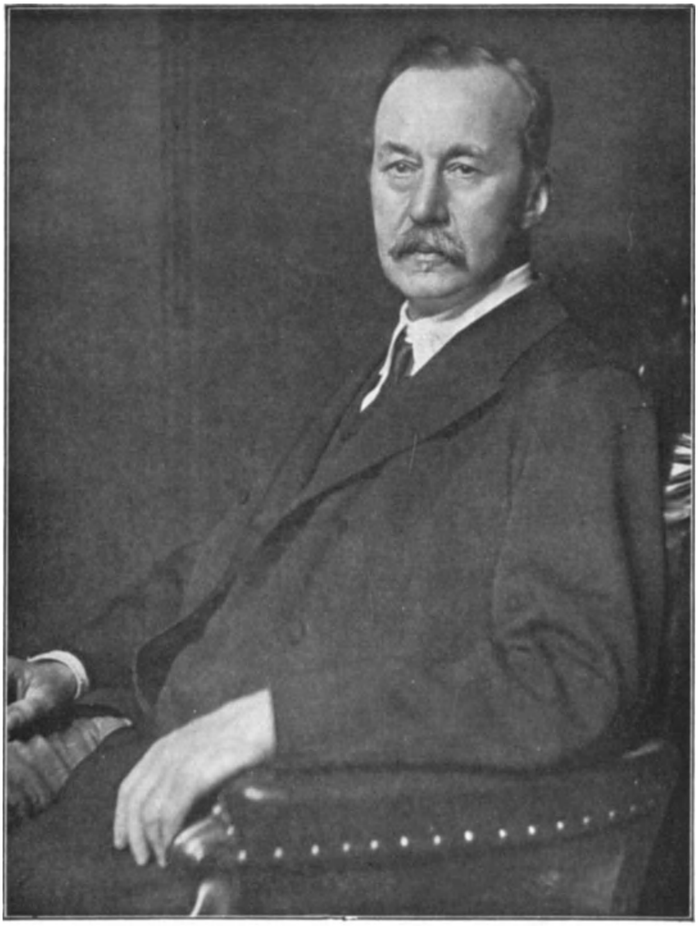
HAMBURGER
MATHEMATISCHE EINZELSCHRIFTEN
3. HEFT / 1926

WILHELM WIRTINGER

ALLGEMEINE INFINITESIMALGEOMETRIE UND ERFAHRUNG

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1926

ISBN 978-3-663-15670-3 ISBN 978-3-663-16247-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16247-6



dr W. Wirtinger

Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung[1])

Von WILHELM WIRTINGER in Wien.

I.

Die folgenden Darlegungen sind einem Kreis von sehr verschiedenartigen Problemen gewidmet, von denen der größte Teil mathematischer Art ist, zu deren Stellung und Bearbeitung ich aber von allgemeinen Überlegungen aus geführt wurde, welche enge mit Gedanken über die Art der geistigen Verarbeitung unserer Sinneserfahrungen zusammenhängen. Es liegt mir völlig ferne, die Aufstellung eines abgeschlossenen Lehrgebäudes über dieses Problem auch nur zu versuchen. Vom naiven Realismus angefangen, der die Dinge so nimmt, wie die Sinneseindrücke von ihnen berichten, den cartesianischen Zweifeln, dem englischen Sensualismus bis herauf zum Solipsismus, der alles nur als Vorstellung oder doch geistiges Erlebnis des Individuums gelten lassen will, sind hier so viele Möglichkeiten entwickelt und kritisiert worden, mit Argumenten, welche zum großen Teil schon im antiken Pyrrhonianismus und Skeptizismus, zum Teil noch früher vorgebildet sind, daß es als Anmaßung erscheinen würde, vom Boden der Schulung in einer einzigen Wissenschaft aus hier einen Abschluß zu versuchen.

Am ehesten würde ich noch dem meines Wissens in Indien vertretenen Gedankengang zustimmen, der besagt, daß wir zwar dermalen keine Einsicht in das wahre Wesen der Dinge haben, aber daß es vielleicht möglich ist, durch fortwährende Ausbildung unserer Fähigkeiten einer solchen Einsicht näherzukommen. Vielleicht hat der unleugbare Trieb nach wissenschaftlicher Erkenntnis und geistiger Arbeit seine Wurzel in einem solchen Glauben und ist ein Suchen nach diesem Ziel.

Dabei nimmt nun die Mathematik eine eigentümliche Stellung ein. Ihre Anfänge, das Zählen und Messen, weisen auf ihren Ursprung unter dem Einfluß der einfachsten Erfahrungen hin, ihre Fragestellungen entspringen häufig aus der Außenwelt, aber sie gewinnen bald unter dem Einfluß ästhetischer und methodischer Interessen eine ganz eigenartige, zunächst der Wirklichkeit wenigstens scheinbar abgewandte Gestalt und Weiterentwicklung, um dann oft unerwartet wieder Anwendung zu finden und ihrerseits neue Anregung zu geben. Schon die antike Überlieferung

[1]) Im folgenden ist der wesentliche Inhalt von Vorträgen wiedergegeben, die ich am 14., 15. und 17. Juli 1925 in Hamburg gehalten habe.

weist auf beides hin, wenn einmal die Geometrie in Ägypten aus den Bedürfnissen der Landmessung entstanden sein soll und nach dem hausbackenen Urteil des SOKRATES[2]) die höheren Fragen nur von wichtigeren Dingen abhalten, das andere Mal aber nach ARISTOTELES[3]) sie ihren Ursprung dem Umstand verdanken soll, daß die ägyptischen Priester Zeit hatten, darüber nachzudenken.

Wie dem nun auch sei, jedenfalls möchte ich mich der Mathematik als eines vorhandenen und weit ausgebildeten Hilfsmittels zur genaueren Darstellung der im folgenden zu entwickelnden Gedanken bedienen, dessen Ergebnissen auch ein gewisses Gewicht beizulegen ist, ohne damit den Anspruch zu erheben, daß sie schon an sich ein oberstes Gesetz und eine Richtschnur für die geistige Verarbeitung der Dinge oder besser der Erfahrung von den Dingen seien.

Eine erste Forderung für eine solche Erfahrung ist jedenfalls ein einigermaßen genaues Erinnerungsvermögen, welches uns gestattet, verschiedene Wahrnehmungen miteinander zu vergleichen, und zwar auch dann, wenn wir uns auf Messungen beschränken und diese im Sinne EINSTEINS als Koinzidenzen auffassen. Denn auch die Vergleichung verschiedener Koinzidenzen, die wir nicht gleichzeitig wahrnehmen, ist an das Gedächtnis gebunden. Dazu kommen noch Nachrichten, die wir von anderen über ihre Wahrnehmungen erhalten. Dabei kommen allerdings nur diese Nachrichten als Wahrnehmungen in unser Bewußtsein, aber wir beziehen sie irgendwie auf der Hauptsache nach ähnliche Vorgänge wie unsere eigenen Wahrnehmungen oder suchen sie durch Wiederholung ähnlicher unseren eigenen anzugliedern. Beziehen sich diese auf Messungen, so stimmen sie entweder untereinander überein oder aber — und das ist öfter der Fall — sie zeigen gewisse Abweichungen gegeneinander, die wir in Beziehung zu setzen suchen. Sind die Beobachtungen, also die Zahlenergebnisse, nicht zu sehr abweichend, so bedienen wir uns seit altersher der linearen Interpolation, um sie aufeinander oder auf ein ausgewähltes veränderliches System zu beziehen.

So, wenn der Anfang des Jahres, der Durchgang der Sonne durch den Frühlingsnachtgleichenpunkt bestimmt wird. Das ausgewählte veränderliche System ist dabei zunächst die Stellung des Fixsternhimmels zum irdischen Horizont, die verschiedenen Beobachtungen die scheinbaren Orte der Sonne am Fixsternhimmel an den dem Zeitpunkt des Durchgangs benachbarten Tagen; und hieraus wird in erster grober Annäherung durch lineare Interpolation die Lage des Fixsternhimmels zum Horizont, d. h. die Zeit im Augenblick des Durchgangs der Sonne durch den Äquator bestimmt. Die ersten Bestimmungen des Vorrückens der

---

[2]) XENOPHON, Memorabilien IV, 7.

[3]) Metaphysik I, 1.

Nachtgleichen bilden wieder ein Beispiel solcher linearen Interpolation, bei der die Beobachtungen zwar zeitlich weit auseinanderliegen, aber doch in anderer Beziehung die Änderung so klein ist, daß lineare Interpolation angewendet werden kann.

Die begriffliche Verarbeitung der linearen Interpolation, insbesondere aber die Bemerkung, daß sie um so genauere Ergebnisse zeitigt, je kleiner das Intervall ist, führt zur — zunächst vorstellungsmäßigen und naiven — Differentialrechnung und ihrer weiteren Ausbildung.

