MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 52

W. LIETZMANN UND V. TRIER

WO STECKT DER FEHLER?

DRITTE AUFLAGE

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

Die angegebenen Grundpreise sind mit der Schlüsselzahl des Börsenvereins zu vervielfältigen.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Oberstud.-Dir. d. Oberrealschule zu Göttingen — Oberstudienrat, Gymnasialpr. i. Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. —.70

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/23):

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)

Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)

Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)

Abgekürzte Rechnung. V. A. Witting. (Bd. 47)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd 9 u. 41.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)

Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)

Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. (Bd. 51.)

Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)

Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)

Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting (Bd. 43)

Ebene Geometrie. Von B. Kerst. (Bd. 10.)

Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)

Der Goldene Schnitt. V. H. E. Timerding. (32.)

Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwend. d. Methode d. kotiert. Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)

Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11.)

Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. (Bd. 6.)

Funktionen, Schaubilder, Funktionstafeln. Von A. Witting. (Bd. 48.)

Einführung i. d. Nomographie. V. P. Luckey. I. Die Funktionsleiter (28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (37.)

Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers. V. A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23)

Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)

Karte und Kroki. Von H. Wolff. (Bd. 27.)

Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)

Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. V. P. Riebesell. Bd. 24.)

Mathematik u. Biologie. V. M. Schips. (Bd. 42.)

Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)

Wie man einstens rechnete. Von Studienrat E. Fettweis. (Bd. 49.)

Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)

Die Quadratur d. Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)

Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. (Bd. 52.)

Trugschlüsse. Gesammelt von W. Lietzmann. 3. Aufl. des 1. Teiles von: Wo steckt der Fehler? (Bd. 53.)

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)

Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)

Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Von H. Schütze. (Bd. 46.)

Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)

Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. (Bd. 44/45.)

Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)

Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)

Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (17.)

Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umg. Aufl. (Bd. 8.)

Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd 14.)

Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

In Vorbereitung: **Herold**, Zinseszins-, Renten- und Anleiherechnung. **Wicke**, Konforme Abbildungen. **Winkelmann**, Der Kreisel. **Wolff**, Feldmessen und Höhenmessen.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Anfragen ist Rückporto beizufügen

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
52

WO STECKT DER FEHLER?

MATHEMATISCHE TÄUSCHUNGEN UND FEHLER

GESAMMELT VON

DR. W. LIETZMANN
OBERSTUDIENDIREKTOR DER OBERREALSCHULE IN GÖTTINGEN

UND

VIGGO TRIER
WEIL. MAG. SCIENT. IN KOPENHAGEN

DRITTE STARK VERMEHRTE AUFLAGE

MIT 35 FIGUREN IM TEXT

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 1923

Ursprünglich erschienen bei B. G. Teubner in Leipzig 1923.

ISBN 978-3-663-15181-4 ISBN 978-3-663-15744-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15744-1

VORWORT

> Ein junger Mensch, der auf eigenen Wegen irre geht, ist mir lieber, als einer, der auf fremden Wegen recht wandelt. Goethe.

Die erste Auflage dieses kleinen Bändchens, das Ernst und Scherz der Mathematik zu vereinigen sich vorgenommen hatte, gab ich gemeinsam mit V. Trier 1913 heraus. Ich hatte die Trugschlüsse beigesteuert, Trier die Mehrzahl der Schülerfehler; er hatte sie aus einer handschriftlichen Sammlung ausgewählt, die er als Übungsmaterial bei der Ausbildung von Lehrern seit Jahren verwandt hatte.

Viggo Trier starb am 8. Februar 1916. Die Herausgabe der zweiten Auflage, die 1917 erschien, lag mir allein ob. Die Zahl der Trugschlüsse wurde auf 50 vermehrt, bei den Schülerfehlern wurden einige wenige, den deutschen Schulverhältnissen ferner liegende Aufgaben durch andere ersetzt.

Inzwischen ist, zumal dank reger Mitarbeit der Leser des Büchleins selbst, die Zahl der Trugschlüsse, die mir einer Veröffentlichung wert erscheinen, so gewachsen, daß ich ihnen ein eigenes Bändchen dieser Sammlung eingeräumt habe. Das bot den Vorteil, das Kapitel der „Fehlschlüsse" wesentlich zu erweitern. Die neue Auflage enthält jetzt auch eine Sammlung von Täuschungen der Größenschätzung und Täuschungen der Anschauung. Den Schülerfehlern sind einige Beispiele von „Autorenfehlern" zur Seite gestellt. Natürlich ist die Grenze zwischen den einzelnen Kapiteln nicht scharf. Aus der Reihe der Schülerfehler sind wieder einige ausgeschieden worden; dafür ist eine größere Anzahl, von denen ich mehrere Herrn Brettar in Viersen verdanke, neu aufgenommen worden.

Mehrfach ist mir ein Wunsch entgegengetreten: Ich solle angeben, wo der Fehler steckt! Ich glaube, es gibt in der Reihe der Täuschungen und Fehler manchen, den man nicht bloß fünf Minuten, sondern vielleicht ein paar Tage im Kopfe bewegen muß. So lange aber hält es der Wißbegierige nicht aus; er wird doch einen Blick an die Stelle tun, wo der Fehler angegeben ist, und die volle Freude, die man über den eigenen Fund hat, und den geistigen Gewinn, den er einträgt – beide sind sie verloren. Deshalb mag es beim alten bleiben!

Göttingen, im Januar 1923. **W. Lietzmann.**

INHALT

I. TÄUSCHUNGEN BEI DER GRÖSSENSCHÄTZUNG

Ich vereinige in diesem Abschnitt eine Anzahl von Täuschungen, die darin begründet sind, daß dem auf die vorgelegte Frage Antwortenden die Vertrautheit mit den in Betracht kommenden Größenverhältnissen abgeht. Eine bessere Schulung in der Größenerfassung, als sie gemeinhin vorhanden ist, würde diese Täuschungen unmöglich machen.

1. Ich beginne mit einer Reihe ganz einfacher Schätzungen, bei denen zwischen geschätzten und wirklichen Werten, die entweder durch Messung oder durch Rechnung — eine ungefähre Überschlagsrechnung reicht aus — festgestellt werden, meist eine große Kluft zu klaffen pflegt. Der Leser beantworte also zunächst schriftlich die nachfolgenden Fragen und stelle dann den wirklichen Wert daneben. Der Fehler werde danach je nachdem absolut oder prozentual angegeben.

a) Wie hoch ist ein Tisch?

b) Wie hoch ist die Sitzfläche eines Stuhles?

c) Wie hoch ist ein moderner Zylinderhut?

d) Denke an einen dir bekannten runden Turm der näheren oder weiteren Umgebung deines Wohnortes. Das Wievielfache des Umfanges ist seine Höhe?

e) Man hat einen Globus von einem Meter Durchmesser. Wie hoch muß man, wenn man das Relief nicht überhöht, den größten Berg Europas, den 4800 m hohen Montblanc, darstellen?

f) Wie lang ist ein marschierendes Armeekorps?

g) Wieviel Menschen haben auf einem kreisrunden Platz von 1 km Radius Raum?

h) Wie groß muß ein quadratischer Platz sein, der alle Einwohner Deutschlands aufnehmen kann?

i) Ist es möglich, alle Bewohner der Erde auf der Fläche des Bodensees unterzubringen?

k) Wieviel Jungens kann man in einem Kubikmeter unterbringen?

l) Wieviel Erbsen haben in einem Wasserglas der üblichen Größe Platz?

m) Um wieviel würde der Bodensee steigen, wenn man in ihm die ganze lebende Menschheit ertränken würde?

n) Wie schwer ist die Luft in deinem Wohnzimmer?[1])

o) Wieviel wiegt eine Korkkugel von einem Meter Radius?[2])

2. Ein paar Fragen mögen sich in den Dienst der Veranschaulichung der Größenverhältnisse unserer Erde stellen:

a) Wie hoch wölbt sich ein See von 1 km, von 4 km, von 6 km Breite mit seiner Mitte über der Ebene, die die beiden Ufer verbindet, wie groß ist mit anderen Worten der Einfluß der Erdkrümmung auf die Abweichung von der Ebene?

b) Wie groß ist die Herauswölbung des Kaspischen Sees?

c) Die Friedrichstraße in Berlin ist etwas über 3 km (genau 3240 m) lang und geht ziemlich genau von Nord nach Süd. Die Häuser, die an den beiden Enden stehen, sind natürlich vertikal gebaut, d. h. ihre senkrechten Kanten weisen zum Erdmittelpunkt, sie bilden also einen Winkel miteinander. Wie groß ist der?

d) Da die senkrechten Kanten der beiden Endhäuser der Friedrichstraße nicht parallel sind, klaffen sie oben etwas mehr als unten auseinander. Um wieviel etwa?

e) Die Friedrichstraße verläuft genau wagerecht. Wegen der Erdabplattung, die ja $^1/_{300}$ beträgt, ist also das Nordende dem Erdmittelpunkte näher als das Südende. Um wieviel etwa?

Ich möchte bei diesen Aufgaben, da ein Nachrechnen vielleicht dem einen oder anderen Schwierigkeiten bereitet, die Ergebnisse angeben. Näheres ist hierüber bei Martus, Astronomische Erdkunde, 4. Aufl. Dresden, Koch, 1912, zu finden: a) 2 cm, 31 cm und 71 cm; beachte die starke Zunahme der Werte! b) 28 km; c) $1^3/_4{}'$; d) etwa 1 cm; e) das Nordende ist 10,6 m dem Erdmittelpunkt näher als das Südende. Man muß also fast drei Stockwerk hochsteigen, um den gleichen Abstand am Nordende zu haben, wie am Südende.

3. Einen Strick denke man sich um den Erdäquator gelegt; er sei etwas zu lang dazu, es mögen etwa 10 m übrigbleiben. Man denke sich trotzdem die Enden des Strickes an-

---

1) Ein Liter Luft wiegt 1,293 Gramm.

2) Das spezifische Gewicht von Kork ist 0,24.

einandergelegt, so daß der Strick rings um die Erde herum ein wenig gelockert wird. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß er überall um ein geringes, aber stets gleich großes Stück von der Erdoberfläche abstehe. Wie groß ist dieser Abstand? Könnte wohl eine Fliege zwischen der Erde und dem gelockerten Strick durchkriechen?

Die Antwort lautet, daß allerdings eine Fliege hindurchkriechen, ja daß ein nicht allzugroßer Junge unter dem Strick weggehen könnte, ohne sich zu bücken. Mit der anschaulichen Erfassung dieses Ergebnisses ist es nun wirklich eine heikle Sache. Manch ein Mathematiker hat mir versichert, es sei ihm unmöglich, sich das vorzustellen; nicht wenige Nichtmathematiker haben mir gesagt, es sei überhaupt nicht wahr; die Rechnung müsse falsch sein.

Man kann manchmal durch eine leichte Abänderung der Fassung der Aufgabe das Übel beseitigen. Im Grunde die gleiche Aufgabe wie die Strickgeschichte ist die folgende: Um wieviel ist der Weg, den der Kopf eines Wanderers um die Erde zurücklegt, länger als der, den die Füße zu machen haben. Da hat man sofort „das Gefühl", daß es nicht so gar viel sein wird.

Wem das noch nicht genügt, mit dem will ich noch einen anderen Versuch machen[1]: Statt an einer Stelle des Kreisumfangs 10 m einzusetzen, setzen wir an vier Stellen je 2,5 m ein (Fig. 1). Macht man das bei I und II, so wird der Kreis um je 1,25 m nach oben und unten verschoben. Tut man das gleiche bei III und IV, so wird der Kreis nach rechts und links um je 1,25 m verschoben. Die neue Linie, die freilich kein ganz genauer Kreis ist, steht dann überall 1,25 m von der alten ab.

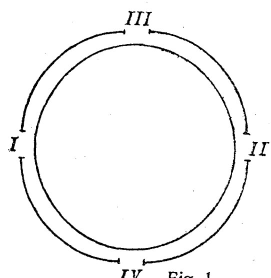


Fig. 1.

Ein Leser hat noch einen anderen Vorschlag gemacht, das zunächst verblüffende Ergebnis wirklich anschaulich zu erfassen. Er setzt an die Stelle des Kreises ein Quadrat. Da ist ohne weiteres

1) Diese Veranschaulichung ist mir von Herrn E. Zirkel in Rastatt (Baden) mitgeteilt worden.

klar, daß die Verteilung der überschüssigen 10 m, also von 2,5 m an jeder Ecke, ein Herausrücken der Quadratseiten nach oben und unten, rechts und links um $\frac{2,5}{2}$ m $= 1,25$ m zur Folge hat. Übrigens: jeder weiß, daß ein Kragen, der auch nur um eine Nummer zu weit ist, schon beträchtlich weit vom Halse absteht. Und das ist bei dem Problem ganz gleichgültig, wie groß der Kreis ist, von dem man ausgeht, ob es der Erdäquator ist oder etwa — ein Fingerring.

4. Unter einer arithmetischen Reihe versteht man eine Folge von Zahlen, bei denen die Differenz zweier Nachbarzahlen immer konstant ist. Für die Summe s einer n gliedrigen arithmetischen Reihe

$$a + a + d + a + 2d \cdots + a + (n-1)d$$

gilt der Ausdruck $s = an + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d$.

Als Beispiel dafür, wie sehr man sich über das Anwachsen dieser Summe mit zunehmender Gliederzahl täuschen kann, diene statt vieler Beispiele eine einzige Frage, die zunächst „nach dem Zahlengefühl", dann nach Rechnung zu beantworten ist:

A macht mit B eine Wette. A will nach einem 6000 Schritte entfernten Orte hin- und zurückgehen, bevor B 200 Äpfel in einen Korb gesammelt hat. Allerdings sollen die Äpfel in einer Reihe liegen, jeder von dem andern einen Schritt entfernt, und sollen einzeln herangeholt werden zu dem Korb, der bei dem ersten Apfel stehen bleibt. Die beiden Wettenden sollen gleich schnell gehen. Wer gewinnt?

