Endlichen (bzw. in einem einfachzusammenhängenden Zylinderbereiche $\mathfrak{Z}$) meromorphe Funktion, so gibt es stets zwei ganze (bzw. in $\mathfrak{Z}$ reguläre), in gemeinsamen Nullstellen teilerfremde Funktionen $G$ und $H$, so daß $F \equiv G \cdot H$.*

Ferner sehen wir, daß immer, falls sich Satz 33 auf einen Bereich $\mathfrak{B}$ übertragen läßt, in $\mathfrak{B}$ auch die Quotientendarstellung der dort meromorphen Funktionen durch Paare regulärer Funktionen gilt (natürlich nicht umgekehrt).

Nun konnte HARTOGS[2] als erster (an dem Beispiele eines beschränkten, mehrfachzusammenhängenden Bereiches) nachweisen, daß sicher Satz 33 nicht mehr in beliebigen Bereichen gelten kann. Später gab dann H. CARTAN[3] einen beschränkten, einfachzusammenhängenden Bereich und GRONWALL[4] sogar einen (mehrfachzusammenhängenden) *Zylinderbereich* an, auf die sich Satz 33 in der obigen Form nicht verallgemeinern läßt. Benutzt man die im nächsten Kapitel aufgestellte Theorie der Regularitätshüllen, so kann man ein ganz allgemeines Prinzip zur Konstruktion von Bereichen dieser Art angeben, auf das auch die Beispiele von HARTOGS und CARTAN zurückgehen. Speziell für REINHARDTsche Körper läßt sich zeigen[5]:

*Hat der eigentliche REINHARDTsche Körper $\mathfrak{K}$ des $R_4$ mit dem Mittelpunkt* (0, 0) *die Eigenschaft, daß sich Satz 33 auf ihn übertragen läßt, so ist $\mathfrak{K}$ notwendig ein Regularitätsbereich oder unterscheidet sich von einem solchen höchstens um Stücke der $w$- oder $z$-Ebene* (d. h. der kleinste $\mathfrak{K}$ umfassende Regularitätsbereich entsteht aus $\mathfrak{K}$ durch Hinzunahme gewisser Stücke dieser Ebenen). Insbesondere kann also Satz 33 niemals in einem REINHARDTschen Körper gelten, dessen Regularitätshülle um ein volles vierdimensionales Stück „größer" ist.

Es bleibt hier meist offen, ob ebenfalls Satz 34 nicht auf die genannten Bereiche verallgemeinert werden kann. Es lassen sich jedoch leicht Bereiche angeben, in denen zwar Satz 34, nicht aber Satz 33 gilt.

Abgesehen von dem Beispiele GRONWALLS ist keiner der angegebenen Bereiche ein Regularitätsbereich. Es ist somit vollkommen offen, *ob Satz 33 und damit Satz 34 sich nicht wenigstens auf einfachzusammenhängende Regularitätsbereiche übertragen lassen.*

Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenfunktionen. Die obigen Ergebnisse zeigen, daß man in einem beliebig gegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ die Bedingungen im Kleinen, wie sie bei COUSIN verlangt werden, aufgeben muß, um in $\mathfrak{B}$ zu gegebenen Nullstellen Funktionen konstruieren zu können.

---

[1] Vgl. POINCARÉ [1] und die auf S. 64 zitierten Arbeiten.

[2] Vgl. HARTOGS [4].

[3] Auf einem Vortrage in Münster i. W., Mai 1931.

[4] Vgl. GRONWALL [1], [2].

[5] Vgl. BEHNKE-THULLEN [4].

Zunächst eine für das Folgende wichtige Bezeichnung:

Eine in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $g$ heißt in $\mathfrak{B}$ **Nullstellenfunktion** der in $\mathfrak{B}$ regulären (bzw. meromorphen) Funktion $F$, falls $F$ in sämtlichen Punkten aus $\mathfrak{B}$ verschwindet[1] (evt. bis auf außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art[2]), in denen $g = 0$. (Wir setzen dabei voraus, daß $g$ in $\mathfrak{B}$ mindestens eine Nullstelle besitzt.)

Bergmann[3] stellte als erster die Frage, unter welchen Bedingungen es zu gegebenen Funktionen $g_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f$ gibt, die genau die $g_m$ zu Nullstellenfunktionen hat. Er beweist für Funktionen des $R_4$:

Unter $A(g)$ verstehe man die untere Grenze der Volumenintegrale $\int\limits_{\mathfrak{B}} |1 - v(w, z)\, g(w, z)|^2 d\omega$, wobei $v(w, z)$ die Gesamtheit der in $\mathfrak{B}$ regulären, dort nicht verschwindenden Funktionen durchlaufe. *Ist dann* $\{g_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *eine unendliche Folge von in* $\mathfrak{B}$ *quadratintegrierbaren, regulären Funktionen, existiert ferner ein* $p > 0$, *so daß* $\sum A(g_m)^{p/2}$ *konvergiert, so gibt es eine in* $\mathfrak{B}$ *reguläre Funktion* $f(w, z)$, *die genau die* $g_m$ *zu Nullstellenfunktionen hat.*

Es ist selbstverständlich, daß zu gegebenen Nullstellenfunktionen $g_m$ nur dann eine Funktion $f$ existieren kann, falls sich die Nullstellenflächen der $g_m$ in keinem inneren Punkte des gegebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ häufen, d. h. in jedem ganz im Innern liegenden Bereiche $\mathfrak{B}_0$ jeweils nur endlich viele der $g_m$ verschwinden. Setzt man lediglich dieses voraus, so kann man immer zu den $g_m$ wenigstens eine in $\mathfrak{B}_0$ *meromorphe* Funktion konstruieren, genauer:

Satz 35[4]. $g_m(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *sei eine unendliche Folge in* $\mathfrak{B}$ *regulärer, dort nicht identisch verschwindender Funktionen; in jedem ganz im Innern von* $\mathfrak{B}$ *liegenden Bereiche* $\mathfrak{B}_0$ *mögen jeweils nur endlich viele der* $g_m$ *verschwinden. Dann gibt es stets eine in* $\mathfrak{B}$ *meromorphe Funktion* $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *welche die* $g_m$ *und nur die* $g_m$ *zu Nullstellenfunktionen hat.*

*Existiert ferner zu* $\mathfrak{B}$ *eine Folge von Teilbereichen* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m, \ldots$ *mit den Eigenschaften: 1. der Bereich* $\mathfrak{B}_m$ *liegt ganz im Innern von* $\mathfrak{B}_{m+1}$ *und* $\mathfrak{B}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *und es ist* $\lim \mathfrak{B}_m \equiv \mathfrak{B}$; *2. jede in einem Bereiche* $\mathfrak{B}_m$ *reguläre Funktion läßt sich in eine dort gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln, die nach noch in* $\mathfrak{B}$ *regulären Funktionen fortschreitet, so gibt es stets auch eine in* $\mathfrak{B}$ *reguläre Funktion* $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *die genau die* $g_m$ *zu Nullstellenfunktionen hat.*

Bereiche, die die letztgenannten Eigenschaften besitzen, sind etwa eigentliche Reinhardtsche Körper, Kreiskörper und ferner solche Rungeschen Bereiche[5], die zugleich Regularitätsbereiche sind.

---

[1] In mindestens gleicher Ordnung wie $g$.

[2] Dies sind die etwa vorhandenen Schnittpunkte der Fläche $g = 0$ mit den Polflächen der Funktion $F$.

[3] Vgl. Bergmann [**13**]. [4] Vgl. Behnke-Thullen [**4**].

[5] Definition der Rungeschen Bereiche s. Kap. VI, § 4.

## Sechstes Kapitel.

# Theorie der Regularitätsbereiche und Regularitätshüllen[1].

Wir haben bereits im dritten Kapitel Bereiche kennengelernt, in denen die Gesamtheit der in ihnen regulären Funktionen gleichzeitig über den Rand hinaus fortsetzbar war — wir erinnern an die eigentlichen, aber nicht vollkommenen Kreiskörper, REINHARDTschen- und HARTOGSschen Körper. Es konnte zu einem vorgegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ dieser Art ein *größerer* umfassender Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ angegeben werden von der Eigenschaft, daß jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion sich notwendig auch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulär verhielt.

Diese Erscheinung soll ganz allgemein in diesem Kapitel untersucht werden. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Regularitätshülle ein:

Definition. Den Durchschnitt der Regularitätsbereiche aller in einem beliebigen, aber fest gegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen nennen wir die **Regularitätshülle** des Bereiches $\mathfrak{B}$ und bezeichnen sie mit $\boldsymbol{\mathfrak{H}(\mathfrak{B})}$.

Jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion ist nach Definition auch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ regulär, und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ist offenbar der „größte" $\mathfrak{B}$ umfassende Bereich mit dieser Eigenschaft.

Ist $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich, so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}) \equiv \mathfrak{B}$. Wir werden zeigen, daß in keinem anderen Falle $\mathfrak{B}$ mit seiner Regularitätshülle zusammenfällt. Daraus folgt dann insbesondere, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ stets selbst ein Regularitätsbereich ist; wir können daher $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ auch *den kleinsten* $\mathfrak{B}$ *umfassenden Regularitätsbereich* nennen.

Die Grundlage der folgenden Überlegungen ist der „Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit regulärer Funktionen". Aus ihm werden unmittelbar wichtige notwendige und hinreichende Bedingungen für Regularitätsbereiche, Eigenschaften der Regularitätshüllen sowie Beziehungen zwischen gegebenen Bereichen und ihren Regularitätshüllen folgen. Zugleich wird es gelingen, auch die Theorie der Konvergenz- und Normalitätsbereiche zu erfassen und mit der Theorie der Regularitätsbereiche zu verschmelzen. Dadurch wird ein von G. JULIA gestelltes Problem vollständig gelöst.

## § 1. Der Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit[2].

Wesentlich für unsere Überlegungen ist der Begriff der Funktions*klasse*, die wir wie folgt definieren:

[1] Zur Theorie der Regularitätsbereiche vgl. THULLEN [3] und CARTAN-THULLEN; an älteren Arbeiten siehe B. ALMER, BEHNKE [5], H. CARTAN [5] letzter Teil, CARTAN [6]. Doch werden, im Gegensatz zum folgenden, in den zitierten Arbeiten nur *endliche* Bereiche untersucht.

[2] Vgl. CARTAN-THULLEN.

Eine Menge $\mathsf{K}$ von Funktionen, die in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ regulär (bzw. meromorph) sind, heißt eine **in $\mathfrak{B}$ reguläre (bzw. meromorphe) Klasse** von Funktionen, falls $\mathsf{K}$ mit einer Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$

1. deren Ableitungen $\partial f/\partial z_i$ (und damit auch sämtliche Ableitungen höherer Ordnung),
2. sämtliche Funktionen $A f^p$ enthält mit beliebigem komplexen $A$ und beliebigem positiven, ganzen $p$.

Beispiele solcher Klassen sind die „Monome" $A_{\nu_1, \ldots, \nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n}$ und die Gesamtheit der homogenen Polynome.

Bezeichnung. Gegeben sei ein beliebiger Bereich $\mathfrak{B}$ und ein ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegender Teilbereich $\mathfrak{B}_0$. Ist dann $r\,(\neq 0)$ die Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ und $\varrho$ eine positive Zahl mit $\varrho < r$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_0^{(\varrho)}$ die Gesamtheit aller Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, die entweder in $\mathfrak{B}_0$ liegen oder von $\mathfrak{B}_0$ höchstens um $\varrho$ entfernt sind, d. h. die jeweils im Innern eines gleichseitigen Polyzylinders liegen, der einen endlichen Punkt aus $\mathfrak{B}_0$ zum Mittelpunkt und den Radius $\varrho$ hat. $\mathfrak{B}_0^{(\varrho)}$ ist ein Teilbereich von $\mathfrak{B}$ und enthält $\mathfrak{B}_0$.

Einen gleichseitigen Polyzylinder[1] mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $\varrho$ wollen wir durch das Symbol $\mathfrak{Z}(M; \varrho)$ kennzeichnen.

Der Hauptsatz lautet dann:

Satz 36 (Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit). a) Für Klassen regulärer Funktionen. *$\mathfrak{B}_0$ sei ein ganz im Innern eines Bereiches $\mathfrak{B}$ liegender Teilbereich, $r$ die Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$, ferner die Funktionsmenge $\mathsf{K}$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse. Gilt dann für einen endlichen Punkt $P_0$ aus $\mathfrak{B}$ und jede Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$*

$$|f(P_0)| \leqq \operatorname{Max} |f(\mathfrak{B}_0)|,$$

*so ist*

1. *jede Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$ in dem Polyzylinder $\mathfrak{Z}(P_0; r)$ noch regulär und*
2. $$\operatorname{Max}|f(\mathfrak{Z}(P_0; \varrho))| \leqq \operatorname{Max}|f(\mathfrak{B}_0^{(\varrho)})| \qquad \textit{für jedes } \varrho < r.$$

b) Entsprechend für Klassen meromorpher Funktionen:

*$\mathsf{K}$ sei eine Klasse von in $\mathfrak{B}$ meromorphen Funktionen, im übrigen mögen die Voraussetzungen von Satz 36a bestehen bleiben. Gilt dann für einen endlichen Punkt $P_0$ aus $\mathfrak{B}$ und jede (in $P_0$ und $\mathfrak{B}_0$ noch reguläre) Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$*

$$|f(P_0)| \leqq \operatorname{Max} |f(\mathfrak{B}_0)|,$$

*so ist für ein beliebiges $q$ mit $0 < q < r$*

1. *jede in $\mathfrak{B}_0^{(q)}$ noch reguläre Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$ in dem Polyzylinder $\mathfrak{Z}(P_0; q)$ regulär und*
2. $$\operatorname{Max}|f(\mathfrak{Z}(P_0; \varrho))| \leqq \operatorname{Max}|f(\mathfrak{B}_0^{(\varrho)})| \qquad \textit{für jedes } \varrho < q.$$

Der Beweis geht von der Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f$ um einen solchen Punkt $P_0$ aus. Die einzelnen Koeffizienten der Entwicklung sind dann leicht abzuschätzen, weil sie durch die Ableitungen von $f$, die ihrerseits zu $\mathsf{K}$ gehören, bestimmt sind.

[1] Vgl. S. 36.

Beachten wir zunächst die erste Aussage des Hauptsatzes! Es ergibt sich unmittelbar: Ist $\mathfrak{B}$ der Regularitätsbereich einer Funktion $g$ und $\mathsf{K}$ eine $g$ enthaltende, in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse (im übrigen seien die Bezeichnungen des Hauptsatzes beibehalten), so muß die Randdistanz jedes (endlichen) Punktes $P$, der der Voraussetzung des Hauptsatzes bezüglich der Klasse $\mathsf{K}$ und des Teilbereiches $\mathfrak{B}_0$ genügt, mindestens gleich $r$ sein, d. h. also, zu jedem endlichen Punkte $P$, dessen Randdistanz kleiner als $r$ ist, gibt es mindestens eine Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$, so daß $|f(P)| > \operatorname{Max}|f(\mathfrak{B}_0)|$.

Dies führt zu folgender Definition:

Der Bereich $\mathfrak{B}$ heißt *konvex in bezug auf die in* $\mathfrak{B}$ *reguläre* (*bzw. meromorphe*) *Klasse* $\mathsf{K}$ oder kurz **K-konvex**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{B}$ ist ein Teilbereich des Durchschnitts der Regularitätsbereiche (bzw. Meromorphiebereiche) aller Funktionen der Klasse $\mathsf{K}$,

2. zu jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ mit der Minimaldistanz $r$ ($\neq 0$) in bezug auf $\mathfrak{B}$ und jedem endlichen Punkte $P$ aus $\mathfrak{B}$, dessen Randdistanz in bezug auf $\mathfrak{B}$ kleiner als $r$ ist, existiert mindestens eine (in $\mathfrak{B}_0$ und $P$ noch reguläre) Funktion $f$ aus $\mathsf{K}$, so daß $|f(P)| > \operatorname{Max}|f(\mathfrak{B}_0)|$.

Ist nun $\mathfrak{B}$ ein sich ins Unendliche erstreckender Bereich, so versagt die vorstehende Definition für die im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden unendlichfernen Punkte — man beachte, daß die Klasseneigenschaft einer Funktionsmenge nicht gegenüber projektiven Transformationen invariant ist, wohl aber die Eigenschaft eines Bereiches, Regularitäts- oder Meromorphiebereich zu sein. Wir sagen deshalb:

Der Bereich $\mathfrak{B}$ ist **regulär-konvex**[1] (bzw. **meromorph-konvex**), falls die Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{B}$ ist ein Teilbereich seiner Regularitätshülle (bzw. des Durchschnitts aller $\mathfrak{B}$ umfassenden Meromorphiebereiche),

2. jedem *ganz* im Innern liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ kann man einen ebenfalls ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}_0'$ ($\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}_0' \ll \mathfrak{B}$) so zuordnen, daß zu jedem außerhalb von $\mathfrak{B}_0'$ liegenden Punkte $P$ aus $\mathfrak{B}$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre (bzw. meromorphe, in $\mathfrak{B}_0$ noch reguläre) Funktion $f$ gehört, so daß $|f(P)| > \operatorname{Max}|f(\mathfrak{B}_0)|$.

Die Eigenschaft eines Bereiches, regulär- oder meromorph-konvex zu sein, ist offenbar invariant gegen eineindeutige meromorphe Transformationen, d. h. das Bild eines solchen Bereiches ist stets wieder regulär- bzw. meromorph-konvex. Jeder *endliche* bezüglich einer regulären (bzw. meromorphen) Klasse konvexe Bereich ist stets auch regulär- (bzw. meromorph-) konvex. Umgekehrt gilt, daß ein endlicher regulär-konvexer Bereich $\mathfrak{B}$ stets konvex ist in bezug auf eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse.

[1] Vgl. BEHNKE [5]; ein ähnlicher Begriff kommt auch schon in CARTAN [5] vor.

Folgerung 1. a) Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ der Regularitätsbereich einer Funktion $f$ und $\mathsf{K}$ eine $f$ enthaltende, in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse, so ist $\mathfrak{B}$ $\mathsf{K}$-konvex.

b) *Jeder Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ ist regulär-konvex.*

Beweis zu Folgerung 1b). Wäre $\mathfrak{B}$ nicht regulär-konvex, so gäbe es einen ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ und eine sich in $\mathfrak{B}$ nicht häufende Punktfolge $P_i (i = 1, 2, \ldots)$, so daß $|f(P_i)| \leqq \mathrm{Max}\,|f(\mathfrak{B}_0)|$ für jedes $i$ und jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f$. Wir dürfen voraussetzen, daß die $P_i$ (von einem $i_0$ an) endlich sind und daß ihre Randdistanzen gegen Null konvergieren. Andererseits müßten nach dem Hauptsatze alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen noch in sämtlichen Polyzylindern $\mathfrak{Z}(P_i; r_0)$ regulär sein ($r_0$ sei die Minimaldistanz von $\mathfrak{B}_0$ in bezug auf $\mathfrak{B}$); $\mathfrak{B}$ könnte somit entgegen der Voraussetzung kein Regularitätsbereich sein, w. z. b. w.

Ob auch jeder Meromorphiebereich meromorph-konvex ist, steht noch gänzlich offen.

Folgerung 2. Der Durchschnitt einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Regularitätsbereichen ist regulär-konvex.

Folgerung 3. Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ der Durchschnitt einer beliebigen Anzahl von $\mathsf{K}$-konvexen (bzw. regulär- oder meromorph-konvexen) Bereichen, so ist $\mathfrak{B}$ $\mathsf{K}$-konvex (bzw. regulär- bzw. meromorph-konvex); $\mathsf{K}$ bedeute dabei irgendeine feste in $\mathfrak{B}$ reguläre oder meromorphe Klasse.

## § 2. Eigenschaften der Regularitätsbereiche und Regularitätshüllen.

Aus dem Hauptsatze über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit konnten wir schließen, daß jeder Regularitätsbereich regulär-konvex ist. Noch wichtiger ist die Umkehrung:

Satz 37. a) *Jeder (endliche oder nichtendliche) regulär-konvexe Bereich ist ein Regularitätsbereich (das gleiche gilt also erst recht für einen endlichen, bezüglich einer regulären Klasse konvexen Bereich).*

b) *Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ meromorph-konvex, so ist $\mathfrak{B}$ der Überlagerungsbereich eines Meromorphiebereiches. Existiert ferner ein Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$, der $\mathfrak{B}$ als Teilbereich enthält und zugleich Durchschnitt von Regularitätsbereichen ist, so ist $\mathfrak{B}$ selbst ein Meromorphiebereich*[1].

Zum Beweise wird zunächst mit Hilfe eines unendlichen Produktes eine Funktion $F$ konstruiert, die in $\mathfrak{B}$ regulär (bzw. meromorph) ist, deren Nullstellenflächen sich aber gegen jeden Randpunkt von $\mathfrak{B}$ häufen, die also in sämtlichen Randpunkten wesentlich singulär wird.

Der Bereich $\mathfrak{B}$ hat nach Voraussetzung ferner die Eigenschaft, daß es zu je zwei überlagerten Punkten $P', P''$ mindestens eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $\varphi$ gibt, die in $P'$ und $P''$ verschiedene Funktionselemente besitzt. Nach geeigneter Wahl von abzählbar vielen überlagerten Punktepaaren $P'_l, P''_l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ läßt sich dann mit Hilfe der zugehörigen Funktionen $\varphi_l$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $\Phi$ konstruieren, so daß $G \equiv F \cdot \Phi$ in *sämtlichen* überlagerten Punktepaaren verschiedene Elemente besitzt. Da sich auch

[1] Vgl. CARTAN-THULLEN.

die Nullstellenflächen von $G$ gegen jeden Randpunkt von $\mathfrak{B}$ häufen, so ist $\mathfrak{B}$ genau der Regularitätsbereich (bzw. Meromorphiebereich) der Funktion $G$.