Aber die Methode der linearen Interpolation kann noch eine andere Anwendung finden. Wenn man nämlich auf einen bestimmten Komplex von Erscheinungen seine Aufmerksamkeit richtet, so beobachtet man, daß zwar ein Teil der Beobachtungen und Messungen sich innerhalb dieses Komplexes abspielt, daneben aber noch andere Beziehungen vorhanden sind, deren Ursache außerhalb des beobachteten Komplexes liegt oder aber unbekannt ist. Wir mögen dann in erster Annäherung diese unbekannten Einflüsse als lineare Funktionen derjenigen Veränderlichen, die wir nicht ausschalten können, der Zeit, ansehen. Die Anwendung auf unbekanntes ist zunächst völlig hypothetisch. Die Hypothese kann aber kontrolliert werden durch systematische Abänderung des in Betracht gezogenen Komplexes, in dem etwa einige seiner Teile abgespalten und als „unbekannt" behandelt werden oder auf mannigfache andere Art. Wenn wir diesen Ansatz auf die Bewegung eines freien Massenpunktes anwenden, der uns zugänglichen Einflüssen, also Kräften unterworfen ist, so liegt es nahe, das Wesentliche dieser Einflüsse so zu messen, daß die unbekannten Einwirkungen eliminiert werden, also im klassischen Fall durch zweite Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit; dies ist gleichbedeutend mit der Annahme des Galileischen Trägheitsgesetzes.

Der große Erfolg der Methoden der Differential- und Integralrechnung hat es mit sich gebracht, daß in den seit Jahrtausenden wechselnden Neigungen zwischen kontinuierlicher Auffassung und Zerspaltung in kleinste, aber endliche Elemente[4]) die erste lange Zeit die Oberhand behielt und auch jetzt, wo in der Quantentheorie wieder die andere Seite mehr zur Geltung kommt, diese doch mit von der kontinuierlichen Auffassung der Erscheinungen ausgebildeten Methoden arbeitet.

---

[4]) Ich erinnere an die Lösung der Aufgabe, die von Buddha berichtet wird, die Größe eines Elementarteilchens zu bestimmen (Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, S. 612 der 3. Aufl.), ferner an die merkwürdigen Argumente, mit denen Lucretius, de rerum natura I 328 ff. die atomistische Auffassung Epikurs und besonders die Existenz des „Leeren" verteidigt. Vielleicht hängt auch die Sandrechnung des Archimedes damit zusammen, die vielleicht selbst ein pythagoreisches Problem war, wenn man bedenkt, daß Horaz den letzten Pythagoräer Archytas v. Tarent einen „mensorem numero carentis arenae" nennt. (Horatius, lib. I od. 28.)

Über all dem hatte sich aber das aus dem klassischen Altertum überkommene Gerüst von Raum und Zeit, in welches wir das gesetzmäßige Geschehen einordnen, immer mehr befestigt und mehr und mehr in unserer Vorstellung den Charakter von etwas unabänderlich gegebenem, unabhängig von der Art seiner Erfüllung und des Geschehens darin, angenommen[5]. Es hat zwar zu keiner Zeit an Widerspruch dagegen von philosophischer Seite gefehlt, auch nicht an Versuchen, dieses Gerüst in der Wirklichkeit wenigstens hypothetisch zu fundieren, aber eine bewußte und völlige Befreiung von dieser Auffassung ist erst durch die Relativitätstheorie EINSTEINS gegeben worden. Sie bringt klar zum Ausdruck, daß unsere Maße von Raum und Zeit selbst mit dem Geschehen verknüpft sind, so wie es in anderen Gebieten der Physik längst geläufig war, das Meßinstrument, etwa das Thermometer, selbst als Teil des zu messenden Systems und davon als beeinflußt zu betrachten. Das konnte aber erst geschehen, nachdem in abstrakter Gestalt das mathematische Rüstzeug bereitgestellt war, durch Entwicklung der Gedanken GAUSS' und RIEMANNS.

All dies hat endlich dazu geführt, als wesentlich und erkennbar den Zusammenhang der materiellen Gebilde untereinander durch Vermittlung des unendlich kleinen, d. h. also durch die Art des stetigen Überganges von einer Stelle zur Nachbarstelle zu bestimmen. Dabei ist aber immer noch dem Umstand nicht Rechnung getragen, daß wir eigentlich nur Nachrichten, Sinneseindrücke empfangen, die wir vielleicht aufeinander reduzieren können, deren Beziehung zur Außenwelt aber, wie diese selbst, zunächst hypothetischer Natur ist.

II.

Lassen wir uns nun, um weiterzukommen, wieder mit ARISTOTELES[6] von der Analogie der deutlichsten Wahrnehmungen, der Gesichtswahrnehmungen, leiten, so bemerken wir, daß eigentlich nur Sehstrahlenrichtungen wahrgenommen werden, welche, wenn wir etwa ein Gebäude oder einen Berg betrachten, bei Ortsänderung unsererseits sich gesetzmäßig stetig ändern; und aus dieser Änderung ziehen wir Schlüsse auf die relative Lage der Dinge zu uns und deren Änderung.

Es sind also nur die letzten Wegelemente der Lichtstrahlen, welche Wahrnehmungen bei uns auslösen, und die Beobachtung ihrer gegenseitigen Änderung findet ihre, allerdings noch immer naive Erklärung

---

[5]) So ist die beständige Betonung der Notwendigkeit des „inane" des „Leeren" bei LUCRETIUS l. c. oder die wichtige Rolle, die der Raum, in welchem ein bewegter Körper ist oder nicht ist, bei ZENO, dem Eleaten, spielt, nur so verständlich.

[6]) Metaphysik I am Anfang.

in der Annahme einer relativen Ortsveränderung von uns gegenüber den Ausgangspunkten der Lichtstrahlen. Wenn wir also in einem dreidimensionalen Gebiet, welches wir durch drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 festlegen, eine solche Wahrnehmung machen, so sind uns dadurch verschiedene Verhältnisse von Differentialen dx_1, dx_2, dx_3; $d'x_1$, $d'x_2$, $d'x_3$ usw. gegeben, zwischen denen Beziehungen bestehen, welche selbst von x_1, x_2, x_3 abhängen.

Das führt aber weiter dazu, überhaupt jede sinnliche Wahrnehmung aufzufassen als eine Wahrnehmung von Differentialverhältnissen in einem Gebiet von mindestens vier Veränderlichen, nämlich den althergebrachten Ortsbestimmungen des Raumes und einer vierten, der Zeit. In der Tat ist in der klassischen Physik das der Erfahrung Entnommene immer durch Richtungen, Geschwindigkeiten und Energien ausgedrückt und ebenso in der relativistischen Physik der Energie-Impulstensor als eine Differentialform angenommen. Die Beschränkung auf vier Veränderliche ist jedoch zunächst nur durch den Erfolg begründet und wir stellen daher die weiteren Betrachtungen sogleich in einem Gebiet von n Veränderlichen an.

Wir denken uns also einen Beobachter in einem Punkt des n-dimensionalen Raumes der Veränderlichen x_1, x_2, $\cdots$, x_n, welcher seine Eindrücke längs der durch die Verhältnisse der dx_1, $dx_2, \cdots$, dx_n bestimmten Richtungen empfängt, die man sich etwa als letzte Wegelemente von Kurven im x-Gebiet denken mag, längs deren die Eindrücke von den Ereignissen im x-Gebiet zu ihm gelangen. Da sein Standpunkt in diesem Gebiet selbst veränderlich zu denken ist, so wird er diese etwa durch ein Verfahren der linearen Interpolation in genügend kleinem Umfang auf einen Normalort beziehen können. Für viele Zwecke wird er zuerst sogar davon absehen können. Das Gebiet der Variabeln x aber, in welchem die lineare Interpolation angewendet werden kann, wird von dem Erfolg derselben abhängen und damit von der Genauigkeit der Beobachtungsmethoden. Mit fortschreitender Verfeinerung dieser wird der Umfang des Gebietes immer mehr eingeengt und wir kommen schließlich zu einem Grenzfall, den wir etwa als momentane Beobachtungen bezeichnen können.