5. Noch stärker ist das Anwachsen der Summe bei zunehmender Gliedzahl bei den geometrischen Reihen, bei denen also der Quotient aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist. Ich erinnere da nur an das sehr bekannte Beispiel von dem Erfinder des Schachspieles, das auf einen Bericht des arabischen Geschichtschreibers Ja'qubi zurückzugehen scheint. Jener Mann erbat sich vom Könige als Belohnung die Summe von Weizenkörnern, die man auf folgende Weise erhält: Auf das erste Feld des Schachspiels wird ein Korn gelegt, auf das zweite kommen zwei Körner, auf das dritte vier usf., immer auf jedes Feld doppelt so viel wie auf das vorhergehende.

Wer die Aufgabe durchrechnet und sich von der Zahl der errechneten Körner eine anschauliche Vorstellung zu verschaffen sucht, der wird genau so wie jener König überrascht sein, daß es mit der großen Bescheidenheit des Erfinders wirklich nicht weit her war.

6. Auf andere Schwierigkeiten der Größenerfassung stößt man, wenn man von den endlichen zu den unendlichen geometrischen Reihen übergeht. Ich will zunächst, natürlich nur in Gedanken, einen Körper konstruieren, der endlichen Rauminhalt hat und doch bis ins Unendliche reicht. Der Laienverstand wird zunächst annehmen, daß das allen Vorstellungen von Raumgrößen widerstreitet.

Ich nehme einen Würfel von der Kantenlänge 1 m und halbiere ihn durch eine Ebene parallel zur Grundfläche. Die beiden Teile setze ich nebeneinander. Die Würfelhälfte zur Rechten halbiere ich durch eine Ebene parallel zur Grundfläche abermals und setze das oben abgeschnittene Stück rechts daneben. Jetzt halbiere ich das zur Rechten stehende Stück nach demselben Rezept abermals und füge es rechts an, und so fahre ich beliebig oft fort. Ich erhalte einen Körper, der eine Art Treppe darstellt, nur sind die Stufen nicht alle gleich hoch, sondern sie nehmen von links nach rechts immer an Höhe ab; jede Stufe ist halb so hoch wie ihre Vorgängerin. Dabei werden die Stufen zwar immer kleiner, erreichen aber doch nicht die Null, sondern nähern sich nur beliebig dieser Zahl. Der Körper selbst erstreckt sich nach rechts hin bis ins Unendliche. Wie groß ist aber sein Inhalt? Aus der Entstehungsweise geht schon hervor, daß der Inhalt gleich demjenigen des ursprünglichen Würfels, also gleich 1 m^3 ist.

7. Ich konstruiere eine Spiralbahn — wieder nur in Gedanken; mit der praktischen Ausführung würde es genau so wie im vorhergehenden Falle seine Schwierigkeiten haben. An einen Halbkreis ist, wie die Fig. 2 andeutet, ein weiterer Halbkreis angeschlossen, dessen Radius halb so groß ist wie derjenige des ersten. Daran schließt sich abermals ein Halbkreis mit einem Radius, der wieder die Hälfte des Vorgängers ist usf. Alle die Halbkreise

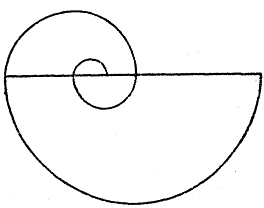


Fig. 2.

sind spiralig angeordnet. Nach dem, was wir eben kennen gelernt haben, wird es schon nicht in Erstaunen setzen, daß diese Spiralbahn den Mittelpunkt erst nach unendlich vielen Windungen erreicht. Wie aber steht es mit der Länge dieser Spiralbahn mit ihren unendlich vielen Windungen? Der Unbefangene wird auch da natürlich antworten, die Länge sei gleichfalls unendlich. Dem ist aber keineswegs so. Ist r der Radius des ersten Halbkreises, dann ist dessen Länge πr; die Länge des zweiten Halbkreises ist $\frac{1}{2}\pi r$, die des nächsten $\frac{1}{4}\pi r$ usf. Die gesamte Länge ist

$$\pi r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)=2\pi r,$$

also durchaus endlich, und zwar gleich dem Umfang des ersten zum Vollkreis ergänzten Kurvenstückes der Spiralbahn.

8. Wir legen zwei gleichgroße Münzen so auf den Tisch, daß sie sich berühren. Die eine Münze bleibt liegen, die andere wird ohne Gleiten am Rande der festen Münze bis in die Anfangsstellung einmal herumgedreht. Da die Umfänge beider Münzen gleich groß sind, ist die Frage, wie oft sich dabei die bewegliche Münze um ihren Mittelpunkt dreht, leicht beantwortet.

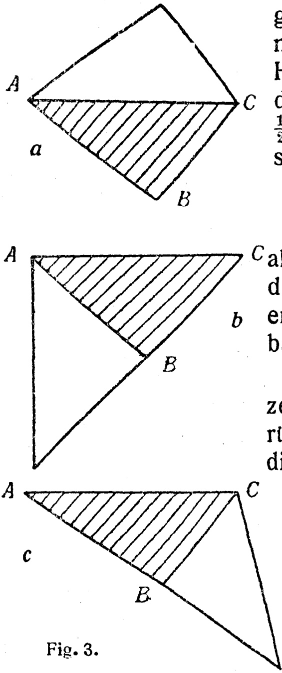


Fig. 3.

Wir wollen nun aber den entsprechenden Fall auch bei zwei Dreiecken ausführen. Die Ausgangsstellung sei durch die Fig. 3a gegeben. Die Drehung beschränkt sich hier auf die Eckpunkte A, B und C des festen Dreiecks. Wir bringen das bewegliche Dreieck zunächst durch Drehung um A in die Lage b, dann durch Drehung um B in die Lage c, schließlich durch Drehung um C wieder in die Lage a. Dabei beobachten wir, daß das zweite Dreieck sich tatsächlich *zweimal* um sich selbst gedreht hat. In der Tat erfolgt die Drehung um A um den Winkel $4R-2\alpha$, um B um den

Winkel $4R - 2\beta$, um C um den Winkel $4R - 2\gamma$, wenn α, β und γ die Dreieckswinkel sind. Die gesamte Drehung beträgt also

$$4R - 2\alpha + 4R - 2\beta + 4R - 2\gamma = 12R - 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

oder, da $$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

ist, $8R$. Wenn dir das Ergebnis noch immer erstaunlich sein sollte, dann führe die Überlegung noch einmal in ganz gleicher Weise beim Quadrat durch. Wir sehen jetzt ein, warum auch bei den Münzen die bewegliche *zwei* volle Umdrehungen gemacht hat. Und nun, Hand aufs Herz, hattest du nicht *eine* Umdrehung erwartet?

II. TÄUSCHUNGEN DER ANSCHAUUNG

1. Täuschungen der Anschauung sind unter dem Namen „geometrisch-optischer Täuschungen" in großer Zahl bekannt. Physiologie[1]) und Psychologie[2] haben sich häufig mit ihnen beschäftigt, seltener die Mathematik.[3]) Hier ist es bei der Enge des Raumes nur möglich, unter Verzicht auf alle Erklärungsversuche einige typische Beispiele herauszugreifen.

Ich beginne mit einer Reihe von Täuschungen bei der Beurteilung der *Länge von Strecken* und Linienstücken. Wie wesentlich für die Beurteilung der Länge einer Strecke ihre Begrenzung ist, zeigt die 1887 zuerst beschriebene Müller-Lyersche Täuschung. Fig. 4 zeigt zwei gleichlange Strecken nebeneinander, Fig. 5 zeigt das Gleiche in etwas anderer Ordnung, Fig. 6 eine Abänderung des Versuches. Die Fig. 7 zeigt,

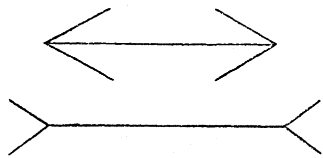


Fig. 4.

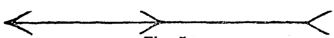


Fig. 5.

1) Vgl. z. B. v. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 2. Aufl., 1896.

2) Vgl. z. B. W. Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie, 6. Aufl., 2. Bd., Leipzig 1910, Engelmann.

3) Vgl. F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, Leipzig 1904, Teubner — diesem Buch sind mehrere der hier beigefügten Figuren entnommen.

daß von den beiden Kreisbögen derjenige, der durch eine Sehne abgeschlossen ist, kleiner erscheint als der andere, nicht in solcher Weise begrenzte.

Wenn man von zwei gleichlangen Strecken die eine mit Strichen überdeckt, erscheint sie, wie Fig. 8 zeigt, länger als die davon freie Strecke. Sehr wesentlich ist auch die gegenseitige Lage der beiden zum Vergleich kommenden Gebilde. Das fällt namentlich bei der Anordnung der beiden Strecken der Fig. 9 in die Augen. Die vertikale Strecke wird ganz außerordentlich in ihrer Länge überschätzt. Ich nenne bei der Gelegenheit noch eine andere Täuschung. Wenn man eine größere Anzahl von gleich großen Halbkreisen untereinandersetzt, so tritt auch da eine falsche Beurteilung der Ausmaße ein, die festzustellen ich dem Leser selbst überlasse.

2. Ich will nun eine Reihe geometrischer Täuschungen nennen, die sich auf die Schätzung der *Größe von Flächen* beziehen. Wie bei der Strecke läßt sich die Beurteilung der Flächengröße durch die Begrenzung beeinflussen. Fig. 10 zeigt ein Quadrat, das durch die angefügten Halbkreise zum Rechteck gedehnt wird. Auch Fig. 11 zeigt eine deutliche Beeinflussung. Wie bei der Strecke kann man auch bei einer Fläche durch Schraffur Täuschungen hervorrufen, die ganz besonders stark bei zwei Quadraten wirken, von denen man das eine horizontal, das andere vertikal schraffiert. Hier spielt offenbar schon die Lage des Gebildes eine Rolle. Diesen Einfluß soll Fig. 12 noch in anderer Weise zur Anschauung bringen. Das auf eine Ecke gestellte Quadrat erscheint größer als die beiden anderen. Sehr bekannt ist die von den beiden Kreisringausschnitten in Fig. 13 erzeugte Täuschung — Müller-Lyer hat statt dessen ursprünglich zwei gleichschenklige Trapeze studiert.

Eine große Zahl von Täuschungen geht auf Kontrastwirkungen zurück. Wenn ich (Fig. 14) einen Kreis einmal von kleineren, zum anderen von größeren Kreisen umgebe, dann wird dadurch das Schätzungsvermögen stark geschwächt. Ich empfehle noch die folgende Figur zu zeichnen: Einem Kreisausschnitt werden einmal beiderseits zwei kleinere, andererseits zwei größere Ausschnitte desselben Kreises angefügt. Auch da beobachtet man die gleiche Fehlschätzung. Schon bei den Strecken kann man die Kontrastwirkung deut-

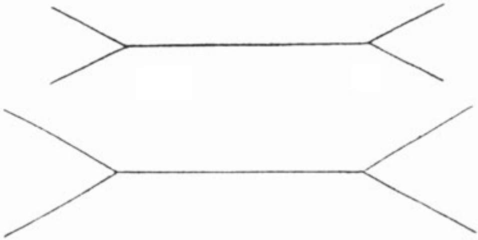


Fig. 6.

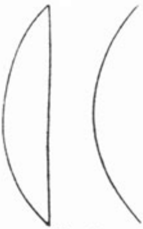


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

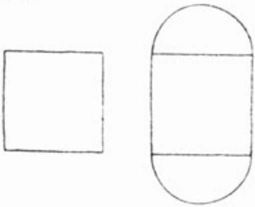


Fig. 10.

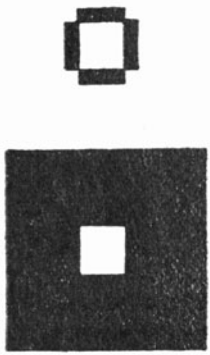


Fig. 14.

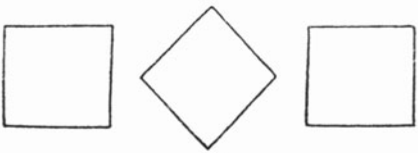


Fig. 12.

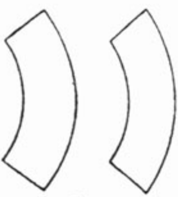


Fig. 13.

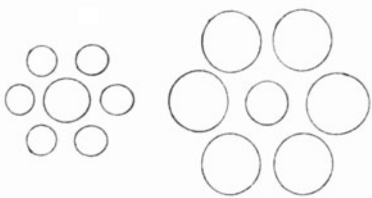


Fig. 11.

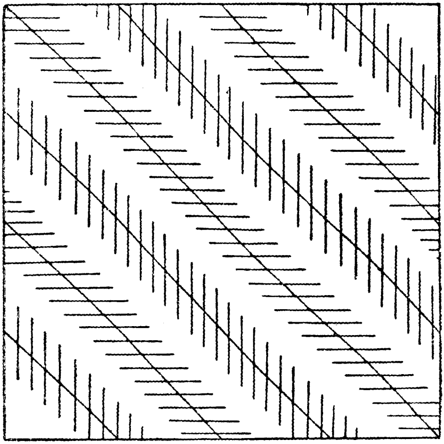


Fig. 15.

lich machen; eine zweckmäßige Anordnung auszuprobieren, überlasse ich dem Leser.