Aus den Folgerungen 1 und 2 des Hauptsatzes und dem eben bewiesenen Satze ergibt sich:

Satz 38[1]. *Ein Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann ein Regularitätsbereich, wenn er regulär-konvex ist.* (*Für endliche Bereiche ist bereits die K-Konvexität eine notwendige und hinreichende Bedingung.*)

Satz 39[2]. *Der Durchschnitt einer beliebigen Anzahl von Regularitätsbereichen ist stets wieder ein Regularitätsbereich.*

Eine unmittelbare Folge ist

Satz 40[2]. Hauptsatz über die Regularitätshüllen. *Ist $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Bereich, $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ seine Regularitätshülle, so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ein Regularitätsbereich.*

Zu jedem Bereich existiert also eindeutig ein kleinster umfassender Regularitätsbereich.

Eigenschaften der Regularitätshüllen[2]. (I). *Nimmt eine in $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion $F$ den Wert $a$ dort nicht an, so ist $f$ auch in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ meromorph und dort überall von $a$ verschieden.* $\left(\text{Zum Beweise betrachte man die Funktion } \frac{1}{f-a}\right)$.

Es folgt insbesondere, daß $\operatorname{Max}|f(\mathfrak{B})| = \operatorname{Max}|f(\mathfrak{H}(\mathfrak{B}))|$ für jede in $\mathfrak{B}$ reguläre und beschränkte Funktion $f$, und hieraus wiederum, daß die Regularitätshülle eines *beschränkten* Bereiches selbst wieder beschränkt ist.

(II). *Wird durch eine analytische Transformation ein Bereich $\mathfrak{B}_1$ eineindeutig auf einen Bereich $\mathfrak{B}_2$ abgebildet, so bildet dieselbe Transformation auch die zugehörigen Regularitätshüllen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_2)$ eineindeutig und analytisch aufeinander ab.* Wird also insbesondere bei einer solchen Transformation $\mathfrak{B}_1$ auf sich abgebildet, so geht dabei auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_1)$ in sich über.

Die Zuordnung der Regularitätshülle zum Grundbereich ist demnach invariant gegenüber eineindeutigen, analytischen Transformationen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Hilfssatz:

*Wird durch eine meromorphe Transformation ein Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ eineindeutig auf einen Bereich $\mathfrak{B}$ abgebildet, so ist auch $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich.* (Folgt aus der Invarianz der Regulärkonvexität[3].)

Für die kreissymmetrischen Körper ergibt sich daraus:

Satz 41[4]. *Die Regularitätshülle eines eigentlichen Kreiskörpers bzw.* REINHARDT*schen- bzw.* HARTOGS*schen Körpers ist ein vollkommener*

---

[1] Vgl. CARTAN-THULLEN. [2] Vgl. THULLEN [3] und CARTAN-THULLEN.

[3] Man beachte, daß wir im Hilfssatz eine meromorphe Transformation (vgl. S. 18—19), in (II) aber nur solche Transformationen zulassen, deren Funktionen in $\mathfrak{B}_1$ analytisch sind.

[4] Dieser Satz gehört zu den ältesten der Theorie der Regularitätshüllen [abgesehen von der Aussage über die $(m, p)$-Bereiche]; vgl. schon BEHNKE [5] und H. CARTAN [5].

*Kreiskörper bzw.* REINHARDT*scher- bzw.* HARTOGS*scher Körper. Die Regularitätshülle eines* $(m, p)$*-Bereiches ist wieder ein* $(m, p)$*-Bereich.*

Es ist also die Regularitätshülle eines eigentlichen Kreiskörpers oder REINHARDTschen Körpers sowie eines $(m, p)$-Bereiches mit $mp > 0$ stets *schlicht.*

(III)[1]. *Der Bereich* $\mathfrak{B}_0$ *liege ganz im Innern des Bereiches* $\mathfrak{B}$. *Ist dann* $r$ *die Minimaldistanz von* $\mathfrak{B}_0$ *in bezug auf* $\mathfrak{B}$, *so ist die Minimaldistanz von* $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ *in bezug auf* $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ *mindestens gleich* $r$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Eigenschaft (I) der Regularitätshüllen und dem Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit.

Es ergeben sich nun eine Reihe interessanter Folgerungen:

Folgerung 1. Liegt der Bereich $\mathfrak{B}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ und hat $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ (oder $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$) höchstens endlich viele Blätter[2], so liegt auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ ganz im Innern von $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$.

Ist $\mathfrak{B}$ beschränkt, so ist diese Aussage eine triviale Folge der Eigenschaft (III). Ist $\mathfrak{B}$ dagegen nicht beschränkt, so beachte man, daß auch jedes projektive Bild $\mathfrak{B}_0^*$ von $\mathfrak{B}_0$ ganz im Innern des Bildbereiches $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ liegt; auf $\mathfrak{B}_0^*$ und $\mathfrak{B}^*$ ist dann wiederum (III) anwendbar.

Folgerung 2. Ist der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ die Regularitätshülle des Bereiches $\mathfrak{B}$, ist ferner $Q$ ein beliebiger Randpunkt von $\mathfrak{R}$ und $f$ eine beliebige in $\mathfrak{R}$ reguläre, in $Q$ singuläre Funktion, so ist $f$ notwendig auch in mindestens einem Randpunkt von $\mathfrak{B}$ singulär.

Folgerung 3. $\overline{\mathfrak{B}}_r$ *sei die Gesamtheit aller Punkte des endlichen Bereiches* $\mathfrak{B}$, *deren Randdistanz größer als die feste Zahl* $r$ *ist.* $\overline{\mathfrak{B}}_r$ *ist entweder leer oder zerfällt in ein oder mehrere Teilbereiche* $\overline{\mathfrak{B}}_r^{(1)}, \overline{\mathfrak{B}}_r^{(2)}, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_r^{(i)}, \ldots$ *Ist* $\mathfrak{B}$ *ein Regularitätsbereich, so ist auch jeder Bereich* $\overline{\mathfrak{B}}_r^{(i)}$ *ein Regularitätsbereich.*

**Echte Regularitätshüllen**[1]. Wir nennen einen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ eine *echte Regularitätshülle,* falls in $\mathfrak{R}$ mindestens ein Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ existiert, so daß $\mathfrak{R}$ die Regularitätshülle von $\mathfrak{B}_0$ ist und $\mathfrak{R}$ mindestens einen Randpunkt $Q$ besitzt, der nicht zugleich Randpunkt von $\mathfrak{B}_0$ ist.

Der Bereich $\mathfrak{R}$ sei ein solcher Regularitätsbereich, $\mathfrak{B}_0$ ein Teilbereich von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0) \equiv \mathfrak{R}$; $Q$ sei ein Randpunkt von $\mathfrak{R}$, der nicht auf dem Rande von $\mathfrak{B}_0$ liegt. Nach (III), Folgerung 2 ist jede in $\mathfrak{R}$ reguläre und in $Q$ singuläre Funktion notwendig in mindestens noch je einem zweiten Randpunkt (der zugleich auf dem Rande von $\mathfrak{B}_0$ liegt) singulär.

Es folgt:

*Gibt es zu jedem Randpunkte* $Q$ *eines Regularitätsbereiches* $\mathfrak{R}$ *eine in* $\mathfrak{R}$ *reguläre Funktion* $f$, *die in* $Q$ *singulär, aber in jedem andern Randpunkte von* $\mathfrak{R}$ *regulär ist, so ist* $\mathfrak{R}$ *keine echte Regularitätshülle.*

Hiermit ist zugleich die Existenz nichtechter Regularitätshüllen gezeigt. Als einfache Beispiele seien die Hyperkugel $\sum_1^n |z_i|^2 < r$ oder die Körper $A\,|w|^a + B\,|z|^2 < 1$ ($a$ reell und positiv) genannt.

[1] Vgl. CARTAN-THULLEN. [2] Vgl. S. 10—11.

**K-konvexe Hüllen**[1]. Bei der Untersuchung *endlicher* Bereiche ist es oft zweckmäßig, neben der Regularitätshülle auch die „K-konvexe Hülle" zu betrachten. Dadurch gelingt es, über die Eigenschaften spezieller Bereiche schärfere Aussagen zu machen, als auf Grund des Begriffes des Regularitätshülle allein. Wir definieren:

$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger Bereich, K eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse. Der Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{B}}$ aller K-konvexen Bereiche, die $\mathfrak{B}$ enthalten, heiße die *K-konvexe Hülle von* $\mathfrak{B}$.

Bezeichnet man mit $\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}$ den Durchschnitt aller Regularitätsbereiche der Funktionen aus K, so ist $\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}$ K-konvex und enthält $\mathfrak{B}$. Es existiert somit zu jedem Bereiche $\mathfrak{B}$ und jeder in $\mathfrak{B}$ regulären Klasse K mindestens ein umfassender K-konvexer Bereich und damit auch die K-konvexe Hülle. Die K-konvexe Hülle ist selbst wieder K-konvex, ist also der kleinste $\mathfrak{B}$ *umfassende K-konvexe Bereich.*

Die Eigenschaften der Regularitätshüllen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die K-konvexen Hüllen übertragen, indem man jeweils zur Konkurrenz nur die Funktionen der gegebenen Klasse K zuläßt.

## § 3. Konvergenz- und Normalitätsbereiche.

Bezeichnung. Eine gleichmäßig konvergente Folge regulärer Funktionen heißt eine **Folge erster** bzw. **zweiter Art**, je nachdem die Grenzfunktion eine analytische Funktion oder die Konstante $\infty$ ist (ein anderer Fall ist bekanntlich nicht möglich). Den zur Folge gehörigen Bereich der gleichmäßigen Konvergenz[2] nennen wir einen *Konvergenzbereich erster bzw. zweiter Art.*

Entsprechend:

Eine in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ **normale Familie** $\mathfrak{F}$ heiße dort von **erster** bzw. **zweiter Art**, je nachdem *jede* in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus $\mathfrak{F}$ eine Folge erster Art ist oder aber in $\mathfrak{F}$ mindestens eine Folge zweiter Art existiert. Den zugehörigen Normalitätsbereich[2] nennen wir einen *Normalitätsbereich erster bzw. zweiter Art.*

Es sei daran erinnert, daß dieselbe Folge (oder Familie) in einem Bereiche $\mathfrak{B}_1$ von erster, in einem andern Bereiche $\mathfrak{B}_2$ von zweiter Art sein kann. Als Beispiel sei die Folge $z^1, z^2, \ldots, z^m, \ldots$ angegeben, die in $|z| < 1$ eine Folge erster Art, in $|z| > 1$ eine Folge zweiter Art darstellt.

Eine Reihe $\sum f_m$ heißt in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ **normal konvergent**, wenn alle $f_m$ in $\mathfrak{B}$ regulär sind und die Reihe $\sum\{\mathrm{Max}\,|f_m(\mathfrak{B}_0)|\}$ für jeden ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}_0$ konvergiert. Entsprechend wie in Kap. I, § 4 definiert man den *Bereich der normalen Konvergenz der Reihe.*

Als erster hat G. Julia[3] Folgen und normale Familien analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen untersucht. Er wies nach, daß diejenigen Punktmannigfaltigkeiten, in denen eine normale Familie

[1] Vgl. Cartan-Thullen. [2] Vgl. Kap. I, § 4.
[3] Vgl. Julia: Acta math. Bd. 47 (1926).

regulärer Funktionen aufhört, normal zu sein, denselben Bedingungen genügen, wie sie durch die Arbeiten von HARTOGS und E. E. LEVI für die Singularitätenmannigfaltigkeiten analytischer und meromorpher Funktionen bekannt waren. *Es gelten also insbesondere der Kontinuitätssatz und die* LEVI*schen Sätze über Pseudokonvexität* usw.

Damit war die Frage aufgeworfen, ob ein Normalitätsbereich stets auch ein Regularitäts- oder Meromorphiebereich ist (*das „*JULIA*sche Problem“*). Diese Frage läßt sich jetzt auf Grund des Hauptsatzes über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit fast unmittelbar beantworten. Es gilt:

Satz 42[1]. a) *Ist $\mathfrak{B}$ der Normalitätsbereich einer Familie erster Art (bzw. der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge erster Art oder einer normal konvergenten Reihe), so ist $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich. Ist $\mathfrak{B}$ insbesondere endlich und $\mathsf{K}$ eine die Funktionen der Familie (bzw. Folge oder Reihe) enthaltende, in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse, so ist $\mathfrak{B}$ $\mathsf{K}$-konvex.*

b) *Der Normalitätsbereich einer Familie zweiter Art (bzw. der Konvergenzbereich einer Folge zweiter Art) ist ein Meromorphiebereich.*

Hieraus folgen ohne weiteres sämtliche von G. JULIA über die normalen Familien bewiesenen Sätze.

Zu Satz 42 existiert eine gewisse Umkehrung, die besagt, daß ein bezüglich einer regulären Klasse $\mathsf{K}$-konvexer endlicher Bereich stets der Normalitätsbereich einer Familie erster Art ist, die sich nur aus Funktionen der Klasse $\mathsf{K}$ zusammensetzt (analog für Folgen erster Art bzw. normal konvergente Reihen).

Folgerung aus Satz 42. Ist $\mathfrak{F}$ eine in dem *endlichen* Bereiche $\mathfrak{B}$ normale Familie *erster Art* (bzw. Folge erster Art oder normal konvergente Reihe), $\mathsf{K}$ eine $\mathfrak{F}$ enthaltende, in $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse, so ist $\mathfrak{F}$ auch in der $\mathsf{K}$-konvexen Hülle von $\mathfrak{B}$ noch normal (bzw. gleichmäßig bzw. normal konvergent).

Hieraus ergibt sich:

Satz 43[1]. *Genügt eine in dem endlichen Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Klasse $\mathsf{K}$ der Bedingung, daß jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion sich in eine im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergente Folge (bzw. normal konvergente Reihe) von Funktionen aus $\mathsf{K}$ entwickeln läßt, so ist die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ mit der $\mathsf{K}$-konvexen Hülle von $\mathfrak{B}$ identisch.*

Ein den Voraussetzungen von Satz 43 bezüglich der Klasse $\bar{\mathsf{K}}$ genügender endlicher Bereich ist also *dann und nur dann* ein Regularitätsbereich, falls er $\mathsf{K}$-konvex ist (Verschärfung von Satz 38).

Wenden wir Satz 43 auf kreissymmetrische Körper an, so folgt nunmehr in Verbindung mit den früher über diese Körper bewiesenen Sätzen:

*Ein eigentlicher Kreiskörper* (REINHARDT*scher bzw.* HARTOGS*scher Körper*) *ist dann und nur dann ein Regularitätsbereich, wenn er konvex*

[1] Vgl. CARTAN-THULLEN.

*ist in bezug auf eine Klasse homogener Polynome (bzw. Monome bzw. auf die Klasse der Funktionen $z^m f(w)$, wobei $m$ alle ganzen Zahlen, $f(w)$ alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen von $w$ allein durchläuft)* oder — was damit gleichbedeutend ist — *wenn er der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe homogener Polynome (bzw. Monome bzw. einer Reihe $\sum z^m f_m(w)$) ist,* ferner:

*Der größte im Innern eines endlichen Regularitätsbereiches liegende eigentliche Kreiskörper* (REINHARDT*sche bzw.* HARTOGS*sche Körper) mit beliebig vorgegebenem innerem Punkte als Mittelpunkt ist selbst wieder ein Regularitätsbereich,* insbesondere also vollkommen — und im Falle eines Kreiskörpers oder REINHARDTschen Körpers stets *schlicht.*

Für Folgen und Familien meromorpher Funktionen sind die vorstehenden Sätze noch nicht übertragen worden, wohl aber von SAXER[1] die Ergebnisse von G. JULIA.

Hierzu einige Bezeichnungen:

Gegeben sei eine Familie $\mathfrak{F}$ von in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ des $R_4$ meromorphen Funktionen, die dort als Singularitäten höchstens Pole, aber keine außerwesentlich singulären Stellen zweiter Art besitzen. Eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{F}$: $\zeta_1 = f_1, \zeta_2 = f_2, \ldots, \zeta_m = f_m, \ldots$ heißt in $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig konvergent,* falls die $\zeta_m$ auf der RIEMANNschen Zahlenkugel gleichmäßig konvergieren; $\mathfrak{F}$ heißt in $\mathfrak{B}$ *normal,* falls man aus jeder aus Funktionen der Familie gebildeten Folge eine in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann. Punkte, in denen $\mathfrak{F}$ aufhört normal zu sein, nennen wir *irreguläre* Punkte der Familie $\mathfrak{F}$; ein solcher Punkt $P$ heißt dabei *außerwesentlich irregulär,* falls $\mathfrak{F}$ in einer vollen Umgebung von $P$ noch normal ist (außer in $P$ selbst) und die Grenzfunktion jeder dort gleichmäßig konvergenten Folge aus $\mathfrak{F}$ in $P$ höchstens eine außerwesentlich singuläre Stelle zweiter Art besitzt; alle übrigen irregulären Punkte heißen *wesentlich irregulär.*

*Für die wesentlich irregulären Punkte gelten dann wörtlich der Kontinuitätssatz* (vgl. Kap. IV, § 1) *und damit die aus ihm gefolgerten Sätze, insbesondere also die* LEVI*schen Sätze.*

## § 4. Der RUNGEsche Satz und nichtschlichte Regularitätshüllen schlichter Bereiche[2].

Der RUNGEsche Satz der Kl.Th. besagt bekanntlich, daß eine beliebige in einem schlichten, einfachzusammenhängenden und endlichen Bereiche $\mathfrak{B}^{(z)}$ der $z$-Ebene reguläre Funktion $f(z)$ sich in eine dort überall gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickeln läßt. Dieser Satz ist *nicht* mehr allgemein auf Bereiche des $R_{2n}$ übertragbar.

Wir wollen im Folgenden Bereiche über dem $R_{2n}$, für die die Aussage des RUNGEschen Satzes gültig bleibt, **RUNGEsche Bereiche** nennen — das

[1] Vgl. SAXER [1], [2]. [2] Vgl. CARTAN-THULLEN und THULLEN [3].

sind also diejenigen Bereiche, in denen jede dort reguläre Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ durch eine im ganzen Innern gleichmäßig konvergente Polynomreihe dargestellt werden kann.

Ein RUNGEscher Bereich ist offenbar immer endlich (aber nicht notwendig schlicht). Dagegen folgt aus Satz 43, *daß die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ eines* RUNGE*schen Bereiches $\mathfrak{B}$ notwendig schlicht ist* ($\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ist natürlich wieder ein RUNGEscher Bereich). Um also nachzuweisen, daß der RUNGEsche Satz in der obigen Fassung im $R_{2n}$ nicht gilt, genügt es, schlichte einfachzusammenhängende Bereiche mit nichtschlichter Regularitätshülle anzugeben.

Solche Bereiche existieren in der Tat. Betrachten wir hierzu die HARTOGSschen Körper!

Zunächst ist trivial, daß ein *vollkommener* HARTOGSscher Körper dann und nur dann schlicht ist, wenn seine Projektion schlicht ist; andererseits braucht die Projektion eines schlichten, nichtvollkommenen HARTOGSschen Körpers keineswegs schlicht zu sein. Da die Regularitätshülle eines HARTOGSschen Körpers ein vollkommener HARTOGSscher Körper mit der gleichen Projektion ist, so besitzt also insbesondere jeder *schlichte* HARTOGSsche Körper mit *nicht*schlichter Projektion sicher eine *nichtschlichte Regularitätshülle.*

*Folglich kann ein einfachzusammenhängender schlichter* HARTOGS*scher Körper mit nichtschlichter Projektion — solche Bereiche lassen sich leicht angeben*[1] *— kein* RUNGE*scher Bereich sein.*

Es ist allerdings die Frage noch vollständig offen, ob nicht wenigstens jeder einfachzusammenhängende schlichte (endliche) *Regularitätsbereich* ein RUNGEscher Bereich ist.

Welches sind nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für RUNGEsche Bereiche?

Eine erste Bedingung liefert Satz 43; nach ihm ist die Regularitätshülle eines RUNGEschen Bereiches stets konvex in bezug auf eine Klasse von Polynomen. A. WEIL[2] konnte nun kürzlich für Funktionen zweier Veränderlichen zeigen, daß diese Bedingung zugleich die einzige ist, denen ein RUNGEscher Bereich des $R_4$ unterworfen ist. Wir können also sagen:

Satz 44. *Ein Bereich $\mathfrak{B}$ des $R_4$ ist dann und nur dann ein* RUNGE*scher Bereich, falls die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ konvex ist in bezug auf eine Klasse von Polynomen.*

Eine andere (allerdings nur hinreichende) Bedingung bewies kürzlich HAMMERSTEIN[3]:

$\mathfrak{B}$ sei ein beschränkter Bereich des $R_4$; $P_m(w, z)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ sei das zu $\mathfrak{B}$ gehörige normierte System von Orthogonalpolynomen. Zu einem

[1] Vgl. THULLEN [8] und CARTAN-THULLEN.
[2] Herr WEIL hat den vollständigen Beweis noch nicht veröffentlicht.
[3] Herr HAMMERSTEIN stützt sich auf Überlegungen von Herrn BERGMANN.

geeigneten, $\mathfrak{B}$ umfassenden Sternbereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ und zu einem Weg $\mathfrak{W}$ der komplexen $t$-Ebene mit den Endpunkten $t_1$ und $t_2$ und einer Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{W})$ dieses Weges mögen zwei in den Veränderlichen $w, z, t$ stetige Funktionen:

$$W = F(w, z; t), \qquad Z = G(w, z; t); \qquad w \equiv F(w, z; t_1), \qquad z \equiv G(w, z; t_1)$$

($w, z$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$, $t$ aus $\mathfrak{U}(\mathfrak{W})$) mit folgenden Eigenschaften existieren:

1. Bei festem $t$ aus $\mathfrak{U}(\mathfrak{W})$ sind $F$ und $G$ regulär im abgeschlossenen Bereiche $\tilde{\mathfrak{B}}$ und bei festem $w$ und $z$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ als Funktionen von $t$ regulär in $\mathfrak{U}(\mathfrak{W})$.