Um dies mathematisch auszudrücken, können wir n Größen η^1, $\eta^2, \cdots$, η^n einführen, welche den dx_1, $dx_2, \cdots$, dx_n proportional sind und deren Verhältnisse bestimmte Wahrnehmungen zueinander in ähnlicher Weise festzulegen gestatten wie die Richtungen des euklidischen Raumes. Aber diese η^α ($\alpha = 1, 2, \cdots, n$) sind dann nichts anderes als lineare homogene Koordinaten eines Raumes von $n-1$ Dimensionen. Da uns ferner die x_α unbekannt sind, bei Einführung anderer x_α aber, etwa x'_α, die diesen entsprechenden η'^α mit den ursprünglichen η^α

durch eine lineare, homogene Substitution zusammenhängen mit Koeffizienten, welche im Gebiet der einzelnen momentanen Beobachtung nur von den x_α oder den x'_α des augenblicklichen Beobachtungsorts abhängen, also für die momentane Beobachtung selbst konstant sind, so bleiben alle Beziehungen zwischen einem η-System und einem η'-System ungeändert erhalten, welche gegenüber linearen Transformationen mit konstanten Koeffizienten invariant sind. Diese beanspruchen daher ein besonderes Interesse und *ihre Entwicklung ist nichts anderes als die projektive Geometrie des linearen Raumes von $n-1$ Dimensionen.*

Ich stelle mir natürlich nicht vor, daß historisch genau dieser Weg eingeschlagen wurde, aber es scheint mir plausibel, daß die hier entwickelte Auffassung zusammen mit vielen anderen Erfahrungen, die bei der Bearbeitung der Sinneswahrnehmung gemacht wurden, dabei vielleicht unbewußt eine gewisse Rolle gespielt hat, und man mag zugeben, daß sie den merkwürdigen Umstand, daß wir gerade eine Dimension weniger, als für die Erklärung der Erscheinungen zweckmäßig ist, und in dieser gerade die projektive Auffassung als erste über die elementare Metrik hinausgehende entwickelt haben, verständlich macht. Nach dieser Auffassung wäre also der Raum der momentanen subjektiven Wahrnehmungen im n-dimensionalen Gebiet ein $n-1$-dimensionaler linearer projektiver Raum, ganz gleichgültig, wie im n-dimensionalen Raum der Ereignisse die Einordnung dieser geschieht. Ich will diesen letzteren Raum in Zukunft der Kürze halber als objektiven Raum bezeichnen im Gegensatz zum Raum des Beobachters der η^α, den ich als subjektiven Raum bezeichnen will[7]).

Für den einzelnen momentanen subjektiven Raum entsteht sonach beim Wechsel der Variabeln keine Schwierigkeit, wenn projektive Geometrie herangezogen wird. Nun ändert sich aber dieser Raum im Laufe der Ereignisse, d. h. mit Änderung der x_α, und hieraus entsteht eine Schwierigkeit, wenn zwei solche Räume zueinander in Beziehung gesetzt werden sollen; dies aber ist unvermeidlich, wenn ein Beobachter seine Erfahrungen zu verschiedenen Zeiten miteinander vergleichen will. Wenn man nämlich für ein Wertsystem der x_α, also an einer Stelle des objektiven Raumes, die Verhältnisse der Differentiale, also die η^α, be-

[7]) In diesen Sätzen spricht sich die große Umwälzung aus, die in den letzten Jahrzehnten unsere Anschauungen von Raum und Zeit erfahren haben. Nicht eine Mehrheit von Dimensionen wird begründet, sondern erklärt, warum wir zunächst eine Dimension weniger verwenden. Die Schlagworte „Unsinn, Spielerei, unnützer Ballast, ‚nur' heuristisch, Arbeitshypothese", an welche wohl alle Mathematiker der älteren Generation sich heute noch erinnern, drücken recht gut die Stufen aus, auf denen der wohl zuerst von Riemann explizit verwendete Begriff des n-dimensionalen Raumes zur heutigen Selbstverständlichkeit aufstieg. Im Vergleich zu anderen Begriffen, z. B. dem der Irrationalzahl ist der Zeitraum jedoch ein verhältnismäßig kurzer.

trachtet und sodann an einer anderen Stelle x'_α die η'^α, so hat es einen Sinn, die Verhältnisse der η^α und der η'^α miteinander zu vergleichen, wenn die Variabeln x_α dieselben geblieben sind. Nun sind aber diese Variabeln an der einzelnen Stelle unbekannt, nur die η^α der Beobachtung zugänglich und bloß solche Beziehungen für den momentanen subjektiven Raum gegeben, welche von der Wahl der Variabeln unabhängig sind. Werden also an einer anderen Stelle die η'^α gebildet, so gilt von ihnen das gleiche und eine Vergleichung oder Beziehung der beiden Beobachtungen ist nur insofern möglich, als durch irgendein anderes Mittel wenigstens die Verhältnisse bestimmter η^α auf die bestimmter η'^α bezogen werden; in bezug auf diese können dann die übrigen durch projektive Koordinaten festgelegt werden. Ohne ein solches Mittel der Beziehung würde die Annahme eines festen Systems von Variabeln genau dieselben prinzipiellen Schwierigkeiten bieten, wie etwa die Annahme eines festen Bezugskörpers und ähnliches in der klassischen Theorie. Es ist nicht ohne Interesse und dient auch vielleicht der Deutlichkeit, diesen Gedanken für die niedrigsten Dimensionszahlen $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ genauer zu verfolgen.

Auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der x, die wir uns unter dem Bilde einer gewöhnlichen Fläche denken können, sind die momentanen Beobachtungen also durch ein Verhältnis $\eta^1 : \eta^2$ gegeben, d. h. dem Strahlenbüschel in der Tangentialebene zugeordnet. Soll nun überhaupt eine von der Wahl der x unabhängige, also projektiv invariante Beziehung festgestellt werden, so müssen mindestens drei solche Strahlen ausgezeichnet werden. Jeder vierte ist dann durch sein Doppelverhältnis in bezug auf diese drei Strahlen bestimmt.

Wählt man einen, etwa durch ein bestimmtes Ereignis oder eine Nachricht bestimmter Art ausgezeichneten Strahl fest und legt die beiden anderen durch die Kreispunkte der Tangentialebene, so hat man im Logarithmus des Doppelverhältnisses jedes vierten in bezug auf diese drei den Winkel im üblichen Maß. Natürlich ist dies nur eine Einordnung des sich aus anderen Gründen als zweckmäßig erweisenden Winkelmaßes in die hier entwickelte Gedankenreihe und nicht eine Erklärung der Herkunft des Winkelmaßes.

In dieser Lage befindet man sich etwa auf einem Schiff mit einem Kompaß, womit man am Rande des Horizonts die gegenseitige Lage einzelner Leuchttürme feststellt. Bewegt sich nun das Schiff in einer sonst unbekannten Bahn, so ändern sich die Winkel zwischen den Leuchttürmen, unsere eindimensionale Welt ändert sich, sie hängt noch von einem Parameter ab, als den wir etwa den Winkel der Richtung eines Leuchtturms mit der Magnetnadel ansehen können. Um aber überhaupt zur Kenntnis der Veränderung zu kommen, müssen wir wenigstens eine absolute projektive Invariante haben, also mindestens vier Ereignisse, von denen allerdings einige durch Kombination unvollständiger Beobachtungen oder gegenseitiger Lageänderung einer größeren Anzahl ersetzt werden können[8]).

Ebenso würden wir in einer dreidimensionalen objektiven Welt einen zweidimensionalen subjektiven Raum aufbauen, in welchem wir vier ausgezeichnete Verhältnisse der η^α auszuwählen hätten, in bezug auf die dann jedes weitere η-System durch zwei projektive Koordinaten festgelegt wäre. Die Änderung längs eines Weges im objektiven Raum würde wieder zur Einführung eines Parameters führen, für den eine der Koordinaten eines Strahls genommen werden könnte.

In einem objektiven Raum von vier Dimensionen würden wir so zu einem subjektiven Raum von drei Dimensionen geführt und hätten fünf ausgezeichnete Punkte in ihm, d. h. Verhältnisse der η^α festzuhalten, auf die wir jedes sechste beziehen; die Veränderung in der Beziehung dieser sechs Punkte oder Richtungen geben dann Anlaß zur Einführung eines vierten Parameters. Die Wahl dieses vierten Parameters ist zwar an sich gleichgültig, wird aber doch nach Zweckmäßigkeitsrücksichten den Beobachtungen anzupassen sein. Dabei bietet sich besonders eine Möglichkeit dar. Wenn nämlich ein besonders auffallendes System von η-Werten eine Veränderung zeigt, welche die Eigenschaften einer eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe im Sinne Lies besitzt, so ist dies nach der Methode der linearen Interpolation und im Grenzfall der Differentiation feststellbar, ganz unabhängig von der speziellen Wahl der Koordinaten. Eine solche eingliedrige Gruppe kann auf die Normalform gebracht werden und in dieser ist der Parameter additiv; d. h. entspricht in bezug auf eine gewisse Ausgangsstellung einer zweiten Lage der Parameterwert t und einer dritten in bezug auf die zweite der Parameterwert t', so ist $t+t'$ der Parameterwert, welcher der letzten Lage in bezug auf die ursprüngliche entspricht. Der große Vorteil für die Beobachtung und Verwertung eines solchen Parameters ist deutlich genug, weil jede Stellung als Ausgangsstellung aufgefaßt werden kann und die Parameterwerte leicht auf sie bezogen werden können. Eine solche Erscheinung ist uns in weitgehender Annäherung durch die tägliche Bewegung des Fixsternhimmels gegeben und wir haben in der Tat unseren vierten Parameter, die Zeit, auf diese Erscheinung aufgebaut.