3. Nun einige *Richtungstäuschungen.* Ich zeige zunächst das allbekannte Zöllnersche Muster (Fig. 15). Die Parallelen zur Quadratdiagonale werden durch die darübergelegten Schraffuren scheinbar ganz aus ihrer Richtung gebracht. Ganz ähnlich ergeht es den Parallelen in den Figuren 16 und 17. Sie werden in der ersten Figur,

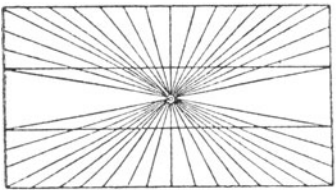


Fig. 16.

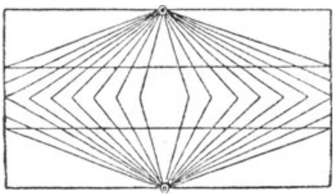


Fig. 17.

der sogenannten Heringschen Sternfigur, nach außen, in der anderen, der sogenannten pseudoskopischen Strahlenfigur nach innen gebuchtet.

In einem Kreis kann man durch Einfügung geeigneter Sehnenscharen scheinbare Knickungen der Peripherie erzeugen; Beispiele dafür möge der Leser selbst ausprobieren.

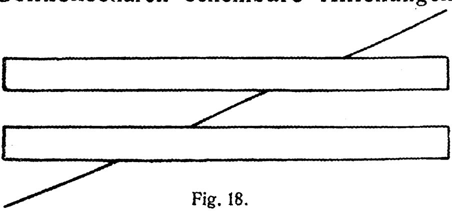


Fig. 18.

Hier möchte ich auch die Poggendorfsche Figur (18) anschließen; sie zeigt eine Gerade, die zwei Balken quert und dabei beide Male um ein beträchtliches Stück parallel zu sich verschoben erscheint.

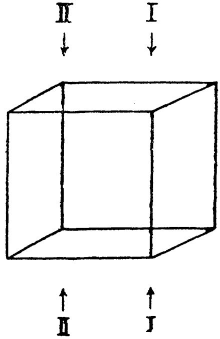


Fig. 19.

4. Groß ist die Zahl der Täuschungen bei perspektivischen Darstellungen räumlicher Gebilde. Wir müssen schon von vornherein als Merkwürdigkeit anmerken, daß es uns bei manchen Figuren außerordentlich schwer fällt, sie als ebene Zeichnungen, nicht als Darstellungen räumlicher Gebilde aufzufassen. Das Sonderbare ist nun aber, daß manche Figuren die Eigenschaft haben, ein Gebilde in ganz verschiedenen Lagen darzustellen. Der Würfel in Fig. 19 erscheint einmal von rechts oben gesehen, dann wieder auch plötzlich von links unten. Das gefaltete Blatt in Fig. 20 scheint seinen Falz bald vorn, bald hinten zu haben. Die Zöllnersche oder auch Schroedersche Treppe, Fig. 21, läßt sich so auffassen, als wenn die Fläche links unten vorn, die rechts oben hinten liegt; man kann aber auch gerade die entgegengesetzte Auffassung haben; dann wird durch die Figur etwa ein oben vorspringendes Mauerstück dargestellt. Es kommt bei alledem darauf an, welche Stücke der Figur man fixiert. Faßt man in Fig. 19 die durch *I* gekennzeichnete Würfelkante ins Auge, so erscheint der Würfel von links unten gesehen; fixiert man hingegen Kante *II*, dann von rechts oben gesehen. Die fixierte Linie wird also vorn liegend gedacht. Man erprobe das an den Fig. 20 und 21 und etwa noch an der umfangreicheren Fig. 22[1]), die allerdings der einen Auffassung Schwierigkeiten entgegensetzt.

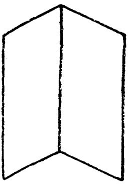


Fig. 20.

Welche Mannigfaltigkeit unter Umständen für die perspektivische Auffassung einer ebenen Figur gegeben sein kann, zeige die Fig. 23. Sie läßt

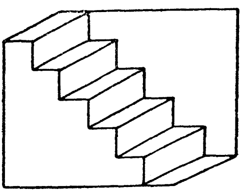


Fig. 21.

1) Entnommen E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2. Bd., 1. Heft, 2. Aufl. Leipzig 1919, Teubner.

Ungünstige Bildwirkung.

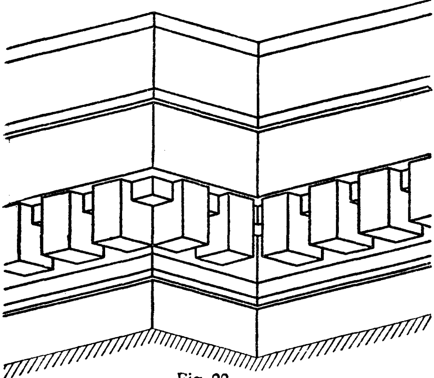


Fig. 22.

sich einmal als Bild eines zylindrischen Körpers ansehen, die nun entweder von rechts oben oder von links unten her betrachtet wird. Aber auch als Ring kann ich die Figur auffassen, dessen Breite vorn und hinten verschieden ist. Die dünne Stelle wird entweder vorn oder — wenn man sich einige Mühe gibt — hinten gesehen.

5. Man muß nicht denken, daß die hier vorgeführten geometrisch-optischen Täuschungen nur seltene Absonderlichkeiten einer mathematischen oder psychologischen Phantasie sind; derartige Täuschungen begegnen uns überall im täglichen Leben, wenn auch nicht so in „Reinkultur" wie oben. Ein Flechtbogen der Kleinen, wie ihn Fig. 24 nach einem Vorbilde von Elsner wiedergibt, weist Täuschungen auf, mit deren Zurückführung auf einfache Formen sich der Leser beschäftigen möge. Zahlreiche Beispiele von Photographien wirklicher Gegenstände könnten die Gültigkeit unserer Feststellungen bei perspektivischen Darstellungen belegen. Wegen der Raummenge muß es genügen, den Leser zum Suchen nach Beispielen anzuregen. Eine Zergliederung wird vielfach offenbaren, welche Elementarfehler vorliegen. Wer freilich die Frage, wo der Fehler steckt, ernst nimmt, der wird sich mit der Zurückführung auf einfachste geometrische Gebilde nicht begnügen, sondern wird sich fragen, worin denn diese begründet sind. Auf dieses Grenzgebiet von Mathematik und Psychologie einzugehen verbietet leider der Raum.

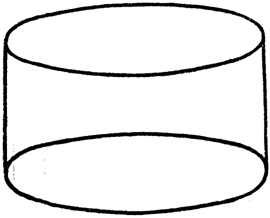


Fig. 23.

6. Das geht nicht! wird der Leser vielleicht bei folgenden Auf-

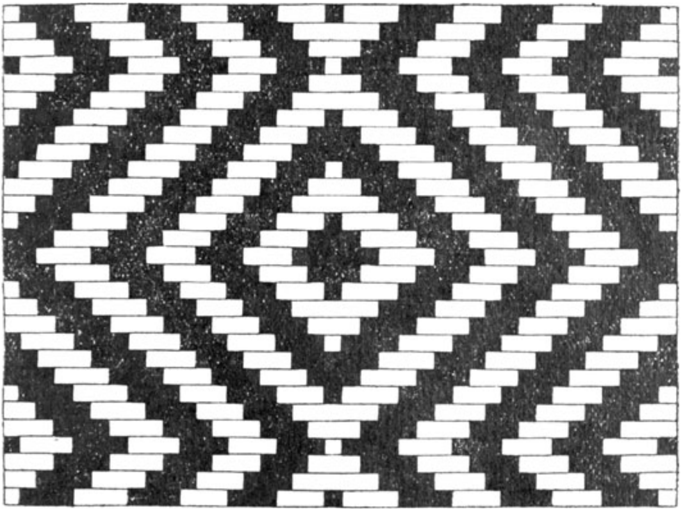


Fig. 24.

gaben sagen und erst längeres Nachdenken wird ihn belehren, daß ihn die Anschauung im Stich ließ: a) Ein Würfel soll so durch eine Ebene geschnitten werden, daß die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. b) Ein Würfel soll durch einen gleichgroßen Würfel hindurchgesteckt werden. c) In ein Stück Pappe ist ein Quadrat mit der Seite a, ein Kreis mit dem Durchmesser a, ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe a hineingeschnitten. Ein Körper ist herzustellen, der sich durch diese drei Löcher gerade hindurchstecken läßt, der mit anderen Worten die genannten drei Figuren zu Grundriß, Aufriß und Seitenriß hat. d) Sechs gleichlange Strecken sind gegeben (etwa Streichhölzer). Aus ihnen sind vier gleichseitige Dreiecke zu bilden.

7. Zum Schluß dieses Abschnittes noch ein kleines Wechselgespräch: Ein Mathematiker kauft in einem Laden einen Gegenstand. „Er kostet 90 M.“ „Erlauben Sie, er ist aber mit 60 ausgezeichnet!“ „Ach, verzeihen Sie, ich hatte die Ziffer falsch herumgehalten.“ „Ach nein, 60 falsch herumgelesen gibt ...“

III. AUTORENFEHLER

Ehe ich mich dem Hauptteil dieses kleinen Büchleins, den Schülerfehlern, zuwende, will ich hier eine Reihe von Autorenfehlern zusammenstellen, gleichsam als Trost für die Schüler, daß auch andere Leute Fehler begehen, ja daß das Fehlermachen häufiger ist, als man denkt. Wichtiger aber ist es, daß aufgedeckte Fehler dazu dienen sollen, den Leser zu kritischer Aufnahme der Lektüre zu erziehen. Dann sind die Fehler anderer nicht nur ein Gegenstand des Spottes, vielleicht auch der Schadenfreude, sondern auch lehrreich.

1. Beginnen wir mit dem mathematischen Laien. Der Maler muß, wenn er sein Bild entwirft, sich den Gesetzen der Perspektive unterwerfen. Verstöße gegen diese Gesetze waren an der Tagesordnung natürlich in jenen Zeiten, als man die Perspektive noch nicht erforscht hatte; das ist begreiflich. Aber auch damals hätte man so einfache Dinge, wie die Wiedergabe eines Kreises durch eine Ellipse und nicht durch jenes zweischnäbelige, aus zwei Kreisbögen zusammengesetzte Gebilde, das überaus häufig ist — übrigens auch heute noch in zahlreichen Schülerheften und selbst in einigen mathematischen Schulbüchern — wohl richtig machen können. Verstöße gegen die Gesetze der Perspektive sind auch heute bei Gemälden durchaus nicht selten — ich will gar nicht von allerlei modernen Verzerrungskünsten reden, für die Perspektive überwundener Standpunkt ist.

2. Beim Literaten, beim Romanschriftsteller und beim lyrischen Dichter ist die Mathematik in der Regel nicht gut angeschrieben[1]) — wenngleich es auch Ausnahmen von der Regel gibt. In einem Roman, der die Tragödie des für die Mathematik schlecht veranlagten Schülers zum Gegenstand hat, erzählt der Verfasser, wie vier Adern auf dem Arm des Jungen ein „Parallelepipethon" bilden; er macht seinen Lesern weis, daß ein Mathematiker bei seinem Studium übergeschnappt ist, als er die Vegaschen Logarithmentafeln auswendig lernte.

---

1) Über die Beziehung der Mathematik zur Dichtung vgl. etwa die zahlreichen Proben in W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Breslau 1922, Hirt.

Bei einer Gelegenheit sind Fehler ganz besonders häufig, bei Naturschilderungen, die Vorkenntnisse aus der mathematischen Astronomie voraussetzen.[1]) Ein paar Beispiele:

„Langsam hebt sich gegen Abend die silberne Sichel des Mondes über den Horizont empor."

Im Anschluß an einen Sonnenuntergang heißt es: „Während dieses herrliche Phänomen im Westen sich entwickelte, erhob sich im Osten der halbvolle Mond, und die Sterne flakkerten in goldiger Pracht."

„Der Mond, eine liegende Sichel, stand fast im Zenit, so hell, daß man die beschatteten Teile seiner Kugelform sehen konnte; die Sterne begannen in ihrer Pracht aus dem schwärzlichen Blau des Firmaments hervorzubrechen" – ein Satz aus dem bekanntesten Roman eines Dichter-Ingenieurs.

In einem ganz modernen Robinson, der sich gerade die Erziehung zur Naturbeobachtung zur Aufgabe gesetzt hat, wird in Hamburg an einem frühen Sommerabend in den großen Ferien sehr genau der Orion mit Jakobsstab, Rigel und Beteigeuze betrachtet.

3. Als Gegensatz will ich den Philosophen zitieren, der in einer Studie über Kierkegaard und Nietzsche die Mathematik als Eideshelfer heranholt: „Man kann das geradezu mit mathematischen Formeln deutlich machen. Wenn Kierkegaard lehrt, daß man (1) der Einzelne (m) werde mit Hilfe des Gottesglaubens (^{x}), so kann man dafür die Formel setzen: $1 \cdot m^x$. Wenn Nietzsche meint, man (1) werde der Übermensch (n) unter Ablehnung des Gottesglaubens ($^{-x}$), so muß hierfür die Formel gesetzt werden: $1 \cdot n^{-x}$. $1 \cdot n^{-x}$ ist aber gleich $1/n^x$. Dann stehen sich die beiden Ansichten gegenüber wie $1 \cdot m^x$ und $1/n^x$, in Worten ausgedrückt: Durch den Gottesglauben wird der Einzelne potenziert, d. h. erhöht, durch die Ablehnung des Gottesglaubens wird der, der der Übermensch sein will, dividiert, d. h. gebrochen."