2. Der Punkt $W = F(w, z; t)$, $Z = G(w, z; t)$ liegt für $t$ auf $\mathfrak{W}$ und $w, z$, aus $\mathfrak{B}$ wieder in $\mathfrak{B}$.

3. Es gibt ein $R > 0$, so daß die Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 \leqq R$ in $\mathfrak{B}$ liegt und dazu ein $t_3 = t_3(R) \neq t_2$ auf $\mathfrak{W}$, so daß $|F(w, z; t)|^2 + |G(w, z; t)|^2 \leqq R$ für alle $w, z$ aus $\mathfrak{B}$ und alle $t$ auf $\mathfrak{W}$ zwischen $t_2$ und $t_3$.

*Dann konvergiert stets, falls $f(w, z)$ eine im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion darstellt, die Polynomreihe $\sum a_m P_m(w, z)$ mit*

$$a_m = \int_{\mathfrak{B}} f P_m \, d\omega \qquad (d\omega = du\,dv\,dx\,dy)$$

*im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen $f(w, z)$.*

Der Satz von HAMMERSTEIN enthält insbesondere ein Ergebnis von B. ALMER, *nach welchem sich jede in einem Sternbereich reguläre Funktion $f(w, z)$ dort in eine gleichmäßig konvergente Polynomreihe entwickeln läßt.* Es folgt also weiter, *daß die Regularitätshülle eines Sternbereiches stets schlicht ist und konvex in bezug auf eine Klasse von Polynomen.*

## § 5. Konvergenzprobleme der Regularitätshüllen[1].

Konvergiert eine Folge von Bereichen $\{\mathfrak{B}_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gegen einen Bereich $\mathfrak{B}$, so taucht sofort die Frage auf, ob auch die Regularitätshüllen $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)$ gegen die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ konvergieren, ob also

$$\text{(1)} \qquad \lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m) \equiv \mathfrak{H}(\lim \mathfrak{B}_m) \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B}).$$

Mit diesem „*Konvergenzproblem der Regularitätshüllen*“ wollen wir uns im vorliegenden Paragraphen beschäftigen.

Gilt bei einem vorgelegten Bereiche $\mathfrak{B}$ für gewisse, ausgezeichnete Folgen $\{\mathfrak{B}_m\}$ — nämlich für solche Folgen, für die entweder stets $\mathfrak{B}_{m+1} \ll \mathfrak{B}_m$ oder stets $\mathfrak{B}_m \ll \mathfrak{B}_{m+1}$ — die Limesrelation, so gilt sie für *jede* $\mathfrak{B}$ approximierende Folge von Bereichen. Wir haben deshalb vor allem diese ausgezeichneten Folgen, die sog. **Hauptfolgen** zu untersuchen.

Wir werden bei dem Konvergenzproblem zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden müssen, je nachdem in der Hauptfolge $\{\mathfrak{B}_m\}$ immer $\mathfrak{B}_{m+1} \ll \mathfrak{B}_m$ oder $\mathfrak{B}_m \ll \mathfrak{B}_{m+1}$ für alle $m$.

**A. $\mathfrak{B}_{m+1} \ll \mathfrak{B}_m$.** Der Grenzbereich der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)$ sei mit $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezeichnet. $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist nicht von der gewählten Folge $\{\mathfrak{B}_m\}$, sondern nur von dem gegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$, dem Grenzbereich der $\mathfrak{B}_m$, abhängig, *und zwar ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ mit dem Durchschnitt der $\mathfrak{B}$ ganz umfassenden Regularitätsbereiche identisch.*

[1] Zu diesem Paragraphen siehe BEHNKE-THULLEN [1].

Wir wollen den Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$, falls er von der Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ *verschieden* ist, die **Nebenhülle** $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ nennen. Die Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ ist also (falls sie existiert) als Durchschnitt der $\mathfrak{B}$ *ganz* umfassenden Regularitätsbereiche sicher selbst wieder ein Regularitätsbereich (man achte darauf, daß zu einem Regularitätsbereich, der Nebenhülle eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist, natürlich keine Nebenhülle mehr existiert).

Schon der folgende Satz zeigt, daß es tatsächlich Bereiche mit Nebenhüllen gibt; es folgt also, daß der Durchschnitt der einen Bereich umfassenden Regularitätsbereiche nicht immer mit dem Durchschnitt der *ganz* umfassenden Regularitätsbereiche identisch zu sein braucht. Wir formulieren den Satz für Bereiche des $R_4$:

Satz 45. *Läßt sich zu der Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ des $R_4$ eine analytische Ebene angeben, die aus $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ein Flächenstück mit isolierten Randpunkten ausschneidet, so besitzt $\mathfrak{B}$ eine Nebenhülle.*

Als einfaches Beispiel sei hierzu der HARTOGSsche Körper

$$(\mathfrak{B}_0) \qquad |w| < 1, \qquad |z| < |w|$$

genannt. $\mathfrak{B}_0$ ist selbst ein Regularitätsbereich, also $\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$. Die Ebene $z = 0$ schneidet den punktierten Einheitskreis heraus, $\mathfrak{B}_0$ genügt somit den Voraussetzungen von Satz 45. Man zeigt leicht, daß der Einheits-Dizylinder $\mathfrak{D}_0$: $|w| < 1$, $|z| < 1$ die zu $\mathfrak{B}_0$ gehörige Nebenhülle ist. Insbesondere muß also bei jeder von außen gegen $\mathfrak{B}_0$ konvergierenden Hauptfolge $\{\mathfrak{B}_m\}$ die Folge der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)$ gegen $\mathfrak{D}_0$ konvergieren. Betrachten wir etwa die Folge

$$(\mathfrak{B}_m) \qquad |w| < 1 + \frac{1}{m}, \qquad |z| < |w| + \frac{1}{m}. \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Die Regularitätshüllen der $\mathfrak{B}_m$ sind (vgl. Satz 41):

$$(\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)) \qquad |w| < 1 + \frac{1}{m}, \qquad |z| < 1 + \frac{1}{m}. \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Es ist, wie verlangt, $\mathfrak{D}_0 \equiv \lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m) \not\equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$.

Daß auch Bereiche vom Zusammenhang der Kugel eine Nebenhülle besitzen können, zeigt der nichtbeschränkte Dizylinder: $|w| < 1$ ($z$ beliebig). Da jede in $|w| < 1$ und in dem unendlichfernen Randpunkt $(0, \infty)$ reguläre Funktion eine Konstante ist (vgl. Satz 27), besitzt $|w| < 1$ den ganzen erweiterten Raum als Nebenhülle.

Auf der andern Seite läßt sich eine ganze Klasse von Bereichen angeben, die sicher keine Nebenhülle besitzen, für die also stets die Limesrelation (1) erfüllt ist, falls $\mathfrak{B}_m > \mathfrak{B}$. Es gilt:

Satz 46. *Ist die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ **sternartig** und ihr Rand stetig, so besitzt $\mathfrak{B}$ keine Nebenhülle.* Insbesondere hat also ein Bereich, dessen Regularitätshülle ein eigentlicher *Kreiskörper* mit stetigem Rande ist, nie eine Nebenhülle.

Wir nennen hierbei den Rand eines Sternbereiches *stetig*, falls bei beliebiger stetiger Drehung eines durch den zugrunde gelegten Symmetriepunkt gehenden Halbstrahles $\mathfrak{s}$ die Länge der durch $\mathfrak{s}$ ausgeschnittenen Strecke sich stetig ändert.

Eigenschaften der Nebenhüllen. Fast alle Eigenschaften der Regularitätshüllen lassen sich auf Nebenhüllen übertragen; man hat nur von den vorkommenden Funktionen zu verlangen, daß sie sich nicht allein im Innern der gegebenen Bereiche, sondern auch noch in sämtlichen Randpunkten regulär verhalten. So gilt:

(I). Nimmt eine im Innern und auf dem Rande des Bereiches $\mathfrak{B}$ meromorphe Funktion $F$ dort den Wert $a$ nicht an, so ist $F$ auch im Innern der Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ meromorph und dort verschieden von $a$.

(II). Gegeben sei ein Bereich $\mathfrak{B}_1$ mit der Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_1)$; existiert dann eine analytische Transformation $T$, die $\mathfrak{B}_1$ topologisch auf einen Bereich $\mathfrak{B}_2$ abbildet und zugleich auf dem Rande von $\mathfrak{B}_1$ noch eineindeutig und regulär ist, so besitzt auch $\mathfrak{B}_2$ eine Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_2)$, und ferner wird $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_1)$ durch $T$ eineindeutig und analytisch auf $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_2)$ abgebildet.

Daß dieser Satz nicht zu gelten braucht, wenn $T$ auf dem Rande von $\mathfrak{B}_1$ nicht mehr eineindeutig und regulär ist, läßt sich an einem einfachen Beispiele zeigen[1].

(III). Ist $\mathfrak{R}$ ein Regularitätsbereich, der den Bereich $\mathfrak{B}$ *ganz* umfaßt, so haben der Bereich $\mathfrak{B}$ und seine Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ die gleiche Minimaldistanz in bezug auf $\mathfrak{R}$.

Das Problem der Nebenhüllen hängt unmittelbar mit einer anderen interessanten Frage der Theorie der Regularitätsbereiche zusammen, nämlich mit der Frage, *ob ein gegebener Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ sich stets von außen durch eine Hauptfolge von Regularitätsbereichen approximieren läßt.* Wie man leicht sieht, ist dies dann und nur dann möglich, wenn $\mathfrak{R}$ keine Nebenhülle besitzt. Ein den Bedingungen des Satzes 45 genügender Regularitätsbereich ist also nicht als Grenzbereich einer Folge ganz umfassender Regularitätsbereiche darstellbar. *Dagegen läßt sich ein Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ stets von innen durch eine Hauptfolge von Regularitätsbereichen approximieren* [dies folgt unmittelbar aus der Eigenschaft (III) (Folg. 3) der Regularitätshüllen].

**B. $\mathfrak{B}_m \ll \mathfrak{B}_{m+1}$.** Während im Fall A der Grenzbereich der $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)$ ($\mathfrak{B}_{m+1} \ll \mathfrak{B}_m$) als Durchschnitt von Regularitätsbereichen selbst wieder ein Regularitätsbereich war, braucht dies hier keineswegs immer zuzutreffen, nämlich stets dann nicht, wenn $\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m) \not\equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$. Ist aber $\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m)$ ein Regularitätsbereich, so ist notwendig $\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m) \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$. Das Konvergenzproblem führt also im Falle B auf die Frage zurück:

*Unter welchen Bedingungen ist der Grenzbereich $\mathfrak{R}_0$ einer Hauptfolge $\{\mathfrak{R}_m\}$ von Regularitätsbereichen ($\mathfrak{R}_m \ll \mathfrak{R}_{m+1}$) selbst wieder ein Regularitätsbereich?*

Es gelingt für mehrere Klassen von Bereichen diese Fragen zu beantworten. Unter anderm gelten die Sätze:

[1] Vgl. die Transformation $S_0$ auf S. 20.

Satz 47. *Ist der Grenzbereich* $\mathfrak{R}_0$ *einer Hauptfolge* $\{\mathfrak{R}_m\}$ *von Regularitätsbereichen ein Sternbereich oder ein eigentlicher Kreiskörper (oder ein eigentlicher schlichter, einfachzusammenhängender* HARTOGS*scher Körper) mit stetigem Rand, so ist* $\mathfrak{R}_0$ *ein Regularitätsbereich.*

Im Falle eines Sternbereiches ist der Beweis sehr einfach zu führen. Ist $\mathfrak{R}_0$ ein Kreiskörper, so zeigt man zunächst mit Hilfe des Kontinuitätssatzes, daß $\mathfrak{R}_0$ sternartig ist, woraus dann die Behauptung folgt (analog für einen HARTOGSschen Körper).

Satz 48. *Ist* $\{\mathfrak{R}_m\}$ *eine Hauptfolge von endlichen Regularitätsbereichen und* $\mathfrak{R}_0 \equiv \lim \mathfrak{R}_m$, *ferner jeder der Bereiche* $\mathfrak{R}_m$ *konvex in bezug auf die Klasse aller in dem Grenzbereich* $\mathfrak{R}_0$ *noch regulären Funktionen, so ist* $\mathfrak{R}_0$ *ein Regularitätsbereich. Insbesondere approximiert also eine Hauptfolge von Regularitätsbereichen, die zugleich* RUNGE*sche Bereiche (etwa eigentliche Kreiskörper) sind, stets einen Regularitätsbereich.*

Aus Satz 48 folgt nun umgekehrt eine notwendige Bedingung für Hauptfolgen von Regularitätsbereichen, deren Grenzbereich kein Regularitätsbereich ist:

*Ist der Grenzbereich* $\mathfrak{R}_0$ *einer Hauptfolge von endlichen Regularitätsbereichen* $\{\mathfrak{R}_m\}$ *kein Regularitätsbereich, so gibt es ein festes* $m_0$, *so daß in jeder Klasse* $\mathsf{K}$, *in bezug auf welche irgendeiner der Bereiche* $\mathfrak{R}_m$ $(m > m_0)$ *konvex ist, mindestens eine Funktion existiert, die im Innern von* $\mathfrak{R}_0$ *singulär wird.*

Aus den Sätzen dieses Paragraphen ergibt sich insbesondere noch:

Satz 49. *Ist* $\mathfrak{B}$ *ein beschränkter Sternbereich mit stetigem Rande, so gilt für jede den Bereich* $\mathfrak{B}$ *approximierende Folge von Bereichen* $\{\mathfrak{B}_m\}$: $\lim \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_m) \equiv \mathfrak{H}(\lim \mathfrak{B}_m) \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$.

## Siebentes Kapitel.

# Abbildungstheorie[1].

Am Ende des ersten Kapitels haben wir den Begriff der analytischen Abbildungen $2n$-dimensionaler Bereiche eingeführt und die erste Grundlage für ihre Behandlung geschaffen. Dieses Kapitel dient dem ausführlichen Studium jener Abbildungen.

Wie wir bereits im ersten Kapitel betonten (S. 15), werden wir hier öfters auch im Innern verzweigte Bereiche zulassen müssen. Wenn daher nichts anderes vermerkt ist, sind die in diesem Kapitel vorgegebenen Bereiche stets als beliebig, verzweigt oder nichtverzweigt, aufzufassen. Man erinnere sich daran, daß ein innerer Verzweigungspunkt nach Definition uniformisierbar ist.

[1] Eine Reihe von Sätzen der §§ 1 bis 3 dieses Kapitels gelten auch noch für solche Transformationen, von deren Funktionen nur vorausgesetzt ist, daß ihre ersten partiellen (reellen) Ableitungen existieren und stetig sind.

Wir sagen von einer analytischen Transformation $S$, daß sie schlechthin in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ *topologisch* ist, wenn sie $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ abbildet. Sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ nicht verzweigt, so ist $S$ dann und nur dann topologisch, wenn in keinem Punkte aus $\mathfrak{B}$ die Funktionaldeterminante von $S$ verschwindet[1].

Wir schreiben wieder $\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$ (ebenso bei einer Transformation mit Ausnahmepunkten); ist ferner $P$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}$, $P^*$ sein Bildpunkt, so schreiben wir entsprechend $P^* = S(P)$.

Üben wir zunächst auf $\mathfrak{B}$ die Transformation $S$, dann auf den Bildbereich die Transformation $T$ aus, so entsteht eine neue Transformation des Bereiches $\mathfrak{B}$, die wir mit $TS$ bezeichnen. *Der Buchstabe $I$ sei allein für die identische Transformation vorbehalten.*

## § 1. Eindeutigkeitssätze.

In der Kl.Th. gilt — vor allem auf Grund des SCHWARZschen Lemmas —, daß eine Abbildung eines Bereiches $\mathfrak{B}^{(z)}$ auf einen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}^{*(z)}$ völlig festgelegt ist, wenn zu einem Punkte $O$ aus $\mathfrak{B}^{(z)}$ der Bildpunkt $O^*$ in $\mathfrak{B}^{*(z)}$ und ferner die „Richtung" $\operatorname{arc} f'(0)$ angegeben sind. Ein Satz von H. CARTAN zeigt nun, daß im $R_{2n}$ in keinem Falle die Freiheitsgrade für die eineindeutigen und analytischen Abbildungen beschränkter Bereiche größer sind. Er bewies:

Satz 50[2]. *Der Bereich $\mathfrak{B}$ enthalte in seinem Innern einen Punkt $O$ mit den Koordinaten* $(0, 0, \ldots, 0)$ *und sei in $O$ nicht verzweigt. Bilden dann die in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen*[3]

$$(S)\qquad \begin{cases} Z_1 = f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 + \cdots, \\ Z_2 = f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_n = f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_n + \cdots \end{cases}$$

*den Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen in seinem Innern liegenden, beschränkten Bereich $\mathfrak{B}_0$ ab, so ist notwendig*

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv z_1, \quad f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv z_2, \quad \ldots, \quad f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv z_n.$$

Der Beweis von CARTAN überrascht durch seine Kürze und Einfachheit: Zum Beweis nehmen wir an, der Satz wäre falsch. Dann gibt es in der Entwicklung der $f_i$ in homogene Polynome (Diagonalreihe):

$$(S)\qquad f_i \equiv z_i + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(i)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ein erstes $k^{(i)}$, so daß alle $P_k^{(i)} \equiv 0$ für $k^{(i)} < k_0^{(i)}$, aber $P_{k_0^{(i)}}^{(i)} \not\equiv 0$. Bildet man die Transformationen $S^2, S^3, \ldots, S^m, \ldots$, so lauten die zugehörigen Entwicklungen:

$$(S^m)\qquad f_i^{(m)} \equiv z_i + m\, P_{k_0^{(i)}}^{(i)} + \cdots. \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] Vgl. Kap. I, § 5; siehe auch CARATHÉODORY [4].

[2] Vgl. H. CARTAN [5]. Satz 50 gilt wörtlich für beliebige „innere" Abbildungen eines Bereiches; vgl. § 3 dieses Kapitels.

[3] In den Entwicklungen der Abbildungsfunktionen schreiben wir im folgenden die konstanten und die linearen Glieder stets explizit, die höheren Glieder jedoch nur nach Bedarf an.

Da nach Voraussetzung $S$, also erst recht die $S^m$, den Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen beschränkten Bereich abbilden, so sind alle $f_i^{(m)}$ gleichmäßig beschränkt; damit gilt aber auch $\left| m P_{k_0^{(i)}}^{(i)} \right| < M$ für *alle* $m$ (vgl. die Integraldarstellung auf S. 43). Dies ist aber nur möglich, falls $P_{k_0^{(i)}}^{(i)} \equiv 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme, w. z. b. w.

Es ergibt sich fast unmittelbar der Eindeutigkeitssatz von CARATHÉODORY:

Satz 51[1]. *Es existiert höchstens eine eineindeutige, analytische Abbildung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}^*$, die einen Punkt $O$ aus $\mathfrak{B}$ in einen Punkt $O^*$ aus $\mathfrak{B}^*$ überführt und deren erste partielle Ableitungen in $O$ vorgeschriebene Werte annehmen. Es ist dabei vorausgesetzt, daß weder $O$ noch $O^*$ ein Verzweigungspunkt ist.*

Sind nämlich $S$ und $T$ zwei Abbildungen von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ mit $O^* = S(O) = T(O)$, stimmen ferner die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen von $S$ und $T$ in $O$ überein, so ist $ST^{-1}$ eine Abbildung von $\mathfrak{B}^*$ auf sich, die in $O^*$ den Voraussetzungen von Satz 50 genügt. Es ist also $I = ST^{-1}$ oder $S = T$, w. z. b. w.

*Die Sätze dieses Paragraphen gelten nicht mehr, falls $\mathfrak{B}^*$ ein nichtbeschränkter Bereich ist.* BIEBERBACH[2] gibt eine Transformation $T$ an, die den endlichen $R_4$ eineindeutig und analytisch auf einen echten Teilbereich von sich abbildet. Die Entwicklungen der Funktionen von $T$ um $(0, 0)$ beginnen dabei so:

$$(T) \qquad W = w + \cdots, \qquad Z = z + \cdots.$$

$T^2$ ist wieder eine Abbildung derselben Art. Wir bekommen also gleich eine unendliche Folge von Transformationen, die den endlichen $R_4$ eineindeutig auf Teilbereiche von sich abbilden und deren Abbildungsfunktionen bei der Entwicklung um $(0, 0)$ wie die der Identität beginnen.

## § 2. Folgen von Abbildungen[3].

CARATHÉODORY und H. CARTAN haben gezeigt, daß es für die nähere Kenntnis der einzelnen Abbildungen gegebener Bereiche sehr aufschlußreich ist, Folgen von Abbildungen, vor allem die Folgen der Potenzen $S, S^2, S^3, \ldots, S^m, \ldots$ einer festen Abbildung $S$ zu betrachten.

Wir sagen: Die in $\mathfrak{B}$ analytischen *Transformationen* $S_m$:

$$(S_m) \qquad Z_i = f_i^{(m)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

*konvergieren in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig* gegen die Grenztransformation $S$:

$$(S) \qquad Z_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

falls die Funktionen $f_i^{(m)}$ bei jeweils festem $i$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen $f_i$ konvergieren.

[1] Vgl. CARATHÉODORY [**4**].

[2] Vgl. BIEBERBACH [**2**]; Herr BIEBERBACH stützt sich auf ein Ergebnis von FATOU; siehe FATOU [**1**], [**2**].

[3] Zu diesem Paragraphen vgl. CARATHÉODORY [**4**] und H. CARTAN [**8**].

Carathéodory benutzt statt des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz den hier damit äquivalenten Begriff der *stetigen Konvergenz.* Obwohl dieser Begriff bei den Beweisen der Sätze manche Vereinfachungen bietet, haben wir uns auf den gebräuchlicheren Begriff der gleichmäßigen Konvergenz beschränkt[1].