Die bisherigen Darlegungen sind frei von jeder Bezugnahme auf eine bestimmte Metrik und sind ein Versuch, auf Grund infinitesimaler Auffassung davon Rechenschaft zu geben, warum tatsächlich die projektive Geometrie unabhängig im Anschluß an die Erfahrung entwickelt wurde und neben den drei Dimensionen des Raums der Erfahrung noch ein vierter Parameter in eigenartiger Sonderstellung, die Zeit, eingeführt

[8]) Z. B. wenn drei Strahlen nicht selbst gegeben sind, sondern nur die zyklische Projektivität, die sie bestimmen.

wurde, die danach nur aus Veränderungen im Raum erkannt werden kann. Diese letztere Auffassung war schon EPIKUR geläufig und bei LUCRETIUS lesen wir (De rerum natura I 459—463)[9]):

> Tempus item per es non est, sed rebus ab ipsis
> consequitur sensus, transactum quid sit in aevo,
> tum quae res instet, quid porro deinde sequatur;
> nec per se quemquam tempus sentire fatendum est
> semotum a rerum motu placidaque quiete.

> So auch besteht die Zeit für sich nicht; erst aus den Dingen
> selber ergibt der Begriff sich von dem, was früher geschehen,
> was jetzt eben geschieht und was in der Folge geschehn wird.
> Noch hat keiner die Zeit als was für sich selber empfunden,
> von der Bewegung der Dinge getrennt und friedlichen Ruhe.

Es ist dabei auch über die Art der Nachrichten aus dem objektiven Raum nichts vorausgesetzt, als daß sie längs letzter Wegelemente eintreten und eine gewisse Gleichartigkeit aufweisen, die uns gestattet, die verschiedenen der Reihenfolge nach gegebenen Erinnerungsbilder — und dies ist ein unentbehrliches subjektives Moment — aufeinander so zu beziehen, daß wir wenigstens einen stetigen Übergang zwischen ihnen herstellen können.

III.

Man wird zugeben, daß damit unsere historisch und psychologisch entwickelte Auffassung von Raum und Zeit viel näher an diejenige der Relativitätstheorie angeschlosssn wird, welche als „Welt“ ein Gebiet von vier Veränderlichen zugrunde legt.

Allerdings entsteht damit aber eine neue Frage. Nämlich, wenn wir etwa die relativistische Auffassung der vierdimensionalen „Welt“ zugrunde legen, so können wir uns den Beobachter darin längs einer Linie bewegt denken und sein Bündel der η^α ändert sich dann in seiner Beziehung zu den äußeren Ereignissen, aus denen er, etwa geleitet vom Gruppenbegriff, eine solche Auswahl trifft, die ihm einen passenden Parameter zu bilden gestattet. Aber über das Verhalten seines Bündels bei etwaiger Verschiebung außerhalb der von ihm durchlaufenen Linie kann er gar keine weiteren Erfahrungen oder Beobachtungen machen. Dagegen ist es möglich, daß zwei Beobachter an einer Stelle ihre η-Systeme vergleichen und dann einander nochmals begegnen, wieder eine Vergleichung vornehmen und einander gegenseitig über den Verlauf der

[9]) Die deutsche Übersetzung nach W. BINDER in der Langenscheidtschen Bibliothek, 65. Band. Statt „Begriff“ würde ich lieber sagen Wahrnehmung, was auch in dem lateinischen sensus liegt.

Abhängigkeit der η^α von dem Parameter berichten; oder was auf dasselbe hinauskommt, man wird das Verhalten der η^α bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges auf der Mannigfaltigkeit der x_α zu erforschen trachten. Dabei wird es aber vielleicht nicht immer möglich sein, das einzelne η^α zu verfolgen, sondern nur ein ganzes Gebilde des R_{n-1} der η^α, etwa im R_3 einen oder mehrere Kegel des zugehörigen Bündels, und es wird eine sehr allgemeine Annahme sein, wenn wir ins Auge fassen, daß eine Mannigfaltigkeit M_{n-2} mit ihren linearen Berührungsmannigfaltigkeiten im Punkte x wieder in eine solche im Punkte x' übergeht, wobei die neue Mannigfaltigkeit M'_{n-2} von dem zwischen x und x' durchlaufenen Wege abhängt, aber nicht notwendig schon das einzelne η'^α durch ein entsprechendes η^α bestimmt sei, sondern daß erst ein η^α zusammen mit einer dieses η^α enthaltenden linearen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen ein ebensolches η'^α mit der zugehörigen linearen Mannigfaltigkeit bestimme und außerdem eine M_{n-2} der η^α mit ihren linearen Berührungsmannigfaltigkeiten wieder in eine solche im Punkt x' übergehe.

Dies drücken wir mathematisch so aus, daß das Bündel der η^α im Punkte x mit dem Bündel η'^α im Punkte x' durch eine *Berührungstransformation*[10]) verbunden sei, welche jedoch noch von dem Weg abhängen kann, auf dem x in x' übergeführt wurde. Wollen wir die Abhängigkeit vom Weg ausdrücken und halten zugleich daran fest, daß wir immer nur Beziehungen zwischen infinitesimal benachbarten Stellen ins Auge fassen, so müssen wir beim Übergang von einem Punkt zum unendlich benachbarten eine infinitesimale Berührungstransformation des η-Raumes annehmen, welche dann vom Punkte x, der Richtung der Verschiebung dx_α, dem betreffenden η^α und den Bestimmungsstücken der durch η^α gehenden linearen M_{n-1}, die aber im Raume der homogenen η^α nur als eine M_{n-2} erscheint, abhängt.

Um dies in Formeln zu fassen, führen wir neben den η^α, welche sich bei Transformation der x_α transformieren wie die Differentiale dx_α, ein System von Größen v_α ein, welche sich dabei transformieren sollen wie die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$, also in Formeln

$$
\begin{aligned}
& x'_\alpha = \varphi_\alpha(x_\beta) \\
(1) \qquad & \eta'^\alpha = \eta^\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}; \qquad v'_\alpha = v_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}.
\end{aligned}
$$

---

[10]) Diesen Gedanken habe ich zum erstenmal behandelt in dem Aufsatz „On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity". Transactions of the Cambridge Philosophical Society Vol. XXII No. XXIII pp. 439–448. (Received July 23, Read October 31, 1921.)

Dabei sollen die φ_α (x_β) irgendwelche reguläre Funktionen mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante bedeuten. Es ist dann identisch

$$\eta^\alpha v_\alpha = \eta'^\alpha v'_\alpha .$$

Die Gesamtheit aller dieser Transformationen, also aller regulären Punkttransformationen des x-Raumes, bildet ersichtlich eine Gruppe, die wir der Kürze halber mit $\boldsymbol{P}$ bezeichnen wollen.

Bei Verschiebung der x_α in der Richtung ξ^α gehen aus den η^α, v_α andere Systeme $\eta^\alpha + \delta_\xi \eta^\alpha$, $v_\alpha + \delta_\xi v_\alpha$ hervor. Für die Änderungen $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ der η^α, v_α bei Verschiebung der x_α in der Richtung ξ^α erhalten wir bei Transformation der x_α die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \delta_{\xi'} \eta'^\alpha &= \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \delta_\xi \eta^\beta + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \, \partial x_\gamma} \xi^\gamma \eta^\beta \\ \delta_{\xi'} v'_\alpha &= \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \delta_\xi v_\beta + \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\alpha \, \partial x'_\gamma} \xi'^\gamma v_\beta . \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Formeln zeigen bereits, daß die einzelnen $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ nur bei linearer Transformation der x_α invariant sind, aber nicht mehr bei höheren Transformationen, daß dagegen die Differenzen verschiedener $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ (bei gleichen ξ^α, η^α, v_α) sich transformieren wie die η^α, v_α selbst. Hierin liegt bereits, daß wir in der Wahrnehmung nicht die Änderung eines Erscheinungskomplexes für sich, sondern nur in bezug auf einen zweiten konstatieren können, und zwar bereits bei so allgemeinen Annahmen, wie sie hier zugrunde liegen. Dabei wird man ebensogut einen ideellen, nur gewissen gedachten Forderungen genügenden Komplex, also einen im wahren Sinn des Wortes abstrakten, nur gedachten Erscheinungen entsprechenden als Vergleichskomplex wählen können, wie einen in der Wahrnehmung begründeten, irgendwie ausgezeichneten.. Dem ersteren Weg entspricht die Beziehung auf eine von allen Erscheinungen losgelöste Raum-Zeit-Vorstellung oder auch für gewisse Klassen von Erscheinungen die Annahme einer mit entsprechenden Eigenschaften ausgestatteten ideellen Substanz, die man etwa Äther nennen mag. Dabei ist es aber dann nicht weiter verwunderlich, daß man beim Studium verschiedener Klassen von Erscheinungen an das Bezugssystem verschiedene Anforderungen stellt, die nun vielleicht untereinander oder mit den realen Analogien, nach denen die ideelle Substanz gebildet wurde, nicht verträglich sind.