4. Ein anderer Philosoph behauptet in seinem Buch „Zum Ablauf des Lebens", daß die Zahlen 23 und 28 im Leben eine ausgezeichnete Rolle spielen dergestalt, daß alle wich-

1) Diese und weitere Beispiele finden sich in A. Höfler, Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie. Leipzig 1913, Teubner.

tigen Erscheinungen Vielfache dieser Zahlen oder die Summe zweier solcher Vielfachen sind, mit anderen Worten, daß sie sich durch einen Ausdruck der Form $23x + 28y$ darstellen lassen. Nun ist es aber ein einfacher Satz der Zahlentheorie, daß der „Modul“ (23, 28) *alle* ganzen Zahlen darstellt, weil 23 und 28 relativprim sind. Das Gesetz ist also trivial und ließe sich in gleicher Weise für irgend zwei andere teilerfremde Zahlen formulieren, etwa 7 und 13, um gleich ein paar mystische Vertreter vorzuschlagen.

In einem 1906 erschienenen philosophischen Werk wird sogar, wie ich wieder Höfler entnehme, die folgende Wundermär berichtet: „Die zähesten und widerstandsfähigsten Lebewesen müssen am Nordpol erfrieren, am Südpol verbrennen . . .“

5. Ich komme zur Klasse der sog. Fachmänner. Ich beginne mit dem Zeitungsschreiber. Leider ist von Mathematik in den Zeitungen nicht oft die Rede; wenn es aber einmal der Fall ist, so muß man zuweilen den Kopf schütteln. Hier nur zwei Beispiele, in denen es sich nicht um Rechnung, sondern nur um mathematische Begriffe und Zeichen handelt.

Als der große Turm der Funkenstation in Nauen vor Jahren vom Sturm umgeworfen worden war, fand eine Zeitung den tieferen Grund darin, daß sich der Schwerpunkt des Turmes in zwei Teile geteilt hatte.

Als das Fermatsche Problem durch alle Zeitungen ging, schrieb eine unserer bekanntesten Tageszeitungen

$$x^n + y^n = z^n \; (n + 2)$$

lasse sich nicht in ganzen Zahlen lösen! Ein Leser setzte sich auch tatsächlich hin, zeigte, daß es schon für $n = 1$ beliebig viele Lösungen gab und – bewarb sich um den Preis.

Die Ausdrucksweise der Zeitungen läßt gerade in mathematischen Dingen oft recht zu wünschen übrig.

Im Briefkasten einer der bekanntesten illustrierten Wochenschriften wird ein Einsender wörtlich so belehrt: „Der Maßstab auf Ihrer Landkarte, 1 : 25,000, bedeutet, daß eine Verkleinerung der Karte erfolgte, insofern als 1 cm gezeichnet wurde für eine Strecke von 25,000 cm = $^1/_4$ km. Sie können daher mit dem Metermaß genau feststellen, wie weit ein Ort vom andern entfernt ist, wenn Sie das gewonnene Ergebnis mit 25,000 cm oder $^1/_4$ km multiplizieren."

6. Weit schlimmer steht es mit der großen Klasse der mathematischen Dilettanten, deshalb nämlich, weil hier großer Eifer und hingebende Liebe zur Wissenschaft nutzlos an allzu hohe Ziele vergeudet werden. Es muß immer gleich an die Bezwingung der größten Probleme gehen, die zumeist gar nicht voll verstanden werden, gerade weil sie so einfach klingen. Zu den Winkeltrisektierern, Kreisquadratoren und Kubisten (will sagen Würfelverdopplern) gesellen sich seit einem Jahrzehnt die Fermatbeweiser. Eine systematische Untersuchung der hier zutage getretenen Fehlergruppen wäre eine gewiß lehrreiche Arbeit. Ich kann mir hier nur zwei Proben gestatten: Die erste ist mir von einem Leser der ersten Auflage dieser Schrift zur Verfügung gestellt worden, dem sie zur Begutachachtung überreicht worden war, die zweite stammt aus einem Fermatbeweis, der mir vom Verfasser selbst übersandt wurde.

Der Winkel (Fig. 25) mit dem Scheitel O soll in drei gleiche Teile geteilt werden. Eine beliebige Strecke trägt man dreimal hintereinander auf dem einen Schenkel vom Scheitelpunkt aus ab $OA = AB = BC$. Mit OB schlägt man einen Kreisbogen, der den andern Schenkel in B' trifft. Man halbiert den Bogen BB' und findet M. Mit OC schlägt man gleichfalls um O einen Kreisbogen, der den andern Schenkel in C, trifft. Jetzt trägt man den Bogen BM auf dem Bogen CC' von C bis M' ab. Dann ist

$$M'OC = \tfrac{1}{3}\, C'OC.$$

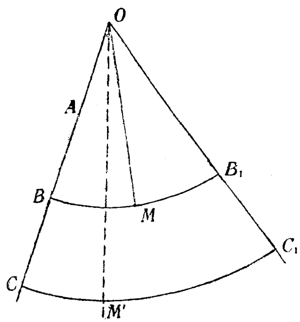


Fig. 25.

Und der Fermatbeweiser schreibt so: „Was geht nun aus dem Fermatschen Satz hervor? Wollen wir uns die 3. Potenz (den Kubus) einer Zahl versinnlicht denken, so haben wir uns einen Würfel vorzustellen. Nach dem Fermatschen Satz ist es nun ausgeschlossen (weil $a^3 - b^3 = c^3$, a, b und c ganze Zahlen, unmöglich ist), daß man aus dem Restkörper, den man nun erhält, wenn man von dem Inhalt eines größeren Würfels den Inhalt eines kleineren Würfels abzieht, wieder einen mathematisch genauen Würfel erhält. Oder: würden wir zwei Würfel aus leicht schmelzbarem Stoffe schmelzen (dabei vorausgesetzt, daß nichts von dem Stoffe verloren geht), so würde sich aus der nun erhaltenen flüssigen Gesamtmasse ein regelmäßiger Würfel nicht herstellen lassen. Sollte es ein mathematisch genauer Würfel werden, so müßte der Masse noch Stoff hinzugefügt, oder ein Teil unverwendet gelassen werden, auf keinen Fall würde sich aus der Gesamtmasse ein mathematisch genauer Würfel herstellen lassen."

7. Nicht selten sind Fehler in den Lehrbüchern von Fächern, für die die Mathematik nur die Rolle einer Hilfswissenschaft spielt. Das gilt in starkem Maße von der Erdkunde; in den Lehrbuchdarstellungen kommt hier die mathematische Erd- und Himmelskunde zuweilen recht schlecht weg. Die Didaktik von A. Höfler (Anm. 1 S. 15) enthält eine umfangreiche Sammlung solcher Sünden wider die Mathematik; einige habe ich mir hier herausgesucht:

a) „Am 21. März steht die Sonne genau über der Mitte der Erdkugel . . ."

b) „An jeder sich bewegenden Kugel müssen zwei Punkte in Ruhe verbleiben, und diese nennt man an der Erdkugel Pole."

c) „Derjenige Durchmesser der Erdkugel, welcher genau die Richtung von Norden nach Süden hat, heißt die Erdachse."

d) „Jede Halbkugel (der Erde) hat ihre warme Zeit, solange sich die Sonne daselbst befindet."

e) „Legt man sich durch jeden der 360 Grade des Äquators einen größten Kreis, so erhält man 180 Meridiane. Es gibt also im ganzen 360 Meridiane. Ihre Entfernung vom Äquator ist 111,3 km."

f) „Orte, die an verschiedenen Meridianen liegen, haben zu verschiedenen Tageszeiten Mittag."

g) „Auch der Mond sucht die Körper an sich zu ziehen. Das Wasser kann diesem Zuge leichter folgen als das feste Land; infolgedessen schwillt das Meer auf der dem Monde zugekehrten Seite an. Eigentümlich ist es, daß auch auf der entgegengesetzten Seite der Erde eine Anschwellung entsteht."

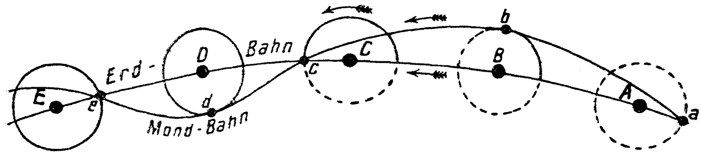


Fig. 26.

h) „Aber die Ebene der scheinbaren Sonnenbahn (der Ekliptik) und die Ebene der Erdbahn fallen nicht zusammen, sondern schließen einen Winkel von $23\frac{1}{2}^0$ ein."

8. Ich führe noch ein weiteres Beispiel deshalb an, weil es in fast allen Lehrbüchern und Atlanten wiederkehrt, die Mondbahn. Das übliche Bild gibt etwa die Fig. 26 wieder, die ich dem Prospekt irgendeines Werkes entnehme: Es ist eine Schlangenlinie, die der Sonne bald zugekrümmt, bald abgekrümmt, der Erde jedoch immer zugekrümmt ist. Wenn die Mondbahn tatsächlich solche Windungen machte, so würde das rein mathematisch zu recht merkwürdigen Forderungen führen. Tatsächlich ist die Bahn in ihrem ganzen Verlauf der Sonne zugekrümmt. Daß trotzdem das Hin- und Herpendeln zwischen den beiden Seiten der Erdbahn (der von der Sonne aus gesehenen inneren und äußeren) möglich ist, erklärt sich daraus, daß der Mondbahnradius außerordentlich klein im Verhältnis zum Erdbahnradius ist. Fig. 27 stellt ein Zwölftel der Erdbahn (gestrichelt) und der Mondbahn (ausgezogen) dar.[1])

9. Neben dem Geographen könnte ich noch die Vertreter anderer Fächer heranziehen. So haben die Darstellungen der experimentellen Physik fast durchweg eine elementare Umgehung

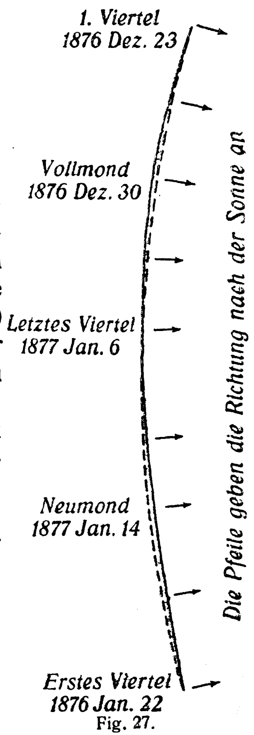


Fig. 27.

1) Näheres hierüber vgl. in H. C. E. Martens, Astronomische Erdkunde, Große Ausg., 4. Aufl., Dresden 1912, Koch, S. 408.

der Infinitesimalrechnung sich zurechtgelegt, die in vielen Punkten mathematisch fehlerhaft ist — doch will ich darauf nicht eingehen. Ich muß vielmehr jetzt dem mathematischen Lehrbuchverfasser selbst das Wort geben. Alle nachfolgenden Stellen sind wörtlich Büchern entnommen. Die Aufdeckung der Fehler und der Unzulänglichkeiten in der Beweisführung ist durchaus nicht immer leicht; mehrfach handelt es sich um Dinge, bei denen im Unterricht bis vor kurzem ganz allgemein eine vollständige Klarstellung verabsäumt worden ist.

Ich verzichte darauf, triviale Fehler anzuführen; auch sie kommen vor. In der 1922 erschienenen 2. Aufl. eines Planimetrie-Lehrbuches heißt es: „Alle rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich." — Es liegt kein Druckfehler vor, denn zwei Seiten darauf wird in einer Anmerkung „wiederholt darauf hingewiesen, daß rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind".

Und in einem amerikanischen Schulbuch soll zu lesen stehen: Während die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ einen runden Punkt darstellt, ist es nicht möglich, einen viereckigen Punkt darzustellen.

10. „Hat der Dezimalbruch keine Periode, und ist er trotzdem unendlich lang, so läßt er sich nicht in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Denn wäre er aus einem gewöhnlichen Bruche entstanden, so müßte er periodisch sein, da die Reste sich schließlich doch wiederholen würden. Betrachtet man ihn als rein periodisch, jedoch mit unendlich langer Periode, so erhält der Zähler unendlich viele Stellen und der Nenner ebenso oft die Zahl 9. Statt dessen kann man ihn, wie es gewöhnlich geschieht, auch als gewöhnlichen Bruch schreiben, dessen Nenner 1 mit unendlich vielen Nullen ist. Einen solchen Bruch nennt man eine *Irrationalzahl.* Als eine solche ist z. B. $\pi = 3{,}14159265\ldots$ von Lambert nachgewiesen worden, was nun als

$$\frac{314159265\ldots}{99999999\ldots} \quad \text{oder als} \quad \frac{314159265\ldots}{100000000\ldots}$$

aufzufassen ist, jedoch mit endlosem Zähler und Nenner."

11. „Statt eine mehrgliedrige Größe im ganzen zu multiplizieren, kann man die Multiplikation an jedem einzelnen Gliede vornehmen:

$$(a + b)m = am + bm, \quad (a - b)m = am - bm.$$

Multipliziert man eine mehrgliedrige Größe mit einer zweiten ebenfalls mehrgliedrigen Größe, so kann man diesen Satz wiederholt anwenden. Man hat dann die Gleichungen:

$$(a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y=ax+bx+ay+by,$$
$$(a+b)(x-y)=(a+b)x-(a+b)y=ax+bx-ay-by,$$
$$(a-b)(x-y)=(a-b)x-(a-b)y=ax-bx-ay+by.$$

Aus dem Schlußergebnis ersieht man, daß hierbei tatsächlich jedes Glied des einen Faktors mit jedem Glied des andern Faktors multipliziert wird, wobei gleichstimmige Größen ein positives und ungleichstimmige ein negatives Produkt ergeben.