Da mit den $f_i^{(m)}$ auch ihre Ableitungen gleichmäßig konvergieren, folgt ohne weiteres, daß die Funktionaldeterminanten der $S_m$ gleichmäßig gegen die Funktionaldeterminante von $S$ konvergieren. Daraus ergeben sich sofort über die Möglichkeit des Verschwindens der Funktionaldeterminante von $S$ starke Einschränkungen. Verschwinden die Funktionaldeterminanten der $S_m$ in $\mathfrak{B}$ nicht, so ist die Funktionaldeterminante der Grenztransformation $S$ entweder in $\mathfrak{B}$ identisch Null oder überall in $\mathfrak{B}$ von Null verschieden. So folgt jetzt leicht die wichtige Aussage:

Satz 52. *Die Folge $S_1, S_2, \ldots$ von Transformationen möge einen beschränkten, unverzweigten Bereich $\mathfrak{B}$ auf ebensolche Bereiche eineindeutig und analytisch abbilden und ferner im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergieren. Dann ist die Grenztransformation $S$ entweder ausgeartet oder wieder eine topologische und analytische Abbildung von $\mathfrak{B}$. Vermitteln dabei die $S_m$ schlichte Abbildungen, so ist auch die Grenztransformation schlicht.*

Dieser Satz gestattet eine gewisse Umkehrung. Weiß man nämlich von der Grenztransformation $S$ einer gleichmäßig konvergenten Folge $S_m$ von analytischen Abbildungen, daß sie topologisch ist, so bilden auch die $S_m$ von einem $m_0$ an einen beliebig, aber fest vorgegebenen, ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ topologisch ab; genauer:

Satz 53. *$\mathfrak{B}$ sei ein endlicher, unverzweigter Bereich; die in $\mathfrak{B}$ analytischen Transformationen $S_1, S_2, \ldots, S_m, \ldots$ mögen im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen eine Transformation $S$ konvergieren, die $\mathfrak{B}$ topologisch auf einen unverzweigten Bereich $\mathfrak{B}^*$ abbildet. Sind dann $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ zwei ganz in $\mathfrak{B}$ liegende Teilbereiche und liegt wiederum $\mathfrak{B}_0$ ganz in $\mathfrak{B}_1$, so existiert stets eine ganze positive Zahl $m_0$, so daß für jedes $m \geqq m_0$ gilt:*

1. *$S_m$ bildet $\mathfrak{B}_1$ topologisch ab.*
2. *Der Bereich $S_m(\mathfrak{B}_1)$ ist ein Teilbereich von $\mathfrak{B}^*$.*
3. *Der Bereich $S(\mathfrak{B}_0)$ ist ein Teilbereich von $S_m(\mathfrak{B}_1)$.*

Die wesentliche Frage ist nun, unter welchen Bedingungen die Grenztransformation einer gegebenen Folge von Abbildungen nicht entartet. Mit Hilfe des Begriffes des Kernes[2] hat Carathéodory bei schlichten Bereichen ein Kriterium dafür angegeben:

Satz 54. *Die Transformationen $S_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ mögen die beschränkten und schlichten Bereiche $\mathfrak{B}_m$ eineindeutig und analytisch in ebensolche Bereiche $\mathfrak{B}_m^*$ überführen $(m = 1, 2, \ldots)$. Die Folge der Be-*

[1] Über den Begriff der stetigen Konvergenz siehe Carathéodory, Math. Ann. Bd. 101 (1929) S. 518ff.

[2] Vgl. Kap. I, § 2.

*reiche $\mathfrak{B}_m$ konvergiere dabei gegen einen nichtleeren Kern $\mathfrak{B}$ mit dem Grundpunkt O, in dem sowohl die Abbildungsfunktionen sowie deren erste partielle Ableitungen eindeutige Grenzwerte besitzen mögen. Unter diesen Voraussetzungen konvergieren die Abbildungen $S_m$ dann und nur dann in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen eine nichtausgeartete Transformation $S$, wenn die Folge der $\mathfrak{B}_m^*$ gegen einen nichtleeren Kern $\mathfrak{B}^*$ mit dem Grundpunkt $O^* = S(O)$ konvergiert. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}^* = S(\mathfrak{B})$.*

Gegenüber den bisher üblichen Voraussetzungen ist also hier noch eine Verallgemeinerung eingetreten, indem statt *eines* Grundbereiches $\mathfrak{B}$ eine Folge von abzubildenden Bereichen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, die nicht miteinander identisch zu sein brauchen, vorgegeben ist.

## § 3. Innere Abbildungen[1].

Unter den Abbildungen eines Bereiches $\mathfrak{B}$ interessieren vor allem die „inneren" Abbildungen, mit deren Hilfe es insbesondere gelingt, eine sehr wichtige Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas aufzustellen.

Wir sagen: $S$ ist eine **innere Abbildung** des Bereiches $\mathfrak{B}$, wenn $S$ den Bereich $\mathfrak{B}$ analytisch auf einen in $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}_0$ und evtl. noch auf in $\mathfrak{B}$ liegende Randpunkte von $\mathfrak{B}_0$ abbildet (oder im Falle einer ausgearteten Transformation auf eine in $\mathfrak{B}$ liegende Mannigfaltigkeit niederer Dimension), d. h. genauer: wenn man jedem Punkte $S(P)$ eindeutig und stetig einen Punkt $\tilde{P}$ aus $\mathfrak{B}$ so zuordnen kann, daß $\tilde{P}$ und $S(P)$ stets gleiche Koordinaten besitzen[2].

Ein Beispiel einer inneren Abbildung ist die auf S. 20 erwähnte Transformation $W = w \cdot z$, $Z = z$ des Einheits-Dizylinders.

Eine innere Abbildung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ soll ein analytischer Automorphismus oder kurz **Automorphismus des Bereiches $\mathfrak{B}$** heißen, wenn sie $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf sich selbst abbildet. Die Grenztransformationen einer Folge von Automorphismen kann man leicht übersehen. Es gilt:

Satz 55. *Die Grenztransformation $S$ einer gleichmäßig konvergenten Folge von Automorphismen eines beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$ ist entweder wieder ein Automorphismus von $\mathfrak{B}$ oder eine ausgeartete Transformation, die $\mathfrak{B}$ auf seinen Rand oder einen Teil von ihm abbildet.*

Führt also $S$ auch nur einen inneren Punkt aus $\mathfrak{B}$ wieder in einen inneren Punkt über, so kann $S$ nicht entarten. Der Satz ist bei schlichten Bereichen eine unmittelbare Folge von Satz 54.

Von CARATHÉODORY und H. CARTAN sind nun Kriterien aufgestellt, die angeben, unter welchen Bedingungen eine innere Transformation ein Automorphismus ist. Das wichtigste dieser Kriterien lautet:

Satz 56. *$S$ sei eine innere Abbildung eines beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$. Konvergiert eine Folge von Potenzen $S^{p_1}, S^{p_2}, \ldots, S^{p_m}, \ldots$ $(p_1 < p_2 < \cdots)$*

[1] Vgl. CARATHÉODORY [4], H. CARTAN [8] und die ältere Arbeit H. CARTAN [3].

[2] Siehe auch die Definition von „$\mathfrak{B}_1$ liegt im Innern von $\mathfrak{B}_2$", Kap. I, § 2.

*in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen eine nichtentartete Transformation $T$, so ist sowohl $S$ wie auch $T$ ein Automorphismus von $\mathfrak{B}$, ferner konvergiert die Folge $S^{p_{m+1}-p_m}$ gleichmäßig in $\mathfrak{B}$ gegen die Identität.*

Eine Anwendung dieses Satzes betrifft eine Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas. In der Kl.Th. folgt aus diesem unmittelbar: *Für jede innere Transformation $Z = f(z)$, $f(0) = 0$, des Einheitskreises ist $|f'(0)| \leqq 1$. Ist $|f'(0)| = 1$, so ist die gegebene innere Transformation ein Automorphismus.* Diese beiden Aussagen lassen sich jetzt wörtlich auf mehrere Veränderliche übertragen:

Satz 57. *Ist $S$ eine innere Abbildung des beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$, die den inneren Punkt $O$ fest läßt, und ist $\mathfrak{B}$ in $O$ nicht verzweigt, so ist der Absolutbetrag der zugehörigen Funktionaldeterminante in $O$ nie größer als $1$ und dann und nur dann gleich $1$, wenn $S$ ein Automorphismus ist.*

Da nämlich die Funktionaldeterminante von $S$ und ihrer sämtlichen Potenzen in $O$ beschränkt ist, ist notwendig ihr Absolutbetrag in $O$ kleiner oder gleich $1$. Ist dieser nun gleich $1$, so genügt eine geeignete Folge von Potenzen der Transformation $S$ den Voraussetzungen von Satz 56, es ist also $S$ ein Automorphismus. Ist andererseits $S$ als Automorphismus mit dem Fixpunkt $O$ vorausgesetzt, so kann nach Satz 55 eine gleichmäßig konvergente Teilfolge der Potenzen von $S$ nur einen Automorphismus als Limes besitzen. Dies ist aber nur dann möglich, falls der Absolutbetrag der Funktionaldeterminante im Fixpunkt den Wert $1$ hat, w. z. b. w.

Satz 57 sagt unter anderm aus, daß eine innere Abbildung $T$ eines beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$ bereits dann ein Automorphismus von $\mathfrak{B}$ ist, falls $T$ einen (wenn auch noch so kleinen) Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf sich abbildet und dabei ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}_0$, der kein Verzweigungspunkt ist, in sich übergeht.

Eine weitere einfache Folge von Satz 57 ist:

Satz 58. *$\mathfrak{B}_0$ sei ein den Punkt $O$ enthaltender, ganz im beschränkten, unverzweigten Bereiche $\mathfrak{B}$ liegender Teilbereich. $S$ sei eine beliebige innere Transformation von $\mathfrak{B}$ mit dem Fixpunkte $O$ und $\Delta_S^{(0)}$ der Wert der zugehörigen Funktionaldeterminante in $O$. Dann gibt es*

*1. eine positive Zahl $a < 1$, so daß jede innere Transformation $S$, für die $|\Delta_S^{(0)}| > a$, den Bereich $\mathfrak{B}_0$ topologisch abbildet,*

*2. eine positive Zahl $a' < 1$, so daß stets, sobald $|\Delta_S^{(0)}| > a'$, der Bereich $\mathfrak{B}_0$ das topologische Bild eines Teilbereiches von $\mathfrak{B}$ ist.*

Hier folge noch eine andere Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas auf Funktionen des $R_4$:[1]

Sind die beiden Funktionen $f(w, z)$ und $g(w, z)$ in der Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 < 1$ regulär und ist dort $|f|^2 + |g|^2 < 1$ und ferner $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, so ist $|f(w, z)|^2 + |g(w, z)|^2 < |w|^2 + |z|^2$.

[1] Siehe H. CARTAN [3].

Der zweite Teil des Lemmas läßt sich dagegen *nicht* übertragen. H. CARTAN gibt als Beispiel das Funktionspaar $f \equiv w + \frac{z^2}{4}$, $g \equiv \frac{z}{2}$ an. Für $z = 0$ und $w$ beliebig gilt jetzt zwar $|f|^2 + |g|^2 = |w|^2 + |z|^2$, aber nicht in den übrigen Punkten.

Satz 56 und seine Folgerungen gelten — wie ja auch in der Kl.Th. — sicher nicht mehr allgemein für unbeschränkte, aber endliche Bereiche.

## § 4. Maximalteiler[1].

Der Bereich $\mathfrak{B}$ sei beschränkt, enthalte den Koordinatenanfang $O$ und sei dort unverzweigt. $\mathfrak{B}_0$ sei ein in $\mathfrak{B}$ liegender Bereich mit den gleichen Eigenschaften. $\mathfrak{B}_0$ heißt dann nach CARATHÉODORY ein **Maximalteiler von $\mathfrak{B}$**, wenn jede Transformation mit dem Fixpunkt $O$, die $\mathfrak{B}_0$ eineindeutig und analytisch auf einen gleichfalls noch in $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}_0^*$ abbildet, eine Funktionaldeterminante besitzt, deren Absolutbetrag in $O$ nie größer als 1 ist[2]. Es ist also nicht möglich (vgl. Satz 57), eine Transformation mit dem Fixpunkt $O$ anzugeben, die einen Maximalteiler $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ eineindeutig und analytisch auf einen $\mathfrak{B}_0$ umfassenden, aber noch in $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}_0^* \not\equiv \mathfrak{B}_0$ abbildet. Andererseits gibt es zu jedem beliebigen beschränkten Bereiche $\tilde{\mathfrak{B}}$ über dem $R_{2n}$ einen Maximalteiler $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$, auf den $\tilde{\mathfrak{B}}$ eineindeutig und analytisch abgebildet werden kann.

Um ein „vollständiges Repräsentantensystem" der beschränkten Bereiche über dem $R_{2n}$ zu gewinnen, kommt es also darauf an, ein vollständiges System der Maximalteiler eines beliebig vorgegebenen Grundbereiches — etwa des Polyzylinders — aufzustellen.

Man beachte, daß (nach Satz 57) der Grundbereich $\mathfrak{B}$ nie auf einen seiner Maximalteiler $\mathfrak{B}_0 \not\equiv \mathfrak{B}$ so abbildbar ist, daß dabei $O$ in sich übergeht.

Daß der Begriff des Maximalteilers in der Abbildungstheorie oft mit Erfolg verwandt werden kann, zeigt der mit seiner Hilfe geführte elementare Beweis von CARATHÉODORY, daß Hyperkugel und Dizylinder sich nicht eineindeutig und analytisch aufeinander abbilden lassen.

Ist der Grundbereich $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich, so gelingt es unmittelbar, eine Klasse von Maximalteilern anzugeben. Es gilt nämlich:

Satz 59. *Ist der Bereich $\mathfrak{B}_0$ ein Maximalteiler des Regularitätsbereiches $\mathfrak{B}$, so ist jeder Bereich $\mathfrak{B}_0'$, der die gleiche Regularitätshülle wie $\mathfrak{B}_0$ besitzt und $O$ als inneren Punkt enthält, ebenfalls ein Maximalteiler von $\mathfrak{B}$.*

Setzen wir $\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{B}$ voraus, so folgt:

*Jeder Bereich ist Maximalteiler seiner Regularitätshülle.*

---

[1] Vgl. CARATHÉODORY [4] und BEHNKE-THULLEN [2].

[2] Man beachte, daß ein Maximalteiler nur definiert ist in bezug auf einen vorgegebenen Grundbereich und einen vorgegebenen Bezugspunkt $O$.

Wir wollen im folgenden einen Bereich $\mathfrak{B}_0$, der den Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ zur Regularitätshülle hat und den Bezugspunkt $O$ enthält, einen **trivialen Maximalteiler** von $\mathfrak{B}$ nennen.

Ein trivialer Maximalteiler $\mathfrak{B}_0$ besitzt die Eigenschaft, daß er bei beliebiger Wahl eines anderen Bezugspunktes $O'$ (der noch in $\mathfrak{B}_0$ liegt) Maximalteiler des Grundbereiches $\mathfrak{B}$ in bezug auf den neuen Bezugspunkt $O'$ bleibt und ferner, daß er bei einer eineindeutigen und analytischen Transformation von $\mathfrak{B}$ auf einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ in einen (trivialen) Maximalteiler von $\mathfrak{B}^*$ übergeht. Man beachte, daß diese Aussage keineswegs für beliebige Maximalteiler bewiesen ist.

Im Zusammenhang mit Satz 59 sei auch noch auf folgende Frage aufmerksam gemacht:

$\mathfrak{B}_0$ sei ein Maximalteiler des Bereiches $\mathfrak{B}$; *ist dann stets auch die Regularitätshülle* $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ *des Bereiches* $\mathfrak{B}_0$ *ein Maximalteiler der Regularitätshülle* $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ *des Grundbereiches* $\mathfrak{B}$? Ist $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich, so ist die Lösung trivial; in diesem Falle gilt nämlich $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0) < \mathfrak{B}$, woraus unmittelbar folgt, daß auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ ein Maximalteiler von $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ sein muß.

Triviale Maximalteiler des Dizylinders. Beispiele trivialer Maximalteiler des Dizylinders $\mathfrak{D}$: $|w| < 1, |z| < 1$ sind etwa sämtliche eigentlichen, im Innern von $\mathfrak{D}$ liegenden REINHARDTschen Körper, die $(0, 0)$ als Mittelpunkt und $(1, 1)$ als einen Randpunkt besitzen. Zwei triviale Maximalteiler des Dizylinders lassen sich nullpunktstreu höchstens durch die triviale Transformation $W = we^{i\vartheta}, Z = ze^{i\varphi}$ aufeinander abbilden. Erwähnt sei, daß jeder triviale Maximalteiler des Dizylinders ein (nichttrivialer) Maximalteiler der umschriebenen Hyperkugel ist (folgt aus Satz 59 und der Tatsache, daß der Dizylinder ein Maximalteiler der Hyperkugel ist).

Satz 59 läßt sich sicher nicht auf Nebenhüllen übertragen. Auch gilt die Theorie der Maximalteiler nicht mehr allgemein für nichtbeschränkte Grundbereiche, so sicher nicht für den endlichen $R_{2n}$.

## § 5. Der CARTANsche Abbildungssatz[1].

Wir sahen früher, daß die Rolle des Kreises der Kl.Th. im $R_{2n}$ im allgemeinen von den eigentlichen Kreiskörpern übernommen wird. Deshalb ist in der Abbildungstheorie vor allem die Frage zu entscheiden, wann ein Bereich auf einen Kreiskörper abgebildet werden kann. Wir beschränken uns dabei in diesem und den beiden nächsten Paragraphen auf den Raum der beiden Veränderlichen $w$ und $z$. Doch liegt keine prinzipielle Schwierigkeit für eine Übertragung des Folgenden auf den $R_{2n}$ vor.

Die eigentlichen Kreiskörper lassen eine mindestens einparametrige Gruppe von Automorphismen mit einem festen inneren Punkte $O$ — näm-

[1] Vgl. H. CARTAN [5].

lich dem Mittelpunkt — als Fixpunkt zu; das gleiche gilt also auch für alle eineindeutigen und analytischen Bilder dieser Körper. Zur Beantwortung unserer Frage werden wir daher zunächst bei vorgegebenem Bereiche $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Automorphismen zu betrachten haben, die einen gegebenen inneren Punkt $O$ festlassen[1] (nicht jeder Bereich hat außer der Identität überhaupt Automorphismen[2]). Eine solche Gesamtheit von Automorphismen bildet eine Gruppe $G$. Aus Satz 55 folgt ferner, daß jede gleichmäßig konvergente Folge von Automorphismen der Gruppe $G$ wieder gegen eine Transformation aus $G$ konvergiert, *daß also $G$ eine geschlossene Gruppe ist.*

Zur Vereinfachung denken wir uns den Koordinatenanfang stets im Fixpunkt $O$ der Gruppe $G$ gelegen. Entwickelt man dann die Abbildungsfunktionen zweier verschiedener Automorphismen $S_1$ und $S_2$ aus $G$ um $O$:

$$(S_1) \qquad f_1(w, z) \equiv a_1 w + b_1 z + \cdots, \qquad g_1(w, z) \equiv c_1 w + d_1 z + \cdots,$$

$$(S_2) \qquad f_2(w, z) \equiv a_2 w + b_2 z + \cdots, \qquad g_2(w, z) \equiv c_2 w + d_2 z + \cdots,$$

so können wegen des Eindeutigkeitssatzes (§ 1) die Koeffizienten der linearen Glieder von $S_1$ nicht alle mit den entsprechenden Koeffizienten von $S_2$ übereinstimmen. Führen wir ferner zwei solcher Automorphismen $S_1$ und $S_2$ hintereinander aus, so setzen sich die linearen Glieder des Automorphismus $S_1 S_2$ aus den linearen Gliedern der gegebenen Automorphismen in üblicher Weise zusammen. Deshalb gilt:

Satz 60. *Die Gruppe $G$ aller Automorphismen eines beschränkten Bereiches $\mathfrak{B}$, die einen inneren Punkt $O$ festlassen (in dem $\mathfrak{B}$ nicht verzweigt ist), ist isomorph einer geschlossenen Gruppe $\Gamma$ homogener linearer Transformationen; die Determinante jeder Transformation aus $\Gamma$ ist vom Absolutbetrag* 1.

Somit gelingt es, die Untersuchung der Gruppe $G$ auf die der geschlossenen Gruppen homogener linearer Transformationen zurückzuführen. Daher zunächst die wichtigsten Eigenschaften solcher linearen Gruppen!

Geschlossene Gruppen homogener linearer Transformationen. Eine geschlossene Gruppe $\Gamma$ homogener linearer Transformationen läßt stets eine HERMITEsche Form $A w\bar{w} + B z\bar{z} + C w\bar{z} + \bar{C}\bar{w} z$ invariant. Durch eine geeignete lineare Transformation $L$ denken wir uns diese Form auf die normierte Form $w\bar{w} + z\bar{z}$ gebracht, die gegenüber der entsprechend transformierten Gruppe $\Gamma^* = L\Gamma L^{-1}$ invariant ist. Die Untersuchung der zur Form $w\bar{w} + z\bar{z}$ gehörigen Gruppen ergibt dann:

Satz 61[3]. *Jede unendliche geschlossene Gruppe homogener linearer Transformationen, welche die Form $w\bar{w} + z\bar{z}$ invariant läßt, enthält eine Untergruppe der Form*

$$(T_{m,p}(\vartheta)) \qquad W = w e^{i m \vartheta}, \qquad Z = z e^{i p \vartheta}. \qquad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

[1] Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{B}$ in $O$ nicht verzweigt ist; vgl. auch Seite 93, Anm. 1.

[2] Vgl. § 9 dieses Kapitels. [3] Vgl. H. CARTAN [5], Satz 23.