Die Transformationsformeln (2) geben aber noch zu einer anderen Bemerkung Anlaß. Man kann fragen, ob die δ_ξ in einem passenden

Koordinatensystem auf Null transformiert werden können. Es muß dann möglich sein, neue Variable x'_α so zu bestimmen, daß

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}\delta_\xi \eta^\beta = -\frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}\xi^\gamma \eta^\beta; \quad \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}\delta_\xi v_\beta = -\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\varepsilon}\xi^\varepsilon v_\beta.$$

Wegen

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{,, } \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma}\right) = \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\lambda}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\delta}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}\frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} = 0$$

ist dann

$$\delta_\xi \eta^\alpha = -\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}\frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}\xi^\delta \eta^\gamma; \qquad \delta_\xi v_\alpha = +\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\beta}\frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\varepsilon}\xi^\varepsilon v_\gamma.$$

Somit können wir setzen

$$\delta_\xi \eta^\alpha = \overset{\alpha}{a}_{\beta\gamma}\xi^\beta \eta^\gamma \qquad (\overset{\alpha}{a}_{\beta\gamma} = \overset{\alpha}{a}_{\gamma\beta})$$

und haben dann

$$\delta_\xi v_\alpha = -\overset{\gamma}{a}_{\beta\alpha}\xi^\beta v_\gamma.$$

Aus

$$\overset{\alpha}{a}_{\delta\gamma} = -\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}\frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}$$

folgt dann für die Bestimmung der x'_α das System von Differentialgleichungen

$$\overset{\alpha}{a}_{\delta\gamma}\frac{\partial x'_\varepsilon}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial^2 x'_\varepsilon}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}.$$

Die Bedingungen für die Integrierbarkeit dieses Systems lauten

$$(3) \qquad K^\varepsilon_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \overset{\varepsilon}{a}_{\beta\delta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial \overset{\varepsilon}{a}_{\beta\gamma}}{\partial x_\delta} + \overset{\mu}{a}_{\beta\gamma}\overset{\varepsilon}{a}_{\mu\delta} - \overset{\mu}{a}_{\beta\delta}\overset{\varepsilon}{a}_{\mu\gamma} = 0.$$

Das sind die wohlbekannten Formeln für den Krümmungstensor in der üblichen Theorie, der also verschwinden muß. Es ist sehr bemerkenswert, daß sich diese Bedingung lediglich aus dem Verhalten gegenüber der Transformationsgruppe ergibt, ohne eine besondere Beschränkung für die δ_ξ selbst.

Die Einführung der $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ kann auch rein formal durch Erweiterung der Gruppe aller nicht singulären Punkttransformationen geschehen, wenn man festsetzt, daß die $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ dabei transformiert werden sollen wie die $\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial t \, \partial \tau}$ und die $\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)$, wenn die x_α als Funktionen der beiden Parameter t und τ aufgefaßt werden.

Um nun noch einmal auf die Formel (3) zurückzukommen, so ist klar, daß aus einem der dann vorhandenen Koordinatensysteme x'_α, welche die δ_ξ auf Null transformieren, jedes andere durch lineare Transformation, also Affinität hervorgeht, so daß damit ausgezeichnete Koordinatensysteme gegeben sind. Aber da nur die Differenz zweier δ_ξ-Systeme invariant ist, so hat der einzelne Beobachter kein Mittel, ein solches System durch irgendeine Erfahrung aufzustellen oder auch nur die Annahme eines solchen zu kontrollieren, solange er seine Weltlinie nicht verläßt. Im Laufe der Entwicklung wird sich jedoch ein anderer Weg zeigen, der in gewissem Sinn die Beantwortung sogar einer allgemeineren Frage in den Bereich der möglichen Erfahrung rückt.

Wir unterziehen nun den Ansatz, daß bei infinitesimaler Verschiebung auf der Mannigfaltigkeit der x_α das Bündel O der η^α, v_α eine Berührungstransformation erleiden soll, einer näheren Untersuchung. Es bildet dann ein η^α zusammen mit einem v_α, für welches $\eta^\alpha v_\alpha = 0$ ist, also ein Strahl mit einem hindurchgehenden linearen Raum von $n-1$ Dimensionen ein Element des Bündels und diese Elemente zusammen eine Mannigfaltigkeit M_{2n-3}. Bezeichnen wir nun eine infinitesimale Änderung der η^α, v_α im Bündel O mit dem Zeichen $d\eta^\alpha$, dv_α und die Änderung, die durch Verschiebung der x_α entsteht, mit δ_ξ, so sind die Zeichen d und δ_ξ vertauschbar, da sie Differentiationen nach verschiedenen, voneinander unabhängigen Variabeln bedeuten, die einen im η-v-Bündel, die anderen im x-Gebiet. Es ist dann für eine Berührungstransformation

(4) $\quad \delta_\xi (\eta^\alpha \, dv_\alpha) = \delta_\xi \eta^\alpha \cdot dv_\alpha + \eta^\alpha \cdot \delta_\xi \, dv_\alpha = \varrho \, \eta^\alpha \, dv_\alpha + \sigma \, d\eta^\alpha \cdot v_\alpha$

aber auch

(4a) $$\eta^\alpha \, dv_\alpha + d\eta^\alpha \cdot v_\alpha = 0$$

und

(4b) $$\delta_\xi \eta^\alpha \cdot v_\alpha + \eta^\alpha \, \delta_\xi v_\alpha = 0,$$

daher auch

(4c) $$\delta_\xi v_\alpha \cdot d\eta^\alpha + v_\alpha \, \delta_\xi \, d\eta^\alpha = -\varrho \, \eta^\alpha \, dv_\alpha - \sigma \, d\eta^\alpha \cdot v_\alpha.$$

Dabei sind die ϱ, σ homogen von der Dimension Null in den Variabeln η, v, jedoch linear in den ξ^α, die $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ dagegen sind linear in den ξ^α, von der Dimension 1 in den Variabeln, auf welche sie sich beziehen, von der Dimension Null in der anderen Variabelnreihe. Setzen wir nun analog wie bei Lie

$$\eta^\alpha \delta_\xi v_\alpha = W(x, \eta, v, \xi), \tag{5}$$

so ist W linear und homogen in den ξ^α, von der Dimension 1, aber im allgemeinen nicht linear in den η^α, v_α. Durch Differentiation finden wir weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \eta^\beta} &= \delta_\xi v_\beta + \eta^\alpha \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial \eta^\beta} \\ \frac{\partial W}{\partial v_\beta} &= \eta^\alpha \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial v_\beta} \end{aligned} \tag{6}$$

ferner ist

$$\begin{aligned} \delta_\xi d\eta^\alpha &= \frac{\partial \delta_\xi \eta^\alpha}{\partial \eta^\beta} d\eta^\beta + \frac{\partial \delta_\xi \eta^\alpha}{\partial v_\beta} dv_\beta \\ \delta_\xi dv_\alpha &= \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial \eta^\beta} d\eta^\beta + \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial v_\beta} dv_\beta \end{aligned} \tag{7}$$

und damit findet man durch Einsetzen in (4) und Vergleichung der Koeffizienten von $d\eta^\alpha$ und dv_α

$$\begin{aligned} \delta_\xi \eta^\alpha &= -\frac{\partial W}{\partial v_\alpha} + \varrho \eta^\alpha \\ \delta_\xi v_\alpha &= +\frac{\partial W}{\partial \eta_\alpha} - \sigma v_\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Einsetzen in (4) überzeugt man sich nun mit Hilfe des Eulerschen Satzes, daß für W, ϱ, σ außer den Dimensionsbestimmungen keine anderen Bedingungen sich ergeben. Man kann noch statt W setzen $W + \mu \eta^\alpha v_\alpha$. Dabei geht in (8) ϱ über in $\varrho - \mu$ und σ in $-\mu + \sigma$. Setzt man also $\mu = \frac{\varrho + \sigma}{2}$ und schreibt ϱ für $\frac{\varrho - \sigma}{2}$, so kommt

$$\begin{aligned} \delta_\xi \eta^\alpha &= -\frac{\partial W}{\partial v_\alpha} + \varrho \eta^\alpha \\ \delta_\xi v_\alpha &= +\frac{\partial W}{\partial \eta^\alpha} + \varrho v_\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Funktion W ist selbst aber keineswegs invariant gegenüber $\boldsymbol{P}$, vielmehr gilt beim Übergang zu neuen Variabeln

$$W'(x', \eta', v', \xi') = W(x, \eta, v, \xi) - \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} v'_\alpha \xi^\gamma \eta^\beta, \tag{10}$$

während für ϱ gilt

$$\varrho'(x', \eta', v', \xi') = \varrho(x, \eta, v, \xi).$$

Dagegen ist die Differenz zweier W-Funktionen wieder invariant. Neben die Funktion W tritt aber noch die Funktion ϱ, die zwar linear in den ξ^α, jedoch von der Dimension 0 in den η^α, v_α ist. Hieraus folgt, daß die Differenz $W(x, \eta, v, \xi) - W(x, \xi, v, \eta)$ invariant ist, aber man kann hierauf unmittelbar keine Wahrnehmung gründen, weil dazu erst eine Vergleichung an zwei verschiedenen zu x infinitesimal benachbarten Stellen erforderlich wäre.