Da bei diesen Einzelmultiplikationen immer nur die Faktoren jedes einzelnen Teilprodukts in Betracht kommen, muß diese Regel auch dann gültig sein, wenn man nur mit solchen einzelnen Produkten zu tun hat. Es gelten also nachstehende vier Multiplikationsregeln:

$$(+a)\cdot(+b)=+ab;\quad (+a)\cdot(-b)=-ab;$$
$$(-a)\cdot(+b)=-ab;\quad (-a)\cdot(-b)=+ab.\text{“}$$

12. „Der Begriff der Potenz ... Danach war die Potenz von a^n das Produkt von n Faktoren, die sämtlich den Wert a besitzen ... Schreibt man statt a^n das Produkt $1 \cdot a^n$, so kann man die $n \cdot$ Potenz von a als das Ergebnis der n mal hintereinander ausgeführten Multiplikation der Zahl Eins mit a ansehen. Daraus folgt, daß die erste Potenz von a den Wert a haben muß ... Führt man gar keine Multiplikation mit a aus, so bleibt die Zahl Eins allein übrig, d. h. $a^0 = 1$. Die nullte Potenz jeder Grundzahl a hat den Wert Eins.“

13. „Aus ... folgt je ein besonderes, dem Verfahren bei der Ellipse ganz ähnliches Verfahren, von dem gegebenen Punkte R „außerhalb der Hyperbel“ (d. h. innerhalb des zwischen den beiden Hyperbelästen liegenden Zwischenraumes) Tangenten an die Hyperbel zu ziehen. Zugleich ergibt sich dabei, daß man von jedem solchen Punkte an denselben Ast zwei Tangenten ziehen kann.

Da dabei der Brennpunkt innerhalb des Astes, an den Tangenten zu ziehen sind, eine andere Rolle spielt, als der andere Brennpunkt, fallen die an den einen Ast gezogenen Tangenten nicht mit den von demselben Punkte ausgehenden Tangenten an den andern Ast zusammen. Man kann also im ganzen von jedem Punkte R vier Tangenten an die Hyperbel ziehen, zwei an den einen, zwei an den andern Ast."

14. Damit man lerne, ein wenig zurückhaltend in der schnellen Verurteilung solcher „Autorenfehler" zu sein, bringe ich im folgenden einen Abschnitt aus Eulers Algebra (es ist Nr. 33 vom 1. Abschnitt des 1. Teils), einem Buche, das eine neuere Logik gelegentlich als eine Sammelstelle logischer Fehler bezeichnet hat. Und doch war doch wahrlich Euler ein wahrer Mathematiker!

„Hierbey ist zunächst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde ab; ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß. So viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen $-$ seyn. Denn $-a$ mit $+b$ mult. gibt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$."

15. Schließlich noch ein letztes Beispiel. In einem bekannten Buch über Elementare Zahlentheorie (es ist *kein* Schulbuch) steht geschrieben: „Schon Euclid (Elementa, lib. IX, 20) hat bewiesen, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist. In der Tat, gäbe es nur eine endliche Menge von Primzahlen, so wäre eine unter ihnen die größte (nach Kap. 1, Nr. 7); sie heiße p. Bildet man dann das Produkt aller vorhandenen Primzahlen und addiert zu demselben die Einheit, so entsteht die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p + 1$, welche offenbar $> p$ und durch keine der vorhandenen Primzahlen teilbar, folglich unzerlegbar also noch eine neue Primzahl wäre, gegen die Voraussetzung."

Zu diesem Abschnitt hat ein *1. Leser* an den Rand geschrieben:

„Es steht nur fest, daß diese neue Zahl einen Primfaktor größer als p enthält. Sie braucht keine, kann aber eine Primzahl sein."

Dazu schreibt nun wieder ein *2. Leser* kurz und bündig: „Die Bemerkung ist falsch."

Wer hat nun recht?

Ich will zu dem gleichen Thema einen Brief, den ich vor kurzem erhielt, wörtlich hersetzen: „In Ihrem Büchlein ‚Riesen und Zwerge im Zahlenreich' teilen Sie im Abschnitt 7 (Von großen Primzahlen) mit, daß das Problem, ob die Paare von Primzahlen, die sich nur um 2 unterscheiden, einmal ganz aufhören, ob es also ein letztes, größtes gäbe, oder ob ihre Anzahl unendlich sei, bis heute noch nicht gelöst sei. Nun scheint mir die Antwort auf diese Frage aber außerordentlich einfach zu sein. Ich knüpfe unmittelbar an an den Euklidischen Beweis für die unendlich große Anzahl der Primzahlen. Nehmen wir an, es gäbe eine größte Primzahl p. Euklid zeigt, daß dann $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p + 1$ eine weitere Primzahl ist, die größer als p ist. Auf dieselbe Weise ist aber auch zu zeigen, daß die Zahl $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p - 1$ eine Primzahl ist. Wir haben somit ein Primzahlenpaar, dessen Zahlen sich nur um 2 unterscheiden. Wenn nun das ursprünglich als größtes Primzahlenpaar angesehene Paar die Zahlen r und $r + 2$ waren, so brauche ich jetzt nur $p = r + 2$ zu setzen, und die oben definierten Zahlen n und m bilden ein weiteres Primzahlenpaar, dessen Zahlen größer als die ursprünglich angenommenen sind."

IV. SCHÜLERFEHLER

a) Vorbemerkungen. Die im folgenden mitgeteilten 55 Beispiele sind mit ganz wenigen Ausnahmen „wirkliche", d. h. sie sind *in der vorliegenden Form* von Schülern abgeliefert worden, entweder bei dem täglichen Unterricht oder beim Examen; sehr viele sind Prüfungsaufgaben von der sogenannten „allgemeinen Vorbereitungsprüfung" in Dänemark.

Ich habe dabei natürlich darauf verzichtet, ganz unsinnige Dinge, die in Schülerheften nicht gerade selten sind, wiederzugeben. Ein Beispiel mag da statt vieler genügen, es ist der schriftlichen Prüfungsarbeit einer jungen Dame entnommen, die die Reife eines Lyzeums als Auswärtige erwerben wollte:

„Der Pythagoras lautet: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten."

Behauptung: Ich behaupte $a^2 = b^2 + c^2$.

„Beweis: Wenn der Inhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich 2 ist und der Inhalt der beiden Quadrate über den beiden Katheten je 1 beträgt, so komme ich zu dem Resultate $2 = 1 + 1$. $1 + 1$ ist aber 2. Also $2 = 2$. Setze ich statt dieser Zahlen a, b und c, so erhalte ich $a^2 = b^2 + c^2$, was zu beweisen war."

Auch von den oft als Scherz erzählten, nahe an das Unsinnige streifenden Beispielen falscher Schülerantworten mögen einige Beispiele genügen. Der folgende Satz ist zu beweisen: An einer Geraden sind die Punkte A, O, M, B, N in der angegebenen Reihenfolge so angeschrieben, daß $AO = OB$ und $\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{ON}$ ist. Es soll bewiesen werden, daß

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$$

ist. Die Lösung, die einmal ein Schüler tatsächlich gegeben hat, geht so: Man kürzt die letztgenannten Brüche, den einen durch M, den andern durch N, und erhält dadurch

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}.$$

Das ist sicher richtig, mithin auch der zu beweisende Satz.

Dieses Beispiel erinnert an die Fuchsenfrage in den mathematischen Vereinen, warum man nicht in $\frac{dy}{dx}$ das d weghebe, oder an die Berechnung von $\int \frac{dx}{x} = \int d$, was dann 1 gibt, da ja bekanntlich Integration und Differentiation entgegengesetzte Rechenoperationen sind. Wirklich vorgekommen ist die folgende Rechnung:

$$\frac{\int f(x)\,dx}{\int f(x)g(x)\,dx} = \frac{\int dx}{\int g(x)\,dx} = \frac{x}{\int g(x)\,dx}.$$

Eine amerikanische Schulzeitschrift verbürgt die Division

$$f(x) : (x - a) = f,$$
$$\frac{f(x) - f(a)}{f(a)}$$

als Beweis dafür, daß $f(x)$ bei der Division durch $x - a$ den Rest $f(a)$ ergibt.

Gemeine Rechenfehler kommen in unseren Beispielen nur ausnahmsweise vor. Auch sie können sich manchmal so verstecken, daß ein unaufmerksamer Leser sie nicht findet. Ein Beispiel:

Die Entfernung zweier Punkte $P_1 \equiv (11;46)$ und $P_2 \equiv (137;14)$ ist zu berechnen. Nach der Formel

$$P_1 P_2 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

wird

$$P_1 P_2 = \sqrt{32^2 + 126^2} = \sqrt{1024 + 15876}$$

$$= \sqrt{16900} = 430.$$

Es ist bei unseren Aufgaben ganz davon abgesehen, sie durch eine geschickte Einkleidung besonders schwierig zu machen, wohl geradezu auf eine falsche Lösung hinweisend; es sind banale Schulaufgaben. Nur ein Beispiel, wie man durch eigenartige Fassung aus einer trivialen Aufgabe ein scheinbar schwieriges Problem machen kann. Ein Punkt einer Hyperbel wird mit den Brennpunkten verbunden. Auf den Brennpunkten werden die Mittelsenkrechten errichtet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der beiden Mittelsenkrechten, wenn der Punkt auf der Hyperbel wandert? – Man wird analytisch oder synthetisch an die Lösung gehen, entwirft wohl auch eine schöne, aber zumeist ungenaue Figur und hat sich – täuschen lassen. Wo der Punkt auch wandert, immer schneiden sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkte, immer also liegt der Schnittpunkt der beiden auf der Mittelsenkrechten der beiden Brennpunkte.

Mißverständnisse und Nichtverständnisse der gelernten Sätze nebst Versündigungen gegen die Logik sind die Fehler, die am häufigsten auftreten. Bisweilen ist alles, was niedergeschrieben ist, richtig, aber etwas mehr oder weniger Bedeutendes fehlt und macht dadurch die Lösung unbefriedigend; dann und wann rührt das Verkehrte von unrichtiger Zeichnung her. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen einzelne kuriose Fälle, wo das Ergebnis richtig ist, trotzdem schwere Fehler begangen sind.

Ein Fehler ist der Mehrzahl dieser wortgetreu wiedergegebenen Schülerdarstellungen gemeinsam. Sie scheuen den

Text und beschränken sich auf das Formelgerippe oft auch in Fällen, wo Erläuterungen unumgänglich gewesen wären. Welche Schwierigkeiten daraus für das Verständnis entstehen, zeigen nicht wenige der nachfolgenden Beispiele.

Es wird recht nützlich sein, sich mit den am häufigsten vorkommenden Fehlern bei der Lösung von Aufgaben bekannt zu machen. Selbst wenn jemand imstande ist, eine Aufgabe richtig zu lösen, wird er oft die Fehler in falschen Lösungen nicht sogleich entdecken, bisweilen wird er etwas Richtiges als fehlerhaft bezeichnen oder etwas Fehlerhaftes als richtig, oder vielleicht zwar die Fehler als solche angeben können, aber unfähig sein, die den Fehlern zugrunde liegenden Gedankengänge zu erklären. Wie dem Lehrenden wird die Sammlung vielleicht auch dem Lernenden etwas bringen, denn nicht selten ist eine erst fehlerhaft behandelte Aufgabe für das mathematische Verständnis fruchtbarer als eine von Anfang an glatt und richtig gelöste.

b) Algebraische Gleichungen. 1. Die Gleichung

$$\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x} \quad \text{ist zu lösen.}$$

Lösung: $(a-x)(b-x)=(1-ax)(1-bx)$

$$ab-ax-bx+x^2=1-bx-ax+abx^2$$

$$x^2=1+abx^2-ab$$

$$x^2-1=ab(x^2-1)$$

$$1=ab.$$

2. Vorgelegt ist die Gleichung

$$(x+1)^2-(x+2)(x+3)=(x+4)(x+5)-(x+6)^2.$$

Lösung:

$$x^2+2x+1-x^2-5x-6=x^2+9x+20-x^2-12x-36$$

$$-3x-5=-3x-16$$

$$5=16.$$

3. Löse die Gleichung

$$\frac{6}{x-3}-\frac{9}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{4}{x-1}.$$

Lösung: $$\frac{6(x-2)-9(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-1)-4(x-4)}{(x-4)(x-1)}$$

$$\frac{6x-12-9x+27}{x^2-5x+6} = \frac{x-1-4x+16}{x^2-5x+4}$$

$$\frac{15-3x}{x^2-5x+6} = \frac{15-3x}{x^2-5x+4}$$

also $$6 = 4.$$

4. Man soll die Gleichung

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1} \quad \text{lösen.}$$

Lösung:

$$\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{6x}+\sqrt{x}+4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}+4$$
$$=\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{6x}+\sqrt{x}-4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}-4.$$
$$8\sqrt{x+1}+8=4\sqrt{6x};$$
$$2\sqrt{x+1}=\sqrt{6x}-2;$$
$$4x+4=6x+4-4\sqrt{6x};$$
$$2\sqrt{6x}=x;$$
$$24x=x^2;$$
$$x=24.$$

5. Löse die Gleichung

$$\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}=0.$$

Lösung: $x-4-3-\sqrt{(x-1)(x-4)}=0$

$$x-7=\sqrt{(x-1)(x-4)}$$
$$x^2-14x+49=x^2-5x+4;$$
$$9x=45$$
$$x=5.$$

6. Die Gleichung zu bilden, deren Wurzeln alle beide um $\frac{1}{2}$ größer als die Wurzeln der Gleichung $7x^2-6x+1=0$ sind.

Lösung: α und β seien die Wurzeln der gegebenen Gleichung; die der neuen Gleichung sind dann $\alpha + \frac{1}{2}$ und $\beta + \frac{1}{2}$, und die Gleichung lautet so:

$$y^2 - \left(\alpha + \frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2}\right) y + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\beta + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Nun ist aber $\alpha + \beta = 6, \ \alpha\beta = 1$

(Sätze über die Summe und das Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung), also erhält man:

$$y^2 - 7y + 4\tfrac{1}{4} = 0 \text{ oder } 4y^2 - 28y + 17 = 0.$$

7. $x + x\sqrt{2} = 1$; finde x!