Satz 62a[1]. *Eine geschlossene Gruppe $\Gamma$ homogener linearer Transformationen, die die Untergruppe $T_{m,p}(\vartheta)$ enthält, gehört einer der folgenden Gruppen an:*

1. *Einparametrige Gruppen.* $\Gamma$ besteht aus $T_{m,p}(\vartheta)$ evtl. kombiniert mit einer *endlichen* Gruppe

$$(1)\qquad W = w e^{\frac{2ik\pi}{s}}, \qquad Z = z e^{\frac{2ik\pi}{s}} \qquad (k = 1, \ldots, s;\ s \text{ fest})$$

und im Falle $m = -p$ evtl. kombiniert mit einer Transformation

$$W = R z e^{\frac{i\pi}{s}}, \qquad Z = \frac{1}{R} w e^{\frac{i\pi}{s}}. \qquad (R > 0 \text{ und fest})$$

2. *Zweiparametrige Gruppe.* $\Gamma$ ist die Gruppe

$$(T(\vartheta, \varphi)) \qquad W = w e^{i\vartheta}, \qquad Z = z e^{i\varphi} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ beliebig reell})$$

evtl. kombiniert mit einer Transformation $W = Rz, Z = \frac{1}{R} w$.

3. *Dreiparametrige Gruppe* (höchstens im Falle $m = -p$):

$$W = w e^{i\alpha} \cos\varphi - R z e^{i\beta} \sin\varphi, \qquad Z = \frac{1}{R} w e^{-i\beta} \sin\varphi + z e^{-i\alpha} \cos\varphi$$

($\alpha, \beta, \varphi$ reelle Parameter, $R > 0$); hinzu kann noch eine endliche Gruppe (1) treten.

4. *Vierparametrige Gruppe:*

$$(2)\qquad \begin{cases} W = w e^{i(\alpha+\beta)} \cos\varphi - R z e^{i(\alpha+\gamma)} \sin\varphi, \\ Z = \frac{1}{R} w e^{i(\alpha-\gamma)} \sin\varphi + z e^{i(\alpha-\beta)} \cos\varphi \end{cases}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ reelle Parameter, $R > 0$).

Satz 62b[1]. *Enthält eine geschlossene Gruppe $\Gamma$ homogener linearer Transformationen die Untergruppe*

$$(T(\vartheta)) \qquad W = w e^{i\vartheta}, \qquad Z = z e^{i\vartheta}, \qquad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

*so gehört $\Gamma$ einer der folgenden Gruppen an:*

1. *Einparametrige Gruppen.* $\Gamma$ besteht lediglich aus $T(\vartheta)$, kombiniert mit einer *endlichen* Anzahl von homogenen linearen Transformationen.

2. *Zweiparametrige Gruppe.* Es gibt eine homogene lineare Transformation $L$, so daß die Gruppe $\Gamma^* = L\Gamma L^{-1}$ aus den Transformationen $T(\vartheta, \varphi)$ besteht, evtl. kombiniert mit $W = z$, $Z = w$.

3. *Vierparametrige Gruppe.* $\Gamma$ besteht (evtl. nach einer homogenen linearen Transformation) aus der Gesamtheit der linearen Transformationen, welche die Form $w\bar{w} + z\bar{z}$ invariant lassen.

Nunmehr kann die Frage nach der Abbildbarkeit eines gegebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen eigentlichen Kreiskörper oder kreissymmetrischen Körper beantwortet werden. Nach dem Vorangehenden wissen wir,

[1] Vgl. H. Cartan [5], Satz 23, 26, 27.

daß die Gruppe der Automorphismen eines solchen Bereiches eine Untergruppe $G$ enthält, die zu einer Gruppe

$$(T_{m,p}(\vartheta)) \qquad W = w e^{i m \vartheta}, \qquad Z = z e^{i p \vartheta}$$

isomorph ist. Die einer Transformation $T_{m,p}(\vartheta)$ zugeordnete Transformation aus $G$ sei mit $A(\vartheta)$ bezeichnet. Die Entwicklungen der Transformationsfunktionen von $A(\vartheta)$ mögen lauten:

$$(A(\vartheta)) \quad W = f(w, z; \vartheta) = w e^{i m \vartheta} + \cdots, \quad Z = g(w, z; \vartheta) = z e^{i p \vartheta} + \cdots.$$

Setzt man dann

$$(B) \quad F(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt} f(w, z; t)\, dt, \quad G(w, z) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ipt} g(w, z; t)\, dt,$$

so gilt:

$$(BA(\vartheta)) \qquad F(W, Z) = e^{i m \vartheta} F(w, z), \qquad G(W, Z) = e^{i p \vartheta} G(w, z),$$

also $BA(\vartheta) B^{-1} = T_{m,p}(\vartheta)$. Das Funktionspaar

$$(B) \qquad W' = F(w, z), \qquad Z' = G(w, z)$$

bildet demnach den Bereich $\mathfrak{B}$ auf eine Punktmenge $\mathfrak{B}^* = B(\mathfrak{B})$ ab, die sämtliche Transformationen $T_{m,p}(\vartheta)$ in sich zuläßt. Da nun ferner die Abbildung $B$, falls sie in $B$ Ausnahmepunkte besitzt (dies trifft höchstens für $m \cdot p \leqq 0$ zu), stets durch eine Abbildung $\tilde{B}$ *ohne* Ausnahmepunkte ersetzt werden kann, für die gleichfalls $\tilde{B} A(\vartheta) \tilde{B}^{-1} = T_{m,p}(\vartheta)$, so ist damit bewiesen:

Satz 63. Abbildungssatz von H. Cartan. *Besitzt ein beschränkter Bereich $\mathfrak{B}$ eine unendliche Automorphismengruppe $G$ mit dem Fixpunkt $O$ und ist $\mathfrak{B}$ in $O$ nicht verzweigt, so läßt sich $\mathfrak{B}$ eineindeutig und analytisch auf einen beschränkten eigentlichen kreissymmetrischen Körper $\mathfrak{B}^*$ abbilden. $O$ geht dabei in den Mittelpunkt von $\mathfrak{B}^*$ über*[1].

Der Struktur der Gruppe $G$ (bzw. der zu ihr isomorphen Gruppe $\Gamma$) läßt sich ansehen, ob der kreissymmetrische Bereich $\mathfrak{B}^*$ ein Hartogsscher Körper, ein Kreiskörper, ein Reinhardtscher Körper (einschl. Dizylinder) oder eine Hyperkugel ist.

Später sehen wir, daß keineswegs alle beschränkten Bereiche (nicht einmal alle schlichten, einfachzusammenhängenden Bereiche) unendliche Automorphismengruppen aufweisen, also erst recht nicht auf kreissymmetrische Körper abbildbar sind.

## § 6. Die mittelpunktstreuen Abbildungen der eigentlichen kreissymmetrischen Bereiche.

Auf Grund der bisherigen Sätze ist es jetzt leicht, sämtliche eineindeutigen und mittelpunktstreuen Abbildungen der eigentlichen kreissymmetrischen Körper auf sich und untereinander zu bestimmen. Wir

[1] Satz 63 gilt auch dann noch, wenn $O$ ein innerer Verzweigungspunkt ist.

wählen im folgenden als Mittelpunkt wieder den Koordinatenanfang, bei HARTOGSschen Körpern als Symmetrieebene die Ebene $z = 0$.

I. Kreiskörper.

Satz 64[1]. *Jeder Automorphismus eines eigentlichen beschränkten Kreiskörpers, der den Mittelpunkt fest läßt, ist eine ganze lineare Transformation.*

In der Tat, ist $A$ ein solcher Automorphismus, so betrachten wir die Automorphismen $S(\vartheta) = T(\vartheta)A\,T(-\vartheta)A^{-1}$. Von jedem dieser Automorphismen gilt:

$$W = w + \cdots, \qquad Z = z + \cdots.$$

Nach Satz 50 ist also $S(\vartheta) = I$ oder $A\,T(\vartheta) = T(\vartheta)A$. Durch Differentiation der zugehörigen Funktionen nach $\vartheta$ ergibt sich, daß $A$ ganz linear sein muß.

Wörtlich so folgt:

Satz 64a[1]. *Die homogenen ganzen linearen Transformationen und nur diese bilden beschränkte eigentliche Kreiskörper wieder auf solche Kreiskörper ab.*

Nennen wir zwei **Kreiskörper äquivalent,** wenn sie durch ganze lineare Transformationen auseinander hervorgehen, so folgt in Verbindung mit Satz 62b:

Satz 65[1]. *Die Gruppe der mittelpunktstreuen Automorphismen eines eigentlichen beschränkten Kreiskörpers, der keinem* REINHARDT*schen Körper äquivalent ist, besteht aus den Grundtransformationen $T(\vartheta)$, evtl. kombiniert mit einer endlichen Gruppe ganzer linearer Transformationen*[2].

Entsprechend gilt für die REINHARDTschen Körper:

Satz 66[3]. *Die einzigen mittelpunktstreuen Automorphismen eines eigentlichen beschränkten* REINHARDT*schen Körpers $\mathfrak{B}$, der nicht mit einer Hyperkugel äquivalent ist, sind die Transformationen $T(\vartheta, \varphi)$, evtl. verbunden mit einer Transformation $W = Rz$, $Z = \frac{1}{R}w$. Ist $\mathfrak{B}$ dagegen mit einer Hyperkugel äquivalent, also mit einem Körper $A\,|w|^2 + B\,|z|^2 < 1$ identisch, so wird $\mathfrak{B}$ durch jede Transformation* (2)[4] *und nur durch diese eineindeutig und mittelpunktstreu auf sich abgebildet.*

II. $(m, p)$-Bereiche $(m \neq p)$. Die Gruppe $G$ der mittelpunktstreuen Automorphismen des eigentlichen $(m, p)$-Bereiches $\mathfrak{B}$ (also erst recht die $G$ auf Grund von Satz 60 zugeordnete isomorphe Gruppe $\Gamma$) enthält die Untergruppe $T_{m,p}(\vartheta)$. Aus Satz 62a folgt also, daß die einzigen mittelpunktstreuen Automorphismen von $\mathfrak{B}$ die Grundtrans-

[1] Vgl. BEHNKE [3]; H. CARTAN [5]; WELKE (Herr WELKE stützt sich auf die BERGMANNsche Theorie).

[2] Vgl. auch BLASCHKE [1] und CARATHÉODORY [2].

[3] Vgl. THULLEN [1] und H. CARTAN [5]; ferner TSUJI. Dieser Satz wurde für konvexe REINHARDTsche Körper bereits von Herrn REINHARDT bewiesen (vgl. REINHARDT [1]).

[4] Siehe Satz 62a. In (2) ist $R = \sqrt{\frac{B}{A}}$ zu setzen.

formationen $T_{m,p}(\vartheta)$ sind, evtl. kombiniert mit einer endlichen Anzahl von Transformationen

$$W = w e^{i\frac{2k\pi}{s}} + \cdots, \qquad Z = z e^{i\frac{2k\pi}{s}} + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

und im Falle $m = -p$ evtl. noch mit

$$W = R z e^{i\frac{\pi}{s}} + \cdots, \qquad Z = \frac{1}{R} w e^{i\frac{\pi}{s}} + \cdots.$$

Auf Grund dieser speziellen Form der Automorphismen schließt man genau wie im Beweise von Satz 64:

Satz 67[1]. *Sämtliche mittelpunktstreuen Automorphismen eines eigentlichen beschränkten $(m, p)$-Bereiches, der sich nicht mittelpunktstreu auf einen Kreiskörper abbilden läßt, haben die Form:*

a) *für* $mp > 0$:

$$W = w e^{i\left(m\vartheta + \frac{2k\pi}{s}\right)}, \qquad Z = z e^{i\left(p\vartheta + \frac{2k\pi}{s}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

*und nur, falls* $m = 1$ *oder* $p = 1$, *evtl. noch*

$$W = a w + c z^{p}, \qquad Z = b z$$

*bzw.*

$$W = a w, \qquad Z = b z + d w^{m},$$

*sind also insbesondere für* $m \neq 1, p \neq 1$ *stets ganz linear;*

b) *für* $m = 0, p = 1$ (HARTOGS*sche Körper*)[2]:

$$W = f(w), \qquad Z = z g(w);$$

c) *für* $m = -p$:

$$W = w f(wz), \qquad Z = z g(wz)$$

*oder*

$$W = z f(wz), \qquad Z = w g(wz);$$

d) *für* $mp < 0$ $(m > 0, p = -p' \neq -m)$:

$$W = w f(w^{p'} z^{m}), \qquad Z = z g(w^{p'} z^{m}).$$

III. Die Abbildungen der kreissymmetrischen Körper untereinander. Diese lassen sich ganz entsprechend wie die Automorphismen bestimmen. Unter anderm gelten die Sätze:

Satz 68[1]. *Ist der eigentliche $(m, p)$-Bereich $\mathfrak{B}$ eineindeutig analytisch und mittelpunktstreu auf einen beschränkten $(m', p')$-Bereich $\mathfrak{B}^*$ $(mp' - pm' \neq 0)$ abbildbar, so auch in gleicher Weise auf einen* REINHARDT*schen Körper. Die zugehörigen Abbildungen haben die Form:*

$$W = b z + \cdots, \qquad Z = c w + \cdots.$$

Wird ferner ein $(m, p)$-Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen $(m, p)$-Bereich $\mathfrak{B}^*$ (mit gleichem $m, p$) abgebildet, so lautet die zugehörige Transformation im Falle $mp > 0$ und $m \neq 1, p \neq 1$:

$$W = a w, \qquad Z = d z;$$

[1] Vgl. H. CARTAN [5]. [2] Vgl. auch WELKE.

in den übrigen Fällen gelten die gleichen Transformationsformeln wie für die mittelpunktstreuen Automorphismen (vgl. Satz 67).

Für die Abbildungen der REINHARDTschen Körper ergibt sich:

Satz 69[1]. *Ist der eigentliche* REINHARDT*sche Körper* $\mathfrak{B}$ *nicht mit einem Bereiche* $A|w|^2 + B|z|^2 < 1$ *identisch, so ist jede eineindeutige und analytische Transformation von* $\mathfrak{B}$ *auf einen beschränkten* REINHARDT*schen Körper* $\mathfrak{B}^*$

a) *wenn sie den Mittelpunkt fest läßt, von der Form*

$$W = aw, \quad Z = dz \quad \textit{oder} \quad W = bz, \quad Z = cw,$$

b) *wenn sie den Mittelpunkt O in einen Punkt auf* $z = 0$ (bzw. $w = 0$) *überführt, von der Form:*

$$W = f(w), \quad Z = zg(w) \quad \text{bzw.} \quad W = f(z), \quad Z = wg(z).$$

## § 7. Die nichtmittelpunktstreuen Abbildungen kreissymmetrischer Bereiche[2].

Als zuerst Untersuchungen über nichtmittelpunktstreue Abbildungen kreissymmetrischer Körper angestellt wurden — die natürlich mit den REINHARDTschen Körpern begannen —, machte sich unerwartet eine „Starrheit" gegenüber analytischen Transformationen bemerkbar. Während in der Kl.Th. ein einfachzusammenhängender Bereich durch einen geeigneten Automorphismus stets so abgebildet werden kann, daß dabei zwei beliebig vorgegebene innere Punkte ineinander übergehen, haben hier unter den eigentlichen Kreiskörpern *nur* Hyperkugel und Dizylinder (und die ihnen äquivalenten Körper) diese Eigenschaft. Wir werden sogar sehen, daß bis auf wenige Ausnahmen *jeder* Automorphismus eines Kreiskörpers oder HARTOGSschen Körpers notwendig den Mittelpunkt fest läßt, daß also bereits die eben gefundenen trivialen Abbildungen die einzigen sind, die diese Körper zulassen.

I. REINHARDTsche Körper[3]. Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. Existiert in dem eigentlichen, beschränkten REINHARDTschen Körper $\mathfrak{B}$ mit dem Mittelpunkt $O(0, 0)$ ein Punkt $P_0 \neq O$, der sich durch einen Automorphismus in $O$ überführen läßt, so gibt es entweder auf der Ebene $z = 0$ oder der Ebene $w = 0$ mindestens einen Punkt $Q \neq O$ mit der gleichen Eigenschaft.

*Beweis*[4]. Wir nennen einen Punkt aus $\mathfrak{B}$, der durch einen Automorphismus von $\mathfrak{B}$ in $O$ transformierbar ist, einen *ausgezeichneten Punkt* und entsprechend ein analytisches Flächenstück, welches bei einer solchen Trans-

[1] Vgl. THULLEN [1]; H. CARTAN [5].

[2] Bei den hier vorkommenden Körpern wählen wir wieder den Nullpunkt als Mittelpunkt bzw. (bei HARTOGSschen Körpern) die Ebene $z = 0$ als Symmetrieebene.

[3] Vgl. THULLEN [1]. KRITIKOS hat als erster einen REINHARDTschen Körper — und zwar den Körper $|w| + |z| < 1$ — auf nicht mittelpunktstreue Abbildungen untersucht; vgl. KRITIKOS [1] und [2].

[4] Der Beweis in der Originalarbeit ist an dieser Stelle umständlicher.

formation in die Ebene $z = 0$ übergeht, eine *ausgezeichnete Fläche* des Körpers $\mathfrak{B}$. Durch jeden ausgezeichneten Punkt geht mindestens eine ausgezeichnete Fläche.

Wir nehmen nun an, der Hilfssatz wäre falsch! Es existiere also ein ausgezeichneter Punkt $P_0(w_0 \neq 0, z_0 \neq 0)$, ohne daß auf $z = 0$ oder $w = 0$ ein von $O$ verschiedener ausgezeichneter Punkt liegt.

$P_1$ und $P_2$ seien ferner irgend zwei *verschiedene* ausgezeichnete *Punkte*, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ je eine zugehörige ausgezeichnete Fläche. Wir behaupten, *daß* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *keinen Punkt in* $\mathfrak{B}$ *gemeinsam haben*. Zum Beweise dürfen wir annehmen, daß $P_2$ mit $O$ und $\mathfrak{F}_2$ mit $z = 0$ zusammenfällt. Es gibt nach Voraussetzung einen Automorphismus $S$, der $P_1$ in $O$ und $\mathfrak{F}_1$ in $z = 0$ überführt. Hätten $\mathfrak{F}_1$ und $z = 0$ einen Punkt $Q(w', 0)$ aus $\mathfrak{B}$ gemeinsam, so müßte $S$ den Punkt $Q$ in einen ebenfalls auf $z = 0$ liegenden Punkt $Q'$ überführen, hätte also die Form $W = f(w), Z = z g(w)$.[1] Das gleiche würde für den inversen Automorphismus gelten. Ein solcher Automorphismus kann aber $O$ nur wieder in einen Punkt auf $z = 0$ oder $w = 0$ überführen, es müßte also $P_1$ entgegen unserer Annahme auf $z = 0$ bzw. $w = 0$ liegen.

Nun zeigt man leicht, daß mit $P_0$ eine mindestens dreidimensionale Schar ausgezeichneter Punkte existiert. Durch jeden dieser Punkte geht eine ausgezeichnete Fläche, die keine andere ausgezeichnete Fläche schneiden darf. Eine solche dreidimensionale Schar von sich nicht schneidenden zweidimensionalen Flächen ist aber im $R_4$ unmöglich.

Existiert nun auf $z = 0$ (bzw. $w = 0$) ein von $O$ verschiedener ausgezeichneter Punkt, so sind alle Punkte auf $z = 0$ (bzw. $w = 0$) ausgezeichnet. Der Rand solcher Körper genügt einer gewissen Differentialgleichung, deren Lösungen die Körper $A|w|^a + B|z|^2 < 1$ (bzw. $A|w|^2 + B|z|^a < 1$) und die Dizylinder sind. Der Hauptsatz über die Abbildungen der REINHARDTschen Körper lautet demnach:

Satz 70. *Ist der* REINHARDT*sche Körper* $\mathfrak{B}$ *weder mit einem Dizylinder noch mit einem Körper* $|w|^a + |z|^2 < 1$ *äquivalent, so sind sämtliche Automorphismen von* $\mathfrak{B}$ *mittelpunktstreu, also von der Form*

$$W = w e^{i\vartheta}, \qquad Z = z e^{i\varphi} \qquad \left(\text{und evtl. } W = Rz, \;\; Z = \frac{1}{R} w\right).$$

Um die Abbildungen der Ausnahmekörper zu bestimmen, wollen wir voraussetzen, daß die Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ je den Einheitskreis herausschneiden, was sich stets durch eine Streckung $W = aw, Z = bz$ erreichen läßt. Es gilt dann:

1. Sämtliche *Automorphismen eines Körpers* $|w|^a + |z|^2 < 1$ $(a \neq 2)$ haben die Form

$$W = e^{i\vartheta} w \left[\frac{1 - |\alpha|^2}{(1 + \bar{\alpha} z)^2}\right]^{\frac{1}{a}}, \qquad Z = e^{i\varphi} \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}; \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell}, \; |\alpha| < 1)$$

es lassen sich also (falls $a \neq 2$) nur die Punkte auf $z = 0$ in $O$ überführen (entsprechend für die Körper $|w|^2 + |z|^a < 1$).

2. Die *Automorphismen der Hyperkugel* sind die Transformationen[2]:

$$W = \frac{a_1 w + a_2 z + a_3}{c_1 w + c_2 z + c_3}, \qquad Z = \frac{b_1 w + b_2 z + b_3}{c_1 w + c_2 z + c_3}$$

---

[1] Siehe Satz 67b. [2] Vgl. REINHARDT [1].

mit den Bedingungen:

$$a_1\bar{a}_1 + b_1\bar{b}_1 + a_3\bar{a}_3 + b_3\bar{b}_3 = c_1\bar{c}_1 + c_3\bar{c}_3;$$
$$a_2\bar{a}_2 + b_2\bar{b}_2 + a_3\bar{a}_3 + b_3\bar{b}_3 = c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3;$$
$$a_1\bar{a}_3 + b_1\bar{b}_3 = c_1\bar{c}_3; \qquad a_2\bar{a}_3 + b_2\bar{b}_3 = c_2\bar{c}_3; \qquad a_1\bar{a}_2 + b_1\bar{b}_2 = c_1\bar{c}_2;$$

3. Die *Automorphismen des Dizylinders* $|w| < 1, |z| < 1$ sind:

$$W = e^{i\vartheta}\frac{w+\alpha}{1+\bar{\alpha}w}, \qquad Z = e^{i\varphi}\frac{z+\beta}{1+\bar{\beta}z}, \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell}, |\alpha| < 1, |\beta| < 1)$$

kombiniert mit $W = z, Z = w$.

Hiermit sind sämtliche Automorphismen der REINHARDTschen Körper bekannt. Die Abbildungen dieser Körper untereinander lassen sich dann leicht angeben:

Satz 71. *Zwei eigentliche* REINHARDT*sche Körper, die weder mit einem Dizylinder noch mit einem Körper* $|w|^a + |z|^2 < 1$ *äquivalent sind, lassen sich nur durch eine Transformation* $W = aw, Z = cz$ *oder* $W = bz$, $Z = dw$ *eineindeutig und analytisch aufeinander abbilden.*

*Zwei Bereiche* $A|w|^a + B|z|^2 < 1$ *und* $A'|w|^{a'} + B'|z|^2 < 1$ (oder $A'|w|^2 + B'|z|^{a'} < 1$) *lassen sich nur dann aufeinander abbilden, falls* $a = a'$ (die Abbildungsfunktionen sind [bis auf Streckungen] die gleichen wie die der zugehörigen Automorphismen).

*Ein Dizylinder ist auf keinen der Körper* $A|w|^a + B|z|^2 < 1$ *abbildbar.*

II. Kreiskörper[1]. Außer den REINHARDTschen Körpern nehmen unter den Kreiskörpern noch diejenigen Bereiche (und die mit ihnen äquivalenten) eine Ausnahmestellung ein, die gleichzeitig den drei Ungleichungen

$$|w| < 1, \quad |z| < 1, \quad \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| < a \quad (a \text{ eine feste positive Zahl kleiner } 1)$$

genügen — wir nennen sie kurz die Körper „$\mathfrak{K}_a$". Als Automorphismen dieser Körper treten auf:

$$(1) \quad W = e^{i\vartheta}\frac{w+\alpha}{1+\bar{\alpha}w}, \quad Z = e^{i\vartheta}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$$

und

$$(2) \quad W = e^{i\vartheta}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}, \quad Z = e^{i\vartheta}\frac{w+\alpha}{1+\bar{\alpha}w}. \quad (\vartheta \text{ reell}, |\alpha| < 1, \text{sonst beliebig})$$

Zwei Bereiche $\mathfrak{K}_a$ und $\mathfrak{K}_{a'}$ $(a \neq a')$ können niemals eineindeutig und analytisch aufeinander abgebildet werden. (Übrigens sind alle $\mathfrak{K}_a$ Regularitätsbereiche.)

Es gilt nun:

Satz 72. *Sämtliche Automorphismen eines beschränkten eigentlichen Kreiskörpers, der weder mit einem* REINHARDT*schen Körper noch mit einem Körper* $\mathfrak{K}_a$ *äquivalent ist, sind mittelpunktstreu, also ganze lineare Transformationen.*

[1] Vgl. H. CARTAN [7].

Zum Beweise wird angenommen, daß es einen nichtmittelpunktstreuen Automorphismus $S$ gibt. Zur Gruppe $S^{-1}T(\vartheta)S$ wird dann der Gruppenoperator $\Omega = \xi(w, z)\frac{\partial f}{\partial w} + \eta(w, z)\frac{\partial f}{\partial z}$ gebildet. Da der Nullpunkt kein Fixpunkt dieser Gruppe ist, so verschwinden nicht zugleich $\xi(0, 0)$ und $\eta(0, 0)$. Jetzt wird die kleinste LIEsche Gruppe bestimmt, zu der $\Omega$ und der Operator $\Xi = iw\frac{\partial f}{\partial w} + iz\frac{\partial f}{\partial z}$, der die Abbildungen $T(\vartheta)$ erzeugt, gehören. Die gesuchte LIEsche Gruppe führt nach Zwischenschaltung einer linearen Transformation auf die Gruppe (1) oder (2). Die zu diesen Gruppen gehörigen Bereiche sind aber die Körper $\mathfrak{K}_a$.

Folgerung. Ist der beschränkte eigentliche Kreiskörper $\mathfrak{B}$ weder mit einem Körper $\mathfrak{K}_a$ noch mit einem Dizylinder oder einem Körper $|w|^a + |z|^2 < 1$ äquivalent, so ist jede eineindeutige, analytische Transformation von $\mathfrak{B}$ auf einen anderen Kreiskörper $\mathfrak{B}^*$ mittelpunktstreu, also ganz linear.

Hieraus wiederum folgt:

*Sind zwei beliebige beschränkte und eigentliche Kreiskörper aufeinander abbildbar, so sind sie äquivalent.*

III. HARTOGSsche Körper[1]. Zwei HARTOGSsche Körper wollen wir *äquivalent* nennen, falls sie durch eine Transformation

$$W = f(w), \qquad Z = zg(w)$$

eineindeutig und analytisch aufeinander abbildbar sind (also derart, daß Symmetrieebene wieder in Symmetrieebene übergeht).

Die dem Satze 72 entsprechende Aussage lautet dann:

Satz 73. *Sämtliche Automorphismen eines beschränkten* HARTOGS*schen Körpers* $\mathfrak{B}$, *der keinen* REINHARDT*schen Körper zur Regularitätshülle hat, sind von der Form*

$$W = f(w), \qquad Z = zg(w),$$

*es sei denn, daß* $\mathfrak{B}$ *mit einem der folgenden Ausnahmekörper äquivalent ist:*

1. *Zylinder vom Typus A.* Darunter verstehen wir einen Zylinderbereich, dessen $w$-Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ *mehrfachzusammenhängend* und dessen $z$-Projektion der Einheitskreis ist. Die Gesamtheit der Automorphismen eines solchen Zylinderbereiches wird dargestellt durch:

$$W = f(w), \qquad Z = e^{i\vartheta}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}, \qquad (\vartheta \text{ reell}, |\alpha| < 1)$$

wobei $W = f(w)$ die Abbildungen der Projektion $\mathfrak{b}^{(w)}$ auf sich durchläuft.

2. *Bereich:* $1 < \frac{1-|z|^2}{|w|^a} < M$ $(a > 0,\ M$ endlich oder unendlich). Der kleinste vollkommene HARTOGSsche Körper, der jeweils einen solchen Bereich umfaßt und damit seine Regularitätshülle ist, ist der

[1] Vgl. H. CARTAN [7].

Körper $|w|^a + |z|^2 < 1$ ohne die Symmetrieebene $z = 0$. Die Automorphismen dieser Körper sind:

$$W = e^{i\vartheta} w \left[\frac{1-\alpha\bar\alpha}{(1+\bar\alpha z)^2}\right]^{\frac{1}{a}}, \qquad Z = e^{i\varphi}\frac{z+\alpha}{1+\bar\alpha z}. \qquad (\vartheta,\ \varphi \text{ reell}, |\alpha| < 1)^{1}$$

3. *Bereiche* $1 < (1 - |z|^2) e^{\frac{w-\bar w}{i}} < M$ ($M$ endlich oder unendlich). Ein solcher Bereich ist zugleich äquivalent mit einem Überlagerungsbereiche der unter 2. genannten Körper (bei jeweils gleichem $M$).

Für die Abbildungen der HARTOGSschen Körper untereinander gilt wieder:

*Sind zwei beliebige beschränkte und eigentliche* HARTOGS*sche Körper eineindeutig und analytisch aufeinander abbildbar, so sind sie äquivalent.*

## § 8. Die Metrik von CARATHÉODORY[2].

CARATHÉODORY hat zu jedem *beschränkten und schlichten* Bereiche eine Metrik angegeben, die diesem Bereiche invariant gegenüber analytischen Transformationen zugeordnet ist (vgl. Eigenschaft III). Zur Aufstellung der Metrik werden alle im vorgegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ betrachtet, für die $\operatorname{Max}|f(\mathfrak{B})| \leqq 1$ (man beachte, daß diese Funktionen keine Klasse im früher definierten Sinne bilden[3]). Sind nun $A$ und $B$ zwei vorgegebene Punkte aus $\mathfrak{B}$, so sei unter der **Entfernung $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$** die obere Grenze von

$$\log \frac{|f(A) - f(B)| + |1 - f(A)\overline{f(B)}|}{\sqrt{(1 - f(A)\overline{f(A)})(1 - f(B)\overline{f(B)})}}$$

in bezug auf alle zugelassenen Funktionen $f$ verstanden, d. i. die obere Grenze der Entfernungen von $f(A)$ und $f(B)$, gemessen in der nichteuklidischen Geometrie des Einheitskreises (bei veränderlichem $f$ und festem $A$ und $B$).

Da die Gesamtheit der zugelassenen Funktionen $f$ eine normale Familie bildet, gibt es unter diesen zu vorgegebenen $A$ und $B$ stets eine Funktion $f_0$, für welche jene obere Grenze gerade angenommen wird. Setzt man dann noch $g \equiv \frac{f_0 - f_0(A)}{\overline{f_0(A)}\, f_0 - 1}$, so hat die transformierte Funktion $g$ darüber hinaus die Eigenschaft, daß $g(A) = 0$ und $D_{\mathfrak{B}}(A, B) = \frac{1}{2}\log\frac{1 + |g(B)|}{1 - |g(B)|}$ (da $\operatorname{Max}|g(\mathfrak{B})| = 1$, ist $g$ eine zugelassene Funktion).

Die Eigenschaften der Entfernungsfunktion. I. $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$ ist für alle Punktepaare aus $\mathfrak{B}$ *endlich.*

II. (*Dreieckssatz.*) Sind $A, B, C$ drei beliebige Punkte aus $\mathfrak{B}$, so besteht immer die Beziehung $D_{\mathfrak{B}}(A, C) \leqq D_{\mathfrak{B}}(A, B) + D_{\mathfrak{B}}(B, C)$.

IIa. Die Distanzfunktion $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$ ist eine *stetige Funktion* beider Argumente $A$ und $B$, die gegen Null konvergiert, wenn $B \to A$.

[1] Vgl. S. 97. [2] Vgl. CARATHÉODORY [1], [2], [3]. [3] Vgl. Kap. VI, § 1.

III. Geht bei einer eineindeutigen und analytischen Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ der Punkt $A$ in $A^*$, $B$ in $B^*$ über, so ist stets $D_{\mathfrak{B}}(A, B) = D_{\mathfrak{B}^*}(A^*, B^*)$. *Die Metrik bleibt also bei eineindeutigen und analytischen Transformationen erhalten.*

IV. Liegt der Bereich $\mathfrak{B}_0$ im Innern von $\mathfrak{B}$, so ist $D_{\mathfrak{B}_0}(A, B) \geqq D_{\mathfrak{B}}(A, B)$. Ist insbesondere $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ die *Regularitätshülle* von $\mathfrak{B}_0$, so ist trivial, daß immer $D_{\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)}(A, B) = D_{\mathfrak{B}_0}(A, B)$.

Aus III und IV ergibt sich dann unmittelbar:

V. *Ist $T$ eine innere Transformation des Bereiches $\mathfrak{B}$, so ist*

$$D_{\mathfrak{B}}(T(A), T(B)) \leqq D_{\mathfrak{B}}(A, B).$$

VI. Die obere Grenze aller möglichen Entfernungen der Punkte $P$ aus $\mathfrak{B}$ von einem festen inneren Punkte ist stets unendlich.

VII. Ist $\mathfrak{C}$ eine *ganz* in $\mathfrak{B}$ verlaufende rektifizierbare Kurve, so existiert die obere Grenze der „Scheinlängen" aller in $\mathfrak{B}$ eingeschriebenen Polygonzüge. (Unter der „Scheinlänge" einer Strecke $\overline{AB}$ verstehen wir die Entfernung $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$.) Diese obere Grenze heiße die *Scheinlänge der Kurve* $\mathfrak{C}$ in der neuen Metrik.

Die Randpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ können wir nach dem Verhalten der Entfernungsfunktion in ihrer Nachbarschaft in drei Klassen einteilen[1]:

$R$ heißt im Sinne der eingeführten Metrik ein **endlichferner Randpunkt** von $\mathfrak{B}$, falls es zu einem inneren Punkte $A$ aus $\mathfrak{B}$ eine Umgebung $\mathfrak{W}(R)$ von $R$ gibt[2], so daß in dieser Metrik die Entfernung zwischen $A$ und den Punkten aus $\mathfrak{W}(R)$ beschränkt ist. Auf Grund der Eigenschaft II von $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$ kommt es dabei auf die Wahl von $A$ nicht an.

Jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}$, der nicht endlichfern ist, heißt ein unendlichferner Randpunkt. Zu einem solchen Randpunkte $R$ existiert also mindestens eine Punktfolge $Q_m$ aus $\mathfrak{B}$ mit $\lim Q_m = R$, so daß für jeden inneren Punkt $A$ aus $\mathfrak{B}$ die Folge der Entfernungen $D_{\mathfrak{B}}(A, Q_m)$ mit $m$ über alle Grenzen wächst. Wir unterscheiden hierbei wieder zwei Fälle, je nachdem für *jede* Punktfolge $Q_m \to R$ der $\lim D_{\mathfrak{B}}(A, Q_m) = \infty$ oder aber mindestens eine solche Folge $Q_m \to R$ existiert, für die $D_{\mathfrak{B}}(A, Q_m)$ für alle $m$ beschränkt bleibt. Im ersten Falle heiße $R$ ein **stetig-unendlichferner**, im zweiten Falle ein **unstetig-unendlichferner Randpunkt.**

Gibt es in dem vorgegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ eine reguläre und beschränkte Funktion $f$, die gleichfalls noch im Randpunkt $R$ regulär ist und dort ihr Maximum annimmt, so ist $R$ ein stetig-unendlichferner Randpunkt.

Daraus schließt man fast unmittelbar, *daß jeder (beschränkte) Bereich mindestens einen stetig-unendlichfernen Randpunkt besitzt.*

[1] Vgl. HORSTMANN. [2] Vgl. Def. auf S. 13.

Ist weiter $R$ ein unendlichferner Randpunkt von $\mathfrak{B}$, so ist $R$ zugleich Randpunkt der Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$; *insbesondere ist also ein Bereich mit nur unendlichfernen Randpunkten stets ein Regularitätsbereich.* Auf der anderen Seite weist jeder Bereich, der kein Regularitätsbereich ist, notwendig endlichferne Randpunkte auf.

Ein Bereich mit nur *stetig*-unendlichfernen Randpunkten heiße ein **normaler Bereich** (Beispiele: Polyzylinder, Hyperkugel). Das Bild eines normalen Bereiches ist stets wieder normal und ferner ein normaler Bereich natürlich stets ein Regularitätsbereich. Mit Hilfe der K-Konvexität eines Regularitätsbereiches kann man nun leicht zeigen, *daß jeder beliebige (beschränkte und schlichte) Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ von innen durch eine Folge von ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden normalen Bereichen approximierbar ist*[1].

Da die Entfernungsfunktion eines Bereiches $\mathfrak{B}$ durch die Gesamtheit der in $\mathfrak{B}$ regulären und zugleich beschränkten Funktionen bestimmt ist, liegt es in Analogie zur Definition der Regularitätshülle nahe, folgenden Begriff einzuführen:

Unter dem **Existenzbereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Entfernungsfunktion**[1] des Bereiches $\mathfrak{B}$ verstehen wir den Durchschnitt der Regularitätsbereiche aller Funktionen, die in $\mathfrak{B}$ regulär und beschränkt sind.

$\tilde{\mathfrak{B}}$ ist sicher ein Regularitätsbereich, umfaßt die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$, liegt aber noch im Innern der Nebenhülle $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$: $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}) < \tilde{\mathfrak{B}} < \mathfrak{N}(\mathfrak{B})$. Für zwei beliebige Punkte $A$ und $B$ aus $\mathfrak{B}$ gilt $D_{\mathfrak{B}}(A, B) = D_{\mathfrak{H}(\mathfrak{B})}(A, B) = D_{\tilde{\mathfrak{B}}}(A, B)$.

Als Beispiele zu dieser Metrik seien die Entfernungsfunktionen des Dizylinders und der Hyperkugel angegeben:

a) Die Entfernungsfunktion des Dizylinders $\mathfrak{D}$: $|w| < 1$, $|z| < 1$. Für zwei Punkte $A(w_1, z_1)$ und $B(w_2, z_2)$ aus $\mathfrak{D}$ ist $D_{\mathfrak{D}}(A, B) = \operatorname{Max}[E(w_1, w_2), E(z_1, z_2)]$, wobei $E(w_1, w_2)$ bzw. $E(z_1, z_2)$ die nichteuklidische Entfernung von $w_1$ und $w_2$ bzw. $z_1$ und $z_2$ im Einheitskreis bedeutet. Sämtliche Randpunkte von $\mathfrak{D}$ sind stetig-unendlichfern. Zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ gibt es im allgemeinen unendlich viele kürzeste (geodätische) Linien. Ihre Länge ist $D_{\mathfrak{D}}(A, B)$.

b) Die Entfernungsfunktion der Hyperkugel $\mathfrak{K}$: $|w|^2 + |z|^2 < 1$. Zu vorgegebenen $A$ und $B$ gibt es immer ein $p < 0$ und eine analytische Transformation der Hyperkugel in sich, durch die $A$ in $(0, 0)$ und $B$ in $(p, 0)$ übergeführt wird; hieraus ergibt sich dann $D_{\mathfrak{K}}(A, B) = \frac{1}{2}\log\frac{1+p}{1-p}$. Sämtliche Randpunkte von $\mathfrak{K}$ sind wieder unendlichfern. Zwischen $A$ und $B$ gibt es stets nur eine kürzeste Linie; ihre Länge ist $D_{\mathfrak{K}}(A, B)$. Daraus folgt schon, daß keine Abbildung zwischen Hyperkugel und Dizylinder möglich ist, welche die Metrik erhält, also erst recht keine eineindeutige analytische Abbildung.

[1] Vgl. Horstmann.

**Die Indikatrix.** Wir beschränken uns auf den $R_4$. In bekannter Weise (nämlich durch Bildung von $\lim\limits_{P_m \to P_0} \frac{\overline{P_0 P_m}}{D_{\mathfrak{B}}(P_0, P_m)}$ auf jedem durch $P_0$ laufenden Strahl) wird jedem inneren Punkte $P_0$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine Indikatrix zugeordnet. Die Indikatrix $\Gamma_{\mathfrak{B}}(P_0)$ des Punktes $P_0(w_0, z_0)$ hat folgende Eigenschaften:

a) *Sie ist ein vollkommener und konvexer Kreiskörper mit $P_0$ als Mittelpunkt,* der wie folgt angegeben werden kann:

$$|z - z_0| < \lim_{\zeta=0} \frac{|\zeta|}{D_{\mathfrak{B}}(P_0, P)} = R(s), \quad s = \frac{w - w_0}{z - z_0} \quad \text{und} \quad P = (w_0 + s\zeta, z_0 + \zeta).$$

Man rechnet aus, daß

$$\lim_{\zeta=0} \frac{D_{\mathfrak{B}}(P_0, P)}{|\zeta|} = \text{obere Grenze} \left| \frac{\partial f}{\partial w} s + \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{P_0},$$

$f$ durchlaufe die Gesamtheit aller zugelassenen Funktionen.

b) Liegt der Bereich $\mathfrak{B}_0$ im Innern von $\mathfrak{B}$, so liegt auch $\Gamma_{\mathfrak{B}_0}(P_0)$ im Innern von $\Gamma_{\mathfrak{B}}(P_0)$.

c) Die Indikatrix des Mittelpunktes eines konvexen Kreiskörpers fällt mit diesem zusammen.

d) *Bei jeder metrischen Abbildung zweier Bereiche aufeinander werden die Indikatrizen entsprechender Punkte affin aufeinander bezogen.*

Aus d) folgt unmittelbar:

*Zwei Bereiche können höchstens dann eineindeutig und analytisch aufeinander abgebildet werden, wenn man sie so aufeinander beziehen kann, daß die Indikatrizen ihrer Metrik in entsprechenden Punkten affin zusammenhängen.*

Wie schon CARATHÉODORY gezeigt hat, ist diese Bedingung nicht hinreichend[1].

## § 9. Verschiedene Fragen zur Abbildungstheorie.

I. Starre Bereiche[2]. Wir hatten bereits bei der Untersuchung der Kreiskörper und HARTOGSschen Körper gesehen, daß diese im allgemeinen außer den trivialen Grundtransformationen keine weiteren eineindeutigen und analytischen Abbildungen gestatten. Gibt es nun auch *vollkommen starre Bereiche,* d. h. Bereiche, die als einzigen Automorphismus nur die Identität zulassen?

In der Kl.Th. sind bekanntlich solche starren Bereiche notwendig mehrfachzusammenhängend. Hier werden wir schon im $R_4$ beliebig viele einfachzusammenhängende und schlichte starre Bereiche angeben können.

Wir betrachten hierzu einen nichtvollkommenen eigentlichen REINHARDTschen Körper $\mathfrak{B}$ des $R_4$. $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ sei die Regularitätshülle von $\mathfrak{B}$;

[1] Über eine weitere Metrik, die gegenüber analytischen Transformationen invariant ist, vgl. BERGMANN [**14**] und § 10 dieses Kapitels.

[2] Vgl. THULLEN [**3**]; CARTAN-THULLEN.

wir können annehmen, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ kein Dizylinder und auch nicht mit einem Bereiche $|w|^a + |z|^2 < 1$ äquivalent ist. Die einzigen Automorphismen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ sind nach Satz 70 die Transformationen

$$(1) \quad W = w e^{i\vartheta}, \qquad Z = z e^{i\varphi} \qquad \text{bzw.} \qquad W = z e^{i\vartheta}, \qquad Z = w e^{i\varphi}.$$

Ferner sei $\tilde{\mathfrak{B}}$ ein Bereich, der $\mathfrak{B}$ umfaßt, aber noch im Innern von $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ liegt und der keine der Transformationen (1) zuläßt. Offenbar existieren stets solche Bereiche. Da $\mathfrak{H}(\tilde{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$, folgt unmittelbar aus der Eigenschaft III der Regularitätshüllen, daß $\tilde{\mathfrak{B}}$ ein vollkommen starrer Bereich ist. Wir können bei geeigneten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ den Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ immer einfachzusammenhängend wählen.

Allerdings sind sämtliche starren Bereiche, die wir auf diese Weise konstruieren, keine Regularitätsbereiche. Die Frage, ob es auch *vollkommen starre Regularitätsbereiche* gibt, ist noch gänzlich offen.

II. Ausgezeichnete Bereiche. Nach den Ergebnissen der vorangehenden Paragraphen ist es von vornherein klar, daß diejenigen Bereiche, in denen sich durch geeignete Automorphismen stets zwei beliebig vorgegebene innere Punkte ineinander überführen lassen, ganz besonderen Bedingungen genügen müssen — wir wollen Bereiche mit dieser Eigenschaft kurz *ausgezeichnete Bereiche* nennen. Damit ein beschränkter Bereich $\mathfrak{B}$ ausgezeichnet ist, genügt es bereits, daß zu mindestens einem Punkte $P_0$ aus $\mathfrak{B}$ ein (wenn auch noch so kleiner) Teilbereich $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ existiert, so daß durch geeignete Automorphismen von $\mathfrak{B}$ jeder Punkt aus $\mathfrak{B}_0$ in $P_0$ transformiert werden kann (folgt aus Satz 55).

Eine erste Bedingung für ausgezeichnete Bereiche läßt sich leicht angeben. *Es ist nämlich jeder ausgezeichnete Bereich notwendig ein Regularitätsbereich oder ein Überlagerungsbereich eines Regularitätsbereiches*[1]. Ist also umgekehrt ein Bereich $\mathfrak{B}$ kein Regularitätsbereich (oder Überlagerungsbereich eines solchen), so gibt es zu *jedem* inneren Punkte $P_0$ und *jedem* Teilbereiche $\mathfrak{B}_0$ einen Teilbereich $\mathfrak{B}_0^* < \mathfrak{B}_0$, so daß kein Punkt aus $\mathfrak{B}_0^*$ durch einen Automorphismus von $\mathfrak{B}$ in $P_0$ übergeführt werden kann.

H. CARTAN kündet nun soeben in einer *C-R*-Note an, *daß ein beschränkter ausgezeichneter Bereich des $R_4$ sich stets entweder auf die Hyperkugel oder auf den Dizylinder eineindeutig und analytisch abbilden läßt.* Damit ist also das Problem der beschränkten ausgezeichneten Bereiche im $R_4$ bereits vollständig gelöst[2].

III. Abbildungen der Hyperflächen des $R_4$. Neben der Starrheit der Bereiche gegenüber analytischen Abbildungen tritt auch eine *Starrheit der Hyperflächen* auf. (Von einer Starrheit der Flächen kann dagegen nicht gesprochen werden; die analytischen Flächen lassen sich wenigstens stückweise alle auf $z = 0$, die übrigen Flächen,

[1] Vgl. THULLEN [2], [3]; ferner HORSTMANN. [2] Vgl. H. CARTAN [9].

soweit sie in den Parametern reell-analytisch ausgedrückt werden können, auf die Fläche $u = 0$, $x = 0$ abbilden.)

Die Frage nach den Abbildungen der Hyperflächen, die sich mittels reell-analytischer Parameter darstellen lassen, ist durch ELIE CARTAN[1] vollständig gelöst worden. Er bestimmt sämtliche Hyperflächen, welche transitive, von infinitesimalen Transformationen erzeugte, ferner in einer Umgebung der Hyperfläche reguläre Abbildungsgruppen

$$W = f(w, z; a_1, \ldots, a_r), \qquad Z = g(w, z; a_1, \ldots, a_r)$$

zulassen. Eine solche Gruppe ist stets mindestens dreiparametrig. Die möglichen Gruppen und die zugehörigen speziellen Hyperflächen werden angegeben. Doch ist scharf zu unterscheiden, ob eine Hyperfläche im großen (globalement) oder nur im kleinen (localement) solche Gruppen zuläßt.

E. CARTAN untersucht zugleich die Frage, wann zwei gegebene Hyperflächen im kleinen aufeinander abbildbar sind. Er kommt dabei zu folgendem Ergebnis:

*Zu zwei Hyperflächen, die keine analytischen Hyperflächen sind und sich auch nicht im kleinen auf den Rand der Hyperkugel abbilden lassen, gibt es bei vorgegebenen Punkten $O$ und $O^*$ höchstens zwei analytische Abbildungen, die diese Hyperflächen so ineinander überführen, daß dabei $O$ in $O^*$ übergeht.* (Die analytischen Hyperflächen mit reell-analytischen Parametern sind alle im kleinen aufeinander und nur aufeinander abbildbar.) Ferner wird zu gegebenen Hyperflächen die Bildung der Fundamentalinvarianten[2] und die der abgeleiteten Invarianten angegeben und schließlich ein Verfahren, um die Abbildbarkeit zweier Hyperflächen mit den obigen Voraussetzungen aufeinander prüfen zu können.

## § 10. Die BERGMANNsche Abbildungstheorie[3].

BERGMANN faßt alle Bereiche über dem $R_4$, die „*normiert*", d. h. durch eine Transformation von der Form:

$$(A) \qquad \begin{cases} W = f(w, z) = w + \cdots, \\ Z = g(w, z) = z + \cdots \end{cases}$$

aufeinander abbildbar sind, zu einer *Klasse* zusammen. Sein Ziel ist, zu jeder Klasse eindeutig einen Repräsentantenbereich anzugeben und ferner zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$ ein Paar von Funktionen, die ihn auf den Repräsentanten seiner Klasse abbilden. BERGMANN bedient sich dabei vor allem zweier allgemeiner Prinzipien:

1. Es werden die Abbildungsfunktionen mit einem zum vorgegebenen Bereich eindeutig bestimmbaren System von Orthogonalfunktionen in Beziehung gebracht.

2. Die Orthogonalfunktionen und damit auch die Abbildungsfunktionen werden als Lösungen von Minimalproblemen charakterisiert.

[1] Vgl. ELIE CARTAN [1], [2]; siehe ferner POINCARÉ [3] und B. SEGRE.
[2] Siehe auch BLASCHKE [2] und BOL. [3] Vgl. BERGMANN [1]—[16].

Hierzu beachte man das Vorbild der klassischen Theorie!

Die Funktion $f_0(z)$, die einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ (mit mehr als zwei Randpunkten) eineindeutig und analytisch auf das Innere eines Kreises so abbildet, daß dabei ein vorgegebener Punkt $O$ aus $\mathfrak{B}$ in den Mittelpunkt übergeht und $f_0'(0) = 1$, ist unter allen in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $f(z)$, für die gleichfalls $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, dadurch ausgezeichnet, daß $\iint\limits_{\mathfrak{B}} |f_0'(z)|^2\, dx\, dy$ ein Minimum ist.

Zum Aufbau der BERGMANNschen Theorie folgen wir einer bisher unveröffentlichten Arbeit von H. WELKE, in welcher die Beweise BERGMANNS zum Teil wesentlich vereinfacht und von komplizierten Formeln befreit sind.

*Definitionen und Bezeichnungen.* Wir setzen im folgenden voraus, daß alle betrachteten Bereiche den Normierungspunkt $O(0, 0)$ der Transformation $A$ als inneren Punkt enthalten und dort nicht verzweigt sind, was offenbar keine Einschränkung bedeutet.

Die Funktion $f(w, z)$ heißt in einem gegebenen Bereiche $\mathfrak{B}$ *quadratintegrierbar*, falls das Volumenintegral

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} |f(w, z)|^2\, du\, dv\, dx\, dy \qquad \text{(oder kürzer } \int\limits_{\mathfrak{B}} |f|^2\, d\omega)$$

existiert. Die Familie aller in $\mathfrak{B}$ quadratintegrierbaren und regulären Funktionen sei mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ bezeichnet.

$f(w, z)$ und $g(w, z)$ aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ heißen in $\mathfrak{B}$ *orthogonal* zueinander, falls

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f\bar{g}\, d\omega = \int\limits_{\mathfrak{B}} \bar{f} g\, d\omega = 0.$$

Eine Folge $p_\nu(w, z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ von Funktionen aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ heißt in $\mathfrak{B}$ ein *Orthogonalsystem*, falls stets $\int\limits_{\mathfrak{B}} p_\nu \bar{p}_\mu\, d\omega = 0$ für $\nu \neq \mu$. Das System der $\{p_\nu\}$ heiße dabei ein in $\mathfrak{B}$ *normiertes Orthogonalsystem*, falls zugleich $\int\limits_{\mathfrak{B}} p_\nu \bar{p}_\nu\, d\omega = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Ein Orthogonalsystem $\{p_\nu\}$ ist in $\mathfrak{B}$ *vollständig*, falls sich jede in $\mathfrak{B}$ quadratintegrierbare Funktion $f$ in eine in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergente Reihe nach den $p_\nu$ entwickeln läßt, also $f(w, z) \equiv \sum d_\nu p_\nu(w, z)$. Dabei sind die $d_\nu$ die Fourierkoeffizienten: $d_\nu = \int\limits_{\mathfrak{B}} f \bar{p}_\nu\, d\omega$.

Es gilt nun der fundamentale Satz:

Satz 74. *Jedem beschränkten Bereiche $\mathfrak{B}$ kann man bei Angabe des Bezugspunktes $O$ eindeutig ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem von Minimalfunktionen zuordnen.*

Der Beweis vollzieht sich in einer Reihe von Schritten:

(1.) Gilt für die in $\mathfrak{B}$ analytische Funktion $f(w, z)$

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} |f|^2\, d\omega \leqq m \qquad (m \text{ eine willkürliche, aber feste positive Zahl})$$

und ist $(w_1, z_1)$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}$ mit einer Randdistanz $\varrho \geqq r$, so ist $|f(w_1, z_1)| \leqq \frac{\sqrt{m}}{\pi r^2}$.

Hieraus folgt dann unmittelbar, daß die Familie der in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen, für die $\int\limits_{\mathfrak{B}} |f|^2\, d\omega \leqq m$, in $\mathfrak{B}$ *normal* ist.

(2.) Ist $\{p_\nu\}$ ein normiertes Orthogonalsystem in $\mathfrak{B}$ und $f$ aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, so konvergiert stets die Reihe $\sum d_\nu p_\nu(w, z)$ mit $d_\nu = \int\limits_{\mathfrak{B}} f \bar{p}_\nu d\omega$ gleichmäßig in $\mathfrak{B}$.

(3.) Unter allen Funktionen $f$ der Familie $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, für die

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f(0,0)}{\partial w^\mu \partial z^\nu} = 0 \quad \text{für} \quad (\mu, \nu) < (\mu_0, \nu_0);^1 \qquad \frac{\partial^{\mu_0+\nu_0} f(0,0)}{\partial w^{\mu_0} \partial z^{\nu_0}} = 1,$$

gibt es mindestens eine, die das Integral $\int\limits_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega$ zum Minimum macht. Eine solche Funktion $F_{\mathfrak{B}}^{(\mu_0, \nu_0)}$ soll eine zu $\mathfrak{B}$ gehörige *Minimalfunktion* heißen.

(4.) Ist $h$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, für die stets $\dfrac{\partial^{\mu+\nu} h(0,0)}{\partial w^\mu \partial z^\nu} = 0$ für $(\mu, \nu) \leqq (\mu_0, \nu_0)$, so ist $\int\limits_{\mathfrak{B}} F_{\mathfrak{B}}^{(\mu_0, \nu_0)} \bar{h}\, d\omega = 0$. Insbesondere sind also zwei Minimalfunktionen $F_{\mathfrak{B}}^{(\mu_1, \nu_1)}$, $F_{\mathfrak{B}}^{(\mu_2, \nu_2)}$, $(\mu_1, \nu_1) \neq (\mu_2, \nu_2)$, zueinander orthogonal.

(5.) Nunmehr folgt, daß es zu festem $(\mu, \nu)$ genau *eine* Minimalfunktion $F_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ gibt. Für eine zweite Minimalfunktion $G_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ gilt nämlich nach (4)

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} F_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} (\bar{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} - \bar{G}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)})\, d\omega = \int\limits_{\mathfrak{B}} G_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} (\bar{G}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} - \bar{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)})\, d\omega = 0$$

und deshalb

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} |F_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} - G_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}|^2 d\omega = 0, \quad \text{d. h.} \quad F_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)} \equiv G_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}.$$

(6.) Das System der $F_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ denken wir uns durch Multiplikation mit geeigneten Konstanten in ein normiertes Orthogonalsystem $\tilde{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ übergeführt. In üblicher Weise läßt sich dann zeigen, daß das normierte System $\{\tilde{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}\}$ vollständig ist. Hiermit ist Satz 74 bewiesen.

Neben dem Orthogonalsystem $\tilde{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ lassen sich dem Bereiche $\mathfrak{B}$ durch geeignete Normierung beliebig viele andere Minimalfunktionen zuordnen. Wichtig ist außer den $\tilde{F}_{\mathfrak{B}}^{(\mu, \nu)}$ diejenige eindeutig bestimmbare Funktion, die unter den Funktionen $f$ aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ mit der Normierung:

$$f(0,0) = 0, \quad f_w(0,0) = 1, \quad f_z(0,0) = 0$$

das Integral $\int\limits_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega$ zum Minimum macht; wir nennen sie $\tilde{\tilde{F}}_{\mathfrak{B}}^{(1,0)}$.

Nun die Anwendung auf die Abbildungstheorie! Unter den gewonnenen Minimalfunktionen greifen wir $F_{\mathfrak{B}}^{(0,0)}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mathfrak{B}}^{(1,0)}$, $F_{\mathfrak{B}}^{(0,1)}$ heraus und bilden das ($\mathfrak{B}$ eindeutig zugeordnete) *normierte* Funktionspaar:

$$(T_{\mathfrak{B}})\ W_{\mathfrak{B}}(w,z) = \frac{\tilde{\tilde{F}}_{\mathfrak{B}}^{(1,0)}(w,z)}{F_{\mathfrak{B}}^{(0,0)}(w,z)} \equiv w + \cdots, \quad Z_{\mathfrak{B}}(w,z) = \frac{F_{\mathfrak{B}}^{(0,1)}(w,z)}{F_{\mathfrak{B}}^{(0,0)}(w,z)} \equiv z + \cdots.$$

$T_{\mathfrak{B}}$ ist *kovariant* gegen eine normierte Abbildung $A$; d. h. es ist $T_{\mathfrak{B}^*} A = T_{\mathfrak{B}}$ oder

$$(+)\quad W_{\mathfrak{B}^*}(f(w,z),\, g(w,z)) \equiv W_{\mathfrak{B}}(w,z), \quad Z_{\mathfrak{B}^*}(f(w,z),\, g(w,z)) \equiv Z_{\mathfrak{B}}(w,z),$$

wobei das Funktionspaar $W_{\mathfrak{B}^*}(W, Z)$, $Z_{\mathfrak{B}^*}(W, Z)$ das dem Bildbereich $\mathfrak{B}^* = A(\mathfrak{B})$ zugeordnete Kovariantenpaar $T_{\mathfrak{B}^*}$ bedeute. Bildet nun das Paar $T_{\mathfrak{B}}$ den Bereich $\mathfrak{B}$ eineindeutig und analytisch auf einen Bereich $\overline{\mathfrak{B}}$ ab,

[1] $(\mu, \nu) < (\mu_0, \nu_0)$ (bezw. $(\mu, \nu) \leqq (\mu_0, \nu_0)$) bedeute, daß entweder $\mu + \nu < \mu_0 + \nu_0$ oder $\mu + \nu = \mu_0 + \nu_0$, aber $\mu > \mu_0$ (bezw. $\mu \geqq \mu_0$).

(wobei aber weder $\mathfrak{B}$ noch $\overline{\mathfrak{B}}$ schlicht zu sein brauchen), so ist wegen (+) das Kovariantenpaar $T_{\overline{\mathfrak{B}}}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch mit

$$(T_{\overline{\mathfrak{B}}}) \qquad W_{\overline{\mathfrak{B}}} = w\,, \quad Z_{\overline{\mathfrak{B}}} = z\,.$$

Ferner folgt aus (+), daß in der $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ enthaltenden Klasse kein weiterer Bereich mit demselben Kovariantenpaar $(T_{\overline{\mathfrak{B}}})$ existieren kann. In einer Klasse $\mathsf{K}$ von Bereichen läßt sich also *höchstens ein* Bereich $\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}(\mathsf{K})$ bestimmen mit den Eigenschaften:

1. Das Kovariantenpaar $T_{\overline{\mathfrak{B}}}$ reduziert sich auf die Identität.

2. Jeder Bereich $\mathfrak{B}$ der Klasse $\mathsf{K}$ wird durch das zugehörige Kovariantenpaar $T_{\mathfrak{B}}$ eineindeutig und analytisch auf $\overline{\mathfrak{B}}$ abgebildet. $\overline{\mathfrak{B}}$ heißt der *Repräsentantenbereich* der Klasse $\mathsf{K}$.

Die Existenz eines Repräsentantenbereiches ist jedoch hiernach nicht immer sichergestellt; das ist lediglich dann der Fall, wenn wenigstens in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ der gegebenen Klasse das Kovariantenpaar $T_{\mathfrak{B}}$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}$ definiert.

*Anwendungen auf Kreiskörper*[1]. Man zeigt leicht, daß bei einem eigentlichen REINHARDTschen Körper mit dem Mittelpunkt (0, 0) das System der $\tilde{F}^{(\mu,\nu)}$ (bezogen auf (0, 0)) aus Monomen $A_{\mu\nu} w^{\mu} z^{\nu}$ besteht, bei einem eigentlichen Kreiskörper entsprechend aus homogenen Polynomen. Und zwar ist bei einem beliebigen eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$

$$F_{\mathfrak{K}}^{(0,0)}(w,z) \equiv 1\,, \qquad \tilde{F}_{\mathfrak{K}}^{(1,0)}(w,z) \equiv w\,, \qquad F_{\mathfrak{K}}^{(0,1)}(w,z) \equiv z\,.$$

Das aber besagt:

*Jeder eigentliche, beschränkte Kreiskörper (also erst recht jeder eigentliche, beschränkte* REINHARDT*sche Körper) ist ein Repräsentantenbereich.*

Da man nun eine beliebige (im Nullpunkt nicht verzweigte) Abbildung durch eine ganze lineare Transformation stets normieren kann, eine solche aber einen Kreiskörper wieder in einen Kreiskörper überführt, folgt unmittelbar, daß eine mittelpunktstreue Abbildung zweier eigentlicher Kreiskörper stets ganz linear sein muß, was wir früher bereits mit andern Mitteln zeigten (vgl. Satz 64a).

Ebenso kann man nach Aufstellung der entsprechenden Minimalsysteme für HARTOGSsche Körper den Satz 67b beweisen.

*Die Kernfunktion.* Zum Schluß noch einige Bemerkungen über den Begriff der Kernfunktion eines Bereiches, auf die sich viele BERGMANNsche Überlegungen stützen.

Unter der *Kernfunktion* $K(w,z)$ eines vollständigen, normierten Orthogonalsystems $\{p_\nu(w,z)\}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ wird die *reelle* Funktion

$$K(w,z) \equiv \sum |p_\nu(w,z)|^2$$

verstanden. Es zeigt sich nun, daß $K(w_0, z_0) = \operatorname{Max} |h(w_0, z_0)|^2$, wobei $h(w,z)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ durchläuft, für die $\int |h|^2 d\omega \leqq 1$.

[1] Vgl. WELKE.

*Also ist die Kernfunktion unabhängig von der Auswahl des vollständigen, normierten Orthogonalsystems und somit eine durch den Bereich $\mathfrak{B}$ bestimmte Funktion.*

BERGMANN untersucht vor allem das Verhalten von $K(w, z)$ bei Annäherung an den Rand. Er findet dabei eine gewisse Beziehung zwischen dem LEVIschen Differentialausdruck $L(\varphi)$ und $K(w, z)$. Ist ein Randstück $\varphi(u, v, x, y) = 0$ eines Bereiches $\mathfrak{B}$ zweimal stetig differentiierbar und dort $L(\varphi) < 0$, so bleibt $K(w, z)$ bei Annäherung an einen Punkt auf $\varphi = 0$ beschränkt. Ist dagegen $L(\varphi) \geqq 0$, so wird $K(w, z)$ im allgemeinen von 2. oder 3. Ordnung unendlich.

Mit Hilfe der Kernfunktion stellt BERGMANN ferner eine gegenüber analytischen Abbildungen invariante Metrik auf.

## Literatur.


ABRAMESCO, N. [**1**]: Sur les séries de polynomes à deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922); [**2**]: Sur les développements en séries à deux var. compl. suivant les inverses de polyn. donnés. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922); [**3**]: Les séries de polyn. à deux var. compl. Ann. Mat. pura appl. (4) Bd. 8 (1930).

ALMER, B.: Sur quelques problèmes de la théorie des fonct. anal. de deux var. compl. Ark. Mat. Astron. Fys. Bd. 17 (1922).

ANDREOLI, G. u. P. NALLI: La formula di Green nel campo compl. e l'estensione del teorema di Cauchy alle funz. di due var. compl. Atti. Accad. naz. Linc., Rend. VI Bd. 6 (1927).

BEHNKE, H. [**1**]: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 4 (1926); [**2**]: Natürliche Grenzen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 5 (1927); [**3**]: Die Abbildungen der Kreiskörper. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 7 (1929); [**4**]: Analytische Abbildungen im Raume zweier kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 40 (1931); [**5**]: Vorlesungen über Funktionenth. mehrerer Veränd. (ausgearb. von P. THULLEN), hektogr. Math. Semin. Münster 1930/31.

BEHNKE-THULLEN [**1**]: Das Konvergenzproblem der Regulartätshüllen. Math. Ann. Bd. 108 (1933); [**2**]: Bemerkungen zu einer Arbeit von CARATHÉODORY. Math. Z. Bd. 37 (1933); [**3**]: Die Theorie der Regularitätsbereiche. Sem.-B. Bonn-Münster Hft. 2 (1932); [**4**]: Über die Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Produktsatzes. Math. Ann. Bd. 109 (1934); [**5**]: Der WEIERSTRASSsche Produktsatz bei Funkt. einer und zweier kompl. Veränd. Sem.-B. Bonn-Münster Heft 3 (1933).

BERGMANN, STEFAN [**1**]: Zwei Sätze über Funktionen von zwei kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 100 (1928); [**2**]: Über HERMITEsche endliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendung auf Fragen der Abbild. durch Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Z. Bd. 29 (1929); [**3**]: Anwendung eines KÖBEschen Satzes auf eine Klasse von Funkt. von zwei kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. Bd. 38 (1929); [**4**]: Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbild. durch Paare von Funkt. zweier kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 102 (1930); [**5**]: Anwendung des SCHWARZschen Lemmas auf eine Klasse von Funkt. von zwei kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 39 (1930); [**6**] Über Funkt. zweier kompl. Veränd., die ebene Pol- und Nullflächen besitzen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 39 (1930); [**7**]: Über d. schlichten Bereiche in der Theorie der Funkt.

von zwei kompl. Veränd. Crelles J. reine angew. Math. Bd. 162 (1930); [8]: Über ausgezeichn. Randflächen in der Theorie der Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 104 (1931); [9]: E. Bemerkung über schlichte Minimalabbild. S.-B. Berlin. math. Ges. Bd. 30 (1932); [10]: Über den Wertevorrat e. Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Z. Bd. 36 (1933); [11]: Zur Veranschaulichung der Kreiskörper usw. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 42 (1933); [12]: Über die Kernfunkt. eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. Crelles J. reine angew. Math. Bd. 169 (1933); [13]: Über die Nullstellen e. Funkt. von zwei kompl. Veränd. Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Bd. 35 (1932); [14]: Über eine in der Theorie der Funkt. von zwei kompl. Veränd. auftretende unitäre Geometrie. Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Bd. 36 (1933); [15]: Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemma über die Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 109 (1934); [16]: Über eine in gewissen Bereichen mit der Maximumfläche gültige Integraldarstellung von Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Z. (1934).

Bieberbach, L. [1]: Neuere Untersuchungen über Funkt. von kompl. Varbl. Enzyklop. Math. Wiss. II $C_4$ (1922); [2]: Beispiel zweier ganzer Funkt. zweier kompl. Var., welche eine schlichte volumentreue Abbildung des $R_4$ auf einen Teil seiner selbst vermitteln. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933.

Blaschke, W. [1]: Zur Geometrie der Funkt. zweier kompl. Veränd. Die Gruppen der Kreiskörper. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 5 (1927); [2]: Über topol. Fragen der Diffgeom. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 38 (1929).

Blumenthal, O.: Bemerk. über die Singularit. anal. Funkt. mehrerer Veränd. Weber-Festschr. 1912.

Bol, G.: Top. Frag. d. Diffg. 40. Zur Theorie der Funkt. zweier kompl. Veränd. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 9 (1932).

Brauner, K.: Zur Geometrie der Funkt. zweier kompl. Veränd. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 6 (1928).

Carathéodory, C. [1]: Über das Schwarzsche Lemma bei anal. Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 97 (1927); [2]: Über die Geom. der anal. Abbild., die durch anal. Funkt. von zwei Veränd. vermittelt werden. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 6 (1928); [3]: Über eine spezielle Metrik, die in der Theorie der anal. Funkt. auftritt. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei Bd. 80 (1927); [4]: Über die Abbild., die durch Systeme von anal. Funkt. von mehreren Veränd. erzeugt werden. Math. Z. Bd. 34 (1932); [5]: Über die anal. Abbild. von mehrdim. Räumen. Kongreß-Ber. Zürich 1932.

Cartan, Elie [1]: Sur la géom. pseudo-conf. des hypersurfaces de l'espace de deux var. compl. Ann. Mat. pura appl. IV Bd. 11 (1932); [2]: Sur la géom. pseudo-conf. des hypersurfaces de l'espace de deux var. compl. II. Ann. Scuola norm. super. Pisa II Bd. 1 (1932).

Cartan, H. [1]: Sur la croissance des fonct. mérom. d'une ou d. plus. var. compl. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 188 (1929); [2]: Sur la fonct. de croissance att. à une fonct. mér. de deux var. compl. etc. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 188 (1929); [3]: Sur les fonct. de deux var. compl. Les transform. d'un domaine borné $D$ en un domaine intér. à $D$. Bull. Soc. Math. France Bd. 58 (1930); [4]: Sur les fonct. de deux var. compl. Bull. Sci. math. Bd. 54 (1930); [4a]: Sur les variétés définies par une relation entière. Bull. Sci. math. Bd. 55 (1931); [5]: Les fonct. de deux var. compl. etc. J. Math. IX Bd. 10 (1931); [6]: Sur les domaines d'existence des fonct. de plus. var. compl. Bull. Soc. Math. France Bd. 59 (1931); [7]: Sur les transform. anal. des domaines cerclés et semi-cercl. bornés. Math. Ann. Bd. 106 (1932); [8]: Sur les fonct. de plus. var. compl. L'itération des transform. intér. d'un domaine borné. Math. Z. Bd. 35 (1932); [9]: Sur les groupes des transform. pseudo-conf. I, II. C. R. Acad. Sci., Paris

1933; [10]: Détermination des points exceptionnels d'un système de $p$ fonct. anal. de $n$ var. compl. Bull. Sci. math. Bd. 57 (1933).

CARTAN, H. u. P. THULLEN: Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. Bd. 106 (1932).

COUSIN: Sur les fonct. de $n$ var. compl. Acta math. Bd. 19 (1895).

FABER, G.: Über zusammengehörige Konvergenzradien von Potenzreihen mehr. Veränd. Math. Ann. Bd. 61 (1905).

FABRY: Sur les rayons de conv. d'une série double. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 134 (1902).

FATOU [1]: Sur les fonct. mérom. de deux var. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922); [2]: Sur certaines fonct. unif. de deux var. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922).

FELD, J. M. u. PH. NEWMAN: On representation of anal. funct. of sever. var. as infin. prod. Bull. Amer. Math. Soc. Bd. 36 (1930).

FORSYTH, A. R.: Lectures, introductory to the theory of funct. of two compl. var. Cambridge 1914.

FUBINI, G. [1]: Su un teorema del SEVERI per le funz. anal. di due var. Atti Accad. naz. Lincei Rend. VI Bd. 14 (1931); [2]: Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellit. che generalizza un teor. dell'HARTOGS ed uno del SEVERI. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 15 (1932).

GRONWALL, T. H. [1]: Bull. Amer. Math. Soc. (2) Bd. 20 (1914); [2]: On expressibility of uniform funct. of several compl. var. as quotient of two funct. of entire character. Amer. Math. Soc. Trans. Bd. 18 (1917).

HAHN, H.: Über Funkt. zweier kompl. Veränd. Mh. Math. Phys. Bd. 16 (1905).

HAMMERSTEIN, A.: Über Approximation von Funkt. zweier kompl. Veränd. durch Polynome. S.-B. preuß. Akad. Wiss. V 1933.

HARTOGS, F. [1]: Zur Theorie der anal. Funkt. mehr. unabhäng. Veränd., insbesondere über d. Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenz. einer Veränd. fortschreiten. Math. Ann. Bd. 62 (1906); [2]: Beiträge zur el. Theor. d. Potenzreihen u. d. eindeut. anal. Funkt. zweier Veränd. Diss. München 1904; [3]: Einige Folgerungen aus der CAUCHYschen Integralformel bei Funkt. mehr. Ver. Münch. Ber. Bd. 36 (1906); [4]: Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der anal. Funkt. mehr. Ver. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 16 (1907); [5]: Über die aus den singulären Stellen ein. anal. Funkt. mehr. Ver. bestehenden Gebilde. Acta math. Bd. 32 (1909); [6]: Über die Bedingungen, unter welchen eine anal. Funkt. mehr. Veränd. sich wie eine rationale verhält. Math. Ann. Bd. 70 (1911); [7]: Über den Beweis eines Satzes aus der Theorie der anal. Funkt. mehr. Veränd. Schwarz-Festschr. 1914.

HORSTMANN, H.: CARATHÉODORYsche Metrik und Regularitätshüllen. (Dissertation BEHNKE, Münster 1932); Math. Ann. Bd. 108 (1933).

HÖSSJER, GUSTAV: Über ein RIEMANNsches Problem in der Funkt.-Theorie. Lunds Univ. Arsskr. N. F. Avd. 2 Bd. 24 (1929).

JULIA, G.: Sur les familles de fonct. anal. de plus. var. Acta math. Bd. 47 (1926).

KÄHLER, E.: Über ein geometrisches Kennzeichen der anal. Abbildungen im Gebiete zweier Veränd. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig Bd. 80 (1928).

KNESER, H. [1]: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 5 (1926); [2]: Zur Diff.-Geometrie zweier kompl. Veränd.: Überflächen im vierdimens. Raume. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 7 (1930); [3]: Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten ein. anal. Funkt. zweier Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 41 (1932); [4]: Ein Satz über d. Meromorphiebereiche anal. Funkt. von mehr. Veränd. Math. Ann. Bd. 106 (1932); [5]: Die singul. Kanten bei anal. Funkt. mehr. Veränd. Math. Ann. Bd. 106 (1932); [6]: Beweis eines Satzes über rationale Funkt. zweier Veränd. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 9 (1933).

KRITIKOS [1]: Anal. Abbildungen des Gebietes $|x| + |y| < 1$ auf sich. Bull. Soc. Math. Grèce Bd. 8 (1927); [2]: Über anal. Abbild. einer Klasse von vierdimens. Gebieten. Math. Ann. Bd. 99 (1928).

KRZOSKA: Über die natürlichen Grenzen anal. Funkt. mehr. Veränd. (Dissertation KNESER, Greifswald 1933).

LEMAIRE: Sur les séries entières à plus. var. indépendantes. Darboux Bull. (2) Bd. 20 (1896).

LÉJA, F. [1]: Sur la distribution des valeurs de fonct. anal. dans leurs domaines d'existence. Ann. Soc. Polon. math. Bd. 1 (1922); [2]: Sur les surfaces singulières des fonct. anal. de deux var. compl. Ann. Soc. Polon. math. Bd. 1 (1922).

LEVI, E. E. [1]: Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni anal. di due o più var. compl. Ann. Mat. pur. appl. (3) Bd. 17 (1910); [2]: Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimens. che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funz. anal. di due var. compl. Ann. Mat. pur. appl. (3) Bd. 18 (1911); [3]: Serie di TAYLOR e funz. anal. di più var. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. V Bd. 21 (1912).

LEVI-CIVITA, T.: Sulle funz. di due o più var. compl. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. V Bd. 14 (1905).

LÖSCH, FR.: Lückensätze und Überkonvergenz bei zweifachen Potenzreihen. Math. Z. Bd. 36 (1933).

MATSUMURA, SOJI: Sätze von SCHOTTKY und LANDAU für Funkt. von zwei Veränd. Tôhoku Math. J. Bd. 36 (1932).

MYRBERG, P. J. [1]: Über die Singularitäten der HECKEschen Funkt. in reellen quadratischen Zahlkörpern. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 7 (1929); [2]: Über diskontin. Gruppen und automorphe Funkt. von mehr. Var. Atti Congresso Bologna Bd. 3 (1930); [3]: Über die Singularitäten der automorphen Funkt. mehr. Veränd. 5. Kongress Skandinav. Math. Helsingfors 1922; [4]: Über die automorphen Funkt. bei einer Klasse JONQUIÈREscher Gruppen zweier Veränd. Math. Z. Bd. 21 (1924); [5]: Über die automorphen Funkt. mehr. Veränd. Math. Ann. Bd. 93 (1925); [6]: Untersuchungen über die automorph. Funkt. beliebig vieler Var. Acta math. Bd. 46 (1925); [7]: Zur Theorie der automorph. Funkt. belieb. vieler Veränd. Acta Soc. Sci. Fennicae Bd. 50 S. 3 (1922); [8]: Über die wesentlichen Singularitäten der automorphen Funkt. mehr. Veränd. Ann. Acad. Sci. Fennicae (A) Bd. 20 S. 3 (1923).

NAKANO, HIDEGARO: Über den Konvergenzbereich einer zweifachen Potenzreihe und seine Anwendungen. Jap. J. Math. Bd. 9 (1932).

NALLI, PIA u. G. ANDREOLI: La formula di Green nel campo compl. e l'estensione del teorema di CAUCHY alle funz. di due var. compl. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 6 (1927).

NEWMAN, PH., u. J. M. FELD: On the representation of anal. funct. of sev. var. as infin. products. Bull. Amer. Math. Soc. Bd. 36 (1930).

OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. 2 erste Lieferung (2. Aufl.). Leipzig 1929; zitiert als OSGOOD Lb.

PASCAL, E.: Sugli integrali doppie delle funz. di var. compl. Rend. R. Accad. Sci. Napoli 1912.

POINCARÉ [1]: Sur les fonct. de deux var. Acta math. Bd. 2 (1883); [2]: Sur les résidus des intégrales doubles. Acta math. Bd. 9 (1887); [3]: Les fonct. anal. de deux var. et la représentation conforme. Rend. Circ. mat. Palermo Bd. 23 (1907).

REINHARDT, K. [1]: Über Abbildungen durch anal. Funkt. zweier Veränd. Math. Ann. Bd. 83 (1921); [2]: Anal. Abbild. im Gebiete zweier kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 30 (1921); [3]: Anal. Flächen und Minimalflächen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 36 (1927).

RÜCKERT, WALTER: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann. Bd. 107 (1932).

SAXER, W. [1]: Sur les familles de fonct. mérom. de plus. var. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 193 (1931); [2]: Über die normalen Scharen meromorpher Funkt. mehr. Var. Comment. math. helv. Bd. 4 (1932).

SEGRE, BEN [1]: Questioni geometr. legate colla teoria delle funz. di due var. compl. Rend. Semin. mat. Roma II Bd. 7 (1932); [2]: Questioni geometr. legate colla teoria delle funz. di due var. compl. Boll. Un. Mat. Ital. Bd. 10 (1931); [3]: Intorno al problema di POINCARÉ della rappres. pseudoconf. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 13 (1931).

SEVERI, F. [1]: La teoria elementare delle serie doppie. Period. Mat. 1923; [2]: Sull'insieme dei punti singol. di una funz. anal. di più var. Atti Accad naz. Lincei, Rend. VI Bd. 9 (1929); [3]: Sur une propriété fondamentale des fonct. anal. de plus. var. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 192 (1931); [4]: Il problema di DIRICHLET per le funz. biarmon. Mem. Accad. Ital. Bd. 2, Mat. N. 1 (1931); [5]: Contributi alla teoria delle funz. biarmon. Mem. Accad. Ital. Bd. 2, Mat. N. 5 (1931); [5a]: Risoluzione generale del probl. di DIRICHLET per le funz. biarmon. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 13 (1931); [6]: Sugli estremanti delle funz. di due var. Mem. Accad. Ital. Bd. 1 (1930); [7]: Risultati, vedute e problemi nella teor. delle funz. anal. di due var. compl. Rend. Semin. mat. Roma II Bd. 7 (1932); [8]: Una proprietà fondam. dei campi di olomorfismo di una funz. anal. di una var. reale e di una var. compl. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 15 (1932); [9]: Alcune proprietà fondam. dell'insieme dei punti singol. di una funz. anal. di più var. Mem. Accad. Ital. Bd. 3 Mat. N. 1 (1932).

SPÄTH, H.: Der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz. CRELLES J. reine angew. Math. Bd. 161 (1929).

THULLEN, P. [1]: Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern. (Dissertation BEHNKE, Münster). Math. Ann. Bd. 104 (1931); [2]: Die Starrheit der nicht überall pseudokonvexen Gebiete. Math. Ann. Bd. 104 (1931); [3]: Die Regularitätshüllen. Math. Ann. Bd. 106 (1932); [4]: Sopra le superficie di livello zero di una funz. intera di più var. compl. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI Bd. 18 (1933).

THULLEN-BEHNKE [1]: Das Konvergenzproblem der Regularitätshüllen. Math. Ann. Bd. 108 (1933); [2]: Bemerk. zu einer Arbeit von CARATHÉODORY. Math. Z. Bd. 37 (1933); [3]: Die Theorie der Regularitätsbereiche. Sem.-B. Bonn-Münster Bd. 2 (1932); [4]: Über die Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Produktsatzes. Math. Ann. Bd. 109 (1934); [5]: Der WEIERSTRASSsche Produktsatz bei Funkt. einer und zweier kompl. Veränd. Sem.-B. Bonn-Münster Heft 3 (1933).

THULLEN-CARTAN, H.: Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. Bd. 106 (1932).

TIETZE, H.: Über den Bereich absoluter Konvergenz von Potenzreihen mehr. Veränd. Math. Ann. Bd. 99 (1928).

TSUJI, M.: On anal. tranformations of a REINHARDT's domain into itself. Jap.. J. Math. Bd. 9 (1932).

VOLTERRA: Sopra una estensione della teoria di RIEMANN sulle funz. di var. compl. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. IV Bd. 4 (1888).

WEIL, A.: Sur les séries de polynomes de deux var. compl. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 194 (1932).

WELKE, H.: Über die anal. Abbild. von Kreiskörpern und HARTOGSschen Bereichen. (Dissertation BEHNKE, Münster.) Math. Ann. Bd. 103 (1930).

WIRTINGER [1]: Zur Theorie der autom. Funkt. von $n$ Veränd. Wiener Ber. Bd. 108 (1899); [2]: Zur formalen Theorie der Funkt. von mehr. kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 97 (1927); [3]: Über den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz. CRELLES J. reine angew. Math. Bd. 158 (1927).

# Zusammenstellung wichtiger Begriffe.

DARSTELLUNG UND BEGRUENDUNG

EINIGER

# NEUERER ERGEBNISSE DER FUNKTIONENTHEORIE

**By E. LANDAU**

**"... a veritable mine of important results."**

"In eight chapters it treats successively bounded power series, summability of higher order, converses of Abel's theorem, peculiarities of power series on its circle of convergence, relation between coefficients of a power series and its singularities, maxima and mean values of the modulus along circles, Picard's theorem, functions with one-valued inverses ...

"The monograph is composed in the individual, really inimitable style which characterizes Landau's publications. A minimum of initial knowledge is assumed of the reader.

"To students of analysis, or of number theory, one canot recommend too highly the study of Landau's writings both original and expository. Their richness of substance, depth of scholarship, and technical perfection give them an outstanding position in the current literature."—*J. F. Ritt, American Mathematical Monthly.*

Second edition, 1929 122 pages $5\frac{1}{4}$ x 8 inches

Originally published at $4.00

**$2.95**

# DIE IDEE DER RIEMANNSCHE FLÄCHE

## By H. WEYL

"The lectures by Weyl aim at two things, *viz.*, laying with complete rigor the foundations for the construction of Riemann surfaces, and then showing their usefulness by considering on them various integrals, the Riemann-Roch theorem, Abel's theorem, and the problem of uniformizing functions . . .

". . . evidence in the plan, the choice of material, and the exposition, that he is a master of the subject . . . **exceptionally well done both in mathematical quality and method of presentation."**—*Bulletin of the American Mathematical Society.*

PARTIAL CONTENTS: **I. Concept and Topology of Riemann Surfaces.** 1. Weierstrass' Concept of analytic function. 3. Relation between the Concepts of "Analytic Function" and "Monogenic Analytic Function in the Large." 7. Concept of the Riemann Surface. 9. Universal Covering Surfaces . . . 10. One- and two-sided Surfaces. 11. Integral Functions. Genus. Canonical Cuts.

**II. Functions on Riemann Surfaces.** 12. Dirichlet's Integral. 15. Proof of Dirichlet's Principle. 19. Uniformization. 20. Non-Euclidean Groups of Motions. Poincaré's Theta Series. 21. Conformal Mapping on a Riemann Surface.

Second edition, 1923 200 pages 5½ x 8½

**$3.50**

LECTURES ON THE

GENERAL THEORY OF

# INTEGRAL FUNCTIONS

By G. VALIRON

"These lectures give us in the form of elegant and illuminating theorems, the latest word of mathematical science on the subject of Integral Functions. And they do more. They descend to details, they take us into the workshop of the working mathematician, they explain to us the nature of his tools, and show us the way to use them; while at the same time . . . they inspire us with the desire and furnish us with the means of completing [the development of the subject] ourselves.

**"The book will not be found difficult by the earnest student. He may hope to master it without any elaborate preliminary preparation.**

"For the philosophic mathematician the subject is particularly instructive, showing, as it does, the power of a single fundamental idea, that of generalization . . . applied to a particular concept, that of polynomial." (*from the Preface*) *W. H. Young.*

1923 xii+208 pages 5¼ x 8 inches

**$3.50**

# LE CALCUL DES RÉSIDUS

## By E. LINDELÖF

The calculus of residues has important applications in a striking diversity of mathematical fields: statistics, number theory, the theory of Fourier series, the calculus of finite differences, mathematical physics and advanced calculus as well as function theory itself.

Lindelöf's standard treatise is from the famous series of books on function theory, the *Collection Borel.* Long out of print, this work will find a welcome place in the libraries of statisticians, mathematicians and mathematical physicists.

PARTIAL CONTENTS

Function-theoretic principles and fundamental theorems.

Applications to meromorphic functions, Bernoulli numbers and definite integrals.

Summation formulas (including the bearing of summation formulas on the convergence of Fourier Series).

Gamma, Zeta and other special functions.

Applications to analytic continuation and to the asymptotic study of functions defined by Taylor series.

Cloth 151 pages $5\frac{1}{2}$ x $8\frac{1}{2}$ inches

**$2.95**