Betrachten wir nun eine Funktion $T(x, \eta, v)$, die homogen in den η^α von der Dimension μ und in den v_α von der Dimension m sei. Wir haben dann

$$(11) \qquad \delta_\xi T = \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \xi^\alpha - \frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial W}{\partial v_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial v_\beta} \frac{\partial W}{\partial \eta^\beta} + \varrho(m + \mu) T.$$

Ist nun $\delta_\xi T = 0$, so ist T invariant gegenüber der Verschiebung im x-Raum und man sieht, daß man bei gegebenem W immer noch ϱ so bestimmen kann, daß eine vorgegebene Funktion T invariant wird, es sei denn, daß $m + \mu = 0$ ist. Ferner wird dann ϱ im allgemeinen unbestimmt oder sinnlos für die Elemente, für welche $T(x, \eta, v) = 0$ ist. Ist $m + \mu$ aber gleich Null, so hängt $\delta_\xi T$ überhaupt nicht von ϱ ab. Dies trifft speziell für die Verhältnisse der η^α und der v_α zu und es hat daher die Bestimmung von ϱ keinen Einfluß auf die Veränderung der Gestalt einer Figur im Bündel, diese hängt vielmehr allein von W ab. Dagegen hat ϱ Einfluß auf die Größe der $\delta_\xi \eta^\alpha$ in bezug auf die Verschiebung ξ^α. Andererseits kann man (11) dazu benutzen, um diejenigen Funktionen W und ϱ zu bestimmen, welche eine vorgegebene Form der η, v invariant lassen.

Bei gegebenen Funktionen W und ϱ jedoch existieren im allgemeinen keineswegs immer Funktionen T, für welche $\delta_\xi T = 0$ ist, sondern das hieraus entspringende System von partiellen Differentialgleichungen hat nur dann Integrale, wenn zwischen W und ϱ gewisse Bedingungsgleichungen bestehen.

Wird W symmetrisch in η und ξ und ϱ unabhängig von η, v, dagegen für T eine quadratische Form in den η^α, unabhängig von v angenommen, entsprechend dem üblichen Ansatz für ein ds^2, so erhält man für W und die $\delta_\xi \eta^\alpha$ den Ansatz von H. Weyl, welcher für $\varrho = 0$ in den gewöhnlichen Ansatz der kovarianten Differentiation übergeht.

Es wurde oben festgestellt, daß nur die Differenz zweier verschiedener $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$, insofern sie nämlich zu denselben ξ^α, η^α, v_α, aber zu verschiedenen Funktionen W gehören, und daher auch nur die

Differenz zweier Funktionen W invariant ist. Sie fallen daher ebenso wie das zugehörige ϱ gänzlich aus dem Bereich der Wahrnehmungsmöglichkeit, wenn man unseren Gesichtspunkt annimmt, solange wir den Beobachter nur längs einer Linie des x-Raumes wandern lassen. Anders dagegen, wenn wir die Möglichkeit der Durchlaufung geschlossener Wege zulassen. Das ist immerhin in der Weise vorstellbar, daß zwei Beobachter an einer Stelle des x-Raumes ihre Instrumente, Wahrnehmungen usw. vergleichen, dann jeder einen anderen Weg zurücklegt, sie einander am Ende dieses Weges wieder treffen und endlich ihre Wahrnehmungen vergleichen.

Um dies in Formeln genauer zu verfolgen, schreiben wir

$$\delta_\xi \eta^\alpha = Z^\alpha_\beta(x, \eta, v)\, \xi^\beta; \qquad \delta_\xi v_\alpha = V_{\alpha\beta}(x, \eta, v)\, \xi^\beta \tag{12}$$

und setzen

$$x_\alpha = x^0_\alpha + r\,\psi_\alpha(s).$$

Hierin sollen die $\psi_\alpha(s)$ periodische Funktionen der Veränderlichen s mit der Periode 1 sein und $\psi_\alpha(0) = \psi_\alpha(1) = 0$, r eine reelle Veränderliche, die auf ein genügend kleines, die 0 enthaltendes Intervall beschränkt sei. Wenn dann s von 0 bis 1 geht, so durchläuft x_α einen von x^0_α ausgehenden und dahin zurückkehrenden geschlossenen Weg. Für die η^α, v_α haben wir dann das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\eta^\alpha}{ds} = r\, Z^\alpha_\beta(x, \eta, v)\, \psi'_\beta(s); \qquad \frac{dv_\alpha}{ds} = r\, V_{\alpha\beta}(x, \eta, v)\, \psi'_\beta(s). \tag{13}$$

Man kann jetzt die η^α, v_α nach Potenzen von r entwickeln und setzen

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &= \overset{0}{\eta}{}^\alpha + r\,\eta^\alpha_1 + r^2\,\eta^\alpha_2 + r^3\,\eta^\alpha_3 + \cdots \\ v_\alpha &= \overset{0}{v}_\alpha + r\,v_{1\alpha} + r^2\,v_{2\alpha} + r^3\,v_{3\alpha} + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Durch Koeffizientenvergleichung kommt man zu den Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^\alpha_p}{ds} &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1}\, Z^\alpha_\beta(x, \eta, v)}{dr^{p-1}}\right)_{r=0} \psi'_\beta(s); \\ \frac{dv_{p\alpha}}{ds} &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1}\, V_{\alpha\beta}(x, \eta, v)}{dr^{p-1}}\right)_{r=0} \psi'_\beta(s). \end{aligned} \tag{15}$$

Da ferner für $s = 0$ auch die η^α_p, $v_{p\alpha}$ $(p = 1, 2, \cdots)$ sämtlich 0 sind, so lassen sich die Koeffizienten Schritt für Schritt durch Quadraturen berechnen. Wir finden

$$(16)\qquad \eta_1^\alpha(s) = Z_\beta^\alpha(x^0, \overset{0}{\eta}, \overset{0}{v})\,\psi_\beta(s); \quad v_{1\alpha}(s) = V_{\alpha\beta}(x^0, \overset{0}{\eta}, \overset{0}{v})\,\psi_\beta(s)$$

und damit

$$(17)\qquad \begin{aligned} \eta_2^\alpha(s) &= \left(\frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial x_\delta} + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial \eta^\gamma} Z_\delta^\gamma + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{d v_\gamma} V_{\gamma\delta}\right)_0 \int_0^s \psi_\delta \psi_\beta' \, ds, \\ v_{2\alpha}(s) &= \left(\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\gamma} Z_\delta^\gamma + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta}\right)_0 \int_0^s \psi_\delta \psi_\beta' \, ds. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\omega^{\delta\beta} = -\omega^{\beta\delta} = r^2 \int_0^1 \psi_\delta \psi_\beta' \, ds$$

so wird auch

$$\omega^{\delta\beta} = \int x_\delta \, dx_\beta$$

über die geschlossene Kurve und, da der Koeffizient der ersten Potenz von r bei Integration über die Kurve verschwindet, so bleibt schließlich als Anfangsglied

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial x_\delta} - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial \eta^\gamma} Z_\delta^\gamma - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial \eta^\gamma} Z_\beta^\gamma + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right)_0 \omega^{\delta\beta}$$

(18) bzw.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\gamma} Z_\delta^\gamma - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial \eta^\gamma} Z_\beta^\gamma + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right)_0 \omega^{\delta\beta}.$$

Diese Ausdrücke sind aber genau diejenigen, deren Verschwinden die vollständige Integrierbarkeit des Systems totaler Differentialgleichungen

$$d\eta^\alpha = Z_\beta^\alpha(x, \eta, v)\, dx_\beta; \qquad dv_\alpha = V_{\alpha\beta}(x, \eta, v)\, dx_\beta$$

aussagt und in der Tat ist begrifflich klar, daß im Fall der vollständigen Integrierbarkeit bei Integration längs eines geschlossenen Weges wieder die Anfangswerte zum Vorschein kommen und daß umgekehrt, wenn dies der Fall ist, vollständige Integrierbarkeit vorliegt[11]).