Lösung:

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= 1 - x; \\ 2x^2 &= 1 + x^2 - 2x; \\ x^2 + 2x - 1 &= 0, \\ x &= -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

8. $x + 2\sqrt{x} = 3$; finde x!

Lösung:

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{x} &= 3, \\ \sqrt{x} &= -1 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases} \\ x &= \begin{cases} 1 \\ 9. \end{cases} \end{aligned}$$

Da die gegebene Gleichung Quadratwurzeln enthält, ist es notwendig, die gefundenen Werte einzusetzen. Dann sieht man, daß 1 der Gleichung genügt, während 9 eine „fremde Wurzel“ ist.

9. Die folgenden zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten wurden vorgelegt:

(1) $$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

(2) $$x - y = 4$$

Lösung: Aus (1) folgt

$$x^2 + y^2 = 2xy$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$
$$(x - y)^2 = 0$$
$$x - y = 0$$
$$\underline{x - y = 4}$$
$$0 = 4.$$

10. Aus den Gleichungen

$$(a - 2)x + (3a - 1)y = 2a$$
$$4x - 2(a - 1)y = -a$$

sind x und y zu finden. Besonders sind die Fälle $a = 0$ und $a = -3$ zu untersuchen.

Lösung: Die obere Gleichung wird mit 4, die untere mit $a - 2$ multipliziert. Dann wird durch Subtraktion erhalten:

$$y(2a^2 + 6a) = a^2 + 6a, \quad \text{also} \quad y = \frac{a(a+6)}{2a(a+3)} = \frac{a+6}{2(a+3)}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die obere Gleichung:

$$x = \frac{a-3}{2(a+3)}.$$

Wenn $a = 0$, ist $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$.

Wenn $a = -3$, ist $x = -\infty$, $y = \infty$.

11. Aus den Gleichungen

(1) $$a^2x^2 = b^2y^2$$

(2) $$2ax^2 = b^2cy$$

sind x und y zu finden.

Lösung: Durch Division erhält man:

$$\frac{a}{2} = \frac{y}{c} \quad \text{oder} \quad y = \frac{ac}{2}.$$

Durch Einsetzen in (2):

$$2ax^2 = b^2c \cdot \frac{ac}{2},$$
$$x^2 = \frac{b^2c^2}{4},$$
$$x = \pm\frac{bc}{2}.$$

Durch Einsetzen in (1):

$$a^2 \cdot \frac{b^2 c^2}{4} = b^2 y^2,$$

$$y^2 = \frac{a^2 c^2}{4},$$

$$y = \pm \frac{ac}{2}.$$

12. Die Gleichungen

(1) $$x^2 - y^2 = 9$$

(2) $$2x + 3y = 22$$ sind zu lösen.

Lösung: Aus (2): $x = \dfrac{22 - 3y}{2}$,

in (1) eingesetzt: $5y^2 - 132y + 448 = 0$,

$$y = 4 \text{ und } \frac{112}{5}.$$

Einsetzung in (1): $x = \pm 5$ und $x = \pm \dfrac{113}{5}$.

13. Das folgende Gleichungssystem wurde vorgelegt:

(1) $$\frac{x}{y} = \frac{y - 26}{x - 26}.$$

(2) $$x \cdot y = 25.$$

Lösung:

$$x^2 - 26x = y^2 - 26y$$

$$x^2 - y^2 - 26x + 26y = 0$$

$$(x - y)(x + y) - 26(x - y) = 0$$

$$(x - y) \cdot (x + y - 26) = 0$$

a) $$x - y = 0$$

b) $$x + y = 26$$

$$\overline{2x = 26; \quad x = 13}$$

$$2y = 26; \quad y = 13.$$

Der Schüler, der diese Lösung gab, bemerkte dazu: „Auch *eine* Gleichung mit *zwei* Unbekannten läßt sich lösen."

Nimmt man hingegen die Lösung b) mit der Ausgangsgleichung 2 zusammen, so hat man:

$$x + y = 26$$
$$xy = 25$$
$$x(26 - x) = 25$$
$$x^2 - 26x + 25 = 0$$
$$x = 13 \pm \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$x = 13 \pm 12.$$

$x_1 = 25$, woraus mit $x - y = 0$ folgt $y_1 = 25$;
$x_2 = 1$, woraus ebenso folgt $y_2 = 1$.

14. Man sucht zwei Zahlen, deren Summe, Produkt und Quadratsumme gleich sind.

Lösung: Aus $\quad x + y = xy = x^2 + y^2$

erhält man, weil $\quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$:

$$3(x + y) = (x + y)^2,$$
$$x + y = 3.$$

x und y sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - 3u + 3 = 0, \quad \text{woraus} \quad u = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Die Aufgabe hat folglich nur imaginäre Lösungen.

15. Von Skanderborg nach Silkeborg[1]) laufen 3 Eisenbahnzüge, A, B und C. Der Zug A gebraucht 10 Minuten mehr für die ganze Fahrt als B, aber 40 Minuten weniger als C; seine Fahrgeschwindigkeit (der während einer Stunde durchlaufene Weg) ist nämlich um $6\frac{1}{5}$ km geringer als die Fahrgeschwindigkeit des Zuges B, aber um $12\frac{2}{5}$ km größer als die des Zuges C. Wieviele Stunden gebraucht der Zug A für die ganze Fahrt, und wie groß ist seine Fahrgeschwindigkeit?

Lösung: A fährt $60x$ Minuten, Fahrgeschwindigkeit y km,

B	„	$50x$	„	„	$y + 6\frac{1}{5}$ „,
C	„	$100x$	„	„	$y - 12\frac{2}{5}$ „.

1) Zwei jütländische Städtchen.

Man kann dann die Gleichungen aufstellen:

$60xy = 50xy + 310x$	$xy = (x - \frac{1}{6})(y + 6\frac{1}{5})$
$y = 31$	Mittels d. vor. Ergebnisses
	$x = 1.$

Die gesuchte Fahrgeschwindigkeit beträgt 31 km und die Dauer der ganzen Fahrt des Zuges A 1 Stunde.

16. $$\sqrt{x - a^2} + \sqrt{x - b^2} = a - b;$$

finde x! Speziell soll angenommen werden $a = b$.

Lösung: $$\sqrt{x - a^2} = a - b - \sqrt{x - b^2};$$

$$x - a^2 = a^2 - 2ab + b^2 + x - b^2 - 2(a - b)\sqrt{x - b^2}$$

$$a(b - a) = (b - a)\sqrt{x - b^2};$$

$$a^2 = x - b^2;$$

$$x = a^2 + b^2.$$

Eine Probe zeigt, daß die erste Quadratwurzel negativ zu nehmen ist. Im speziellen Falle wird

$$x = 2a^2.$$

17. Aus den Gleichungen

$$x^2 + xy = a^2 + ab$$

$$y^2 + xy = a^2 - ab$$

sind x und y zu finden.

Lösung: Aus den gegebenen Gleichungen ergibt sich durch Addition:

$$(x + y)^2 = 2a^2,$$

$$x + y = a\sqrt{2}.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen erhält man:

$$xy(x + y)^2 = a^4 - a^2b^2,$$

woraus mittels des vorigen Ergebnisses:

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Man bildet dann eine quadratische Gleichung:

$$z^2 - a\sqrt{2} \cdot z + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0,$$

aus welcher man findet:

$$z = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2-b^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Also

$$x = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \quad \Bigg| \quad \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{5} \quad \Bigg| \quad \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

c) Arithmetik und Algebra mit Ausnahme algebraischer Gleichungen.

18. Die Ausdrücke

a) $$\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}},$$

b) $$\frac{\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[4]{a^7} - \sqrt[5]{a^9} - \sqrt[6]{a^{11}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[5]{\frac{1}{a}} - \sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$$

sind zu reduzieren.

Lösung:

a) $$\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}} = \sqrt[12]{(2^2\cdot 3)^6} + \sqrt[12]{(3\cdot 3)^3} - \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3^3}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt[12]{3^6 + 3^6 - \frac{1}{3^6}} = 2\sqrt[12]{6^6 - \frac{1}{3^6}}$$

$$= 2\sqrt[12]{18^6 - 1} = 6\sqrt[12]{2^6 - 1}$$

$$= 6\sqrt[12]{63}.$$

b) $$\frac{\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[4]{a^7} - \sqrt{a^9} - \sqrt[6]{a^{11}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[5]{\frac{1}{a}} - \sqrt[4]{\frac{1}{a}} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}} = \frac{a^2 + a^3 - a^4 - a^5}{\sqrt[11]{\frac{1}{a}} - \sqrt[7]{\frac{1}{a}}}$$

$$= \frac{-a^4}{\sqrt[4]{\frac{1}{a}}} = \frac{-a}{\frac{1}{a}} = -a^2.$$

19. Wie groß ist i^{2n}?

Lösung:

$$i^{2n} = \left(\sqrt{-1}\right)^{2n} = \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = \left((-1)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = (+1)^{\frac{1}{2}} = +1.$$

20. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{13}{6}$$

ist x zu finden.

Lösung: $\log x \log \frac{2}{3} + \log x \log \frac{3}{2} = \log \frac{13}{6}$

$$\log x \left(\log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{2}\right) = \log \frac{13}{6}$$

$$\log x \cdot \log \frac{13}{6} = \log \frac{13}{6};$$

$$\log x = 1;$$

$$x = 10.$$

21. Aus der Gleichung

$$9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$$

ist x zu finden.

Lösung: Setzt man $\sqrt{x} = y$, so ändert sich die Gleichung in diese: $9 \cdot 12^y = 6^{y^2}$ oder $9 \cdot (2 \cdot 6)^y = (6^y)^2$; diese teilt sich in zwei Gleichungen:

$$6^y = 0 \quad \text{und} \quad 9 \cdot 2^y = 6^y,$$

von denen die erste keinen endlichen Wert von y liefert. Die letzte wird folgendermaßen geändert:

$$9 \cdot 2^y = 2^y \cdot 3^y,$$

und teilt sich dann wieder:

$$2^y = 0 \quad \text{und} \quad 9 = 3^y.$$

Die erste von diesen Gleichungen wird wie früher vernachlässigt; aus der letzten erhält man:

$$y = 2, \quad \text{also } x = 4.$$

22. Ein Gefäß, das anfangs 2000 l Wasser enthält, wird durch ein Rohr geleert, so daß 50 l in jeder Minute hinauslaufen. Wieviel Wasser ist im Gefäße nach Verlauf von 1, 2, 3, ... x Minuten? Ist die Wassermenge des Gefäßes der Zeit direkt oder umgekehrt proportional? Ist die hinausströmende Wassermenge der Zeit direkt oder umgekehrt proportional?

Lösung:

Nach dem Verlauf v. 1 Min. ist im Gefäß $2000 - 50 = 1950\,l$

„ „ „ „ 2 „ „ „ „ $2000 - 2 \cdot 50 = 1900\,l$

„ „ „ „ 3 „ „ „ „ $2000 - 3 \cdot 50 = 1850\,l$

„ „ „ „ x „ „ „ „ $2000 - x \cdot 50\,l$.

Je größer die verflossene Zeit, desto geringer ist die Wassermenge des Gefäßes, d. h. die Wassermenge des Gefäßes ist der Zeit umgekehrt proportional.

Je größer die verflossene Zeit, desto größer ist die ausgeströmte Wassermenge, d. h. die ausgeströmte Wassermenge ist der Zeit direkt proportional.

23. Mittels Logarithmen soll berechnet werden $x = \sqrt[3]{\log 0{,}3}$.

Lösung: $x = \sqrt[3]{0{,}4771 - 1} = \sqrt[3]{-0{,}5228}$

$$\log(-x) = \frac{0{,}7184}{3} = 0{,}2395.$$

$$\log x = -0{,}2395 = 0{,}7605 - 1$$

$$x = 0{,}5761.$$

24. $$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{13}{6};$$

finde x!

1. Lösung: $$\frac{4^{\log x}}{6^{\log x}} + \frac{9^{\log x}}{6^{\log x}} = \frac{13}{6};$$

damit dieses stattfindet, muß sein

$$\log x = 1, \text{ also } x = 10.$$

2. Lösung[1]): Da $\log a + \log b = \log a \cdot b$ ist, so ist

$$\log x\left(\log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{2}\right) = \log\left[\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^{\log x}\right].$$

Nun ist aber ebenso

$$\log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{2} = \log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right),$$

---

1) Diese Lösung ist mir, ausdrücklich als „trugschlüssig“ bezeichnet, von einem Oberprimaner in Berlin-Pankow eingesandt worden.

also
$$\log x \cdot \log 1 = \log 1$$
$$\log x = 1.$$
$$x = 10.$$

25. Aus der Gleichung $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$
ist x zu finden.

Lösung: Setzt man $\sqrt{x} = y$,
dann ändert sich die zu lösende Gleichung in die folgende
$$9 \cdot 12^y = 6^{y^2}.$$

Werden demnächst die Zahlen 9, 12 und 6 in Primfaktoren zerlegt, so wird nach einer einfachen Reduktion erhalten:
$$3^{2+y} \cdot 2^{2y} = 2^{y^2} \cdot 3^{y^2}.$$
Da nun eine Zahl nur in einer Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann, hat man
$$2 + y = y^2; \quad 2y = y^2,$$
also beziehungsweise
$$y = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}; \quad y = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}.$$
Da die zwei Gleichungen gleichzeitig gelten müssen, ist nur $y = 2$ brauchbar. Also:
$$\sqrt{x} = 2, \quad x = 4.$$

26. Für welche Werte von a und b ist die Ungleichung
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad \text{gültig?}$$

Lösung:
$$a^2 + b^2 > 2ab$$
$$a^2 - ab > ab - b^2$$
$$a(a - b) > b(a - b)$$
$$a > b.$$
Die Ungleichheit ist also immer gültig, wenn $a > b$.

27. Zu beweisen, daß 240 in $n^4 - 1$ aufgeht, wo n eine Primzahl > 5 ist.

Lösung:
$$240 = 3 \cdot 5 \cdot 2^4;$$
$$n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1).$$

3 geht auf, weil $n-1$, n und $n+1$ drei aufeinanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind. In einer dieser Zahlen muß 3 aufgehen, kann aber nicht in der Primzahl n aufgehen. 5 geht dem Fermatschen Satze[1]) zufolge auf. 2^4 geht auf aus folgenden Gründen: 2 gibt bei Division in n den Rest 1, also gibt n^4 bei Division durch 2^4 den Rest $1^4 = 1$. Wenn aber die Zahl 2^4 den Rest 1 gibt, geht sie in $n^4 - 1$ auf.

28. Welche Reste kann $a^3 - a$ bei Division durch 12 geben? (a ist eine positive, ganze Zahl.)

Lösung: $$a^3 - a = a(a+1)(a-1)$$

ist durch 3 teilbar, weil die drei Faktoren drei aufeinanderfolgende Zahlen der Zahlenreihe sind. Bei Division durch 4 muß a einen der Reste 0, 1, 2 oder 3 geben, a^3 also bzw. 0, 1, 8 oder 27, $a^3 - a$ also 0, 0, 6, 24; wird aber der Rest 24, so ist zu sagen, daß die Division aufgeht. Die Antwort ist dann: 0 oder 6.

29. Wenn zwei Zahlen a und b teilerfremd zueinander sind, werden $a + b$ und $a \cdot b$ auch teilerfremd sein. Beweise das!

Lösung: Eine Zahl, die in ab aufgeht, darf nur in einem der Faktoren aufgehen, z. B. in a. Dann kann sie nicht auch in $a + b$ aufgehen, weil sie dann in b aufgehen müßte (denn eine Zahl wird nur dann in einer Summe aufgehen, wenn alle Addenden dadurch teilbar sind); sie kann aber nicht in b aufgehen, weil a und b teilerfremd sind. Keine Zahl, die in ab aufgeht, kann also in $a + b$ aufgehen, d. h. $a + b$ und ab sind teilerfremd.

30. Beweise, daß, wenn a und b positive Zahlen sind, numerisch $a + b$ größer als $a - b$ ist.

Lösung: Wir bezeichnen den numerischen Wert einer Zahl t durch $|t|$ und schließen dann folgendermaßen:

---

1) Der Fermatsche Satz besagt, daß $a^{p-1} - 1$, wo a eine ganze Zahl, p eine Primzahl ist, durch p ohne Rest teilbar ist, ausgenommen, wenn a durch p teilbar ist. (Vgl. Math.-phys. Bibl. 13. Bd.) Man nennt den Satz auch manchmal den „kleinen" Fermatschen Satz zum Unterschied von dem in jüngster Zeit so berühmt gewordenen „großen" Fermatschen Satz (vgl. Math.-phys. Bibl. 3. Bd.).

$$|a+b| = |a| + |b|$$
$$|a| + |b| > |a| - |b|$$
$$|a| - |b| = |a-b|.$$

Also $$|a+b| > |a-b|,$$

was zu beweisen war.

31. Untersuche, ob man aus

$$ab > cd \text{ und } ae > cf$$

die Ungleichheit $$bf > ed$$

herleiten kann. (Alle Buchstaben bezeichnen positive Zahlen.)

Lösung: Durch Division erhält man $\frac{b}{e} > \frac{d}{f}$, woraus $bf > ed$. Die Antwort muß also bejahend sein.

32. Finde das letzte Glied a_n und die Anzahl n der Glieder einer geometrischen Reihe, in welcher das erste Glied gleich a ist, der Quotient k und die Summe der Glieder b. Beispiele:

a) $a = k = 3$, $b = 1092$; b) $a = k = 3$, $b = 10000$.

Lösung: a) $$1092 = \frac{3 - a_n \cdot 3}{1 - 3},$$
$$a_n = 729;$$
$$729 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n,$$
$$n = 6.$$

b) $$10000 = \frac{3 - a_n \cdot 3}{1 - 3},$$
$$a_n = 6667\tfrac{2}{3};$$
$$6667\tfrac{2}{3} = 3^n,$$
$$n = \frac{\log 6667{,}67}{\log 3} = \frac{3{,}8240}{0{,}4771} = 8{,}01.$$

33. Das erste und das vierte Glied einer geometrischen Reihe sind bzw. 2,1 und $-0{,}0168$; wieviele Glieder der Reihe sind mitzunehmen, damit die Summe 1,75056 werde?

Lösung: $2{,}1 \cdot q^3 = -0{,}0168$ gibt $q = -0{,}2$;

$$1{,}75056 = 2{,}1 \cdot \frac{(-0{,}2)^n - 1}{-0{,}2 - 1}$$

gibt demnächst $(-0{,}2)^n = -0{,}00032$,

$$\text{woraus} \quad n = \frac{\log 0{,}00032}{\log 0{,}2} = \frac{0{,}5052-4}{0{,}3010-1} = 5 \text{ (ungefähr).}$$

d) Ebene Geometrie.

34. Konstruiere $x = \sqrt{\dfrac{(2a^2 - b^2)\sqrt{2}}{3}}$,

wenn a und b gegebene Strecken bedeuten!

Lösung: Man setzt $2a^2 - b^2 = y^2$

und konstruiert y^2 als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $2a$ die Hypotenuse und b die andere Kathete ist. Dann ist

$$x = \sqrt{y \cdot \frac{y\sqrt{2}}{3}}.$$

Hier wird

$$\frac{y\sqrt{2}}{3} = z$$

gesetzt, und z wird als vierte Proportionale zu 3, y und $\sqrt{2}$ konstruiert. Endlich wird

$$x = \sqrt{yz}$$

als mittlere Proportionale zwischen y und z konstruiert.

35. Zwei konzentrische Kreise sind gegeben; ihre Radien sind a und b, wo $a > b$. Finde den Radius eines zu den gegebenen konzentrischen Kreises, der den Kreisring zwischen den gegebenen Kreisen in zwei andere Kreisringe teilt, derart, daß der Flächeninhalt des äußeren doppelt so groß ist als der des inneren.

Lösung: Der gesuchte Radius sei x genannt; man erhält dann durch Benutzung des Satzes über den Flächeninhalt ähnlicher Figuren

$$\frac{(x-b)^2}{(a-x)^2} = \frac{2}{1},$$

woraus nach Reduktion

$$x^2 - 2x(2a-b) + 2a^2 - b^2 = 0,$$

$$x = 2a - b \pm \sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab - 2a^2 + b^2},$$

$$x = 2a - b \pm (a-b)\sqrt{2}.$$

36. Ein Dreieck ABC ist gegeben. Konstruiere eine Gerade, welche AB und BC schneidet und welche gleiche Abstände von A und B hat, während der Abstand von B doppelt so groß als der Abstand von C ist. (Fig. 28.)

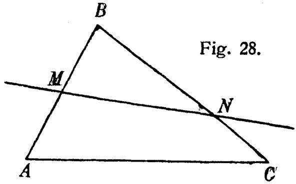


Fig. 28.

Lösung: AB sei im Punkte M halbiert und BC sei in drei gleiche Teile geteilt; sei endlich N der C am nächsten gelegene Teilungspunkt. Die Gerade durch M und N ist dann die gesuchte.

37. In dem Dreieck ABC sind die Seiten gegeben:

$a = 1{,}3$ cm, $b = 0{,}5$ cm,

$c = 1{,}2$ cm.

Die Winkelhalbierende des Nebenwinkels von B schneidet die Verlängerung von AC in D. Finde AD! (Fig. 29.)

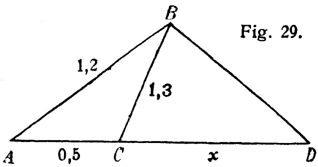


Fig. 29.

Lösung: Einem bekannten Satze zufolge kann aufgestellt werden:

$$\frac{x}{1{,}3} = \frac{x + 0{,}5}{1{,}2} = \frac{0{,}5}{-0{,}1},$$

woraus sich ergibt $x + 0{,}5 = -6$.

Da keine Strecke negativ sein kann, ist $AD = 6$ cm.

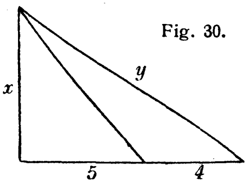


Fig. 30.

38. Die Gerade, die einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert, teilt die entgegengesetzte Kathete in zwei Strecken, die 4 und 5 cm lang sind. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks? (Fig. 30.)

Lösung: $\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$;

$$y^2 = x^2 + 81.$$

$$y = \frac{5x}{4};$$

$$\frac{25}{16} x^3 = x^2 + 81;$$

$$\frac{9}{16} x^2 = 81;$$

$$x^2 = \frac{16 \cdot 81}{9} = 144;$$

$$x = 12 \text{ (cm)}; \quad y = 15 \text{ (cm)}$$

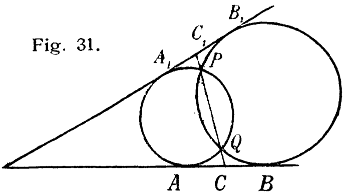
39. Durch den Mittelpunkt einer Kreissehne, deren zugehöriger Zentriwinkel 120^0 ist, ist eine andere Sehne gezogen;

der eine Abschnitt derselben ist dreimal so groß als der andere. Was ist das für eine Sehne?

Lösung: Es muß ein Durchmesser sein, weil der Abstand der Sehne von dem Zentrum dem halben Radius gleich ist, so daß die zwei Abschnitte der gezogenen Sehne $\frac{1}{2}r$ und $\frac{3}{2}r$ werden (r = Radius des Kreises). Der letzte Abschnitt ist also eben das Dreifache des ersten.

40. Zwei Kreise, die einander in P und Q schneiden, berühren die Schenkel eines Winkels; die Berührungspunkte des einen sind durch A und A_1, die des anderen durch B und B_1 bezeichnet, so daß A und B auf demselben Winkelschenkel liegen. Beweise, 1. daß die Verlängerungen der Geraden PQ durch die Mittelpunkte von AB und A_1B_1 gehen, 2. daß AA_1, BB_1 und PQ einander parallel sind! (Fig. 31.)

Fig. 31.



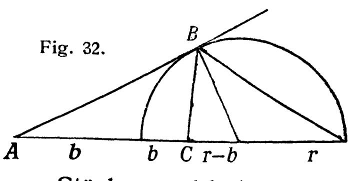
Lösung: PQ schneide AB in C, A_1B_1 in C_1. Der Potenzsatz gibt dann:

$$CA^2 = CP \cdot CQ = CB^2,$$

also ist C der Mittelpunkt von AB. In derselben Weise erhält man, daß C_1 der Mittelpunkt von A_1B_1 ist. AA_1, PQ und BB_1 sind einander parallel, weil sie gleiche Stücke auf den Geraden AB und $A_1 B_1$ abschneiden.

41. Konstruiere ein Dreieck aus den zwei Stücken, in welchen die Winkelhalbierende des einen Winkels die gegenüberliegende Seite schneidet, nebst einem der dieser Seite anliegenden Winkel! Es ist anzugeben, welche Bedingung erfüllt werden muß, damit die Aufgabe zwei verschiedene Lösungen erhält. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Lösung: Auf den einen Schenkel des gegebenen Winkels (A) werden die gegebenen Stücke a und b abgetragen. Die Spitze des dritten Dreieckswinkels wird dann der Schnitt des anderen Schenkels des Winkels mit dem „Verhältniskreise". Wenn zwei Lösungen vorhanden sein sollen, muß der Schenkel den Kreis schneiden. In dem Falle, wo sie einander berühren, erhalten wir zur Bestimmung des Radius r des Verhältniskreises:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+2r}{2r-b}, \quad \text{woraus} \quad r=\frac{ab}{a-b};$$

also

$$\sin A=\frac{r}{a+r}=\frac{\frac{ab}{a-b}}{a+\frac{ab}{a-b}}=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}.$$

Zwei Lösungen fordern also

$$\sin A<\frac{b}{a}.$$

Bekanntlich ist $\sin A<1$;

aus diesen zwei Ungleichheiten ergibt sich:

$$\frac{b}{a}<1 \quad \text{oder} \quad b<a.$$

Die gesuchte Bedingung ist also, daß das größte der gegebenen Stücke der Spitze des gegebenen Winkels zunächst liegen muß.

42. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a und b gegeben. Dem Dreieck ist ein Quadrat, dessen eine Ecke in die Spitze des rechten Winkels fällt, eingeschrieben. Wie groß ist die Seite des Quadrats? (Fig. 33.)

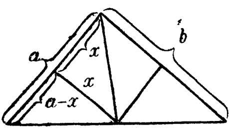


Fig. 33.

Lösung: Die Diagonalen eines Quadrats halbieren die Winkel desselben; also hat man nach einem bekannten Satz über die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels (siehe die Bezeichnungen der Figur):

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{p}=\frac{a+b}{m+p}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{daraus} \quad m=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Weiter gibt das kleine rechtwinklige Dreieck links:

$$x^2+(a-x)^2=m^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2};$$

wenn man diese Gleichung in gewöhnlicher Weise behandelt, findet man für die gesuchte Quadratseite 2 Werte, nämlich

$$x=\frac{ab}{a+b} \quad \text{und} \quad x=\frac{a^2}{a+b}.$$

43. Zwei Dreiecke haben beziehungsweise die Seiten a, b, c und a_1, b_1, c_1; ihre Umfänge sind p und p_1. Gegeben ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{p}{p_1}.$$

Sind die zwei Dreiecke ähnlich?