Denkt man sich etwa die x_α als Funktionen zweier Parameter τ_1, τ_2, welche in einer Ebene als cartesische Koordinaten interpretiert werden

[11]) Diese bereits in der unter [10]) zitierten Arbeit gegebenen Entwicklungen habe ich für ein beliebiges System von linearen totalen Differentialgleichungen in dem demnächst erscheinenden XXXIV. Band der Wiener Monatshefte auch noch auf andere Art durchgeführt. Daselbst auch genauere Literaturangaben über verwandte Untersuchungen von Tietze und Levi-Civitá.

mögen, und die Durchlaufung einer geschlossenen Kurve im x-Raum dadurch bewirkt, daß der Punkt (τ_1, τ_2) eine kleine geschlossene Kurve durchläuft, so ist klar, daß der Quotient des Integrals $\omega^{\delta\beta}$ durch das Integral $\int d\tau_1\, d\tau_2$ beim Zusammenziehen der Kurve sich der Grenze $\frac{\partial(x_\delta\, x_\beta)}{\partial(\tau_1\, \tau_2)}$ nähert, während in der obigen Entwicklung die Glieder von höherer als zweiter Ordnung in r gegen 0 gehen. Da sich ferner die Funktionaldeterminanten transformieren wie $(\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$, so erkennen wir, daß bei Einführung zweier neuen Veränderlichenreihen Φ^α, f_α die mit (18) gebildeten Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\delta - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\beta + \frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right) f_\alpha (\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$$

(19) und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\delta - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\beta + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right) \Phi^\alpha (\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$$

gegenüber den Transformationen aus $\boldsymbol{P}$ invariant sind. Sie sind die unmittelbaren Verallgemeinerungen des Riemann-Christoffel'schen Krümmungstensors.

Die entwickelten Formeln haben aber auch eine Bedeutung für irgendein System totaler Differentialgleichungen und geben zu interessanten geometrischen und analytischen Fragestellungen Anlaß, auf die ich gelegentlich zurückkommen werde.

Wenn wir nun noch berücksichtigen, daß im Falle einer Berührungstransformation benachbarter Bündel wir schreiben können

$$W(x, \eta, v, \xi) = W_\alpha(x, \eta, v)\, \xi^\alpha; \qquad \varrho(x, \eta, v, \xi) = \varrho_\alpha(x, \eta, v)\, \xi^\alpha,$$

so erhalten wir

$$Z^\alpha_\beta = -\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha} + \varrho_\beta\, \eta^\alpha; \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\alpha} + \varrho_\beta\, v_\alpha.$$

Setzt man nun

$$\Omega_{\delta\beta} = \frac{\partial W_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial W_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial W_\beta}{\partial v_\gamma}\frac{\partial W_\delta}{\partial \eta^\gamma} - \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\gamma}\frac{\partial W_\delta}{\partial v_\gamma}$$

(20)

$$\varrho_{\delta\beta} = \frac{\partial \varrho_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial \varrho_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varrho_\beta}{\partial v_\gamma}\frac{\partial W_\delta}{\partial \eta^\gamma} - \frac{\partial \varrho_\beta}{\partial \eta^\gamma}\frac{\partial W_\delta}{\partial v_\gamma} - \frac{\partial \varrho_\delta}{\partial v_\gamma}\frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\gamma} + \frac{\partial \varrho_\delta}{\partial \eta^\gamma}\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\gamma},$$

so entsteht beim Durchlaufen eines infinitesimalen Weges eine neue infinitesimale Berührungstransformation, aber jetzt im Bündel des Punktes x selbst. Ihre charakteristischen Funktionen sind

$$(21) \qquad \Omega = \omega^{\delta\beta}\,\Omega_{\delta\beta} \quad \text{und} \quad R = \varrho_{\delta\beta}\,\omega^{\delta\beta},$$

beide sind augenscheinlich gegenüber $\boldsymbol{P}$ invariant. Zwischen den Koeffizienten $\Omega_{\delta\beta}$, $\varrho_{\delta\beta}$ bestehen ferner Identitäten, die den BIANCHIschen völlig analog sind.

Bezeichnet man nämlich mit dem Zeichen $(\ )_\alpha$ den Operator

$$(22) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \left(-\frac{\partial W_\alpha}{\partial v_\beta} + \varrho_\alpha\,\eta^\beta\right)\frac{\partial}{\partial \eta^\beta} + \left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial \eta^\beta} + \varrho_\alpha\,v_\beta\right)\frac{\partial}{\partial v_\beta},$$

so wird

$$(23) \qquad \begin{aligned} &(\Omega_{\delta\beta})_\alpha + (\Omega_{\beta\alpha})_\delta + (\Omega_{\alpha\delta})_\beta = 0 \\ &(\varrho_{\delta\beta})_\alpha + (\varrho_{\beta\alpha})_\delta + (\varrho_{\alpha\delta})_\beta = \frac{\partial(\varrho_\beta, \Omega_{\alpha\delta})}{\partial(v_\gamma, \eta^\gamma)} + \frac{\partial(\varrho_\alpha, \Omega_{\delta\beta})}{\partial(v_\gamma, \eta^\gamma)} + \frac{\partial(\varrho_\delta, \Omega_{\beta\alpha})}{\partial(v_\gamma, \eta^\gamma)}. \end{aligned}$$

Durch jeden infinitesimalen geschlossenen Umlauf wird also im Punkte x selbst eine infinitesimale Berührungstransformation induziert, und zwar ergeben sich $\frac{n(n-1)}{2}$ im allgemeinen linear unabhängige solche. Da sie ferner invariant gegenüber $\boldsymbol{P}$ sind, so kann man sie als der Beobachtung zugänglich ansehen. Es sind nun *genau ebensoviele, als eine quadratische Form unabhängige infinitesimale Transformationen in sich besitzt,* allerdings mit dem Unterschied, daß die hier auftretenden induzierten Transformationen des Bündels im allgemeinen keine Gruppe bilden. Die Bedingungen dafür sind allerdings vorläufig zu komplizierter Natur, als daß ich ihre Untersuchung bisher hätte in Angriff nehmen können.

Immerhin erscheint es aber sehr bemerkenswert, daß die tatsächliche historische Entwicklung auf den einfachsten Fall, die Annahme eines invarianten ds^2, geführt hat, der genau so viele infinitesimale Transformationen enthält wie der allgemeine.

Diese $\frac{n(n-1)}{2}$ Transformationen Ω können übrigens keineswegs willkürlich angenommen werden, sondern sie sind an die Identitäten (23) gebunden, in denen bloß die $2n$ Funktionen W_β, ϱ_β auftreten.

Bisher hatten wir lediglich die Änderung im einzelnen Bündel verfolgt, ohne sie in Zusammenhang mit den Verschiebungen im x-Raum zu bringen. Nun wollen wir auch darauf eingehen. Denken wir uns ein Element η^α, v_α an der Stelle x und nun sowohl die η^α, v_α als auch die x_α als Funktionen eines Parameters t, so haben wir bei Änderung von t für die Änderungen der η^α, v_α die Differentialgleichungen

$$(24)\qquad \begin{aligned} \frac{d\eta^\alpha}{dt} &= -\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha}\frac{dx_\beta}{dt} + \varrho_\beta\,\eta^\alpha\frac{dx_\beta}{dt} \\ \frac{dv_\alpha}{dt} &= \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\alpha}\frac{dx_\beta}{dt} + \varrho_\beta\,v_\alpha\frac{dx_\beta}{dt}. \end{aligned}$$

Fragen wir nun nach solchen eindimensionalen Elementreihen, welche aus einem Element durch Verschiebung längs der eigenen Richtung im x-Raum hervorgehen, so haben wir die η^α proportional den $\frac{dx_\alpha}{dt}$ zu setzen, etwa $\eta^\alpha = \sigma x'_\alpha$ und bekommen die Differentialgleichungen

$$(25)\qquad \begin{aligned} \sigma' x'_\alpha + \sigma x''_\alpha &= -\sigma\frac{\partial W_\beta(x, x', v)}{\partial v_\alpha}x'_\beta + \sigma\varrho_\beta\,x'_\alpha\,x'_\beta \\ v'_\alpha &= \frac{\partial W_\beta(x, x', v)}{\partial x'_\alpha}x'_\beta + \varrho_\beta\,x'_\beta\,v_\alpha. \end{aligned}$$

Durch Elimination von σ erhält man aus (25) die Gleichungen

$$(26)\qquad \begin{aligned} x''_\alpha x'_\gamma - x'_\alpha x''_\gamma &= x'_\beta\left(-\frac{\partial W_\beta(x,x',v)}{\partial v_\alpha}x'_\gamma + \frac{\partial W_\beta(x,x',v)}{\partial v_\gamma}x'_\alpha\right) \\ v'_\alpha v_\gamma - v_\alpha v'_\gamma &= x'_\beta\left(\frac{\partial W_\beta(x,x',v)}{\partial x'_\alpha}v_\gamma - \frac{\partial W_\beta(x,x',v)}{\partial x'_\gamma}v_\alpha\right), \end{aligned}$$

so daß also auch die ϱ_β hinausfallen.

Man kann in (25) auch den Proportionalitätsfaktor dadurch normieren, daß man eines der x_α als bestimmte Funktion von t annimmt. Existiert eine Invariante $T(x, \eta, v)$ gegenüber W, welche in den η^α nicht von der Dimension Null ist, so können wir sie auf die Dimension 1 bringen und zur Normierung von t setzen:

$$T(x, x', v) = 1,$$

woraus sich dann ergibt:

$$t = \int T\left(x, \frac{dx}{dt}, v\right) d\tau$$

für einen beliebigen Parameter τ.

Diese Streifen, wie wir die durch (25) oder (26) erklärten Gebilde nennen wollen, treten nun an die Stelle der geodätischen Linien der an ein ds^2 anschließenden Betrachtung.

Wählt man etwa x_1 als unabhängige Veränderliche und setzt eines der $v_\alpha = 1$, so ergibt sich ein System von $2(n-1)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den x_α, erster in den v_α, dessen Lösungen daher $3n-3$ Konstante enthalten, von denen aber eine durch die Bedingung $\eta^\alpha v_\alpha = 0$ festgelegt ist, so daß nur $3n-4$ Konstante frei bleiben. Wird nun verlangt, daß die Kurve des Streifens durch 2 gegebene Punkte des x-Raumes gehen soll, so ergibt dies $2n-2$ Bedingungen, denen durch eine Schar von ∞^{n-2} Streifen genügt wird. Von den ∞^{2n-3} Streifen, welche entsprechend den ∞^{2n-3} Elementen von einem Punkte ausgehen, treffen daher in einem anderen Punkte ∞^{n-2} wieder zusammen. Dadurch wird also die ganze M_n der x_α auf eine Mannigfaltigkeit von ∞^n M_{n-2} im einzelnen Punkte abgebildet. Denken wir uns nun die Berührungstransformation, also die Funktion W, als durch irgendein Agens im Raume der x_α hervorgerufen; denken wir uns weiter, daß dann die Nachrichten von einem Element zum andern längs solcher Elementstreifen fortlaufen, etwa durch polarisiertes Licht, so werden die von einem und demselben Punkt ausgehenden Nachrichten in einem anderen Punkt auf einer M_{n-2} eintreffen, also im Falle einer vierdimensionalen Welt auf einer Fläche des dreidimensionalen subjektiven Raumes. *Es ergibt sich so die Möglichkeit, in einer Abbildung von den Ereignissen im objektiven n-dimensionalen Raum Kenntnis zu erhalten.* Andrerseits stehen diese Mannigfaltigkeiten im engsten Zusammenhang mit der vorher erwähnten im einzelnen Punkt induzierten Berührungstransformation, so daß sich hieraus sogar die prinzipielle Möglichkeit einer Kontrolle der Theorie durch gegenseitig voneinander unabhängige Beobachtungen ergibt.

Wenn nun auch die Vorstellung einer genaueren Durchführung für bestimmte physikalische Erscheinungen noch in weiter Ferne liegt, so ist es doch bemerkenswert, daß bei der hier entwickelten Auffassung es grundsätzlich möglich erscheint, aus Beobachtungen im subjektiven Raum auf Ereignisse im objektiven Raum der x_α und ihre gegenseitige Lage zu schließen, und zwar bei konsequentem Festhalten an der Auffassung, daß nur die letzten Wegelemente zur Beobachtung kommen. Ist die Transformation W hingegen nur eine erweiterte Punkttransformation, so ist ein solches Vorgehen nicht möglich, weil dann die mit einer Richtung vereinigt liegenden Hyperebenenelemente dauernd während des ganzen Weges mit ihr vereinigt bleiben.

Überhaupt scheint mir darin, daß wir unsere subjektiven Wahrnehmungen auf Geschwindigkeiten, Energien und ähnliches zurückführen und damit Erfolg haben, daß wir diese Größen als Differentialverhältnisse von anderen endlichen Größen auffassen, ein starker Grund für die Berechtigung und Zweckmäßigkeit der Vorstellung einer realen Außenwelt zu liegen. Im Gegenfalle würde es ja keinen wesentlichen Vorteil bieten, über die unmittelbar wahrgenommenen Größen hinauszugehen. Ich denke mir das ähnlich, wie wir aus den Veränderungen der gegenseitigen Lage unserer Sehstrahlen auf die Existenz von Außendingen schließen.

Bis jetzt war noch von Metrik nicht die Rede und in der Tat bestimmen die Berührungstransformationen W zwar die Änderung der gegenseitigen Lage der Elemente bei Verschiebung der x_α, aber erst durch Fixierung der Funktion ϱ kommen diese in bestimmte Beziehung zu den Verschiebungen der x_α selbst.

Es war schon früher bemerkt, daß man bei gegebenem W durch geeignete Wahl von ϱ erreichen kann, daß eine beliebig vorgegebene Funktion der x_α, η^α, v_α bei jeder Verschiebung ungeändert bleibt. Sei nun $T(x, \eta, v)$ eine solche Invariante, in den η^α von der Dimension 1, in den v_α von der Dimension 0, so kann man sich das Integral

$$\int_O^{O'} T(x, dx, v) \tag{27}$$

von einem Punkt O zu einem anderen O' zunächst längs eines beliebigen Weges erstreckt denken, wobei x und v als Funktionen eines Parameters anzusehen sind. Erstreckt man es speziell längs eines der ∞^{n-2} Streifen, welche bei der Berührungstransformation in sich verschoben werden und von O nach O' führen, so kann man unter diesen noch denjenigen aussuchen, für welchen das Integral gegenüber einer Änderung der $n-2$ Parameter stationär ist, d. h. das Differential in bezug auf diese Parameter Null ist. Dadurch ist dann eine Art Maßbestimmung im x-Raum festgelegt, welche mit der Berührungstransformation und der Invariante T verknüpft ist.

Es wäre nun interessant zu untersuchen, für welche Berührungstransformationen und Invarianten diese längs bestimmter Streifen gemessene „Länge“ mit derjenigen übereinstimmt, welche aus dem aus (27) entspringenden Variationsproblem hervorgeht. Sie spielen jedenfalls eine ausgezeichnete Rolle und enthalten als Spezialfall die geodätischen Linien bei einer invarianten quadratischen Differentialform.

Um nun die allgemeinen Erörterungen zusammenzufassen und abzuschließen, so wird man sagen können, daß die hier entwickelte Auffassung zwar noch weit entfernt ist, von bestimmten der Messung unterworfenen physikalischen Erscheinungen Rechenschaft zu geben, daß sie dagegen gewisse allgemeine Züge der bisherigen Entwicklung gut wiedergibt. Diese sind die ausgezeichnete Stellung der projektiven Geometrie im Raume von $n-1$ Dimensionen und die Sonderstellung eines der Zeit entsprechenden Parameters, ferner die Tatsache, daß alle über diese subjektive Welt hinausführenden Erscheinungen lediglich auf

Größen zweiter Ordnung, den Ergebnissen infinitesimaler geschlossener Umläufe, beruhen, daß die dadurch im subjektiven Raum induzierte Geometrie auf eine endliche oder unendliche Gruppe führt, die aber jedenfalls von $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen erzeugt wird und daher im einfachsten Fall durch die Invarianz einer quadratischen Differentialform gekennzeichnet werden kann. Endlich daß sich die Möglichkeit eröffnet, auf Grund der früher besprochenen Abbildung der Punkte des n-dimensionalen objektiven Raumes auf eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von $n-2$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des subjektiven Raumes auch aus den subjektiven Wahrnehmungen über die Vorgänge im objektiven Raum der x_α etwas zu erforschen.

Sollte es sich zum Beispiel herausstellen, daß die Gravitation einen Einfluß auf die Polarisationsebene des Lichtes hat, so wäre damit ein Anlaß gegeben, den hier entwickelten Ansätzen weiter nachzugehen.

Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev,* Die natürliche Geometrie. 1923. Preis ℳ 1.—.
2. *H. Tietze,* Über Analysis Situs. 1923. Preis ℳ 1.—.
3. *W. Wirtinger,* Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. Preis ℳ 1.—.