Lösung: Wenn die Dreiecke ähnlich sind, ist, wie bekannt,

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1};$$

aus dem, was gegeben ist, nebst einem bekannten Satze aus der Proportionenlehre ergibt sich also:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{p}{p_1};$$

und wenn die Seiten zweier Dreiecke proportional sind, dann sind die Dreiecke ähnlich.

44. In welchen Tangentenvierecken stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht? (Fig. 34.)

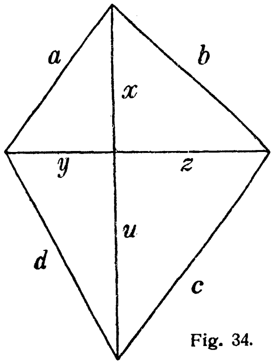


Fig. 34.

Lösung: Da das Viereck ein Tangentenviereck ist, hat man (siehe die Bezeichnungen der Figur):

$$a + c = b + d.$$

Dem pythagoreischen Lehrsatze zufolge ist

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 + d^2.$$

Aus diesen Gleichungen kann hergeleitet werden:

$a^2 - b^2 = d^2 - c^2$	$a^2 - d^2 = b^2 - c^2$
und $a - b = d - c$;	und $a - d = b - c$;
durch Division:	durch Division:
$a + b = d + c$;	$a + d = b + c$;
also $a = d$	also $a = b$
und $b = c$	und $d = c$.

Alle vier Seiten des Vierecks sind dann gleich, d. h. das Viereck ist ein Rhombus.

e) Trigonometrie, Stereometrie und analytische Geometrie der Ebene.

45. Die Höhe vom Punkte A eines Tetraeders $A - BCD$ ist h, die drei von B ausgehenden Kanten verhalten sich wie drei gegebene Zahlen p, q und r, der Flächenwinkel zwischen ABC und DBC ist α, $\sphericalangle ABC = u$ und $\sphericalangle DBC = v$. Finde den Rauminhalt des Tetraeders!

Lösung: $$AB : BC : BD = p : q : r$$

$$\frac{AB}{BC \cdot BD} = \frac{p}{qr}$$

$$BC \cdot BD = \frac{AB\,qr}{p}$$

$$V = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin v = \frac{1}{6} h \cdot \frac{AB\,qr}{p} \sin v.$$

$$AB = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin u};$$

$$V = \frac{h^3 qr \sin v}{6p \sin\alpha \sin u}.$$

46. Eine Kugel vom Radius r ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Oberfläche des Abschnittes n mal so groß ist als sein Grundkreis. Welche Höhe hat der Abschnitt? Welche Werte kann n annehmen?

Lösung: (1) $$2r\pi h = n\rho^2\pi$$

(2) $$\rho^2 = h(2r - h)$$

$$2rh = nh(2r - h)$$

$$h = 2r\frac{n-1}{n}.$$

Um die Grenzen von n zu bestimmen, untersuche ich die äußersten Werte für h. Diese sind:

1. $h_1 = 0$ 2. $h_2 = 2r$.

Es muß also sein:

$$\frac{n-1}{n} = 0 \qquad \frac{n-1}{n} = 1$$

$$n - 1 = 0 \qquad n - 1 = n$$

$$n = 1 \qquad 0 = 1.$$

d. h. n kann kein echter Bruch sein.

47. Ein Kreisabschnitt dreht sich um eine durch den Kreismittelpunkt gehende Achse, die den Abschnitt nicht schneidet. Das Verhältnis zwischen dem Rauminhalte des durch eine ganze Umdrehung des Abschnittes hervorgebrachten Rotationskörpers und der ganzen Oberfläche des genannten Körpers ist $\frac{1}{n}$ des Radius des Kreises. Welchen Ausdruck erhält man zur Bestimmung der Grundzahl des entsprechenden Bogens? Welche Werte können der Zahl n gegeben werden?

Lösung: Der Radius sei r, die gesuchte Gradzahl $2x$, die Sehne des Abschnittes k, ihr Abstand vom Kreismittelpunkt ρ und ihre Projektion auf die Umdrehungsachse h. Man hat dann bekannten Formeln zufolge:

$$\frac{\frac{1}{6}\pi h k^2}{2\pi r h + 2\pi\rho h} = \frac{1}{n} r \quad \text{oder} \quad nk^2 = 12r(r + \rho).$$

Wird hier $k = 2r \sin x$ und $\rho = r \cos x$ eingeführt, so erhält man:

$$n \cdot 4r^2 \sin^2 x = 12r^2(1 + \cos x)$$

oder

$$n \sin^2 x = 3(1 + \cos x),$$

eine Gleichung, die sich so umschreiben läßt:

$$n \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 3 \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

woraus

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2n-3}{2n}}$$

und endlich

$$\sin x = \sqrt{\frac{6n-9}{n}}.$$

Da $\sin x$ reell sein muß, hat man

$$6n - 9 \geqq 0, \text{ also } n \geqq \frac{3}{2};$$

$$\text{da } \sin x \leqq 1, \text{ muß } 6n - 9 \leqq n^2$$

oder

$$n^2 - 6n + 9 \geqq 0,$$
$$(n-3)^2 \geqq 0,$$
$$n \geqq 3$$

sein. Die Antwort auf die letzte Frage der Aufgabe ist dann

$$n \geqq 3.$$

48. Wenn die krumme Oberfläche eines Rotationskegels in eine Ebene abgewickelt wird, entsteht ein Kreisausschnitt, dessen Bogen $237{,}77^0$ ist. Berechne den Achsenwinkel des Kegels!

Lösung: Die Seitenlinie des Kegels sei s, der Radius der Grundfläche r und der halbe Achsenwinkel v; dann ist

$$2\pi r = 237{,}77^0, \text{ woraus } r = 37{,}85;$$

ferner $\frac{237{,}77}{360} \cdot \pi s^2 = \pi \cdot 37{,}85 r$, woraus $s = 57{,}31$;

endlich $\sin v = \frac{37{,}85}{57{,}31}$, woraus $v = 41{,}35^0$.

49. Auf einer Geraden liegen 3 Punkte A, B, C in der angegebenen Ordnung; finde durch analytisches Verfahren den geometrischen Ort der Punkte, von welchen AB und BC unter gleichen Winkeln gesehen werden!

Lösung: Das Achsenkreuz wird so gelegt, daß die Punkte A, B, C und der bewegliche Punkt P die Koordinaten $(0,0)$; $(a, 0)$; $(b, 0)$ und (x, y) beziehungsweise erhalten. Aus dem verlangten folgt dann:

$$\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x(x-a)}} = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x-b}}{1 + \frac{y^2}{(x-a)(x-b)}}.$$

Werden die Brüche auf gewöhnliche Form gebracht und wird die Gleichung reduziert, so kommt nach Kürzung durch y heraus:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 0;$$

die Gleichung stellt einen Kreis dar.

50. Die Gleichung des Kreises ist abzuleiten.

Lösung: Verbindet man (Fig. 35) einen Punkt des Kreises, der die Koordinaten x und y hat, mit dem Koordinatenanfangspunkt, so ist, wenn r die Entfernung des Punktes vom Koordinatenanfangspunkt ist,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Das gilt für jeden Punkt des Kreises.

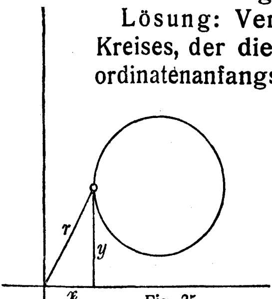


Fig. 35.

51. Bilde die Gleichungen der Tangenten des Kreises

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 29$$

in den Punkten, deren Abszisse gleich 4

ist! Bilde ferner die Gleichung zweiten Grades, die das Tangentenpaar darstellt!

L ö s u n g: Wird $x = 4$ in die Gleichung des Kreises eingesetzt, so ergibt sich $y = 5$ und $= 1$; die Tangente in (4,5) hat dann die Gleichung

$$5(x+1) + 2(y-3) = 29^2 \quad \text{oder} \quad 5x + 2y = 842.$$

Die Tangente in (4,1) hat die Gleichung

$$5(x+1) - 2(y-3) = 29^2 \quad \text{oder} \quad 5x - 2y = 830.$$

Die Gleichung des Tangentenpaares wird durch Multiplikation der Gleichungen der einzelnen Tangenten erhalten; sie lautet also:

$$(5x + 2y)(5x - 2y) = 842 \cdot 830$$

oder

$$25x^2 - 4y^2 = 698860.$$

52. Die Seiten eines Dreiecks sind a, b, c. Es soll $\sin A$ mittels der gegebenen Größen ausgedrückt werden.

L ö s u n g: Wie bekannt, gilt die Relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

In einer Proportion ist es gestattet, die Zwischenglieder umzutauschen; man erhält dann:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \text{also } \sin A = \frac{ac}{b}.$$

53. Die Formeln

$$r = s \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} \text{ und } R = \frac{s}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

sind zu beweisen. Die Buchstabenbezeichnungen sind die (in Dänemark) üblichen.[1]

L ö s u n g: Durch Division der ersten durch die zweite Gleichung ergibt sich

$$\frac{r}{R} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Die Relation wird auch erhalten durch Division der bekannten Formeln

1) A, B, C die Winkel des Dreiecks, s der halbe Umfang, r und R die Radien des In- und Umkreises.

$$R = \frac{a}{2 \sin A} \quad \text{und} \quad r = a \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Also sind die zwei Formeln richtig.

54. Welcher Bedingung werden α, β und γ genügen, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \qquad \text{ist?}$$

Lösung: Die gegebene Gleichung läßt sich umformen in

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = - \operatorname{tg} (\beta + \gamma);$$

in derselben Weise erhält man

$$\operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg} (\alpha + \gamma) \text{ und } \operatorname{tg} \gamma = - \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\operatorname{tg} \beta$ und $\operatorname{tg} \gamma$ in denjenigen für $\operatorname{tg} \alpha$ erhält man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} (\alpha + \gamma) + \operatorname{tg} (\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg} (\alpha + \gamma) \operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} (2\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= - \operatorname{tg} (\beta + \gamma)$$

(der obersten Gleichung zufolge); also:

$$2\alpha + \beta + \gamma = p\pi + \pi - \beta - \gamma, \text{ d. h. } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}(p + 1).$$

55. Es soll
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$$
gefunden werden.[1])

Lösung: Wenn $x = \frac{\pi}{2}$ ist, ist

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x,$$

also ist der gesuchte Grenzwert

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 2.$$

---

1) Die Aufgabe wurde solchen Schülern gestellt, mit denen die Differentialrechnung eingeübt war.

Die angegebenen Grundpreise sind mit der Schlüsselzahl des Börsenvereins zu vervielfältigen.

Trugschlüsse. Von Dr. *W. Lietzmann,* Oberstudiendirektor a. d. Oberrealschule in Göttingen. (MPhB Bd. 50.) Steif geh. M. –.70

Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Plaudereien für kleine und große Freunde der Rechenkunst. Von Dr. *W. Lietzmann,* Oberstudiendirektor a. d. Oberrealschule in Göttingen. 2. durchges. u. verm. Aufl. Mit 18 Fig. i. T. [IV u. 58 S.] 8. 1918. (MPhB 25.) Steif geh. M. –.70

Der pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von Dr. *W. Lietzmann,* Oberstudiendirektor an der Oberrealschule in Göttingen. 2. Aufl. Mit 50 Fig. u. 50 Aufg. [IV u. 69 S.] 8. 1918. (MPhB Bd. 3.) Steif geh. M. –.70

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Oberrealschulprofessor Dr. *Ph. Männchen* in Gießen. 2. Aufl. [IV u. 48 S.] 8. 1913. (MPhB Bd. 13.) Steif geh. M. –.70

Lehrbuch der Rechenvorteile, Schnellrechnen und Rechenkunst. Von Ing. Dr. phil. *J. Bojko* in Königshütte O.-Schles. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. [II u. 115 S.] 8. 1920. (ANuG 739.) Kart. M. 1.30, geb. M. 1.60

Mathematische Spiele. Von Dr. *W. Ahrens,* Rostock. 4., verb. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 78 Fig. [121 S.] 8. 1919. (ANuG 170.) Kart. M. 1.30, geb. M. 1.60

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. *W. Ahrens.* In 2 Bänden. gr. 8. I. Bd. 3., verb. Aufl. Mit 200 Fig. [VIII u. 400 S.] 1921. II. Bd. 2., vermehrte und verbesserte Aufl. Mit 128 Fig. [X u. 455 S.] 1918. Geh. je M. 5.90, geb. je M. 6.70

Mathematiker-Anekdoten. Von Dr. *W. Ahrens.* Mit Bildnissen a. 4 Taf. [II u. 42 S.] 8. 1920. (MPhB Bd. 18.) Steif geh. M. –.70

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. *M. Lange* in Berlin. Mit 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. 4. Aufl. [112 S.] 8. 1923. (ANuG 281.) Geh. M. 1.30, geb. M. 1.60

Die Weltschachmeister und ihre Spielweise im Rahmen der Geschichte des Schachspiels. Dargestellt von Regierungsdirektor *L. Bachmann.* [In Vorb. 1923.]

Mathematische Experimentiermappe für den geometrischen Anfangsunterricht. Von Realschuloberlehrer Prof. Dr. *G. Noodt,* in Berlin. Hierzu Leitfaden zur mathematischen Experimentiermappe. Mit 111 Abb. im Text und auf 9 Tafeln. [IV u. 44 S.] gr. 8. 1912. Beides in Karton M. 4.–

Praktische Mathematik. Von Dr. *R. Neuendorff,* Prof. a. d. Univ. Kiel. I. Teil: Graph. Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mech. Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. (ANuG 341.) [U. d. Pr. 1923.] II. Teil. Geometr. Zeichnen. Projektionslehre. Flächenmessung. Körpermessung. Mit 133 Fig. [IV u. 102 S.] 8. 1918. (ANuG 526.) Kart. M. 1.30, geb. M. 1.60

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen