Lehrbuch der Physik

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage

Mechanik und Messmethoden

O.D. Chwolson

Springer

O. D. Chwolson

Lehrbuch der Physik

Zweite Auflage

I, 1.

Lehrbuch der Physik

Von

O. D. Chwolson
Prof. ord. an der Universität in St. Petersburg

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage

Erster Band, Zweite Abteilung

Mechanik und Meßmethoden

Herausgegeben von

Gerhard Schmidt
Professor an der Universität Münster i. W.

Mit 180 Abbildungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1918

Mechanik und Meßmethoden

Von

O. D. Chwolson
Prof. ord. an der Universität in St. Petersburg

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage

Herausgegeben von

Gerhard Schmidt
Professor an der Universität Münster i. W.

Mit 180 Abbildungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1918

ISBN 978-3-663-03184-0 ISBN 978-3-663-04373-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-04373-7
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1918

Vorrede zur ersten Auflage der deutschen Ausgabe.

Dem ersten Bande der deutschen Ausgabe meines „Lehrbuches der Physik“ möchte ich einige Worte vorausschicken und vor allem auf einige Punkte aufmerksam machen, welche ohne Erläuterung vielleicht Bedenken hervorrufen könnten.

Ich habe bei Abfassung der ersten zwei Abschnitte (Einleitung und Mechanik) vorausgesetzt, daß der Leser mit der höheren Mathematik noch nicht vertraut ist. Ich verwende daher in der Einleitung Ausdrücke von der Form $lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$, zeige an einigen Beispielen, wie diese berechnet werden, und benutze sie dann in der Mechanik, wo auch $lim \Sigma$ für das Integralzeichen gesetzt ist. Bei Ausrechnung einiger Beispiele (z. B. von Trägheitsmomenten) werden aber trotzdem die gewöhnlichen Methoden der höheren Mathematik benutzt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich folgendermaßen. Ich setze nämlich voraus, daß der eben von der Schule kommende Anfänger gleichzeitig an das Studium der Physik und der Mathematik geht und letztere mit der analytischen Geometrie beginnt. Dies entspricht dem hiesigen Gebrauche. Im ersten, manchmal im zweiten Semester hat der Studierende die Differential- und Integralrechnung noch nicht systematisch durchzunehmen begonnen. Solchen Lesern habe ich das Studium der ersten beiden Abschnitte möglich zu machen gesucht. Die gelegentlich vorkommenden Integrale kann er bei dem ersten Studium überschlagen. Bei späteren Wiederholungen findet er die ihm nun verständlichen Rechnungen an den Stellen, wo sie hingehören.

In den Literaturangaben ist mit Absicht kein einheitliches Prinzip durchgeführt. Wo es sich um rein physikalische Fragen handelt, sind die im Text erwähnten Arbeiten am Schlusse der betreffenden Kapitel zusammengestellt. Daß bei vielen Fragen aus den Grenzgebieten der Physik (Astronomie, Geodäsie, Meteorologie, Instrumentenkunde, theoretische Mechanik und Chemie), deren Besprechung nur kurz gestreift wird, von einer vollständigen Angabe der Literatur nicht die Rede sein kann, liegt auf der

Hand. Bei den einschlägigen wenigen Arbeiten, die aus irgend welchen besonderen Gründen erwähnt sind, habe ich den Nachweis direkt im Text oder in Fußnoten gegeben.

Nicht unerwähnt möchte ich die mannigfache Anregung lassen, die ich den größeren deutschen, englischen und französischen Lehr- und Handbüchern der Physik verdanke.

Dieser Band ist nach der zweiten russischen Auflage (1900) übersetzt worden, doch habe ich die zahlreichen Änderungen und Ergänzungen eingeführt, die ich seit Anfang 1900 mir für eine etwaige weitere Auflage vorgemerkt hatte.

Sehr verbunden bin ich Herrn Oberlehrer H. Pflaum in Riga, welcher mit bewunderungswürdiger Gewissenhaftigkeit und der größten Sachkenntnis die Übersetzung ausführte.

Herr Professor E. Wiedemann hat das Manuskript der deutschen Übersetzung an zahlreichen Stellen ergänzt. Ihm und Herrn Prof. G. C. Schmidt, der sich der großen Mühe unterzogen hat, eine Korrektur des Werkes zu lesen, und dabei zahlreiche Verbesserungen angebracht hat, sage ich an dieser Stelle meinen besten Dank.

Die Verlagsbuchhandlung von Friedr. Vieweg & Sohn hat treu ihren Traditionen auch bei Herausgabe dieses Werkes keine Mühen und Kosten gescheut, um demselben eine angemessene Ausstattung zu geben.

Möge ein günstiger Stern über diesem Buche walten!

St. Petersburg, Juni 1902.

Prof. O. Chwolson.

Aus der Vorrede zum zweiten Bande der ersten Auflage.

Bei der Abfassung dieses Werkes hatte ich stets nur ein ganz bestimmtes Ziel vor Augen: ein Lehrbuch zu schaffen für den Lernenden, für den Studenten, nicht aber ein Handbuch für den Spezialisten, der sich das weite Gebiet der physikalischen Forschung bereits zu eigen gemacht hat. Es lag mir nicht daran, daß der Spezialist findet, was er sucht, ich strebte nur danach, daß der Studierende findet, was er braucht und daß er braucht, was er findet. So waren es denn vor allem rein didaktische Überlegungen, von denen ich mich beständig leiten ließ. Mein beständiges Bestreben war es, mich in die Lage des Studierenden zu versetzen. Vor allem sagte ich mir, daß kein Mensch ein vierbändiges Lehrbuch der Physik in die Hand nimmt, der sich nicht bereits mit der elementaren Schulphysik bekannt gemacht hat. Ich habe daher die elementare Physik in allen denjenigen Teilen fortgelassen, die man weder zu erweitern noch zu vertiefen braucht, um den Inhalt dieses Werkes zu verstehen. Sorgfältig suchte ich aber andererseits eben die Fragen der elementaren Physik heraus, deren Vertiefung für das Verständnis des weiteren notwendig ist. So habe ich im ersten Bande die Grundbegriffe: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse, Arbeit, Energie usw., ausführlich besprochen, da ich nicht glaube, daß diese Begriffe in der Schule bis zu dem Grade aufgeklärt werden können, welcher für das weitere Studium notwendig ist.

Die Mechanik ist eine selbständige Wissenschaft, und ich habe aus derselben nur das gebracht, was der Studierende weiterhin braucht. Rein mechanische Probleme (z. B. allgemeine Bedingungen des Gleichgewichtes, Foucaultsches Pendel, Kreiselbewegung usw.) gehören nicht in ein Lehrbuch (wohl aber in ein Handbuch) der Physik und sind daher ausgeschlossen.

Viel wissen und richtig verstehen sind bekanntlich zwei ganz verschiedene Sachen. Die wichtigste, zugleich aber auch schwierigste Aufgabe eines Lehrbuches ist es, den Lernenden auf den richtigen Standpunkt zu stellen, ihn vor falschen Auffassungen und Mißverständnissen nach Möglichkeit zu bewahren. Hierzu ist oft eine Breite der Darstellung allgemeiner Fragen notwendig, die für den Spezialisten langweilig, weil überflüssig, für den Lernenden aber notwendig ist.

St. Petersburg, Dezember 1903. **O. Chwolson.**

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die Worte, mit denen Professor Chwolson die Vorrede zur ersten Ausgabe schloß: „Möge ein günstiger Stern über diesem Buche walten!“ sind in außergewöhnlichem Maße in Erfüllung gegangen. Sein Werk hat sich schnell Bahn gebrochen, so daß schon der erste Band vergriffen war, bevor der Schlußteil des letzten hat erscheinen können.

Nur schwer hat sich Prof. Chwolson zu der Neuauflage entschlossen, da es, wie er mehrfach betonte, bei dem schnellen Fortschritt der Wissenschaft unausbleiblich sei, daß einzelne Teile veralteten, bevor das ganze Werk abgeschlossen sei. Dem Drängen der Fachgenossen und der Verlagsbuchhandlung nachgebend, hat er trotz seiner Bedenken sich der Neubearbeitung unterzogen, und so konnte er unmittelbar vor Kriegsausbruch das fertiggestellte Manuskript zum ersten Band der Verlagsbuchhandlung übergeben. Dasselbe hat dann mehrere Jahre geruht, da es sich als unmöglich erwies, in dauernder Verbindung mit ihm zu bleiben. Als der Krieg sich immer länger hinzog und die Nachfrage nach dem Werk nicht abnahm, entschloß sich die Verlagsbuchhandlung zur Herausgabe, und mit Einwilligung von Prof. Chwolson bat sie mich, das Manuskript zu ergänzen und die Drucklegung zu beaufsichtigen.

Seit Erscheinen der ersten Auflage im Jahre 1902 sind fünfzehn Jahre verflossen, und in dieser Zeit hat sich eine beispiellose Umwandlung unserer Anschauungen in der Physik vollzogen. Dementsprechend ist die Neuauflage an zahlreichen Stellen neu geschrieben. Um den Umfang nicht zu steigern, hat sich Professor Chwolson entschlossen, einige Abschnitte fortzulassen und andere stark zu kürzen. So wurde das Kapitel „Einige Sätze aus der Mathematik“ gestrichen, da mit Recht angenommen werden konnte, daß die Studierenden, welche dies umfangreiche Lehrbuch durcharbeiten, sich bereits mit den elementaren Sätzen aus der höheren Mathematik vertraut gemacht haben. Ebenso sind die Paragraphen über die Methode der kleinsten Quadrate und damit zusammenhängende Sätze fortgelassen. Der Abschnitt über Meßapparate und Meßmethoden ist wesentlich gekürzt und dafür auf Spezialwerke verwiesen. Der so ersparte Raum konnte benutzt werden, um wenigstens in großen Zügen die neuere Entwickelung der Physik zu schildern, z. B. die Lehre vom Elektron, die Relativitätstheorie usw.

Ich habe das Manuskript einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen und es ergänzt, soweit es mir nötig erschien. Außerdem habe ich das Werk stilistisch umgearbeitet. Ich glaube hierdurch einen Wunsch vieler Leser erfüllt zu haben; denn wenn auch die Übersetzung der ersten Auflage bis auf wenige Stellen sachlich richtig war, so war doch zu wenig auf Stilkunst geachtet worden.

Münster i. W., August 1917.

Gerhard Schmidt.

Inhaltsverzeichnis zu Band I, Abteilung I.

Drittes Kapitel: Arbeit und Energie.

Viertes Kapitel: Die harmonische Schwingungsbewegung.

Fünftes Kapitel: Strahlende Ausbreitung von Schwingungen.

Sechstes Kapitel: **Von der allgemeinen Gravitation.** Seite

Siebentes Kapitel: **Elemente der Potentialtheorie.**

Achtes Kapitel: **Von der Schwerkraft.**

Neuntes Kapitel: **Von den Dimensionen physikalischer Größen.**

Dritter Abschnitt.

Meßapparate und Meßmethoden.

Erstes Kapitel: **Allgemeine Bemerkungen üb. physikalische Messungen.**

Zweites Kapitel: **Messung von Längen und Flächen.**

Drittes Kapitel: **Messung von Winkeln.**

Viertes Kapitel: **Messung des Volumens.**

Fünftes Kapitel: **Messung von Kräften und Massen.**

Sechstes Kapitel: **Messung der Zeit.**

Siebentes Kapitel: **Messung der Intensität der Schwerkraft.**

Achtes Kapitel: **Messung der mittleren Erddichte.**

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Physik.

§ 1. **Zwei Welten.** Es gibt für jeden Menschen zwei Welten: eine innere und eine äußere; zwischen diesen beiden vermitteln unsere Sinne. Die Außenwelt besitzt die Fähigkeit auf unsere Sinne einzuwirken, in ihnen gewisse Veränderungen hervorzurufen, oder, wie man zu sagen pflegt, Reize auf sie auszuüben. Die innere Welt wird durch die Gesamtheit des Bewußtseininhalts bestimmt, welcher der unmittelbaren Beobachtung eines anderen Menschen völlig unzugänglich ist.

Die von der Außenwelt hervorgerufene Reizung der Sinnesorgane überträgt sich auf die Innenwelt und ruft in ihr ein subjektives Empfinden hervor, dessen Entstehung durch das Bewußtsein bedingt wird. Die subjektive Empfindung wird vergegenständlicht (objektiviert), d. h. wird auf den äußeren Raum übertragen als ein Etwas, das einem bestimmten Orte und einer bestimmten Zeit angehört. Wir übertragen also unsere Empfindungen auf die Außenwelt, wobei Raum und Zeit den Hintergrund bilden, vor welchem sich die vergegenständlichten Empfindungen anordnen. Diese befinden sich daher gleichsam an bestimmten Stellen des Raumes, und hierhin versetzen wir auch unwillkürlich die Ursache, durch welche sie hervorgerufen wurden. Die Untersuchungen über den Vorgang des Objektivierens gehören der Philosophie an.

Dem Menschen wohnt ferner die Fähigkeit inne, die erhaltenen Eindrücke zu vergleichen, über ihre Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit zu urteilen und im letzteren Falle qualitative und quantitative Verschiedenartigkeiten zu erkennen, wobei die quantitativen Unterschiede sich entweder auf den Spannungsgrad (Intensität) oder die Raumausdehnung (Extensität) oder endlich auf die Zeitdauer der den Reiz hervorbringenden objektivierten Ursache beziehen können.

Da der Verstandesschluß, welcher jede Vergegenständlichung begleitet, ausschließlich auf dem empfangenen Eindrucke beruht, so bringt eine vollkommene Identität dieser Eindrücke unbedingt auch Identität der objektivierten Ursachen hervor, und diese Identität bleibt ohne Rücksicht auf unseren Willen, ja sogar gegen unseren Willen selbst in jenen Fällen bestehen, wo andere Sinnesorgane von der Verschiedenartigkeit der Ursache ein unbestreitbares Zeugnis ablegen (der Gegenstand und sein Spiegelbild — Sehen und Fühlen). Hieraus entspringt eine der Hauptquellen der zweifellos falschen Verstandesschlüsse, welche zu den sogenannten Täuschungen des Gesichts, Gehörs usw. führen. Eine andere Quelle derselben ist Mangel an Übung bei der Beurteilung von neuen Eindrücken.

Die räumliche und zeitliche Wahrnehmung der Sinneseindrücke, denen wir, wie oben auseinandergesetzt, die Bedeutung objektiver, außerhalb unseres Bewußtseins bestehender Realität verleihen, wird äußere Erscheinung genannt. Die Farbenänderung, welche die Körper bei Änderung ihrer Beleuchtung erfahren, die Niveaugleichheit des Wassers in Gefäßen, die Schwingungsbewegung des Pendels sind Beispiele äußerer Erscheinungen.

Eine von den drei Triebfedern, welche die Menschheit auf dem Wege ihrer Entwickelung in Bewegung erhalten, ist die Wißbegier, deren letztes unerreichbares Ziel die Erkenntnis des Wesens unseres Daseins ist, des wahren Verhältnisses zwischen der Welt in uns und der Außenwelt. Die beiden anderen Triebfedern sind das Streben nach Wohlergehen und nach Anerkennung. Als Ergebnis der Wißbegier hat man eine sehr große Zahl der verschiedenartigsten Erscheinungen kennen gelernt, welche je nach ihren Merkmalen den Gegenstand der verschiedenen Wissenschaften bilden. Unter letzteren nimmt die Physik eine der ersten Stellen ein, dank dem Umfang der von ihr bearbeiteten Gebiete und der Bedeutung, welche sie für fast alle übrigen Wissenschaften hat.

Indem wir die Ursache der Empfindung vergegenständlichen, d. h. sie an eine bestimmte Stelle des Raumes versetzen, stellen wir uns vor, daß an jener Stelle ein Etwas vorhanden sei, was wir Materie oder Stoff nennen. Ein begrenzter Teil des Raumes, welcher Stoff enthält, heißt ein physischer Körper.

Die Materie zerfällt in zwei Arten: die nicht organisierte und die organisierte; letztere bildet den Tier- und Pflanzenkörper.

Die erste Entstehung von organisierter Materie ist uns noch unbekannt; zwar beobachten wir den Übergang der nicht organisierten Materie in die organisierte (Ernährung, Atmung), aber dieser Übergang erfolgt nur in Gegenwart bereits organisierter Materie. Das Geheimnis der ersten Umwandlung ist uns bis jetzt verschlossen.

§ 2. Aufgabe der Physik. Physik im weitesten Sinne des Wortes ist die Wissenschaft von der nicht organisierten Materie und von den in ihr vor sich gehenden Erscheinungen. Diese heißen physikalische Erscheinungen. Das Arbeitsgebiet aller übrigen sich mit der Materie beschäftigenden Wissenschaften ist die organisierte Substanz (biologische Wissenschaften). Physikalische Prozesse können sich auch in der organisierten Materie abspielen; indes sind sämtliche

Versuche, alle in der organisierten Materie vor sich gehenden Erscheinungen auf physikalische Vorgänge zurückzuführen, mißglückt und bis jetzt ist ungewiß, ob dies jemals gelingen wird. Die physikalischen Erscheinungen spielen zweifellos eine hervorragende Rolle auch in dem Tier- und Pflanzenkörper, aber es wird durch sie nicht die Gesamtheit der Eigenschaften der organisierten Materie erschöpfend dargestellt: es bleibt noch das übrig, was das innerste Wesen und die Bedingung der Organisation ausmacht — das, was wir „Leben" nennen.

Indem die Physik die in der nicht organisierten Materie vor sich gehenden Erscheinungen erforscht, verfolgt sie ein dreifaches Ziel: die Erscheinungen zu entdecken, zu untersuchen und zu erklären.

Um die Erscheinungen zu entdecken und zu untersuchen, bedient man sich der Beobachtung und des Experimentes, welche indes durch keine scharfe Grenze voneinander getrennt sind; beide zusammen ergeben die Erfahrung. Im engeren Sinne des Wortes ist die Beobachtung einer äußeren Erscheinung die Betrachtung eines Vorganges, der sich unter den gewöhnlichen Verhältnissen abspielt; das Experiment stellt eine Wiederholung der Erscheinung unter künstlich geschaffenen, in der Natur vielleicht niemals vorkommenden Verhältnissen dar, um dabei die Besonderheiten erkennen zu können, die in der Erscheinung gerade dank diesen Verhältnissen zutage treten. Bisweilen sagt man, daß das Experiment dazu diene, eine gestellte Frage von der Natur selbst mehr oder weniger bestimmt beantworten zu lassen; durch die Beobachtung belausche man, durch das Experiment befrage man die Natur. Indes ist zu beachten, daß, da sowohl die Beobachtung als auch das Experiment Gedankenarbeit zur Voraussetzung und im Gefolge haben, auch die Beobachtung auf das Erhalten einer Antwort abzielt, nachdem durch vorhergegangene Gedankenarbeit die Frage klargelegt ist. Im weiteren Sinne des Wortes begleitet „die Beobachtung" ein jedes Experiment.

Die von uns gebrauchte Bezeichnungsweise (Einteilung des Versuches in Beobachtung und Experiment) ist die heute in der Philosophie übliche. In der Physik pflegt man die Beobachtung von dem Versuch zu unterscheiden, indem man den Versuch dem gleichsetzt, was vorher Experiment genannt wurde. Im folgenden werden wir uns dieser letzteren Terminologie bedienen, obgleich auch im gewöhnlichen Sprachgebrauch das Wort Versuch zuweilen in einem weiteren und allgemeinen Sinne gebraucht wird.

Die dritte Aufgabe der Physik besteht darin, die Erscheinungen zu „erklären". Eine Erscheinung erklären heißt hierbei nicht, die gegenseitige Abhängigkeit der Erscheinungen logisch verständlich machen, so daß man sieht, daß auf eine gegebene Erscheinung eine andere bestimmte Erscheinung mit logischer Konsequenz folgen muß. Eine Erscheinung erklären heißt — den gesetzmäßigen Zusammenhang derselben mit anderen uns schon bekannten Erscheinungen ermitteln. Somit besteht das Wesen der dritten Aufgabe der Physik darin, den Zusammenhang zwischen den Erscheinungen aufzudecken und zu erläutern. Nicht in der Zurückführung irgendeiner Erscheinung A auf eine uns schon bekannte Erscheinung B liegt das Schwergewicht der Aufgabe, denn gerade diese Anordnung ist eine zufällige und bei einem anderen Verlaufe der historischen Entwickelung unserer Kenntnisse hätte sie auch die entgegengesetzte sein können, so daß wir also die Erscheinung B auf die längst bekannte A hätten zurückführen müssen. Wichtig ist allein die Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen den Vorgängen A und B. Die großen Ereignisse in der Geschichte der Physik sind durch die Entdeckung neuer, unerwarteter Beziehungen zwischen den Erscheinungen gekennzeichnet, z. B. die des Zusammenhanges zwischen den magnetischen und elektrischen, zwischen den elektrischen und optischen Erscheinungen usw.

Daß ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den zeitlich aufeinander folgenden Erscheinungen besteht, ist für uns unbezweifelbar. Die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen, welche die Außenwelt kennzeichnet, geht im gegebenen Augenblick gesetzmäßig aus der Gesamtheit der Erscheinungen, welche sich auf den vorhergehenden Augenblick beziehen, hervor, wobei eine einzelne, für sich allein betrachtete Erscheinung A einer bestimmten Gruppe B vorhergehender Erscheinungen entspringt. Bedingungsweise kann man die Gruppe B als die nächste Ursache der Erscheinung A, die Erscheinung A aber als die Wirkung der Erscheinungsgruppe B bezeichnen. Während wir nun die Erscheinung A beobachten, können wir uns zur Aufgabe stellen, die Erscheinungsgruppe B, d. h. die Ursache der Erscheinung A zu finden. Unzählige Beispiele aus allen Teilen der Physik beweisen, daß das Aufsuchen der Ursache in der Tat auf das Aufsuchen des Zusammenhanges zwischen den Erscheinungen hinausläuft. Indem wir die Gruppe B als die Ursache von A bezeichnen, nehmen wir an, daß alle übrigen Erscheinungen der Außenwelt, die gleichzeitig mit den Erscheinungen B auftreten, aber nicht zu dieser Gruppe gehören, auf die Form der Erscheinung A ohne Einfluß sind, so daß mithin keinerlei Veränderung derselben auch eine Veränderung von A zustande bringt.

Die gegenseitigen Beziehungen zwischen Ursache (B) und Wirkung (A) werden durch zwei Postulate oder Axiome geregelt; sie bilden die Grundlage, auf der die Wissenschaft von den Erscheinungen aufgebaut worden ist. Es sind das die folgenden zwei Axiome:

I. Jede bestimmte Wirkung (Erscheinung A), die aus einer gegebenen Ursache (Gruppe B) hervorgeht, ist eine absolute und unbedingte Folge der letzteren. Damit soll aber nicht gesagt sein, daß außer A nicht auch noch eine Reihe anderer

Wirkungen (die Erscheinungen C, D usw.) gleichzeitig mit A bestehen kann, die ebenfalls aus derselben Gruppe B entspringt.

Der Sinn dieses Axioms ist, daß die Erscheinung A in keinem Falle (an der gegebenen Stelle und zu der gegebenen Zeit), nicht einmal in Gedanken, durch eine andere Erscheinung ersetzt werden kann. Dieses Axiom drückt somit aus, daß in der Welt ein in jedem Falle bestimmter und einzig möglicher gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen zeitlich aufeinander folgenden Erscheinungen besteht. Wenn die Gruppe B und die gesetzmäßigen Beziehungen bekannt sind, so kann die Erscheinung A mit vollständiger Gewißheit vorausgesagt werden. Als Hilfsmittel für die Vorhersage dient die Mathematik und die deduktive Methode logischen Denkens, auf welcher die Mathematik beruht.

II. Ein und dieselbe Erscheinung A kann als Wirkung aus einer großen Zahl verschiedener Erscheinungsgruppen B hervorgehen. Wenn wir die Erscheinung A beobachten, und uns eine große Zahl gesetzmäßiger Beziehungen zwischen den Erscheinungen überhaupt bekannt ist, so können wir dennoch nicht wissen, ob beim Zustandekommen von A gerade diese Beziehungen mitgespielt haben oder andere uns noch unbekannte. Der Schluß von B und A kann von uns bisweilen mit vollständiger Gewißheit gezogen werden; der Schluß von A und B aber immer nur mit einem größeren oder geringeren Grade von Wahrscheinlichkeit.

Die Physik bestimmt, indem sie die Erscheinungen erforscht und ihren gesetzmäßigen Zusammenhang aufdeckt, für eine gegebene Erscheinungsgruppe B die einzig möglichen Wirkungen A und sucht für eine gegebene Erscheinung A die am meisten wahrscheinliche Ursachengruppe B. In allen Teilen der Physik finden wir Beispiele für diese beiden Arten von Verstandesschlüssen.

§ 3. Hypothesen. Hypothese nennen wir die Voraussetzung, daß eine gewisse gesetzmäßige Abhängigkeit zwischen gegebenen Erscheinungen besteht. Die landläufige Definition der Hypothese als einer Annahme über die Ursache einer gegebenen Erscheinung ist zu eng — denn eine Hypothese ist in allen den Fällen notwendig, wo der Zusammenhang zwischen den Erscheinungen noch nicht festgesetzt ist, und sie kann sich daher ebenso auf die Ursache als auf die Wirkungen beziehen.

Als Hypothese in bezug auf die Ursache kann man irgendeine von den möglichen Gruppen B, welche die zu erklärende, d. h. mit anderen gesetzmäßig zu verknüpfende Erscheinung A zur Folge haben können, auswählen. Welche Ursachengruppe in dem gegebenen Falle gewählt werden oder wie die Hypothese beschaffen sein muß, dafür gibt es keine Regel und kann es keine geben. Um Hypothesen zu ersinnen, bedarf es eines umfangreichen Wissens und einer besonderen geistigen Veranlagung.

Nicht alle Hypothesen haben gleichen Wert und gleiche Daseinsberechtigung. Eine gute Hypothese muß folgende Eigenschaften besitzen: sie muß möglich sein, muß mit den beobachteten Erscheinungen im Einklang stehen, muß möglichst umfassend und einfach und schließlich verifizierbar sein.

Die Hypothese muß also erstens im Bereiche des Möglichen liegen, d. h. sie darf nicht im Widerspruch stehen zu dem, was gewiß ist, was zur festen Grundlage der Wissenschaft gehört (z. B. der Lehre der Erhaltung von Stoff und Energie). Sie muß mit den Erscheinungen im Einklang stehen, d. h. die Erscheinungen müssen sich auf Grund der erkannten gesetzmäßigen Abhängigkeiten aus ihr als einzig mögliche und notwendige Folgen ableiten lassen. Der Umfang der Hypothese muß derartig sein, daß sie eine möglichst große Zahl von Erscheinungen umfaßt. Es ist nicht erlaubt, für jede einzelne Reihe ähnlicher Erscheinungen A je eine besondere Hypothese aufzustellen, d. h. anzunehmen, daß eine besondere Ursachengruppe besteht. Je geringer die Zahl ihrer Hypothesen ist, um so höher entwickelt ist eine Wissenschaft. Die Hypothese muß ferner möglichst einfach sein, denn tief im Bewußtsein der Menschen wurzelt die Überzeugung, daß die Endursachen der Naturvorgänge äußerst einfach sind. Endlich muß die Hypothese verifizierbar sein, d. h. es muß möglich sein, aus ihr auf deduktivem Wege eine große Zahl von Schlüssen zu ziehen, die sich durch den Versuch mehr oder weniger bestätigen lassen. Man muß sich also eine Übersicht zu verschaffen suchen, wie weit die Folgerungen mit der Wirklichkeit übereinstimmen; dadurch erhält man ein Maß für den Wahrscheinlichkeitsgrad der Hypothese selbst.

Hypothesen, welche die genannten Eigenschaften nicht besitzen, sind für die Wissenschaft ein unnützer und schädlicher Ballast und von ihnen gelten die Worte Newtons: hypotheses non fingo [1]).

Außer den Hypothesen über die Ursache, d. h. über das Vorhandensein der Erscheinungsgruppe, welche die Erscheinung A hervorruft, spielen in der Wissenschaft eine große Rolle erstens die Hypothesen über die Existenz eines gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen zwei bekannten Erscheinungen überhaupt, wobei die Frage, ob diese Erscheinungen sich im Verhältnis von Ursache und Wirkung befinden oder als Wirkungen einer noch unentdeckten Erscheinungsgruppe miteinander parallel verlaufen (Sonnenflecke und Nordlichter), noch offen bleibt, und zweitens Hypothesen über die besondere Form gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen solchen Erscheinungen, zwischen denen ein ursächlicher Zusammenhang an sich nicht bezweifelt werden kann (elektrischer Strom und Erwärmung des durchströmten Leiters).

---

[1]) Newton, Principia. Glasgow 1871, S. 530.

Ohne Hypothese im weiteren Sinne des Wortes, d. h. ohne Voraussetzungen, ist kein einziger Schritt in der Wissenschaft denkbar.

Claude Bernard sagt: „Ein vorausgehender Gedanke oder eine Hypothese ist der notwendige Ausgangspunkt für jede Experimentaluntersuchung; ohne denselben ist es undenkbar, etwas Neues zu entdecken. Einem jeden Versuche muß eine mehr oder weniger klare Vorstellung über die Erscheinung oder ihre besondere quantitative oder qualitative Eigenart zweifellos vorangehen. Auch in der reinen Mathematik ist ein Fortschritt ohne Hypothese über die Abhängigkeit zwischen zwei oder mehr Größen unmöglich.“ Derselbe Claude Bernard sagt: „Der Mathematiker und der Naturforscher bedienen sich ein und derselben Arbeitsweise, wenn sie neue Wahrheiten suchen. Durch Induktion kommt man zur Aufstellung von Hypothesen; diese prüft man alsdann.“ Auf die Frage, auf welchem Wege der Induktion man zu solchen Hypothesen gelange, welche einen Fortschritt für die Wissenschaft bedeuten, kann man die Antwort in Keplers Worten finden, welcher sagte: „Mein guter Genius hat mir diesen Gedanken eingegeben.“

Besonders muß man sich vor Scheinhypothesen hüten; sie sind fast immer sehr verwickelt und enthalten meist in Form von Voraussetzungen entweder alles oder fast alles das, was gerade erst durch sie erklärt, d. h. in gesetzmäßigen Zusammenhang mit anderen Erscheinungen gebracht werden soll. Von diesen anderen Erscheinungen ist in solchen Scheinhypothesen gar nicht die Rede, und deshalb können sie auch nicht zur Erklärung der Erscheinungen dienen, für welche sie aufgestellt wurden. Sie stellen nichts anderes dar als eine Beschreibung der Vorgänge, die wegen ihrer Kürze und Anschaulichkeit bisweilen von hohem Nutzen sein kann; aber zu einer tieferen Erkenntnis der Erscheinung können sie nicht dienen. Als Beispiel einer solchen Scheinhypothese kann die Annahme zweier elektrischer Fluida dienen, welche etwa bis zum Jahre 1880 benutzt wurde.

Eine gut gewählte Hypothese bildet für den Fortschritt der Wissenschaft ein überaus wichtiges Hilfsmittel; man kann sie auch als Arbeitshypothese bezeichnen; die Rolle aber, welche dieses Hilfsmittel zu spielen hat, darf nur vorübergehend sein; je eher die Hypothese aufhört eine Hypothese zu sein, um so besser. Diesem Ziele zu führt uns allein der Versuch. Die Vergleichung der in der Außenwelt wirklich auftretenden Erscheinungen mit denen, welche auf deduktivem Wege als notwendige Folge der aufgestellten Hypothese abgeleitet werden, kann entweder die zweifellose Unrichtigkeit der Hypothese, von welcher man sich alsdann loszusagen hat, dartun, oder sie kann als Bestätigung für ihre unzweifelbare Richtigkeit dienen; in letzterem Falle hört die Hypothese als solche zu bestehen auf. Eine Hypothese, welche nicht direkt geprüft werden kann, sondern bloß auf dem Um-wege des Vergleichens ihrer Folgen mit den Versuchsergebnissen, kann niemals Gewißheit erlangen. Nur wenn eine unbegrenzte Menge qualitativ verschiedener Beobachtungsergebnisse im Einklang mit der Hypothese steht, nähert sich ihr Wahrscheinlichkeitsgrad unbegrenzt der Gewißheit (wie z. B. die Annahme der Erdbewegung um ihre Achse und um die Sonne, der Satz von der Erhaltung der Energie). Das Aufkommen einer guten Hypothese kann die Wissenschaft mächtig fördern; aber viel wichtiger ist das Verschwinden einer Hypothese und die großartigsten Augenblicke in der Geschichte der Wissenschaft sind gerade durch den Sturz von Hypothesen gekennzeichnet. Die gleiche Bedeutung hat die Verschmelzung von zwei oder mehreren Hypothesen zu einer einzigen. Je geringer die Zahl der Hypothesen ist, um so höher steht die Entwickelung der Wissenschaft. „Die Wissenschaft strebt nicht nach Aufstellung, sondern nach Beseitigung der Hypothesen" — sagt Ostwald. Ihre Vollendung würde die Wissenschaft erreicht haben, wenn nur eine einzige Hypothese übrig geblieben wäre, aus welcher als notwendige Folge sich der gesetzmäßige Zusammenhang aller Erscheinungen der Außenwelt ergeben würde.

§ 4. Der Äther. Das Elektron. Das Studium der verschiedenartigsten Erscheinungen der Außenwelt hat seit lange zu der Annahme geführt, daß außer der Materie, deren Eigenschaften wir von Kindheit an als die Ursache sehr vieler um uns her vorgehender Erscheinungen zu betrachten gewohnt sind, noch andere Träger vorhanden sind, die wir Agenzien nennen können. Sie hießen früher Imponderabilien, d. h. gewichtslose Wirkungsursachen oder Substanzen. Diese Bezeichnung aber beruht jedenfalls auf einem Mißverständnis, denn aus dem Umstande, daß unter den gegebenen Verhältnissen das Gewicht eines Agens nicht ermittelt werden kann, folgt noch nicht, daß dieses Agens an sich jener Eigenschaft der Materie entbehrt, die man ihr Gewicht nennt. So hat doch beispielsweise Wasser im Wasser selbst gewissermaßen kein Gewicht und doch zählt es niemand zu den Imponderabilien. Wenn man das Vorhandensein dieser Agenzien zugibt, kann man aus den Versuchen höchstens schließen, daß sie „unwägbar" sind, d. h. wegen der Beschaffenheit unserer Versuche ihr Gewicht nicht kundzugeben vermögen.

Zu Anfang des XIX. Jahrhunderts nahm man ziemlich allgemein an, daß es sechs verschiedene Agenzien gäbe: zwei elektrische, zwei magnetische, den Wärmestoff und das Agens, welches die Ursache der Lichterscheinungen bildet; dies entspricht der Annahme von sechs verschiedenen Hypothesen. Mit der Weiterentwickelung der Wissenschaft verminderte sich die Zahl der hypothetischen Stoffe und gegen das Ende des XIX. Jahrhunderts verblieb statt jener sechs nur noch eine einzige.

Jenes einzige Agens, mit dem man damals auszukommen glaubte, wurde „Äther“ genannt. Man nahm an, daß er den Raum zwischen den Weltkörpern erfülle und daß er in allen unserer Beobachtung zugänglichen Teilen des Weltalls enthalten sei. Das, was man Äther nannte, konnte wohl auch als eine besondere Art von Materie angesehen werden, und zwar in dem Sinne, in welchem diese von uns definiert worden ist (§ 1). Trotzdem wurden gewöhnlich der Bequemlichkeit halber die Ausdrücke „Äther“ und „Materie“ einander gegenübergestellt, und zwar wurde letztere Bezeichnung besonders für die Materie gebraucht, welche mehr oder weniger unmittelbar auf unseren Tastsinn wirkt. Der Äther dagegen sollte das Zwischenmittel, das Medium sein, welches Vorgänge durch den Raum überträgt, in welchem keine Materie in der eben erwähnten Bedeutung des Wortes vorhanden ist.

Wir wollen nun mit einigen Worten angeben, welche Rolle dem Äther behufs Erklärung der physikalischen Erscheinungen damals zugeschrieben wurde. Zu dem Zwecke müssen wir eine kurze Schilderung der auch noch heute herrschenden Vorstellung über den Aufbau der Materie vorausschicken. Wir nehmen an, daß die Materie aus sehr kleinen Teilchen besteht, die ihren Ort im Raume, also auch ihre gegenseitige Lagerung ändern können. Wir nennen die Anordnung der Teilchen normal, wenn zwischen dieser Materie und der übrigen Welt sich keinerlei Zusammenhang kundgibt, abgesehen von dem, welcher unter keinerlei Bedingung aufhören kann. Beim Auftreten neuer Bedingungen, wenn die Welt, welche sich außerhalb der betrachteten Materie befindet, einwirkt, kann die Anordnung der Stoffteile aus dem normalen Zustande in einen anormalen übergehen. Die Erscheinung, daß eine neue Anordnung der Teile auftritt, welche unbestimmt lange bestehen kann, die aber, sobald alle jene Ursachen, welche sie hervorriefen (die neuen Beziehungen zur übrigen Welt) verschwunden sind, in die normale Anordnung zurückkehrt, nennt man Formänderung oder Deformation.

Ein anderer überaus wichtiger Fall einer Veränderung in der normalen Anordnung der Stoffteile liegt vor, wenn ein Teil der Materie sich zu bewegen beginnt, indem er ununterbrochen seinen Ort ändert, sich dabei aber nur wenig aus der normalen Lage entfernt. Diese Erscheinung heißt Perturbation oder Störung. Sehr oft tritt dabei folgende Erscheinung auf: In irgend einem Teile der Materie entsteht eine Störung, darauf bildet sich eine ebensolche in dem benachbarten Teile aus, darauf in der Nachbarschaft dieses Teiles usw. Dies nennt man Ausbreitung der Störung innerhalb der Materie. Deformationen und Störungen sind, wie aus den Definitionen hervorgeht, von einer Veränderung in der gegenseitigen Lage der Stoffteile begleitet. Es kommen indes auch Fälle von Bewegung der Materie ohne eine solche Veränderung der relativen Lage ihrer Teile vor. In diesem Falle sagen wir, daß sich die betreffende Materie als Ganzes bewegt.

Es wurde nun angenommen, daß es auch für den Äther eine normale Anordnung der Teile gäbe, daß auch in ihm Formänderungen und Störungen möglich seien und daß ein gewaltig großes Gebiet von Erscheinungen (des Lichtes, der Elektrizität und des Magnetismus) gesetzmäßig mit solchen Deformationen und Störungen im Äther zusammenhinge. Die Mitwirkung des Äthers an diesen Erscheinungen schien keinem Zweifel zu unterliegen; es galt außerdem als sehr wahrscheinlich, daß er eine wichtige Rolle bei anderen — und vielleicht bei allen physikalischen Erscheinungen ohne Ausnahme — spiele. Man glaubte damals, die Aufgabe der Physik genauer folgendermaßen fassen zu können: es ist der gesetzmäßige Zusammenhang zwischen den Erscheinungen, die in der nichtorganisierten Materie und im Äther vor sich gehen, zu finden, wobei eine möglichst kleine Zahl von Annahmen über die Eigenschaften des Äthers und der Materie zu Hilfe zu nehmen ist.

Außer der gewöhnlichen Materie und dem Äther wurden keine weiteren Agenzien angenommen; z. B. sollte für die elektrischen Erscheinungen ebenfalls der Äther die einzige Ursache sein. Man glaubte ohne „Elektrizitäten", als besondere, für sich bestehende Stoffe, auszukommen. Alle elektrostatischen Erscheinungen wurden auf Spannungen (Deformationen) im Äther zurückgeführt. Die elektrisierte Oberfläche eines Körpers sollte der geometrische Ort der Endpunkte von Linien sein, deren Richtung in jedem Punkte des Raumes mit der Spannungsrichtung zusammenfällt (sogenannte Kraftlinien). Ebenso wurden alle elektrokinetischen Erscheinungen durch Bewegungen (Perturbationen) im Äther erklärt. Der elektrische Strom wurde z. B. nicht als ein Vorgang im Leiter angesehen, sondern als ein Bewegungszustand im umgebenden Äther, dessen Form, Richtung und Stärke durch die geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Leiters bestimmt würden. Den Bewegungen im Äther sollte eine gewisse Menge von kinetischer Energie (Kapitel III) entsprechen, welche von dem Leiter gleichsam eingesogen und in Wärme verwandelt würde. Ebenso sollte die elektrostatische potentielle Energie, z. B. eines geladenen Kondensators, die potentielle Energie des elastisch deformierten Äthers sein.

In den letzten Jahren hat in den Grundanschauungen der Physik eine gewaltige Umwälzung stattgefunden. Es kam eine Zeit, wo alte, fast vergessene Agenzien in neuer Form wieder auftauchten. Gegenwärtig (1917) kann der Umbau des wissenschaftlichen Gebäudes noch nicht als beendet angesehen werden; das Alte ist zerstört, aber das Neue baut sich nur langsam auf den veränderten Grundlagen auf. Ein heftiger Kampf verschiedener, einander widersprechender Meinungen ist entbrannt, man streitet sich, ob es ein oder drei Agenzien gibt;

manche Forscher glauben sogar, indem sie die gewöhnliche Materie hinzunehmen, nicht ohne vier auskommen zu können, andere dagegen hoffen, daß es möglich sei, sich auf eins zu beschränken.

Dieser gewaltige Umschwung wurde hervorgerufen durch die Untersuchung der Kathodenstrahlen, Strahlen, welche beim Durchgange von Elektrizität durch sehr verdünnte Gase entstehen, der Röntgenstrahlen und der von H. Becquerel und Frau Curie entdeckten radioaktiven Erscheinungen. Wir werden alle diese Erscheinungen in Band IV genau besprechen. Die Untersuchung der Kathodenstrahlen führte zu der neuen Lehre von den Elektronen. Indem man die Ursache der elektrischen Erscheinungen nicht mehr nur in Zuständen des Äthers suchte, kehrte man zurück zu der alten Lehre, nach welcher die Elektrizität ein besonderer, selbständig bestehender Stoff ist. Dies bezog sich zuerst nur auf die negative Elektrizität; hierbei erwies es sich sofort als notwendig, ihr einen atomistischen Bau zuzuschreiben. Die negative Elektrizität ist also nach der gegenwärtig allgemein herrschenden Ansicht ein Stoff, der aus kleinsten Teilchen, Elektrizitätsatomen besteht, welche den Namen Elektronen erhalten haben. Ein elektrischer Strom entsteht bei wirklicher Bewegung von Elektronen in einem Leiter. Über die besonderen Eigenschaften des Elektrons, z. B. ob es starr oder deformierbar ist, gehen die Ansichten noch auseinander; doch wäre es zu früh, bereits hier näher darauf einzugehen. Was früher positive Elektrizität genannt wurde, wird von einigen Forschern gegenwärtig ebenfalls als ein besonderer Stoff angesehen; über seinen Bau und seine Eigenschaften herrscht noch weniger Einigkeit, als über die Frage nach dem Wesen der negativen Elektrizität.

Als drittes Agens kommt hinzu der Äther, welcher den Raum erfüllt, und besonders als Träger und Leiter der strahlenden Energie gedacht wird (Band II und IV), d. h. der sichtbaren Lichtstrahlen, der infraroten und ultravioletten Strahlen, der Röntgenstrahlen und der Hertzschen elektrischen Strahlen. Fügen wir noch die gewöhnliche Materie hinzu, so hätten wir vier verschiedene Agenzien, aus denen die Welt aufgebaut sein soll und durch deren Eigenschaften die unendliche Fülle der uns umgebenden physikalischen und chemischen Erscheinungen sich sollte erklären lassen.

Parallel mit der Entwickelung der neuen Ansichten gingen nun noch andere fundamentale Umwälzungen in den physikalisch-chemischen Grundhypothesen. Hier müssen wir uns mit wenigen Andeutungen begnügen.

Das Atom der Materie (§ 8) wurde früher als eine homogene, sehr kleine Stoffmenge betrachtet, die sich bei keinerlei physikalischen oder chemischen Vorgängen in weitere Teile zerlegt. Gegenwärtig wird dem Atom der Materie ein äußerst verwickelter Bau zugeschrieben; in ihm sollen außer der gewöhnlichen Materie Elektronen vorhanden sein, und das Ganze soll ein System bilden aus vielen Teilen mit verschiedenen, äußerst schnellen und verwickelten Bewegungen. Unter gewissen Umständen zerfällt das Atom; Elektronen werden aus ihm herausgeschleudert, manchmal auch Bruchstücke der Materie mit Elektronen.

Verschiedene Forscher sind noch viel weiter gegangen und haben auch der strahlenden Energie einen atomistischen Bau zugeschrieben. So ist der kühne Gedanke z. B. von Lichtatomen (Quanten) entstanden. Diese neue Lehre stellt sich teilweise dar als eine Rückkehr zur alten Newtonschen Emissionstheorie (Band II), wenn auch in wesentlich veränderter Form. Die Quantentheorie ist in den letzten Jahren ausgebaut worden und hat uns manche neue Erkenntnis in sehr verschiedenen Teilen der Physik (Lehre von der spezifischen Wärme, Photoelektrizität u. a.) gebracht.

Die weitere Entwickelung der Elektronentheorie hat noch nach einer anderen Richtung umwälzend gewirkt. Eine Reihe von Forschern, besonders H. A. Lorentz, Einstein und Minkowski, haben ganz neue, außerordentlich kühne Ansichten über Raum und Zeit ausgesprochen. Den Anstoß zu dieser neuen Lehre gab eine Reihe unbegreiflicher Tatsachen: das Fehlschlagen aller Versuche, auf Grund von Experimenten die relative Bewegung der Erde gegen den ruhenden Äther nachzuweisen. Diese Lehre wird unter dem Namen der Relativitätstheorie zusammengefaßt. Sollten diese Ansichten durchdringen, in der Wissenschaft festen Fuß fassen und vielleicht einst Gemeingut der Menschheit werden, so würde dies einer so tiefgehenden Umwälzung unserer Grundvorstellungen entsprechen, wie sie in der Geschichte der Menschheit nicht ihresgleichen hat; sie würde selbst den großen Übergang von der geozentrischen zu der heliozentrischen Weltanschauung in den Schatten stellen.

Wir sahen, daß gegenwärtig vielfach vier Agenzien angenommen werden: die gewöhnliche Materie, die negative und die positive Elektrizität und der Äther. Es gibt aber auch Forscher, welche die positive Elektrizität nicht als ein besonderes Agens ansehen, sondern glauben, daß ein Atom, welches negative Elektronen verloren hat, uns als positiv elektrisch erscheint. Andere meinen, ohne die gewöhnliche Materie auskommen zu können, indem sie annehmen, daß das Atom nur aus einem System von Elektronen besteht, oder aus einem Kern von positiver Elektrizität, in welchem oder um welchen sich negative Elektronen bewegen.

Noch ein anderer großer Schritt ist in letzter Zeit von verschiedenen Forschern (Campbell, Witte, Einstein, Corbino u. a.) gemacht worden: das vollständige Aufgeben des Äthers. Alle Versuche, die Vorgänge im Äther wenigstens einigermaßen klarzustellen, sind bisher mißlungen, und so kamen jene Forscher auf den Gedanken, die Wissenschaft ohne den Äther aufzubauen; das ist dasselbe, als wenn man sagt: es gibt keinen Äther. Denn eine Hypothese ist nutzlos, wenn man sie nirgends gebraucht, und die Grundlagen einer solchen Hypothese können ohne Schaden für die Wissenschaft gestrichen werden. Allerdings führt dieser Gedanke zu der Vorstellung, daß die strahlende Energie (z. B. das sichtbare Licht) ein Etwas ist, welches sich selbständig, vielleicht aus „Quanten" (siehe oben) bestehend, durch den absolut leeren Raum ausbreitet.

Man sieht aus dem obigen, wie verschiedenartig und schwankend gegenwärtig die Grundanschauungen sind; vielleicht wird eine baldige Zukunft hier größere Einfachheit und Klarheit bringen.

Wir werden auch weiterhin zuweilen vom Äther sprechen; doch soll darunter stets nur der Raum verstanden werden, in welchem sich keine Art von gewöhnlicher Materie befindet, aber nicht ein besonderer Stoff, welcher diesen Raum erfüllt.

§ 5. Einteilung der Physik. Zu Anfang des § 2 hatten wir die Physik im weitesten Sinne des Wortes als die Wissenschaft von den in der nichtorganisierten Materie auftretenden Erscheinungen definiert. Die fortschreitende Entwickelung dieser Wissenschaft hat mit der Zeit dazu geführt, daß sich aus ihr umfangreiche Teile abgesondert haben, welche jeder für sich eine durch besondere Kennzeichen bestimmte Erscheinungsgruppe zum Gegenstande haben und zu selbständigen Wissenschaften angewachsen sind. Hierher gehören die Mechanik, Astronomie, Chemie, Mineralogie, Geologie und Meteorologie. Im höchsten Grade bedeutsam ist es, daß die Chemie und Astronomie, welche sich vom Zusammenhange mit der Physik bereits losgesagt hatten, später so ergiebig aus dem reichen Vorrat wissenschaftlichen Materials der Physik zu schöpfen angefangen haben, daß sich umfangreiche, eine Zwischenstellung einnehmende Wissenszweige — die physikalische Chemie und die Astrophysik — entwickelt haben. Diese wennschon einseitige Rückkehr zum alten erprobten Mutterboden hat eine reiche Ernte, eine schnelle Entwickelung jener neuen Zweige der Chemie und Astronomie zur Folge gehabt.

Von der Physik sondert sich ferner eine ganze Reihe von Wissenschaften ab, welche aus dem in ihr enthaltenen wissenschaftlichen Material praktischen Gewinn für die Menschheit zu ziehen suchen. Hierher gehört fast alles, worauf sich die heutige Kultur stützt: die angewandte Mechanik, die Dampftechnik und Elektrotechnik mit ihren umfangreichen Unterabteilungen der Telegraphie, Telephonie, elektrischen Beleuchtung, Galvanoplastik, Kraftübertragung usw.; hierher kann man auch die Photographie rechnen. Alle diese Wissenschaften stützen sich ganz und gar auf die Physik.

Das Material, welches gegenwärtig den wissenschaftlichen Inhalt der Physik darstellt, verteilt man gewöhnlich, je nach dem besonderen

Charakter oder nach einigen äußeren bzw. inneren Merkmalen der Erscheinungen, auf Teile oder Abschnitte. Aber eine solche Einteilung ist stets künstlich; es ist nicht möglich, eine auch nur irgendwie scharfe Grenze zwischen den einzelnen Abschnitten zu ziehen. Nebenbei möge noch darauf hingewiesen werden, daß gerade die sich beständig verringernde Möglichkeit einer strengen Sonderung der einzelnen Abschnitte der Physik das wichtigste Kennzeichen ihrer fortschreitenden Entwickelung ist. Fortlaufend werden gesetzmäßige Beziehungen zwischen den verschiedenartigsten Erscheinungen, welche früher zu verschiedenen Abschnitten der Physik gehörten, entdeckt. Hierdurch werden die Grenzen zwischen den einzelnen Abschnitten weggeräumt, die bisweilen so vollkommen ineinander fließen, daß aus mehreren Abschnitten ein einziger sich bildet; in anderen Fällen werden diese Grenzen undeutlich oder es erscheinen neue Zwischenabschnitte, die auf dem Grenzgebiete zweier Hauptabschnitte liegen. Die Verwickeltheit mancher Erscheinungen, welche sich uns als aus einer Gesamtheit mehrerer Erscheinungen bestehend darstellen, erschwert ebenfalls ihre Einordnung nicht wenig.

Bisweilen teilt man die Physik in zwei Teile: die Experimentalphysik und die theoretische Physik; der ersten weist man hauptsächlich das wissenschaftliche Material zu, welches durch den Versuch erlangt werden kann; zur letzteren rechnet man größtenteils alles, was sich auf deduktivem Wege aus der Erscheinung ableiten läßt; hierbei gründet sich die Deduktion auf eine bestimmte Hypothese und auf festgestellte gesetzmäßige Beziehungen oder nur auf die letzteren. Die theoretische Physik löst, indem sie die Notwendigkeit der beobachteten Erscheinungen als Folgen des Erkannten oder Angenommenen dartut, wiederum durch Deduktion die Frage nach der Form, die eine Erscheinung unter Umständen, unter denen sie noch nicht beobachtet war, annehmen muß — mit anderen Worten, sie sagt eine Erscheinung voraus. Indes ist es vollkommen unmöglich, eine auch nur einigermaßen folgerichtige Teilung der Physik in einen experimentellen und theoretischen Teil durchzuführen, denn bei jeder Gruppe von physikalischen Erscheinungen müssen Versuch und Theorie immer Hand in Hand gehen. Die Theorie setzt uns in den Stand, die beobachteten Erscheinungen zu vereinen, untereinander zu verbinden, und gibt uns, was besonders wichtig ist, die Möglichkeit, die Wege, genauer gesagt, die Versuche ausfindig zu machen, welche zur Prüfung der Hypothesen, d. h. zur Vermehrung oder Verminderung ihres Wahrscheinlichkeitsgrades dienen können. Im weiteren Sinne des Wortes kann die Theorie, während sie ihren deduktiven Charakter beibehält, auch ihres wichtigsten Werkzeuges, der Mathematik, entraten; Faraday war kein Mathematiker und dennoch muß man ihn für den größten Theoretiker halten. Gegenwärtig ist jedoch die Rolle der mathematischen Analyse in der theoretischen Physik von hervorragender Bedeutung geworden, und ohne sie ist ein Fortschritt der Physik in vielen wichtigen Abschnitten wohl schwer denkbar. Wenn die Versuche allein und ohne theoretische Verarbeitung nur in seltenen Fällen mehr geben können als rohe, unzusammenhängende Bausteine, so kann auch die „theoretische Physik" allein, wenn nicht allseitig von Versuchen umgeben, von denen sie ja ausgeht und durch die ihre Ergebnisse nachgeprüft werden, niemals den Nährboden für eine zweckentsprechende Weiterentwickelung der Wissenschaft bilden. Eine solche Theorie ist ohne Grundstein; sie kann zwar viel Anziehendes besitzen, aber sie ist dafür auch gefährlich, denn die gewaltige, zu ihrem Aufbau verwendete Mühe und Arbeit kann durch einen einzigen nachträglich angestellten Versuch völlig verloren gehen, wenn er die Nichtübereinstimmung auch nur einer Folgerung aus dieser Theorie mit der Wirklichkeit beweist. Und solche Fälle hat es in der Geschichte der Physik gegeben: umfangreiche theoretische Untersuchungen vieler Gelehrten haben jeglichen Wert für die Wissenschaft verloren, sind vor einer unerbittlichen, durch das Experiment entdeckten Tatsache zusammengestürzt (wie z. B. die alte Emanationstheorie des Lichtes). Experiment und Theorie müssen vereint die physikalischen Untersuchungen bilden, und deshalb trifft die Einteilung der Physik in einen experimentellen und einen theoretischen Teil in der Praxis auf unüberwindliche Schwierigkeiten.

Trotzdem läßt sich aus der Physik ein Teil aussondern, welcher dadurch gekennzeichnet ist, daß in ihm die Fragen, so verschiedenartig sie auch sein mögen, auf eine besondere Weise gestellt und beantwortet werden. Wir meinen die sogenannte mathematische Physik; sie unterscheidet sich sehr wesentlich von der theoretischen Physik. Die mathematische Physik geht von irgendeiner durch den Versuch völlig erhärteten Tatsache aus, welche irgendeinen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den Erscheinungen ausdrückt. Diesen Zusammenhang kleidet sie in mathematisches Gewand und verwandelt sich sodann gewissermaßen in die reine Mathematik, indem sie ausschließlich mit Hilfe der mathematischen Analyse die aus den grundlegenden Sätzen hervorgehenden Folgerungen untersucht. Da die mathematische Physik von experimentell festgestellten Tatsachen ausgeht, enthält sie nichts Hypothetisches, und ihre Schlußfolgerungen sind deshalb unvergänglich. Die einzelnen Gebiete der theoretischen Physik können, da sie sich auf Hypothesen stützen, zugrunde gehen; die Gebiete der mathematischen Physik bleiben unerschütterlich fest bestehen, denn ihnen dient als Grundstein die Tatsache, welche als solche bestehen bleibt, wie sich auch im Laufe der Zeit die wissenschaftliche Anschauung von ihrem tieferen Wesen ändern mag. Zur mathematischen Physik gehören die mathematischen Abschnitte der Lehren von der Wärmeleitung, von der Elastizität, von der Elektrizität (die Potentialtheorie und verschiedene Anwendungen derselben), vom Magnetismus (Wechselwirkung und

Induktion), vom elektrischen Strome usw. Die einzelnen Teile der mathematischen Physik haben mit der Physik als der Lehre von den Erscheinungen nur wenig Berührungspunkte gemein; diese Berührungspunkte dienen ihnen nur als unerschütterliche Stützpunkte. Die mathematische Physik gehört eher zur Mathematik als zur Physik.

Über den Nutzen der mathematischen Physik gehen die Ansichten weit auseinander. Ihre Bedeutung wurde vielfach überschätzt; es gab nicht wenige Forscher, welche glaubten, daß nur die Methoden der mathematischen Physik zu einem wirklichen Fortschritt der eigentlichen Physik führen könnten. Aber diese Ansicht ist falsch: nicht die mathematische, sondern die theoretische Physik hat der Wissenschaft unendliche Dienste geleistet, trotzdem sie stets auf dem unsicheren Boden mehr oder weniger vergänglicher Hypothesen aufgebaut wurde.

Der Nutzen, den die mathematische Physik hätte bringen können, ist durch den Umstand verringert worden, daß ihre Ausgangspunkte zwar völlig richtig, aber stets nur in so engen Grenzen gültig sind, daß sie der realen Erscheinungswelt als ideale, praktisch unerreichbare Grenzfälle gegenüberstehen. Die Resultate, zu denen die Rechnungen der mathematischen Physik führen, können daher ebenfalls stets nur angenähert mit dem übereinstimmen, was die direkte Beobachtung ergibt. So geht die mathematische Theorie der Wärmeleitung von der Annahme aus, daß der Wärmeverlust an der Oberfläche eines Körpers proportional sei der Differenz der Temperaturen dieser Oberfläche und des umgebenden Raumes, was nur bei geringen Werten dieser Differenz angenähert richtig ist. Außerdem setzt die Theorie fast immer voraus, daß der Körper homogen sei und daß die Wärmeleitungsfähigkeit und die Wärmekapazität unabhängig von der Temperatur seien, was wohl niemals in aller Strenge der Fall ist. Es würde nicht schwer sein zu zeigen, daß ähnliche Vereinfachungen allen Teilen der mathematischen Physik zugrunde liegen, z. B. der Theorie der Elastizität, der Hydrodynamik, der Elektrostatik, der Elektrodynamik, der Theorie des Magnetismus usw.

Als die verschiedenen physikalischen Messungsmethoden noch nicht den gegenwärtigen Genauigkeitsgrad erreicht hatten, konnten die Formeln der mathematischen Physik benutzt werden, um gewisse Größen, die man nicht direkt messen konnte, deren Wert man aber trotzdem zu bestimmen wünschte, zu berechnen. In dem Maße aber, als sich die Messungsmethoden verfeinerten und entsprechend eine genauere Kenntnis jener Größen angestrebt wurde, sank die Bedeutung der Formeln der mathematischen Physik, und es mußten neue Wege gesucht werden, um jene Größen zu finden, ohne diese Formeln zu benutzen. Ein vorzügliches Beispiel für diesen Entwickelungsgang bietet die Theorie der Wärmeleitung. Als es sich um grobe Messungen, um ungefähre Vergleiche handelte, spielten die Formeln der Wärmeleitungstheorie eine große Rolle. In der letzten Zeit aber sah man sich genötigt, die Benutzung derselben aufzugeben und neue Untersuchungsmethoden zu ersinnen, bei welchen diese Formeln keine Rolle spielen.

Es gibt noch zwei Ursachen, durch welche die Bedeutung der mathematischen Physik herabgesetzt wird. Erstens ist sie imstande, relativ nur sehr einfache Aufgaben zu lösen, besonders was die Form der Körper betrifft, auf welche sich die betreffenden Probleme beziehen. In der praktischen Physik ist es aber nicht immer möglich, sich mit jenen einfachen Fällen zu begnügen, und man trifft infolgedessen beständig auf Aufgaben, bei deren Lösung die Methoden der mathematischen Physik versagen.

Zweitens sind die endgültigen Formeln der mathematischen Physik selbst bei sehr einfachen Problemen oft so außerordentlich verwickelt, daß ihre Benutzung praktisch unmöglich wird.

So verringert sich beständig die Bedeutung der rein mathematischen Physik. Der theoretischen Physik, die in der Vergangenheit Großes geleistet hat, gehört auch die Zukunft.

In früherer Zeit hat man häufig die Physik in eine Physik der Materie und eine Physik des Äthers geteilt. Dies geschah besonders zu jener Zeit, als man alle Erscheinungen der strahlenden Energie (Band II), der Elektrizität und des Magnetismus glaubte auf Vorgänge im Äther (§ 4) zurückführen zu können. Aber selbst damals war eine solche Einteilung wohl kaum zweckmäßig, da es unmöglich war, genau zu bestimmen, bei welchen Erscheinungen, selbst nach den damaligen Anschauungen, der Äther keine Rolle spielte. Zu wenig beachtet wurde, daß fast bei allen Vorgängen, an denen der Äther teilnehmen sollte, auch die gewöhnliche Materie mitwirkt, so daß eigentlich kein Grund vorlag, diese Vorgänge in einer besonderen „Physik des Äthers" zu betrachten. Es gab nur einen einzigen Vorgang, der ausschließlich dem Äther zugeschrieben wurde, nämlich die Ausbreitung strahlender Energie im sogenannten leeren Raume. Andererseits konnte man nicht sicher sein, daß bei den Erscheinungen, die man in der Physik der Materie betrachtete, der Äther wirklich gar keine Rolle spiele. Hätte es sich herausgestellt, daß der Äther bei diesen Erscheinungen mitwirkt, so hätte man sie aus der Physik der Materie konsequenterweise in die Physik des Äthers herübernehmen müssen, und als Endresultat wäre die Physik der Materie vielleicht gänzlich verschwunden.

Aber es ist, wie wir in § 4 sahen, ganz anders gekommen! Durch die Lehre von den Elektronen ist ein ganz neues grundlegendes Element in die Physik hineingelangt, die Materie wurde „elektrisiert", und der Äther scheint auf dem Wege zu sein, gänzlich aus der Wissenschaft zu verschwinden. Gegenwärtig (1917) darf man wohl kaum noch von einer besonderen Physik des Äthers sprechen.

Jede Einteilung der Physik, die auf bestimmten hypothetischen Vorstellungen beruht, ist unzweckmäßig, da die Hypothesen häufigen und oft tiefgreifenden Änderungen unterworfen sind, durch welche solche künstliche Einteilungen von selbst fallen. Es wäre daher ebenfalls gänzlich unzweckmäßig, wenn wir, dem augenblicklichen Zustande der Wissenschaft entsprechend, die Physik z. B. in eine Physik der Materie und eine Physik des Elektrons teilen würden.

§ 6. Physikalische Größen. Eine Größe wird das genannt, was man sich quantitativ veränderlich denken kann.

Das Studium der physikalischen Erscheinungen und der sie verknüpfenden gesetzmäßigen Beziehungen hat es notwendig gemacht, in die Wissenschaft die Vorstellungen von einer sehr großen Zahl verschiedenartiger Größen einzuführen, welche entweder die besonderen Eigenschaften dieses oder jenes Stoffes oder die Eigentümlichkeiten der Erscheinungen selbst kennzeichnen. Diese Größen werden wir physikalische Größen nennen.

Man hat die Größen, von denen jedermann einen Begriff oder eine gewisse feste Vorstellung zu eigen hat, streng von denen zu unterscheiden, die in die Wissenschaft neu eingeführt werden. Die Größen dieser ersten Art heißen ursprüngliche; sie können einer Definition nicht unterliegen, denn jede Definition kann und muß durch den Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der zu definierenden Größe und etwas schon Bekanntem, d. h. schon vorher einer Definition unterworfenen geschehen. Die Größen der ersten Art aber entsprechen ursprünglichen Begriffen, von denen man auszugehen hat; sie bedürfen auch keiner Definition, da ihre Bedeutung einem jeden a priori klar ist. Die Eigenschaften dieser Größen werden durch die Vorstellung bestimmt, welche von allen mit ihrer Nennung verbunden werden, und deshalb hat jedermann die Bedeutung dieser Eigenschaften in sich selbst zu suchen. Zu den Größen dieser Art gehören jedenfalls:

1. Die lineare, flächenhafte und räumliche Ausdehnung oder genauer: die Länge einer Geraden, der Inhalt einer geradlinig begrenzten ebenen Fläche und das Volumen eines von Ebenen begrenzten Raumteiles. Die Länge einer krummen Linie entspricht schon einem nicht ursprünglichen Begriffe und bedarf daher der Definition.
2. Die Zeit.
3. Der Druck (im Sinne einer Muskelempfindung).
4. Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Wir lassen die Frage nach der Vollständigkeit oder Unvollständigkeit dieser Aufzählung unerörtert. Größen, von denen nicht jedermann einen bereits fertigen Begriff hat, bedürfen, wenn wir sie in die Wissenschaft einführen, einer Definition, und man hat mit der größten Aufmerksamkeit darauf zu achten, daß diese Definition so genau wie möglich sei; sie muß derart sein, daß jede Möglichkeit eines Mißverständnisses und jede Zweideutigkeit ausgeschlossen ist. Die Definition muß sich daher durch Vollständigkeit auszeichnen, d. h. in ihr muß alles das enthalten sein, was als unterscheidendes Merkmal der zu definierenden Größe dienen kann.

Nachdem die Definition der betreffenden Größe gegeben ist, hat man sich aufs strengste davor zu hüten, daß man ihr keine neuen Eigenschaften beilegt, welche aus der Definition selbst nicht folgen. Besonders leicht können Fehler dieser Art vorkommen, wenn mit der unglücklich gewählten Bezeichnung für die Größe unwillkürlich die Vorstellung von dieser oder jener Eigenschaft sich verbindet.

Größen, welche ein und derselben Definition entsprechen und sich nur qualitativ voneinander unterscheiden, heißen gleichartige Größen. Solche Größen können miteinander verglichen werden, oder, wie man sich sonst noch ausdrückt, sie können gemessen werden. Eine Größe messen heißt bestimmen, wievielmal in ihr eine gewählte Größe derselben Art enthalten ist; diese wird dann als Einheit dieser Art Größe (Einheit des Gewichtes, Einheit des Widerstandes usw.) bezeichnet. Von der Wahl der Maßeinheiten wird weiter unten ausführlich die Rede sein; es sei hier nur bemerkt, daß man danach strebt, für jede Art von Größe eine bestimmte Einheit mit ihren nach dem Dezimalsystem geteilten Vielfachen und Unterabteilungen festzusetzen und international zu verbreiten. Zwei Größen können miteinander nach zwei Methoden verglichen werden: entweder wird eine jede von ihnen einzeln durch die festgesetzte Einheit gemessen, und es werden sodann die erhaltenen zahlenmäßigen Resultate verglichen, oder es werden zwei Größen unmittelbar miteinander verglichen, wobei dann tatsächlich die eine von ihnen, wenn auch nur vorübergehend, die Rolle einer Maßeinheit spielt.

Es gibt kein Gesetz, das vorschreibt, welche Einheit man für eine bestimmte Größenart wählen soll; wir können daher jede beliebige Größe der gegebenen Art als Einheit annehmen. Wir werden indes später sehen, daß man sich gegenwärtig aus verschiedenen Gründen von einer Willkür bei Wahl dieser Einheiten losgesagt hat. Man hat sich nämlich dahin geeinigt, sie auf Grund einer bestimmten Regel auszuwählen, welche uns in den Stand setzt, die Einheiten aller in der Physik vorkommenden Größen miteinander zu einem harmonischen Ganzen, dem System der Einheiten, zu verbinden.

Die Messung einer physikalischen Größe bedeutet demnach die Vergleichung einer gegebenen Größe mit der festgesetzten Einheit oder die unmittelbare Vergleichung zweier gegebenen Größen miteinander. Hierzu dienen besondere Instrumente und zu dem bestimmten Zwecke erdachte und ausgearbeitete Verfahren. Die Genauigkeit des bei der Messung erhaltenen Ergebnisses hängt von den verschiedenen, bisweilen recht individuellen Eigenschaften der Meßinstrumente, des Meßverfahrens und von Geschick und Übung des die Messung Ausführenden ab.

Als Ergebnis der vorgenommenen Messung erhält man eine Zahl, welche angibt, wievielmal die gewählte Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Diese Zahl heißt der Zahlenwert der gemessenen physikalischen Größe. Wenn man die gesetzmäßige Abhängigkeit der Erscheinungen zu untersuchen und auszudrücken hat, ersetzt man gewöhnlich die arithmetische Methode durch die algebraische, indem man den Zahlenwert der Größe durch einen Buchstaben bezeichnet. Man muß aber wohl beachten, daß diese Buchstaben nicht die Größen selbst, sondern ausschließlich ihre Zahlenwerte darstellen. Vergißt man dies, so kann man zu ganz falschen Resultaten gelangen; hierbei rührt die Möglichkeit fehlerhafter Vorstellungen daher, daß man jenen Buchstaben die Benennungen der Größen selbst beilegt. Man sagt z. B. die Länge l, die Wärmemenge q, die Stromstärke i, während doch l nicht die Länge, q nicht die Wärmemenge und i nicht die Stromstärke selbst bedeuten; l, q und i sind bloß Zahlen, welche angeben, wieviel Einheiten der Länge, Wärme und Stromstärke in der betrachteten Länge, Wärmemenge und Stromstärke enthalten sind.

Der Zahlenwert einer jeden Größe ist der Größe der gewählten Einheit umgekehrt proportional. Denn wird die Einheit $n$mal größer, so wird die Zahl, welche angibt, wievielmal die gegebene Größe diese Einheit enthält, $n$mal kleiner. Daß jene Buchstaben, von denen oben die Rede war, z. B. die angeführten Buchstaben l, q und i, nicht die physikalischen Größen selbst, sondern bloß ihre Zahlenwerte bezeichnen, ergibt sich daraus, daß ihr Wert sich zugleich mit der Wahl der Einheit ändert; wenn man dagegen unter q eine physikalische Größe selbst, die in jedem Einzelfalle gegeben und offenbar von der Wahl der Maßeinheit unabhängig ist, sich gedacht hätte, so würde auch der Wert des Buchstaben q sich nicht zugleich mit dieser Einheit ändern.

Im folgenden werden wir bisweilen Größen begegnen, deren Zahlenwert in jedem Sonderfalle nicht von der Wahl irgendwelcher Maßeinheiten abhängt; man nennt sie abstrakte oder (weniger zutreffend) absolute Zahlen und bezeichnet sie gewöhnlich ebenfalls durch Buchstaben. Es läßt sich aber stets beweisen, daß die Größe, die wir hier im Auge haben, nur scheinbar eine absolute Zahl darstellt; sie ist vielmehr eine physikalische Größe, für welche die Einheit ein für allemal festgesetzt ist. Betrachten wir das folgende Beispiel. Aus der elementaren Physik ist es bekannt, daß man unter dem Brechungsquotienten eines Stoffes das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels eines Strahles zum Sinus des Brechungswinkels beim Übergang aus dem Vakuum (d. h. aus dem Äther) in jenen Stoff versteht. Durch diese Definition erhält der Brechungsquotient n das Kennzeichen einer unbenannten Zahl (als Verhältnis zweier unbenannten Zahlen) und kommt ihm eine Einheit, von deren Wahl sein Zahlenwert abhängen könnte, nicht zu. Indes ist zu beachten, daß die Wahl des Vakuums als Bezugsstoff willkürlich ist; die Zahlenwerte aller Größen n ändern sich aber, sobald man sie nicht auf den Übergang aus dem Vakuum, sondern etwa aus der Luft oder einem anderen Stoff bezieht. Die Unveränderlichkeit der Zahlenwerte für den Brechungsquotienten ist daher keine absolute. Man kann sogar noch weiter gehen und folgende Betrachtung anstellen: Die Materie hat unter anderem die Fähigkeit, auf den sich in ihr fortpflanzenden Lichtstrahl einzuwirken. Diese Eigenschaft wird ähnlich vielen anderen durch eine gewisse physikalische Größe dargestellt, welche für die verschiedenen Stoffe quantitativ verschieden ist. Wenn man nun diese Größe für den Äther (siehe § 4) als Einheit annimmt, so findet man, daß ihr Zahlenwert für die verschiedenen Stoffe gleich dem Verhältnis der erwähnten beiden Sinusse wird. Mit Hilfe der Theorie können wir diese Größe noch genauer bestimmen. Sie ist nämlich die Langsamkeit (der reziproke Wert der Schnelligkeit) der Lichtausbreitung im gegebenen Stoffe, und ihr Zahlenwert hängt folglich jedesmal von der Wahl des Stoffes ab, für welchen diese Langsamkeit als Einheit angenommen wurde. Nur in dem Falle, wo man die „Langsamkeit" im Äther als Einheit festlegt, erhält man für ihren Zahlenwert in einem anderen Medium das Sinusverhältnis. Sicherlich werden diese Darlegungen manchem gekünstelt erscheinen, aber sie beweisen unzweideutig, daß der Brechungsquotient keine absolute Zahl ist. Als physikalische Größen dürfen die absoluten Zahlen nur dann benutzt werden, wenn dies zur Vereinfachung dient. Ist dies der Fall, so soll man sie unbedenklich anwenden, aber keinesfalls darf man sie unnötigerweise einführen, wenn der allgemeinere Größenbegriff da, wo der Zahlenwert von der gewählten Einheit abhängt, unmittelbar aus den beobachteten Erscheinungen sich ergibt. So darf man auch die vollkommen überflüssige Zweiteilung einer nach ihrer innerlichen Bedeutung einheitlichen physikalischen Größe in zwei, von welchen die eine als benannte, die andere als unbenannte Zahl aufgefaßt wird, nicht gutheißen. Als auf ein Beispiel sei hier auf die Dichte und das spezifische Gewicht hingewiesen. Man sagt bisweilen, die Dichte ist das Gewicht oder ist die Masse der Volumeneinheit, das spezifische Gewicht aber ist eine unbenannte Zahl, welche gleich dem Verhältnis von Gewicht oder Masse eines Stoffes zu Gewicht oder Masse des Wassers ist usw. Alles dies ist nicht nur vollkommen überflüssig, sondern beruht auch auf einer fehlerhaften Ansicht über das Wesen der physikalischen Formeln, wovon im folgenden Paragraphen ausführlich gesprochen werden soll. Die Dichte ist weder ein Gewicht noch eine Masse. Auch liegt kein zwingender Grund vor, den Begriff des spezifischen Gewichtes als einer abstrakten Zahl einzuführen. Die Sache verhält sich in Wirklichkeit vielmehr folgendermaßen: Um gewisse Eigenschaften eines gegebenen Stoffes zu beschreiben, kann man eine besondere Art von Größe einführen, die für ihn bezeichnend ist; man kann sie willkürlich benennen, wir wollen ihr den Namen Dichte beilegen. Diese Größe ist selbstverständlich eine Größe eigener Art (sui generis) und kann schon deshalb weder eine Masse, noch auch ein Gewicht sein, denn diese sind physikalische Größen anderer Art. Wie eine jede physikalische Größe hat auch sie ihre besondere Einheit, die willkürlich gewählt sein kann, die aber dennoch nichts anderes sein kann als wiederum eine Dichte. Dem Zahlenwerte dieser Größe bei bestimmter Wahl der Einheit (die Dichte des Wassers wird als Einheit der Dichte angenommen) eine besondere Benennung beizulegen, ist vollkommen überflüssig und bringt nur eine Verwirrung der Begriffe hervor (siehe auch § 7 und Kap. II, § 4).

Im § 1 war gesagt worden, daß Raum und Zeit den doppelten Hintergrund bilden, vor welchem sich die von uns empfangenen Eindrücke vergegenständlichen, und zu Beginn des § 6 waren Raumausdehnung, Zeit und Druck als ursprüngliche Vorstellungen bezeichnet worden, welche keiner Definition bedürfen und daher auch nicht definiert werden können. Der Begriff des Druckes wird aus der subjektiven Empfindung der Kraftanstrengung gewonnen, welche nötig ist, um einem äußeren Druck das Gleichgewicht zu halten; eine Definition seines Wesens ist nicht möglich. Die Messung von Längen, Zeiten und Drucke ist eine der wichtigsten Aufgaben der Physik, und es ist daher angebracht, schon hier einige Worte über die Einheiten mitzuteilen, durch welche diese drei Größen jetzt vorzugsweise gemessen werden.

Als Einheit der Länge dient das Meter, dieses ist gleich der Länge eines am Ende des 18. Jahrhunderts angefertigten und zu Paris aufbewahrten Stabes bei 0°. Es weist einen merklichen Unterschied gegen den zehnmillionten Teil des Pariser Meridianquadranten auf, welcher ursprünglich als Meter definiert wurde. Das internationale Komitee der Maße und Gewichte nahm am 2. Oktober 1879 eine Reihe abgekürzter Bezeichnungen für die verschiedenen Längeneinheiten an. Für das Meter wurde das Zeichen m festgesetzt. Tausend Meter heißen Kilometer (km); das Meter wird in zehn Dezimeter (dm), hundert Zentimeter (cm) und tausend Millimeter (mm) geteilt; der tausendste Teil eines Millimeters heißt Mikron (μ); der millionte Teil eines Millimeters wird durch das Zeichen $\mu\mu$ bezeichnet. Die Einheiten der Länge werden auch lineare Einheiten genannt. Als Einheit der Oberfläche oder des Flächeninhalts gilt die Größe eines Quadrats, dessen Seite der linearen Einheit gleichkommt. Die Einheit des Raummaßes oder des Volumens ist das Volumen eines Würfels, dessen Kanten gleich der linearen Einheit sind; das Kubikdezimeter kann in den meisten Fällen auch als Liter bezeichnet werden; eine genauere Definition wird weiter unten gegeben werden.

Als Einheit der Zeit müssen wir, wenn wir streng wissenschaftlich verfahren wollen, die Zeit annehmen, in der eine bestimmte Erscheinung zustande kommt; zweckmäßig wählt man letztere derart, daß sie sich unter völlig gleichen Umständen, d. h. ohne jegliche Veränderung der sie verursachenden Erscheinungsgruppe, eine unbestimmte Anzahl Male wiederholen kann. Diesen Bedingungen genügt die Schwingung eines beliebigen Pendels; die Zeit einer Schwingung kann daher als Einheit der Zeit angesehen werden. Wenn man sich nun dieser Einheit bedient, so zeigt der Versuch, daß die Erde sich um ihre Achse gleichförmig dreht, und dieses gibt uns sodann die wissenschaftliche Grundlage und das Recht dazu, als Zeiteinheit die Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse anzunehmen bzw. ein hierzu in einfacher Beziehung stehendes Zeitintervall. Es ist das der sogenannte mittlere Sonnentag, welcher in 24 Stunden, $24 \times 60 = 1440$ Minuten und $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ Sekunden zerfällt. Historisch ist bei der Wahl der Zeiteinheit der umgekehrte Weg verfolgt worden.

Ausgehend von der subjektiven Vorstellung vom Drucke überzeugt man sich davon, daß auf der Erdoberfläche jeder ruhende Körper auf seine Unterlage einen Druck ausübt. Dieser Druck heißt das Gewicht des Körpers; da dieses nur einen Einzelfall des Druckes darstellt, so müssen beide die gleiche Einheit besitzen. Man ist übereingekommen, daß das Gewicht, d. h. der Druck, welchen in Paris ein ganz bestimmter Körper auf seine Unterlage im luftleeren Raume ausübt, die Einheit des Druckes und Gewichtes sein soll. Derselbe wurde zu Ende des achtzehnten Jahrhunderts aus Platin verfertigt und wird in Paris aufbewahrt. Diese Einheit des Gewichtes und Druckes heißt Kilogramm. Ein Kubikdezimeter reinen Wassers bei 4^0 C hat ein Gewicht von nahezu einem Kilogramm. Das Volumen eines Kilogramms reinen Wassers von 4^0 C gilt gegenwärtig als genaue Definition eines Liters. Das Kilogramm wird bezeichnet mit kg; es wird in 1000 Gramm (g) geteilt; das Gramm ist gleich 10 Dezigramm (dg), 100 Zentigramm (cg) und 1000 Milligramm (mg). Aus dem Vorhergehenden folgt, daß das Gewicht eines Kubikzentimeters reinen Wassers von 4^0 C nahezu einem Gramm gleichkommt, und daß ein Liter nahezu gleich einem Kubikdezimeter ist.

Grammolekül heißt die Menge eines Stoffes, deren Gewicht gleich soviel Grammen ist, als Einheiten in dem Molekulargewicht der Substanz enthalten sind. So ist z. B. das Grammolekül des Wassers gleich 18 Gramm Wasser, das Grammolekül des Sauerstoffs gleich 32 Gramm Sauerstoff usw.

Zum Unterschiede von anderen Einheiten werden wir im weiteren die eben betrachteten Einheiten bisweilen als die französischen bezeichnen.

§ 7. Physikalische Gesetze. Das Aufsuchen eines gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen verschiedenen physikalischen Erscheinungen führt zur Entdeckung der physikalischen Gesetze. Durch diese wird die nähere Art des Zusammenhanges der verschiedenen physikalischen Größen untereinander nach der qualitativen oder quantitativen Seite festgestellt. Die physikalischen Gesetze handeln fast ausschließlich von den quantitativen Beziehungen, d. h. durch sie wird festgelegt, auf welche Art sich eine Größe quantitativ verändert, falls eine andere, mit ihr gesetzmäßig zusammenhängende Größe um einen bestimmten Betrag größer oder kleiner wird.

Die Zahl der physikalischen Gesetze, welche nur die qualitative Seite der Erscheinungen behandeln, ist verhältnismäßig gering. Ihre Bedeutung ist auch nicht groß, da sie nur die äußeren Kennzeichen der Erscheinungen behandeln und immer verborgen ein noch nicht entdecktes quantitatives Gesetz enthalten. Nicht selten mißbraucht man auch den Ausdruck „Gesetz“, indem man dies Wort anwendet, wo es richtiger wäre, von einer Regel zu sprechen.

Ein physikalisches Gesetz wird auf folgende Weise entdeckt und geprüft. Bezeichnen wir symbolisch durch A und B zwei physikalische Größen (hier sind nicht etwa ihre Zahlenwerte gemeint), dann wird das Gesetz mathematisch als Abhängigkeit zwischen den Zahlenwerten a und b der Größen A und B ausgedrückt. Um diesen Zusammenhang zu entdecken, muß man den Versuch oder die Beobachtung so einrichten, daß die Größe A eine Reihe quantitativ verschiedener Werte annehmen kann, infolgedessen sich auch die Größe B quantitativ ändern wird. Hierbei müssen sich die Größen A und B jedesmal messen lassen, d. h. es muß möglich sein, ihre Zahlenwerte zu bestimmen, wobei für die eine wie für die andere Größe bestimmte Einheiten gewählt sein müssen.

Als unmittelbares Resultat der Versuche und Beobachtungen ergeben sich alsdann zwei Reihen von Zahlen, welche die Zahlenwerte dieser beiden physikalischen Größen sind und die, wie wir sahen, von der Wahl der Maßeinheiten abhängen. Die Zahlen beider Reihen sind natürlich zusammengehörig, einer jeden Zahl a der einen Reihe entspricht eine Zahl b der anderen. Das gesuchte Gesetz sagt nun aus, daß alle Zahlen a aus den Zahlen b mit Hilfe ein und derselben arithmetischen Operation erhalten werden können, indem man letztere in denselben algebraischen, b enthaltenden Ausdruck einsetzt. Symbolisch wird dies durch die Gleichung $a = f(b)$ ausgedrückt, d. h. a ist irgend eine Funktion von b. Hierbei muß man aber zwei eine sehr wichtige Rolle spielende Umstände beachten.

Erstens kann kein Versuch, keine Beobachtung uns die gesuchten Zahlenwerte a und b mit völliger Genauigkeit geben. Dies wird im dritten Abschnitte genauer betrachtet werden. Die unvermeidlichen sogenannten „Beobachtungsfehler“ liefern im Resultat ungenaue Werte der Zahlen a und b, welche im allgemeinen dem zuvor erwähnten Ausdrucke nicht genügen. Beide Seiten des Ausdruckes sind niemals einander genau gleich. Es ist hierbei Sache des Beobachters, durch kritische Untersuchung der Messungsergebnisse zu entscheiden, ob die auftretenden Abweichungen sich durch wirkliche Beobachtungsfehler erklären lassen oder ob die hypothetisch angenommene Gesetzmäßigkeit $a = f(b)$ versagt.

Zweitens ist in den Zahlen a und b selbst etwas Willkürliches enthalten infolge der willkürlichen Wahl der Größeneinheiten für A und B. Wenn wir andere Einheiten genommen hätten, so würden die Zahlen beider Reihen mit ein und demselben konstanten Faktor multipliziert auftreten, und zwar wäre dieser Faktor gleich dem Verhältnis der früheren Größeneinheit zur neuen. Äußerlich gibt sich dieses Willkürliche darin zu erkennen, daß in dem Ausdrucke, welcher b enthält und der gleich a sein soll, ein oder mehrere Zahlen enthalten sind, deren spezieller Wert, d. h. deren Größe nicht bezeichnend für das physikalische Gesetz selbst ist, sondern von der Wahl der Einheiten für A und B abhängt. Diese Zahlen heißen allgemein Koeffizienten. Einer von ihnen kann immer als Faktor, welcher allen Gliedern des Ausdruckes $f(b)$ gemein ist, angesehen werden. Er heißt der Proportionalitätsfaktor; sein Wert hängt jedenfalls von der gewählten Einheit für die Größe A ab. Verallgemeinernd kann man sagen:

In den Ausdrücken für physikalische Gesetzmäßigkeiten, $a = f(b)$, müssen Koeffizienten enthalten sein, deren Zahlenwerte für die Form des Gesetzes nicht bezeichnend sind, und welche von der Wahl der Einheiten abhängen, mit denen wir die im Gesetze erwähnten physikalischen Größen messen.

Bisweilen sagt man, der Proportionalitätsfaktor selbst habe eine bestimmte physikalische Bedeutung, indem er den Zahlenwert irgendeiner bestimmten neuen physikalischen Größe darstellt. Das ist unrichtig. In allen Fällen, wo sich scheinbar etwas Ähnliches zeigt, beruht dies darauf, daß das von uns ursprünglich aufgestellte Gesetz nicht alle Seiten der Erscheinungen umfaßt, daß also die Größe A nicht nur von der Größe B, sondern noch von den Größen C, D usw. abhängt. Wenn man allen diesen Abhängigkeiten auf den Grund geht, so erweist es sich jedesmal, daß der Proportionalitätsfaktor eine Zahl und nur eine Zahl ist und nicht als Zahlenwert irgendeiner physikalischen Größe angesehen werden kann.

Wir wollen an einem Beispiele erläutern, wie man ein physikalisches Gesetz auffindet und in eine Formel bringt.

Aus der elementaren Physik ist bekannt, eine wie wichtige Rolle die physikalische Größe spielt, welche man Stromstärke nennt, und daß es Methoden gibt, sie zu messen, wobei eine gewisse bestimmte Stromstärke als Einheit angenommen wird. Die Beobachtungen zeigen, daß im Leitungsdrahte, durch welchen der Strom fließt, sich Wärme entwickelt, welche, wie jede Größe, durch ihre eigene, übrigens willkürliche Einheit gemessen wird. Aus den Versuchen geht ferner hervor, daß die im Drahte entwickelte Wärmemenge abhängt von der Stromstärke und der Zeitdauer, innerhalb welcher die Erscheinung des Stromes andauert; außerdem hängt sie auch noch vom sogenannten Widerstande des Drahtes ab, einer Größe, welche man ebenfalls durch eine besondere Einheit des Widerstandes mißt. Um einen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der Erscheinung der Wärmeentwickelung im Drahte und der Erscheinung des elektrischen Stromes zu finden, muß man somit drei Gesetze aufsuchen, welche die Abhängigkeit der Wärmemenge Q von der Stromstärke J, dem Widerstande W und der Zeit T (der Stromdauer) ausdrücken. Hierzu hat man drei Doppelreihen von Messungen auszuführen.

Zunächst bestimmt man die Zahlenwerte q und i für die Wärmemenge und Stromstärke, während Stromdauer und Widerstand ungeändert bleiben; hierzu muß man durch ein und denselben Draht während der gleichen Zeit Ströme von verschiedener Stärke senden und jedesmal die Zahlen q und i bestimmen. Betrachtet man sodann die beiden erhaltenen Zahlenreihen, so überzeugt man sich, daß alle die Zahlen q erhalten werden durch Multiplikation des Quadrats vom zugehörigen i mit ein und demselben Faktor, welcher mit C_1 bezeichnet werde; somit findet man, daß $q = C_1 i^2$ ist. Es ist klar, daß man einen anderen Wert für den Koeffizienten C_1 erhalten hätte, falls man die Größen Q und J durch andere Einheiten gemessen hätte — in diesem Falle hätten sich für q und i lauter andere Zahlen ergeben. Wenn man, ohne die Einheiten der Größen Q und J zu ändern, einen anderen Draht gewählt oder die Stromdauer geändert hätte, so hätte man ebenfalls ein anderes C_1 erhalten. Hierdurch wird erwiesen, daß Q nicht nur von J abhängt, sondern noch von anderen Umständen, und daß durch die Formel $q = C_1 i^2$ der gesetzmäßige Zusammenhang, der sich in der untersuchten Erscheinung kundgibt, nicht allseitig wiedergegeben ist.

Ändert man den Draht bei unveränderter Stromstärke und -dauer und mißt man dabei jedesmal den Widerstand W und die Wärmemenge Q, so erhält man abermals zwei Reihen von Zahlen w und q. Dabei ergibt sich, daß die Zahlen q durch Multiplikation der entsprechenden w mit ein und derselben Zahl, welche wir mit C_2 bezeichnen, gewonnen werden. Dies gibt uns die Formel $q = C_2 w$; die Zahl C_2 hängt von den Einheiten ab, durch welche die Wärmemenge und der Widerstand gemessen werden. Wenn man endlich die Stromstärke und den Widerstand des Drahtes ungeändert läßt und die Zeit t und die Wärmemenge mißt, so erhält man die dritte Beziehung $q = C_3 t$.

Aus den drei Versuchsreihen ergibt sich somit, daß der Zahlenwert q für die Wärmemenge sich proportional dem Quadrate des Zahlenwertes i für die Stromstärke, proportional dem Zahlenwerte w für den Widerstand und proportional dem Zahlenwerte t für die Zeit ändert. Hieraus folgt, daß q dem Produkt der Zahlen i^2, w und t proportional ist, d. h. wenn man die Größen J, W und T willkürlich ändert und jedesmal Q mißt, so erhält man sämtliche Zahlen q durch Multiplikation der Produkte $i^2 w t$ mit ein und derselben Zahl, die wir C nennen wollen. Dies wird durch folgende Formel wiedergegeben:

$$q = C i^2 w t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hier ist der Proportionalitätskoeffizient C eine Zahl, deren Wert bloß von der Wahl der Einheiten für die Wärmemenge, Stromstärke, Zeit und den Widerstand abhängt. Man darf es nicht vergessen, daß alle physikalischen Formeln, die der vorstehenden (1) ähnlich sind, den Zusammenhang zwischen Zahlenwerten verschiedener Größen ausdrücken, und daß daher die in den Formeln vorkommenden Buchstaben die Zeichen für Zahlen sind. Man hat dies um so mehr im Gedächtnis zu behalten, als es allgemein üblich ist, die physikalischen Gesetze verkürzt zu fassen, wobei man die Größen selbst nennt, anstatt von Zahlenwerten der Größen zu sprechen. Statt das Gesetz richtig auszudrücken, wie es oben geschehen ist, pflegt man es folgendermaßen auszusprechen: die Wärmemenge, welche im stromdurchflossenen Drahte entwickelt wird, ist proportional dem Quadrate der Stromstärke, proportional dem Drahtwiderstande und proportional der Stromdauer. Wir werden weiter unten sehen, zu welchen gefährlichen Folgen eine derartige verkürzte Fassung in Einzelfällen führen kann.

Der Proportionalitätskoeffizient hat stets mehrere (mindestens zwei) physikalische Bedeutungen. Um dies zu beweisen, beschränken wir uns auf ein Beispiel. Die Formel (1) zeigt, daß für $i = 1$, $w = 1$ und $t = 1$ die Zahl $q = C$ wird. Hieraus folgt, daß die Zahl C gleich der Anzahl Wärmeeinheiten ist, welche während der Zeiteinheit in einem Drahte entwickelt werden, dessen Widerstand gleich der Einheit ist und durch welchen (wie man es auszudrücken pflegt) die Einheit des Stromes fließt. Dieselbe Formel ergibt jedoch für $q = 1$, $i = 1$ und $t = 1$, daß C $1:w$ ist. In diesem Falle ist die Zahl C gleich der Zahl 1, dividiert durch die Zahl der Widerstandseinheiten des Drahtes, in welchem in der Zeiteinheit durch die Stromeinheit die Einheit der Wärmemenge entwickelt wird.

Setzt man $q = 1$, $i = 1$, $w = 1$, so folgt ferner, daß $C = \frac{1}{t}$ und für $q = 1$, $w = 1$, $t = 1$, daß $C = 1 : i^2$ ist. Hieraus ergeben sich noch zwei leicht zu formulierende Bedeutungen der Zahl C. Offensichtlich hängt also der Wert des Proportionalitätskoeffizienten C von der Wahl der Einheiten ab, durch welche die in den Formeln vorkommenden Größen gemessen werden. Bei unendlich mannigfaltigen Einheiten kann auch der Koeffizient C alle nur erdenklichen Zahlenwerte annehmen.

Wenn wir dem Proportionalitätskoeffizienten einen bestimmten, willkürlich gewählten Zahlenwert beilegen, so ist es nicht mehr möglich, die Einheiten aller in unserer Formel vorkommenden Größen willkürlich zu wählen. Eine dieser Größen wird hierdurch festgelegt, wobei wir es jedoch in der Hand haben, zu bestimmen, für welche von den Größen die Einheit nicht mehr wählbar bleiben soll. Die Einheit dieser Größe erweist sich dabei als eindeutig bestimmt; sie erscheint dann gewissermaßen von selbst im Zusammenhange mit den von uns gewählten übrigen Einheiten und dem Proportionalitätskoeffizienten. Nehmen wir beispielsweise an, wir machten den Koeffizienten C in der Formel (1) gleich fünf, so daß also $q = 5\,i^2 w t$ werde, und wählen wir die Einheiten der Größen Q, J und T willkürlich, so erhalten wir für $q = 1$, $i = 1$ und $t = 1$ offenbar $w = {}^1/_5$ und hieraus folgt, daß, wenn man die Einheiten der Wärmemenge, der Stromstärke und Zeit willkürlich gewählt hat, als Einheit des Widerstandes unbedingt das Fünffache des Widerstandes eines solchen Drahtes zu gelten hat, in welchem bei Einheit der Stromstärke in der Einheit der Zeit die Einheit der Wärmemenge entwickelt wird. Es ist danach nicht schwer zu bestimmen, welche Einheiten für die Wärmemenge oder Stromstärke oder die Zeit zu nehmen wären, wenn die Einheiten der drei übrigen Größen jedesmal willkürlich gewählt würden.

Sehr häufig setzt man den Proportionalitätskoeffizienten gleich 1. Die Formel (1) nimmt dann die Form $q = i^2 w t$ an. Wenn wir z. B. die Einheiten der Wärmemenge, des Widerstandes und der Zeit willkürlich gewählt hätten, so müßten wir in diesem Falle als Einheit der Stromstärke die Stärke des Stromes annehmen, der in der Zeiteinheit in einem Drahte mit der Einheit des Widerstandes die Einheit der Wärmemenge entwickelt, denn bei $w = 1$, $t = 1$ und $q = 1$ ergibt unsere Formel $i = \pm 1$. Das doppelte Vorzeichen bedeutet, wie wir später sehen werden, daß dieser Strom eine beliebige Richtung haben kann.

Wir hatten vorhin auf die oftmals auftretende Behauptung hingewiesen, daß der Proportionalitätskoeffizient bisweilen die Bedeutung einer physikalischen Größe haben könne, welche durch ihre besondere Einheit gemessen werde, und hatten erwähnt, daß dies unrichtig sei, daß man es vielmehr in ähnlichen Fällen mit einem unvollständigen Ausdrucke des Gesetzes zu tun habe, welcher nicht alle Seiten der gegebenen Erscheinung umfasse. Als Beispiel hierfür untersuchen wir die Wärmeleitung in einer aus irgendeinem Stoffe bestehenden Platte für den Fall, daß eine ihrer Flächen auf der konstanten Temperatur T_1, die andere auf der niedrigeren Temperatur T_2 erhalten wird. Es möge der Flächeninhalt jeder dieser Flächen der Platte gleich s Flächeneinheiten und ihre Dicke gleich d Längeneinheiten sein. Wir führen eine Versuchsreihe aus und messen die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$, den Flächeninhalt s, die Zeit t, die Wärmemenge q und endlich die Dicke d für verschiedene, aus demselben Material bestehenden Platten. Die Versuche zeigen uns sodann, daß die Zahlen q proportional den Zahlen s, den Zahlen t und den Zahlen $T_1 - T_2$ sowie umgekehrt proportional den Zahlen d sind. Bezeichnet man den Proportionalitätskoeffizienten mit k, so erhält man die Formel

$$q = kst\,\frac{T_1 - T_2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich schließt man nun folgendermaßen: setzt man in dieser Formel $s = 1$, $t = 1$, $T_1 - T_2 = 1$ (d. h. 1^0) und $d = 1$, so findet man $q = k$; folglich ist k die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eines den Grenzflächen parallelen Schnittes fließt, falls die Temperaturdifferenz auf der Einheit der Weglänge 1^0 beträgt (das Temperaturgefälle gleich 1 ist). Dieses k hängt von der Substanz der Platte ab und stellt eine besondere physikalische Größe dar, die auch ihre besondere Einheit hat.

Ein solcher Schluß aber ist nicht richtig. Die oben angeführten, aus den Versuchen gewonnenen Abhängigkeiten umfassen noch nicht alle Seiten der Erscheinung: die Zahl q hängt nicht nur von der Größe der Fläche s, der Zeit t, der Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ und von der Dicke d, sondern noch vom Material der Platte ab. Um diese Tatsache auszudrücken, führen wir eine neue Größe ein, die wir Wärmeleitungsfähigkeit nennen. Wir bezeichnen sie mit k und nehmen an, daß sie proportional q sei; q hängt dann von den fünf Größen k, s, t, $(T_1 - T_2)$ und d ab. Wir haben hier also sechs wesentlich verschiedene physikalische Größen vor uns, von denen eine jede durch ihre eigene, vollkommen willkürliche Einheit gemessen werden kann. Die Einheiten können beispielsweise sein: die kleine Kalorie (q), der Quadratzoll (s), das Zentimeter (d), die Minute (t), der Celsiusgrad ($T_1 - T_2$) und die Wärmeleitungsfähigkeit des Quecksilbers (k). In diesem Falle müssen wir auch die Formel (2) durch die folgende ersetzen:

$$q = Ckst\,\frac{T_1 - T_2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

in welcher C ein wirklicher Proportionalitätsfaktor, eine Zahl ist, die nicht etwa einen Zahlenwert irgendeiner physikalischen Größe bedeutet, sondern nur von der Wahl der Einheiten für die sechs in der Formel enthaltenen Größen abhängt. Setzt man in (3) $C = 1$, so begibt man sich bereits des Rechtes, alle diese Einheiten willkürlich zu wählen, denn die Einheit der einen Größe wird durch die Einheiten der übrigen fünf bestimmt. Am natürlichsten (jedoch nicht unumgänglich notwendig) ist es, die Einheiten für die Größen q, s, t, $(T_1 - T_2)$ und d willkürlich zu wählen. In diesem Falle erhält man für $q = 1$, $s = 1$,

$t = 1$, $T_1 - T_2 = 1$ und $d = 1$ auch $k = 1$. Hieraus folgt, daß, falls man in der allgemeinen Formel (3) $C = 1$ setzt, man als Einheit der Wärmeleitungsfähigkeit die einer Plattensubstanz annehmen muß, durch deren Oberflächeneinheit in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit fließt, wenn die Temperaturdifferenz auf der Einheit der Dicke 1^0 beträgt. Wenn unter denselben Bedingungen nicht eine, sondern q Wärmeeinheiten hindurchfließen, so ist auch die Wärmeleitungsfähigkeit nicht gleich 1, sondern gleich einer Zahl k, wobei q und k einander gleich sind. Die Gleichung $q = k$ sagt aus, daß die Anzahl Wärmeeinheiten q gleich ist der Anzahl Einheiten der Wärmeleitungsfähigkeit, und diese Gleichheit wird nur in dem besonderen Falle erhalten, wo wir in der allgemeinen Formel (3) willkürlich $C = 1$ setzen. Somit ist es klar, daß die oben erwähnte übliche Schlußfolgerung, welche zur Definition „k ist die Wärmemenge usw." führt, nicht richtig ist.

Eine gefahrbringende Begriffsverwirrung ist insbesondere in jenen einfachsten Fällen möglich, wo wir es überhaupt nur mit zwei physikalischen Größen zu tun haben und die eine von ihnen der anderen proportional ist, wenn also

$$a = Cb \qquad (4)$$

ist; hier bezeichnen a und b die beiden physikalischen Größen (d. h. ihre Zahlenwerte, denn nur die letzteren können verallgemeinert durch Buchstaben „bezeichnet" werden), C ist der Proportionalitätsfaktor, der von der Wahl der Einheiten für die in der Formel vorkommenden Größen abhängt. Nimmt man nun an (was man aber durchaus nicht zu tun verpflichtet ist), daß $C = 1$ ist, so erhält man

$$a = b \qquad (5)$$

Solcher Formeln gibt es in der Physik sehr viele; man darf Gleichungen dieser Art ja nicht für Identitäten halten. Wir haben im vorliegenden Falle zwei verschiedene physikalische Größen vor uns, die durch das Proportionalitätsgesetz verknüpft sind. Bei einer bestimmten Auswahl der Einheiten werden die Zahlenwerte beider Größen einander gleich. Wenn man dagegen in ähnlichen Fällen von einer Gleichheit der Größen reden wollte, so könnte sich leicht die Vorstellung von ihrer inneren Identität bilden, welche durchaus nicht aus der zufälligen Gleichheit ihrer Zahlenwerte folgt. Um Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir uns für ähnliche vorkommende Fälle des Ausdruckes „werden durcheinander gemessen" bedienen. Somit bedeutet der Satz: die Größe a wird durch die Größe b gemessen — daß bei einer willkürlichen Wahl der Einheiten die Zahlenwerte beider wesentlich verschiedener physikalischer Größen sich proportional zueinander ändern, bei einer gewissen, ganz bestimmten Auswahl der Einheiten aber ihre Zahlenwerte untereinander gleich werden. Dies gilt auch für solche Beziehungen zwischen zwei Größen, welche nicht durch

Versuche gewonnen werden, sondern aus der für die eine von ihnen gegebenen Definition folgen.

Hier ein Beispiel dafür. In der Elementarphysik wird der Begriff der Wärmekapazität der Körper definiert. Man darf hierbei nicht etwa sagen, die Wärmekapazität sei gleich der Wärmemenge, welche zur Erwärmung des Körpers um 1^0 erforderlich ist. Die Wärmemenge q und die Wärmekapazität k eines Körpers sind durchaus verschiedene physikalische Größen, deren Einheiten überhaupt ganz willkürlich gewählt werden können (z. B. die kleine Kalorie und die Wärmekapazität von einem Pfund Quecksilber). Wir haben die allgemeine Formel $q = Ckt$, wo t die Anzahl Grade ist, um welche sich der Körper erwärmt hat. Nur wenn man $C = 1$ setzt, erhält man für $t = 1^0$ die Gleichheit $q = k$, welche ausdrückt, daß die Wärmekapazität eines Körpers durch die Wärmemenge gemessen wird, die ihn um 1^0 erwärmt.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde die völlig überflüssige Spaltung einer physikalischen Größe in zwei mit verschiedenen Benennungen gerügt und wurde beispielsweise auf „Dichte“ und „spezifisches Gewicht“ hingewiesen. Wir können jetzt genauer zeigen, wodurch diese fehlerhafte Einteilung entstanden ist. Das Gewicht p, das Volumen v und die Dichte δ sind drei wesentlich verschiedene Größen, deren Einheiten vollkommen willkürlich gewählt werden können (z. B. das Pfund, das Kubikdezimeter, die Dichte des Quecksilbers). Sie sind durch die Formel $p = C\delta v$ miteinander verknüpft. Setzt man $C = 1$, so folgt $p = \delta v$, und in diesem Falle sind wir gezwungen, als Einheit der Dichte die Dichte eines solchen Körpers gelten zu lassen, dessen Volumeneinheit die Einheit des Gewichtes darstellt. Für $v = 1$ folgt $p = \delta$, woraus indes nicht hervorgeht, daß die Dichte gleich dem Gewichte der Volumeneinheit sei. Wir haben vielmehr zu sagen, daß „die Dichte durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird“ (die Dichte, welche durch die Masse der Volumeneinheit gemessen wird, ist wieder eine andere Größe).

Eine physikalische Größe wird durch eine andere „gemessen“ heißt, daß bei einer gewissen, jedoch nicht notwendigen Auswahl der Einheiten dieser beiden Größen ihre Zahlenwerte untereinander gleich werden.

Empirische Formeln. Wenn man durch das Experiment oder die Beobachtung den gesetzmäßigen Zusammenhang zweier Größen zu finden sucht, erhält man zwei Reihen zusammengehöriger Zahlenwerte a und b. Sehr oft kommt es vor, daß man den Zusammenhang, weil er äußerst verwickelt ist, nicht zu erraten vermag und das gesuchte wahre Gesetz unbekannt bleibt. In solchen Fällen kann man die Beobachtungsresultate durch eine empirische Formel ausdrücken, d. h. einen solchen algebraischen Zusammenhang $a = f(b)$, z. B. eine Reihe aufstellen, daß aus demselben für alle gemessenen Werte von b die gemessenen Werte von a sich mit genügender Annäherung ergeben. Die

Gleichheit $a = f(b)$ drückt dann das Gesetz empirisch aus und kommt innerhalb der Grenzen, zwischen welchen die Beobachtungen liegen, dem wahren Gesetze nahe. Von der allgemeinen Form der Funktion $f(b)$ und den Zahlenwerten der in ihr vorkommenden Koeffizienten hängt es ab, ob die Auswahl eine glückliche war.

Wenn es uns gelungen ist, eine solche empirische Formel $a = f(b)$ zu finden, welche „innerhalb der Versuchsgrenzen“ ausreichend gut die Abhängigkeit zwischen den Zahlen a und b wiedergibt, so kann man sie benutzen, um die Zahlen a' zu berechnen, welche den nicht durch unmittelbare Messung erhaltenen Zahlen b' entsprechen. Eine solche Berechnung ist im allgemeinen zulässig, wenn die Zahlen b' zwischen den durch Messung erhaltenen Zahlen b liegen; man nennt dies Verfahren Interpolation. Dasselbe gibt zuverlässige Resultate, besonders dann, wenn die gemessenen Zahlen b einander nahe liegen. Andererseits darf man die empirischen Formeln nur mit großer Vorsicht benutzen, wenn es sich um die Berechnung solcher a handelt, die außerhalb der Beobachtungsgrenzen gelegenen b entsprechen, denn das wahre, unbekannte Gesetz kann hier vom empirischen wesentlich abweichen. Eine Berechnung solcher Art heißt Extrapolation.

Die Größen, welchen man in der Physik begegnet, können in zwei Gruppen eingereiht werden, die sich durch ein nur selten genügend beachtetes, jedoch überaus wichtiges und charakteristisches Kennzeichen unterscheiden.

Zur ersten Gruppe gehört das, was man gewöhnlich Größe nennt; für diese ist offensichtlich der Wert Null möglich; man kann diese Größen zueinander addieren, und ihr geometrisches Verhältnis ist eine unbenannte Zahl, welche angibt, wievielmal eine der Größen in der anderen enthalten ist. Zu den Größen dieser Art gehören Länge, Flächenraum, Volumen, Geschwindigkeit, Kraft, Druck, elektrischer Widerstand, elektromotorische Kraft, Tonstärke, Lichtstärke, Intensität des magnetischen Feldes usw.

Es ist aber noch eine andere Gruppe von Größen bekannt, welche man ohne gewisse Einschränkungen und Erklärungen nicht unmittelbar zu den Größen rechnen darf. Für sie existiert der Begriff der Null nicht oder kann nur sehr bedingt eingeführt werden. Man kann auch nicht von einem geometrischen Verhältnis derselben reden. Solche Größen werden in der Wissenschaft benutzt, hauptsächlich, um als Kennzeichen qualitativer Verschiedenheiten zu dienen. Da sie eine ununterbrochene Reihe darstellen, kann man mit ihrer Hilfe den Begriff der Differenz zweier Größen als einer gewissen Zahl einführen.

Zwei Beispiele mögen klarlegen, um was es sich handelt. Zu den Größen der zweiten Gruppe gehören z. B. die Tonhöhe und die Temperatur, die offenbar gewisse qualitative Unterschiede kennzeichnen. Setzt man gewisse bestimmte Temperaturen und Tonhöhen fest, so kann man den Begriff der Differenzen oder Intervalle zweier Temperaturen oder Tonhöhen einführen. Dies aber setzt uns in den Stand, eine Skala der Temperaturen oder Töne zu entwerfen und eine Einheit der Temperaturdifferenzen (Grade) oder Tonhöhen (Oktave oder z. B. großer halber Ton) zu wählen. Diese Differenzen sind Größen der ersten Art, sie können gemessen und ihr geometrisches Verhältnis kann gefunden werden. Die Temperaturen und Tonhöhen selbst aber können nicht gemessen werden, eine Null existiert für sie nicht, und man kann nicht vom Verhältnisse zweier Temperaturen oder Tonhöhen reden. Dem widerspricht indes nicht der bedingte Begriff der absoluten Temperatur, der im dritten Bande (die Lord Kelvinsche Skala) erörtert werden soll; ebenso die nur auf Vereinbarung beruhende Messung der Tonhöhe durch die Schwingungszahl. Wir werden in der Folge noch andere Größen dieser zweiten Art kennen lernen (so z. B. das elektrische Potential). Streng genommen gehört zu ihnen auch die Zeit.

Wir wollen nun eine Frage besprechen, die besonders für den Anfänger von der größten Bedeutung ist. Die physikalischen Gesetze sind Naturgesetze und sollten, wenn sie richtig gefaßt sind, mit mathematischer Genauigkeit erfüllt werden. Wir sprechen von „ehernen“ Naturgesetzen, deren Durchbrechung unmöglich ist und ein „Wunder“ genannt würde, wenn sie jemals in die Erscheinung träte.

Verfolgen wir aber die physikalischen Erscheinungen genauer, so überzeugen wir uns, daß es fast kein einziges physikalisches Gesetz gibt, welches genau erfüllt wird. Fast in allen Fällen beobachten wir größere oder geringere „Abweichungen“. Außerdem treffen wir in der Lehre von den physikalischen Erscheinungen auf eine außerordentlich große Anzahl von solchen „Gesetzen“, die stets nur in ganz roher Annäherung erfüllt werden, so daß sie eher den Charakter von Regeln als von wirklichen Gesetzen besitzen. Fragen wir nun erstens, wie es kommt, daß fast bei allen Gesetzen Abweichungen beobachtet werden, und zweitens, welche Bedeutung für die Wissenschaft jene Regeln besitzen, so finden wir die Antwort auf beide Fragen in folgenden Betrachtungen.

Trotz der unzweifelhaften Einfachheit der Grundursachen aller physikalischen Erscheinungen sind diese letzteren selbst dennoch im höchsten Grade verwickelt. Dies ist nicht zu verwundern, wenn man bedenkt, daß z. B. die Grundursache aller Erscheinungen, mit denen sich die theoretische Astronomie beschäftigt, durch das so einfache Newtonsche Gravitationsgesetz bestimmt wird, und daß doch aus diesem Gesetze die so außerordentlich verwickelten Bewegungen der Himmelskörper folgen.

Bei jeder physikalischen Erscheinung spielen stets eine ganze Reihe von Faktoren eine Rolle, indem sie den Gang der Erscheinung beeinflussen. Die Wirkung jedes einzelnen Faktors wird durch ein „ehernes“

Naturgesetz bestimmt; aber in der beobachteten Erscheinung treten die Wirkungen aller Faktoren gleichzeitig zutage und ergeben ein Resultat, in welchem sich diese Wirkungen gegenseitig mehr oder weniger verdecken. Das reine Gesetz könnte nur dann durch die Beobachtung genau bestätigt werden, wenn der betreffende Faktor ganz allein zur Wirkung käme oder wenn die Wirkung aller übrigen eine relativ verschwindend kleine wäre.

Die physikalischen Gesetze beziehen sich also auf ideale Vorgänge, bei denen nur ein einziger Umstand, nur ein Faktor eine Rolle spielt.

Die sogenannten „Abweichungen" von den physikalischen Gesetzen, also der Umstand, daß in dem einen Falle eine Abweichung nicht zu bemerken ist, während sie in einem anderen groß ist, erklären sich dadurch, daß im ersten Falle die Wirkung eines Faktors derartig vorherrscht, daß die anderen neben ihm keine merkbare Rolle spielen, während im zweiten Falle jene anderen Faktoren die Erscheinung in bemerkbarer, d. h. meßbarer Weise verändern. Wird z. B. das Volumen einer gegebenen Gasmenge bei unveränderter Temperatur durch Zusammendrücken verkleinert, so finden innerhalb des Gases eine ganze Reihe von Vorgängen statt, die auf die Änderung der Spannung des Gases einen Einfluß ausüben und die Rolle der oben erwähnten Faktoren spielen. In einem gewissen Idealfalle, dem das Gas nahekommt, wenn es sehr weit von der Verflüssigung entfernt ist, z. B. beim verdünnten Wasserstoff, ist die Wirkung sämtlicher Faktoren, außer einem, fast unmerklich klein. Die Wirkung dieses einen Faktors wird durch das bekannte Boyle-Mariottesche Gesetz ausgedrückt: der Druck wächst umgekehrt proportional dem Volumen des Gases. Dieses ist ein wirkliches Naturgesetz, aber es sagt nur aus, wie einer der Faktoren, die bei der Volumenänderung des Gases ins Spiel treten, den Druck des Gases beeinflußt. Befindet sich das Gas nicht in jenem idealen Zustande, ist es von dem Zustande der Verflüssigung nicht sehr weit entfernt, so wird die Wirkung anderer Faktoren bemerkbar. Jede dieser Wirkungen folgt einem ehernen Naturgesetz, aber diese Gesetze sind nicht die gleichen. Ihre Wirkungen lagern sich nebeneinander, sie stören einander; sind sie nicht sehr groß, so kommt der erste Faktor noch hauptsächlich in Betracht und wir beobachten nur größere oder geringere Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze. Werden aber alle Faktoren mehr oder weniger gleichwertig, so ergibt sich eine äußerst verwickelte Erscheinung, in welcher von jenem Gesetze nichts mehr zu merken ist. Sind wir aber auch bis jetzt noch nicht imstande, diese verwickelte Erscheinung in ihre Bestandteile zu zerlegen, d. h. die Einzelgesetze, nach denen die verschiedenen Faktoren wirken, zu formulieren, so dürfen wir doch nicht zweifeln, daß jedes dieser Gesetze ein ehernes, unwandelbares Naturgesetz ist. Dies folgt aus dem Umstande, daß unter genau gegebenen Verhältnissen jede Ursache eine ganz bestimmte Wirkung erzeugt, wie groß auch die Anzahl der Faktoren sein mag, die bei dem Zustandekommen dieser Wirkung eine Rolle spielen. Die ehernen Naturgesetze zeigen niemals Abweichungen, und hierin besteht das Wesen des Kausalgesetzes vom Standpunkte der Empiriker.

Wir sahen oben, daß in der Lehre von den physikalischen Erscheinungen eine sehr große Anzahl von Gesetzen auftritt, die nur in ganz roher Annäherung erfüllt werden, und eher als „Regeln" und nicht als Gesetze bezeichnet werden könnten. Hierher gehört z. B. das sogenannte Gesetz von Dulong und Petit, welches besagt, daß für feste Elemente, hauptsächlich Metalle, das Produkt aus Atomgewicht A und spezifischer Wärme c eine konstante Zahl ist. Bei näherer Untersuchung erweist es sich aber, daß das Produkt Ac für verschiedene Elemente etwa zwischen 5,8 und 6,8 schwankt, also durchaus keinen wirklich konstanten Wert besitzt. Ähnliche angenäherte Gesetzmäßigkeiten gibt es, wie erwähnt, in sehr großer Anzahl. Welche Bedeutung haben sie für die Wissenschaft? Sind sie nicht vielleicht nur ein Spiel des Zufalls? Wenn die Anzahl der Fälle, die das Gesetz, richtiger die Regel, bestätigen, eine geringe ist und die Abweichungen sehr groß sind, so kann es sich in der Tat vielleicht nur um einen Zufall handeln. Wenn aber die Anzahl der Fälle eine bedeutende ist und die Abweichungen nicht zu groß sind, so können wir überzeugt sein, daß kein Zufall vorliegt. Dies gilt z. B. in dem oben erwähnten „Gesetze" von Dulong und Petit. Für 32 feste Elemente schwankt das Produkt Ac zwischen 5,8 und 6,8, wobei — und das ist die Hauptsache — die Faktoren A und c die allerverschiedensten Werte besitzen; für Aluminium ist $A = 7$ und $Ac = 6{,}58$, für Blei $A = 206{,}4$ und $Ac = 6{,}48$. Dies kann kein Zufall sein.

Die Bedeutung derartiger Regeln ist aus dem oben Dargelegten leicht zu verstehen. Sie beziehen sich auf Erscheinungen, bei deren Zustandekommen mehrere, vielleicht sehr viele Faktoren eine Rolle spielen, wobei der Einfluß eines jeden Faktors auf das beobachtete Endergebnis durch ein Naturgesetz bestimmt wird. Einer dieser Faktoren herrscht zwar vor, aber die Wirkung der übrigen ist nicht gering und tritt deutlich hervor. Das angenäherte Gesetz ist dann eben das Wirkungsgesetz jenes vorherrschenden Faktors. Die zur Erwärmung eines festen Elementes notwendige Wärmemenge besteht aus mehreren Teilen, die zu verschiedenen Zwecken verbraucht werden. Ein vorherrschender Teil ist umgekehrt proportional dem Atomgewicht des Elementes, während die übrigen Teile ganz anderen Gesetzen folgen.

Jedes angenähert richtige Gesetz weist uns also auf das Vorhandensein eines wirklichen Naturgesetzes hin, welches aber in der beobachteten Erscheinung durch das gleichzeitige Auftreten von sekundären Vorgängen, die nach anderen Gesetzen verlaufen, mehr oder weniger verdeckt wird. Selbstverständlich müssen wir aber genügende Gründe haben, überzeugt zu sein, daß die bemerkte ungefähre Gesetzmäßigkeit oder Regel nicht bloß zufällig erfüllt ist. Man erkennt aus diesen Darlegungen, daß ungefähr erfüllte Gesetze oder Regeln eine sehr große Bedeutung für die Wissenschaft besitzen: jedes dieser Gesetze ist gleichsam der Vertreter eines wirklichen, aber im gegebenen Falle mehr oder weniger verhüllten Naturgesetzes.

Wir haben versucht, den Unterschied zwischen den die physikalischen Erscheinungen beherrschenden wahren Naturgesetzen und den aus unseren Beobachtungen und Versuchen erschlossenen angenäherten Gesetzmäßigkeiten klarzulegen. In der modernen Physik spielt aber noch eine andere Frage eine umfassende Rolle, und ihre Beantwortung hat uns erst die wahre Bedeutung, die verborgene Quelle und den Wert der Naturgesetze erschlossen. Es ist dies die Frage, innerhalb welcher Grenzen diese Gesetze gültig sind, die Frage, wie weit es möglich ist, daß irgendwo im Raume oder irgend einmal im Laufe der Zeit das Gesetz nicht erfüllt wird, ohne daß wir gezwungen wären, von einem „Wunder" zu sprechen, von einer durch höhere Einwirkung hervorgerufenen Durchbrechung „eherner" Gesetze. Wir müssen uns hier mit wenigen Andeutungen begnügen; in Band III und Band V werden wir diese Frage ausführlich besprechen. Wir wollen jetzt nur ein bestimmtes Beispiel ins Auge fassen: das Mariottesche Gesetz in seiner idealen Fassung, welches besagt, daß bei konstant gehaltener Temperatur der Druck einer gegebenen Gasmenge umgekehrt proportional ist dem Volumen dieses Gases. Gilt dieses Gesetz noch für den millionten Teil eines Kubikmillimeters, besonders wenn sich das Gas im höchsten Grade der Verdünnung befindet? Das Gesetz gilt hier nicht mehr, der Druck hat hier einen schwankenden Wert und kann in den verschiedenen, sehr kleinen, nebeneinandergelagerten Teilen eines größeren Volumens in einem gegebenen Augenblicke stark voneinander abweichende Werte besitzen. Aber der Mittelwert für das ganze Volumen bleibt im Laufe der Zeit fast unverändert, und dieser ist es, der dem Mariotteschen Gesetze entspricht. Es ist nicht unmöglich, aber im höchsten Grade unwahrscheinlich, daß der mittlere Druck des Gases auf die Gesamtoberfläche der das Gas umgebenden Wand in einem gegebenen Augenblicke wesentlich, d. h. um eine meßbare Größe von jenem Mittelwerte abweicht. Diese Beobachtung läßt sich verallgemeinern. Die meisten, vielleicht sogar alle „Naturgesetze" sind Wahrscheinlichkeitssätze, d. h. ihre Erfüllung besitzt einen außerordentlich hohen Grad von Wahrscheinlichkeit; ihre Nichterfüllung ist wohl möglich, aber in so hohem Grade unwahrscheinlich, daß wir in den unserer Beobachtung zugänglichen Räumen und Zeiten die zufällig eintretende große Abweichung von dem Gesetze niemals erleben werden. Was wir niemals beobachten können, weil es zwar möglich, aber doch über alle Begriffe unwahrscheinlich ist, ist für uns nicht vorhanden, ist für uns unmöglich, und nur in diesem Sinne hat man die Unmöglichkeit einer Durchbrechung der Naturgesetze zu verstehen.

§ 8. Zustand der Materie. Im § 1 hatten wir Materie oder Stoff das in dem Orte des Raumes Vorhandene genannt, in welchem wir die Ursache eines empfangenen Eindruckes vergegenständlichen; den einen begrenzten Raumteil erfüllenden Stoff nannten wir Körper. Die Physik hat es vorzugsweise mit der Materie zu tun und wendet sich nur verhältnismäßig selten der Untersuchung der Körpereigenschaften zu, welche lediglich von der Form der Körper abhängen.

Der Stoff kann gleichartig (homogen) oder ungleichartig (heterogen) sein. Im ersten Falle besitzen alle seine Teile genau gleiche, im zweiten ungleiche Eigenschaften. Dementsprechend kann man auch von homogenen und heterogenen Körpern reden. Die Ungleichartigkeit kann zweierlei Ursachen haben.

Erstens können die Teile des Stoffes derart sein, daß einer von ihnen unter keinen Umständen alle Eigenschaften des anderen erlangen kann (wenigstens nach den neueren Anschauungen); in diesem Falle unterscheiden sich die Stoffteile durch ihren Bestand, ihr Unterschied ist ein chemischer.

Zweitens kann, obwohl die Stoffteile sich durch ihre Eigenschaften unterscheiden, dennoch unter gewissen Bedingungen ein jeder von ihnen alle Eigenschaften eines beliebigen anderen erwerben; in diesem Falle ist die Heterogenität eine physikalische und die Stoffteile unterscheiden sich durch ihren Zustand.

Die Eigenschaften der Materie werden durch eine ganze Reihe verschiedener physikalischer Größen bestimmt. Wir wollen Punktfunktionen solche Größen nennen, welche an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Zahlenwerte besitzen; hierher gehören physikalische Größen, welche die Eigenschaften der Materie an verschiedenen ihrer Punkte kennzeichnen. Jede Größe, welche, zu einem bestimmten Punkte gehörig, eine bestimmte Richtung hat, heißt Vektor (Geschwindigkeit, Kraft, elektrischer Strom).

Die Materie heißt isotrop, wenn nicht bloß alle Teile gleiche Eigenschaften haben, sondern in jedem Punkte ihre Eigenschaften nach allen Richtungen hin die gleichen sind und von der Richtung nicht abhängen (z. B. wenn die Wärmeleitung, die Lichtgeschwindigkeit, die Ausdehnbarkeit usw. nach allen Richtungen hin die gleichen sind). Die Materie heißt anisotrop (heterotrop), wenn sie im gegebenen Punkte nach verschiedenen Richtungen verschiedene Eigenschaften besitzt. Es ist aber wohl zu beachten, daß die Materie in bezug auf eine Eigenschaft isotrop, in bezug auf eine andere anisotrop sein kann. Wir werden

z. B. sehen, daß Kristalle des sogenannten regulären Systems isotrop in bezug auf ihre optischen, anisotrop in bezug auf ihre elastischen Eigenschaften sind. Die anisotrope Materie kann gleichzeitig homogen sein, falls ihre Eigenschaften in allen Punkten und auch in parallelen Richtungen dieselben sind. Der Einfachheit halber spricht man bisweilen von isotropen und anisotropen Körpern.

Aus der elementaren Chemie ist es bekannt, daß der Stoff einfach oder zusammengesetzt sein kann. Der letztere besteht aus einer sogenannten chemischen Verbindung mehrerer einfacher Stoffe. Der Stoff besteht aus sehr kleinen Teilen, welche Moleküle heißen.

Ein Molekül ist der kleinste Teil, welcher noch imstande ist, wesentliche Eigenschaften des gegebenen Stoffes zu zeigen. Je nach der Art dieser Eigenschaften unterscheidet man bisweilen physikalische und chemische Moleküle, wobei man den physikalischen einen zusammengesetzteren Bau zuschreibt als den chemischen; jedes der ersteren kann eine große Zahl der letzteren in sich enthalten.

Man unterscheidet oft „chemisch reine“ Stoffe von solchen, welche Beimengungen anderer Stoffe enthalten. Die physikalischen Eigenschaften eines Stoffes werden in vielen Fällen durch quantitativ außerordentlich geringe Beimengungen in erstaunlich hohem Maße verändert. Hierdurch erklären sich die so häufigen Widersprüche zwischen den Ergebnissen der von verschiedenen Forschern ausgeführten Untersuchungen gewisser Eigenschaften verschiedener Stoffe. Es ist nämlich unmöglich, einen Stoff vollkommen von allen Beimengungen zu befreien, so daß es überhaupt chemisch reine Stoffe im buchstäblichen, sozusagen mathematisch genauen Sinne dieses Wortes, gar nicht gibt.

Die heutige Chemie nimmt ferner an, daß die Stoffe sich aus kleinen Teilchen, den Atomen, aufbauen. Der Name stammt daher, daß man früher glaubte, daß sie auf keine Weise weiter zerlegt werden könnten. Wie wir jedoch in § 4 gesehen haben, haben neuere Entdeckungen auf dem Gebiete der elektrischen Erscheinungen dahin geführt, dem chemischen Atom einen verwickelten Bau zuzuschreiben und sein Zerfallen unter gewissen Bedingungen anzunehmen. Die Elektronentheorie (§ 4 und ausführlich im Band V) hat eine Umwälzung auf dem Gebiete unserer Grundvorstellungen veranlaßt und zu dem Begriff der „Struktur des Atoms“ geführt. Wir verstehen unter Atom ein kleines Stoffteilchen, welches allein oder im Verein mit anderen das chemische Molekül bildet. Das Molekül eines einfachen Stoffes besteht aus einem oder mehreren gleichartigen, das Molekül eines zusammengesetzten Stoffes aus zwei oder mehreren, wenigstens zum Teil verschiedenen Atomen.

Bei Besprechung der heterogenen Körper wurde erwähnt, daß ein und dieselbe Materie sich in verschiedenen Zuständen befinden kann. Der Ausdruck „Zustand der Materie“ wird in zweierlei Sinn gebraucht. Im engeren Sinne des Wortes unterscheidet man drei verschiedene Zustände (Aggregatzustände, Formarten) der Materie: den festen, flüssigen und gasförmigen. Von ihnen soll weiter unten die Rede sein.

Im weiteren Sinne kommt jeder Materie eine unendliche Anzahl verschiedener Zustände zu, wenn man den „Zustand“ durch die Gesamtheit aller Eigenschaften bestimmt sein läßt, so daß die Veränderung einer einzigen auch eine Veränderung des Zustandes zur Folge hat. Alle Größen, welche die Eigenschaften der Materie bestimmen, sich also zugleich mit ihrem Zustande ändern, heißen Parameter des Zustandes oder kurz Parameter. Der Zustand wird durch Funktionen des Parameters gekennzeichnet.

Zu den wichtigsten den Zustand bestimmenden Größen gehören: Temperatur, Dichte (oder statt ihrer das spezifische Volumen) und Druck oder Spannung. Wir unterwerfen diese Größen einer kurzen Betrachtung.

1. Die Temperatur. Der Tastsinn, welcher bei Berührung unseres Körpers mit der Materie in bekannter Weise gereizt wird, gibt uns Auskunft über den sogenannten Wärmezustand eines Körpers, über den Grad seines Erwärmtseins. Die Begriffe kalt, warm, heiß können ebensowenig definiert werden wie andere subjektive Empfindungen (Farbe, Tonhöhe usw.); sie sind jedem zugänglich und daher allgemein verständlich. Die Größe, welche den Grad des Erwärmtseins eines Körpers bezeichnet, heißt Temperatur: einer Vermehrung des Erwärmtseins entspricht eine Steigerung oder eine Erhöhung der Temperatur, einer Verminderung — eine Verringerung oder Erniedrigung der Temperatur. Die Ursache des größeren oder geringeren Erwärmtseins der Körper nennt man Wärme.

Im vorhergehenden Paragraphen war die Temperatur als eine Größe „zweiter Art“ bezeichnet worden, die an und für sich nicht gemessen werden kann. Setzt man aber gewisse Temperaturen als Ausgangspunkte fest, so ist man imstande, eine Temperaturskala zu entwerfen und die Temperaturdifferenzen als Größen „erster Art“ einzuführen.

Der subjektiven Empfindung einer Temperaturänderung muß eine gewisse Veränderung in dem seine Temperatur ändernden Körper entsprechen. Sie besteht in folgendem. Die Moleküle eines Körpers sind niemals in Ruhe, sie bewegen sich fortwährend. Die Geschwindigkeit ihrer Bewegung jedoch kann größer oder kleiner werden, und gerade dies stellt das Wesen dessen dar, was in unserem Tastsinne die Vorstellung von einer Veränderung des Wärmezustandes der Materie hervorruft. Je schneller sich die Moleküle bewegen, um so höher ist die Temperatur des gegebenen Stoffes.

Bei der größten Mehrzahl der Stoffe nimmt man wahr, daß sich zugleich mit einer Temperaturerhöhung das von einer gegebenen Menge der Substanz eingenommene Volumen vergrößert. Man benutzt diese

Tatsache dazu, die Einheit der Temperaturdifferenz, den Temperaturgrad zu definieren und eine Temperaturskala zu entwerfen. Letztere kann z. B. beruhen auf der mit der Temperaturänderung vor sich gehenden Volumenänderung des unter konstantem äußeren Drucke stehenden Wasserstoffs. Im dritten Bande werden wir eine andere Methode kennen lernen, die sich auf die Beobachtung der Druckänderung von Wasserstoff bei konstantem Volumen gründet. Die Versuche haben gezeigt, daß man viele Temperaturen immer wieder in gleicher Beschaffenheit erhalten kann, so unter anderen auch die folgenden zwei ganz bestimmten: die Temperatur des schmelzenden Eises bei bestimmtem Drucke und die des siedenden Wassers, auf dessen Oberfläche (von der Luft oder einem anderen Gase) ein Druck ausgeübt wird, der 1,0336 kg auf jeden Quadratzentimeter oder 10 336 kg auf jeden Quadratmeter beträgt und gleich dem Druck einer Quecksilbersäule (bei 0^0) von 760 mm Höhe ist. Um mit Hilfe dieser beiden Temperaturen eine Temperaturskala zu entwerfen, verfahren wir folgendermaßen. Wir bringen eine bestimmte Menge Wasserstoff, z. B. 1 kg, in ein mit schmelzendem Eise umgebenes Gefäß, so daß er die Temperatur dieses Eises annimmt; sein Volumen sei hierbei gleich v, wo v z. B. die Zahl der vom Gase eingenommenen Kubikmeter bezeichnet. Wir umgeben ihn darauf mit Dämpfen siedenden Wassers; er dehnt sich dann aus und nimmt schließlich das konstant bleibende größere Volumen V an. Die ganze Volumenzunahme $V - v$ teilen wir nun in 100 gleiche Teile und nennen einen Grad (1^0) die Temperaturdifferenz, welcher die Volumenzunahme des Wasserstoffs um die Größe $\frac{V-v}{100}$ entspricht. Die Schmelztemperatur des Eises kann man als den Anfang der Temperaturskala ansehen; von ihr werden dann alle anderen Temperaturen gerechnet. Dieses drückt man so aus, daß man die Schmelztemperatur des Eises gleich Null setzt (0^0); ihr entspricht das Volumen v; offenbar wird danach die Temperatur des siedenden Wassers, bei welcher unsere gedachte Wasserstoffmenge das Volumen V hat, gleich 100^0. Die Temperatur, bei welcher das Volumen gleich

$$v + n\frac{V-v}{100}$$

wird, setzt man gleich n^0. Wie man sieht, sind 100^0 und n^0 strenggenommen nicht die Temperaturen der Körper, sondern bloß die Differenzen zwischen den Temperaturen der Körper und des schmelzenden Eises. Der ganze Zwischenraum zwischen der Schmelztemperatur des Eises und der Siedetemperatur des Wassers ist bei uns in 100 Teile oder Grade geteilt, wobei ein jeder Grad der Temperaturerhöhung die gleiche Volumenzunahme $\frac{V-v}{100}$ des Wasserstoffs hervorruft. Das Verhältnis dieser Zunahme zum ursprünglichen Volumen v bei 0^0 heißt der Ausdehnungskoeffizient des Wasserstoffs; wenn man ihn mit α bezeichnet, so ist

$$\alpha = \frac{V - v}{100\,v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Versuche haben ergeben, daß $\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00366$ ist. Die Größe α stellt sich uns als unbenannte Zahl dar, aber nach § 6 sieht man leicht ein, daß α der Zahlenwert einer besonderen physikalischen Größe ist, die man die Ausdehnbarkeit des Wasserstoffs durch die Wärme nennen könnte. Wenn man die Temperatureinheit (Grad) ändern würde, indem man z. B. das Volumen $V - v$ nicht durch 100 (Celsiusskala), sondern durch 80 (Réaumur) oder durch 180 (Fahrenheit) teilen würde, so würde sich damit zugleich die Einheit der Ausdehnbarkeit durch die Wärme und ihr Zahlenwert α ändern.

Aus der Definition folgt, daß der Ausdehnungskoeffizient α (für den Wasserstoff) eine konstante Größe ist. Da wir ferner annahmen, daß die Temperaturänderungen den Volumenänderungen des Wasserstoffs proportional sind, so gilt, wenn man mit V_0 das Volumen einer gegebenen Wasserstoffmenge bei 0^0, mit V_T und V_t die Volumina bei den Temperaturen T und t bezeichnet,

$$(T - t) : (V_T - V_t) = 100 : V_{100} - V_0.$$

Diese Proportion liefert im Vereine mit (6), wo jetzt $V = V_{100}$ und $v = V_0$ ist,

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\,\frac{V_T - V_t}{T - t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Aus (7) ergibt sich, wenn man $t = 0$ und $T = t$ setzt, der besondere Fall

$$\alpha = \frac{V_t - V_0}{V_0\,t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Endlich folgt aus (8)

$$V_t = V_0\,(1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Für eine andere Temperatur T erhält man $V_T = V_0\,(1 + \alpha T)$, und hieraus

$$V_T = \frac{V_t\,(1 + \alpha\,T)}{1 + \alpha t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Das Binom $1 + \alpha t$ heißt das Ausdehnungsbinom.

Der Apparat, welcher uns ermöglicht, aus dem Volumen (oder dem Druck) einer gegebenen Wasserstoffmenge auf die Temperatur zu schließen, heißt Wasserstoffthermometer.

Wir nehmen jetzt an Stelle des Wasserstoffs eine bestimmte Menge eines beliebigen anderen Stoffes und führen eine Reihe von Messungen seiner Volumina V_t und der entsprechenden Temperaturen t, welche wir mit Hilfe des Wasserstoffthermometers messen, aus. Wir erhalten dabei zwei Zahlenreihen V_t und t. Wenn es sich hierbei zeigt, daß gleichen Temperaturerhöhungen auch gleiche Volumenänderungen entsprechen, so erweist sich die Größe α, welche sich nach einer der Formeln (7) oder (8) berechnen läßt, als eine konstante Zahl, die wir Ausdehnungskoeffizient der untersuchten Substanz nennen. Auch die Formeln (9) und (10) behalten ihre Gültigkeit. Wenn hingegen die für Volumen und Temperatur der Substanz gefundenen Zahlen keine konstante, nach Formel (7) berechnete Zahl ergeben, so verliert der frühere Begriff des Ausdehnungskoeffizienten einer Substanz seine Bedeutung. Er bezog sich auf den Wasserstoff und wurde als eine konstante Größe definiert. Wir können aber in diesem Falle den Begriff des Ausdehnungskoeffizienten als einer veränderlichen, von der Temperatur abhängigen Größe einführen. Die Formel (7) gibt uns dann zunächst den sogenannten mittleren Ausdehnungskoeffizienten α_m zwischen den Temperaturgrenzen T und t, so daß

$$\alpha_m = \frac{1}{V_0} \frac{V_T - V_t}{T - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist. Diese Größe hängt von den zwei Temperaturen T und t ab.

Die Formel (8) liefert uns den mittleren Ausdehnungskoeffizienten zwischen den Temperaturgrenzen 0^0 und t^0, welcher in die Formel (9) eingesetzt

$$V_t = V_0 (1 + \alpha_m t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

gibt; hier hängt α_m von t ab. Statt (10) erhalten wir jetzt

$$V_T = \frac{V_t (1 + \alpha'_m T)}{1 + \alpha_m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo α_m der mittlere Ausdehnungskoeffizient zwischen 0^0 und t^0, α'_m derselbe zwischen 0^0 und T^0 ist Wir wollen jetzt annehmen, daß die Substanz bei t^0 das Volumen V einnimmt; erhöht man die Temperatur um die kleine Größe Δt, so ruft dies eine Volumenvergrößerung um die kleine Größe Δv hervor. Nach Formel (11) findet man

$$\alpha_m = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Es ist dies der mittlere Ausdehnungskoeffizient für das kleine Temperaturintervall zwischen t und $t + \Delta t$. Läßt man nun die Größe Δt unbegrenzt kleiner werden, so nimmt auch die Größe Δv unbegrenzt ab; der mittlere Ausdehnungskoeffizient α_m strebt dabei einer gewissen Grenze zu, welche von der Temperatur t abhängt, der Δt hinzugefügt war. Somit ist

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Größe α heißt der Ausdehnungskoeffizient der Substanz bei t^0; sie ist eine Funktion der Größe t, welche mit Hilfe des Wasserstoffthermometers bestimmt wird.

Bisweilen betrachtet man die Veränderung der linearen Dimensionen eines (festen) Stoffes im Zusammenhange mit den Änderungen seiner Temperatur. Wir bezeichnen mit l_0, l_T und l_t die Werte der Länge irgend einer zwei Punkte der gegebenen Stoffmenge verbindenden Geraden bei den Temperaturen 0^0, T^0 und t^0, die wie früher mit dem Wasserstoffthermometer gemessen sind; wenn z. B. aus dem Stoffe ein Stab angefertigt war, so können l_0, l_T und l_t die Längen dieses Stabes bedeuten. Die Größe

$$\beta_m = \frac{1}{l_0} \frac{l_T - l_t}{T - t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

heißt dann der mittlere Koeffizient der linearen Ausdehnung zwischen den Temperaturen T und t. Wir haben ferner, entsprechend (12)

$$l_t = l_0 (1 + \beta_m t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

wo β_m der mittlere Koeffizient der linearen Ausdehnung zwischen 0^0 und t^0 ist, und endlich gibt uns

$$\beta = \frac{1}{l_0} \lim \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

den Koeffizienten der linearen Ausdehnung bei t^0.

Die Temperaturen unterhalb 0^0 werden als negativ betrachtet. Wenn man als Temperatur Null nicht die Schmelztemperatur des Eises, sondern die sogenannte absolute Nulltemperatur annimmt, welche im Vergleich zur Celsiusskala um 273^0 niedriger liegt, so heißt die von diesem Ausgangspunkte gerechnete Temperatur die absolute. Bezeichnet man sie mit T, so folgt aus der Definition

$$T = 273 + t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

wo t die Temperatur nach der gewöhnlichen Celsiusskala ist.

2. Dichte und spezifisches Volumen. In der Physik bezeichnet man mit dem Ausdrucke „Dichte" zwei völlig verschiedene Größen; mit einer derselben werden wir uns im zweiten Abschnitte bekannt machen. Der Begriff der anderen ist aus der Beobachtungstatsache abgeleitet worden, daß das Gewicht p eines Stoffes von gegebenem Volumen v von der Art dieses Stoffes abhängt. Hieraus entspringt die Vorstellung von einer gewissen Größe D, die für jede Stoffart bezeichnend ist; man nennt sie Dichte und setzt voraus, daß sie für verschiedene Stoffe proportional dem am selben Orte der Erdoberfläche bestimmten Gewichte p gleicher Volumina dieser Stoffe und bei Gleichheit der Gewichte umgekehrt proportional den Volumina v dieser Gewichte der verschiedenen Stoffe ist. Also ist

$$D = C\frac{p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Setzt man den Koeffizienten $C = 1$ (vgl. § 7), so erhält man

$$D = \frac{p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Diese Formel zeigt, daß für $p = 1$ und $v = 1$ auch die Dichte $D = 1$ wird; also hat man, wenn $C = 1$ gesetzt wird, als Einheit der Dichte die Dichte einer solchen Substanz zu wählen, deren Volumeneinheit die Einheit des Gewichtes besitzt. Wenn man das Gramm und das Kubikzentimeter als Gewichts- bzw. Volumeneinheit ansieht, so wird die Einheit der Dichte angenähert (§ 6) gleich der Dichte des Wassers bei 4° C. Behält man die Formel (20) bei, so kann man die Dichte des Wassers als Einheit annehmen und zugleich die Einheiten des Gewichtes und Volumens willkürlich wählen. Die Formel (21) geht für $v = 1$ in die Gleichheit $D = p$ über. Das zeigt uns, wie bei einer besonderen Wahl der Einheiten die Dichte eines Stoffes durch das Gewicht seiner Volumeneinheit (nach unserer verkürzten Ausdrucksweise) gemessen werden kann.

Bezeichnen wir jetzt mit p_1 das Gewicht des Volumens v von Wasser, dessen Dichte wir als Einheit wählen, so erhalten wir nach (20)

$$1 = C\frac{p_1}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Dividiert man (20) durch (22), so erhält man

$$D = \frac{p}{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Der Zahlenwert für die Dichte einer Substanz wird also erhalten, wenn man das Gewicht eines beliebigen Volumens dieser Substanz durch das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser dividiert.

Wir haben (S. 31) darauf hingewiesen, daß kein Grund vorliegt, zwei angeblich verschiedene Größen, welche Dichte und spezifisches Gewicht genannt werden, einzuführen, und daß es völlig überflüssig ist, dem Zahlenwert der Dichte bei bestimmter Wahl der Einheit eine besondere Benennung beizulegen. Wir werden dementsprechend in folgendem stets nur von der Dichte eines Körpers reden.

Bezeichnet man die Zahl $1 : C$ mit c, so erhält man anstatt (20) und (21) Ausdrücke für den Zahlenwert p des Gewichtes eines homogenen Körpers

$$p = cDv \quad \text{oder} \quad p = Dv \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Hier ist c der Zahlenwert des Gewichtes der Volumeneinheit der Substanz, deren Dichte als Einheit angenommen wurde; die zweite

Formel gilt für den Fall, daß die Volumeneinheit einer solchen Substanz die Einheit des Gewichtes besitzt.

Ist die Substanz heterogen, dann verliert die ursprüngliche Definition der Dichte, die in den Formeln (20) und (21) ausgedrückt ist, ihren Sinn. Man kann indes vom Begriffe der Dichte, als einer für die gegebene Substanz konstanten Größe zu dem Begriffe der Dichte als einer kontinuierlich sich ändernden übergehen. So erhalten wir die Formeln

$$D_m = \frac{Cp}{v} \quad \text{oder} \quad D_m = \frac{p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

welche die mittlere Dichte des Volumens v ergeben, und ferner die Formeln

$$D = C \lim \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad \text{bzw.} \quad D = \lim \frac{\Delta p}{\Delta v} = \frac{dp}{dv} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

welche für die „Dichte in einem gegebenen Punkte" (um welchen herum ein sehr kleines Volumen Δv liegt) gelten. Es sind dies die Grenzwerte der mittleren Dichte eines unbegrenzt abnehmenden Volumens Δv.

Als spezifisches Volumen einer homogenen Substanz bezeichnet man eine Größe, welche durch das von der Gewichtseinheit dieser Substanz eingenommene Volumen gemessen wird. Drücken wir diese Größe durch V aus, so gibt die zweite Formel (24)

$$DV = 1 \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Bei bestimmter Wahl der Einheiten ist also der Zahlenwert des spezifischen Volumens gleich dem reziproken Zahlenwerte der Dichte.

Mit Änderung der Temperatur ändert sich auch das spezifische Volumen entsprechend der Formel

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

wo α der mittlere Ausdehnungskoeffizient zwischen 0^0 und t^0 ist. Aus den Formeln (27) und (28) folgt

$$\frac{1}{D_t} = \frac{1}{D_0}(1 + \alpha t) \quad \text{oder} \quad D_t = \frac{D_0}{1 + \alpha t} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

wo D_t und D_0 die Dichte bei t^0 und 0^0 ausdrücken. In den Tabellen für die Zahlenwerte der verschiedenen physikalischen Größen gibt man gewöhnlich die Dichte für 0^0 an (während die Dichte des Wassers bei 4^0 C als Einheit angenommen ist); wir wollen sie die tabellarische Dichte nennen. Für Quecksilber ist

$$D_0 = 13{,}596 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

3. Druck und Spannung. Die Körper sind in der Natur, wie uns die Beobachtung lehrt, immer einem auf ihre Oberfläche wirkenden Drucke ausgesetzt, der von den anderen sie berührenden Körpern aus-

geht. Diesen Druck p werden wir in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche ausdrücken, d. h. wir werden als Einheit des äußeren Druckes den Druck von 1 kg auf jeden Quadratmeter der Oberfläche annehmen. Eine andere Einheit ist der Atmosphärendruck; er ist gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0^0 bzw. gleich dem Drucke von rund 1 kg auf jeden Quadratzentimeter. Da eine Wasserschicht von 1 mm Dicke auf jeden Quadratmeter Oberfläche einen Druck von 1 kg ausübt, so ist $A = 760 \times D_0$, wo A den Atmosphärendruck und D_0 die Dichte des Quecksilbers bedeuten; nach (30) erhält man

$$A = 760 \times 13{,}6 = 10\,336 \text{ kg pro Quadratmeter} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Unter der Wirkung des äußeren Druckes verringert sich das Volumen der Körper, aber zu gleicher Zeit nimmt auch der Gegendruck des Körpers auf die ihn unmittelbar berührenden Körper zu; diesen Gegendruck nennen wir elastische Spannung; als Einheit nehmen wir die Spannung an, bei welcher der Körper auf 1 qm Oberfläche der mit ihm in Berührung stehenden Körper einen Druck von 1 kg ausübt. Die Volumenänderung des Körpers hört erst dann auf, wenn seine elastische Spannung gleich dem äußeren Drucke wird. Ändert sich sein Volumen unter der Wirkung äußerer Druckkräfte nicht weiter, so erhält man daher für die elastische Spannung und den äußeren Druck dieselben Zahlenwerte. Infolgedessen kann man unter den gekennzeichneten Bedingungen die beiden Ausdrücke „Druck" und „elastische Spannung" unterschiedslos gebrauchen, obgleich diese beiden Größen ihrem Wesen nach durchaus verschieden sind. Übrigens ist leicht einzusehen, daß der Druck, unter dem sich ein Körper befindet, nichts anderes ist, als die elastische Spannung des oder der Körper, welche den ersten von allen Seiten berühren.

Auf S. 39 wurde auf Temperatur, Dichte (oder spezifisches Volumen) und Druck oder Spannung als auf die wichtigsten Zustandsgrößen eines Körpers hingewiesen, und es wurde aufmerksam gemacht, daß bei Änderung jeder beliebigen Eigenschaft eines Körpers, die durch eine obiger Größen bestimmt ist, wir von einer Zustandsänderung des Körpers sprechen werden. Hieraus folgt, daß z. B. jede Temperatur- oder Dichte- oder Druckänderung einer Zustandsänderung des Körpers entspricht, wobei dieser Ausdruck in erweitertem Sinne zu verstehen ist. Im engeren Sinne des Wortes unterscheidet man, wie oben gesagt wurde, drei Zustandsformen (Aggregatzustände) der Materie: die feste, flüssige und gasförmige. Sie sind indes nicht scharf voneinander geschieden; bisweilen befindet sich die Materie in einem Zustande, den man als Zwischenstufe zwischen ihnen bezeichnen kann. So werden wir in Abt. 2 sehen, daß die Materie im sogenannten kolloidalen Zustande, welcher eine Zwischenstufe zwischen dem festen und flüssigen darstellt, ein besonderes Interesse verdient.

Es möge hier auf einige charakteristische Merkmale der drei Zustandsformen hingewiesen werden.

1. Der feste Zustand. Materie im festen Zustande und in bestimmter Menge, ein sogenannter fester Körper, hat eine bestimmte Gestalt, welche sich im allgemeinen unbegrenzt lange erhält. Diese Gestalt kann sich durch Einwirkung äußeren Druckes ändern und wird, nachdem jener aufgehört hat zu wirken, mehr oder weniger vollständig wieder in die ursprüngliche übergehen. Die Temperatur und der äußere Druck ändern das Volumen eines festen Körpers nur sehr wenig. Seine Moleküle befinden sich zwar in Bewegung, doch entfernt sich jedes von ihnen hierbei nur sehr wenig aus einer gewissen mittleren Lage. Teilen läßt sich ein fester Körper nur durch einen verhältnismäßig bedeutenden, auf seine Oberfläche ausgeübten Druck.

2. Der flüssige Zustand. Die Materie im flüssigen Zustande oder ein sogenannter flüssiger Körper hat keine bestimmte Gestalt; auch setzt er einer Formänderung keinen merklichen Widerstand entgegen, und ebenso läßt er sich leicht zerteilen. Das Volumen einer Flüssigkeit ändert sich dagegen, wenn ihre ganze Oberfläche einem Drucke ausgesetzt wird, nur sehr wenig; sobald derselbe nachläßt, wird das frühere Volumen vollständig wieder angenommen. Die Moleküle einer Flüssigkeit bewegen sich nicht ausschließlich um ihre mittleren Lagen, sondern sie verlassen diese allmählich, so daß ihre gegenseitige Anordnung sich verändert. Die Flüssigkeiten sind dem Pascalschen Grundgesetze unterworfen: ein auf die Oberfläche der Flüssigkeit von äußeren Kräften ausgeübter Druck wird durch die Flüssigkeit nach allen Seiten hin gleichmäßig fortgepflanzt, d. h. wenn auf die Einheit der Flüssigkeitsoberfläche ein Druck ausgeübt wird, so wird er auf jede Oberflächeneinheit der die Flüssigkeit umgebenden Körper übertragen. Wenn man das Eigengewicht der Flüssigkeit mit in Betracht zieht, so folgt aus dem Pascalschen Gesetze das Archimedische Gesetz: ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt von letzterer einen Auftrieb, welcher einen scheinbaren Gewichtsverlust, gleich dem Gewichte der vom eingetauchten Körper verdrängten Flüssigkeit, veranlaßt.

Alle Flüssigkeiten gehen von selbst und unter allen Umständen ununterbrochen in den gasförmigen Zustand über; diese Erscheinung wird Verdunstung genannt.

3. Der gasförmige Zustand. Materie im gasförmigen Zustande oder einfacher ein Gas besteht aus Molekülen, die sich alle in geraden Linien bewegen und deren Bewegungsrichtung sich nur beim Zusammentreffen mit anderen Molekülen oder der Oberfläche eines das Gas begrenzenden Körpers ändert (z. B. den Wandungen des das Gas einschließenden Gefäßes). Infolgedessen erfüllt ein Gas in kurzer Zeit jeden ihm zur Verfügung stehenden leeren Raum; es hat, wie man sagt, das Bestreben, sich auszudehnen, d. h. ein möglichst großes Volumen

einzunehmen. Die Gesamtheit der Stöße der die Oberfläche eines mit dem Gase in Berührung stehenden Körpers treffenden Gasmoleküle ruft den Druck hervor, welchen dieser Körper von seiten des Gases erleidet. Dieser sogenannte Gasdruck wird, wie wir gesehen haben, entweder durch die Anzahl Kilogramme auf den Quadratmeter Oberfläche oder durch den Atmosphärendruck gemessen. Damit sich das Volumen eines Gases nicht ändert, muß seine Spannung dem auf das Gas von außen her wirkenden Drucke gleich sein. Das Volumen eines Gases nimmt zu oder ab, sobald seine Spannung größer bzw. kleiner ist als der äußere Druck.

Die Gesetze von Pascal und Archimedes gelten auch für die Gase.

Die Gase folgen angenähert den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac.

Das Gay-Lussacsche (Charlessche) Gesetz lautet: Der Ausdehnungskoeffizient der Gase, welche bei gleichbleibendem Außendruck erwärmt werden, ist konstant und für alle Gase gleich groß, nämlich

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}003\,66 \quad \cdots \cdots \quad (32)$$

Die Formel (12) nimmt demnach, wenn man V statt V_t schreibt, folgende Form an

$$V = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) \quad \cdots \cdots \quad (33)$$

Das Boyle-Mariottesche Gesetz lautet: Das Volumen einer gegebenen Gasmenge ist umgekehrt proportional dem Außendruck (oder die Spannung einer gegebenen Gasmenge ist ihrem Volumen umgekehrt proportional), wenn die Temperatur des Gases ungeändert bleibt.

Diese beiden Gesetze zeigen, daß sich das Volumen eines Gases beträchtlich ändern kann, wenn sich die Temperatur und besonders, wenn sich der Außendruck ändert.

Gasdichte. Es ist wohl zu beachten, daß die Dichte der Gase auf zwei verschiedene Einheiten bezogen wird.

a) Als Einheit der Dichte gilt vielfach die Dichte des Wassers. Bei Zugrundelegung dieser Einheit ändert sich der Zahlenwert für die Dichte eines gegebenen Gases in den weitesten Grenzen mit der Temperatur und dem auf ihm lastenden Druck. Die durch obige Einheit gemessene Dichte eines Gases können wir als Dichte erster Art des Gases bezeichnen.

b) Bei der Dichtebestimmung eines Gases nimmt man sehr oft die Dichte der Luft bei der gleichen Temperatur und demselben Druck als Einheit an. Diese Dichte ist, wenigstens innerhalb der Grenzen, für welche die Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac für Luft und das zu untersuchende Gas gelten, eine konstante Größe. Wir können sie als Dichte zweiter Art des Gases bezeichnen.

Daß eine strenge Sonderung der beiden Dichten notwendig ist, geht unter anderem daraus hervor, daß im Wortlaute verschiedener sich auf die Gase beziehenden Gesetze gewöhnlich nur von der „Dichte des Gases“ die Rede ist, obgleich bald von der ersten, bald von der zweiten gesprochen wird. Es mögen hier zwei Beispiele dafür folgen:

1. Das Boyle-Mariottesche Gesetz in veränderter Form lautet: Die Dichte einer gegebenen Gasmenge bei konstanter Temperatur ist dem Außendruck direkt proportional. Hier ist von der Dichte erster Art die Rede.

2. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle bei gegebener Temperatur ist der Quadratwurzel aus der Dichte des Gases indirekt proportional. Hier ist die Dichte zweiter Art gemeint. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ändert sich also nicht bei Verdichtung oder Verdünnung des Gases, wie dies scheinen könnte, falls man die zwei Dichten verwechselt.

Der Zustand eines Systems. Wenn man es mit einem System von Körpern oder einzelnen Molekülen zu tun hat, so kann der Begriff des „Zustandes“ noch weiter verallgemeinert werden. Wir wollen jede Änderung in der gegenseitigen Lage der Teile des Systems ebenfalls eine Zustandsänderung des Systems nennen.

Auch in diesem Falle wird die Zustandsänderung durch Änderung der Eigenschaften gekennzeichnet. Hierbei bieten ein besonderes Interesse gewisse Arten von Eigenschaften solcher Körper, die wir allgemein als zusammengesetzte bezeichnen können. Je nach der Art, wie sich die Bestandteile zueinander verhalten, hat man drei Fälle zu unterscheiden:

a) Physikalische, grobe Mischungen (z. B. Sand und Mehl), hier liegen die Bestandteile sichtbar nebeneinander oder sonst lassen sie sich als solche mit Hilfe des Mikroskops oder auf andere Weise erkennen.

b) Lösungen im verallgemeinerten Sinne; hierher gehören die gewöhnlichen Lösungen von festen, flüssigen oder gasförmigen Körpern in Flüssigkeiten, Mischungen von Flüssigkeiten (z. B. Wasser und Alkohol), von Gasen (z. B. Luft), Legierungen und ähnliche feste, homogene Mischungen usw.

c) Chemische Verbindungen, deren Bestandteile die entsprechenden chemischen Elemente sind.

Wir wollen hier nur die zweite und dritte Gruppe zusammengesetzter Körper betrachten. Unter den Eigenschaften solcher Körper finden sich häufig drei wichtige Arten, die auch besondere Namen erhalten haben. Es sind dies die folgenden:

I. Additive Eigenschaften (Ostwald); wenn der Zahlenwert der Größe x, durch welche eine Eigenschaft des zusammengesetzten Körpers ausgedrückt wird, nach der Mischungsregel aus den Zahlenwerten x_i derselben Größe für die Bestandteile des Körpers berechnet werden kann, so sagen wir, jene Eigenschaft sei eine additive. Die Größe x ist der nach der Mischungsregel berechnete Mittelwert der Größen x_i. Wir haben $mx = \Sigma m_i x_i$, wo m_i die Massen der Bestandteile sind und $m = \Sigma m_i$ die Masse des zusammengesetzten Körpers. Statt der Massen können in einzelnen Fällen auch die Volumina auftreten. So ist z. B. die Wärmekapazität c einer Legierung eine Größe, durch welche eine additive Eigenschaft der Legierung gemessen wird, denn man kann c nach der obigen Formel aus den Wärmekapazitäten c_i der Bestandteile der Legierung berechnen. Hierher gehören auch zahlreiche Eigenschaften von chemischen Verbindungen, z. B. Refraktion, Verbrennungswärme usw.

II. Konstitutive Eigenschaften (Ostwald) sind solche Eigenschaften chemischer Verbindungen, welche durch den Aufbau des Moleküls, d. h. durch die Art, wie die das Atom bildenden Moleküle untereinander verkettet sind, beeinflußt werden. Hierher gehören einige optische Eigenschaften, der Siedepunkt, der Schmelzpunkt u. a. Bei isomeren Verbindungen, deren Moleküle aus den gleichen Atomen bestehen, die aber verschiedenartig angeordnet sind, sind die konstitutiven Eigenschaften verschieden, während rein additive offenbar gleich sein müssen.

III. Kolligative Eigenschaften (Ostwald, nach einem Vorschlage W. Wundts) sind solche Eigenschaften zusammengesetzter Körper, die nur von der Masse der Bestandteile, aber nicht von ihrer Art abhängen. Hierher gehören z. B. das Volumen und der Druck eines Gasgemenges, die Dichte eines Dampfes, ferner die Siedepunktserhöhung, Gefrierpunktserniedrigung, osmotischer Druck und Dampfspannung einer Lösung (Bd. III) usw. Kolligative Eigenschaften einer chemischen Verbindung werden durch ihr Molekulargewicht bestimmt und sind unabhängig von der Art, von der Anzahl und von der Anordnung der Atome, aus denen das Molekül der Verbindung besteht. Kolligative Eigenschaften werden daher hauptsächlich zur Bestimmung der Molekulargewichte verwandt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß der Übergang eines Körpers oder Systems aus einem gegebenen Zustande in einen anderen auf unendlich vielen verschiedenen Wegen erfolgen kann. So kann z. B. der Übergang einer gegebenen Gasmenge aus einem Zustande niedriger Temperatur und kleinen Volumens in einen mit hoher Temperatur und großem Volumen dadurch erfolgen, daß man entweder das Gas bei konstantem Volumen erwärmt und darauf bei konstanter Temperatur ausdehnt oder umgekehrt zuerst das Volumen und dann die Temperatur ändert, oder endlich Temperatur und Volumen gleichzeitig ändert, was auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen kann.

§ 9. Erhaltung der Materie. Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir uns mit den Zustandsänderungen der Materie bekannt gemacht.

Zu den Zustandsänderungen der Materie kann man auch die Vorgänge bei den chemischen Reaktionen rechnen. Vereinigen sich Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser, so ist in dem letzteren sowohl Wasserstoff als auch Sauerstoff enthalten, jedoch in einem ganz besonderen Zustande der Zerteilung in Atome.

Für alle möglichen, sowohl physikalischen als auch chemischen Zustandsänderungen gilt folgendes Grundprinzip von der Erhaltung der Materie.

Bei keiner irgendwie möglichen physikalischen oder chemischen Veränderung, der die Materie unterworfen wird, verschwindet sie oder wird sie neu erzeugt; ihre Menge bleibt immer unverändert dieselbe.

Weiter unten wird eine Erläuterung dieses Prinzips gegeben und genauer darauf hingewiesen werden, auf welche Größe sich eigentlich diese Unveränderlichkeit bezieht.

Das Prinzip der Erhaltung der Materie wird sehr oft, aber irrtümlich, Lavoisier zugeschrieben. Es wurde aber viel früher, und sogar im Altertume, als etwas Selbstverständliches, nicht selten unbewußt, angewandt, wobei es als Grundlage wissenschaftlicher Betrachtungen diente. So hat z. B. Lomonossow in einem Briefe an Euler vom 5. Juli 1748 dies Prinzip klar ausgesprochen (siehe B. Menschutkin, „Lomonossow als Physiko-Chemiker“, St. Petersburg 1904, S. 258 und Speter, „Lavoisier und seine Vorläufer“, 1910, S. 54). Walden hat die Geschichte des Prinzips der Erhaltung der Materie von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart dargestellt und gezeigt, wie falsch es ist, die Entdeckung dieses Prinzips Lavoisier zuzuschreiben (Journ. d. russ. phys.-chem. Ges., chem. Abt., 1912, II, S. 75).

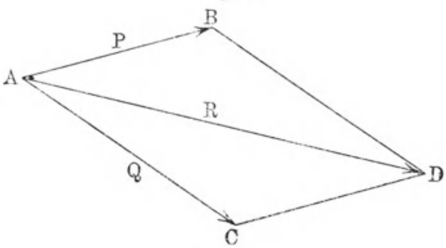
Die Versuche, welche von verschiedenen Forschern ausgeführt wurden, um die Richtigkeit jenes Prinzips zu prüfen, werden wir später besprechen.

§ 10. Vektoren. Auf S. 37 bezeichneten wir als Vektor eine Größe, die im gegebenen Punkte nicht nur einen bestimmten Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Richtung hat.

Jeder Vektor kann durch einen Pfeil dargestellt werden, der von dem Punkte ausgeht, auf welchen der Vektor sich bezieht; es ist dies der Angriffspunkt des Pfeiles. Die Richtung des Pfeiles gibt die des Vektors an; die Länge des Pfeiles wird proportional der Größe des Vektors gesetzt, d. h. die Anzahl Längeneinheiten, welche in der Länge des Pfeiles enthalten sind, wird gleich oder (besonders, wenn es mehrere Vektoren darzustellen gibt) proportional dem Zahlenwerte des Vektors gemacht.

Aus zwei gegebenen Vektoren mit demselben Angriffspunkte kann man einen dritten konstruieren, welcher durch die Diagonale des Parallelogramms aus den gegebenen Vektoren dargestellt wird. Die letzteren heißen sodann die Komponenten. Der Übergang von zwei gegebenen Vektoren zu einem dritten heißt geometrische Addition zum Unterschiede von der algebraischen, d. h. der gewöhnlichen Summation. Der dritte Vektor heißt die geometrische Summe der gegebenen Vektoren $P = AB$ und $Q = AC$ (Fig. 1); die geometrische Summe von P und Q ist $R = AD$. Symbolisch wird die geometrische Summierung folgendermaßen ausgedrückt:

Fig. 1.



$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} \quad . \quad . \quad (34)$$

Die Striche über den Buchstaben bedeuten, daß die Summierung eine geometrische ist.

Die Konstruktion der geometrischen Summe kann auch verkürzt ausgeführt werden: Man zieht vom Endpunkte B eines der beiden Vektoren eine Gerade BD, die gleich und parallel dem anderen Vektor $Q = AC$ ist; mit dem Endpunkte D verbindet man den Punkt A durch eine zweite Gerade; diese stellt dann die gesuchte geometrische Summe dar.

Wenn ein Vektor R gegeben ist, so kann man ihn auf eine unendliche Anzahl von Arten in zwei neue Vektoren P und Q so zerlegen, daß R die geometrische Summe der Vektoren P und Q ist. Dies Verfahren heißt Zerlegung des Vektors R in zwei Komponenten P und Q. Wenn P und Q einen rechten Winkel bilden, so ist

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \qquad \cos(R, P) = \frac{P}{R}, \qquad \cos(R, Q) = \frac{Q}{R}.$$

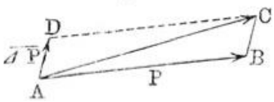
Die geometrische Summe ist gleich der algebraischen, wenn die beiden Vektoren dieselbe Richtung haben. Das gleiche gilt auch von Vektoren mit entgegengesetzter Richtung; es müssen ihnen dann ungleiche Zeichen beigefügt werden, und ihre geometrische Summe wird gleich der algebraischen Differenz. Wenn die Vektoren ihrem Sinne nach als positiv gelten, so besteht folgende Ungleichheit:

$$P - Q \leqslant \overline{P} + \overline{Q} \leqslant P + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

wobei $P \geqslant Q$ ist.

Die Änderung eines Vektors kann eine geometrische sein. Ändert sich der Vektor $P = AB$ (Fig. 2) der Größe und Richtung nach derart, daß der veränderte Vektor durch den Pfeil AC dargestellt wird, so kann man, wenn man das Parallelogramm konstruiert, sich vorstellen, daß die Änderung durch geometrische Addition des Vektors P mit einem Vektor AD hervorgebracht sei. Diesen Vektor nennen wir den geometrischen Zuwachs des Vektors P und bezeichnen ihn mit $\overline{\Delta P}$ zum Unterschiede vom algebraischen Zuwachs ΔP.

Fig. 2.



Die geometrische Summe R dreier Vektoren P_1, P_2 und P_3, welche denselben Angriffspunkt A haben (Fig. 3), wird erhalten, wenn man zuerst zwei Vektoren P_1 und P_2 addiert, deren geometrische Summe der Vektor AE ist, und sodann die Summe $R = AF$ aus den Vektoren AE und P_3 bildet. Aus der Figur geht hervor, daß

$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3}$$

dargestellt wird durch die Diagonale des aus den drei gegebenen Vektoren konstruierten Parallelepipedons.

Fig. 3.

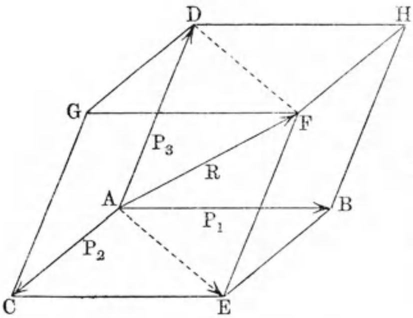
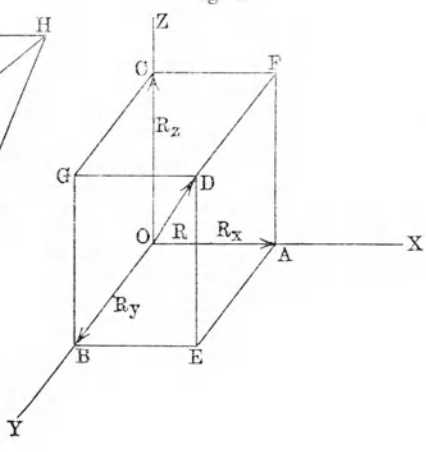


Fig. 4.



Einfacher kann man R finden, wenn man vom Endpunkte B eines der drei Vektoren die Gerade $BE \parallel$ und $= P_2$ und darauf von E aus die Gerade $EF \parallel$ und $= P_3$ zieht. Die Gerade, welche A mit F verbindet, ist alsdann der gesuchte Vektor.

Umgekehrt kann man den Vektor R auf unendlich viele verschiedene Arten durch drei Komponentvektoren ersetzen, nämlich durch die Kanten eines Parallelepipedons, dessen Diagonale R ist. Wenn die drei Komponentvektoren zueinander senkrecht sind, so ist das Parallelepipedon ein rechtwinkliges. Wählen wir den Angriffspunkt der Vektoren zum Anfangspunkte der Koordinatenachsen x, y, z, welche die Richtung der drei Komponentvektoren haben, und bezeichnen wir letztere mit R_x, R_y und R_z (Fig. 4), dann ist

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \ldots \ldots \quad (36, a)$$

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(R, y) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(R, z) = \frac{R_z}{R} \quad \cdot \cdot (36, b)$$

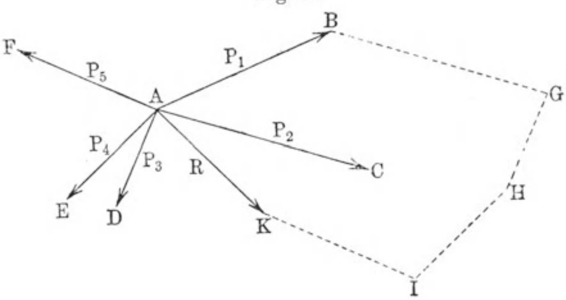
R_x, R_y und R_z sind die Projektionen des Vektors R auf die Richtungen der Koordinatenachsen.

Es seien uns zwei Vektoren P und Q und ihre auf den Koordinatenachsen liegende Komponenten P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y und Q_z gegeben; aus der analytischen Geometrie folgt dann, daß $\cos(P, Q) = \cos(P, x) \cos(Q, x) + \cos(P, y) \cos(Q, y) + \cos(P, z) \cos(Q, z)$ ist.

Setzt man in die rechte Seite die Werte der Kosinusse nach Formel (36, b) ein, so wird

$$P\,Q \cos(P, Q) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Fig. 5.



Wenn eine beliebige Zahl von Vektoren P_1, P_2, $P_3, \ldots P_i$ den gemeinsamen Angriffspunkt A (Fig. 5) hat, so wird ihre geometrische Summe dadurch erhalten, daß man zunächst zwei Vektoren geometrisch addiert, darauf die erhaltene Summe mit dem dritten addiert usw. Symbolisch drückt man das folgendermaßen aus:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \cdots + \overline{P}_i + \cdots = \Sigma \overline{P}_i \quad \ldots \quad (38)$$

Einfacher läßt sich der Vektor R durch Konstruktion des sogenannten Polygons der Vektoren finden; vom Endpunkte B eines der Vektoren zieht man $BG \parallel$ und $= P_2$; dann von G die Gerade $GH \parallel$ und $= P_3$; von H die Gerade $HI \parallel$ und $= P_4$ usw. Die Gerade, welche dann den Punkt A mit dem Punkte K der gebrochenen Linie verbindet, die also das Polygon schließt, stellt die gesuchte geometrische Summe R dar.

Ist $P_{i,x}$ die Projektion des Vektors P_i auf eine beliebige Richtungslinie x und R_x die Projektion des Vektors R auf dieselbe Richtungslinie, so ist

$$R_x = \Sigma P_{i,x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

d. h. R_x ist die algebraische Summe der Vektoren $P_{i.x}$. Hieraus folgt nach (36, a)

$$R^2 = (\Sigma P_{i,x})^2 + (\Sigma P_{i,y})^2 + (\Sigma P_{i,z})^2 \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Zweiter Abschnitt. Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung.

§ 1. **Einleitung.** Mechanik ist die Lehre von der Bewegung physikalischer Körper und den Ursachen, durch welche die Eigenart dieser Bewegung in den verschiedenen Einzelfällen hervorgerufen wird. Gegenwärtig stellt die Mechanik, die zu einer sehr umfangreichen Wissenschaft angewachsen ist, einen besonderen Lehrgegenstand dar und gibt es für sie zahlreiche besondere Leitfäden und Lehrbücher. Wir werden im vorliegenden zweiten Abschnitte nicht nach möglichster Vollständigkeit streben, sondern vielmehr ausschließlich jene Fragen der Mechanik behandeln, die uns später wiederholt entgegentreten werden und ohne deren Kenntnis man sich in den physikalischen Erscheinungen und Theorien nicht zurechtfinden kann. Im ersten Kapitel, der Kinematik, werden wir einige Eigenschaften der Bewegung betrachten, ohne die Frage nach den Ursachen, durch welche diese Bewegung hervorgerufen wird, zu berühren. Bevor wir jedoch auf die Bewegung physikalischer Körper eingehen, deren einzelne Teile gleichzeitig verschiedene Bewegungen ausführen können und die daher vielfach sehr verwickelte Beziehungen aufweisen, behandeln wir den einfachen Fall der Bewegung eines materiellen Punktes.

Dem materiellen Punkte schreiben wir folgende Eigenschaften zu:

1. Der materielle Punkt hat die Fähigkeit, sich zu bewegen, d. h. seinen Ort im Raume zu verändern.
2. Er enthält eine gewisse Stoffmenge.
3. Er ist der Einwirkung seiner Umgebung unterworfen.

Andere Eigenschaften wollen wir dem materiellen Punkte vorläufig nicht zuerteilen, und vor allem wollen wir von seiner Ausdehnung absehen, obgleich es scheinen könnte, daß dies dem Umstande, daß er Stoff enthält, widerspricht. Wir setzen indes voraus, daß die im materiellen Punkte enthaltene Materie einen so kleinen Raum erfüllt, daß kein Teil sich von den anderen weder durch seine Eigenschaften, noch auch durch die Art seiner Bewegung unterscheidet. Deshalb ist es auch nicht erforderlich, die räumliche Ausdehnung des materiellen Punktes in Betracht zu ziehen, und wir können daher annehmen, daß er dieser Eigenschaft überhaupt entbehrt. Ein unveränderliches Punktsystem nennt man die Gesamtheit materieller Punkte, welche sich nur unter der Bedingung, daß ihre gegenseitigen Entfernungen unverändert bleiben, bewegen können.

Jeden physikalischen Körper kann man sich in eine sehr große Zahl sehr kleiner Elemente geteilt denken, deren jedes als materieller Punkt angesehen werden kann, während das Element eines geometrischen Körpers nicht als geometrischer Punkt gelten darf. Dieser Unterschied rührt daher, daß der materielle Punkt Materie enthält, die ihrem Wesen nach Raum erfüllen muß.

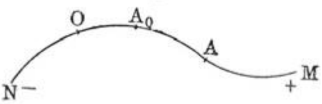
In gewissen Abschnitten der Physik (Theorie der Elastizität u. a.) werden „Elemente eines physikalischen Körpers" betrachtet, deren jedes in seinen verschiedenen geometrischen Punkten nicht genau die gleichen Eigenschaften oder Bewegungen besitzt. Solch ein „Element" kann also nicht als materieller Punkt angesehen werden.

Die physikalischen Körper stellen keine unveränderlichen Systeme materieller Punkte dar. Dies ist ein überaus wichtiger Satz; aus ihm folgt, daß die bei der Untersuchung eines unveränderlichen Systems erhaltenen Resultate nicht ohne weiteres für die physikalischen Körper gelten.

§ 2. **Geschwindigkeit.** Bei Betrachtung der Bewegung eines Punktes kommen als wichtigste Größen in Betracht: die Trajektorie (die Bahn), der durchlaufene Weg, die Zeit und Richtung der Bewegung. Trajektorie oder Bahn heißt die Linie, auf welcher die Bewegung vor sich geht. Je nach Art der Bahn unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegungen.

Der durchlaufene Weg hat in der Mechanik nicht immer eine mit dem buchstäblichen Sinne dieses Wortes zusammenfallende Bedeutung. Bewegt sich der Punkt längs einer gewissen Linie, z. B. NM (Fig. 6), von bekanntem geometrischen Charakter (Gerade, Kreis, Ellipse usw.) und wählen wir auf ihr einen beliebigen Punkt O, von dem aus wir die Entfernungen $s = OA$ der Punkte A auf der Linie selbst messen wollen, so nennen wir seine veränderliche Entfernung von O, d. h. die Größe s, den „durchlaufenen Weg". Wenn der Punkt seine Bewegung bei O beginnt und sich immer in einer Richtung fortbewegt, so stellt s den durchlaufenen Weg im buchstäblichen Sinne dar. Beginnt die Bewegung bei einem Punkte A_0, so heißt $s_0 = OA_0$ der Anfangswert des Weges. Wenn der Punkt,

Fig. 6.



nachdem er sich von O entfernt hatte, sich ihm wiederum nähert, so nimmt der „Weg“ ab. Die Größe s rechnen wir nach der einen Seite hin, z. B. in der Richtung OM, positiv, in der anderen negativ. Der Punkt hat eine positive Bewegungsrichtung, wenn das positive s wächst oder das negative seinem absoluten Werte nach abnimmt; bei negativer Bewegungsrichtung ist das Umgekehrte der Fall. Die Zeit t wird von einem beliebigen Augenblick an gerechnet; jedem späteren entspricht ein bestimmter Wert der Zeit t. Zwei Zeitmomente t_1 und t_2 bestimmen das Zeitintervall $t_2 - t_1$, welches man auch mit t bezeichnen kann, wie man auch für den ihm entsprechenden Weg $s_2 - s_1$ bisweilen s schreibt. Dem Anfangswege s_0 entspricht im allgemeinen ein Anfangswert t_0 der Zeit.

Es sei nun s irgend eine Funktion der Zeit

$$s = f(t) \qquad (1)$$

Den einfachsten Fall der Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Bahn haben wir, wenn

$$s = s_0 + at \qquad (2)$$

ist, wo s_0 der Anfangswert des Weges und a ein Koeffizient ist, der numerisch gleich dem in der Zeiteinheit durchlaufenen Wege ist, d. h. genauer ausgedrückt: a ist eine Zahl, welche gleich der in obigem Wege enthaltenen Zahl linearer Einheiten ist. In dem Beispiel, auf welches sich Formel (2) bezieht, sind die in beliebigen gleichen Zeitabständen durchlaufenen Wege untereinander gleich. Eine solche Bewegung wird eine gleichförmige genannt.

Die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung ist ein ursprünglicher Begriff, welcher keine Definition zuläßt und einer solchen auch nicht bedarf. Wir bezeichnen als Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung eine Größe, welche dem in der Zeit t durchlaufenen Wege s direkt und der zur Zurücklegung eines bestimmten Weges erforderlichen Zeit t indirekt proportional ist. Als Einheit der Geschwindigkeit wählen wir die Geschwindigkeit irgend einer gleichförmigen Bewegung; der Zahlenwert v jeder anderen Geschwindigkeit wird alsdann durch die Formel

$$v = C\frac{s}{t} \qquad (3)$$

ausgedrückt, wobei der Weg s tatsächlich in der Zeit t durchlaufen war. Soll der Koeffizient $C = 1$ sein, so muß man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit annehmen, bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird; dann ist

$$v = \frac{s}{t} \qquad (4)$$

Berücksichtigt man die Formel (2), so muß man statt (3) oder (4) schreiben:

$$v = C\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \text{oder} \quad v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Formel (2) gibt $s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$, folglich ist

$$v = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

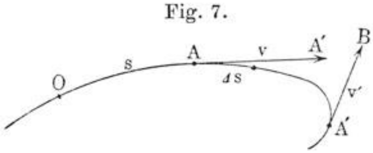
Diese Formel zeigt, daß für $C = 1$, d. h. bei der angegebenen Wahl der Geschwindigkeitseinheit die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung zahlenmäßig dem in der Zeiteinheit durchlaufenen Wege gleich ist, d. h. sie wird durch diesen Weg „gemessen". (Nicht aber darf man sagen, die Geschwindigkeit sei gleich dem Wege usw., denn die Geschwindigkeit ist eine Größe eigener Art und kann daher nicht einem Wege gleich sein.)

Bei der ungleichförmigen Bewegung, wenn $s = f(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist, wird die mittlere Geschwindigkeit v_m, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes, der bei gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit denselben Weg wie der gegebene Punkt durchläuft, bestimmt durch die Formel

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Der Begriff der Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblicke ist bei der ungleichförmigen Bewegung schon kein ursprünglicher mehr; er bedarf der Definition. Wir nehmen zu dem Zwecke an, der Punkt habe in dem kurzen auf den Moment t folgenden Zeitintervall Δt den kleinen Weg Δs (Fig. 7) durchlaufen, der je nach der Bewegungsrichtung positiv oder negativ ist. Dann ergibt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit v_m für das kleine Zeitintervall Δt. Der Grenzwert, welchem diese mittlere Geschwindigkeit bei unendlich abnehmendem Zeitintervall Δt zustrebt, heißt die Geschwindigkeit v im gegebenen Augenblick. Somit haben wir

Fig. 7.



$$v = \lim v_m = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist der Weg als Funktion der Zeit gegeben:

$$s = f(t),$$

so kann man auch schreiben

$$v = f'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit.

Wenn z. B $s = 4t^5 - 7t^3 + 5t^2$ ist, so ist $v = 20t^4 - 21t^2 + 10t$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für} & s = at + bt^2 \\ \text{ist} & v = a + 2bt \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

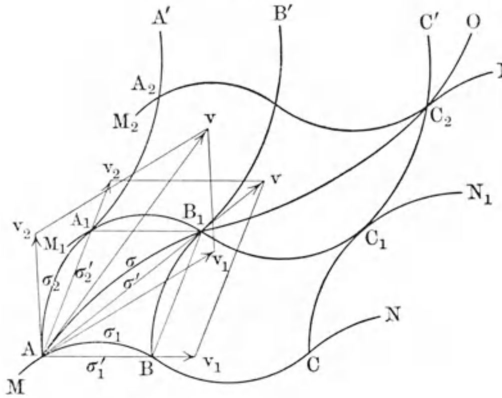
Die Geschwindigkeit hat dasselbe Vorzeichen wie Δs, d. h. sie ist positiv oder negativ, je nachdem sich der Punkt nach der Seite der positiven (wachsenden) oder negativen (abnehmenden) s bewegt. Als Richtung der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ kann man die Richtung der sehr kleinen, zum Bogen Δs gehörenden Sehne ansehen; die Richtung der Geschwindigkeit v in einem gegebenen Augenblicke ist die Richtung der Tangente im entsprechenden Punkte der Bahnlinie.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt danach mit der Bewegungsrichtung selbst zusammen.

Die Geschwindigkeit ist ein Vektor und kann daher durch einen Pfeil dargestellt werden, dessen Länge ebensoviel Längeneinheiten enthält als in der darzustellenden Geschwindigkeit Einheiten der Geschwindigkeit enthalten sind. In Fig. 7 ist der Fall dargestellt, wo der Punkt, wenn er sich in A befindet, die positive Geschwindigkeit v hat; befindet er sich in A', so soll seine Geschwindigkeit negativ und seine Größe durch den Pfeil v' dargestellt sein.

§ 3. Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. Wenn irgend ein Punkt sich auf der Kurve MN (Fig. 8) bewegt und die Kurve selbst sich parallel zu sich selbst verschiebt, so daß alle ihre geometrischen Punkte auf den gleichen und einander parallelen Kurven AA', BB', CC' usw. fortrücken, so führt unser Punkt zweierlei Bewegungen aus; eine längs der Kurve MN, die andere zugleich mit dieser Kurve. Um zu erfahren, welcher Art die wahre, sich aus diesen beiden zusammensetzende Bewegung des Punktes sein wird, konstruieren wir für eine Reihe verschiedener Zeitaugenblicke die Lagen dieses Punktes. Er möge sich zuerst in A befinden; nach einer gewissen Zeit t_1 hat er sich auf der Kurve MN nach B bewegt, zur selben Zeit aber

Fig. 8.



hat die Kurve MN die neue Lage $M_1 N_1$ angenommen; ihr geometrischer Punkt B ist nach B_1 gerückt, und dies wird somit auch die neue Lage des bewegten Punktes zur Zeit t_1 sein. In ähnlicher Weise finden wir seine Lage C_2 zur Zeit t_2. In der angegebenen Weise können wir eine große Anzahl von Lagen festlegen, die von unserem Punkte in verschiedenen Zeitaugenblicken eingenommen werden. Verbindet man sie durch Gerade, so erhält man eine gebrochene Linie. Denkt man sich nun die Zahl der auf diese Weise erhaltenen Lagenpunkte unbegrenzt vermehrt, so wird sich die erwähnte gebrochene Linie einer gewissen Grenze nähern, welche die Kurve $AB_1 C_2 O$ bildet. Es ist dies die wahre Bahnlinie des Punktes bei seiner sogenannten zusammengesetzten Bewegung. Wir wollen nun die Geschwindigkeit v der Bewegung des Punktes auf dieser Kurve für einen beliebigen Augenblick, z.B. für den, wo er sich in A befindet, bestimmen. Die Geschwindigkeit v_1 der Bewegung längs AN und diejenige v_2 der Bewegung längs AA' nehmen wir als bekannt an. AB möge nunmehr (Fig. 8) den kleinen Weg $\sigma_1 = \varDelta s_1$ bezeichnen, welchen der Punkt in der kurzen Zeit $\varDelta t$ zurücklegt; innerhalb derselben Zeit verschiebt sich AN nach $A_1 N_1$, so daß der Bogen $AA_1 = \sigma_2 = \varDelta s_2$ den bei der zweiten Bewegung durchlaufenen Weg darstellt. Der wahre in der Zeit $\varDelta t$ durchlaufene Weg wird durch den Bogen $AB_1 = \sigma = \varDelta s$ dargestellt. Die Sehnen σ_1', σ_2' und σ' der drei bezeichneten Bögen ergeben die beiden Seiten und die Diagonale des Parallelogramms $AA_1 B_1 B$.

Die drei mittleren Geschwindigkeiten der beiden Komponenten und der Resultante der Bewegung sind numerisch gleich den durch $\varDelta t$ dividierten Bögen σ_1, σ_2 und σ. Die wahren Geschwindigkeiten im Punkte A sind gleich den Grenzwerten dieser drei Brüche. Da hier die Bögen durch ihre Sehnen ersetzt werden können, wie in der Lehre von den Grenzwerten der Funktionen bewiesen wird, so kann man für die drei mittleren Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}$ schreiben

$$\bar{v}_1 = \frac{\sigma_1'}{\varDelta t}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\sigma_2'}{\varDelta t}, \quad \bar{v} = \frac{\sigma'}{\varDelta t} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

Diese drei Geschwindigkeiten tragen wir längs den entsprechenden Sehnen, wie dies in Fig. 8 geschehen ist, ab, und da die Geschwindigkeiten ihrer Größe nach proportional den Sehnen sind, so ergeben die Pfeile $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}$, welchen diese Geschwindigkeiten entsprechen, ebenfalls die Seiten und Diagonale eines Parallelogramms. Bei unbegrenzter Abnahme des Intervalls $\varDelta t$ werden sich die drei mittleren Geschwindigkeiten drei Grenzwerten nähern, welche die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Komponenten und die Geschwindigkeit v der Resultante der Bewegung darstellen. Der Größe nach müssen sie somit dieselbe Eigenschaft haben wie die drei mittleren Geschwindigkeiten für jeden beliebig kleinen Wert der Zeit $\varDelta t$, d.h. die Resultante der Geschwindigkeit v wird in jedem gegebenen Augenblicke nach Größe und Richtung durch die Diagonale des aus den Geschwindigkeitskomponenten konstruierten Parallelogramms bestimmt.

Dies Ergebnis kann man verallgemeinern und durch fortgesetzte Konstruktionen die Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung erhalten, welche aus drei und mehr Einzelbewegungen besteht. Umgekehrt kann man eine gegebene Geschwindigkeit v immer als Resultante betrachten und auf unendlich viele Arten in zwei oder mehr Komponenten „zerlegen". Bei Zerlegung in zwei Geschwindigkeiten hat man ein Parallelogramm (oder im besonderen Falle ein Rechteck) zu konstruieren; bei Zerlegung in drei ein Parallelepipedon (im besonderen Falle ein rechtwinkliges).

Die zusammengesetzte Geschwindigkeit v eines Punktes ist offenbar gleich der geometrischen Summe ihrer Komponenten und kann nach der Regel vom Polygon der Vektoren (S. 54) konstruiert werden.

Bewegt sich ein Punkt im Raume, so läßt sich seine Geschwindigkeit v in jedem gegebenen Augenblicke zerlegen in drei Geschwindigkeiten v_x, v_y und v_z, welche die Richtungen der Koordinatenachsen haben. Sind z. B. die Koordinaten x, y und z des bewegten Punktes als Funktionen der Zeit: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und $z = \Theta(t)$ gegeben, so kann man seine Bewegung als eine aus drei geradlinigen zusammengesetzte betrachten, welche den rechtwinkligen Koordinatenachsen parallel sind. Die Geschwindigkeiten dieser Bewegung, d. h. die Größen v_x, v_y und v_z werden bestimmt durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= lim\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ v_y &= lim\,\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \psi'(t) \\ v_z &= lim\,\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \Theta'(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ferner haben wir

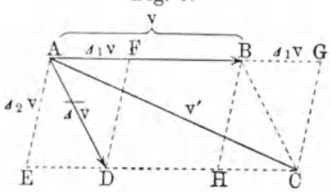
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$cos\,(v, x) = \frac{v_x}{v}; \quad cos\,(v, y) = \frac{v_y}{v}; \quad cos\,(v, z) = \frac{v_z}{v} \quad \ldots \quad (13)$$

§ 4. Beschleunigung der geradlinigen gleichförmigen Bewegung. Die Geschwindigkeit wird, da sie ein Vektor ist, durch Größe und Richtung bestimmt. Dementsprechend sind zwei ihrer Art nach verschiedene Änderungen der Geschwindigkeit möglich: eine Änderung der Größe und eine solche der Richtung.

Wenn man der gegebenen Geschwindigkeit v einen kleinen geometrischen Zuwachs $\overline{\Delta v}$ erteilt, so kann, je nach Richtung des letzteren, eine wesentlich verschiedene Änderung der ursprünglichen Geschwindigkeit v erfolgen. Haben v und $\overline{\Delta v}$ dieselbe oder direkt entgegengesetzte Richtung, so wird sich die Geschwindigkeit nur ihrer Größe nach ändern. Wenn dagegen v und $\overline{\Delta v}$ miteinander einen beliebigen Winkel bilden, so wird sich die neue Geschwindigkeit im allgemeinen von der früheren sowohl nach Größe als nach Richtung unterscheiden. Im besonderen Falle kann das Hinzufügen der Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ bloß eine Richtungsänderung von v, ohne Größenänderung, zur Folge haben. Umgekehrt kann man jede Änderung der Geschwindigkeit v, d. h. jeden Übergang derselben in die neue Geschwindigkeit v' sich entstanden denken durch geometrische Addition von v mit einer gewissen Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$, welche sich leicht konstruieren läßt, sobald $v = AB$ und $v' = AC$ gegeben sind (Fig. 9). Zu diesem Zwecke verbinden wir die Punkte B und C und konstruieren das Parallelogramm $ABCD$; die Seite AD ergibt sodann die Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$. Verlängert man AB bis nach G, so daß $AG = AC = v'$ wird, verbindet die Punkte G und C und zieht $DF \parallel CG$, so kann man die Geschwindigkeit $\overline{\Delta v} = AD$ in zwei Geschwindigkeiten zerlegen, welche symbolisch durch $\Delta_1 v = AF = BG$ und $\overline{\Delta_2 v} = AE = GC$ bezeichnet werden mögen. Von diesen bringt die eine $\Delta_1 v$ nur eine Größenänderung, die andere $\overline{\Delta_2 v}$ nur eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit hervor; $\Delta_1 v$ ist der algebraische, $\Delta_2 v$ der geometrische Geschwindigkeitszuwachs.

Fig. 9.



Wir wenden uns nun zunächst der geradlinigen Bewegung zu, bei welcher sich die Geschwindigkeit nur der Größe nach ändert. Dem einfachsten hierher gehörigen Falle entspricht die Formel

$$v = v_0 + bt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

in welcher v_0, d. h. die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit im Augenblicke $t = 0$ ist. Bei dieser sogenannten gleichförmig veränderlichen Bewegung erfährt die Geschwindigkeit in beliebigen gleichen Zeitintervallen gleiche Zunahmen, die je nach dem Vorzeichen des Koeffizienten b positiv oder negativ sein können. Die Formel (14) zeigt, daß b gleich dem Zahlenwerte der in der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeit ist.

Wir können schreiben

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wo $v_1 = v_0 + bt_1$ und $v_2 = v_0 + bt_2$ die Geschwindigkeiten für t_1 bzw. t_2 sind. Wenn man die erlangte Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ einfach mit v und den Zeitabstand mit t bezeichnet, so erhält man

$$b = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

woraus sich die oben erwähnte Bedeutung von b noch deutlicher ergibt.

Die Beschleunigung der gleichförmig veränderlichen, geradlinigen Bewegung ist eine Größe besonderer Art (sui generis), welche als Kennzeichen oder Maß für den Änderungsgrad der Geschwindigkeit dient. Sie ist somit direkt proportional der im gegebenen Zeitabstande erworbenen (oder eingebüßten) Geschwindigkeit v und indirekt proportional der Zeit t, welche zur Änderung um die gegebene Größe v erforderlich ist. Als Einheit kann man die Beschleunigung irgend einer gleichförmig veränderlichen Bewegung annehmen. Der Zahlenwert w für die Beschleunigung einer beliebigen gleichförmig veränderlichen Bewegung wird durch die Formel

$$w = C\frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

ausgedrückt, in welcher C gleich dem Zahlenwerte für die Beschleunigung einer solchen Bewegung ist, bei welcher in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit erlangt wird. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$w = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

so muß als Einheit der Beschleunigung unbedingt die Beschleunigung einer solchen Bewegung festgelegt werden, bei welcher in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit um die Einheit zunimmt. Vergleicht man (18) mit (16), so ergibt sich

$$w = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Das bedeutet: wenn man in der allgemeinen Formel (17) $C = 1$ setzt, so wird die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit gemessen, welche in der Zeiteinheit erlangt wird. Wir werden immer $C = 1$ setzen, also Formel (18) benutzen. Dann geht (14) über in

$$v = v_0 + wt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

und aus den Formeln (9) ergibt sich, daß der durchlaufene Weg durch

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} w t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ausgedrückt wird, wobei die Entfernungen s von dem Punkte gerechnet werden, in welchem sich der bewegte Punkt zur Zeit $t = 0$ befand und seine Geschwindigkeit v_0 war. Die durch die Formeln (20) und (21) dargestellte Bewegung heißt gleichförmig beschleunigt, wenn w positiv, und gleichförmig verzögert, wenn w negativ ist.

Für die beiden Augenblicke t_1 und t_2 sind die Geschwindigkeiten $v_1 = v_0 + wt_1$ und $v_2 = v_0 + wt_2$ und die durchlaufenen Wege

$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} w t_1^2$ und $s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} w t_2^2$. Diese Formeln ergeben unmittelbar $v_2^2 - v_1^2 = 2w(s_2 - s_1)$. Bezeichnet man den durchlaufenen Weg mit s, so erhält man:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ws \quad \text{. . . . .} \quad (22)$$

d. h. bei der gleichförmig veränderlichen Bewegung ist die Änderung des Quadrates der Geschwindigkeit für einen gewissen Zeitabstand gleich dem doppelten Produkte aus der Beschleunigung und dem in dieser Zeit durchlaufenen Wege.

Für $v_0 = 0$ hat man

$$v = wt; \qquad s = \frac{1}{2} wt^2 \quad \text{. . . . .} \quad (22, \text{a})$$

oder nach Entfernung von t:

$$v = \sqrt{2ws}; \qquad s = \frac{v^2}{2w} \quad \text{. . . . .} \quad (22, \text{b})$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$v = v_0 - wt; \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} wt^2 \quad \text{. . . . . .} \quad (23)$$

wobei w die Beschleunigung bedeutet. Anstatt (22) haben wir hier:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2ws \quad \text{. . . . .} \quad (24)$$

Ein Punkt, welcher sich gleichförmig verzögert mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und mit der Beschleunigung $-w$ bewegt, gelangt zur Ruhe nach einer Zeit T, welche sich aus der Gleichung $v = v_0 - wT = 0$ bestimmt, nämlich nach Ablauf der Zeit:

$$T = \frac{v_0}{w} \quad \text{. . . . .} \quad (24, \text{a})$$

Setzt man diesen Wert anstatt t in den Ausdruck (23) für s ein, so erhält man für den Gesamtweg S, welchen der Punkt von dem Augenblicke an, wo er die Geschwindigkeit v_0 besaß, bis zum Stillstande durchlaufen hat:

$$S = \frac{v_0^2}{2w} \quad \text{. . . . .} \quad (24, \text{b})$$

§ 5. Beschleunigung einer beliebigen geradlinigen Bewegung. Bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit eine gewisse Funktion der Zeit; es sei:

$$v = \varphi(t) \quad \text{. . . . .} \quad (25)$$

In diesem Falle können wir von der mittleren Beschleunigung w_m für das Zeitintervall zwischen den Augenblicken t_1 und t_2 reden, welchen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 entsprechen; sie ist gleich der Beschleunigung eines Punktes, welcher sich gleichförmig veränderlich bewegt und die Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ in der Zeit $t_2 - t_1$ erlangt, d. h. es ist:

$$w_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{t},$$

wenn man die erlangte Geschwindigkeit und den Zeitabstand einfach mit v und t bezeichnet.

Von der mittleren Beschleunigung kann man zur Beschleunigung im gegebenen Augenblick t übergehen. Ändert sich die Geschwindigkeit v innerhalb des kleinen Zeitintervalls Δt um Δv, dann ist $w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ die mittlere Beschleunigung für das kleine Zeitintervall Δt. Ihr Grenzwert, dem sie bei unbegrenzter Abnahme der Zeit Δt zustrebt, stellt die Beschleunigung w im gegebenen Augenblick dar. Es ist somit:

$$w = lim\, w_m = lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Für $v = \varphi(t)$ ist:

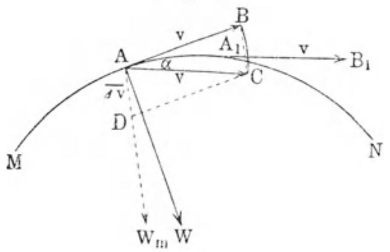
$$w = \varphi'(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

d. h. die Beschleunigung der geradlinigen Bewegung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Wenn z. B. $v = 7\,t^4 - 8\,t^3 + 5\,t$ ist, so wird die Beschleunigung $w = 28\,t^3 - 24\,t^2 + 5$; für $v = bt^2$ ist $w = 2\,bt$.

Die Beschleunigung w der geradlinigen Bewegung hat die Richtung des Geschwindigkeitszuwachses Δv. Hieraus folgt, daß die Beschleunigung positiv ist, wenn die positive Geschwindigkeit wächst oder wenn die negative Geschwindigkeit ihrem absoluten Betrage nach abnimmt; umgekehrt ist die Beschleunigung negativ, wenn die positive Geschwindigkeit abnimmt oder die negative ihrem absoluten Betrage nach wächst. Mit anderen Worten: die Beschleunigung hat die gleiche Richtung wie die Bewegung, wenn die Geschwindigkeit dem absoluten Betrage nach wächst; sie hat eine der Bewegung entgegengesetzte Richtung, wenn diese Geschwindigkeit abnimmt.

§ 6. Beschleunigung der krummlinigen Bewegung. Wir betrachten zunächst den Fall einer gleichförmigen krummlinigen Bewegung; hierbei bleibt die Geschwindigkeit v ihrer Größe nach konstant und ändert nur ihre Richtung. Ein Punkt, der sich längs der ebenen Kurve MN bewegt (vgl. Fig. 10), habe im Punkte A die Geschwindigkeit $v = AB$. Nachdem er in der Zeit Δt den Weg $AA_1 = \Delta s$ zurückgelegt, soll im Punkte A_1 seine Geschwindigkeit $v = A_1B_1$ sein. Macht man $AC \parallel A_1B_1$ und ferner $AC = A_1B_1 = v$, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeit v in der Zeit $\varDelta t$ den Zuwachs $\overline{\varDelta v} = AD = BC$ erfahren hat. Die mittlere Beschleunigung w_m ist auch hier gleich:

Fig. 10.



$$w_m = \frac{\varDelta v}{\varDelta t} = \frac{AD}{\varDelta t} = \frac{BC}{\varDelta t} \quad (28)$$

Bei unbegrenzter Abnahme der Zeit $\varDelta t$ nähert sich die mittlere Beschleunigung w_m einer gewissen Grenze, welche die Beschleunigung im gegebenen Augenblick ist. Um diese Grenze zu finden, beschreiben wir mit $v = AB$ als Radius einen Bogen BC um den Punkt A und formen (28) um, indem wir $\angle\ BAC = \alpha$, also $\smile BC = v\alpha$ setzen, es ist dann:

$$w_m = \frac{BC}{\varDelta t} = \frac{\smile BC}{\varDelta s} \cdot \frac{\varDelta s}{\varDelta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} = v \cdot \frac{\alpha}{\varDelta s} \cdot \frac{\varDelta s}{\varDelta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} \cdot \quad (29)$$

Beim Übergang zur Grenze haben wir $\dfrac{BC}{\smile BC} = 1$; $lim \dfrac{\varDelta s}{\varDelta t} = v$ [nach Formel (7) S. 58] und $lim \dfrac{\alpha}{\varDelta s} = \dfrac{1}{R}$, wo R der Krümmungsradius der Kurve im Punkte A ist. Auf diese Weise erhalten wir:

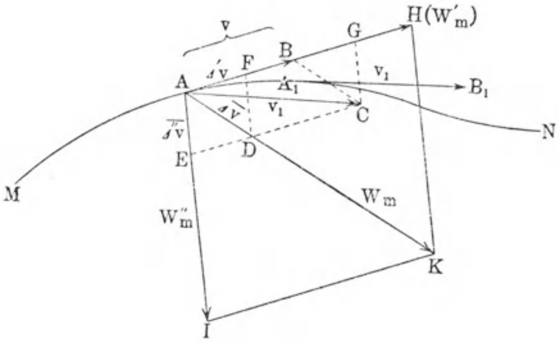
$$w = lim\, w_m = \frac{v^2}{R} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (30)$$

Die Richtung der Beschleunigung wird auf folgende Weise bestimmt: w_m ist $\| BC$; BC bildet als Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks gleiche Winkel mit den Seiten AB und AC. Der Grenzwert des Winkels α ist Null, daher nähert sich $\angle\ ABC$ einem Rechten; die mittlere Beschleunigung w_m, welche zu BC parallel ist, wird im Grenzfalle senkrecht zu $v = AB$. Hieraus folgt, daß die Beschleunigung w senkrecht zur Tangente AB ist, daß sie also die Richtung der Normalen zur Kurve MN im Punkte A hat.

Bei der gleichförmigen krummlinigen Bewegung hat die Beschleunigung in jedem Augenblick die Richtung der Normalen zur Kurve und ist der Größe nach gleich $\dfrac{v^2}{R}$, d. h. ihr Zahlenwert ist gleich dem Quadrat des Zahlenwertes der Geschwindigkeit, dividiert durch den Zahlenwert des Krümmungsradius.

Wir gehen nunmehr über zum allgemeinen Falle einer ungleichförmigen krummlinigen Bewegung. Hat der Punkt in A (Fig. 11) die Geschwindigkeit $v = AB$ und nach einiger Zeit $\varDelta t$ in A_1 die Geschwindigkeit $v_1 = A_1B_1$, so ist, wenn man AC gleich und parallel A_1B_1 macht, der geometrische Geschwindigkeitszuwachs $\overline{\Delta v} = AD = BC$. Hieraus ergibt sich die mittlere Beschleunigung $w_m = \dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{AD}{\Delta t} = AK$. Wir machen $AG = AC = A_1B_1 = v_1$, $DF \parallel CG$ und zerlegen $\overline{\Delta v} = AD$ in zwei Geschwindigkeiten $\Delta' v = AF = BG$ und $\overline{\Delta'' v} = AE = CG$; die erstere ruft eine algebraische Änderung, eine Größenänderung der Geschwindigkeit ($\Delta' v = v_1 - v$) hervor, die zweite — eine geometrische Änderung, d. h. eine Richtungsänderung. Dementsprechend erhalten wir die mittlere Beschleunigung $w'_m = \dfrac{\Delta' v}{\Delta t}$ $= \dfrac{AF}{\Delta t} = AH$, die das Maß für die mittlere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit ihrer Größe nach gibt, und die mittlere Beschleunigung $w''_m = \dfrac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \dfrac{AE}{\Delta t} = AI$, welcher die mittlere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit in bezug auf die Richtung darstellt.

Fig. 11.



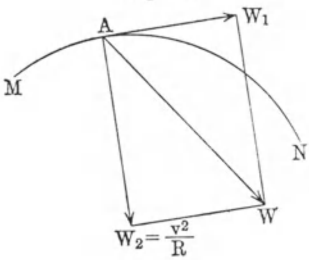
Da die drei Größen $w_m = AK$, $w'_m = AH$ und $w''_m = AI$ den Geraden AD, AF und AE proportional sind, so wird w_m durch die Diagonale des über w'_m und w''_m konstruierten Parallelogramms bestimmt. Nimmt die Zeit Δt unbegrenzt ab, so streben die drei Beschleunigungen gewissen Richtungen und Werten zu, die wir mit w, w_1 und w_2 bezeichnen wollen. Hierbei ist:

$$\left.\begin{aligned} w &= lim \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \\ w_1 &= lim \frac{\Delta' v}{\Delta t} \\ w_2 &= lim \frac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Hier ist $\overline{\Delta v}$ der wahre, d. h. geometrische Geschwindigkeitszuwachs, $\Delta' v$ der algebraische Zuwachs; der Zuwachs $\overline{\Delta'' v}$ entspricht vollkommen der Größe $\Delta_2 v = AE$ (Fig. 9), die Beschleunigung w_2 der Größe w in Formel (29) und (30). Der Richtung nach fällt w_1 mit der Tangente im Punkte A und w_2 mit der Normalen im selben Punkte zusammen; hieraus folgt, daß die Beschleunigungen w_1 und w_2 zueinander senkrecht sind. Die erste heißt die tangentiale, die zweite — die normale Beschleunigung. Wir sehen, daß w_m die Diagonale des aus w'_m und w''_m konstruierten Parallelogramms ist. Dies muß auch gelten, gleichviel wie klein Δt gewählt ist, also auch für den Grenzfall. Dann ist $\angle\ HAI = \pi : 2$ und das Parallelogramm verwandelt sich in ein Rechteck.

Aus diesen Darlegungen geht folgendes hervor: Bei der krummlinigen ungleichförmigen Bewegung erfährt der bewegte Punkt in jedem gegebenen Augenblick eine gewisse Beschleunigung w, die im allgemeinen einen gewissen Winkel mit der Bewegungsrichtung bildet und die als Maß für die totale Veränderlichkeit der Geschwindigkeit dient. Die Beschleunigung w (Fig. 12) kann geometrisch in eine tangentiale Beschleunigung w_1, welche die Richtung der Tangente hat, und eine normale Beschleunigung w_2 zerlegt werden. Letztere ist senkrecht zur Bewegungsrichtung und gleich $v^2 : R$, wo R den Krümmungsradius im gegebenen Punkte darstellt. Die Beschleunigungen w_1 und w_2 geben ihrerseits das Maß für die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit nach Größe und Richtung ab.

Fig. 12.



Hiernach ist:

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{\left(lim \frac{\Delta' v}{\Delta t}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

§ 7. **Von der drehenden Bewegung.** Ein unveränderliches Punktsystem oder, wie wir der Kürze halber sagen wollen, ein „Körper" (obgleich, wie früher gezeigt, ein physikalischer Körper kein unveränderliches System darstellt), kann sich sehr verschiedenartig bewegen. Wir wollen hier nur noch die drehende Bewegung betrachten. Hierbei bewegen sich alle Punkte m, M, M_1 usw. des Körpers auf Kreislinien, deren Ebenen senkrecht zu einer Geraden, der sogenannten Drehungsachse AB, stehen und deren Mittelpunkte auf dieser Achse liegen (Fig. 13). Alle Radien Om, OM, O_1M_1 usw. drehen sich im selben Zeitabstande um ein und denselben Winkel $\varphi = \angle\ mOn = \angle\ MON$

$= \angle M_1 O_1 N_1$ usw. Wir rechnen den Winkel φ von irgendeiner Anfangslage der Radien (der von den bewegten Punkten auf die Drehungsachse gefällten Senkrechten) an; φ ist im allgemeinen eine Funktion der Zeit und wir setzen demnach:

$$\varphi = F(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Der vom entsprechenden Punkte durchlaufene Weg ist:

$$s = r\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

wo r der Radius des Kreises ist, auf dessen Peripherie sich der Punkt bewegt.

Der einfachste Fall einer Drehbewegung tritt ein, wenn

$$\varphi = at \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

ist, wo a eine konstante Zahl und gleich dem Winkel ist, um welchen sich das System in der Zeiteinheit dreht. Diese Drehbewegung heißt gleichförmig. Der vom Punkte durchlaufene Weg ist in diesem Falle:

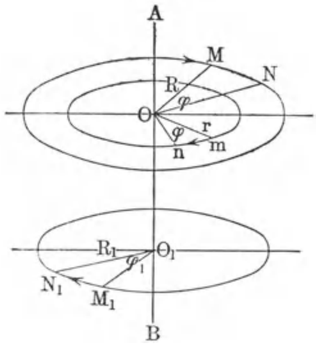
$$s = r\varphi = rat \quad \ldots \quad (36)$$

Hieraus folgt, daß sich alle Punkte des Systems gleichförmig bewegen. Die Geschwindigkeit v ist:

$$v = ra \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte des Systems sind ihren Abständen von der Drehungsachse proportional. Die Punkte der Achse selbst sind unbeweglich.

Fig. 13.



Wir bezeichnen mit T die Zeit einer vollen Umdrehung des Systems um seine Achse; im Verlaufe dieser Zeit wächst φ um 2π. Die Formel (35) ergibt $2\pi = aT$, also ist:

$$T = \frac{2\pi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Substituiert man hier für a seinen Wert nach (37), so wird $2\pi r = vT$ (einfacher ergibt sich dies aus $s = vt$), also:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{und} \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Die Schnelligkeit der Drehung wird durch eine besondere Größe bestimmt, die man Winkelgeschwindigkeit nennt. Sie ist dem Winkel φ, um welchen sich das System im gegebenen Zeitintervall t dreht, direkt proportional und indirekt proportional der Zeit t, welche zur Drehung des Systems um diesen Winkel φ erforderlich ist. Als

Einheit der Winkelgeschwindigkeit kann man die Winkelgeschwindigkeit irgendeiner gleichförmigen drehenden Bewegung annehmen, z. B. der Drehung der Erde. Somit ergibt sich, daß der Zahlenwert Θ für die Winkelgeschwindigkeit allgemein durch folgende Formel bestimmt wird:

$$\Theta = C\frac{\varphi}{t} \quad \text{. . . . .} \quad (40)$$

Setzt man $C = 1$, so muß als Einheit der Winkelgeschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit einer Bewegung gewählt werden, bei der sich das System in der Zeiteinheit um die Winkeleinheit dreht (d. h. um $57^{0},29\ldots$).

In diesem Falle haben wir:

$$\Theta = \frac{\varphi}{t} = a \quad \text{. . . . .} \quad (41)$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird somit durch den Winkel gemessen, um welchen sich das System in der Zeiteinheit dreht. Nimmt man als Einheit der Zeit die Sekunde an, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung $\Theta = 2\pi : 86164 = 0{,}0000729$, da eine volle Umdrehung der Erde in einem Sterntage erfolgt, welcher 86164 Sekunden mittlerer Zeit enthält. Die Formel (37) ergibt:

$$v = r\Theta \quad \text{. . . . .} \quad (42)$$

Ein Punkt, welcher von der Achse um die Einheit der Entfernung absteht ($r = 1$), hat eine Geschwindigkeit v_1, welche numerisch gleich a ist, vgl. (37); somit folgt nach (41):

$$\Theta = v_1.$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird also auch durch die Geschwindigkeit eines Punktes gemessen, der von der Drehungsachse um die Strecke Eins entfernt ist. Die Winkelgeschwindigkeit kann, je nach der Drehungsrichtung, positiv oder negativ sein.

Bei der ungleichförmigen drehenden Bewegung, für $\varphi = F(t)$, ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\Theta_m = \varphi : t$; die mittlere Winkelgeschwindigkeit für das kleine Zeitintervall $\varDelta t$, innerhalb dessen das System sich um den kleinen Winkel $\varDelta\varphi$ gedreht hat, ist $\Theta_m = \frac{\varDelta\varphi}{\varDelta t}$. Der Grenzwert dieser Größe, d. h.

$$\Theta = lim\,\Theta_m = lim\,\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta t} = \frac{d\varphi}{dt} = F'(t) \quad \text{. . . .} \quad (43)$$

heißt die Winkelgeschwindigkeit im gegebenen Augenblick. Wie wir hieraus sehen, ist die Winkelgeschwindigkeit die Ableitung des Drehungswinkels nach der Zeit. Wenn z. B. $\varphi = bt^3 - ct^2$ ist, so ist $\Theta = 3bt^2 - 2ct$.

Der Punkt, welcher sich im Achsenabstande r befindet, legt in der Zeit Δt den Weg $\Delta s = r\Delta\varphi$ zurück. Folglich ist seine Geschwindigkeit $v = \lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ oder $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$, d. h.:

$$v = r\Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Für $r = 1$ haben wir, wie auch früher, $\Theta = v_1$.

Gleichförmig veränderliche Drehung heißt eine solche, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit Θ sich in gleichen Zeitabständen um ein und dieselbe positive oder negative Größe ändert. Hier hat Θ folgende Form:

$$\Theta = \Theta_0 + bt.$$

Als Winkelbeschleunigung ϑ bezeichnet man eine besondere Größe, welche der Änderung der Winkelgeschwindigkeit in einer gewissen Zeit direkt und indirekt proportional dieser Zeit ist. Somit ist allgemein $\vartheta = C\frac{\Theta}{t}$. Setzt man $C = 1$, so muß man als Einheit der Winkelbeschleunigung die Winkelbeschleunigung einer solchen Bewegung wählen, bei welcher in der Zeiteinheit die Winkelgeschwindigkeit um ihre Einheit zu- bzw. abnimmt. Es ist alsdann:

$$\vartheta = \frac{\Theta}{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

Im allgemeinen ist die Winkelgeschwindigkeit Θ eine Funktion der Zeit $\Theta = f(t)$. Der Begriff der Winkelbeschleunigung in einem gegebenen Augenblick wird folgendermaßen erhalten. Wenn im Verlaufe der Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit Θ erlangt worden ist, so ist $\vartheta_m = \Theta : t$ die mittlere Winkelbeschleunigung, und der Grenzwert dieser Größe für ein unendlich kleines Zeitintervall ist die Winkelbeschleunigung ϑ für einen gegebenen Augenblick:

$$\vartheta = \lim\vartheta_m = \lim\frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt} = f'(t) \quad . \; . \; . \; . \quad (46)$$

Die Winkelbeschleunigung ist die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit, ihr Vorzeichen hängt vom Zeichen der Größe $\Delta\Theta$ ab.

Zweites Kapitel.

Von der Kraft.

§ 1. Definition der „Kraft". Auf S. 55 war unter anderem darauf hingewiesen worden, daß die Umgebung auf den materiellen Punkt einwirkt. Das gleiche gilt auch von einem System von materiellen

Punkten, also auch von dem physikalischen Körper. Erfährt dieser hierbei eine Geschwindigkeitsänderung nach Größe oder Richtung oder nach beiden, so sagt man, auf den Körper wirke eine Kraft. Aber nicht nur aus der hervorgerufenen Beschleunigung läßt sich ein Schluß auf die Kraft ziehen, sondern auch sonst legen uns vielfach eingehende Beobachtungen der äußeren Verhältnisse, unter denen der Körper steht, die Vermutung nahe, daß Kräfte auf ihn einwirken. Diese Verhältnisse sind bisweilen derart, daß wir aus ihrer Änderung entnehmen können, wievielmal sich die wirkende Kraft vergrößert oder verringert hat. Nehmen wir z. B. an, um eine feste Rolle laufe eine Schnur, an deren Enden zwei vollkommen gleichartige Körper A und B befestigt seien, und fügt man noch an B den Körper C hinzu, so erlangt A eine Beschleunigung, auf ihn wirkt eine Kraft ein. Offenbar ist, sobald man an B zwei, drei usw. gleiche Körper C anhängt, die auf A wirkende Kraft zweimal, dreimal usw. so groß geworden.

Wenn an einer an einem Körper A befestigten Schnur anstatt eines Arbeiters zwei oder drei, an Stelle von einem Pferde zwei oder drei ziehen, so wird die auf A wirkende Kraft zwei- oder dreimal größer, vorausgesetzt, daß die Kräfte der einzelnen Arbeiter oder der Pferde untereinander vollkommen gleich sind. Wenn man dem Pole einer Magnetnadel einen Magneten nähert, so wirkt auf ihn eine Kraft, die sich verdoppelt, sobald man zwei eben solche Magnete in die Nähe bringt (wobei übrigens alle sekundären Einflüsse unberücksichtigt bleiben mögen).

Auf solche Weise erhält man eine Vorstellung von der „Kraft“ als von einer Größe; auch sieht man ein, daß es möglich ist, verschiedene Kräfte miteinander zu vergleichen, sowie eine Krafteinheit auszuwählen. Es sei bereits an dieser Stelle bemerkt, daß das zweite Bewegungsgesetz, von dem weiter unten die Rede sein soll, nur dann als Gesetz gelten kann (und nicht als bloße Definition der „Kraft“), wenn man zugibt, daß Kräfte unabhängig von den durch sie hervorgerufenen Wirkungen miteinander verglichen werden können.

§ 2. Die Trägheit. Die drei fundamentalen Gesetze der Bewegung sind zuerst von Newton in seinen „Principia Philosophiae Naturalis“ im Abschnitte „Axiomata sive leges motus“ aufgestellt und formuliert worden. Wir wollen sie der Reihe nach betrachten.

Das erste Bewegungsgesetz (das Trägheits- oder Beharrungsgesetz) lautet nach Newton folgendermaßen: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare, d. h. ein jeder Körper verharrt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange keine Kraftwirkung ihn veranlaßt, seinen (Bewegungs-) Zustand zu ändern. Dieses Gesetz, welches eine besondere Eigenschaft der Materie zum Ausdruck bringt und Trägheits- oder Beharrungsgesetz genannt wird, ist bereits von Galilei entdeckt worden. Es besagt, daß ein sich selbst überlassener Körper, der also keiner Kraft unterworfen ist, sich entweder geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe bleibt.

Das Trägheitsgesetz stellt der Erkenntnis unüberwindliche Schwierigkeit entgegen, sobald man sich bemüht, seinen inneren Sinn zu ergründen. In ihm wird von einer geraden Linie gesprochen; auf welche Koordinatenachsen die gerade Linie zu beziehen ist, auf welcher sich ein keiner einzigen Kraft unterworfener Körper bewegen würde, ist nicht zu verstehen. Eine zusammenfassende Behandlung dieses Gegenstandes, über den Newton, Euler, Kant, Mach, C. Neumann und andere geschrieben haben, findet man in der Schrift von H. Streinz, „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik", Leipzig 1883, und in einer Abhandlung von Seeliger (Ber. d. Münch. Akad. 1906, S. 85).

Im ersten Abschnitt (§ 4) haben wir die neuen Anschauungen über den Raum und die Zeit erwähnt, welche dem Relativitätsprinzip zugrunde liegen. Die Einführung dieses Prinzips verändert den Sinn der Frage nach dem eigentlichen Inhalt des Trägheitsgesetzes; wir werden hierauf in Bd. V zurückkommen.

§ 3. Das zweite Bewegungsgesetz. Das Trägheitsgesetz kann nicht experimentell geprüft werden; wir erlangen Kenntnis von ihm nur dadurch, daß zu jeder Geschwindigkeitsänderung eine Kraft erforderlich ist, mit deren Abnahme sich auch die Geschwindigkeitsänderung vermindert. Auf die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Kraft und Beschleunigung antwortet das zweite Bewegungsgesetz: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur, d. h. die Bewegungsänderung ist proportional der wirkenden Kraft und hat mit ihr die gleiche Richtung. Unter der Bewegungsänderung eines gegebenen Körpers hat man seine Geschwindigkeitsänderung in der gegebenen Zeit, z. B. in der Zeiteinheit, zu verstehen. Ist die Kraft konstant, so ist diese Änderung nichts anderes als die Beschleunigung, welche in diesem Falle ebenfalls konstant ist. Ist jedoch die Kraft veränderlich, so ist ihr mittlerer Wert f für das kleine Zeitintervall Δt der mittleren Beschleunigung für dasselbe Zeitintervall proportional, d. h. proportional der Geschwindigkeitsänderung in der Zeiteinheit. Somit kann das zweite Bewegungsgesetz durch folgende Formel zum Ausdruck gebracht werden:

$$f = c\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo c ein Proportionalitätsfaktor ist, der sich auf den gegebenen, in Betracht gezogenen Körper bezieht. Die Größe der Kraft in jedem gegebenen Augenblick ist:

$$f = c \lim \frac{\overline{\varDelta v}}{\varDelta t} = cw \quad \cdots \cdots \cdots \quad (2)$$

wobei w die Beschleunigung in demselben Augenblick ist. Die Kraft f und die Beschleunigung w haben stets die gleiche Richtung.

Man kann das zweite Bewegungsgesetz auch folgendermaßen fassen: Die Beschleunigung ist in jedem gegebenen Augenblick der wirkenden Kraft proportional und hat mit ihr gleiche Richtung.

Die Formel (1) gibt:

$$\overline{\varDelta v} = \frac{1}{c} f \varDelta t \quad \cdots \cdots \cdots \quad (3)$$

wodurch die Größe der geometrischen Geschwindigkeitszunahme in der Zeit $\varDelta t$ bestimmt wird.

Sehr verbreitet ist die Ansicht, man müsse unter „mutatio motus" die Änderung des Bewegungsinhaltes (Bewegungsgröße s. unten) in der Zeiteinheit verstehen. Dieser Meinung kann sich der Verfasser nicht anschließen.

Folge des zweiten Gesetzes (Gesetz der Unabhängigkeit der Kraftwirkung von dem Zustande des Körpers und dem Vorhandensein anderer Kräfte; Unabhängigkeitsprinzip). Das zweite Bewegungsgesetz hat, indem es zeigt, von welchen Größen die geometrische Geschwindigkeitsänderung abhängt, auch sozusagen eine negative Seite.

Indem es die Frage, wovon die Größe $\overline{\varDelta v}$ für einen gegebenen Körper abhängt, erschöpfend löst, zeigt uns das Gesetz zugleich die Unabhängigkeit der Größe $\overline{\varDelta v}$ vom Bewegungszustande des Körpers selbst und von der Anwesenheit anderer Kräfte. Somit bringt die Kraft f in der Zeit $\varDelta t$ den gleichen geometrischen Geschwindigkeitszuwachs $\overline{\varDelta v}$ hervor, einerlei, ob sich der Körper selbst in Ruhe oder in beliebigem Bewegungszustande befindet und ob die Kraft f die einzige ist oder außer ihr noch andere Kräfte wirken. Dieses Gesetz von der unabhängigen Kraftwirkung kann man auch als ein besonderes Gesetz betrachten.

§ 4. Masse. Krafteinheit. Dichte. Die Formeln (1) und (3), welche den Koeffizienten c enthalten, beziehen sich auf einen gegebenen bestimmten Körper. Experiment und Beobachtung lehren uns, daß verschiedene Körper unter vollkommen gleichen Verhältnissen, d. h. wenn wir überzeugt sein können, daß auf sie die gleichen Kräfte wirken, verschiedene Beschleunigungen erfahren. Daraus geht hervor, daß der Koeffizient c für verschiedene Körper verschieden ist; er hängt von einer besonderen individuellen Eigenschaft des Körpers ab, welche man seine Masse nennt. Man sagt, zwei Körper haben die gleiche Masse, wenn sie unter Einwirkung der gleichen Kraft dieselbe Beschleunigung erhalten. Ein Körper hat eine 2, 3, 4 und allgemein n mal größere Masse als ein gegebener, wenn eine 2, 3, 4 ... n mal größere Kraft erforderlich ist, um beiden dieselbe Beschleunigung zu erteilen, oder wenn ein und dieselbe Kraft dem ersten Körper eine 2, 3, 4 ... n mal geringere Beschleunigung erteilt als dem gegebenen Körper. Bestimmt man die Kräfte, welche verschiedenen Körpern die gleiche Beschleunigung erteilen, oder betrachtet man die Beschleunigungen, welche von verschiedenen Körpern durch Einwirkung derselben Kraft erlangt werden, so kann man hierdurch die Massen verschiedener Körper miteinander vergleichen. Die Masse irgendeines beliebigen Körpers A kann man als Einheit der Masse wählen. Bezeichnet man sodann den Z^hlenwert der Masse irgendeines anderen Körpers mit m, so sieht man, daß die Kraft f, welche diesem Körper die Beschleunigung w erteilen muß, den Zahlen m und w porportional sein muß, und daß man daher setzen kann:

$$f = Cmw \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In dieser Formel kommen Kraft, Masse und Beschleunigung vor, von denen jede einzelne durch ihre besondere, vollkommen willkürliche Einheit gemessen werden kann. Der Proportionalitätskoeffizient C ist gleich der Anzahl Krafteinheiten, welche nötig sind, um der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung zu erteilen (für $m = 1$ und $w = 1$ ist $f = C$). Setzt man $C = 1$ und schreibt somit statt (4):

$$f = mw \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

so können von den drei Einheiten der Kraft, Masse und Beschleunigung nur noch zwei willkürlich gewählt werden. Wählt man z. B. die Einheiten der Masse und Beschleunigung willkürlich, so muß man als Einheit der Kraft unbedingt die Kraft festlegen, welche der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt. Man kann indes auch anders verfahren und die Einheiten der Kraft und Masse oder der Kraft und Beschleunigung willkürlich wählen; in letzterem Falle muß man als Masseneinheit diejenige Masse annehmen, welche von der Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung erhält. Die Masseneinheiten haben verschiedene Benennungen erhalten (z. B. Pfund, Gramm usw.). Die wichtigste und gebräuchlichste Masseneinheit ist das Gramm; nach der ursprünglichen Definition sollte es die Masse eines Kubikzentimeters reinen Wassers bei 4° C sein.

Man kann nun Körper von beliebiger Form aus Eisen, Kupfer, Aluminium, Platin oder Quarz derart herstellen, daß ihre Masse einer der angenommenen Masseneinheiten bzw. einem Teile oder Vielfachen derselben gleich wird. Solche Etalons oder Massenprototype heißen

Gewichte; diese Bezeichnung ist unrichtig, denn es sind eben nur Massenprototype. In Paris befindet sich ein aus Platin angefertigter Körper, dessen Masse Kilogramm heißt; der tausendste Teil dieser Masse gilt gegenwärtig als Masseneinheit mit der Benennung Gramm; es hat sich ergeben, daß diese Einheit der oben genannten theoretischen Definition nicht vollkommen entspricht, und daß ein Kubikzentimeter reinen Wassers bei 4^0 C eine Masse hat, die etwas kleiner ist als das Gramm. Die Masse eines homogenen Körpers ist seinem Volumen proportional.

Bei homogenen Körpern kann man von einer „Stoffmenge" sprechen und sind die in homogenen Körpern enthaltenen Stoffmengen selbstverständlich den von diesen Körpern eingenommenen Volumina proportional. Hieraus folgt, daß die Massen gleichartiger Körper (d. h. solcher, die aus ein und demselben Stoffe bestehen) der Menge des in ihnen enthaltenen Stoffes proportional sind. Wenn man als Einheit der Stoffmenge die Menge annimmt, welche in einem Körper, dessen Masse als Einheit gilt, enthalten ist, so folgt daraus: die Masse homogener Körper wird durch die Menge des in ihnen enthaltenen Stoffes gemessen.

Bei ungleichartigen Körpern kann man nicht ohne weiteres von einer Vergleichung der in ihnen enthaltenen Stoffmengen reden. Hat man es z. B. mit Körpern zu tun, von denen der eine aus Kupfer, der andere aus Glas, oder der eine aus Quecksilber, der andere aus Wasserstoff besteht, so können wir es uns offenbar nicht einmal vorstellen, was man unter den Worten „gleiche oder ungleiche Mengen verschiedenartiger Stoffe" zu verstehen hat. Es hängt jedoch von uns ab, diese Ausdrucksweise dennoch einzuführen und ihr einen wissenschaftlichen Sinn beizulegen. Danach wollen wir übereinkommen, solche Mengen ungleichartiger Stoffe gleich zu nennen, welche gleiche Masse haben, d. h. welche sich unter Einwirkung gleicher Kräfte mit gleicher Beschleunigung bewegen. Wenn man diesen durchaus von unserem Übereinkommen abhängigen Begriff der gleichen Stoffmengen einführt und die Einheit der Stoffmenge so, wie oben auseinandergesetzt ist, wählt, so erhält man in verallgemeinerter Form eine Beziehung zwischen der Masse und der Stoffmenge und zwar die folgende: Die Masse eines Körpers wird durch die Menge des in ihm enthaltenen Stoffes gemessen. Aus diesen Darlegungen geht hervor, daß die ursprüngliche Definition des Ausdrucks „Masse", als einer Stoffmenge, unzulässig ist, denn für ungleichartige Stoffe fehlt uns, wie gesagt, a priori sogar die Vorstellung von gleichen oder ungleichen Stoffmengen.

In § 9 des ersten Abschnittes haben wir das Prinzip von der Erhaltung der Materie kennen gelernt. Wir können jetzt hinzufügen, daß es wohl richtiger wäre, es das Prinzip der Erhaltung der Massen zu nennen, denn das, was bei allen physikalischen und chemischen Erscheinungen unverändert bleibt, ist die Masse der an diesen Erscheinungen teilnehmenden Körper.

Die absolute Richtigkeit des Prinzips der Erhaltung der Massen ist vielfach und besonders in letzter Zeit, nach Entdeckung der radioaktiven Stoffe (Bd. IV), angezweifelt worden. Eine ganze Reihe bedeutender Forscher war bestrebt, teils rein theoretisch, teils durch äußerst genaue experimentelle Untersuchungen (Wägungen), zu entscheiden, ob bei physikalischen, vor allem aber bei rein chemischen Vorgängen, die Masse der reagierenden Körper auch wirklich vollkommen unverändert bleibt. Unter diesen Arbeiten sind besonders wichtig die von Landolt. Dieser Forscher hat im Laufe vieler Jahre 15 verschiedene chemische Reaktionen untersucht, z. B. die folgenden:

$$Ag_2SO_4 + 2\,FeSO_4 = 2\,Ag + Fe_2(SO_4)_3,$$
$$HJO_3 + 5\,H_2SO_4 + 5\,KJ = 3\,J_2 + 5\,KHSO_4 + 3\,H_2O,$$
$$J_2 + Na_2SO_3 + H_2O = 2\,HJ + Na_2SO_4,$$
$$CCl_3CH(OH)_2 + KHO = CCl_3H + CHKO_2 + H_2O.$$

Als Endergebnis aller seiner Untersuchungen hat er im Jahre 1908 gefunden, daß bei Einführung aller notwendigen Korrektionen die Abweichungen von den nach dem Prinzip der Erhaltung der Massen geforderten Resultaten die unvermeidlichen Versuchsfehler nicht übertreffen. Für die Leser, welche sich für diese Frage interessieren, wollen wir hier ein Verzeichnis der wichtigsten Arbeiten anführen:

Schützenberger, Bull. Soc. Chim. **39**, 258, 1883; Chem. News **45**, 50, 1882.

Kreichgauer, Verh. phys. Ges. **10**, 13, 1891.

Landolt, Ber. Berl. Akad. 1902, S. 1105; 1906, S. 266; 1908, S. 354; Ztschr. f. phys. Chem. **12**, 1, 1893; **55**, 589, 1906; **64**, 581, 1908; Naturw. Rundsch. **15**, 66, 1900; Abhandl. d. Deutschen Bunsen-Ges. f. angew. physik. Chem., Nr. 1, Halle a. S., 1909.

Heydweiller, Phys. Ztschr. **1**, 527, 1900; **3**, 425, 1902; **4**, 81, 1902; Ann. d. Phys. (4) **5**, 394, 1901.

Rayleigh, Nature (engl.) **64**, 181, 1901; **66**, 58, 1902.

Poynting, ebend. **62**, 403, 1900; Naturw. Rundsch. **15**, 524, 1900.

Sandford and Lillian Ray, Phys. Rev. **5**, 247, 1897; **7**, 236, 1898.

A. N. M. (Anonym), Nature (engl.) **66**, 102, 1902.

Hicks, Cambridge Phil. Soc. **5**, 156.

Joly, Dubl. Trans. (2) **8**, 23, 1903.

Surdo, N. Cim. (5) **12**, 1906; Journ. de Phys. (4) **4**, 244, 1907.

Planck, Berl. Ber. 1907, S. 542.

Zenghelis, Ztschr. f. phys. Chem. **65**, 341, 1908.

Hänsel, Diss., Breslau 1899.

Die Masse m eines gleichartigen Körpers hängt von seinem Volumen v und außerdem von der Art des Stoffes ab, aus dem er besteht. Dies weist uns auf eine gewisse Eigenschaft hin, die für verschiedenartige Stoffe verschieden ist und welche noch neben dem eingenommenen Volumen die Masse eines Körpers bestimmt. Diese Eigenschaft wird durch eine Größe besonderer Art gekennzeichnet, die wir Dichte nennen und von der wir annehmen, daß sie der Masse m eines Körpers bei gegebenem Volumen v direkt proportional und dem von der gegebenen Masse m eingenommenen Volumen v umgekehrt proportional sei. Als Einheit können wir die Dichte irgendeines Stoffes (z. B. die von Wasser, Quecksilber, Luft, Wasserstoff) wählen, der sich in einem ganz bestimmten Zustande (z. B. bei gegebener Temperatur und Druck) befindet. Der Zahlenwert δ für die Dichte wird durch die Formel

$$\delta = C\frac{m}{v} \qquad (6)$$

ausgedrückt, wo C der Proportionalitätsfaktor ist. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$\delta = \frac{m}{v} \qquad (7)$$

oder

$$m = \delta v \qquad (8)$$

so muß man als Einheit der Dichte die Dichte eines solchen Stoffes annehmen, dessen Volumeneinheit die Einheit der Masse enthält.

Nachdem wir das Gramm und das Kubikzentimeter als Einheiten der Masse und des Volumens bereits festgelegt haben, müssen wir als Einheit der Dichte die Dichte eines Stoffes bei der Temperatur wählen, bei welcher ein Kubikzentimeter desselben die Masse von einem Gramm hat, z. B. die Dichte des Wassers bei nahezu 4^0.

Formel (8) zeigt uns, daß für $v = 1$ die Masse $m = \delta$ wird; hieraus folgt, daß die Dichte eines homogenen Stoffes durch die Masse, welche in seiner Volumeneinheit enthalten ist, gemessen wird. Für ungleichartige Körper bestimmt die Größe

$$\delta_m = \frac{m}{v} \qquad (9)$$

die mittlere Dichte. Wenn die mittlere Dichte δ_m gegeben ist, so findet man die Masse des Körpers nach der Formel:

$$m = v\,\delta_m \qquad (10)$$

Der Grenzwert für die Dichte eines unendlich kleinen Volumens $\varDelta v$, welches die Masse $\varDelta m$ enthält, heißt die Dichte δ im gegebenen Punkte:

$$\delta = lim\frac{\varDelta m}{\varDelta v} = \frac{dm}{dv} \qquad (11)$$

In theoretischen physikalischen Fragen werden wir es fast immer mit der durch die Formeln (7), (9) und (11) bestimmten Dichte, welche durch die Masse der Volumeneinheit gemessen wird, zu tun haben. Zum Unterschiede von einer anderen Größe, mit der wir uns im ersten Abschnitt bekannt machten und welche durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird, kann man die hier betrachtete Größe Massendichte nennen.

Wenn man das Kubikzentimeter und das Gramm als Einheiten des Volumens und der Masse annimmt, so erhält man als Einheit der Massendichte die Dichte eines Stoffes, von welchem ein Gramm das Volumen eines Kubikzentimeters hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß reines Wasser bei 4^0 diese Einheit der Massendichte nicht besitzt.

Die Masse, von welcher hier die Rede war, wird als träge Masse bezeichnet zum Unterschiede von der schweren Masse, die wir weiter unten betrachten werden.

§ 5. Druck. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir in der Kraft die Ursache des geometrischen Zuwachses $\overline{\Delta v}$ der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung w kennen gelernt. Die Formel (5) gab uns die Möglichkeit, auch die Einheit der Kraft festzusetzen; die Vergleichung und Messung von Kräften haben wir hierbei auf die Vergleichung der von ihnen hervorgerufenen Beschleunigungen gegründet. Eine derartige Messung der Kräfte heißt dynamische Messung. Es kommen jedoch sehr oft Fälle vor, wo auf irgendeinen Körper A zweifellos eine bestimmte Kraft wirkt und der Körper trotzdem in Ruhe bleibt, weil er einen anderen Körper B berührt, welcher ihn daran verhindert, die Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ zu erlangen, die durch die Größe f der Kraft, ihre Wirkungsdauer Δt und die Masse m des Körpers A selbst bestimmt wird, und welche in Wirklichkeit zutage tritt, sobald man den Körper B entfernt. Die Erfahrung lehrt, daß der Körper A in diesem Falle einen Druck auf B ausübt. Auf S. 18 war der Druck als ein ursprünglicher Begriff bezeichnet worden, der uns aus der täglichen Erfahrung bekannt ist (Empfindung einer Muskelspannung). Wir sagen in diesem Falle, die Kraft werde durch den Widerstand des Körpers B, auf welchen A einen Druck ausübt, aufgehoben. Wenn man vorläufig die Frage nach dem mechanischen Vorgange bei dieser Kraftvernichtung beiseite läßt, so kann man auf Grund der Beobachtung sagen, daß der Druck proportional der aufgehobenen Kraft ist. Nimmt man als Einheit des Druckes den Druck an, welchen der Körper B erfährt, wenn auf A die Krafteinheit wirkt, so erhält man im betrachteten Falle gleiche Zahlenwerte für Druck und Kraft. Bezeichnet man sie mit demselben Buchstaben, so kann man sagen, daß die Formel (5) $f = mw$ uns den Zahlenwert für den von A auf B ausgeübten Druck ergibt. Die Kraft und der durch sie hervorgerufene Druck haben bei dieser Wahl der Einheiten gleiche Zahlenwerte, daher kann die Messung von Kräften auch durch Messung des von ihnen ausgeübten Druckes geschehen. Eine solche Messung der Kräfte heißt statische Messung.

§ 6. Gewicht. Auf jeden auf der Erdoberfläche befindlichen Körper wirkt eine Kraft ein, welche (angenähert) nach dem Erdmittelpunkte hin gerichtet ist. Eine zur Richtung dieser Kraft senkrechte Ebene heißt horizontal. Diese Kraft nennt man das Gewicht des Körpers; wir werden sie mit p bezeichnen. Da das Gewicht eine besondere Kraft ist, so ist seine Einheit identisch mit der Krafteinheit. Körper, die sich auf keine anderen stützen, bewegen sich (fallen) im luftleeren Raume unter dem Einfluß ihres eigenen Gewichtes, oder, wie man diese Kraft auch noch zu nennen pflegt, — der „Schwerkraft“, mit einer Beschleunigung, die wir mit g bezeichnen wollen. Die allgemeine Formel (5) nimmt in diesem Sonderfalle folgende Gestalt an:

$$p = mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Entsprechende Versuche zeigen uns, daß g für alle Körper gleich groß ist. Hieraus folgt, daß die auf den Körper wirkende Schwerkraft, d. h. daß das Gewicht derselben eine Kraft ist, welche die besondere Eigenschaft besitzt, der Masse der Körper proportional zu sein. Nun haben wir gesehen, daß eine Kraft durch den Druck gemessen werden kann, welchen ein Körper auf einen anderen ihm als Unterlage dienenden unter ihrem Einflusse ausübt. Hieraus folgt, daß der von einem Körper auf einen anderen unter ihm befindlichen an der Erdoberfläche ausgeübte Druck als Maß für sein Gewicht dienen kann. Wenn man aber, wie oben, als Einheit des Druckes den Druck gelten läßt, den ein Körper unter dem Einflusse der Krafteinheit ausübt, also ein Körper, der die Einheit des Gewichtes besitzt, so wird der Druck numerisch gleich dem Gewichte. Deshalb kann man auch unter „Gewicht“ den Druck verstehen, der von einem in Ruhe befindlichen Körper ausgeübt wird. Unter „Wägung“ versteht man das Verfahren, den Druck der Körper auf eine horizontale Unterlage zu vergleichen. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß die Wägung das Massenverhältnis der Körper ergibt, und daß ungleichartige Körper, welche gleiches Gewicht besitzen, auch gleiche Masse haben.

Außer der oben erwähnten dynamischen Methode der Massenvergleichung ungleichartiger Körper haben wir auf diese Weise noch eine Methode der statischen Vergleichung für sie gefunden.

In Formel (12) hat g einen bestimmten Zahlenwert, der von der zugrunde gelegten Einheit der Beschleunigung abhängt. Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß bei Benutzung der Formel (5) und ihrer Spezialform (12) wir die Einheiten für Beschleunigung und Masse oder Beschleunigung und Kraft willkürlich oder schließlich für Kraft und Masse gewählt werden. Formel (12) zeigt, daß für $m = 1$ das Gewicht $p = g$ wird, d. h. das Gewicht eines Körpers, welcher die Einheit der Masse besitzt, enthält g Gewichtseinheiten. Wenn man also die Einheit der Masse willkürlich wählt, so ist die Einheit des Gewichtes (oder der Kraft) das Gewicht eines Körpers, der $1:g$ Masseneinheiten enthält. Wenn man z. B. eine der folgenden Massen: das Gramm, Pfund usw. als Einheit der Masse festlegt, so wird die Einheit des Gewichtes (oder der Kraft) gleich $1:g$ Gramm, Pfund usw.

Formel (12) ergibt weiter, daß für $p = 1$ die Masse $m = 1:g$ wird, d. h. ein Körper, dessen Gewicht gleich ist der Gewichts- oder Krafteinheit, hat eine Masse, welche $1:g$ der Masseneinheit ist. Wenn man die Gewichtseinheit willkürlich wählt, so muß man als Einheit der Masse die Masse eines Körpers annehmen, der g Gewichtseinheiten enthält. Unter der Bezeichnung Gramm versteht man bisweilen das Gewicht von 1 ccm reinen Wassers und ebenso unter Pfund usw. das Gewicht eines bestimmten Volumens irgendeines Körpers; in Wirklichkeit sind das Gramm, das Pfund usw. Massenetalons. Sollen sie Gewichtseinheiten (oder Krafteinheiten) sein, so ist die Masseneinheit g Gramm oder g Pfund.

Bereits im ersten Abschnitte, S. 43 bis 45, haben wir den Begriff der Dichte D eines Körpers, welche durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird, den der mittleren Dichte und den der Dichte in einem gegebenen Punkte kennen gelernt. Die Dichte D werden wir bisweilen zum Unterschiede von der Massendichte δ (S. 78) als Gewichtsdichte bezeichnen. Nach (12) ist

$$D = g\delta \quad \text{. . . . . (12, a)}$$

Wir haben soeben darauf hingewiesen, daß die Masse an der Erdoberfläche durch den Druck gemessen wird, welchen der ruhende Körper auf einen anderen Körper ausübt, der ihm als Unterlage dient; wir bezeichnen die so gemessene Masse als schwere Masse zum Unterschiede von der trägen Masse, welche durch die Größe der Beschleunigung bei einer Bewegung des Körpers gemessen wird. Ihrem inneren Wesen, ihrer Bedeutung nach sind also träge Masse und schwere Masse verschiedene Größen; die Beobachtung zeigt aber, daß sie einander proportional sind. Wenn man die träge Masse und die schwere Masse ein und desselben Körpers als Einheiten wählt, was durchaus nicht notwendig ist, so erhält man bei allen Körpern für die träge und die schwere Masse den gleichen Zahlenwert. Die Physik hat bei ihrer neuesten Entwickelung die hier dargelegte elementare Theorie durch eine unvergleichlich verwickeltere ersetzt. Es zeigte sich, daß die träge Masse eines Körpers keine konstante Größe ist, sondern abhängt von der Geschwindigkeit des Körpers relativ zu dem System, in welchem der ruhende Beobachter Kraft und Beschleunigung mißt. Außerdem erwies es sich, daß die träge

Masse eines Körpers verschiedene Werte hat für eine Kraft, welche die Geschwindigkeit ihrer Größe nach ändert (longitudinale Masse) und für eine Kraft, welche die Richtung der Geschwindigkeit ändert (transversale Masse). Aber alle diese Unterschiede werden erst merklich bei relativen Geschwindigkeiten, welche vergleichbar sind mit der des Lichtes (300 000 km in der Sekunde); solche Geschwindigkeiten werden nur bei Elektronen beobachtet (Band V).

§ 7. **Das dritte Bewegungsgesetz** ist von Newton folgendermaßen ausgesprochen worden: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi, d. h. Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander der Größe nach gleich und (der Richtung nach) entgegengesetzt; oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind immer gleich und nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wenn zwei Körper A und B einander beeinflussen, so sind die zwei Kräfte, welche infolgedessen auf diese Körper wirken, gleich und nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Man hat bei der Wechselwirkung von Körpern zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Zwei Körper berühren sich und üben aufeinander einen Druck aus. Ein Druck auf einen physikalischen Körper bewirkt stets eine Gestaltsänderung, z. B. eine Volumenverminderung; indem die Moleküle des Körpers in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren, d. h. die frühere Gestalt des Körpers wieder herzustellen suchen, rufen sie die Reaktion oder den Gegendruck des dem Drucke ausgesetzten Körpers hervor. Eine Gestaltsänderung erfährt auch der den Druck ausübende Körper, auf welchen die gegebene Kraft f unmittelbar wirkt. Somit drückt also jeder der beiden sich berührenden Körper auf den anderen, und diese beiden Drucke sind der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt.

Wenn die Last A auf die horizontale Oberfläche des Körpers B mit einer gewissen Kraft f drückt, so wird das Bestreben des Körpers B, seine Gestalt wieder herzustellen (z. B. die entstandene Vertiefung zu beseitigen), zur Quelle eines Druckes dieses Körpers (von unten nach oben) auf A, welcher ebenfalls gleich f ist. Wenn ein Körper A an einer Schnur B hängt, so wird letztere mit einer gewissen, dem Gewichte von A gleichen Kraft gespannt; mit derselben Kraft wirkt auch die ausgereckte Schnur B auf den Körper A, indem sie sich bis auf die ursprüngliche Länge zu verkürzen strebt. Wenn ein Gas in einem Gefäße eingeschlossen ist, so sucht es sich auszudehnen und drückt dadurch auf jede Oberflächeneinheit der Gefäßwandung mit einer gewissen Kraft f. Hierdurch dehnt sich das Gefäß etwas aus und sein Bestreben, das frühere Volumen wieder herzustellen, äußert sich durch einen Gegendruck f auf jede Oberflächeneinheit des Gases.

2. Die Körper berühren sich nicht, jedoch muß die Anwesenheit des Körpers A an einer bestimmten Stelle des Raumes als Ursache für das Auftreten der Kraft f, welche auf den Körper B wirkt, gelten. Die Beobachtungen führen uns zu der Überzeugung, daß in diesem Falle die Gegenwart von B an der von ihm eingenommenen Stelle die Ursache für das Auftreten einer auf A wirkenden Kraft ist, welche der Größe nach gleich f, der Richtung nach ihr entgegengesetzt ist. Dieses bezieht sich auf alle Fälle einer Wechselwirkung, für welche die Rolle des zwischenliegenden Mediums, welches die Wirkung eines Körpers auf den anderen überträgt, noch nicht klargelegt ist, nämlich auf die Erscheinungen der allgemeinen Gravitation, die elektrischen und die magnetischen Erscheinungen. Die Kraft, mit welcher die Erde einen Stein oder etwa den Mond anzieht, ist gleich der Kraft, mit welcher zur selben Zeit die Erde nach entgegengesetzter Richtung vom Steine oder vom Monde angezogen wird. Das gleiche gilt auch für die Wechselwirkung elektrisierter, magnetischer oder vom elektrischen Strome durchflossener Körper, sowie endlich für die Wechselwirkung von elektrischen Strömen und Magneten.

Aus dem dritten Bewegungsgesetze ergibt sich als Folge: Wenn die aufeinanderwirkenden Körper frei sind und jeder von ihnen nur unter dem Einflusse des anderen steht, so bewegen sie sich mit Beschleunigungen, die ihren Massen umgekehrt proportional sind.

§ 8. Kraftimpuls und Bewegungsmenge. Wenn die nach Größe und Richtung konstante Kraft f während einer gewissen Zeit t auf den Körper A wirkt, so sagen wir, der Körper A erfährt einen Kraftimpuls (Antrieb) und setzen diese neue Größe proportional der Kraft f und der Zeit t. Als Einheit K kann der Impuls irgend einer beliebigen Kraft gelten, welche während einer beliebigen Zeit gewirkt hat. Es ist daher ganz allgemein $K = Cft$. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$K = ft \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

so muß man als Einheit des Kraftimpulses den Impuls der Krafteinheit annehmen, welche während der Zeiteinheit gewirkt hat. Wenn sich die Kraft nach Größe und Richtung ändert, so zerlegen wir die Zeit, während welcher sie wirkte, in eine überaus große Zahl sehr kleiner Teile Δt. Die Kraft f können wir während eines jeden dieser kleinen Zeitabstände als konstant ansehen, wobei wir einen um so kleineren Fehler begehen, je größer die Anzahl der Teile ist, in welche wir die Zeit t zerlegt haben, d. h. je kleiner Δt ist. Der Impuls während der

Zeit Δt, d. h. die Größe $f\Delta t$, heißt Elementarimpuls. Bezeichnen wir ihn symbolisch mit ΔK, so ist

$$\Delta K = f\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Den Grenzwert, welchem die algebraische Summe der Größen $\Delta K = f\Delta t$ bei unbegrenzter Zunahme der Anzahl Teile Δt zustrebt, wollen wir den Impuls K der variablen Kraft für die Zeit t nennen. Symbolisch kann dies folgendermaßen geschrieben werden:

$$K = lim\, \Sigma\, \Delta K = lim\, \Sigma\, f\Delta t = \int f dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Wir führen ferner noch eine besondere Größe ein, die wir Bewegungsmenge (Bewegungsgröße) nennen und setzen sie proportional der Masse m und der Geschwindigkeit v. Als Einheit kann die Bewegungsmenge einer beliebigen Masse, die sich mit beliebiger Geschwindigkeit bewegt, gelten. Der Zahlenwert L der Bewegungsmenge einer mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Masse m wird dann durch die Formel $L = Cmv$ wiedergegeben. Setzt man $C = 1$, so ist die Einheit der Bewegungsmenge die Bewegungsmenge der sich mit der Einheit der Geschwindigkeit bewegenden Masseneinheit. Es ist dann

$$L = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Größe L ist ein Vektor, der die Richtung der Geschwindigkeit v hat. Wenn die Geschwindigkeit v den geometrischen Zuwachs $\overline{\Delta v}$ erfährt, so erhält auch die Bewegungsmenge einen geometrischen Zuwachs

$$\overline{\Delta L} = m\overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

welcher die Richtung der Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ hat. Der neue Wert für die Bewegungsmenge wird durch die Diagonale des aus L und $\overline{\Delta L}$ konstruierten Parallelogramms dargestellt.

Mit Hilfe des zweiten Bewegungsgesetzes, das durch Formel (1), welcher wir die Gestalt (3) geben, ausgedrückt wird, läßt sich nun eine Beziehung zwischen Kraftimpuls und Bewegungsmenge ableiten. Aus (5) (S. 74) in Verbindung mit (2) folgt, daß $c = m$ gleich der Masse des Körpers ist. Daher geht (3) über in

$$f\Delta t = m\overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Vergleicht man jetzt (18) mit (14) und (17), so kann man die erste dieser Formeln auch schreiben

$$\Delta K = \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Somit führt das zweite Bewegungsgesetz zu folgendem neuen Satze: Der Elementarimpuls einer Kraft wird durch den geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge gemessen.

Bildet man die algebraische Summe der Ausdrücke für die Größen $f\Delta t$ und $m\overline{\Delta v}$ der Formel (18) unter Berücksichtigung von (15) und (17), so erhält man

$$K = lim\, \Sigma\, f\Delta t = lim\, \Sigma\, m\overline{\Delta v} = lim\, \Sigma\, \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

d. h. der Kraftimpuls während eines beliebigen Zeitabschnittes wird durch die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge gemessen. Dieser Satz vereinfacht sich in zwei Sonderfällen.

1. Die Bewegung sei geradlinig und die Kraft habe die Richtung der Bewegung. Dann ist $\overline{\Delta v}$ gleich dem algebraischen Geschwindigkeitszuwachs Δv, und die Summe der algebraischen Zunahmen ist der volle Zuwachs dieser Größe, d. h. die Differenz zwischen ihrem neuen und ihrem früheren Werte. Wenn sich die Geschwindigkeit während der Zeit t von v_1 bis v_2 geändert hat, so gibt Formel (20)

$$K = lim \, \Sigma f \Delta t = m v_2 - m v_1 \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Bei der geradlinigen Bewegung wird der Kraftimpuls für einen beliebigen Zeitraum durch den algebraischen Zuwachs der Bewegungsmenge gemessen.

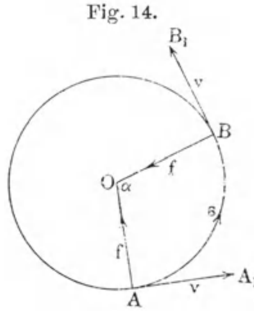
2. Die Kraft habe konstante Richtung. In diesem Falle haben alle geometrischen Zunahmen $\overline{\Delta v}$ die gleiche Richtung, und ihre Summe ist offenbar der vollständige geometrische Geschwindigkeitszuwachs.

Wenn die Kraft eine konstante Richtung hat, welche übrigens mit der Bewegungsrichtung einen veränderlichen Winkel bilden kann, so wird der Kraftimpuls für einen beliebigen Zeitraum durch den geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge im selben Zeitraume gemessen.

Für den allgemeinen Fall, wo die Kraft keine konstante Richtung hat, ist obige Vereinfachung nicht zulässig, da die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen offenbar nicht gleich dem vollständigen geometrischen Zuwachse ist.

Bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung, für welche die Beschleunigung w, also auch die Kraft f eine konstante Größe ist, gibt uns, da die erlangte Geschwindigkeit $v_2 - v_1 = wt$ ist, unsere allgemeine Formel (5) $f = mw$, also in diesem Falle $ft = mwt = m v_2 - m v_1$ entsprechend Formel (21).

Fig. 14.



Wir wollen ferner die Richtigkeit der allgemeinen Formel (20) für eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit v beweisen. (Der Kreisradius sei $= R$.) Wir berechnen zunächst den totalen Kraftimpuls für die Zeit t, während welcher der Punkt den Bogen $AB = s = R\alpha$ (Fig. 14), wo $\alpha = \angle AOB$ ist, durchlaufen hat. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung wird w nach Formel (30) S. 66 bestimmt, d. h. $w = \frac{v^2}{R}$; die

Beschleunigung ist nach dem Mittelpunkte gerichtet und daher auch die Kraft f; letztere ist gleich

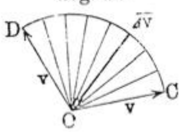
$$f = \frac{m v^2}{R} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Der vollständige Kraftimpuls ist $f t = \frac{m v^2 t}{R} \cdot$ Eliminiert man die Zeit, indem man den Winkel α einführt, so hat man, da $R \alpha = s$ ist, $\alpha = s : R = vt : R$, also:

$$K = lim\, \Sigma f \Delta t = f t = \frac{m v^2 t}{R} = m v \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (22, a)$$

Um $lim\, \Sigma\, m \overline{\Delta v}$, d. h. die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge zu finden, ziehen wir von einem beliebigen Punkte O aus (Fig. 15) die Geraden $O\,C$ und $O\,D$ gleich und parallel $A A_1 = B B_1 = v$ und eine große Zahl zwischenliegender Geraden, die den Geschwindigkeiten v des Punktes während seiner Bewegung auf dem Bogen $A\,B$ gleich und parallel sind. Offenbar ist $\angle\, C O D = \angle\, A O B = \alpha$. Die Endpunkte dieser von O aus gezogenen Geraden liegen auf einem Kreisbogen; die Elemente dieses Bogens sind die geometrischen Geschwindigkeitszunahmen $\overline{\Delta v}$. Ihre algebraische Summe ist gleich dem Bogen CD, d. h. gleich $v \alpha$, daher ist die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen für die Bewegungsmenge

Fig. 15.



$$lim\, \Sigma \Delta L = lim\, \Sigma\, m \overline{\Delta v} = m v \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22, b)$$

(22, a) und (22, b) ergeben die Richtigkeit der Formel (20) für die betrachtete Bewegung. Als Kraftimpuls für einen vollständigen Umlauf des Punktes auf der Kreislinie erhalten wir $K = 2 \pi m v$.

§ 9. Momentane Kräfte.

Als „momentane" Kraft bezeichnet man eine Kraft, deren Wirkung eine so kurze Zeit τ dauert, daß der Verlauf der Ereignisse während dieser Zeit nur unter besonderen Umständen, d. h. nur mit Hilfe meist sehr verwickelter Vorrichtungen beobachtet werden kann. Im Verlaufe dieser Zeit ändert die Kraft f bei gleichbleibender Richtung ununterbrochen ihre Größe, indem sie zu Anfang der Zeit τ mit dem Werte Null beginnt und zu Ende derselben wieder zum Werte Null zurückkehrt. Kräfte dieser Art treten auf beim Zusammenstoß von Körpern, bei Wirkung eines Stromimpulses (z. B. eines Induktionsstromes) auf die Magnetnadel usw. Da sich die Kraft f in der Zeit τ ändert, so ruft sie eine ebenfalls kontinuierlich sich ändernde Beschleunigung hervor, die man aber wegen der außerordentlich geringen Zeitdauer der Kraftwirkung meist nicht zu beobachten imstande ist und werden deshalb auch die veränderlichen Werte der Kraft oft gar nicht berücksichtigt. Wir können aber die Geschwindigkeit, also auch die Bewegungsmenge vor und nach Wirkung der momentanen Kraft messen. Bezeichnet man den Gesamtimpuls der veränderlichen Kraft f in der Zeit τ mit F und nimmt man an, daß sich f während dieser Zeit τ der Richtung nach nicht ändere, so kann man F dem vollständigen geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge gleichsetzen. Sehr oft wird der Impuls F als Maß für die Wirkung der momentanen Kraft gewählt und bisweilen auch „die Größe der momentanen Kraft" genannt.

Die Größe einer momentanen Kraft wird durch die geometrische Änderung der Bewegungsmenge des Körpers, auf welchen sie wirkt, gemessen.

Wenn die Geschwindigkeit des Körpers während der Zeit τ die Richtung der Kraft f selbst hat, wird die „Größe" F der momentanen Kraft durch die Differenz der Bewegungsmengen der Körper vor und nach der Wirkung gemessen; vgl. (21).

§ 10. Das CGS-System. Wir haben gesehen, daß, sobald man dem Proportionalitätskoeffizienten C in den Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Zahlenwerten der verschiedenen physikalischen Größen feststellen, einen bestimmten Wert zuerteilt, z. B. $C = 1$ setzt, die Einheit einer dieser Größen sich ganz von selbst ergibt, wenn die Einheiten für die anderen Größen bereits gewählt sind. Setzt man in der Reihe der physikalischen Formeln, von denen jede folgende eine neue in den vorhergehenden Formeln nicht vorkommende Größe enthält, die Proportionalitätsfaktoren gleich Eins, so kann man ein „System von Einheiten aufbauen". Es erweist sich, daß man dabei die Einheiten für drei Größen willkürlich wählen muß; diese müssen ferner unabhängig voneinander sein, so daß keine von ihnen durch die beiden anderen bestimmt werden kann. Diese drei Einheiten heißen die Grundeinheiten. Die Einheiten der übrigen Größen, welche dadurch erhalten werden, daß man den Proportionalitätsfaktor gleich Eins setzt, heißen abgeleitete Einheiten; man nennt sie auch absolute Einheiten, doch ist dieser Ausdruck kein treffender. Die drei Grundeinheiten kann man auf sehr verschiedene Weise auswählen; so ist es beispielsweise möglich, ein System von absoluten Einheiten auf die Grundeinheiten der Länge, Geschwindigkeit und Kraft zu gründen, oder auf die der Masse, Zeit und Beschleunigung usw. Ausgehend von drei solchen Grundeinheiten bestimmter Art, kann man wiederum unendlich viele verschiedene Systeme von Einheiten erhalten, indem man die absoluten Werte der drei Grundeinheiten ändert.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß als Grundeinheiten die Einheiten der Länge l, der Masse m und der Zeit t angenommen sind. Besondere Aufmerksamkeit wenden wir hierbei dem Falle zu, wo als

Längeneinheit das Zentimeter (C), als Masseneinheit das Gramm (G) und als Zeiteinheit die Sekunde (S) gewählt sind. Das System absoluter Einheiten, welches sich auf diese drei Einheiten gründet, heißt das CGS-System, die abgeleiteten Einheiten aber — CGS-Einheiten. Die CGS-Einheit der Oberfläche ist das Quadratzentimeter; die CGS-Einheit des Volumens ist das Kubikzentimeter.

Geschwindigkeit. Setzt man in Formel (3) auf S. 57 den Koeffizienten $C = 1$, d. h. legt man Formel (4) zugrunde, so muß man als absolute Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Punktes wählen, welcher die Längeneinheit in der Zeiteinheit durchläuft. Die CGS-Einheit der Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher ein Zentimeter in einer Sekunde durchläuft. Das Licht legt in einer Sekunde 300 000 km zurück, also ist

$$\left.\begin{array}{c}\text{die Lichtgeschwindigkeit } v = 3{,}10^{10} \text{ CGS-Einheiten} \\ \text{der Geschwindigkeit}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (23)$$

Beschleunigung. Setzt man $C = 1$ in (17) auf S. 63, d. h. bestimmt man w durch Formel (18), so muß als absolute Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung einer solchen Bewegung gelten, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt. Die CGS-Einheit der Beschleunigung ist die Beschleunigung einer solchen Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit in einer Sekunde um die CGS-Einheit der Geschwindigkeit, d. h. um einen Zentimeter pro Sekunde vergrößert. Beim freien Fall nimmt die Geschwindigkeit in einer Sekunde um 981 cm pro Sekunde zu. Bezeichnet man die Beschleunigung beim freien Fall mit g, so hat man

$$g = 981 \text{ CGS-Einheiten der Beschleunigung} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Formel (30) auf S. 66 zeigt, daß die CGS-Einheit der Beschleunigung auch gleich ist der Beschleunigung eines Punktes, welcher sich mit einer Geschwindigkeit von einem Zentimeter in der Sekunde auf einer Kreislinie, deren Radius gleich einem Zentimeter ist, bewegt.

Drehung. Die absolute Einheit der Winkelgeschwindigkeit [vgl. (40) und (41) auf S. 70] besitzt ein Körper, welcher sich in der Zeiteinheit um den Einheitswinkel ($57{,}29^0$) dreht. Die CGS-Einheit der Winkelgeschwindigkeit hat ein Körper, der sich in einer Sekunde um den Einheitswinkel dreht. Die absolute Einheit der Winkelbeschleunigung [vgl. (45) auf S. 71] besitzt ein Körper, dessen Winkelgeschwindigkeit sich um deren absolute Einheit in der Zeiteinheit vergrößert. Die CGS-Einheit der Winkelbeschleunigung hat ein Körper, dessen Winkelgeschwindigkeit um die CGS-Einheit der Winkelgeschwindigkeit pro Sekunde zunimmt.

Kraft. Setzt man $C = 1$ in Formel (4) auf S. 75, d. h. legt man Formel (5) zugrunde, so ist als absolute Krafteinheit eine Kraft zu wählen, unter deren Einflusse die Grundeinheit der Masse die absolute Einheit der Beschleunigung erhält. Die CGS-Einheit der Kraft (also auch des Gewichtes) ist eine Kraft, unter deren Einflusse die Grammasse die CGS-Einheit der Beschleunigung erlangt, so daß ihre Geschwindigkeit sich um „einen Zentimeter pro Sekunde“ in jeder Sekunde vergrößert. Diese Kraft wird „Dyne“ genannt. Eine Million Dynen heißt Megadyne. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Dyne mit der bekannten französischen Kraft- oder Gewichtseinheit, welche Gramm heißt, vergleichen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Wirkungen beider Kräfte, einerseits der Dyne und andererseits des Grammes, auf ein und denselben Körper, nämlich auf einen solchen, der die Masse von einem Gramm hat, miteinander vergleichen. Aus der Definition selbst folgt, daß die Grammasse unter dem Einflusse der Kraft einer Dyne die CGS-Einheit der Beschleunigung erfährt. Dieselbe Grammasse erlangt unter dem Einflusse der Grammkraft, d. h. unter dem Einflusse des Gewichtes eines Grammes an der Erdoberfläche, eine Beschleunigung von $g = 981$ CGS-Einheiten der Beschleunigung [vgl. (24)]. Hieraus folgt, daß

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ Gramm} &= 981 \text{ Dynen} \\ 1 \text{ Dyne} &= 0{,}001\,02 \text{ Gramm} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Es ist wohl kaum nötig, hinzuzufügen, daß hier das Gramm eine Kraft und nicht eine Masse ist, denn die Dyne ist eine Kraft, und man kann nur gleichartige Größen miteinander vergleichen. Angenähert (bis auf 2 Proz. genau) kann man die Dyne gleich einem Milligramm setzen. Eine Megadyne ist gleich 1,02 kg.

Massendichte. Setzt man in Formel (6) auf S. 78 $C = 1$, d. h. legt man (7) zugrunde, so hat als absolute Einheit der Dichte die Dichte eines Körpers zu gelten, welcher in der Volumeneinheit die Masseneinheit enthält. Die CGS-Einheit der Dichte ist die Dichte eines Körpers, welcher die Masse eines Grammes in einem Kubikzentimeter enthält. Hieraus folgt, daß die CGS-Einheit der Dichte angenähert der Dichte des Wassers bei 4^0 gleich ist, und daß ferner die sogenannte tabellarische Dichte (vgl. S. 45) der verschiedenen Stoffe, d. h. ihre bei 0^0 bestimmten und auf Wasser von 4^0 bezogenen Dichten in Einheiten ausgedrückt sind, die sich von den CGS-Einheiten der Dichte nur wenig unterscheiden.

Gewichtsdichte. Die absolute Gewichtsdichte ist eine veränderliche Größe, denn sie ist gleich dem (in absoluten Krafteinheiten ausgedrückten) Gewichte der absoluten Volumeneinheit des Stoffes; die CGS-Gewichtsdichte des Wassers bei 4^0 ist gleich g, wo g in CGS-Einheiten (z. B. $g = 981$) ausgedrückt sein muß. Hiermit stimmt (12, a) auf S. 81 vollkommen überein.

Die tabellarische Gewichtsdichte, die numerisch der tabellarischen Massendichte gleich ist (dieselbe ist nur wenig verschieden von der CGS-Dichte), wird erhalten, wenn man das Gewicht eines Kubikzentimeters Wasser von 4^0 als Einheit des Gewichtes, also auch als Krafteinheit annimmt. Dies Gewicht unterscheidet sich nur wenig von der französischen Gewichts- und Krafteinheit Gramm. Hieraus folgt, daß die tabellarische Gewichtsdichte sich nicht ungezwungen in irgendwelchen absoluten Einheiten ausdrücken läßt.

Kraftimpuls und Bewegungsmenge. Formel (13) auf S. 83 zeigt, daß die absolute Einheit des Kraftimpulses erhalten wird, wenn die absolute Krafteinheit während der Zeiteinheit wirkt. Die CGS-Einheit des Kraftimpulses ist der Impuls einer Dyne, welche während einer Sekunde wirkt.

Aus Formel (16) auf S. 84 folgt, daß die mit der absoluten Geschwindigkeitseinheit sich bewegende Masseneinheit die absolute Einheit der Bewegungsmenge besitzt. Die CGS-Einheit der Bewegungsmenge besitzt die Grammasse, die sich mit einer Geschwindigkeit von einem Zentimeter in der Sekunde bewegt.

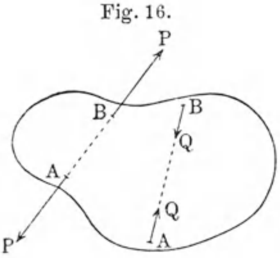
Unter dem Einflusse der CGS-Einheit des Kraftimpulses wird im allgemeinsten Falle [vgl. (20), S. 84] die Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge erhalten, welche der CGS-Einheit gleich ist. Wenn die Kraft gleiche Richtung mit der Bewegung selbst hat [vgl. (21), S. 85], so ruft die Einheit des Kraftimpulses die CGS-Einheit der Bewegungsmenge hervor.

Die absolute Einheit der momentanen Kraft ruft die absolute Einheit des geometrischen Zuwachses der Bewegungsmenge hervor.

§ 11. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Jede Kraft hat eine bestimmte Größe und Richtung. Der Punkt, auf welchen sie unmittelbar wirkt, heißt der Angriffspunkt. Die Kraft ist ein Vektor und kann daher durch einen Pfeil dargestellt werden.

Wenn auf einen physikalischen festen Körper zwei Kräfte wirken, deren Größe gleich und deren mit der Verbindungsgeraden ihrer Angriffspunkte A und B (z. B. P und P oder Q und Q in Fig. 16) zusammenfallende Richtung entgegengesetzt ist, so bringen sie eine gewisse Lageänderung der Teilchen im Inneren des Körpers hervor: entweder ziehen sie ihn auseinander (P, P), oder sie drücken ihn zusammen (Q, Q). Alles folgende jedoch soll sich auf einen sogenannten unveränderlichen (starren) festen Körper beziehen, d. h. auf einen solchen, in welchem die erwähnten inneren Verschiebungen und die dadurch hervorgerufenen Änderungen der Entfernungen AB entweder gar nicht auftreten (idealer Fall) oder so gering sind, daß man sie vernachlässigen kann. Sind diese

Fig. 16.



Bedingungen erfüllt, dann sagen wir, die beiden Kräfte heben sich gegenseitig auf. Ein unveränderlicher fester Körper hat folgende Fundamentaleigenschaft. Man kann den Angriffspunkt einer auf einen unveränderlichen festen Körper wirkenden Kraft nach irgendeinem neuen Punkte desselben, der in der Richtung der Kraft liegt, verlegen, ohne daß sich dadurch die Wirkung der Kraft auf den Körper ändert.

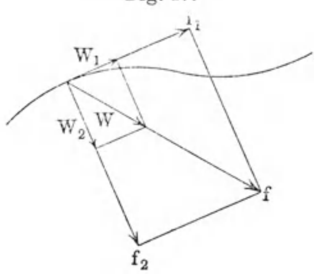
Bei einem starren Körper können mehrere Kräfte durch eine neue ersetzt werden; die ersteren heißen Komponenten, die letztere — Resultante.

Die Resultante einer beliebigen Anzahl Kräfte mit demselben Angriffspunkte ist gleich der geometrischen Summe der gegebenen Kräfte. Sie wird dargestellt durch die letzte Seite des Vielecks, dessen übrige Seiten den gegebenen Kräften parallel sind (vgl. die Regel vom Polygon der Vektoren auf S. 54). Die Resultante zweier Kräfte wird durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, das aus den beiden Kräften als Seiten konstruiert ist. Bei drei Kräften wird die Resultante durch die Diagonale des Parallelepipedons gewonnen, das aus den drei Kräften als Kanten gebildet ist. Eine gegebene Kraft kann man in zwei, drei oder mehrere Kräfte mit demselben Angriffspunkte wie die gegebene Kraft zerlegen. So kann man z. B. eine gegebene Kraft f durch die drei Kräfte f_x, f_y und f_z, welche den Koordinatenachsen im Raume parallel sind, ersetzen.

Alle Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen, daß eine oder mehrere an einem starren Körper angreifende Kräfte durch eine oder mehrere neue Kräfte ersetzt werden können, wobei die neuen Angriffspunkte mit den früheren nicht zusammenzufallen brauchen, gelten ausschließlich für unveränderliche Körper, was stets im Auge zu behalten ist.

Wir hatten gesehen, daß bei der Bewegung eines Punktes auf einer Kurve sich die Beschleunigung w im allgemeinen in eine tangentiale w_1 und eine normale w_2 zerlegen läßt [vgl. Formel (31) auf S. 67]. Entsprechend kann man die wirkende Kraft f (Fig. 17), welche gleich mw ist und der Richtung nach mit w zusammenfällt, in die tangentiale Komponente f_1 und die normale Komponente f_2 zerlegen. Aus Fig. 17 ist ersichtlich, daß die drei Kräfte f, f_1 und f_2 den drei Beschleunigungen w, w_1 und w_2 proportional sind. Hieraus folgt, daß $f_1 = mw_1$ und $f_2 = mw_2$ ist, d. h. man kann die tangentiale und die normale Komponente der Kraft als Ursachen der tangentialen bzw. normalen Beschleunigungen ansehen; die erste dieser Kräfte bringt eine Geschwindigkeitsänderung der Größe

Fig. 17.



nach, die zweite eine Geschwindigkeitsänderung der Richtung nach hervor. Formel (31) auf S. 67 ergibt für die normale Komponente:

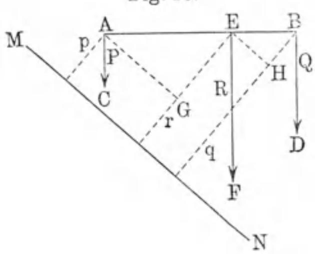
$$f_2 = \frac{m v^2}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25, a)$$

Der Impuls $f_1 \Delta t$ der Kraft f_1 ist gleich dem algebraischen Zuwachs $m \Delta v$ der Bewegungsmenge. Hieraus folgt, daß der Impuls der tangentialen Komponente für ein beliebiges Zeitintervall gleich dem algebraischen Zuwachs der Bewegungsmenge ist, d. h.

$$L_1 = lim \Sigma f_1 \Delta t = m v_2 - m v_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Aus der Elementarphysik ist bekannt, daß die Resultante zweier parallelen nach derselben Seite gerichteten Kräfte $P = AC$ und $Q = BD$ (Fig. 18) gleich ihrer Summe ($R = EF = P + Q$) ist und dieselbe Richtung wie sie hat. Ihr Angriffspunkt E teilt die Entfernung AB in zwei den anliegenden Kräften umgekehrt proportionale Teile, d. h. $EB : EA = P : Q$. Wir wollen nun eine neue Größe, das Moment der Kraft in bezug auf eine gegebene Ebene, einführen; dieses Moment wird gemessen durch das Produkt aus der Kraft und der Senkrechten, die vom Angriffspunkte aus auf die Ebene gefällt ist. Wir wollen beweisen, daß das Moment der Resultante zweier paralleler Kräfte in bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Momente ihrer Komponenten ist.

Fig. 18.



Es gelte als Zeichnungsebene der Fig. 18 die durch AEB gehende und zur gegebenen Ebene MN senkrechte; die Kräfte P, Q und R brauchen in dieser Zeichnungsebene nicht zu liegen. Die Senkrechten, welche aus A, B und E auf die Ebene MN gefällt sind, bezeichnen wir mit p, q und r. Es soll bewiesen werden, daß $Pp + Qq = Rr$ ist. Aus der Figur ist ersichtlich, daß $Pp + Qq = P(r - GE) + Q(r + HB) = (P + Q)r + Q \,.\, HB - P \,.\, GE$ ist. Es ist aber $\frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE} = \frac{HB}{GE}$; hieraus folgt $Q \,.\, HB = P \,.\, GE$. Daher ist

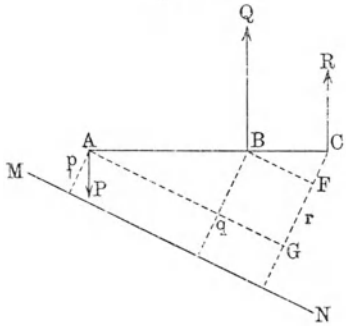
$$Pp + Qq = (P + Q)r = Rr.$$

Ist uns ein System von parallelen Kräften P_i gegeben und bezeichnen wir ihre Resultante mit R und die von den Angriffspunkten der Kräfte auf eine beliebige Ebene gefällten Senkrechten mit p_i und r, so ist

$$\left.\begin{aligned} R &= \Sigma P_i \\ Rr &= \Sigma P_i p_i \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Aus der Elementarphysik ist ferner bekannt, daß die Resultante R zweier parallelen Kräfte P und Q (Fig. 19), die nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, gleich ihrer Differenz $R = Q - P$ und nach der Seite der größeren Kraft gerichtet ist. Ihr Angriffspunkt C liegt auf der Verlängerung der Geraden AB näher zur größeren Kraft, wobei $P : Q = CB : CA$ ist. Gibt man den Kräften P und Q entgegengesetztes Vorzeichen, so läßt sich beweisen, daß auch in diesem Falle das Moment der Resultante gleich der (algebraischen) Summe der Momente ihrer Komponenten, d. h. $Rr = Qq - Pp$ ist, wo p, q und r die Längen der aus A, B und C auf der Ebene MN gefällten Senkrechten sind.

Fig. 19.



Aus der Figur ist ersichtlich, daß $Qq - Pp = Q(r - CF) - P(r - CG) = (Q - P)r + P.CG - Q.CF$ ist. Aus $\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} = \frac{CF}{CG}$ folgt $P.CG = Q.CF$. Mithin ist $Qq - Pp = (Q - P)r = Rr$. Es folgt hieraus, daß die Formeln (27) auch für ein beliebiges System von parallelen Kräften gelten, von welchen die einen diese, die anderen die entgegengesetzte Richtung haben.

Der Angriffspunkt der Resultante eines Systems von parallelen Kräften heißt Mittelpunkt des Systems der parallelen Kräfte. Es sei ein System von parallelen Kräften P_i gegeben; der Angriffspunkt der Kraft P_i habe die Koordinaten x_i, y_i, z_i und die Resultante $R = \Sigma P_i$ habe einen Angriffspunkt mit den Koordinaten X, Y, Z. Sei ferner die Koordinatenebene yz zugleich die Ebene der Momente, so wird anstatt (27)

$$RX = \Sigma P_i x_i.$$

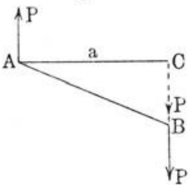
Zwei ähnliche Formeln erhält man, wenn man die Momente auf die Koordinatenebenen xz und xy bezieht. Ersetzt man sodann R durch ΣP_i, so wird

$$X = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i}; \qquad Y = \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i}; \qquad Z = \frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i} \quad \cdot \cdot \ (28)$$

Wir sehen somit, daß die Koordinaten des Mittelpunktes nur von der Größe der Kräfte P_i und von der Lage ihrer Angriffspunkte abhängen; dagegen ist die Lage des Mittelpunktes der parallelen Kräfte unabhängig von der Richtung der Kräfte selbst und bleibt unverändert, wenn man alle Kräfte P_i eine gleiche Anzahl Male größer oder kleiner werden läßt.

§ 12. Kräftepaar. Kräftepaar (Drehpaar) nennt man ein System von zwei Kräften $P = AP$ und $P = BP$ (Fig. 20), die einander gleich und parallel, jedoch entgegengesetzt gerichtet sind und nicht in derselben Angriffslinie liegen. Man kann die beiden Kräfte, aus

Fig. 20.



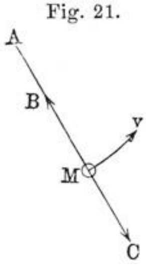
denen das Paar besteht, immer derart anbringen, daß sie zu der Verbindungsgeraden ihrer Angriffspunkte senkrecht sind. Zu diesem Zwecke hat man $AC \perp AP$ zu machen und den Angriffspunkt der Kraft BP von B nach C zu verlegen. Die Gerade $AC = a$ heißt der Arm des Kräftepaares. Wir wollen hierbei wieder eine neue physikalische Größe einführen, die wir das Moment des Kräftepaares nennen, sie sei der Kraft P des Drehpaares und ihrem Arm a direkt proportional. Ist die Einheit für das Moment des Kräftepaares das Moment eines beliebigen Kräftepaares, so erhält man als Zahlenwert M das Moment $M = CPa$. Setzt man $C = 1$, so wird

$$M = Pa \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Die absolute Einheit für das Moment eines Kräftepaares ist das Moment eines solchen Paares, dessen Komponenten der absoluten Krafteinheit und dessen Arm der linearen Einheit gleich sind. Die CGS-Einheit für das Moment eines Kräftepaares ist das Moment eines Paares, das aus zwei um einen Zentimeter voneinander entfernten Dynen besteht. Das Kräftepaar strebt danach, den Körper, auf welchen es wirkt, zu drehen.

§ 13. Zentrifugalkraft. Bewegt sich ein Körper krummlinig und geht von ihm eine Kraft aus, die auf den Körper, der die Abweichung von der geradlinigen Bahn bewirkt, gerichtet ist, so bezeichnet man diese Kraft als Zentrifugalkraft. Es bewege sich z. B. der an einer

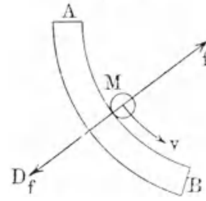
Fig. 21.



Schnur AM befestigte Körper M (Fig. 21) gleichförmig im Kreise um den festen Endpunkt der Schnur. Damit sich nun M nicht auf einer Geraden bewege, ist eine Kraft erforderlich, die in der Richtung des Radius nach dem Zentrum A hin wirkt. Es ist dies die Kraft MB der um einen kleinen Betrag ausgereckten Schnur, welche das Bestreben hat, sich wiederum zu verkürzen. Die Gegenwirkung des Körpers M auf die Schnur AM, welche gleich der Wirkung letzterer auf den Körper, jedoch von entgegengesetzter Richtung ist, ist die Zentrifugalkraft MC. Dieselbe wirkt somit auf die Schnur, nicht aber auf den Körper, wie bisweilen fälschlich gesagt wird. Unter Einwirkung dieser Kraft kann die Schnur zerreißen; dann bewegt sich der Körper, indem er von A fortfliegt, in der Richtung der Tangente und nicht etwa in der Richtung des Radius.

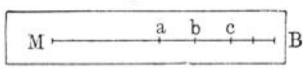
Soll sich der Körper M (Fig. 22) ohne Reibung gleichförmig längs der krummen Wandung AB bewegen, so muß eine Kraft $f = MC$ vorhanden sein, welche senkrecht zur Wandung wirkt und vom Druck der Wandung auf den Körper M herrührt. Der dem letzteren gleiche Gegendruck MD des Körpers auf die Wand ist im gegebenen Falle die Zentrifugalkraft.

Fig. 22.



Die beiden betrachteten Beispiele beziehen sich genau genommen auf materielle Punkte, nicht auf Körper. Bei der Drehung eines physikalischen Körpers um eine Achse wirkt die Zentrifugalkraft auf alle Teilchen desselben mit Ausnahme derjenigen in der Oberflächenschicht. Daß tatsächlich die letzteren der Zentrifugalkraft nicht unterworfen sind, läßt sich folgendermaßen zeigen. Dreht sich der Körper B (Fig. 23) um eine durch M gehende Achse, dann bewegt sich ein beliebiges Teilchen b dabei im Kreise unter dem Einflusse einer Kraft, die von dem Nachbarteilchen a ausgeht und es daran verhindert, sich von a zu entfernen; diese Kraft ist von b nach M gerichtet. Umgekehrt wirkt das Teilchen b auf a mit einer Kraft, die von a nach b gerichtet ist und nichts anderes darstellt als die Zentrifugalkraft selbst. Betrachtet man alle Teilchen in der gleichen Weise, so sieht man, daß sie alle, mit Ausnahme der an der Oberfläche B liegenden, einer Zentrifugalkraft unterliegen.

Fig. 23.



Für die Größe der Zentrifugalkraft haben wir den Ausdruck

$$f = \frac{m v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29,\mathrm{a})$$

vgl. Formel (25, a) auf S. 92.

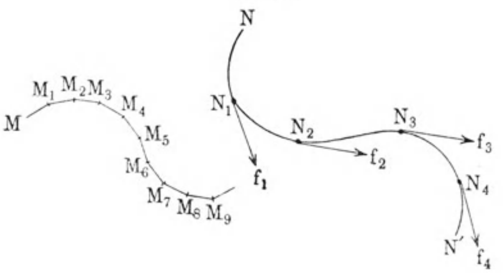
§ 14. Dynamisches Feld. Ein Medium, welches die Eigenschaft besitzt, daß auf einen an einen beliebigen Ort innerhalb desselben gebrachten Körper *eine der Masse des Körpers proportionale Kraft wirkt*, nennen wir ein dynamisches Feld. Der Raum, welcher den Erdball umgibt, ist offenbar ein derartiges Feld. Wir wollen nun eine besondere (sui generis) physikalische Größe einführen, die wir *Intensität des dynamischen Feldes im gegebenen Punkte* oder *Feldstärke* nennen; wir setzen sie der Kraft proportional, welche auf die an diesem Punkte vorhanden gedachte Masseneinheit wirken würde. Wenn auf die Masse m im gegebenen Punkte des Feldes eine Kraft f wirkt, und wenn man als Einheit der Feldstärke die Intensität an irgendeinem Orte eines beliebigen Feldes annimmt, so wird der Zahlenwert ψ

der Feldintensität durch die Formel $\psi = C \frac{f}{m}$ gegeben. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$\psi = \frac{f}{m} \qquad (30)$$

so muß man als absolute Einheit der Feldstärke die Intensität in einem solchen Punkte wählen, in welchem auf die Masseneinheit die absolute Krafteinheit wirkt. Die CGS-Einheit der Feldintensität ist die Intensität in einem Punkte, wo auf die Masse eines Gramms eine Dyne wirkt. Die Feldintensität, welche an der Erdoberfläche durch die Schwerkraft hervorgerufen wird, ist gleich 981 CGS-Einheiten der Feldstärke. Die Intensität ψ ist ein Vektor; er hat die Richtung der Kraft f, welche im gegebenen Punkte des Feldes auf die Masse m wirkt. Ein Feld heißt homogen, wenn die Intensität in allen seinen Punkten die gleiche Größe und Richtung hat. Als ein homogenes Feld kann ein kleiner Teil des Raumes, welcher den Erdball umgibt, gelten.

Fig. 24.



Wir stellen uns nunmehr irgendein im allgemeinen inhomogenes dynamisches Feld vor und ziehen von irgendeinem Punkte M (Fig. 24) des Feldes aus eine ganz kurze Gerade MM_1 in der Richtung der auf einen in M befindlichen materiellen Punkt wirkenden Kraft; von M_1 aus ziehen wir die Gerade M_1M_2 in der Richtung der in M_1 angreifenden Kraft, darauf M_2M_3 in der Richtung der Kraft, die in M_2 wirkt, usw. So erhält man die gebrochene Linie $MM_1M_2 \ldots M_9$. Wenn man die Strecken MM_1, M_1M_2 usw. unbegrenzt abnehmen läßt, so nähert sich die gebrochene Linie unbegrenzt einer gewissen Kurve, die durch M geht. Ihre Richtung, d. h. ihre Tangente in jedem Kurvenpunkte, fällt mit der Richtung der in diesem Punkte wirkenden Kraft zusammen. Eine solche Kurve heißt Kraftlinie. Die Tangenten der Kraftlinie NN' (in N_1, N_2, N_3, N_4 ...) geben die Richtungen der wirkenden Kräfte an. Im homogenen Kraftfelde sind die Kraftlinien lauter parallele Geraden.

§ 15. Trägheitsmittelpunkt. Trägheitsmittelpunkt oder Trägheitszentrum eines physikalischen Körpers nennt man den Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte, welche auf diesen Körper im homogenen Kraftfelde ψ wirken. Zerlegt man das Volumen eines Körpers in sehr kleine Teile Δv und bezeichnet man die Masse, welche einen dieser Teile erfüllt, mit Δm, so kann man sich vorstellen, daß auf sie die Kraft $f = \psi \Delta m$ wirkt. Alle Kräfte sind hier einander parallel, und der Faktor ψ ist allen gemeinsam. Aus der Definition geht hervor, daß der Trägheitsmittelpunkt der Mittelpunkt eines Systems von parallelen Kräften f (vgl. S. 93) ist, die auf einen im homogenen Felde befindlichen Körper wirken. Die Eigenschaften des Mittelpunktes paralleler Kräfte (vgl. § 11) zeigen uns, daß die Lage des Trägheitsmittelpunktes eines Körpers weder von der Feldintensität ψ, noch von der Lage des Körpers im Felde abhängt, denn man kann jede Lagenänderung des Körpers sich durch eine Richtungsänderung der auf den Körper wirkenden Kräfte ersetzt denken. Die Lage des Trägheitsmittelpunktes eines Körpers hängt also nur von der Verteilung der den Körper zusammensetzenden Massenteile ab.

Auf Grund der Formeln (28) auf S. 93 können wir die Koordinaten X, Y, Z des Trägheitsmittelpunktes finden. Zu dem Zwecke zerlegen wir das Volumen v des Körpers in eine sehr große Anzahl Teile Δv_i, welche die Massen Δm besitzen. Da P_i in (28) gleich $\psi \Delta m_i$ ist, so kann man die Brüche durch ψ kürzen; bezeichnet man die ganze Masse des Körpers mit $m = \Sigma m_i$, so erhält man:

$$X = \frac{\lim \Sigma x_i \Delta m_i}{m}; \quad Y = \frac{\lim \Sigma y_i \Delta m_i}{m}; \quad Z = \frac{\lim \Sigma z_i \Delta m_i}{m} \tag{31}$$

oder:

$$X = \frac{1}{m}\int x\,dm; \quad Y = \frac{1}{m}\int y\,dm; \quad Z = \frac{1}{m}\int z\,dm \quad . \; . \; . \; (31,\mathrm{a})$$

Für einen homogenen Körper, dessen Dichte k ist, haben wir $\Delta m_i = k \Delta v_i$ und $m = kv$; setzt man dies ein, so fällt der Faktor k fort und man erhält:

$$X = \frac{\lim \Sigma x_i \Delta v_i}{v}; \quad Y = \frac{\lim \Sigma y_i \Delta v_i}{v}; \quad Z = \frac{\lim \Sigma z_i \Delta v_i}{v} \tag{32}$$

oder:

$$X = \frac{1}{v}\int x\,dv; \quad Y = \frac{1}{v}\int y\,dv; \quad Z = \frac{1}{v}\int z\,dv. \quad . \; . \; . \; (32,\mathrm{a})$$

Die Lage des Trägheitsmittelpunktes eines homogenen Körpers hängt also von seiner Dichte nicht ab.

Der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Körpers kann gefunden werden, wenn die Lagen der Trägheitsmittelpunkte von zwei, drei oder mehr Teilen, in welche man sich den Körper zerlegt denken kann, bekannt sind. Zu diesem Zwecke muß man an die Trägheitsmittelpunkte der Teile Kräfte angreifen lassen, die parallel und den Massen der Teile proportional sind und schließlich den Angriffspunkt der Resultante aller so erhaltenen Kräfte suchen.

§ 16. Trägheitsmoment. Trägheitsmoment eines materiellen Teilchens in bezug auf eine gegebene Achse nennt man eine Größe besonderer Art, die bei der drehenden Bewegung eine analoge Rolle spielt, wie die Masse bei der geradlinigen. Aus Gründen, die wir später kennen lernen werden, setzen wir sie proportional der Masse Δm dieses Teilchens und dem Quadrat der Entfernung r des Teilchens von der Achse. Ist der Proportionalitätsfaktor gleich Eins, so erhält man für den Zahlenwert K des Trägheitsmomentes den Ausdruck $K = r^2 \Delta m$. Das Trägheitsmoment eines Punktsystems wird gleich der Summe der Trägheitsmomente dieser Punkte gesetzt, d. h. $K = \Sigma r^2 \Delta m$. Das Trägheitsmoment eines physikalischen Körpers wird folgendermaßen erhalten: Wir zerlegen den Körper in eine sehr große Anzahl kleiner Teile; Δm sei die Masse, r der Achsenabstand irgendeines geometrischen Punktes eines der Teile. Bilden wir die Summe der Größen $r^2 \Delta m$, so heißt der Grenzwert, welchem diese Summe bei unbegrenzter Zunahme der Anzahl der Teile zustrebt, das Trägheitsmoment K des physikalischen Körpers. Sonach ist:

$$K = lim \Sigma r^2 \Delta m = \int r^2 dm \qquad (33)$$

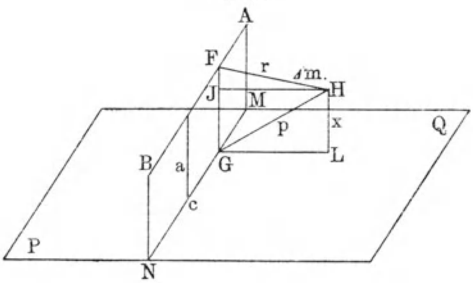
Die absolute Einheit des Trägheitsmomentes als Trägheitsmoment der Masseneinheit, welche um die Längeneinheit von der Achse entfernt ist, zu definieren, wäre mißlich, da man sich die Masseneinheit nicht um einen geometrischen Punkt konzentriert denken kann. Wir sagen deshalb, daß ein Körper, für den Formel (33) den Wert $K = 1$ ergibt, wobei Δm und r in den Grundeinheiten der Masse und Länge ausgedrückt sein müssen, die absolute Einheit des Trägheitsmomentes besitze. Angenähert ist die Einheit des Trägheitsmomentes gleich dem der Masseneinheit, welche in dünner Schicht auf der Oberfläche eines Kreiszylinders verteilt ist, wobei der Grundflächenradius gleich der Längeneinheit und das Moment auf die Zylinderachse bezogen ist. Die CGS-Einheit des Trägheitsmomentes wird dargestellt durch die Masse von einem Gramm, welche auf einer Zylinderfläche im Abstande eines Zentimeters von der Achse verteilt ist.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen: Das Trägheitsmoment K eines Körpers mit der Masse m, bezogen auf eine Achse, die sich in der Entfernung a vom Trägheitsmittelpunkte des Körpers befindet, setzt sich aus zwei Trägheitsmomenten zusammen: Das erste K_0 ist gleich dem Trägheitsmoment bezogen auf eine Achse, die durch den Trägheitsmittelpunkt geht und der ersten parallel ist; dazu kommt noch die Größe ma^2, d. h. das Trägheitsmoment bezüglich der ersten Achse, welches erhalten würde, wenn die ganze Masse m des Körpers im Trägheitsmittelpunkt vereint wäre. Also:

$$K = K_0 + ma^2 \qquad (34)$$

Beweis: Es sei AB (Fig. 25) die Achse, in bezug auf welche wir das Trägheitsmoment K suchen; die andere Achse ist $MN \parallel AB$; die Entfernung zwischen beiden ist $NB = a$. Wir legen durch MN die Ebene PQ senkrecht zu NB und machen sie zur yz-Koordinatenebene. Das Teilchen Δm befindet sich in den Entfernungen $HF = r$, $HG = p$ und $HL = x$ von den Achsen AB, MN und der Ebene PQ. Wir haben $K = lim \Sigma r^2 \Delta m$ und $K_0 = lim \Sigma p^2 \Delta m$. Aus der Figur ist ersichtlich, daß $r^2 = p^2 + a^2 - 2ax$ ist, denn es ist $JG = HL$, wenn $HJ \perp FG$ ist. Multipliziert man mit Δm und bildet den Grenzwert der Summe, so erhält man

Fig. 25.



$$lim \Sigma r^2 \Delta m = lim \Sigma p^2 \Delta m + lim \Sigma a^2 \Delta m - lim \Sigma 2ax \Delta m.$$

Die erste Summe ist K, die zweite K_0; in der dritten kann man a^2 vor das Summenzeichen und $lim \Sigma \Delta m = m$ setzen; im vierten Gliede nimmt man $2a$ vor das Summenzeichen. Dann wird

$$K = K_0 + ma^2 - 2a \, lim \Sigma x \Delta m.$$

Formel (31) zeigt, daß $lim \Sigma x \Delta m = mX$ ist, wo X der Wert der x-Koordinate des Trägheitsmittelspunktes ist. Letzterer liegt aber in der yz-Ebene der Koordinaten, folglich ist $X = 0$, und daher erhält man Formel (34), was zu beweisen war. Diese Formel gestattet, das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Achse zu bestimmen, wenn das Trägheitsmoment bezüglich einer ihr parallelen durch den Trägheitsmittelpunkt gehenden Achse bekannt ist. Aus Formel (34) folgt weiter, daß das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich aller Seitenlinien eines Zylinders, dessen Achse durch den Trägheitsmittelpunkt geht, ein und denselben Wert hat.

Das Trägheitsmoment wird durch ein dreifaches Integral über das ganze Körpervolumen ausgedrückt. Sei dv das Differential des Volumens, dm das Differential der Masse und k die Dichte, so hat man im allgemeinen $dm = k\,dv$ und erhält daher für das Trägheitsmoment

$$K = \iiint r^2 k \, dv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

I. Das Trägheitsmoment eines hohlen homogenen Kreiszylinders in bezug auf seine geometrische Achse. Es sei l die Länge des Zylinders, R_1 sein innerer, R_2 sein äußerer Radius; die Dichte k sei eine konstante Größe. Wir führen zylindrische Koordinaten ein: x sei die Entfernung des Punktes von der Ebene einer der Grundflächen des Zylinders, r der Abstand des Punktes von der Achse und φ der Winkel zwischen r und einem gewissen Anfangsradius r_0. Das Element des Volumens ist $dv = r\,dx\,dr\,d\varphi$ und daher

$$K = k\int_{x=0}^{l}\int_{r=R_1}^{R_2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\,dx\,dr\,d\varphi = 2\pi k l\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$

oder

$$K = \frac{1}{2}\pi k l (R_2^4 - R_1^4).$$

Die Masse m des Hohlzylinders ist gleich $\pi k l (R_2^2 - R_1^2)$; folglich ist

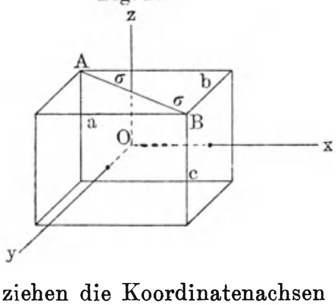
$$K = m\frac{R_2^2 + R_1^2}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Für einen **massiven** Zylinder, dessen Grundflächenradius gleich R ist, haben wir aus (36), wenn $R_2 = R$ und $R_1 = 0$ gesetzt wird,

$$K = \frac{1}{2} m R^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Wenn l klein ist, so verwandelt sich der Hohlzylinder in einen **Ring mit rechteckigem Durchschnitt** und der massive in eine **runde Platte.** Auf sie beziehen sich die Formeln (36) und (37). Formel (37) zeigt, daß die CGS-Einheit des Trägheitsmomentes z. B. gleich dem Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf seine Achse ist, dessen Masse zwei Gramm beträgt und dessen Grundflächenradius gleich einem Zentimeter ist.

Fig. 26.



II. **Das Trägheitsmoment eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedons in bezug auf eine Achse, welche durch seinen geometrischen Mittelpunkt geht und einer der Kanten (c) parallel ist.** Es seien a, b, c die Kanten eines Parallelepipedons (Fig. 26); wir ziehen die Koordinatenachsen mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt O des Parallelepipedons parallel den Kanten und suchen die Größe K in bezug auf die Achse Oz. Das Volumenelement $dv = dx\,dy\,dz$ hat die Koordinaten x, y, z und befindet sich von Oz in einer Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Folglich ist

$$K = k\int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Integriert man nach z, so wird

$$K = k c \left\{ \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy + \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \right\} = \frac{k a b c}{12}(a^2+b^2).$$

Es ist aber die Masse unseres Körpers gleich $k a b c$, folglich ist

$$K = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{1}{3} m \sigma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

wo σ (vgl. Fig. 26) die Hälfte der Diagonale, d. h. der Achsenabstand des von der Achse entferntesten Körperpunktes ist.

III. Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse. Es sei R der Kugelradius. Wir verlegen den Anfangspunkt der Koordinatenachsen in ihren Mittelpunkt und bezeichnen mit K_x, K_y und K_z die Trägheitsmomente der Kugel in bezug auf die Koordinatenachsen. Infolge der Symmetrie der Kugel ist im allgemeinen

$$K = K_x = K_y = K_z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38, \mathrm{a})$$

Offenbar ist

$$K_x = \iiint (y^2 + z^2)\, dm;$$
$$K_y = \iiint (x^2 + z^2)\, dm;$$
$$K_z = \iiint (x^2 + y^2)\, dm.$$

Summiert man diese drei Größen und beachtet die Gleichungen (38, a), so erhält man

$$3K = 2\iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = 2\iiint \varrho^2\, dm,$$

wo ϱ der Abstand eines Punktes vom Kugelmittelpunkte ist. Zerlegt man die Kugel in unendlich dünne Schichten mit dem Radius σ und der Dicke $d\varrho$ und beachtet, daß $dm = 4\pi\varrho^2 k\, d\varrho$ ist, so erhält man

$$K = \frac{8\pi}{3} k \int_0^R \varrho^4\, d\varrho = \frac{8\pi k R^5}{15}.$$

Die Gesamtmasse m der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi k R^3$, folglich ist

$$K = \frac{2}{5} m R^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Drittes Kapitel.

Arbeit und Energie.

§ 1. Die Wucht oder lebendige Kraft. Wir wollen uns nunmehr mit einer weiteren selbständigen physikalischen Größe bekannt machen. Bewegt sich ein Körper von der Masse m mit der Geschwindigkeit v, dann verstehen wir unter der Wucht dieser Bewegung eine Größe, welche der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Nimmt man die Wucht der Bewegung irgendeines in Bewegung befindlichen Körpers als Einheit an, so erhält man für den Zahlenwert J der Wucht die allgemeine Formel $J = Cmv^2$. Aus gewissen Gründen, die aus dem weiteren ersichtlich sein werden, setzen wir $C = \frac{1}{2}$, also wird

$$J = \frac{1}{2} m v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die absolute Einheit der Wucht ist z. B. die Wucht eines Körpers, dessen Masse $m = 2$ und dessen Geschwindigkeit gleich der Einheit ist. Die CGS-Einheit der Wucht ist z. B. die Wucht einer Masse von 2 g, welche sich mit einer Geschwindigkeit gleich der CGS-Einheit der Geschwindigkeit (1 cm pro Sekunde) bewegt.

Besitzen die Teilchen, aus denen der physikalische Körper besteht, verschiedene Geschwindigkeiten, so wird seine Wucht durch die Formel

$$J = lim \sum \frac{1}{2} \varDelta m \,.\, v^2 = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

gegeben, wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Masse $\varDelta m$ ist. Die Wucht eines rotierenden Körpers wird aus der allgemeinen Formel (2) durch Substitution von $r\Theta$ an Stelle von v erhalten [nach Formel (42) auf S. 70], wo Θ die Winkelgeschwindigkeit im gegebenen Augenblicke und r die Entfernung des Teilchens von der Drehungsachse ist. Man erhält danach $J = lim \sum \frac{1}{2} \varDelta m \,.\, r^2 \Theta^2$. Den Faktor $\frac{1}{2}\Theta^2$ kann man, als allen Teilchen gemeinsam, vor das Summenzeichen setzen:

$$J = \frac{1}{2} \Theta^2 lim \sum r^2 \varDelta m = \frac{1}{2} \Theta^2 \int r^2 dm.$$

Der Grenzwert dieser Summe, d. h. das Integral, ist das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf seine Rotationsachse [vgl. (33) auf S. 98]; somit ist

$$J = \frac{1}{2} K \Theta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Wucht eines sich drehenden Körpers ist numerisch gleich dem halben Produkte aus dem Quadrate seiner Winkelgeschwindigkeit und seinem auf die Drehungsachse bezogenen Trägheitsmomente. Setzt man in (3) anstatt K einen der Ausdrücke (36), (37), (38) und (39) (vgl. die vorhergehenden Seiten), so erhält man die Wucht eines homogenen Hohlzylinders oder Ringes mit rechtwinkligem Durchschnitt, eines massiven Zylinders oder einer runden Platte, eines Parallelepipedons und einer Kugel, die um Achsen rotieren, für welche bereits Ausdrücke des Trägheitsmomentes abgeleitet worden sind. Formel (34) gestattet uns, die Wucht dieser Körper bei ihrer Rotation um Achsen, die den oben bezeichneten parallel sind, zu bestimmen.

§ 2. **Arbeit.** Wenn eine Kraft auf einen sich aus irgendwelchem Grunde bewegenden Körper so wirkt, daß sich der Angriffspunkt der Kraft verschiebt, so übt sie im allgemeinen einen gewissen Einfluß auf die Bewegung aus, oder sie leistet, wie man sagt, eine Arbeit. Eine Kraft leistet stets Arbeit, wenn sich ihr Angriffspunkt verschiebt, es sei denn, daß die Bewegung senkrecht zur Richtung der Kraft erfolgt. Wir betrachten zunächst zwei Sonderfälle der Einwirkung einer Kraft auf einen sich bewegenden Körper.

I. Der erste Fall tritt ein, wenn außer der Kraft f eine ihr der Größe nach gleiche, jedoch der Richtung nach entgegengesetzte Kraft f' vorhanden ist, und wenn der Körper infolge eines Anfangsstoßes oder aus einem anderen Grunde sich mit einer gewissen Geschwindigkeit v in der Richtung der Kraft f bewegt. Die Kraft f' nennen wir Widerstand; es ist wichtig, zu beachten, daß sie bisweilen nur während der Bewegung selbst auftritt (Reibung, Widerstand des Mediums). Wäre die Kraft f nicht da, so wäre die Bewegung des Körpers eine verzögerte, seine Geschwindigkeit würde abnehmen. Der Einfluß der Kraft f besteht in diesem Falle darin, daß sie die verzögernde Wirkung des Widerstandes f' aufhebt und die Geschwindigkeit v unverändert erhält. Wir wollen uns vorstellen, daß der Körper den Weg s in der Richtung der Kraft f, welche auf diesem Wege die Wirkung des Widerstandes f' überwunden hat, durchlaufen habe. Da die Arbeit R der Kraft f als Maß der Einwirkung dieser Kraft auf die Bewegung des Körpers dienen muß, so setzen wir diese Arbeit R natürlicherweise dem Widerstande f' und dem Wege s proportional. Somit ist $R = Cf's$, wo C der Proportionalitätsfaktor ist. Der Größe nach aber ist $f' = f$ und daher $R = Cfs$. Setzt man $C = 1$, so wird

$$R = fs \qquad (4)$$

Die absolute Einheit der Arbeit ist die Arbeit der Krafteinheit, welche auf einem Wege von der Einheit der Länge gewirkt hat, d. h.

bei der sich der Angriffspunkt der Kraft in der Richtung der Kraft um die Längeneinheit verschoben hat. Die CGS-Einheit der Arbeit ist die Arbeit einer Dyne auf einem Wege von 1 cm Länge, sie heißt Zentimeterdyne oder Erg. Eine Million Erg heißt Megaerg und zehn Megaerg oder 10^7 Erg nennt man ein Joule.

Einen hierhingehörigen Fall von Arbeit haben wir, wenn wir an der Erdoberfläche einen Körper vom Gewichte p in vertikaler Richtung auf die Höhe h heben, unter der Bedingung, daß er weder eine positive noch auch negative Beschleunigung erfahre. Die Arbeit ist

$$R = ph \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4,\mathrm{a})$$

Wenn das Gewicht (der Widerstand, welcher gleich der hebenden Kraft ist) in Kilogrammen und die Höhe in Metern ausgedrückt ist, so ist in (4, a) die Arbeitseinheit die Arbeit, welche zum Heben von einem Kilogramm auf ein Meter Höhe ohne gleichzeitige Änderung der Anfangsgeschwindigkeit erforderlich ist; diese Arbeitseinheit heißt Meterkilogramm. In ähnlicher Weise erhält man die Arbeitseinheiten Fußpfund, Zentimetergramm usw., deren Bedeutung sich aus der Benennung leicht ergibt. Wir sahen auf S. 89, daß eine Dyne = 1,02 Milligramm ist. Hieraus folgt, daß ein Megaerg = 10^6 Erg = $10^6 . 1{,}02$ Zentimetermilligramm = 1,02 Zentimeterkilogramm = 0,0102 Meterkilogramm ist. Somit haben wir

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ Joule} = 10 \text{ Megaerg} & = 10^7 \text{ Erg} & = 0{,}102 \text{ Meterkilogramm} \\ \phantom{1 \text{ Joule} = 1}1 \quad ,, & = 10^6 \quad ,, & = 0{,}0102 \qquad ,, \end{array}$$

II. Den zweiten Fall von Arbeit haben wir, wenn die Kraft f auf einen Körper wirkt, der bei seiner Bewegung von der Außenwelt keinerlei Widerstand erfährt. Nehmen wir an, daß die Kraft f auch hier die Bewegungsrichtung hat, so tritt als Ergebnis der Kraftwirkung eine algebraische Geschwindigkeitszunahme, d. h. eine Beschleunigung auf. Das Beharrungsvermögen des Körpers, d. h. sein passives Bestreben, die Geschwindigkeit aufrecht zu erhalten, spielt hier die Rolle des Widerstandes, welcher von der aktiven bewegenden Kraft überwunden wird; dieser Widerstand gegen die wirkende Kraft f geht indes nicht von der Außenwelt, sondern von dem sich bewegenden Körper selbst aus. Unter der Arbeit der Kraft f verstehen wir auch hier eine Größe, deren Zahlenwert gegeben wird durch Formel (4), d. h. durch das Produkt aus der Kraft f und dem Wege s, welcher vom Körper in der Kraftrichtung durchlaufen ist.

Somit muß man zwei Fälle der Hervorbringung von Arbeit unterscheiden: Beim ersten besteht das Wesen der Arbeit in der Überwindung eines äußeren Bewegungswiderstandes, welche ohne Steigerung der Geschwindigkeit des Körpers erfolgt; im zweiten Falle tritt die Wirkung der Arbeit in einer Vermehrung der Geschwindigkeit hervor, der gegenüber sich die Außenwelt indifferent verhält. In Wirklichkeit haben wir gewöhnlich eine Verbindung beider Fälle vor uns: die Kraft f überwindet irgendwelche Widerstände und ändert gleichzeitig die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers.

Es sei nun f' nicht gleich f, sondern $f' < f$; dann ruft die Arbeit ϱ der Kraft $f - f'$ eine Geschwindigkeitszunahme des Körpers hervor. Wir haben $\varrho = (f - f')s$ und hieraus

$$fs = f's + \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Arbeit $r = fs$ besteht aus zwei Teilen: $f's$ wird zur Überwindung des äußeren Widerstandes, ϱ zur Steigerung der Geschwindigkeit des Körpers verbraucht.

Der zweite der eben betrachteten Sonderfälle läßt sich an der Erdoberfläche nicht verwirklichen, denn es tritt bei jeder Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche ein Bewegungswiderstand auf, der von den benachbarten Körpern ausgeht, so z. B. der Luftwiderstand, die Reibung an der Oberfläche der Räderachsen usw. Hieraus folgt, daß an der Erdoberfläche bei jeder Einwirkung einer Kraft auf einen Körper ein Teil der Arbeit zur Überwindung äußerer Widerstände verbraucht wird (oder wie man sagt, verloren geht, verschwindet). Die Entstehung der Ausdrücke: die Arbeit wird verbraucht, geht verloren, verschwindet usw. wird später erläutert werden.

Die Widerstände kann man in zwei Klassen teilen: Die schädlichen Widerstände (Reibung usw.), welche z. B. in der Maschine infolge ihrer Bewegung entstehen und für die Nutzarbeit verloren sind, und die Nutzwiderstände, welche der von der Maschine zu leistenden Arbeit entsprechen und die wir benutzen, um z. B. eine Säge, eine zur Bearbeitung von Holz, Metallen usw. dienende Drehbank in gleichförmige Bewegung zu versetzen.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die Kraft in der Richtung der Verschiebung s wirke. Wir betrachten nunmehr den allgemeinen Fall, wo die Richtung der Kraft f und die der Verrückung s einen gewissen Winkel $(f, s) = \alpha$ einschließen. Ist $\alpha = 90^0$, so ist die Arbeit der Kraft $f = 0$, denn diese Kraft kann weder die Geschwindigkeit ihrer Größe nach ändern, noch Widerstände überwinden, welche eine der Bewegungsrichtung des Körpers entgegengesetzte Richtung haben. Für einen beliebigen Winkel α wird als Zahlenwert der Arbeit R die Größe

$$R = fs \cos\alpha = fs \cos(f, s) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

angenommen, welche bei $\alpha = 0$ die Formel (4) und bei $\alpha = 90^0$ den Ausdruck $R = 0$ ergibt. Bezeichnet man mit f_1 die tangentiale Komponente der Kraft f, so hat man $f_1 = f \cos\alpha$; ferner sei $s \cos\alpha = s_1$ gesetzt. Die Kraft f_1 ist die Projektion der wirkenden Kraft f auf die

Verschiebungsrichtung s; s_1 dagegen ist die Projektion der Verschiebung s auf die Richtung der Kraft f. Wir haben

$$R = fs \cos\alpha = f_1 s = f s_1 \quad \ldots \ldots \quad (6, a)$$

Im allgemeinen Falle ändern sich die Größen der Kraft f und des Winkels α ununterbrochen. Wir zerlegen dann den Weg s in sehr kleine Abschnitte Δs und erhalten für die Arbeit, die einer solchen kleinen Verschiebung Δs entspricht, das sogenannte „Arbeitselement“

$$\Delta R = f \Delta s \cos(f, \Delta s).$$

Die ganze von der veränderlichen Kraft f bei der krummlinigen Bewegung des Körpers geleistete Arbeit wird ausgedrückt durch die Formel

$$R = \lim \Sigma f \Delta s \cos(f, \Delta s) = \int f \cos(f, ds)\, ds \quad \ldots \quad (7)$$

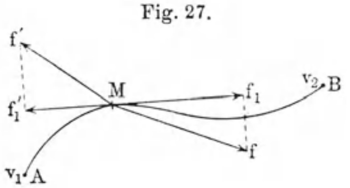
oder

$$R = \lim \Sigma f_1 \Delta s = \int f_1\, ds \quad \ldots \ldots \quad (7, a)$$

wo f_1 die tangentiale Komponente der wirkenden Kraft ist.

Nunmehr können wir dazu übergehen, die Arbeit im allgemeinsten Falle zu betrachten, wo die Kraft f und der Widerstand f' beliebige veränderliche Winkel mit der Bewegungsrichtung des Punktes bilden. Bewegt sich z. B. der Punkt M (Fig. 27) auf einer gewissen Kurve AB, und bezeichnen wir die tangentialen Komponenten der Kräfte f und f' mit f_1 und f_1', so erhalten wir für das Arbeitselement einen Ausdruck ähnlich Formel (5), nämlich

Fig. 27.



$$f_1 \Delta s = f_1' \Delta s + \Delta \varrho,$$

wo $\Delta \varrho$ der Teil des Arbeitselementes ist, welcher zur Vergrößerung der Geschwindigkeit des Körpers verbraucht wird. Für die Gesamtarbeit haben wir

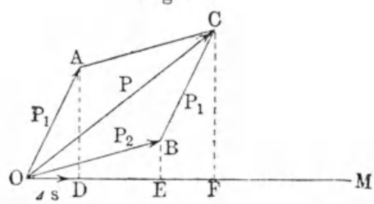
$$R = \lim \Sigma f_1 \Delta s = \lim \Sigma f_1' \Delta s + \varrho \quad \ldots \ldots \quad (7, b)$$

$$R = \int f_1\, ds = \int f_1'\, ds + \varrho,$$

wo ϱ die ganze zur Geschwindigkeitsvergrößerung verbrauchte Arbeit ist.

Wir wollen nun folgenden überaus wichtigen Lehrsatz beweisen: Wenn mehrere Kräfte einen gemeinsamen sich verschiebenden Angriffspunkt haben, so ist die Arbeit der Resultante gleich der algebraischen Summe der von den Komponenten geleisteten Arbeiten. Es genügt, wenn wir diesen Satz beweisen für zwei wirkende Kräfte $P_1 = OA$ und $P_2 = OB$ (Fig. 28), deren Resultante $P = OC$ ist. Wir nehmen an, der Punkt O habe sich um die sehr kleine Wegstrecke Δs in der Richtung von OM verschoben. Fällt man von den Punkten A, B und C aus die Senkrechten auf OM, so hat man $OF = OE + EF$; es ist aber $EF = OD$, folglich ist $OF = OD + OE$ oder $P \cos(P, \Delta s) = P_1 \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \cos(P_2, \Delta s)$. Multipliziert man diese Gleichung mit Δs, so wird

Fig. 28.

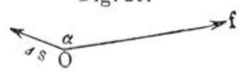


$$P \Delta s \cos(P, \Delta s) = P_1 \Delta s \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \Delta s \cos(P_2, \Delta s),$$

welche Gleichung unseren Satz für zwei Kräfte ausdrückt. Von zwei Kräften ist es leicht, zu drei und mehr überzugehen und den Satz für beliebig viele Kräfte zu beweisen.

Formel (6) gibt für die Arbeit R einen positiven Zahlenwert, wenn α ein spitzer Winkel ist. Ist α ein stumpfer Winkel (Fig. 29), so ist die Arbeit R negativ, wobei wieder zwei Fälle möglich sind:

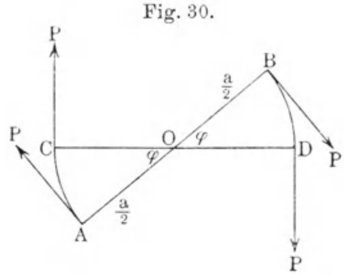
Fig. 29.



1. Es ist eine andere Kraft f' vorhanden, welche mit Δs einen spitzen Winkel bildet, wobei die Projektionen f_1' und f_1 beider Kräfte auf die Bewegungsrichtung einander gleich sind; der Körper, dem von einer Nebenkraft eine gewisse Geschwindigkeit erteilt ist, bewegt sich gleichförmig. Alsdann spielt unsere Kraft die Rolle eines Widerstandes, dessen Arbeit negativ und numerisch gleich der Arbeit der anderen wirkenden Kraft ist. Als Resultat dieser Arbeit ergibt sich die Aufhebung der beschleunigenden Wirkung der Kraft f_1', das Aufrechterhalten einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit der Bewegung.

2. Die Kraft f (Fig. 29) wirkt auf den sich bewegenden Körper, der keinen Nebeneinflüssen unterworfen ist. In diesem Falle ist das Ergebnis der negativen Arbeit dieser Kraft eine Verzögerung der Bewegung, d. h. eine Geschwindigkeitsabnahme. Im allgemeinen Falle, wenn die Projektion der Kraft f auf die Bewegungsrichtung größer ist als die Projektion der Kraft f', bringt der Überschuß der von Kraft f geleisteten Arbeit über die Arbeit der Kraft f' eine Verlangsamung der Bewegung hervor.

Fig. 30.



Wir wollen die Größe der Arbeit für einige Sonderfälle bestimmen.

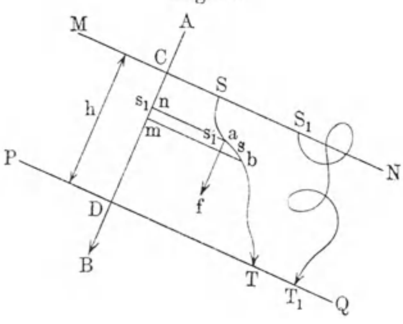
I. Die Arbeit eines Kräftepaares. Auf einen Körper wirke ein Kräftepaar $PA\ BP$ (Fig. 30), dessen Moment $M = Pa$ sei, wo $a = AB$ ist [vgl. (29) auf S. 94]. Da beide Kräfte P bei dieser Drehung beständig die Bewegungsrichtung der Pfeile in den Punkten A und B haben, so ist, wenn der Körper sich um den Winkel φ um den Punkt O gedreht hat, die Arbeit $R = P.AC + P.BD = 2\,P.AC$. Es ist aber $\smile AC = \frac{a}{2}\,\varphi$, folglich $R = Pa\,\varphi$, oder

$$R = M\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

d. h. die Arbeit eines Kräftepaares ist gleich dem Produkte aus dem Kräftepaarmoment und dem Drehungswinkel.

II. Die Arbeit bei Bewegung eines Körpers im homogenen Felde. Es sei AB (Fig. 31) die Richtung der Kraftlinien im homogenen Felde und es bewege sich ein Körper auf einer beliebigen Bahnlinie vom Punkte S nach T. Wir ziehen durch S und T zwei Ebenen MN und PQ senkrecht zur Kraftrichtung. Diese Ebenen werden die Gerade AB in den Punkten C und D schneiden; es sei nun $CD = h$, und f die Kraft, welche auf den Körper im homogenen Felde wirkt. Wir zerlegen den Weg in kleine Strecken und bezeichnen eine derselben (ab) mit s und ihre Projektion auf die Kraftrichtung mit $s_1 = mn$, wo an und bm senkrecht zu AB sind. Die gesuchte Arbeit ist $R = lim\,\Sigma fs\cos(f,s) = lim\,\Sigma fs_1$. Im homogenen Felde ist die Kraft f konstant, und man kann daher den Faktor f vor das Summenzeichen setzen. Man erhält dann $R = f\,lim\,\Sigma s_1$; die letztere Summe ist offenbar $CD = h$, also

Fig. 31.



$$R = fh.$$

Diese Formel zeigt uns, daß die Arbeit, welche bei Bewegung eines gegebenen Körpers im homogenen Kraftfelde von den in diesem Felde wirkenden Kräften geleistet wird, weder von der Form des Weges noch von der Lage des Anfangs- und Endpunktes dieses Weges auf Ebenen, welche zur Richtung der Kraftlinien senkrecht stehen, abhängt, sondern nur von dem Abstande dieser Ebenen voneinander. Es ist leicht einzusehen, daß man dieselbe Arbeit erhält, wenn unser Körper von MN zu PQ auf der Kurve $S_1 T_1$ gelangt.

Wenn Anfangs- und Endpunkt des Weges auf ein und derselben zur Richtung der Kraftlinien senkrechten Ebene liegen, so ist die Arbeit gleich Null.

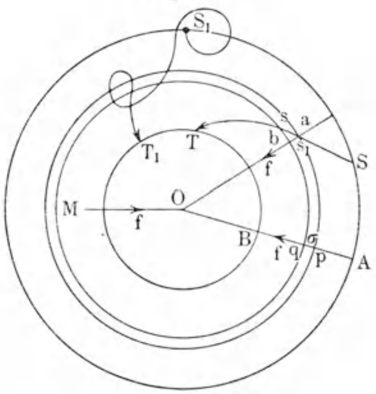
III. Die Arbeit von Zentralkräften. Kräfte, welche von jedem beliebigen Raumpunkte aus stets nach demselben Punkte O

(Fig. 32) hin wirken und nur von der Entfernung des Punktes M von O abhängen, heißen Zentralkräfte. Bewegt sich ein Körper auf einer durch O gehenden Geraden von A nach B, so erhält man, wenn man den ganzen Weg in Elemente $\sigma = pq$ zerlegt, für die gesuchte Arbeit

$$R = lim \sum_A^B f\sigma,$$

denn die Kraft f hat in jedem Punkte p die Richtung der Verschiebung σ. Die Buchstaben A und B bezeichnen symbolisch die Grenzen, innerhalb derer die kleinen Wegstrecken σ liegen.

Fig. 32.



Es seien durch A und B Kugelflächen mit dem Mittelpunkte in O gelegt und werde angenommen, daß sich der Körper auf einer beliebigen Kurve von S nach T bewegt, wobei S und T auf den soeben erwähnten Kugelflächen liegen. Legt man dann durch die Endpunkte p und q des Wegelementes σ Kugelflächen, deren Mittelpunkt in O liegt, so schneiden diese aus der Wegkurve ST den kleinen Abschnitt $ab = s$ heraus. Bemerkt sei noch, daß die Kraft f der Voraussetzung nach in a und p dieselbe Größe hat. Die Arbeit ist $R_1 = lim \Sigma fs \cos(f, s)$; bei sehr kleinem s kann man $s \cos(f, s) = s_1 = \sigma$ setzen, folglich ist

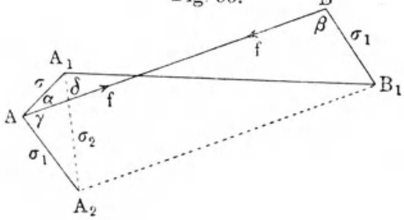
$$R_1 = lim \sum_A^B f\sigma = R.$$

Somit hängt bei der Wirkung von Zentralkräften die Arbeit nur von den beiden konzentrischen Kugelflächen (deren Mittelpunkt mit dem der Kräfte zusammenfällt) ab, auf denen der Anfangs- und Endpunkt des Weges liegen; sie hängt nicht ab von der besonderen Lage dieser Punkte auf den Kugelflächen, noch von der Form der Bahnlinie. Dieselbe Arbeit würde auch geleistet, wenn die Bewegung auf der Kurve $S_1 T_1$ erfolgte.

IV. Arbeit innerer Kräfte. Kräfte, mit denen die materiellen, ein Punktsystem bildenden Punkte aufeinander wirken, heißen innere Kräfte. Sind dies Zentralkräfte, so läßt sich beweisen, daß die Arbeit der inneren Kräfte gleich Null ist, wenn sich die gegenseitige Lage der Punkte nicht ändert, d. h. wenn sich das System als Ganzes bewegt. Wir betrachten zu dem Zwecke zwei Punkte A und B (Fig. 33), die, ohne daß sich ihre Entfernung geändert, nach A_1 und B_1 gelangt sind. Ihre Wechselwirkung wird durch zwei Kräfte f und

f_1 ausgedrückt, die nach dem dritten Bewegungsgesetze einander gleich sind, $f = f_1$. Es mögen die Verschiebungen $AA_1 = \sigma$ und $BB_1 = \sigma_1$ unendlich klein sein. Die Arbeit ist $R = f\sigma \cos\alpha + f_1 \sigma_1 \cos\beta$. Wir ziehen nun $AA_2 \parallel BB_1$ und $B_1A_2 \parallel BA$ und verbinden A_2 mit A_1.

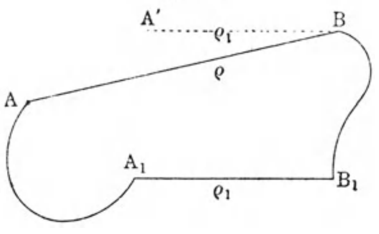
Fig. 33.



Dann ist $AA_2 = BB_1 = \sigma_1$; ferner sei $A_1A_2 = \sigma_2$. Offenbar ist $\sigma \cos\alpha = \sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta$, also haben wir, da $f = f_1$ ist, $R = f[\sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta + \sigma_1 \cos\beta]$. Nun ist aber $\cos\beta = -\cos\gamma$ und nähert sich $\angle \delta = \angle A_1A_2B_1$ im Grenzfalle einem Rechten, denn es ist $A_1B_1 = A_2B_1$; für unendlich kleine Verschiebungen hat man $\cos\delta = 0$ zu setzen, so daß $R = 0$ wird. Überträgt man dieselbe Herleitung auf alle Punktpaare, so sieht man, daß die Arbeit aller inneren Kräfte gleich Null ist, sobald sich das System als ein Ganzes bewegt.

Wir beweisen nunmehr folgenden zweiten Satz: Die Arbeit, welche von inneren Kräften beim Übergange aus einer Anordnung der Teilchen in eine andere geleistet wird, hängt nicht davon ab, auf welche Weise sich dieser Übergang vollzogen hat, d. h. auf welchen Wegen jeder der Punkte aus seiner Anfangslage in die Endlage gelangt ist. Wir betrachten zwei Punkte A und B (Fig. 34), die nach A_1 und B_1 gelangt sind, und verleihen den

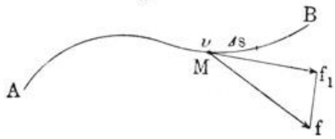
Fig. 34.



beiden zusammengehörig gedachten Punkten eine Bewegung, die in jedem gegebenem Augenblick der Bewegung des Punktes B an Größe gleich, jedoch der Richtung nach entgegengesetzt ist. Bei dieser hinzugedachten Bewegung wird die Arbeit der inneren Kräfte auf Grund des eben bewiesenen Satzes gleich Null. Der Punkt B bleibt hierbei in Ruhe, während Punkt A nach A', wo $BA' \parallel$ und $= B_1A_1$ ist, gelangt. Die Arbeit der auf A wirkenden Kraft hängt nicht von dem Wege ab, auf welchem der Punkt von A nach A' gelangt ist, denn die auf ihn wirkende Kraft, welche ununterbrochen nach dem festen Punkte B gerichtet ist, ist eine Zentralkraft. Das gleiche gilt für alle Punktpaare des Systems; damit ist unser Satz bewiesen. Aus ihm folgt: Wenn ein Punktsystem von irgendeiner Anordnung der Teilchen ausgehend nach einiger Zeit zu derselben Anordnung zurückkehrt, so ist die ganze während dieser Zeit von den inneren Kräften geleistete Arbeit gleich Null.

§ 3. Arbeit und lebendige Kraft (Wucht). Wenn ein Körper, während er z. B. den Weg AB (Fig. 35) durchläuft, unter der Einwirkung eines Systems von Kräften steht, deren Resultante f ist, und die Quellen dieser Kräfte sich außerhalb des vom Körper eingenommenen Raumes befinden, so nennt man auch die Kräfte selbst äußere. Auf Grund eines früher bewiesenen Satzes finden wir die bei der Bewegung eines Körpers geleistete Arbeit R eines Systems von Kräften, wenn wir die Arbeit der Resultante f bestimmen. Diese Arbeit ist nach (7, a) auf S. 106 gleich

Fig. 35.



$$R = lim\, \Sigma f_1 \varDelta s,$$

wo $\varDelta s$ eine der Teilstrecken ist, in welche wir den Weg zerlegen und $f_1 = f\, cos\, (f, \varDelta s)$ die tangentiale Komponente der Resultante f, d. h. die Komponente der Bewegungsrichtung. Wir haben gesehen, daß die tangentiale Komponente die Ursache der tangentialen Beschleunigung w_1 und daß $f_1 = m w_1$ ist, somit ist

$$R = lim\, \Sigma m w_1 \,.\, \varDelta s.$$

Es möge unser Körper im Anfangspunkte A seines Weges die Geschwindigkeit v_1, im Endpunkte B die Geschwindigkeit v_2 besessen haben; die entsprechenden Werte für die Wucht sind nach (1) auf S. 102 $J_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ und $J_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte M mit v und die Wucht mit $J = \frac{1}{2} m v^2$. Nachdem der Körper das Wegelement $\varDelta s$ durchlaufen, besitzt er die neue Geschwindigkeit $v + \varDelta v$ und die neue Wucht $\frac{1}{2} m (v + \varDelta v)^2$. Die Änderung der lebendigen Kraft $\varDelta J$ ist offenbar $= \frac{1}{2} m [(v + \varDelta v)^2 - v^2]$ $= \frac{1}{2} m [2\, v \varDelta v + (\varDelta v)^2]$. Denkt man sich $\varDelta s$, mithin auch $\varDelta v$ als unendlich kleine Größen, so kann man das zweite Glied in der Klammer vernachlässigen und $\varDelta J = m v \varDelta v$ setzen. Die totale Änderung der Wucht während der Zurücklegung des Weges AB ist $J_2 - J_1 = lim\, \Sigma \varDelta J$ $= lim\, \Sigma m v \varDelta v$. Aber es ist $\varDelta v = w_1 \varDelta t$, wo $\varDelta t$ die Zeit zum Durchlaufen des Weges $\varDelta s$ ist; folglich ist $J_2 - J_1 = lim\, \Sigma m w_1 v \varDelta t$; ferner ist das Produkt $v \varDelta t = \varDelta s$ und daher

$$J_2 - J_1 = lim\, \Sigma m w_1 \varDelta s.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem letzten für R, so wird

$$R = lim\, \Sigma f \varDelta s\, cos\, (f, \varDelta s) = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Formel ist eine der wichtigsten der Physik; sie drückt folgenden Satz aus: Wenn sich ein Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte bewegt, so ist die Arbeit derselben numerisch gleich dem Zuwachs der Wucht des Körpers.

Bewegt sich ein System von materiellen Punkten oder ein physikalischer Körper, dann gilt die Formel (9) für jeden einzelnen Punkt; bildet man die Summe dieser Gleichungen und bezeichnet die Summe der Arbeiten aller Kräfte, welche während der Fortbewegung des Systems auf alle seine Punkte gewirkt hatten, mit R, so erhält man

$$R = J_2 - J_1 = lim\, \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - lim\, \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \ldots \quad (9, a)$$

Für die Drehung eines Körpers um eine Achse ergibt die Formel (3)

$$R = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} K \Theta_2^2 - \frac{1}{2} K \Theta_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (9, b)$$

wobei K das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehungsachse, Θ_1 und Θ_2 die Winkelgeschwindigkeiten für den Anfang und das Ende des Zeitabstandes sind, während dessen die äußeren Kräfte die Arbeit R geleistet haben.

Wirkt auf den rotierenden Körper ein Kräftepaar, dessen Kräfte in einer zur Drehachse senkrechten Ebene liegen und dessen Moment M ist, so ist, wenn sich der Körper während des kurzen Zeitintervalls dt um den Winkel $d\varphi$ dreht, die kleine vom Kräftepaar geleistete Arbeit des Kräftepaares $dR = M d\varphi$ [vgl. (8) auf S. 108]. Diese Arbeit muß dem Zuwachs der Wucht gleich sein $J = \frac{1}{2} K \Theta^2$ [vgl. (9)]. Somit ist $M d\varphi = d\left(\frac{1}{2} K \Theta^2\right) = K \Theta d\Theta$. Dividiert man beide Seiten durch dt, so erhält man $M \frac{d\varphi}{dt} = K \Theta \frac{d\Theta}{dt}$. Es ist aber $\Theta = \frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\Theta}{dt} = \vartheta$, d. h. gleich der Winkelbeschleunigung. Somit ist

$$M = K \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Moment eines Kräftepaares, welches in einer zur Drehungsachse des Körpers senkrechten Ebene liegt, ist gleich dem Produkte aus dem Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf diese Achse und seiner Winkelbeschleunigung.

Wenn die Punkte, aus denen ein System besteht, mit irgendwelchen Kräften aufeinander wirken, so heißen solche Kräfte für das gegebene System innere Kräfte. Für jeden einzelnen Punkt aber sind die Kräfte, mit denen auf ihn die übrigen Punkte des Systems wirken, äußere Kräfte; bei Änderung in der gegenseitigen Lage der Systempunkte kann man daher auf jeden von ihnen Formel (9) anwenden;

auch (9, b) bleibt in Geltung. Hieraus geht hervor, daß, wenn ein Punktsystem, welches keiner Außenkraft unterworfen ist, aus einer Anordnung der Punkte in eine andere übergeht, die Arbeit der inneren Kräfte gleich dem Zuwachs der Wucht des Systems ist.

Wir hatten bewiesen, daß diese Arbeit unabhängig von den Wegen ist, auf welchen die Punkte des Systems aus der Anfangslage in die neue gelangt sind; hieraus ergibt sich nun folgender Satz: Wenn ein Punktsystem keinen äußeren Kräften unterworfen ist, so hängt die Änderung seiner Wucht beim Übergange von einer Anordnung der Punkte zu einer anderen nicht davon ab, auf welchen Wegen die Punkte aus der Anfangs- in die Endlage gelangt sind. Kehrt das System zur ursprünglichen Anordnung zurück, so nimmt auch die Wucht ihren Anfangswert an.

Wir wollen jetzt den allgemeinsten Fall der Bewegung eines Punktes unter dem Einflusse einer beliebigen bewegenden Kraft f (vgl. Fig. 27) in Gegenwart des beliebigen Widerstandes f' betrachten. Sind f_1 und f_1' die tangentialen Komponenten der Kräfte f und f', so ist die tangentiale Komponente der Resultante aller auf unseren Punkt wirkenden Kräfte gleich $f_1 - f_1'$, und ist nach (9)

$$lim\, \Sigma\, (f_1 - f_1')\, \Delta s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

wo v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Punktes in den Lagen A und B bedeuten.

Wir wollen auch in diesem Falle $f_1 \Delta s$ das Arbeitselement und $lim\, \Sigma f_1 \Delta s$ die totale Arbeit der bewegenden Kraft nennen. Die vorhergehende Formel ergibt

$$lim\, \Sigma\, f_1\, \Delta s = lim\, \Sigma\, f_1'\, \Delta s + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \; . \; . \; (11)$$

Die Arbeit der bewegenden Kraft besteht somit im allgemeinsten Falle aus zwei Teilen: der eine wird zur Überwindung eines Widerstandes „verbraucht", der andere zur Änderung der Wucht des Punktes. Wenn $f_1 > f_1'$ ist, so ist $v_2 > v_1$ und der Punkt bewegt sich mit einer Beschleunigung; er erwirbt dabei eine Wucht. Wenn $f_1 < f_1'$ ist, so ist auch $v_2 < v_1$, die Bewegung des Punktes ist eine verzögerte, er verliert Wucht. Wenn endlich $f_1 = 0$, d. h. die bewegende Kraft gleich Null oder normal zur Bahnlinie des Punktes ist, so haben wir

$$lim\, \Sigma\, f_1'\, \Delta s = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11, a)$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt die verlorene Wucht dar. Im speziellen Falle, wo f und f' entgegengesetzt gerichtet sind und während der ganzen Dauer der Bewegung des Punktes nach Größe und Richtung unverändert bleiben, gibt Formel (11)

$$fh = f'h + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo (vgl. Formel $R = fh$ und Fig. 31) h die Projektion des durchlaufenen Weges auf die Richtung der Kräfte f und f' ist. Für $f = 0$ haben wir

$$f'h = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, a)$$

Wir wollen nun die hergeleiteten Formeln auf die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche anwenden, wobei wir die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe und den Luftwiderstand außer acht lassen.

1. Beim freien Fall wirkt auf den Körper die Schwerkraft, d. h. sein Gewicht p spielt die Rolle einer bewegenden Kraft. Unter den eben angegebenen Bedingungen ist $f' = 0$ und (12) ergibt

$$ph = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, b)$$

Diese Gleichung läßt sich auch leicht aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableiten. Fällt der Körper in Richtung der Schwerkraft (also längs einer vertikalen Geraden), so ruft die konstante Kraft eine konstante Beschleunigung hervor, die wir bereits [vgl. (12) auf S. 80] mit g bezeichnet haben; wir hatten $p = mg$. Für die geradlinige Bewegung ist $v_2^2 - v_1^2 = 2ws$ [vgl. (22) auf S. 64], also in unserem Falle $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, daß $p = mg$ ist, so erhält man (12, b).

2. Bewegt sich der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 aufwärts, dann vertritt das Gewicht p den Widerstand f' in (12), während $f = 0$ ist; (12, a) ergibt

$$ph = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, c)$$

Auch diese Formel läßt sich leicht auf anderem Wege ableiten. Der Körper bewegt sich unter dem Einflusse der konstanten Kraft p, deren Richtung der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt ist: also erfolgt die Bewegung mit einer Beschleunigung, die gleich $-g$ ist. Auf Seite 64 hatten wir die Formel (24): $v_1^2 - v_2^2 = 2gs$. Multipliziert man mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, daß $p = mg$ ist, so erhält man (12, c).

3. Der Körper bewege sich vertikal aufwärts unter der Wirkung einer Kraft f, welche die Richtung der Bewegung selbst hat; das Ge-

wicht des Körpers sei p. Die allgemeine Formel (11) ergibt für die Arbeit R der bewegenden Kraft den Ausdruck

$$R = lim \Sigma f \Delta h = p h + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12, d)$$

wo h die ganze Steighöhe, Δh das Wegelement ist.

Die beim Heben eines Körpers geleistete Arbeit besteht ans zwei Teilen; der erste ist die eigentliche „Hebearbeit", der zweite wird durch den Zuwachs an Wucht des gehobenen Körpers gemessen. Nur wenn $v_2 = v_1$ ist, haben wir $R = p h$, d. h. die beim Heben des Körpers geleistete Arbeit ist nur dann gleich der „Hebearbeit", wenn der gehobene Körper am Anfang und am Ende der Bewegung dieselbe Geschwindigkeit, z. B. die Geschwindigkeit Null, besitzt. Die Kraft f kann an einigen Stellen des Weges h hierbei auch größer als p sein, doch muß sie dafür an anderen Stellen kleiner als p, gleich Null oder negativ sein.

Beim Heben eines Kilogramms auf einen Meter Höhe wird nur dann eine Arbeit von einem Meterkilogramm geleistet, wenn die gehobene Masse vor und nach dem Heben die gleiche Geschwindigkeit besitzt, z. B. in Ruhe ist.

§ 4. Arbeit und Zeit. Arbeitsvermögen. Es sind mannigfache Mechanismen und Maschinen ersonnen worden, welche unter bestimmten Bedingungen imstande sind, eine bestimmte Arbeit R während einer bestimmten Zeit t zu leisten und diese Arbeitsleistung innerhalb einer im allgemeinen begrenzt langen Zeit für jedes darauffolgende Zeitintervall so lange zu wiederholen, als die hierzu erforderlichen Bedingungen erfüllt bleiben. So können z. B. ziemlich lange im Verlaufe jeder Minute eine ganz bestimmte Arbeit leisten — eine Dampfmaschine, welche beständig unter Dampf gehalten und geheizt wird, oder ein Wassermotor, zu dem ununterbrochen eine genügende Wassermenge hinzuströmt. Nebenumstände, wie das notwendige Instandsetzen und Reinigen der Maschinenteile, können die Dauer der Wirkung abkürzen. Mensch und Tier besitzen, gehörig ernährt, eine ähnliche Fähigkeit, doch ist hier die Wirkungsdauer enger begrenzt, weil Erholung unbedingt notwendig ist. In allen Fällen ähnlicher Art sagen wir, die Maschine, das Tier usw. besitzt eine gewisse Arbeitsfähigkeit (Arbeitsvermögen). Es wird diese Größe durch die Arbeit gemessen, welche das Tier bzw. die Maschine unter gewissen Voraussetzungen in jeder einzelnen von einer größeren Zahl aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zu leisten imstande ist. Hieraus folgt, daß die absolute Einheit der Arbeitsfähigkeit die Fähigkeit einer solchen Maschine ist, die je eine Arbeitseinheit in der Zeiteinheit zu leisten vermag. So stellt z. B. ein Meterkilogramm in der Sekunde die Einheit der Arbeitsfähigkeit dar. In der Technik ist eine andere Einheit der Arbeitsfähigkeit gebräuchlich, die Pferdekraft genannt wird; es ist dies die Arbeitsfähigkeit einer Maschine, die eine Arbeit von 75 Meterkilogramm in der Sekunde zu leisten vermag.

Man pflegt einer Maschine eine gewisse Arbeitsfähigkeit auch dann zuzuschreiben, wenn die Bedingungen, unter denen sie Arbeit leistet, noch nicht erfüllt sind. So spricht man von einem „fünfpferdigen" Motor; das ist ein Motor, der unter gewissen Bedingungen in einer Sekunde 75×5 Meterkilogramm Arbeit leisten kann. Die CGS-Einheit der Arbeitsfähigkeit ist die Fähigkeit einer Maschine, ein Erg pro Sekunde, ein Sekundenerg, zu leisten.

Gegenwärtig ist, insbesondere in der Elektrotechnik, eine Einheit der Arbeitsfähigkeit, die Watt genannt wird, im Gebrauch. Sie vermag eine Arbeit von ein Joule in der Sekunde zu leisten. Auf S. 104 war der Wert von einem Joule gegeben; drückt man es in Meterkilogrammen aus und beachtet die Definition der Pferdekraft, so bekommt man folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ Watt} &= 1 \text{ Joule pro Sek.} = 10 \text{ Megaerg pro Sek.} \\ &= 10^7 \text{ Erg pro Sek.} = 0{,}102 \text{ Meterkilogramm pro Sek.} \\ 1 \text{ Watt} &= \frac{1}{736} \text{ Pferdekraft} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

§ 5. Energie. I. Energieprinzip. Die Lehre von der Energie bildet einen der wichtigsten, wenn nicht gar den wichtigsten Teil der modernen Physik; auf diese unerschütterlich feste Grundlage stützen wir uns in unserem Bemühen, den Zusammenhang zwischen den Erscheinungen der uns umgebenden Natur aufzuhellen. Wenn ein Körper oder eine Gruppe von Körpern fähig ist, Arbeit zu leisten, so sagen wir, daß sie Energie besitzen. Je größer die Arbeit ist, welche ein Körper oder ein System von Körpern leisten kann, um so größer ist ihr „Energievorrat".

Beispielsweise sei hier auf die Energie eines sich bewegenden Körpers oder Systems hingewiesen, welche, wie dies die tägliche Erfahrung lehrt, verschiedene Widerstände, darunter auch den „Trägheitswiderstand" anderer Körper zu überwinden imstande sind. Wir nennen diese Energie die Energie der Bewegung. Sie ist offenbar um so größer, je größer die Geschwindigkeit ist, mit der sich der gegebene Körper oder das gegebene System bewegen. Wir wollen die Energie durch die Arbeit messen, welche der Körper bzw. das System zu leisten vermögen. Bezeichnet man die Energie mit J, die Arbeit mit R, und setzt den Proportionalitätskoeffizienten gleich Eins, so ist

$$J = R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Für $R = 1$ ist $J = 1$, d. h. die absolute Einheit der Energie ist die Energie eines Körpers, der die Einheit der Arbeit zu leisten vermag. Man gibt dieser Energieeinheit gewöhnlich dieselbe Benennung wie der entsprechenden Arbeitseinheit. Somit sind das Meterkilogramm, das Erg, Megaerg und Joule nicht nur Arbeitseinheiten, sondern auch Energieeinheiten. Folglich ist auch das Erg die CGS-Einheit der Energie. Nicht nur die Materie, auch der Äther kann Energie enthalten.

In der Energielehre gelten drei Prinzipien, von denen wir vorläufig nur zwei näher betrachten wollen.

I. Energieprinzip. Die Energie eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist eine endliche, eindeutige und stetige Funktion seines Zustandes, d. h. die Energie wird durch den Zustand des Körpers oder Systems vollkommen bestimmt, und einer unendlich kleinen Änderung des Zustandes entspricht eine ebenfalls unendlich kleine Änderung der Energie. Das Wort „Zustand" hat hier den allgemeinen Sinn, der ihm im früheren beigelegt wurde, so daß also der Zustand eines Systems durch die Gesamtheit seiner physikalischen Eigenschaften, die gegenseitige Lage und Geschwindigkeit aller seiner Teile bestimmt wird. Aus dem I. Energieprinzip ergeben sich überaus wichtige Folgen.

Folgesatz 1. Wenn ein Körper oder System bei positiver Arbeitsleistung aus irgendeinem Zustande A in einen anderen Zustand B übergeht, so hängt die gesamte von ihm geleistete Arbeit nicht ab von der Art, wie, oder dem Wege, auf dem sich dieser Übergang vollzogen hat. Wir hatten auf S. 50 gesehen, daß der Übergang aus einem Zustande in den anderen auf unendlich viele verschiedene Arten erfolgen kann. Ist J_1 die Energie, welche dem Zustande A entspricht, J_2 die Energie für den Zustand B, so heißt dieses, das System (bzw. der Körper) hat, als es sich im Zustande A befand, die Fähigkeit besessen, eine Arbeit $R_1 = J_1$ zu leisten; nach Übergang in den Zustand B vermag es nur noch die kleinere Arbeit $R_2 = J_2$ zu verrichten. Wenn es für den Übergang von A nach B einen derartigen Weg gäbe, auf dem die geleistete Arbeit R größer oder kleiner als die Differenz $R_1 - R_2 = J_1 - J_2$ wäre, so daß $R = R_1 - R_2 \pm \varrho$, so würde sich, falls man diesen Weg von A nach B einschlägt und berücksichtigt, daß das System im Zustande B die Arbeit R_2 zu leisten vermag, ergeben, daß das System im Zustande A die Arbeitsfähigkeit $R_2 + R = R_2 + (R_1 - R_2 \pm \varrho) = R_1 \pm \varrho$ besitzt, folglich auch die Energie $J = R_1 \pm \varrho$. Dieses aber widerspricht dem I. Energieprinzip, nach welchem in dem System im Zustande A nur ein einziger ganz bestimmter Energievorrat $J_1 = R_1$ enthalten sein kann.

Folgesatz 2. Ein „Perpetuum mobile" ist unmöglich. Ein Perpetuum mobile ist ein solches Körpersystem (z. B. eine Maschine), welches, einmal in Bewegung gesetzt, sich unbegrenzt lange zu bewegen fortfährt und hierbei unausgesetzt Arbeit leistet. Aus der Definition der Energie selbst, sowie aus dem I. Energieprinzip folgt, daß, während das System Arbeit leistet, sich seine Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung verringert. Eine fortgesetzte Arbeitsleistung muß von einer fortgesetzten Abnahme des Energievorrates (Geschwindigkeitsabnahme) begleitet sein, der sich, da er ein endlicher ist, mit der Zeit verbrauchen muß.

Ob die Himmelskörper bei ihren Bewegungen seitens des sie umgebenden Mediums einen Widerstand erfahren, wissen wir nicht mit Sicherheit. Ist dies nicht der Fall, so würde die Tatsache einer „ewigen“ Bewegung“ mit dem Satze von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile nicht im Widerspruche stehen, denn bei der Bewegung der Himmelskörper würde kein Energieverlust stattfinden. An der Erdoberfläche läßt sich die ewige Bewegung eines Systems nicht verwirklichen, denn es ist, wie wir sahen (S. 105), nicht möglich, die schädlichen Widerstände, zu deren Überwindung unausgesetzt Bewegungsenergie verbraucht werden muß, zu vermeiden.

Das Perpetuum mobile, von dem hier die Rede ist, wird als Perpetuum mobile erster Art bezeichnet, zum Unterschiede von dem Perpetuum mobile zweiter Art, welches wir im Bd. III kennen lernen werden.

§ 6. **Formen der Energie.** Das Studium der physikalischen Erscheinungen hat gezeigt, daß es eine ganze Reihe verschiedener Formen der Energie gibt. Sie alle gehören zwei Gruppen an: der kinetischen und der potentiellen Energie. Die kinetische Energie heißt auch offenbare oder Bewegungsenergie, die potentielle auch latente oder Energie der Lage.

A. Die kinetische Energie, offenbare Energie, Energie der Bewegung. Bei allen Formen der kinetischen Energie handelt es sich um die Bewegung irgendeines Körpers. Wir wollen hier den allgemeinen Ausdruck für die Bewegungsenergie ableiten. Es sei m die sich bewegende Masse und v ihre Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick. Um ihre Energie J zu bestimmen, müssen wir die Arbeit R berechnen, die beim Übergange der Masse aus dem gegebenen Zustande (mit der Geschwindigkeit v) in einen anderen geleistet werden kann, in welchem der Bewegungsenergievorrat verbraucht, die Geschwindigkeit also gleich Null ist. Nach Folgesatz 1 hängt die Arbeit nicht davon ab, wie der Übergang von der Bewegung zur Ruhe sich vollzogen hat. Hat daher auf den Körper eine gewisse konstante Kraft f' zu wirken begonnen, deren Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v direkt entgegengesetzt ist, so fängt der Körper unter dem Einflusse der Kraft f' sich mit einer konstanten negativen Beschleunigung $-w = -(f' : m)$ zu bewegen an, d. h. seine Geschwindigkeit vermindert sich in der Zeiteinheit um w und wird schließlich, wenn der Körper einen gewissen Weg h zurückgelegt hat, gleich Null. Die gesuchte Arbeit ist gleich $R = f'h$. Formel (12, a) auf S. 114, in welcher man jetzt die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = v$ und die Endgeschwindigkeit $v_2 = 0$ setzen muß, ergibt $R = f'h = \frac{1}{2} m v^2$; das gleiche erhält man unmittelbar, wenn man in $R = f'h$ die Ausdrücke $f' = mw$ und $h = \frac{v^2}{2w}$ [vgl. (22, b) auf S. 64] einsetzt. Somit ist die gesuchte Energie

$$J = R = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (15)$$

Die Bewegungsenergie eines Körpers wird durch seine Wucht bestimmt. Hieraus folgt, daß die in gegebener Zeit von einem sich bewegenden Körper geleistete Arbeit durch seinen Verlust an Wucht gemessen wird. Hat in dieser Zeit die Geschwindigkeit von v_1 bis v_2 abgenommen, so ist die geleistete Arbeit

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \qquad (16)$$

Vergleicht man diese Formel mit (9) auf S. 111, so erhält man folgenden Satz: Wird die Arbeit von äußeren Kräften geleistet, so wird sie durch den Zuwachs an Wucht des Körpers gemessen; wird sie jedoch vom Körper selbst geleistet, d. h. auf Kosten seines Vorrates an Bewegungsenergie, so wird sie durch den Verlust an Wucht gemessen. Die Bewegungsenergie eines Punktsystems wird durch seine Wucht gemessen, d. h. durch die Größe

$$J = \Sigma \frac{1}{2} m v^2.$$

Wir gehen nunmehr zur Betrachtung der verschiedenen Formen von kinetischer Energie über.

1. Kinetische Energie eines Körpers, der sich als Ganzes bewegt. Hierher gehören alle die Fälle, wo die einander benachbarten materiellen Teilchen des Körpers gleiche oder nur sehr wenig verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Die Wucht der Bewegung eines Körpers dient als Maß für die Arbeit, welche er verrichten kann. Als Beispiele führen wir an: die Energie der fortschreitenden Bewegung einer Kanonenkugel, die Energie eines rotierenden Körpers, die des Windes, des fließenden Wassers; ferner müssen die Energie der Schwingungsbewegung eines Körpers oder seiner Teile und die Schallenergie, wenigstens in bestimmten Stadien, ebenfalls hierher gerechnet werden.

II. Wärmeenergie. Die Wärme ist eine Form der Energie; auf Kosten eines Wärmevorrates kann Arbeit geleistet werden. Die Wärmeenergie wird durch die Wucht der regellosen Molekülbewegungen im Körper gemessen; bei diesen Bewegungen können die Nachbarteilchen nach Größe und Richtung verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Wenn auf Kosten der Wärmeenergie eines Körpers Arbeit geleistet wird, so verschwindet ein Teil dieser Energie, die Bewegung der Moleküle verlangsamt sich, und der Körper selbst kühlt sich ab. Es unterliegt keinem Zweifel, daß auch die Wärmeenergie eine endliche Größe ist, wennschon es bisher nicht gelungen ist, diesen Energievorrat zu erschöpfen, d. h. einem Körper seine ganze Wärmeenergie zu nehmen.

Die absolute Einheit der Wärmemenge ist die Wärmemenge, die verbraucht werden muß, um die absolute Arbeitseinheit zu erhalten.

Die CGS-Einheit der Wärmemenge ist das Erg. Zum Messen der Wärmeenergie oder, einfacher ausgedrückt, der Wärmemenge werden auch noch andere Einheiten benutzt, z. B. die große oder die kleine Kalorie: es sind dies die Wärmemengen, welche dazu erforderlich sind, ein Kilogramm bzw. ein Gramm Wasser um 1° C zu erwärmen. Im Band III werden wir bei Besprechung der Wärmekapazität des Wassers sehen, daß sie eine Funktion der Temperatur ist. Hieraus folgt, daß die Wärmemenge, welche wir Kalorie nennen, abhängt von der Anfangstemperatur des Kilogramm oder Gramm Wassers, welches wir um 1° erwärmen. Griffiths (1901) hatte vorgeschlagen, als Wärmeeinheit die 17°-Kalorie festzulegen, d. h. die, welche einer Erwärmung des Wassers von 17 bis 18° entspricht. Es scheint aber, daß in letzter Zeit die von Warburg (1899) vorgeschlagene 15°-Kalorie allgemein als Wärmeeinheit angenommen wird. Bezeichnen wir mit Q den Zahlenwert einer gewissen Wärmemenge und mit R die Arbeit, welche durch ihren Verbrauch erhalten wird. Man pflegt zu sagen, daß die Wärme Q und die Arbeit R einander äquivalent sind. In welchen Einheiten auch immer die Wärme Q und die Arbeit R gemessen sein mögen, diese beiden Zahlen sind einander proportional, so daß man

$$R = EQ \qquad (17)$$

setzen kann, wo E den Proportionalitätsfaktor darstellt. Setzt man

$$A = \frac{1}{E} \qquad (18)$$

so erhält man

$$Q = AR \qquad (19)$$

Der Koeffizient E heißt das mechanische Wärmeäquivalent; es ist dies die Zahl Arbeitseinheiten, die einer Wärmeeinheit äquivalent sind, denn (17) gibt uns $R = E$ für $Q = 1$. Der reziproke Koeffizient A heißt das thermische Arbeitsäquivalent; es ist dies die Zahl Wärmeeinheiten, welche einer Arbeitseinheit äquivalent ist, denn nach (19) hat man $Q = A$ für $R = 1$. Versuche, auf welche wir in der Wärmelehre ausführlicher eingehen werden, haben gelehrt, daß, wenn man als Einheit der Wärmemenge die 15^0-Kalorie und als Einheit der Arbeit das Erg wählt, $E = 4{,}189 \,.\, 10^7$ Erg $= 41{,}89$ Megaerg $= 4{,}189$ Joule (S. 104) ist, d. h.

$$\text{die kleine } 15^0\text{-Kalorie ist äquivalent } 4{,}189 \text{ Joule} \quad . \quad (20)$$

Hieraus folgt

$$1 \text{ Joule ist äquivalent } 0{,}238\,65 \text{ kleine } 15^0\text{-Kalorie} \quad . \quad (20a)$$

Setzen wir (S. 104) 1 Joule $= 0{,}102$ Kilogramm-Meter, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die große } 15^0\text{-Kalorie ist äquivalent} \\ \quad 427{,}2 \text{ Kilogramm-Meter}\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

Wir werden diese Frage ausführlich im dritten Bande betrachten.

III. Strahlende Energie. Im § 4 des ersten Abschnittes hatten wir beschlossen, unter dem Ausdruck „Äther" nichts weiter zu verstehen, als den „leeren Raum", in welchem sich keine gewöhnliche Materie befindet, aber nicht, wie früher, einen bestimmten Stoff, welcher diesen Raum erfüllt. Auf diese Weise kommen wir den gegenwärtigen (1917) Anschauungen am nächsten. Im „leeren Raume" kann eine gewisse Form von Energie vorhanden sein, welche sich mit der Geschwindigkeit

$$v = 300\,000 \text{ km in der Sek.} = 3 \,.\, 10^{10} \text{ cm in der Sek.} \quad . \; . \quad (22)$$

ausbreitet. Sie wird strahlende Energie genannt; hierher gehören das sichtbare Licht und die unsichtbaren Strahlen, d. h. die infraroten Strahlen, welche man früher Wärmestrahlen nannte, die ultravioletten Strahlen, die Hertzschen elektrischen Strahlen und, wie wir jetzt sicher wissen, die Röntgenstrahlen. Man hatte gehofft, daß es gelingen würde, die strahlende Energie durch Bewegungen (Perturbationen) im stofflich gedachten Äther zu erklären. Da dies bisher nicht gelungen ist, so ist es einfacher, die strahlende Energie als eine selbständige, unzweifelhaft vorhandene Erscheinung anzusehen und dabei den Äther als Stoff vollständig aus dem Spiele zu lassen.

IV. Die Energie des elektrischen Stromes. Während wir die Bedingungen, unter denen der elektrische Strom zustande kommt, und die Gesetze, denen er unterworfen ist, sehr genau kennen, besitzen wir vom inneren Wesen dieser Erscheinung noch keine klare, von der Wissenschaft endgültig angenommene Vorstellung. Mit Sicherheit können wir nur so viel sagen, daß der elektrische Strom einen besonderen Fall von Bewegungsenergie darstellt, die man zur Erzeugung von Arbeit verwenden kann (Elektromotoren).

Man glaubte früher (etwa bis 1880), daß die Energie des konstanten elektrischen Stromes sich vollständig in dem Leiter (z. B. den Drähten) befindet, durch welchen der elektrische Strom fließt. Dann kam eine Zeit, wo man sich von der Hypothese, daß die Elektrizität ein besonderer Stoff sei, vollkommen lossagte und annahm, daß man es bei der Erscheinung des elektrischen Stromes mit einer besonderen Form kinetischer Energie des Äthers zu tun habe, welcher den Raum rings um den Leiter erfülle. Über die Art der Bewegung, welche dieser Energieform entspricht, ließ sich nichts aussagen.

Die neue Elektronentheorie (S. 11) führt uns zu den alten Anschauungen über den Sitz dieser Energie zurück. Der elektrische Strom besteht in einer Bewegung der Elektronen in dem Leiter, und in dieser Bewegung muß man auch das Wesen der Energie des elektrischen Stromes suchen. Unzweifelhaft kann diese Energie sehr leicht in Wärmeenergie übergehen, außerdem auch in strahlende Energie. Das erstere geschieht beständig, sozusagen von selbst; das letztere bei jeder Bewegungsänderung der Elektronen. Wir lassen einstweilen die Frage offen, ob bei dem konstanten Strome der ganze Energievorrat sich in dem Leiter befindet oder ein Teil in dem umgebenden Raume aufgespeichert ist. Und noch eine andere Frage soll unentschieden bleiben: ob nicht vielleicht in wenigen Jahren die alte Äthertheorie, wenn auch in veränderter Gestalt, wieder auftauchen und der Äther als ein Stoff, zugleich auch als Träger der elektromagnetischen Energie anerkannt wird.

B. Potentielle, latente Energie oder Energie der Lage. Wir finden in der Natur verschiedenartige Formen der Energie, d. h. der Fähigkeit, Arbeit zu leisten, die von der gegenseitigen Lage zweier oder mehrerer Körper abhängen. Ein einzelner materieller Punkt kann, theoretisch genommen, nur kinetische (Bewegungs-)Energie besitzen; von potentieller Energie können wir nur bei einem System von mindestens zwei materiellen Punkten sprechen. Hierbei müssen die beiden materiellen Punkte das Bestreben haben, sich einander zu nähern oder sich voneinander zu entfernen, oder es muß überhaupt die Anwesenheit eines Körpers eine auf den anderen Körper wirkende Kraft hervorrufen. Die Frage nach den Entstehungsursachen der letzteren möge dabei unberücksichtigt bleiben.

a) Wenn zwei Körper sich einander zu nähern streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „anziehen“, so kann dieses Streben zur Arbeitsquelle werden, die sich entweder im Überwinden äußerer, eine Annäherung hindernder Widerstände, oder im Überwinden der Trägheit dieser Körper zeigt, wodurch letztere eine beschleunigte

Bewegung erhalten. Der Energievorrat ist offenbar um so größer, je weiter die Körper voneinander entfernt sind und nimmt ab, wenn sich die Körper unter Arbeitsleistung einander nähern. Somit sehen wir, daß der Energievorrat in diesem Falle von der gegenseitigen Lage der Körper abhängt.

b) Wenn zwei Körper sich voneinander zu entfernen streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „abstoßen", so kann auch dieses Bestreben zur Arbeitsquelle werden. Der Energievorrat ist hier um so größer, je näher die Körper einander sind; er nimmt in dem Maße ab, als sich die Körper voneinander entfernen. Auch in diesem Falle hängt offenbar der Energievorrat von der wechselseitigen Lage der Körper ab.

Es ist leicht zu verstehen, weshalb die Energie in diesen beiden Fällen (verborgene) latente Energie oder Energie der Lage genannt wird. Die Frage nach der Ursache der Anziehung bzw. Abstoßung soll an dieser Stelle nicht erörtert werden. Wir beschränken uns hier darauf, die verschiedenen Formen der potentiellen Energie zu betrachten.

I. Die Energie von Massen, welche nach dem allgemeinen Gravitationsgesetze angezogen werden. In jedem sich nicht berührenden Massenpaar ist, da zwischen ihnen die Schwere wirkt, Energie der Lage enthalten. So besitzen die Sonne und ein beliebiger Planet oder Erde und Mond zusammengenommen einen sehr großen Vorrat an potentieller Energie. Man pflegt von der Energie eines gehobenen Körpers zu reden, denn jeder auf einer gewissen Höhe über der Erdoberfläche befindliche Körper ist imstande, bei seinem Herabfallen Arbeit zu leisten. Strenggenommen besitzt aber nicht der gehobene Körper diese Energie, sondern das System der beiden sich anziehenden Körper, nämlich die Erde und der gehobene Körper.

Die potentielle Energie der Anziehung eines Systems von Körpern oder materiellen Punkten hängt nur von ihrer gegenseitigen Lage ab (I. Energieprinzip). Bei jeder Verdichtung eines Systems wird eine Arbeit geleistet, deren Größe nur von der anfänglichen und endgültigen Anordnung der Teilchen abhängt. Beim Übergange der einen Weltkörper bildenden Substanz aus dem ursprünglichen Urnebelzustand in einen dichteren, erfolgt ein ungeheurer Verlust an potentieller Energie, auf deren Kosten eine äquivalente Arbeit geleistet wird. Die potentielle Energie der gehobenen Gewichte einer Wanduhr dient als Quelle der von der Wanduhr zu leistenden Arbeit. Die potentielle Energie der Wolken dient als Quelle für die Arbeit der Wassermühlen usw.

II. Die Energie der Lage homogener Teilchen. Zwischen den Teilchen homogener Körper wirken besondere Kräfte, über die noch wenig bekannt ist. Je nach den Bedingungen äußern die Teilchen das Bestreben, sich zu nähern oder voneinander zu entfernen, und hierin liegt die Quelle für den potentiellen Energievorrat der Teilchen.

Hierher gehört die Energie eines elastisch veränderten Körpers. Eine Feder hat, je nach ihrer Formänderung, sei sie nun gebogen, zusammengedrückt, gereckt oder gedreht, die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wobei sie sich geradebiegt, ausdehnt, zusammenzieht oder losdreht, verliert aber hierbei einen Teil des früheren Energievorrates, d. h. der Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung. Die Änderung in der gegenseitigen Lage der Teilchen, welche die Deformation des elastischen Körpers begleitet, ist hier die Ursache für das Zustandekommen von potentieller Energie.

Hierher gehört auch jene Lagenenergie der Teilchen, welche sich besonders auffallend beim Übergang der Körper aus dem festen in den flüssigen und aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand, sowie bei den entgegengesetzten Vorgängen äußert, weniger auffallend bei jeder Volumen- oder Temperaturänderung eines Körpers zutage tritt. Wir werden weiter unten sehen, daß die aus der Elementarphysik unter dem Ausdrucke „latente Wärme“ bekannte Größe in engem Zusammenhange mit der hier betrachteten Form der potentiellen Energie steht.

III. Chemische Energie. Ein System von zwei Körpern, die sich chemisch vereinigen können, vermag Arbeit zu leisten. Kohle und Sauerstoff, Wasserstoff und Chlor, Schwefelsäure und Wasser besitzen, paarweise genommen, einen Vorrat an chemischer Energie, den man zur Erzeugung von Arbeit benutzen kann (so ist z. B. das Verbrennen der Kohle die Arbeitsquelle in den Dampfmotoren). Bildet sich aus Atomen ein Molekül, so nimmt der Vorrat an chemischer Energie ab, indem letzterer im Augenblick, als sich das Molekül bildete, zur Erzeugung von Arbeit verbraucht wurde. Bemerkt sei hier noch, daß zwei Atome ein und desselben Stoffes ebenfalls potentielle Energie besitzen, falls das Molekül dieses Stoffes aus zwei oder mehr Atomen besteht. So enthalten z. B. zwei Wasserstoffatome vor ihrer Vereinigung zum Molekül H_2 eine besondere potentielle Energie; dasselbe gilt auch für zwei J-Atome, bevor sie sich zu J_2 verbunden haben. Es ist sogar die potentielle Energie, die bei der Bildung eines Moleküls H_2 und eines Moleküls J_2 verbraucht wird, größer als die zur Bildung von zwei Molekülen der Verbindung HJ (Jodwasserstoff). Zur eben betrachteten Form der potentiellen Energie gehört auch die Energie explosibler Mischungen, z. B. des Schießpulvers.

IV. Elektrostatische Energie. Dies ist die potentielle Energie eines elektrisierten Körpers, z. B. eines Kondensators (Leidener Flasche); bei seiner Entladung kann eine Arbeit geleistet werden (z. B. die Durchbohrung einer Glasplatte) unter Verbrauch des Vorrates an elektrostatischer Energie. Zur Zeit, ehe die Elektronentheorie auftauchte, glaubte man, daß die elektrostatische Energie potentielle Energie des deformierten Äthers sei, analog der Energie eines deformierten elastischen Körpers. Der von dem deformierten Äther eingenommene Raum sollte das sogenannte elektrische Feld bilden. Man stellte sich ferner vor, daß die Materie, wenn sie in ein solches Feld gebracht wird, zu verschiedenen Erscheinungen Anlaß gäbe. Bei den sogenannten Leitern (z. B. den Metallen) sollten sich die Deformationen (Spannungen) des Äthers auf deren Oberfläche stützen und hierdurch eine besondere Art von Druck ausüben, welcher in der einen oder anderen Richtung Bewegungen hervorriefe. Wenn sich mehrere Leiter im elektrischen Felde befinden, so sollten diese Körper je nach der Verteilung der Spannungen entweder sich zu nähern oder voneinander zu entfernen suchen, d. h. gleichsam sich anziehen oder abstoßen. Man nahm ferner an, daß im Inneren von Leitern eine stabile Spannung des Äthers sich nicht ausbilden könne; im Inneren von Nichtleitern, den sogenannten Dielektricis, dagegen sollte der Äther Deformationen unterliegen können und man sagte dann, das Dielektrikum sei polarisiert.

Ganz anders blickt die Elektronentheorie auf diese Erscheinungen: ein elektrisierter Leiter enthält auf seiner Oberfläche einen Überschuß an freien Elektronen, und ein polarisierter Nichtleiter (Dielektrikum) ist ein solcher, in dessen Teilchen (Molekülen?) eine Verschiebung der Elektronen stattgefunden hat. Jene freien und diese verschobenen Elektronen sind die Quellen der potentiellen elektrostatischen Energie, welche bei einem Nichtleiter tatsächlich in hohem Grade analog ist der Energie eines deformierten elastischen Körpers.

V. Magnetische Energie. Wir wollen auch über diese Energieform einige Worte sagen, wenngleich sie wahrscheinlich mit der im vorhergehenden betrachteten elektrischen Stromenergie identisch ist. Die Pole natürlicher und künstlicher Magnete suchen sich entweder zu nähern (ungleichnamige Pole) oder voneinander zu entfernen (gleichnamige Pole). Hieraus folgt, daß ein System von zwei Magneten eine besondere Form von potentieller Energie besitzt, die wir magnetische Energie nennen wollen. Der die Magnete umgebende Raum erweist sich als ein besonderer Fall eines dynamischen Feldes und heißt Magnetfeld. Wir werden aber später sehen, daß der Raum, welcher elektrische Ströme umgibt, sich seinen Eigenschaften nach durch nichts von dem einen Magneten umgebenden unterscheidet; folglich ist auch er ein Magnetfeld. Hieraus läßt sich die innere Identität der elektrischen Stromenergie mit der sogenannten magnetischen Energie folgern.

Wir haben nunmehr die Betrachtung der verschiedenen Energieformen beendet und wollen hieran noch eine Bemerkung knüpfen: Es ist überaus wahrscheinlich, daß es eine potentielle Energie in der Welt überhaupt nicht gibt, daß vielmehr jede Energie eine Energie der Bewegung ist, und daß in allen Fällen, wo das Vorhandensein von Energie uns von einer bestimmten Anordnung der Körper abzuhängen scheint, wir es in Wirklichkeit mit einer besonderen Bewegungsform zu tun haben, wobei uns freilich nicht bekannt ist, was sich bewegt und welcher Art der Charakter der Bewegung ist. Einige Energieformen, die früher zu den potentiellen gerechnet wurden, zählt man heute bereits zu den kinetischen. So wurde z. B. die Energie eines komprimierten Gases, das offenbar Arbeit zu leisten vermag, früher zur potentiellen Energie gerechnet. Auf S. 47 ist gezeigt worden, wie man sich heutzutage den Gasdruck und das Ausdehnungsbestreben der Gase denkt. Nach jener Erklärung ist die Energie eines komprimierten Gases die Bewegungsenergie seiner Moleküle, folglich eine Form der kinetischen Energie.

In anderen Fällen ist es bisher nicht möglich gewesen, die potentielle Energie durch kinetische Energie zu ersetzen, obwohl verschiedene Forscher zu diesem Zwecke die Hypothese der „verborgenen" Bewegungen aufstellten, welche die von uns beobachtete, nur scheinbar potentielle Energie erklären sollten.

§ 7. Erhaltung der Energie. II. Energieprinzip. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir uns mit der Energie, als einer Fähigkeit, Arbeit zu leisten, bekannt gemacht; eine Arbeit aber besteht entweder im Überwinden einer die Bewegung eines Körpers hemmenden Kraft oder im Überwinden der Trägheit eines Körpers, d. h. in einer Vergrößerung seiner Geschwindigkeit. Ferner haben wir verschiedene Formen der kinetischen und potentiellen Energie betrachtet.

Äquivalente Energiemengen von verschiedener Form nennen wir solche Mengen, die einander numerisch gleich sind, d. h. der Fähigkeit, gleiche Arbeit zu leisten, entsprechen. Hiernach können wir das II. Prinzip folgendermaßen fassen:

II. Energieprinzip; Energie kann weder entstehen noch vergehen; jedoch kann Energie von einer Form in eine äquivalente Menge Energie einer anderen Form übergehen. Dieses ist das Prinzip von der Erhaltung der Energie.

Die eingehende Untersuchung der uns umgebenden Erscheinungen hat zur Entdeckung dieses wichtigen Prinzips geführt; es bildet eine der Hauptgrundlagen der heutigen Physik und hat in ihr dieselbe Bedeutung wie das Prinzip von der Erhaltung der Materie, auf welches sich die Chemie stützt.

Aus dem II. Energieprinzip läßt sich eine ganze Reihe von Sätzen ableiten.

Folgesatz 1. Als Ergebnis einer jeden geleisteten Arbeit R muß eine dieser Arbeit äquivalente Energiemenge irgendwelcher Form erscheinen. Das ist aus folgendem ersichtlich: Die Arbeit R konnte nur auf Kosten irgendeines Energievorrates geleistet werden; dabei wurde jener Vorrat um die Größe J, welche numerisch gleich R ist, verringert. Das zweite Energieprinzip sagt aber aus, daß Energie nicht verschwinden, sondern nur in eine andere Form übergehen kann. Daher muß die Abnahme des gegebenen Energievorrates um J mit einem gleichzeitigen Auftreten einer ebenso großen Energiemenge J von derselben oder einer anderen Form verbunden sein und dieses kann man als das Ergebnis oder die Folge der geleisteten Arbeit R ansehen.

Alle Erscheinungen der uns umgebenden Natur bestehen in Umwandlungen einer Energieform in die andere, sobald ihnen nur überhaupt das Merkmal von etwas sich Veränderndem anhaftet. Die Arbeit erscheint nur als ein Bindeglied: sie wird auf Kosten der Energie geleistet, deren Vorrat sich verringert; als Resultat erscheint aber dafür eine äquivalente Vorratszunahme einer anderen Energie. Ein System (oder Körper), welches die erstere Art von Energievorrat besitzt, gibt Energie ab und „leistet Arbeit“. Ein System, in welchem sich neue Energie ansammelt, erscheint als das Objekt, an welchem die übrige Welt Arbeit leistet, indem sie von diesem System ausgehende Widerstände überwindet; im letzteren Falle ist man übereingekommen, zu sagen, das System leiste negative Arbeit.

Folgesatz I zeigt, daß jedes Überwinden eines Widerstandes mit dem Auftreten irgendeiner Form von Energie verbunden ist.

Für die Bewegungsenergie, nämlich für die Wucht einer Bewegung, sind bereits alle hier erwähnten Beziehungen vollkommen streng bewiesen: wir sahen, daß die Arbeit, welche auf Kosten eines Vorrates an Wucht geleistet wird, durch diese Vorratsabnahme gemessen wird, und daß umgekehrt ein System, an welchem die Außenwelt Arbeit leistet, welches also selbst negative Arbeit erzeugt, eine gewisse Wucht erwirbt; diese wird durch die zum Überwinden der Trägheit des Systems dienende Arbeit gemessen. Hierbei setzen wir offenbar voraus, daß die gesamte Arbeit ausschließlich zur Vergrößerung der Geschwindigkeit der Systemteile verbraucht wird.

Was für die Wucht streng bewiesen wurde, erstreckt sich nach dem zweiten Energieprinzip auf alle Energieformen: das Überwinden eines Widerstandes ist immer vom Auftreten einer äquivalenten Energiemenge irgendwelcher Form begleitet.

Folgesatz 2. Wenn ein System zum ursprünglichen Zustande zurückkehrt, so ist die ganze Arbeit, welche die von ihm ausgehenden Kräfte geleistet haben, gleich Null. Das I. Energieprinzip lehrt uns, daß der Energievorrat eines Systems in diesem Falle seinen ursprünglichen Wert annimmt; daher muß die von ihm geleistete Arbeit gleich der an ihm von der übrigen Welt geleisteten Arbeit sein, die wir als negative Arbeit des Systems selbst bezeichneten. Die Summe der Arbeiten des Systems ist folglich gleich Null.

Das Prinzip von der Erhaltung der Energie kann in der allgemeinsten Form nicht bewiesen, d. h. nicht aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet werden. Wäre es möglich, nachzuweisen, daß alle in der Natur wirkenden Kräfte Zentralkräfte sind, so würde es sich in vollster Strenge ableiten lassen. Zurzeit kann man dies aber noch nicht und man muß das Prinzip als eine auf induktivem Wege gefundene Wahrheit, die von allen Erscheinungen der uns umgebenden Natur bestätigt wird, gelten lassen.

Folgesatz 3. Die Energie eines Systems, welches mit der übrigen Welt in keinem mechanischen Zusammenhang steht, ist eine konstante Größe. Der ganze Energievorrat eines Systems kann allen möglichen Umformungen unterliegen; die totale Energiemenge aber bleibt konstant.

Man darf diesen Satz nicht auf das ganze Universum anwenden und etwa sagen, „die Energie des Universums ist konstant“, denn vom Weltganzen wissen wir nichts und haben daher auch kein Recht darauf, das zu übertragen, was empirisch nur für einen unseren Beobachtungen zugänglichen Teil desselben gefunden ist.

Wenn Kräfte auf ein im Ruhezustande befindliches und einen gewissen Vorrat potentieller Energie enthaltendes System wirken und sich dabei nicht das Gleichgewicht halten, so wird die Konfiguration des Systems sich ändern; es wird sich dem Zustande des Gleichgewichtes nähern. Dabei werden die einzelnen Teile des Systems anfangen sich zu bewegen, d. h. es wird kinetische Energie entstehen; da dies nur auf Kosten der potentiellen Energie geschehen kann, so muß also der Übergang des Systems in den Gleichgewichtszustand mit einer Verminderung des Vorrates an potentieller Energie verknüpft sein. Hieraus folgt, daß im stabilen Gleichgewichtszustande jede denkbare Änderung der Konfiguration mit einer Vergrößerung der potentiellen Energie verknüpft sein muß, und dies führt uns zu dem

Folgesatz 4. Ein System von Körpern befindet sich im stabilen Gleichgewichtszustande, wenn seine potentielle Energie einen der möglichen Minimumwerte besitzt.

Wir hatten erwähnt, daß alle Änderungen in den Erscheinungen der uns umgebenden Natur aus kontinuierlichen Umwandlungen der verschiedenen Energieformen bestehen. Es ist überflüssig, dies an einer großen Zahl von Beispielen zu erläutern; einige wenige mögen genügen. Das

Herabfallen eines Körpers: hier handelt es sich um die Verwandlung von potentieller Energie eines gehobenen Körpers in kinetische Energie und hernach beim Aufschlagen gegen die Erde in Wärme, die ihrerseits in strahlende Energie übergeht. Die Schwingung einer elastischen Platte: hier haben wir ununterbrochene Übergänge der Energie des elastisch veränderten Körpers in Bewegungsenergie und umgekehrt. Der Dampfmotor: die chemische Energie des Heizmaterials wird in Wärmeenergie des Dampfes und darauf in Bewegungsenergie der Maschinenteile verwandelt. Verdichtung eines Systems, z. B. eines Weltnebels bei Bildung eines Himmelskörpers: die potentielle Energie der sich anziehenden Massen geht in Energie der fortschreitenden Bewegung über und danach, wenn ein Zusammenstoß der Teilchen stattgefunden hat, in Wärmeenergie. In den Pflanzen verwandelt sich die strahlende Energie der Sonnenstrahlen in chemische Energie der entstehenden Verbindungen, diese verdichtet sich bei Nahrungsaufnahme durch Menschen und Tiere in den Muskeln und stellt dort einen Energievorrat dar, über den ihr Wille in bestimmter Weise verfügt. Bei Arbeitsleistung von Mensch und Tier vermindert sich dieser Vorrat. Im folgenden werden wir vielen Beispielen von Energiewandlungen begegnen und viele Anwendungen des Prinzips von der Erhaltung der Energie kennen lernen.

Der Übergang von potentieller Energie in kinetische kann auf verschiedene Weise vor sich gehen. Hierbei spielt häufig eine wichtige Rolle eine besondere Art von Vorgängen, durch welche der Übergang eines Vorrates von potentieller Energie in kinetische eingeleitet wird; es sind dies die sogenannten auslösenden Vorgänge. Die hierbei verbrauchte Arbeit ist eine verschwindend kleine, und stehen solche Vorgänge, als Ursache betrachtet, in keinem Verhältnis zu der durch sie erzeugten Wirkung, dem Übergang beliebig großer Mengen von potentieller Energie in kinetische. Diesem Übergang stemmt sich gleichsam ein Hindernis entgegen und der auslösende Vorgang beschränkt sich auf das Hinwegräumen desselben. In manchen Fällen erzeugt der auslösende Vorgang an einer bestimmten oft sehr kleinen Stelle eine solche Änderung der Verhältnisse (z. B. eine Erwärmung), daß an dieser Stelle der Übergang von potentieller Energie in kinetische beginnen kann. Hat er einmal begonnen, so pflanzt er sich weiter fort, bis der ganze Vorrat an potentieller Energie sich in kinetische verwandelt hat.

Beispiele solcher auslösenden Vorgänge sind: Das Drehen eines Hahnes, wodurch das Ausströmen von Gasen oder Flüssigkeiten ermöglicht wird; die Öffnung eines Wehres, das Lösen eines Schusses, die durch einen Schlag oder durch einen elektrischen Funken erzeugte Explosion, das Entzünden eines Vorrates von Brennstoffen, das Auslösen einer Feder, die Beseitigung einer Stütze, durch welche ein Körper am Fallen gehindert wird, die Entladung eines Kondensators (Leidener Flasche), die Schließung eines elektrischen Stromes usw.

§ 8. III. Energieprinzip. Die Umwandlungen der Energie aus einer Form in die andere sind noch einem Prinzip unterworfen, welches in der Folge genauer untersucht werden soll, auf welches aber der Vollständigkeit halber schon hier hingewiesen sein möge.

III. Energieprinzip. Die Energieumwandlungen sind gewissermaßen an eine Richtung gebunden. Einige können vollständig sein und von selbst vor sich gehen, andere jedoch nur unter bestimmten Bedingungen, und kann dabei nur ein Teil des gegebenen Energievorrates in der gewünschten Weise umgewandelt werden. So kann z. B. die Umwandlung von „Arbeit in Wärme“ oder genauer eines Vorrates von Energie irgendwelcher Form, der zur Erzeugung dieser Arbeit verbraucht war, in Wärme von selbst vor sich gehen, und kann hierbei die ganze Arbeit eine äquivalente Wärmemenge geben. Beim Auftreffen eines Steines auf den Boden geht, falls keine Deformationsarbeit geleistet wird, seine gesamte Bewegungsenergie in Wärme über; eben dasselbe geschieht bei jeglicher Art von Reibung, welche eine Bewegung verlangsamt. Die ganze Energie eines elektrischen Stromes kann sich ohne weiteres in Wärme verwandeln. Dagegen ist es nicht möglich, in umgekehrter Richtung einen gegebenen Vorrat von Wärmeenergie zur Erzeugung von Arbeit zu verwenden, ohne daß zugleich gewisse Nebenerscheinungen auftreten, welche einen Teil der Wärmeenergie beanspruchen, so daß nur ein Teil des Wärmevorrates in nutzbringende Arbeit verwandelt wird; der erstere Teil verliert die Fähigkeit, unter den gegebenen Umständen Arbeit zu leisten.

Ein anderes Beispiel ist die Energieverminderung einiger schnell bewegter Teilchen bei gleichzeitiger äquivalenter Energievermehrung anderer sich langsamer bewegender Teilchen, oder, anders ausgedrückt, der Wärmeübergang vom wärmeren zum kälteren Körper. Auch dieser Übergang vollzieht sich vollständig von selbst. Der Vorgang in umgekehrter Richtung aber ist nur unter bestimmten Bedingungen, die wir später betrachten wollen, möglich. Vorläufig begnügen wir uns mit diesem kurzen Hinweis auf die Bedeutung, welche die Richtung der Umwandlungen aus einer Energieform in die andere besitzt.

Viertes Kapitel.

Die harmonische Schwingungsbewegung.

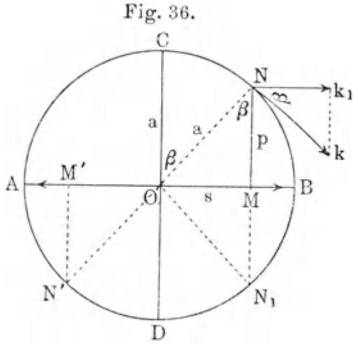
§ 1. Der geometrische Ursprung der harmonischen Schwingungsbewegung. Unter den verschiedenartigen Bewegungen, denen man bei der Untersuchung von physikalischen Erscheinungen begegnet, sind besonders wichtig die sogenannten periodischen. Bei diesen wiederholt ein gegebener Punkt ein und dieselbe Bewegung in jedesmal derselben Zeit T eine unbestimmte Anzahl Male. In welchem Augenblick man die Lage des Punktes, die Größe und Richtung seiner Bewegung bestimmt hat, ist gleichgültig; nach Ablauf der Zeit T befindet er sich an demselben Orte und besitzt sowohl der Größe als auch der Richtung nach die gleiche Geschwindigkeit wie früher. Die periodischen Bewegungen können unendlich verschiedenartig sein, sowohl in bezug auf die Form der Bahn, auf welcher sich der Punkt bewegt, als auch in bezug auf die Bewegung selbst; die einfachste hierher gehörige Bewegung ist die gleichförmige Kreisbewegung.

Von allen periodischen Bewegungen ist die wichtigste die sogenannte harmonische Schwingungsbewegung, denn jede periodische Bewegung kann aus einer größeren oder geringeren (bisweilen auch unendlich großen) Zahl harmonischer Schwingungsbewegungen zusammengesetzt werden. Wie der Name zeigt, haben letztere Bewegungen den Charakter von „Schwingungen", d. h. der Punkt bewegt sich zwischen zwei bestimmten Grenzpunkten eines Kurvenabschnittes hin und her. Wir werden übrigens nur die Bewegungen auf einer geradlinigen Strecke oder einem Kreisbogen betrachten und wollen uns vorläufig darauf beschränken, den ersten Fall zu studieren, d. h. die geradlinige, harmonische Schwingungsbewegung; der Kürze halber soll im folgenden das Wort „geradlinige" immer fortgelassen werden.

Wir wollen zunächst die geometrischen Bedingungen betrachten, unter denen eine harmonische Schwingungsbewegung zustande kommt; auf die Frage, welche mechanischen Bedingungen hierbei erfüllt sein müssen, werden wir erst später eingehen.

Eine Kreislinie $ACBDA$ (Fig. 36) mit dem Radius $OA = a$ sei gegeben, durch ihren Mittelpunkt legen wir den Durchmesser AOB. Durchläuft der Punkt N die Kreislinie mit der konstanten Geschwindigkeit k, so schwingt die Projektion M des Punktes N auf dem Durchmesser ($NM \perp AB$) zwischen den Grenzlagen A und B hin und her. Diese Bewegung nennen wir eine harmonische Schwingungsbewegung. Verfolgen wir sie etwas näher, so ergibt sich folgendes: Befindet sich N in C, so fällt Punkt M mit O zusammen; während N das erste Viertel CB der Kreislinie durchläuft, bewegt sich Punkt M von O nach B, wo M und N zusammenfallen; bewegt sich N sodann auf den zweiten Viertelbogen BD, so geht M rückwärts von B nach O; ferner durchläuft N das dritte Viertel DA, während sich M von O nach

Fig. 36.



A bewegt; endlich entspricht der Bewegung des Punktes N auf dem vierten Viertelbogen AC die Rückkehr des Punktes M von A nach O. Im weiteren wiederholt sich diese Bewegung zwischen den Endpunkten A und B eine unbestimmte Anzahl Male. Der äußerste Abstand $OA = OB = a$, um welchen sich der Punkt M aus der Mittellage in O entfernt, heißt Amplitude der Schwingungsbewegung. Die zur Vollbringung einer vollen Schwingung erforderliche Zeit heißt die Periode (Schwingungsdauer) der Schwingung; wir bezeichnen sie mit T. Zu Anfang und Ende der Zeit T befindet sich der Punkt an einem und demselben Orte und hat sowohl der Größe als auch der Richtung nach die gleiche Geschwindigkeit. So kann z. B. der Punkt in der Zeit T den Weg $OBOAO$ oder $MBMOAOM$ zurücklegen; zur selben Zeit beschreibt N den vollen Kreis, und zwar $CBDAC$ bzw. NBN_1DACN. Die Zahl der in der Zeiteinheit vollführten Schwingungen bezeichnet man als Schwingungszahl.

Zwischen der Amplitude a, der Geschwindigkeit k des Punktes N und der Zeit T besteht ein einfacher Zusammenhang. Da der Punkt N bei gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit k in der Zeit T den Weg $2\pi a$ durchläuft, so ist

$$2\pi a = kT \qquad (1)$$

§ 2. Der durchlaufene Weg und die Schwingungsphase bei der harmonischen Schwingungsbewegung. Wir wollen jetzt den veränderlichen Abstand OM des Punktes M von seiner Mittellage O als Funktion der Zeit darstellen. Zu dem Zweck bezeichnen wir den Abstand mit s und rechnen die Zeit von dem Augenblick an, wo Punkt M sich eben in O und auf dem Wege nach B befindet. Die Größen s wollen wir in dieser Richtung als positiv betrachten und $\angle\, CON = \angle\, ONM$ mit β bezeichnen. Aus Fig. 36 ist ersichtlich, daß

$$s = a \sin \beta \qquad (2)$$

In der Zeit t ist Punkt N von C nach N gelangt; da er sich gleichförmig bewegt, so muß sich der Bogen CN zur ganzen Peripherie verhalten wie t zu T. Die Bogen verhalten sich wie die Zentriwinkel, folglich ist $\frac{\beta}{2\pi} = \frac{t}{T}$ und hieraus folgt

$$\beta = 2\pi \frac{t}{T} \qquad (3)$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein, so erhält man

$$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (4)$$

Dies ist die Grundformel der Lehre von der harmonischen Schwingungsbewegung; sie bestimmt den variablen Abstand s als Funktion der Zeit t.

Die Winkelgröße β heißt die Phase; wir werden Ausdrücke gebrauchen wie etwa den folgenden, „der Punkt M befindet sich in einer bestimmten Phase". Die Phase bestimmt sowohl die Lage des Punktes M als auch die Richtung seiner Bewegung. Ein und derselben Lage entsprechen im allgemeinen zwei Phasen während jeder einzelnen Schwingung, d. h. im Verlaufe der Zeit T. So ist z. B. die Phase des in M befindlichen, nach B hin sich bewegenden Punktes gleich $\angle\ CON$; ist der Punkt auf dem Wege nach O wiederum in M angelangt, so ist seine Phase gleich $\angle\ CON_1$. Eine Phasenänderung um den Winkel $\pm 2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist, ändert weder die Lage des Punktes M, noch die Richtung seiner Bewegung. Deshalb werden auch Phasen, die sich um $\pm 2n\pi$ (um eine ganze Zahl Vollkreise) unterscheiden, nicht selten als gleiche Phasen betrachtet. Die Formeln (3) und (4) geben die folgenden Beziehungen zwischen t, β und s.

$$\left.\begin{array}{cccccc} t = 0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\ \beta = 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi\ (0) \\ s = 0 & a & 0 & -a & 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Phasen, die um π, oder was dasselbe ist, um $\pm(2n+1)\pi$ differieren, werden entgegengesetzte Phasen genannt. Verlängert man die Gerade NO bis N' und macht $N'M' \perp AB$, so erhält man den Punkt M'; dieser bewegt sich nach links und befindet sich in einer zum Punkte M (der sich nach rechts bewegt) entgegengesetzten Phase. Die Lagen A und B, oder auch die beiden Lagen O (bei verschiedener Richtung der Geschwindigkeit), entsprechen entgegengesetzten Phasen. Von jeder beliebigen Phase aus gelangt man nach der Zeit $\frac{T}{2}$ zu der ihr entgegengesetzten Phase. Da

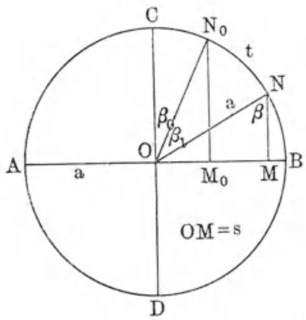
$$s = a \sin(\beta \pm \pi) = -a \sin\beta$$

ist, so müssen offenbar entgegengesetzten Phasen der Größe nach gleiche, dem Vorzeichen nach verschiedene Entfernungen s und gleichzeitig entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten entsprechen.

Wir verallgemeinern nun die Formel (4) unter der Annahme, daß die Zeit von einem beliebigen Augenblick an gerechnet wird; für $t = 0$ möge sich unser Punkt in M_0 (Fig. 37) befinden; zieht man $M_0N_0 \perp AB$ und verbindet N_0 mit O, so erhält man die sogenannte Anfangsphase $\beta_0 = \angle\ CON_0$. Während etwa der Punkt in der Zeit t von

M_0 nach M gelangt, hat der sich gleichförmig auf der Kreislinie bewegende Punkt den Bogen $N_0 N$ durchlaufen, wo $NM \perp AB$ ist. Es sei $\angle\, N_0 O N = \beta_1$. Die Phase des Punktes M bezeichnen wir mit β; es ist $\beta = \angle\, CON = \angle\, ONM$ und wie früher $s = OM = a \sin \beta$. Es ist aber $\beta = \angle\, CON_0 + \angle\, N_0 ON = \beta_0 + \beta_1$. Für β_1 gilt $\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T}$; folglich ist $\beta = \beta_1 + \beta_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \beta_0$; setzt man diesen Ausdruck in $s = a \sin \beta$ ein, so wird

Fig. 37.



$$s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblick an, wo sich der Punkt in der Grenzlage B befindet, so ist $\beta_0 = \pi : 2$; es ist dann

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

woraus sich für $t = 0$, $s = a$ ergibt. Formel (6) zeigt, daß das Zeitintervall τ zwischen dem Augenblick, wo sich der Punkt in O befindet und sich eben nach der positiven Seite hin (nach B) bewegt, und dem Augenblick $t = 0$, von dem an wir die Zeit rechnen, mit der Anfangsphase β_0 und der Form unserer Funktion $s = f(t)$ in folgender Weise verknüpft ist:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\tau = 0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\[2ex]
\beta_0 = 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi\,(0) \\[2ex]
s = a \sin 2\pi \frac{t}{T} & a \cos 2\pi \frac{t}{T} & -a \sin 2\pi \frac{t}{T} & -a \cos 2\pi \frac{t}{T} & a \sin 2\pi \frac{t}{T}
\end{array}\right\} \quad (8)$$

§ 3. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Energie der harmonischen Schwingungsbewegung. Die Geschwindigkeit v des Punktes M, welcher die harmonische Schwingungsbewegung vollführt, kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Auf Grund des allgemeinen Ausdrucks für die Geschwindigkeit (8) auf S. 58 ergibt sich aus (4)

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Bezeichnet man die Phase überhaupt mit β, so erhält man hieraus unter Berücksichtigung von (1) auf S. 132 $v = k \cos \beta$. Für $\beta = 0$ ist die Geschwindigkeit $v = k$, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher M (Fig. 36) durch seine Mittellage O geht, ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich Punkt N auf der Kreislinie gleichförmig bewegt. Unsere Formel ($v = k \cos \beta$) kann auch erhalten werden, wenn man beachtet, daß MN (Fig. 36) beständig senkrecht zu AB bleiben muß. Hieraus folgt nämlich, daß die zu AB parallele Komponente k_1 der Geschwindigkeit k gleich der Geschwindigkeit v des Punktes M sein muß. Es ist aber $\angle k_1 N k = \beta$, folglich $v = k_1 = k \cos \beta$. Setzt man $MN = p$, so wird

$$v = k \cos \beta = \frac{2\pi}{T} a \cos \beta = \frac{2\pi}{T} p \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Diese Formel gibt uns eine klare Vorstellung von dem Gesetze, nach dem sich die Geschwindigkeit des in harmonischer Schwingungsbewegung befindlichen Punktes ändert: seine Geschwindigkeit ist nämlich proportional der auf den Durchmesser AB gefällten Senkrechten p.

In den Punkten A und B ist die Phase $\beta = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$, die zugehörige Geschwindigkeit ist nach (10) $v = 0$.

Die Beschleunigung w des Punktes M wird aus dem allgemeinen Ausdrucke (27) auf S. 65 gewonnen:

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Formel (4) ergibt

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Wir sehen hieraus, daß die Beschleunigung proportional dem Abstande des Punktes von seiner Mittellage O und fortwährend nach diesem Punkte O hin gerichtet ist, denn für $s > 0$ ist w negativ, d. h. von B nach O gerichtet, für $s < 0$ ist w positiv, d. h. von A nach O gerichtet. Für den Punkt O gilt $w = 0$; in den Punkten A und B erreicht die Beschleunigung ihren Maximalwert $\pm \frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Setzt man

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

so ist

$$w = -cs \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Die vier Größen a, T, $v_0 = k$ und c sind durch die beiden Gleichungen (1) und (13) miteinander verknüpft. Aus ihnen ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

und

$$v_0 = k = \frac{2\pi a}{T} = a\sqrt{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Die Formeln (10) und (13) ergeben

$$v = p\sqrt{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

oder, da $p^2 = a^2 - s^2$ ist (vgl. Fig. 36),

$$v^2 = c(a^2 - s^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Entfernung s ausgedrückt; nach (18) und (16) erhält man noch

$$v^2 + cs^2 = v_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

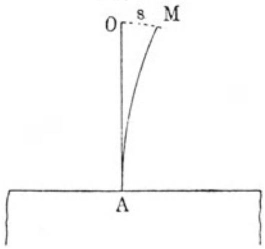
Wir haben im vorhergehenden die geometrischen Bedingungen betrachtet, unter denen eine harmonische Schwingungsbewegung zustande kommt, und einige Eigenschaften derselben erörtert. Es ist uns jetzt nicht mehr schwer, auch die mechanischen Bedingungen festzusetzen, unter denen ein materieller Punkt mit der Masse m eine derartige Bewegung vollführt, d. h. das Gesetz aufzustellen, nach welchem eine äußere Kraft f auf die Masse m derart wirkt, daß sie unter dem Einflusse der ersteren eine harmonische Schwingungsbewegung vollzieht. Auf Grund der allgemeinen Formel $f = mw$, vgl. (5) auf S. 75, haben wir aus (14)

$$f = -cms \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Ein materieller Punkt M vollführt eine harmonische Schwingungsbewegung um eine gewisse Mittellage O, wenn er sich unter dem Einflusse einer Kraft befindet, welche stets nach dem Punkte O gerichtet und der Größe nach direkt proportional dem Abstande des Punktes M von O ist. Am Anfang muß hierbei Punkt M, falls er in Ruhe ist, um eine gewisse Strecke a von O entfernt sein, oder, wenn er sich in O befindet, eine nach Größe und Richtung willkürliche Geschwindigkeit v_0 besitzen, oder endlich, wenn er sich in einem beliebigen Punkte befindet, eine Geschwindigkeit haben, die der Richtung nach mit der Geraden OM zusammenfällt. Die Dauer einer vollen Schwingung hängt nur vom Koeffizienten c ab, der im Ausdruck (20) für die Kraft vorkommt, während die Amplitude a, vgl. (16), von c und von der Geschwindigkeit v_0 abhängt.

Es lassen sich viele Beispiele für solche Kräfte anführen, die auf einen Punkt einwirken und proportional seiner Entfernung von einer gewissen Mittellage sind. So treten solche Kräfte sehr oft auf, wenn ein materieller Punkt M im normalen Ruhezustande mit einem Punkt O zusammenfällt, und bei seiner Entfernung aus O äußere Kräfte, die sich diesem Entfernen widersetzen, ihn nach O zurückzubringen suchen. Etwas derartiges kommt bei geringfügigen Formveränderungen fester Körper vor, wenn elastische Kräfte die ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen suchen. Biegt man z. B. den an einem Ende A (Fig. 38) festgeklemmten, elastischen Stab OA so, daß O nach M gelangt und er die Form AM annimmt, so wird das Ende M in der Weise nach O zurückstreben, als wenn eine von M nach O gerichtete Kraft auf dasselbe wirkte. Ist der Bogen $OM = s$ klein, so kann man die Kraft dem Abstande s proportional setzen, und deshalb wird das Ende M des Stabes eine harmonische Schwingungsbewegung um O vollführen, sobald man es nur zur Seite biegt und sodann sich selbst überläßt. Diese Bewegung geht freilich nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kreisbogen vor sich.

Fig. 38.



Die kinetische Energie J_0 der Masse m im Augenblick, wo sie durch die Ruhelage geht, ist gleich $J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ oder, vgl. (16),

$$J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} c a^2 m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

In der Entfernung s von O hat man für die kinetische Energie, vgl. (18),

$$J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m c (a^2 - s^2) = J_0 - \frac{1}{2} m c s^2 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die letzte Formel lehrt, daß zugleich mit der Entfernung des Punktes aus seiner Gleichgewichtslage eine potentielle Energie J_p entsteht, die gleich ist

$$J_p = \frac{1}{2} m c s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

denn nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muß beständig $J + J_p = J_0$ sein. Die mittlere kinetische Energie J_c für eine Schwingung wird nach folgender Formel erhalten

$$J_c = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^T v^2 dt}{T} .$$

Setzt man hierin für v seinen Wert (9) ein, so erhält man

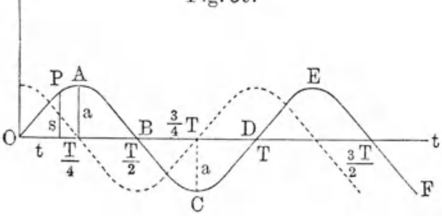
$$J_c = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} J_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Formeln (21) und (24) zeigen, daß die Energie der harmonischen Schwingungsbewegung proportional dem Quadrate der Amplitude ist. Da die Beziehung $J + J_p = J_0$ für die ganze

Dauer der Bewegung gilt, so ergibt sich aus (24), daß die mittlere kinetische und die mittlere potentielle Energie gleich $J_0 : 2$ sind.

Analytisch wird die harmonische Schwingungsbewegung durch Formel (4) ausgedrückt, sie kann auch geometrisch dargestellt werden. Zu diesem Zwecke „trägt man“ auf der Abszissenachse eines Koordinatensystems (vgl. Fig. 39) „die Zeit ab“ und auf den Senkrechten, die zur Ordinatenachse parallel laufen, die nach Formel (4) berechneten Entfernungen s. Der geometrische Ort der Punkte P, deren Koordinaten gleich t und s sind, liefert uns eine gewisse Kurve $OABCDEF\ldots$

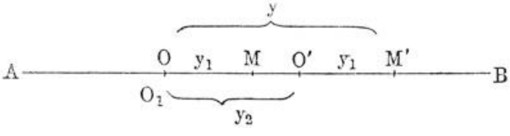
Fig. 39.



und diese stellt das Gesetz der harmonischen Schwingungsbewegung überaus anschaulich dar. Die absolut größten Ordinaten entsprechen den Augenblicken $\frac{T}{4}$ und $\frac{3\,T}{4}$ und sind gleich der Schwingungsamplitude a. Die Kurve selbst besteht aus einer unbestimmten Anzahl gleichartiger Teile. Wenn eine Anfangsphase vorhanden ist, d. h. wenn für $t = 0$ die Entfernung s nicht gleich Null ist, so wird das Bewegungsgesetz durch dieselbe Kurve dargestellt, die alsdann nur mehr oder weniger nach links gerückt ist. Die punktierte Linie stellt das Schwingungsgesetz für den Fall dar, daß die Anfangsphase $\beta_0 = \pi : 2$ ist und man demnach für den Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $s = a$ erhält.

§ 4. Zusammensetzung zweier gleichgerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen von der gleichen Periode T. Wir nehmen an, der Punkt M (Fig. 40) führe eine harmonische Schwingungsbewegung längs der Geraden AB und um den auf ihr liegenden Punkt O aus.

Fig. 40.



Die Schwingungszeit bezeichnen wir mit T, die Amplitude mit a. Die Entfernung y_1 des Punktes M von O zur Zeit t wird dann nach Formel (6) auf S. 134 ausgedrückt durch

$$y_1 = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wo β_1 die Anfangsphase ist. Wir nehmen ferner an, der Punkt O selbst vollführe gleichzeitig eine harmonische Schwingungsbewegung mit derselben Periode T, aber einer anderen Amplitude b um den Punkt O_1, der auf der Ebene unbeweglich gedacht ist. Diese letztere Bewegung erfolge ebenfalls in der Richtung von AB, falle also mit der ersteren der Richtung nach zusammen. In der Fig. 40 fallen die Punkte O und O_1 zusammen, d. h. Punkt O hat seine Bewegung noch nicht begonnen. Man kann sich nun vorstellen, die Gerade selbst schwinge nach links und rechts, wobei jeder ihrer Punkte eine Schwingung um einen entsprechenden festen Flächenpunkt vollführt. Der um O schwingende Punkt M nimmt gleichzeitig an der Schwingung der Geraden AB teil, von der er gleichsam mitgeführt wird. Hat sich die Gerade in der Zeit t um y_2 aus ihrer Normallage verschoben, wobei der Punkt O nach O' gelangt, so erhält man nach (25), wenn $O_1 O' = y_2$ gesetzt wird,

$$y_2 = b \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

wo β_2 die Anfangsphase der zweiten Schwingungsbewegung ist. Den wahren Ort M' des schwingenden Punktes finden wir, wenn wir $O'M' = OM = y_1$ machen. Wir bezeichnen mit y die Entfernung dieses Punktes vom festen Punkte O_1 der Ebene, d. h. wir setzen $O_1 M' = y$. Unsere Aufgabe besteht nur darin, die Entfernung y als Funktion der Zeit t darzustellen. Zählt man y_1 und y_2 nach derselben Seite (nach rechts) positiv, so ist offenbar

$$y = y_1 + y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Setzt man die entsprechenden Ausdrücke nach (25) und (26) ein, so wird

$$y = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1\right) + b \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Abhängigkeit der Größe y von der Zeit t ist somit eine recht verwickelte; wir wollen versuchen, sie umzuformen in

$$y = A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

d. h. wir wollen untersuchen, ob nicht die wahre Bewegung des Punktes M, die aus je zwei harmonischen Schwingungsbewegungen besteht, selbst eine harmonische Schwingungsbewegung mit einer Amplitude A und einer Anfangsphase β ist; oder, was dasselbe ist, wir fragen, ob es nicht zwei derartige Größen A und β gibt, welche die Ausdrücke (28) und (29) für alle Werte die Zeit t in Identitäten verwandeln.

Die Gleichung

$$A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1\right) + b \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right)$$

liefert

$$A \cos\beta \sin 2\pi\frac{t}{T} + A \sin\beta \cos 2\pi\frac{t}{T} = (a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2) \sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$+ (a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2) \cos 2\pi\frac{t}{T} \cdot$$

Diese Gleichung geht für alle Werte von t in eine Identität über, wenn die Koeffizienten von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ und $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ einzeln gleich sind, d. h. wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} A\cos\beta &= a\cos\beta_1 + b\cos\beta_2 \\ A\sin\beta &= a\sin\beta_1 + b\sin\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Diesen Bedingungen kann aber für A und β genügt, also (28) auf die Form (29) gebracht werden.

Die Gleichungen (30) geben nämlich bei Division der zweiten durch die erste

$$tg\,\beta = \frac{a\sin\beta_1 + b\sin\beta_2}{a\cos\beta_1 + b\cos\beta_2} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

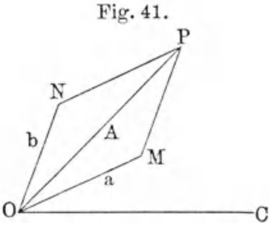
Die Summe der Quadrate der Formeln (30) ergibt

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\beta_1 - \beta_2) \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Die vorstehenden Ausdrücke gehören zu den wichtigsten physikalischen Formeln. Zwei harmonische Schwingungsbewegungen von gleicher Richtung und Periode, aber ungleichen Amplituden a und b und Anfangsphasen β_1 und β_2 setzen sich zu einer neuen harmonischen Schwingungsbewegung zusammen, deren Amplitude A und Anfangsphase β durch die Formeln (31) und (32) bestimmt werden.

Man kann die Amplitude A und die Phase β auch durch Konstruktion finden. Zu dem Zwecke machen wir (Fig. 41) $\angle\, COM = \beta_1$, $\angle\, CON = \beta_2$, $OM = a$, $ON = b$ und ziehen die Diagonale OP des Parallelogramms aus a und b. Dann ist $OP = A$ und $\angle\, COP = \beta$; es folgt dies daraus, daß die Länge der Geraden OP und der Winkel COP den beiden Gleichungen (30) genügen.

Fig. 41.



Bezeichnet man die Energien der zusammenzusetzenden und resultierenden Schwingungen mit i_1, i_2 und J, so erhält man aus (32) auf Grund der an Formel (24) angeknüpften Bemerkung:

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2}\cos(\beta_1 - \beta_2) \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Es seien hier noch einige besondere Fälle betrachtet, zu welchen uns die letzten drei Formeln führen.

1. Die Amplituden seien untereinander gleich: $b = a$; setzt man $i_1 = i_2 = i$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \pm 2n\pi \\ A &= 2a\cos\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \\ J &= 4i\cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

2. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = 0$ oder überhaupt gleich $2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Wir haben

$$A = a + b; \ \beta = \beta_1 = \beta_2; \ J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots \quad (35)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = 0$ und $b = a$, so ist

$$A = 2a; \ J = 4i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Somit ist in diesem besonderen Falle die Energie der resultierenden Schwingungen viermal so groß als die Energie jeder der beiden vollkommen gleichen zusammenzusetzenden Schwingungen.

3. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \pi$ oder überhaupt gleich $(2n + 1)\pi$; die zusammenzusetzenden Schwingungen haben also entgegengesetzte Phase. Es ist

$$A = a - b; \ J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = (2n + 1)\pi$ und $a = b$, so wird

$$A = 0; \ J = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Zwei Schwingungsbewegungen mit gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase ergeben als Resultat vollkommene Ruhe.

4. Der Phasenunterschied $\beta_1 - \beta_2$ sei gleich $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ oder überhaupt gleich $\left(n \pm \frac{1}{4}\right) 2\pi$. Für diesen Fall wird

$$A^2 = a^2 + b^2; \ J = i_1 + i_2 \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

d. h. die Energie der resultierenden Schwingung ist gleich der Summe der Energien ihrer Teilschwingungen.

5. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ und eine der Phasen gleich Null.

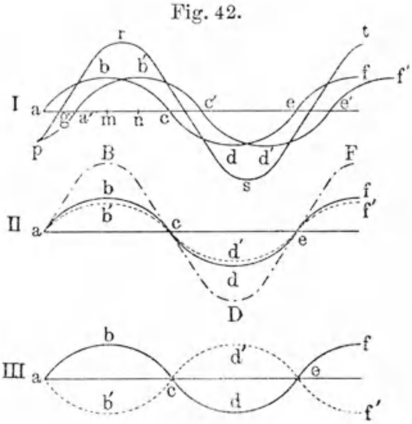
$$\text{a)}\ \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

$$\text{b)}\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{b}{a} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Die Formeln (29), (31) und (32) geben die vollständige analytische Lösung der Aufgabe, wie zwei „parallele“ harmonische Schwingungsbewegungen zusammengesetzt werden. Wir können diese Aufgabe auch geometrisch lösen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zwei Kurven, ähnlich den in Fig. 39 dargestellten. Hierauf bilden wir eine neue Kurve, für welche die Ordinaten y der einzelnen Punkte gleich $y_1 + y_2$, d. h. gleich der Summe der Ordinaten für die Punkte der beiden ersten Kurven werden (alle drei Punkte entsprechen gleichen Abszissen). Die neue Kurve drückt dann das Gesetz aus, das die gesuchte zusammengesetzte Bewegung befolgt.

In Fig. 42 sind drei Beispiele einer geometrischen Addition von je zwei Schwingungsbewegungen dargestellt. In (I) ist $a = b$, während der Phasenunterschied ein beliebiger ist. Die Kurven *abcdef* und *pa'b'c'd'e'f'* stellen die gegebenen Schwingungsbewegungen, die Kurve *prst* dagegen die resultierende Schwingung dar. Die mittlere Fig. (II) entspricht dem Falle, wo $a = b$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist; hier sind die gegebenen Bewegungen durch die zusammenfallenden Kurven *abcdef* und *ab'cd'ef'*, die resultierende durch die Kurve *aBDF* dargestellt. In der untersten Fig. (III) ist $a = b$ und $\beta_1 - \beta_2 = \pi$. Die gegebenen Kurven *abcdef* und *ab'cd'ef'* geben die Gerade *ace*, welche zeigt, daß der Punkt entsprechend (38) in Ruhe bleibt.

Fig. 42.



§ 5. Zusammensetzung einer beliebigen Zahl gleichgerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen von der gleichen Periode T.

Ist die Entfernung y des Punktes M von dem festen Punkte O in jedem Augenblicke gleich der Summe der Entfernungen y_i, in welchem sich der Punkt befinden würde, wenn er verschiedene harmonische Schwingungsbewegungen vollführen würde, so kann man allgemein setzen:

$$y_i = a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right)$$

und

$$y = \Sigma y_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

also auch

$$y = \Sigma a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right) \quad \ldots \ldots \ldots (43)$$

Auch diese Summe läßt sich auf die Form

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

bringen.

Setzt man (43) und (44) einander gleich, so bekommt man als Bedingungen für die Identität bei allen Werten von t

$$A \cos\beta = \Sigma a_i \cos\beta_i; \quad A \sin\beta = \Sigma a_i \sin\beta_i \quad . \; . \; . \quad (45)$$

Hieraus folgt

$$tg\,\beta = \frac{\Sigma a_i \sin\beta_i}{\Sigma a_i \cos\beta_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

und

$$A^2 = (\Sigma a_i \sin\beta_i)^2 + (\Sigma a_i \cos\beta_i)^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Mit Hilfe der Formeln (46) und (47) kann man A und β geometrisch darstellen, ähnlich wie dies im § 4 geschehen ist. Wir werden hierauf im II. Bande bei der Untersuchung der Diffraktionserscheinungen (Methode von Cornu) zurückkommen. Es ist leicht einzusehen, daß man (47) auch folgendermaßen schreiben könnte:

$$A^2 = \sum_i \sum_k a_i a_k \cos(\beta_i - \beta_k) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47,\text{a})$$

wo i und k alle Werte von 1 bis n durchlaufen müssen (n ist dabei die Anzahl der zu addierenden Schwingungsbewegungen).

§ 6. Zerlegung einer harmonischen Schwingungsbewegung in zwei ebensolche Bewegungen, die mit ihr gleiche Richtung haben. Wie viele andere Aufgaben der Zerlegung (einer Zahl, Kraft, Geschwindigkeit), so hat auch diese Aufgabe unendlich viele Lösungen, die sich aus den allgemeinen Formeln (30) ergeben. Die Größen A und β müssen wir als gegeben ansehen; zur Bestimmung der beiden Amplituden a und b und der beiden Anfangsphasen β_1 und β_2 haben wir im ganzen zwei Gleichungen, und können deshalb zwei von diesen vier Größen vollkommen willkürlich gewählt werden, wobei nur die Bedingung

$$a - b \leqq A \leqq a + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

erfüllt sein muß. Der wichtigste Fall ist der, wo die Anfangsphasen β_1 und β_2 der gesuchten Schwingungen gegeben sind; dann werden die Amplituden aus (30) nach den Formeln:

$$a = A \frac{\sin(\beta_2 - \beta)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}; \quad b = A \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \quad . \; . \; . \quad (49)$$

gefunden. Bezeichnet man den Phasenunterschied der gegebenen und der beiden gesuchten Schwingungen mit φ_1 und φ_2, d. h. setzt man $\beta_1 - \beta = \varphi_1$ und $\beta_2 - \beta = \varphi_2$, so wird

$$a = A\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad b = A\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \ldots \quad (50)$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, wo noch die Nebenbedingung $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ gegeben ist; setzt man der Einfachheit halber $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi - \frac{\pi}{2}$, so wird $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$, $\sin\varphi_2 = -\cos\varphi$ und statt (50)

$$a = A\cos\varphi; \quad b = A\sin\varphi \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Diese Formeln liefern die Amplituden a und b zweier Schwingungen, in welche die gegebene Schwingung mit der Amplitude A unter der Bedingung zerfällt, daß eine der gesuchten (Amplitude a) eine Phase hat, welche die Phase der gegebenen Schwingung um φ übertrifft, und daß die Phasendifferenz der gesuchten Schwingungen gleich $\pi : 2$ ist (die Phase der Schwingung mit der Amplitude a ist um $\pi : 2$ größer als die Phase der Schwingung mit der Amplitude b).

Die Schwingungen selbst werden durch nachstehende Formeln dargestellt:

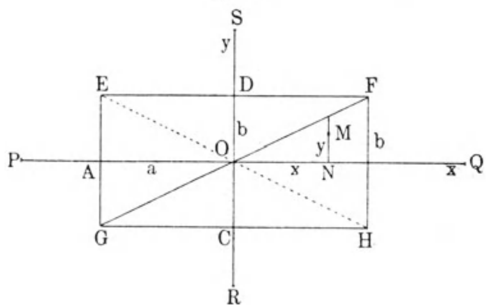
$$\left.\begin{aligned} y &= A\sin 2\pi\frac{t}{T} \\ y_1 &= A\cos\varphi\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \\ y_2 &= A\sin\varphi\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -A\sin\varphi\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

Die Bedingung (27) $y = y_1 + y_2$ ist offenbar erfüllt. In einem noch spezielleren Falle, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d. h. wenn $\varphi_1 = \beta_1 - \beta = \beta - \beta_2 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ ist, haben wir

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

§ 7. Zusammensetzung zweier aufeinander senkrechter harmonischer Schwingungsbewegungen von gleicher Periode T. Gegeben seien die beiden zueinander senkrechten Geraden PQ und SR (Fig. 43). Wir nehmen an, daß der Punkt M eine harmonische Schwingungsbewegung längs PQ um den Punkt O mit der Amplitude $a = OA$ und der Periode T vollführt. Seinen Abstand von O wollen wir mit x bezeichnen. Wir nehmen ferner an, daß auch die ganze Gerade PQ harmonisch in einer zu ihrer Länge senkrechten Richtung schwingt, b und T seien die Amplitude und die Periode dieser zweiten Bewegung. Den veränderlichen Abstand der Geraden von ihrer Mittellage PQ wollen wir mit y bezeichnen. Trägt man $OC = OD = b$ ab und zieht durch C und D Parallele zu PQ, so erhält man die Grenzlagen der schwingenden Geraden. Der auf der Geraden PQ hin und her schwingende Punkt M wird von dieser mitgenommen und nimmt daher an der zu SR parallelen Schwingung teil. Die Lage dieses Punktes in einem gegebenen Zeitaugenblick t läßt sich finden, sobald man den Betrag x, um welchen er sich von O zur Seite bewegt hat, und die Strecke y, um welche die ganze Gerade aus ihrer Mittellage gerückt ist, kennt. Offenbar stellen x und y die veränderlichen Koordinaten des Punktes M dar. Schafft man aus den beiden Gleichungen für x und y die Zeit t fort, so erhält man die sogenannte Bahnkurve oder die Bahn des Punktes. Bevor wir diese Rechnung durchführen, sei darauf hingewiesen, daß der Punkt M offenbar innerhalb des Rechtecks $EFHGE$ bleiben muß, da dem absoluten Betrage nach $x \leqslant a$ und $y \leqslant b$ ist.

Fig. 43.



Um nun t aus den beiden Gleichungen zu eliminieren, setzen wir voraus, daß für $t = 0$ die Anfangsphasen β_1 und β_2 sind; dann erhalten wir

$$x = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1\right); \quad y = b \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad \cdot \cdot (54)$$

oder

$$\frac{x}{a} = \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos\beta_1 + \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin\beta_1$$

$$\frac{y}{b} = \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos\beta_2 + \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin\beta_2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{x}{a}\cos\beta_2 - \frac{y}{b}\cos\beta_1 = \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin(\beta_1 - \beta_2)$$

$$\frac{x}{a}\sin\beta_2 - \frac{y}{b}\sin\beta_1 = \sin 2\pi\frac{t}{T}\sin(\beta_2 - \beta_1)$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke, so erhält man

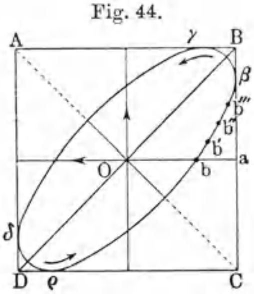
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\,x\,y}{a\,b} \cos(\beta_1 - \beta_2) = \sin^2(\beta_1 - \beta_2).$$

Führt man in diese Gleichung den Phasenunterschied der gegebenen Schwingungen $\beta_1 - \beta_2 = \varphi$ ein, d. h. nimmt man an, daß die Schwingung längs y später beginnt als die längs x, und zwar erst, wenn die letztere bereits die Phase φ erlangt hat, so ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Koordinaten x und y des bewegten Punktes M:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\,x\,y}{a\,b} \cos\varphi = \sin^2\varphi \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Es ist dies für alle Werte von φ die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt sich im Anfangspunkte der Koordinaten befindet. Somit setzen sich zwei aufeinander senkrechte harmonische Schwingungen zu einer Bewegung längs einer Ellipse zusammen, welche innerhalb des Rechtecks $EFHG$ liegt. Die Rechteckseiten stellen dabei Tangenten der Ellipse dar. In Fig. 44 ist diese Bewegung des Punktes auf der Ellipse dargestellt. Zunächst begann die Bewegung von O nach b; dann trat noch eine Aufwärtsbewegung hinzu, wodurch die Bewegung $b\,b'\,b''\,b'''$ usw. längs der Ellipse zustande kam. Wir betrachten jetzt einige Einzelfälle:

Fig. 44.



1. Die Phasendifferenz sei $\varphi = 0$; der Punkt beginnt gleichzeitig eine Bewegung von O nach Q und von O nach D (Fig. 43). Gleichung (55) geht dann über in

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

d. h. $y = \frac{b}{a} x$, was sich auch unmittelbar aus (54) für $\beta_1 = \beta_2$ ergibt. Dies ist die Gleichung einer Geraden, nämlich der Diagonale GF (Fig. 43). Die Bewegung des Punktes auf dieser Geraden ist eine harmonische Schwingungsbewegung, denn sein Abstand vom Mittelpunkt O ist $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setzt man hierin die Ausdrücke (54) ein, so wird für $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right).$$

2. Die Phasendifferenz sei $\varphi = \pi$ (Fig. 43); die Bewegungen von O nach D und von O nach A beginnen gleichzeitig. Gleichung (55)

gibt $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = 0$, d. h. $y = -\frac{b}{a}x$; es ist dies wieder die Gleichung einer Geraden und zwar der Diagonale EH; die Bewegung ist ähnlich wie im vorhergehenden Falle.

3. Die Phasendifferenz sei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$; aus Gleichung (55) erhält man $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Es ist dies die auf die Achsen bezogene Ellipsengleichung.

4. Ein besonders wichtiger Fall tritt ein für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ und $a = b$. Gleichung (55) gibt uns $x^2 + y^2 = a^2$. Es ist dies die Kreisgleichung.

Zwei zueinander senkrechte harmonische Schwingungsbewegungen mit gleichen Amplituden a und Perioden T und mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ setzen sich somit zu einer Kreisbewegung zusammen. Diese ist eine gleichförmige, denn die Projektionen M_1 und M_2 (Fig. 45) des Punktes M auf die Durchmesser

Fig. 45.

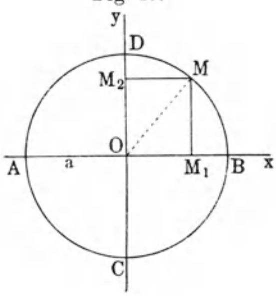
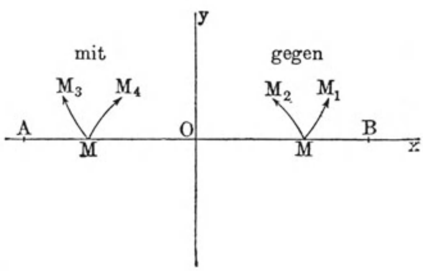


Fig. 46.



AB und CD führen harmonische Schwingungsbewegungen aus (vgl. § 1 und Fig. 36 auf Seite 131). Die Geschwindigkeit k, mit der sich der Punkt bewegt, wird durch die Formel $k = \frac{2\pi a}{T}$ gegeben [vgl. (1) auf Seite 132].

5. Wir gehen jetzt zum allgemeinen Falle über, wo φ willkürlich gewählt ist. Die Richtung, in welcher sich der Punkt auf der Ellipse bewegt (ob mit, ob gegen den Uhrzeiger, wie man es kurz ausdrücken könnte), läßt sich leicht ermitteln.

Zu diesem Zwecke hat man nur zu bestimmen, wo sich Punkt M (Fig. 46) befindet, wenn die zweite seiner Teilbewegungen (in der Richtung der positiven y) beginnt und wohin ungefähr seine weitere Bewegung gerichtet sein wird. Die Bedingung, daß der Ellipsenmittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten zusammenfällt, gibt uns die gesuchte Bewegungsrichtung.

a) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach B; die Bewegung erfolgt nach MM_1, d. h. gegen den Uhrzeiger [1]).

b) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_2, d. h. gegen den Uhrzeiger.

c) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach A; die Bewegung erfolgt nach MM_3, d. h. mit dem Uhrzeiger.

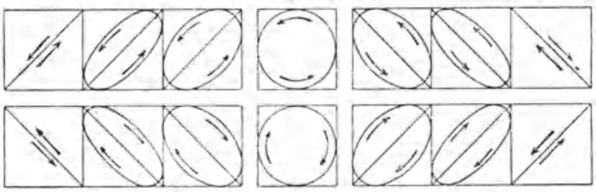
d) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_4, d. h. mit dem Uhrzeiger.

Wir sehen hieraus, daß, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \varphi < \pi \text{ ist, die Bewegung gegen den Uhrzeiger} \\ \pi < \varphi < 2\pi \;\;\text{„} \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{mit dem} \qquad \text{„} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (56)$$

vor sich geht; $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ oder 2π geben geradlinige Bewegungen. In Fig. 47 sind die zwölf verschiedenen Bewegungsfälle

Fig. 47.



dargestellt, entsprechend $a = b$, wo φ innerhalb der Grenze Null und 2π um je $\frac{\pi}{6}$ zunimmt.

6. Für $a = b$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ werden Kreisbewegungen erhalten; sie unterscheiden sich durch ihre Richtung:

---

[1]) Eine drehende Bewegung, welche in der Richtung erfolgt, in welcher sich der Zeiger einer Uhr bewegt, soll im folgenden der Kürze halber als Bewegung „mit dem Uhrzeiger“, die entgegengesetzte als Bewegung „gegen den Uhrzeiger“ bezeichnet werden.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Ist } a = b \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ so erfolgt die Kreisbewegung} \\
\qquad \text{gegen den Uhrzeiger.} \\
\text{Ist } a = b \text{ und } \varphi = \frac{3\pi}{2}, \text{ so erfolgt die Kreisbewegung} \\
\qquad \text{mit dem Uhrzeiger.} \\
\text{Die Phase der Bewegung auf der } x\text{-Achse geht voran.}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (57)$$

Setzt man in (54) $a = b$ und zunächst $\beta_2 = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$, sodann $\beta_2 = \beta_1 - \frac{3\pi}{2}$ und schreibt man β statt β_1, so wird:

$$\begin{array}{c}\text{Ein Kreis,}\\ \text{Bewegungsrichtung}\\ \text{gegen den Uhrzeiger}\end{array} \left\{\begin{array}{l} x = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = -a \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right)\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (58)$$

$$\begin{array}{c}\text{Ein Kreis,}\\ \text{Bewegungsrichtung}\\ \text{mit dem Uhrzeiger}\end{array} \left\{\begin{array}{l} x = a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = a \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right)\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (59)$$

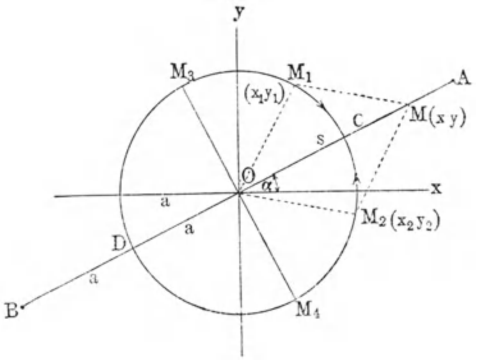
In beiden Fällen ist offenbar $x^2 + y^2 = a^2$, welches die Kreisgleichung ist. Die Formeln (58) und (59) zeigen uns unmittelbar, wie jede gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit k, die auf einem Kreise mit dem Radius a vor sich geht, in zwei harmonische Schwingungsbewegungen, die in beliebigen, zueinander senkrechten Richtungen x und y erfolgen, zerlegt werden kann. Die Periode T bestimmt sich hierbei aus Formel (1), nach welcher $kT = 2\pi a$ ist. Die Phase β kann vollkommen willkürlich gewählt werden.

§ 8. Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen, die mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung auf derselben Kreislinie vor sich gehen. Während der Punkt M_1 (Fig. 48) sich gleichförmig auf einer Kreislinie vom Radius a in der Uhrzeigerrichtung bewegt und einen vollen Umlauf in der Zeit T macht, soll ein zweiter Punkt M_2 sich mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegen. Unsere Aufgabe, beide Kreisbewegungen zusammenzusetzen, kommt dann darauf heraus, die Bewegung eines solchen Punktes M zu bestimmen, dessen Koordinaten x und y gleich der Summe der entsprechenden Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 der

Punkte M_1 und M_2 sind. Der Punkt M muß sich offenbar stets im Endpunkte der Diagonale des Parallelogramms aus OM_1 und OM_2 befinden.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bewegung des Punktes M eine geradlinige sein muß. M_1 und M_2 begegnen sich in zwei Punkten C und D; in den entsprechenden Augenblicken befindet sich M in A bzw. in B, wo $OA = OB = 2a$ ist. Da die Punkte M_1 und M_2 immer in gleichem Abstande von C und D bleiben müssen, so wird die Diagonale, an deren Ende sich Punkt M befinden muß, immer mit OA und OB zusammenfallen. Fallen M_1 und M_2 mit M_3 und M_4 zusammen ($M_3M_4 \perp AB$), so befindet sich M in O. Wie leicht ersichtlich, muß der Punkt M eine harmonische Schwingungsbewegung ausführen, denn sie setzt sich aus zwei offenbar harmonischen Schwingungsbewegungen zusammen; die Koordinaten sind $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$.

Fig. 48.



Wir wollen nun dieselbe Frage analytisch untersuchen; wir bezeichnen zu dem Zwecke mit β_1 und β_2 die Anfangsphasen der Schwingungsbewegungen x_1 und x_2 längs der Achse Ox, welche kombiniert mit den Schwingungen y_1 und y_2 (die von ihnen um $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ abstehen) die kreisförmigen Bewegungen mit (M_1) und gegen (M_2) den Uhrzeiger geben [vgl. (57)]. Die Formeln (58) und (59) liefern

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \\ y_1 = a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \end{array}\right\} \text{mit dem Uhrzeiger.} \\ \left.\begin{array}{r} x_2 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \\ y_2 = -a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \end{array}\right\} \text{gegen den Uhrzeiger} \end{array}\right\} \quad \dots \quad (59, a)$$

Der Kürze halber setzen wir

$$2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 = \Theta_1 \quad \text{und} \quad 2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 = \Theta_2,$$

dann wird, da $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin \Theta_1 + a \sin \Theta_2 = 2 a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \\ y &= a \cos \Theta_1 - a \cos \Theta_2 = 2 a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (60)$$

Dividiert man die untere Gleichung durch die obere, so findet man $y = x \, tg \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}$ oder

$$y = x \, tg \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (61)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Bezeichnet man den veränderlichen Abstand OM mit $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist nach Formel (60) $s = 2 a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2}$, d. h.

$$s = 2 a \sin \left(2 \pi \frac{t}{T} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{2} \right) \quad \ldots \ldots (62)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Bewegung des Punktes M eine harmonische Schwingungsbewegung ist. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der x-Achse mit $\alpha = \angle AOx$, so wird $y = x \, tg \, \alpha$, folglich [vgl. (61)]

$$\alpha = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (63)$$

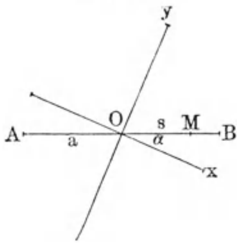
Zwei entgegengesetzte Bewegungen auf ein und demselben Kreis, die mit der gleichen Periode T vor sich gehen und deren Komponenten auf der x-Achse Schwingungen mit den Anfangsphasen β_1 (mit) und β_2 (gegen den Uhrzeiger) sind, setzen sich zu einer harmonischen Schwingungsbewegung zusammen. Die Amplitude dieser letzteren ist $2a$, wo a der Radius des Kreises ist; ihre Periode ist T, die Anfangsphase β hat den Wert $\frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$ und die Richtung dieser Schwingungsbewegung bildet mit der x-Achse einen Winkel $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$.

§ 9. Zerlegung einer geradlinigen harmonischen Schwingungsbewegung in zwei Kreisbewegungen. Schwingt der Punkt M harmonisch zwischen den Punkten A und B (Fig. 49), so ist seine Entfernung $s = OM$ gleich

$$s = a \sin \left(2 \pi \frac{t}{T} + \beta \right) = a \sin \Theta \quad \ldots \ldots (64)$$

wo Θ nur der Kürze halber angeführt ist. Nach dem Vorhergehenden müssen die beiden gesuchten Bewegungen auf einem Kreise vom Radius

Fig. 49.



$r = \frac{a}{2}$ vor sich gehen. Jede dieser Kreisbewegungen kann in zwei zueinander senkrechte Schwingungen längs zweier Achsen zerlegt werden, von denen die x-Achse einen ganz beliebigen Winkel $\angle BOx = \alpha$ mit der Richtung der gegebenen Bewegung bilden kann. Auf diese Weise erhält man vier Schwingungen x_1, y_1, x_2 und y_2, für welche die Ausdrücke (59, a) gelten, nur daß man für a den Wert $\frac{a}{2}$ zu setzen hat.

Ist $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ und $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$, so ist $\beta_1 = \beta - \alpha$; $\beta_2 = \beta + \alpha$.

Setzt man diese Ausdrücke in (59, a) ein, so erhält man folgendes Endergebnis:

Eine harmonische Schwingungsbewegung $s = a \sin \Theta$ kann in zwei Kreisschwingungen zerlegt werden.

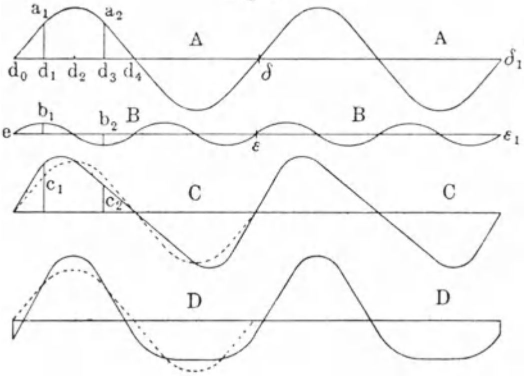
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Mit dem Uhrzeiger} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{2} \sin(\Theta - \alpha) \\ y_1 = \frac{a}{2} \cos(\Theta - \alpha) \end{array} \right. & \text{Gegen den Uhrzeiger} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{2} \sin(\Theta + \alpha) \\ y_2 = -\frac{a}{2} \cos(\Theta + \alpha) \end{array} \right. \end{array}\right\} \quad (65)$$

Hier ist α der Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der x-Achse bildet; man kann ihn ganz willkürlich wählen, z. B. $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi : 4$ setzen.

§ 10. Zusammensetzung harmonischer Schwingungsbewegungen von ungleicher Periode T und $T_1 = kT$, wo k ein Zahlenkoeffizient ist.

A. Die Schwingungen haben gleiche Richtung. Am bequemsten ist es, die Zusammensetzung zweier harmonischer Schwingungsbewegungen von ungleicher Amplitude a und b und ungleicher Periode T und kT geometrisch auszuführen (nach der im § 4 beschriebenen Methode). Wir zeichnen demgemäß zwei Kurven, welche den gegebenen Schwingungen entsprechen und konstruieren eine dritte Kurve, so daß ihre Ordinaten gleich der Summe der Ordinaten beider erster Kurven für dieselben Abszissen (Zeiten) werden. In Fig. 50 ist b klein gegen a und $k = \frac{1}{2}$; A und B stellen die einzelnen Bewegungen, C die resultierende Bewegung dar. Die Kurve A ist punktiert angedeutet, damit man beim Vergleich erkennen kann, wie sich C verändert hat. Die resultierende Schwingung ist keine harmonische mehr; die ungleiche Neigung der Kurventeile zeigt, daß der Punkt nach einer Seite schneller schwingt als nach der anderen. In der Kurve D ist die Kurve B um so viel nach rechts gerückt, daß e unter d_1 zu liegen

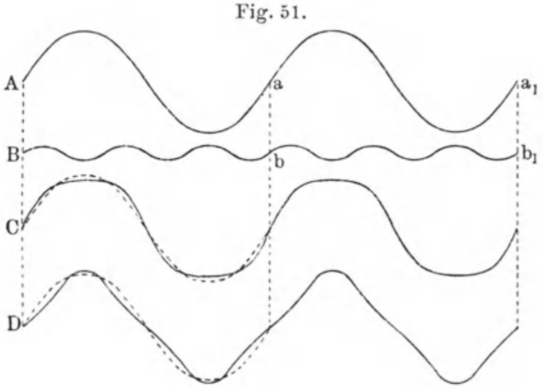
Fig. 50.



kommt; hier fällt also die Nullphase der Schwingung A nicht mit der Nullphase der Schwingung B zusammen.

In Fig. 51 ist b klein gegen a und $k = \frac{1}{3}$. Man erhält hier die periodische (jedoch unharmonische) Schwingung C. Wenn die Phase

Fig. 51.



Null der Schwingung A mit der Phase π der Schwingung B zusammenfällt, so resultiert die Kurve D.

Viel verwickeltere Schwingungen erhält man, wenn b nicht klein gegen a ist. In Fig. 52 sind drei derartige Fälle dargestellt, wobei stets $k = \frac{1}{2}$ gewählt ist, so daß also eine der Schwingungen doppelt so schnell vor sich geht als die andere. Die gegebenen Schwingungen sind punktiert gezeichnet. Man kann hierbei deutlich den Einfluß des Amplitudenverhältnisses erkennen. Die erste Kurve wird erhalten, wenn $b = 2a$, die zweite, wenn $b = a$ und die dritte, wenn $b = a:2$ ist.

Fig. 52.

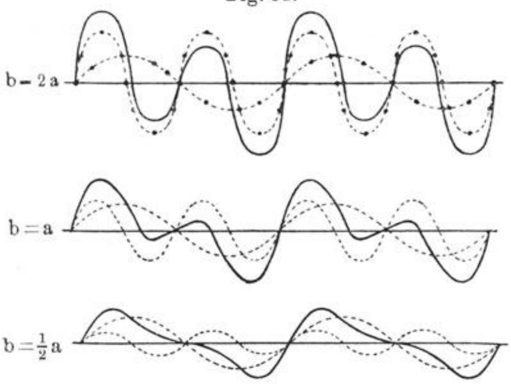
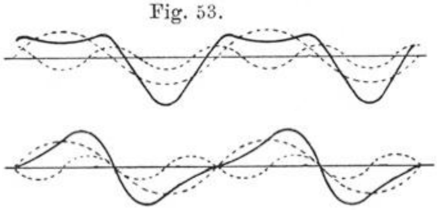


Fig. 53.



In allen drei Fällen sind die Phasen der beiden Schwingungen gleichzeitig Null. Aus den Kurven in Fig. 53 erkennt man den Einfluß der Phase φ; in beiden Fällen ist $b = a:2$. Die erste Kurve wird erhalten, wenn $\varphi = \pi:2$, die zweite, wenn $\varphi = \pi$ ist. In den ersten beiden Kurven der Fig. 52 folgen auf je zwei kleine Ausschläge nach der einen und anderen Seite zwei große Ausschläge. Die dritte Kurve in Fig. 52 und die zweite in Fig. 53 sind einander im wesentlichen gleich.

B. Zueinander senkrechte Schwingungen. Die Gleichungen der beiden Schwingungen sind

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \\ y &= b \sin\left(2\pi\frac{t}{T_1} + \beta_1\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (66)$$

Schafft man aus ihnen die Zeit t heraus, so erhält man die Gleichung der Kurve, auf welcher sich der Punkt bewegt.

Diese Kurve läßt sich folgendermaßen konstruieren. Es sei $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen sind. Wir wählen nun $A'OA$ und $B'OB$ (Fig. 54) als Koordinatenachsen, beschreiben um O Kreise mit $OA = a$ und $OB = b$ als Radien und teilen die Kreisumfänge von A und B anfangend in $4n$ (n ist eine ganze Zahl), z. B. 32 gleiche Teile. Die Teilpunkte des Kreises (OA) verbinden wir durch Sehnen, welche zu OA senkrecht sind, und ebenso die Teilpunkte des Kreises (OB) durch zu OB senkrechte Sehnen. Die Teile, in welche hierbei $A'A$ und $B'B$ zerfallen, entsprechen den Wegstrecken, welche von den Einzelschwingungen x und y für $T = T_1$ in gleichen Zeiten zurückgelegt würden. In Wirklichkeit aber ist

$$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q},$$

folglich legt der Punkt p Streckenteile in der Richtung $B'B$ in derselben Zeit zurück, in welcher er sich um q Streckenteile in der Richtung $A'A$ weiterbewegt; je kleiner die Schwingungsdauer ist, eine um so größere Anzahl von Streckenteilen muß er in einer gegebenen Zeit zurücklegen. Kennt man die Lage des Punktes für einen gegebenen Augenblick, so kann man leicht ermitteln, wo er sich nach gleichen Zeitabschnitten befindet. In Fig. 54 ist der Fall dargestellt, wo $T : T_1 = 2 : 3$ ist; die Anfangslage ist 0 (Null), die folgenden Lagen 1, 2, 3..., 30, 31 und 32 werden erhalten, wenn man jedesmal um drei Teilpunkte parallel zu $A'A$ und um zwei Teilpunkte parallel zu $B'B$ weiter geht. In Fig. 55 sind

Fig. 54.

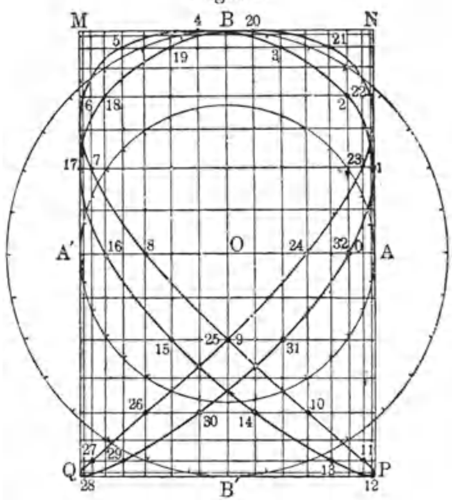
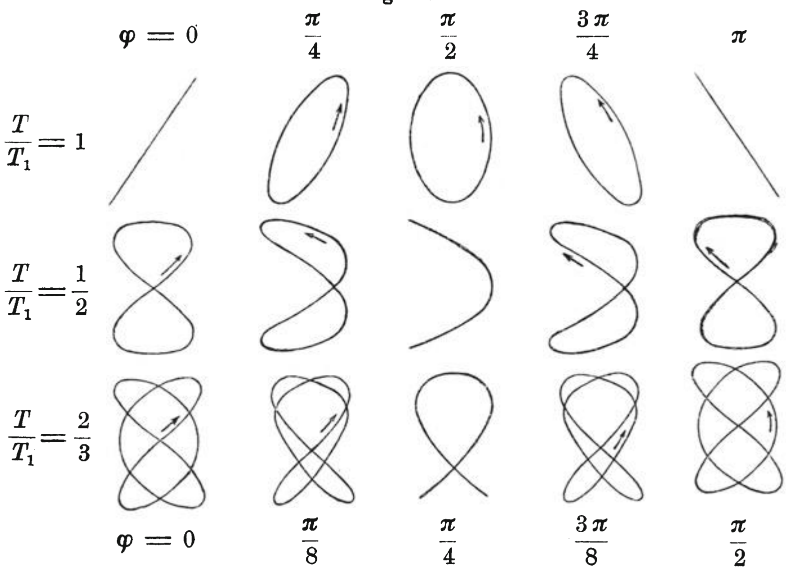


Fig. 55.



die Kurven gezeichnet, welche man für drei verschiedene Werte der Phase φ der ersten Schwingung (der Horizontalschwingung mit der Amplitude a), welche dem Augenblick zugehören, wo die Phase der zweiten Schwingung (der Vertikalschwingung mit der Amplitude b) Null ist. Die oberen Zahlen für φ gelten für die ersten zwei Reihen, die unteren Zahlen für die dritte Reihe. Es läßt sich leicht beweisen, daß die dritte Kurve der zweiten Zeile ein Parabelbogen ist; man hat hierzu in (66) $\beta_1 = 0$, $\beta = \pi : 2$ und $T_1 = 2\,T$ zu setzen. In Fig. 56 verhält sich $T : T_1 = 3 : 4$ für die Werte $\varphi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{12}$ und $\frac{\pi}{3}$.

Fig. 56.

$\varphi = 0 \qquad \frac{\pi}{12} \qquad \frac{\pi}{6} \qquad \frac{3\pi}{12} \qquad \frac{\pi}{3}$

$\frac{T}{T_1} = \frac{3}{4}$

Aus Gründen, die wir in der Akustik kennen lernen werden, nennt man die in Fig. 55 und 56 dargestellten Kurven Lissajoussche Figuren (Lissajous, Ann. de Chim. et Phys. (3) **51**, 147, 1857). Righi hat die Raumkurven untersucht, welche man bei der Zusammensetzung von drei zueinander senkrechten harmonischen Schwingungsbewegungen erhält (Sulla composizione de moti vibratori, Bologna 1873).

§ 11. Gedämpfte Schwingungsbewegungen.

In zahlreichen physikalischen Fragen spielt eine gewisse Art von nichtperiodischen Schwingungsbewegungen, die sogenannten gedämpften Schwingungen, eine wichtige Rolle. Sie werden dargestellt durch die Formel:

$$s = a e^{-pt} \sin qt \quad \dots\dots\dots \quad (67)$$

Hier bedeuten $s = OM$ die Entfernung eines auf einer Geraden sich bewegenden Punktes M von einem feststehenden, ebenfalls auf der Geraden liegenden Punkt O; t ist die Zeit und a eine lineare Größe, $e = 2{,}718281\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen, die wir durch das Symbol lg bezeichnen; p und q sind positive Größen, deren Zahlenwerte von der gewählten Zeiteinheit abhängen. Einen Begriff von der Eigenart der gedämpften Schwingungsbewegung erhält man durch nähere Betrachtung des Ausdruckes (67). Da $\sin qt$ bei wachsendem t immer zwischen -1 und $+1$ liegen muß, so wird s offenbar abwechselnd positiv und negativ werden; folglich ist die Bewegung eine Schwingungsbewegung. Da $p > 0$ ist, so nimmt der Faktor e^{-pt} ununterbrochen ab und (67) stellt deshalb eine Schwingungsbewegung mit unendlich abnehmender Amplitude dar, d. h. eine solche, bei welcher die aufeinanderfolgenden Ausschläge nach rechts und links immer kleiner und kleiner werden. Nach Formel (8) auf Seite 58 erhält man für die Geschwindigkeit v

$$v = a e^{-pt} (q \cos qt - p \sin qt) \quad \ldots \ldots \ (68)$$

Für $t = 0$ ist $s = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = aq$.

Für die Durchgangszeiten $t_1, t_2, t_3 \ldots t_i \ldots$ des Punktes M durch O, wo also $s = 0$ ist, ist $\sin qt_i = 0$, folglich $qt_1 = \pi$, $qt_2 = 2\pi$, $qt_3 = 3\pi$ usw.; der n^{te} Durchgang durch O erfolgt zur Zeit

$$t_n = n \frac{\pi}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \ (69)$$

Hieraus folgt, daß der Punkt M den Punkt O nach gleichen Zeitabständen τ durchschreitet; es ist

$$\tau = \frac{\pi}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \ (70)$$

In den Zeitaugenblicken $T_1, T_2, T_3, \ldots T_i, \ldots$, wo der Punkt stille steht, wo also die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, ist nach (68)

$$q \cos q T_i - p \sin q T_i = 0 \quad \text{oder} \quad tg\, q T_i = \frac{q}{p}.$$

Setzt man fest, daß $arc\,tg \frac{q}{p}$ den kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Tangente gleich $\frac{q}{p}$ ist, so erhält man $q T_1 = arc\,tg \frac{q}{p}$; $q T_2 = arc\,tg \frac{q}{p} + \pi$; $q T_3 = arc\,tg \frac{q}{p} + 2\pi$ und allgemein $q T_i = arc\,tg \frac{q}{p} + (i-1)\pi$. Der Augenblick T_n, wo Punkt M zum n^{ten} Male zur Ruhe kommt, wird durch die Formel

$$T_n = \frac{1}{q} arc\,tg \frac{q}{p} + (n-1) \frac{\pi}{q} \quad \ldots \ldots \ (71)$$

gegeben. Hieraus folgt, daß der Punkt M nach gleichen Zeitintervallen

$$\tau' = \frac{\pi}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \ (72)$$

zum Stillstand gelangt. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (70), so sieht man, daß die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch O gleich der ist, welche von einem Stillstande bis zum folgenden verfließt. Die Ausdrücke (69) und (71) zeigen uns jedoch, daß die Augenblicke der Umkehr ($v = 0$) nicht genau in der Mitte zwischen den Augenblicken des Durchganges von M durch O liegen ($s = 0$).

Für die aufeinanderfolgenden maximalen Ausschläge oder Amplituden s_1, s_2, $s_3 \ldots s_i \ldots$, d. h. die Entfernungen OM in den Augenblicken T der Ruhe, gibt Formel (67)

$$s_i = a e^{-pT} \sin q T \quad \ldots \ldots \ldots (73)$$

Es war jedoch $tg\, q\, T_i = \frac{q}{p}$, folglich $\sin q\, T_i = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Beachtet man, daß die Vorzeichen abwechseln, wenn qT um π wächst und benutzt man die Formel (71), so ergibt sich für die n^{te} Amplitude der folgende, recht verwickelte Ausdruck

$$s_n = (-1)^{n-1} \frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}} e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{p} - (n-1)\pi \frac{p}{q}} \quad \ldots (74)$$

Läßt man das Vorzeichen fort und berücksichtigt somit nur die absoluten Werte der Amplituden, so erhält man

$$s_n = s_{n-1} e^{-\pi \frac{p}{q}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (75)$$

Somit wird jede Amplitude aus der vorhergehenden durch Multiplikation der letzteren mit ein und demselben konstanten Faktor erhalten. Die einander folgenden Amplituden stellen also eine abnehmende unendliche geometrische Reihe dar; eine gedämpfte Schwingung hört also im theoretischen Sinne niemals auf.

Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Ausschläge heißt das logarithmische Dekrement der Schwingungsbewegung; bezeichnet man es mit λ, so folgt aus (75)

$$\lambda = lg \frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{\pi p}{q} \quad \ldots \ldots \ldots (76)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Durchgangsgeschwindigkeiten v_i des Punktes M durch O durch genau die gleiche geometrische Reihe dargestellt werden, wie die Ausschläge s_i, vgl. (68) und (70).

Die allgemeine Formel (27) auf Seite 65 gibt als Beschleunigung w des Punktes M

$$w = a e^{-pt} [(p^2 - q^2) \sin qt - 2pq \cos qt].$$

Diesen Ausdruck kann man folgendermaßen umformen

$$w = -(p^2 + q^2) a e^{-pt} \sin qt - 2pa e^{-pt} (q \cos qt - p \sin qt).$$

Vergleicht man dies mit (67) und (68), so erhält man

$$w = -(p^2 + q^2) s - 2pv \quad \ldots \ldots \ldots (77)$$

Ist m die Masse des Punktes M, so ist die Kraft f, unter deren Einfluß sich dieser Punkt befindet

$$f = -m(p^2 + q^2) s - 2mpv \quad \ldots \ldots (78)$$

Diese Formel lehrt uns das Folgende: Der Punkt M führt eine gedämpfte Schwingungsbewegung aus, wenn auf ihn die Resultante zweier Kräfte wirkt, von welchen die eine nach dem Punkte O hin gerichtet und dem Abstande s des Punktes M von O proportional ist, während die andere eine Richtung hat, welche derjenigen der Geschwindigkeit v des Punktes M, d. h. seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt und der Größe nach proportional dieser Geschwindigkeit ist. Fehlt diese zweite Kraft ($p = 0$), welche der Bewegung ununterbrochen entgegenwirkt, so erhält man eine harmonische Schwingungsbewegung. Die Dämpfung, die von der Geschwindigkeit der Bewegung selbst abhängt, ruft das allmähliche Abklingen der Schwingungen hervor. In der Folge werden wir mehrere Fälle kennen lernen, wo derartige, die Bewegung hemmende Kräfte auftreten (z. B. der Luftwiderstand).

Fünftes Kapitel.

Strahlende Ausbreitung von Schwingungen.

§ 1. Das Zustandekommen von Strahlungen. Ein isotropes Medium nannten wir einen Stoff, der einen Teil des Raumes erfüllt und nach allen Richtungen hin die gleichen Eigenschaften hat. Wir können uns vorstellen, daß dieser Stoff aus einer sehr großen Zahl kleiner Teilchen, oder wie wir es auszudrücken pflegen, aus materiellen Punkten besteht. Jedem dieser Teilchen entspricht ein bestimmter Punkt im Raume, der von ihm eingenommen wird, wenn es sich in Ruhe befindet, d. h. wenn alle auf dasselbe wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Es tritt nun häufig der Fall ein, daß die Teilchen sich derart gegenseitig beeinflussen, daß, sobald nur ein Teilchen A aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, die auf die Nachbarteilchen wirkenden Kräfte sich nicht mehr das Gleichgewicht halten. Infolgedessen geraten auch diese Teilchen in Bewegung, indem sie sich nach der Seite verschieben, nach welcher sich das erste bewegt hatte. Die weitere Folge ist, daß die Nachbarteilchen der eben betrachteten, darauf Teilchen, die noch weiter vom ersten abstehen usf., sich zu verschieben beginnen. Der Bewegungszustand breitet sich somit durch das Medium von Punkt zu Punkt derart aus, daß immer entferntere Teilchen mitgerissen werden. Setzen wir voraus, das Teilchen A beginne jetzt eine harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude a und der Periode T und diese Bewegung pflanze sich von Teilchen zu Teilchen immer weiter im gegebenen Medium derart fort, daß die Art der Bewegung für alle gleich ist, so werden die Teilchen, welche auf einer gewissen Geraden sich befinden, nacheinander ihre harmonischen Schwingungsbewegungen beginnen. Eine Bewegung, die sich einer solchen Reihe von Teilchen entlang fortpflanzt, wollen wir Strahlung, die Gerade, längs welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zeitweilig und unter Vorbehalt einen Strahl nennen.

Zu graphischen Zwecken kann man einen Strahl geometrisch durch eine gerade Linie darstellen. Der Ausdruck „Strahl" wird auch gebraucht, wenn die sich ausbreitende Bewegung keine harmonische Schwingungsbewegung ist, sondern eine viel verwickeltere, z. B. eine gedämpfte Schwingung oder eine andere aperiodische Bewegung. Die strahlenförmige Übertragung von Bewegungen spielt eine überaus wichtige Rolle in den verschiedenartigsten Erscheinungen; hierher gehören: die Ausbreitung der Wellen an Flüssigkeitsoberflächen, die Ausbreitung transversaler Erschütterungen an Fäden und Saiten, die Ausbreitung des Schalles in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, die Ausbreitung des Lichtes und endlich die Ausbreitung einer gewissen Art von Bewegungen im Äther, die wegen ihrer Art und gewisser äußerer Kennzeichen zu den elektrischen Erscheinungen gerechnet werden.

Wir wollen uns vorläufig darauf beschränken, die Ausbreitung harmonischer Schwingungsbewegungen im isotropen Medium zu betrachten. Die Entfernung, auf welche hin sich der Bewegungszustand in der Zeiteinheit überträgt, dient als Maß der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen oder der Strahlung (Geschwindigkeit des Schalles, des Lichtes); wir wollen sie mit v bezeichnen. Was wir hier Geschwindigkeit nennen, stellt für das isotrope Medium einen Vektor dar, der für alle Punkte des Mediums und in allen Richtungen der gleiche ist; diese Geschwindigkeit darf nicht verwechselt werden mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen selbst bei ihren Schwingungen. Letztere ändert sich im Laufe der Zeit ununterbrochen für jedes einzelne Teilchen und in jedem gegebenen Augenblick und ist für die verschiedenen längs demselben Strahle befindlichen Teilchen im allgemeinen verschieden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v hängt von den Eigenschaften des Mediums selbst ab; in verschiedenen Medien ist sie im allgemeinen verschieden. Man hat zwei Arten von strahlender Ausbreitung der Schwingungen zu unterscheiden. Bei der ersten ist die Richtung der Schwingungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, d. h. zur Richtung des Strahles; diese heißen transversale (Querschwingungen). Im zweiten Falle fällt die Richtung der Schwingungen mit der Richtung der Strahlen zusammen; solche Schwingungen werden longitudinale (Längsschwingungen) genannt.

§ 2. Bildung von Strahlen mit Querschwingungen. AB (Fig. 57) sei eine Gerade, längs welcher anfangs Teilchen lagen und längs deren sich eine Schwingungsbewegung fortpflanzt. Zuerst begann das Teilchen A sich zu bewegen, ein wenig später das rechte Nachbarteilchen usf. In Fig. 57 ist die Anordnung der Teilchen zur Zeit $t = T:4$ dargestellt, wobei die Zeit vom Beginn der Schwingung des ersten Teilchens A an gerechnet ist. Zur Zeit $t = T:4$ hat das Teilchen A seine Grenzlage erreicht; die folgenden Teilchen sind, da sie ihre Bewegungen später begannen, hinter A zurückgeblieben; die Pfeile an ihnen zeigen die Richtung ihrer Bewegungen. Alle rechts von B liegenden Teilchen befinden sich noch in Ruhe.

Fig. 57.

In Fig. 58 ist die Anordnung der Teilchen und ihre Bewegungsrichtung zur Zeit $t = T:2$ dargestellt. Hier hat A eine halbe, B eine Viertelschwingung vollendet und die Schwingungsbewegung hat sich

Fig. 58.

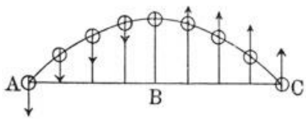
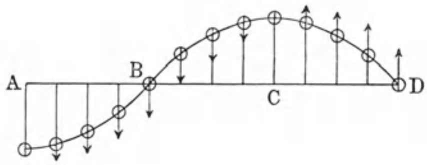
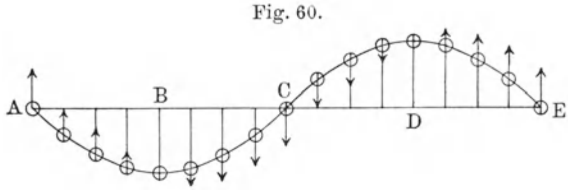


Fig. 59.



bis nach C ausgebreitet. In Fig. 59 sind die Anordnung der Teilchen und ihre Bewegungsrichtungen zur Zeit $t = \frac{3}{4}T$ angegeben, wo A die äußerste negative Entfernung erreicht, B eine halbe, C eine Viertelschwingung vollendet hat und D eben im Begriffe steht, seine Bewegung zu beginnen. Endlich ist in Fig. 60 ebendasselbe nach Verlauf der

Fig. 60.

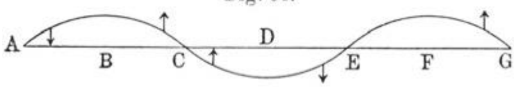


Zeit T dargestellt, gerechnet vom Augenblick an, wo sich A zu bewegen begann. A hat eine volle Schwingung vollendet und schickt sich eben an, die zweite zu beginnen, C hat eine halbe Schwingung vollendet; die Bewegung selbst hat sich bis zum Teilchen E fortgepflanzt, welches eben zu schwingen beginnt. Wir sehen, daß A und E ihre Gleichgewichtslagen gleichzeitig verlassen und daß ihre Geschwindigkeiten gleichgerichtet sind. Offenbar werden ihre Bewegungen auch weiterhin vollkommen identisch bleiben, und sie werden sich beständig in gleichen Schwingungsphasen befinden. Die Entfernung AE heißt **Wellenlänge**; man pflegt sie mit λ zu bezeichnen.

Wellenlänge (λ) heißt die Entfernung je eines Punktes eines Strahles von dem ihm nächsten, der mit ihm die gleiche Phase hat; der eine dieser Punkte hat im Vergleich zum anderen eine volle Schwingung mehr ausgeführt. In der Zeit T hat sich die Schwingung von A bis nach E fortgepflanzt, daraus ergibt sich auch noch folgende Definition:

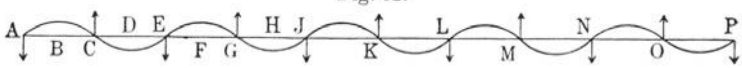
Wellenlänge (λ) heißt die Strecke, längs welcher sich die Schwingungsbewegung in der Zeit T, innerhalb deren ein Teilchen eine volle Schwingung vollendet, fortpflanzt. Es ist nun leicht zu verstehen, wie die Ausbreitung der Schwingungen und die Bewegung der einzelnen Teilchen im weiteren für $t > T$ vor sich

Fig. 61.



gehen. So zeigt z. B. die Wellenlinie in Fig. 61 die Anordnung der Teilchen zur Zeit $t = \frac{3}{2}\,T$ und in Fig. 62 ist ein Teil des Strahles für den Augenblick dargestellt, wo das Teilchen A schon $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ Schwingungen vollendet hat (n ist eine ganze Zahl). Setzt man $AE = EJ = JL = LN = NP = \lambda$, so zeigt sich, daß je zwei Teilchen,

Fig. 62.



die voneinander um eine ganze Anzahl Wellenlängen oder um eine gerade Zahl halber Wellenlängen $\left(2n\frac{\lambda}{2}\right)$ entfernt sind, sich in gleichen Phasen befinden, z. B. E und L, J und P. Man kann von jedem beliebigen Teilchen X des Strahles nach der einen oder anderen Seite gehen, jedesmal trifft man nach einer geraden Zahl halber Wellen auf ein Teilchen Y, das sich in derselben Phase wie X befindet.

Umgekehrt befinden sich zwei Teilchen, die voneinander um $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, d. h. um eine ungerade Zahl halber Wellenlängen entfernt sind, in entgegengesetzten Phasen; ihre Phasen unterscheiden sich um π oder eine ungerade Anzahl von π. Solche Teilchen gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage, ihre Geschwindigkeit ist aber entgegengesetzt. Als Beispiele können gelten A und C in Fig. 58, B und D in Fig. 59, A und G in Fig. 61, A und K $\left(\frac{5}{2}\lambda\right)$, C und P $\left(\frac{9}{2}\lambda\right)$ usw. in Fig. 62.

Die Größen λ, v, T sind miteinander offenbar durch die Formel

$$\lambda = v T \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

verbunden; diese Beziehung drückt aus, daß sich die Bewegung in der Zeit T mit der konstanten Geschwindigkeit v auf die Entfernung λ hin ausbreitet. Formel (1) lehrt uns, daß die Wellenlänge λ um so kleiner ist, je schneller die Schwingungen erfolgen und je langsamer sich die Schwingung ausbreitet; sie hängt also von der Art der Schwingungen und von den Eigenschaften des Mediums ab. Wird mit N die Anzahl der Schwingungen bezeichnet, die von jedem Teilchen in der Zeiteinheit ausgeführt werden, so ist

$$N T = 1 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

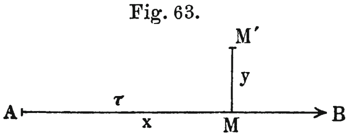
und Formel (1) gibt

$$v = N \lambda \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

In der Zeiteinheit vollführt das erste Teilchen N Schwingungen; in dieser Zeit breitet sich die Schwingung um N Wellen und zu derselben Zeit, nach der Definition, auf die Entfernung v hin aus.

§ 3. Die Strahlgleichung. Vom Punkte A (F. 63) sollen Querschwingungen mit der Amplitude a und der Periode T in der Richtung AB ausgehen, die Wellenlänge sei λ. Wir zählen die Zeit t von dem Augenblicke an, wo Punkt A seine Schwingungen beginnt. Ein gewisses Teilchen M, das sich von A im Abstande $AM = x$ befindet, nehme zur Zeit t eine gewisse Lage M' ein; wir setzen $MM' = y$. Die Größe y ist für ein gegebenes x eine Funktion der Zeit t; für einen gegebenen Wert der Zeit t ist sie für die verschiedenen Punkte verschieden, d. h. sie ist auch eine Funktion von x. Somit ist im allgemeinen $y = f(x, t)$; wir wollen nun diese Funktion aufstellen. Ist τ die Zeit, in welcher sich die Schwingung von A bis M ausgebreitet hat, so hat der Punkt M also um τ später als A zu schwingen begonnen; wenn daher A schon während der Zeit t schwingt, so schwingt M erst während der Zeit $t - \tau$. Auf Grund von Formel (4) auf S. 132 erhält man

Fig. 63.



$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \tau}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T}\right).$$

Die Zeiten τ und T verhalten sich wie die Wege, um welche in diesen Zeiten die Schwingungsbewegung sich ausbreitet, d. h. wie der Weg x zur Wellenlänge λ. Aus der Proportion $\frac{\tau}{T} = \frac{x}{\lambda}$ erhalten wir für y den Ausdruck

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Formel (4) heißt die Strahlgleichung; sie stellt uns die Entfernung y eines beliebigen Strahlpunktes M von seiner Gleichgewichtslage dar als Funktion seines Abstandes x von einem gewissen Anfangspunkte A und der Zeit t, die vom Beginn der Bewegung des Punktes A an gezählt wird. Führt man die Bezeichnungen

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=\Theta;\quad 2\pi\frac{x}{\lambda}=\beta;\quad \frac{x}{\lambda}=m\ldots\quad (5)$$

ein, so läßt sich die Strahlgleichung auch schreiben:

$$y = a\sin\Theta \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (6)$$

$$y = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}-\beta\right)\ldots\ldots\ldots\quad (7)$$

$$y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-m\right)\ldots\ldots\ldots\quad (8)$$

Die Größe $m=\frac{x}{\lambda}$ wollen wir die optische Länge des Strahles nennen; es ist dies eine unbenannte Zahl, welche angibt, wievielmal die Wellenlänge λ in der geometrischen Länge des betrachteten Strahlteiles aufgeht.

In der nachfolgenden Zusammenstellung, die sich uns später als sehr nützlich erweisen wird, sind die zusammengehörigen Wertänderungen der Größen x, β, m, t und Θ und die entsprechenden Änderungen der Strahlgleichung zusammengestellt; offenbar ist $\Delta\beta = -\Delta\Theta$.

Δx	$\Delta\beta$	Δm	Δt	$\Delta\Theta$	Strahlgleichung
0	0	0	0	0	$y = a\sin\Theta$
$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{T}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$y = -a\cos\Theta$
$\frac{\lambda}{2}$	π	$\frac{1}{2}$	$-\frac{T}{2}$	$-\pi$	$y = -a\sin\Theta$
$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3T}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$y = a\cos\Theta$
λ	2π	1	$-T$	-2π	$y = a\sin\Theta$

. . . (9)

Änderungen der Größen x um λ, β um 2π und m um 1 ziehen keine Änderungen des Ausdruckes $y=f(x,t)$ nach sich. Das gleiche bezieht sich auch auf Änderungen der Größen x um $\pm n\lambda$, β um $\pm 2n\pi$ und m um $\pm n$, wo n eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt, daß, wenn man für Δx die Werte $+\frac{\lambda}{2}$ und $-\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{4}$ und $-\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$ und $-\frac{\lambda}{4}$ wählt, sie die Form der Strahlgleichung in derselben Weise verändern.

Aus obigem geht hervor, daß man sich den Anfangspunkt A nach der einen oder anderen Seite um eine ganze Zahl Wellenlängen verschoben denken kann, ohne dadurch die Ausdrücke für y zu ändern. Hieraus ergibt sich dann weiter, daß der Anfangspunkt A immer einem beliebigen Punkte O des Strahles bis auf eine Entfernung genähert werden kann, die kleiner als die Wellenlänge λ und — wenn es gleichgültig ist, auf welcher Seite von O der Punkt A liegen soll — sogar auf eine Entfernung, die kleiner als $\frac{\lambda}{2}$ ist. Der Anfangspunkt A kann auch um eine beliebige Strecke, die keine ganze Zahl Wellenlängen enthält, verschoben werden, unter der Bedingung, daß sich die Größe x in Formel (4) entsprechend ändert oder daß sich im besonderen Falle die Form der Strahlgleichung in der Weise ändert, wie sich dies aus unserer kleinen Tabelle (9) ergibt.

§ 4. Längsschwingungen. Längsschwingungen (longitudinale Schwingungen) nannten wir solche, die in der Richtung, in welcher sich die Schwingungen ausbreiten, d. h. in der Richtung des Strahles, selbst vor sich gehen. Bei Längsschwingungen sind die Teilchen anfangs gleichmäßig auf einer Geraden verteilt und bleiben beständig darauf, es ändert sich nur die Art ihrer Verteilung, welche aufhört, eine gleichförmige zu sein.

Bei Herleitung der Formel (4) auf S. 163 spielt die Richtung der Schwingungen keine Rolle, deshalb bleibt die Gleichung des Strahles (4) auch richtig für Strahlen mit Längsschwingungen.

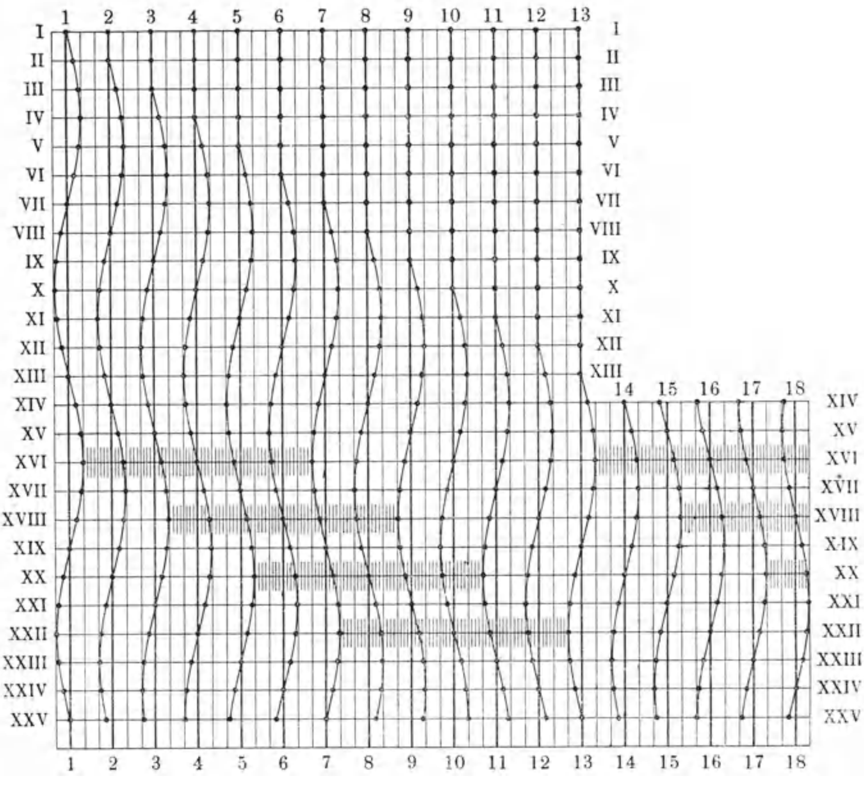
Als wir die Querschwingungen betrachteten, konnten wir für jeden gegebenen Augenblick eine Kurve zeichnen (vgl. Fig. 57 bis 62), welche durch alle schwingenden Teilchen hindurchging und deutlich sowohl das Gesetz ihrer Verteilung, als auch die Entfernung jedes einzelnen von seiner Ruhelage darstellte. Für Längsschwingungen läßt sich nichts Ähnliches machen; die Teilchen bleiben auf der Geraden, auf der sie sich zu Anfang befanden.

Prof. Th. Petruschewsky hat eine Zeichnung entworfen, welche deutlich die aufeinanderfolgenden Änderungen in der Anordnung der Teilchen bei Längsschwingungen zeigt; sie ist in Fig. 64 wiedergegeben. Die Teilchen sind durch Punkte bezeichnet. Auf den horizontalen Linien, die mit römischen Ziffern von I bis XIII bezeichnet sind, ist die Anordnung der Teilchen nach gleichen Zeiträumen $T:12$ zu sehen. Jede der senkrechten Geraden, die mit arabischen Ziffern von 1 bis 13 versehen sind, entspricht der Gleichgewichtslage eines der 13 Teilchen.

Zeile I ($t = 0$): Alle Teilchen sind in Ruhe. Zeile II $\left(t = \frac{T}{12}\right)$: Teilchen I hat sich verschoben, alle übrigen sind in Ruhe. Zeile III

$\left(t = \frac{2\,T}{12}\right)$: Teilchen 1 ist weiter nach rechts gerückt, 2 hat seine Bewegung begonnen. Zeile IV $\left(t = \frac{3\,T}{12}\right)$: 1 hat seine größte Entfernung erreicht, 2 ist weiter nach rechts gerückt, 3 hat sich in Bewegung gesetzt. Zeile V $\left(t = \frac{4\,T}{12}\right)$: 1 ist auf dem Rückwege, 2 in der größten Entfernung, 3 ist weitergerückt, 4 hat angefangen sich zu bewegen.

Fig. 64.



Zeile VI $\left(t = \frac{5\,T}{12}\right)$: 3 hat seine Grenzlage erreicht, 5 hat sich ein wenig verschoben. Zeile VII $\left(t = \frac{T}{2}\right)$: 1 hat eine halbe Schwingung vollführt, 4 die Grenzlage erreicht, 7 schickt sich zur Bewegung an. Es ist klar, daß die Entfernung 1 bis 7 gleich einer halben Wellenlänge ist und daß die Teilchen 1 und 7 gleichzeitig, jedoch in entgegengesetzten Richtungen aus ihren Gleichgewichtslagen treten und sich beständig in entgegengesetzten Phasen befinden werden. So haben z. B. in Zeile X die Teilchen 1 und 7 ihre Grenzlagen — das eine links, das andere rechts — erreicht. Zeile XIII entspricht dem Augenblicke $t = T$, wo 1 eine volle Schwingung vollendet hat, 7 eine halbe Schwingung und 13 eben im Begriffe steht, sich zu bewegen. Die Entfernung 1 bis 13 ist gleich einer Wellenlänge; die Teilchen 1 und 13 befinden sich beständig in gleichen, die Teilchen 7 und 13 dagegen dauernd in entgegengesetzten Phasen.

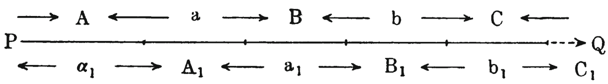
Zeile XIV zeigt die Verteilung der ersten 18 Teilchen zur Zeit $nT + \frac{1}{12}T$, wo n eine ganze Zahl und größer als Eins ist. Für die Teilchen 1 bis 14 kann Zeile XIV als einfache Verlängerung der vorhergehenden Zeilen betrachtet werden, die Teilchen 15 bis 18 in Zeile XIV bis XXV aber setzen gewissermaßen schon früher begonnene Bewegungen fort.

Punkte, welche voneinander um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt sind, haben eine Phasendifferenz gleich π; sie erreichen gleichzeitig, jedoch von entgegengesetzten Richtungen her, ihre Maximalabstände von der Ruhelage (die gleich der Amplitude a sind). Dasselbe tritt immer wieder ein nach den gleichen Zeiträumen $T:2$, wobei die beiden betrachteten Teilchen sich wechselweise in den Entfernungen $\frac{\lambda}{2} + 2a$ und $\frac{\lambda}{2} - 2a$ befinden, so daß mithin ihr Abstand um $4a$ schwankt. Wenn dieser um $2a$ kleiner als der normale ist, so müssen auch die Abstände der zwischenliegenden Teilchen voneinander kleiner sein als bei ihrer normalen Anordnung (in Zeile 1); d. h. zwischen den beiden betrachteten Teilchen muß sich eine Verdichtung bilden; ist jedoch ihre Entfernung um $2a$ größer als die normale, so entsteht zwischen ihnen eine Verdünnung. Sind A, B und C drei Teilchen, deren Normalabstand $AB = BC = \lambda:2$ beträgt, so muß einer zwischen A und B entstandenen Verdichtung eine Verdünnung zwischen B und C entsprechen. Nach Ablauf der Zeit $T:2$ werden wir umgekehrt eine Verdünnung zwischen A und B und eine Verdichtung zwischen B und C haben. In Fig. 64 haben wir z. B. in Zeile X eine Verdünnung zwischen den Teilchen 1 und 7, welche nach der Zeit $\frac{1}{2}T = \frac{6}{12}T$ in eine Verdichtung übergeht, wie dies aus Zeile XVI ersichtlich ist, in der nebenan zwischen den Teilchen 7 und 13 eine Verdünnung vorhanden ist. Nach abermaligem Verlaufe der Zeit $\frac{T}{2}$ sehen wir in Zeile XXII zwischen 1 und 7 eine Verdünnung, zwischen 7 und 13 eine Verdichtung. In Zeile XVI, XVIII, XX und XXII sind die Verdichtungen durch eine

Reihe paralleler Striche gekennzeichnet. Die Zwischenräume zwischen zwei Verdichtungen entsprechen den Verdünnungen. Aus unserer Figur ist zu ersehen, wie die Verdichtungen und Verdünnungen sich nach derselben Seite verschieben, nach, welcher sich die Schwingungen ausbreiten, und diese Verschiebung geht offenbar mit derselben Geschwindigkeit vor sich, mit welcher sich die Schwingungsbewegung selbst fortpflanzt. Ferner ergibt sich aus der Betrachtung unserer Figur folgender Satz: Die Wellenlänge λ ist gleich dem Abstande der Mittelpunkte zweier benachbarter Verdichtungen oder Verdünnungen.

In Fig. 65 stellen die (nicht mit Buchstaben bezeichneten) Punkte auf der Geraden PQ solche Teilchen dar, die voneinander um die gleiche Strecke $\lambda:2$ entfernt sind. Die Schwingungsbewegung pflanzt sich von P nach Q fort. In einem gewissen Augenblicke haben die Bewegungen jener Teilchen die Richtungen, welche von den oberhalb

Fig. 65.

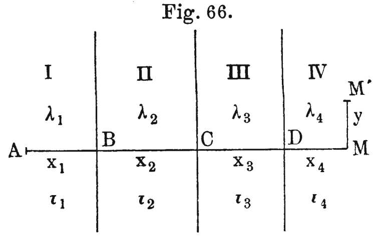


PQ befindlichen Pfeilen angegeben werden. In A, B, C ... sind Verdichtungen, in a, b ... Verdünnungen vorhanden. Nach einer Zeit $T:2$ bewegen sich die Teilchen in entgegengesetzten Richtungen, gekennzeichnet durch die Pfeile unterhalb PQ; jetzt sind die Verdichtungen A, B und C nach A_1, B_1 und C_1 gelangt; die Verdünnungen a und b nach a_1 und b_1, und in α_1 hat sich eine neue Verdünnung gebildet oder ist dorthin von links gelangt, falls P nicht der Anfangspunkt des Strahles ist.

§ 5. Gleichung eines Strahles, welcher eine Reihe von Medien durchdrungen hat.

Die Strahlgleichung (4) kann für den Fall verallgemeinert werden, daß der Strahl durch eine Reihe von Medien mit jedesmal verschiedener Geschwindigkeit dringt. Wir wollen voraussetzen, daß hierbei die Periode gleich bleibt; die Wellenlänge wird dann entsprechend Formel (1) in den einzelnen Medien verschieden sein. Um für diesen Fall die Strahlgleichung abzuleiten, nehmen wir an, daß die Schwingung im Punkte A (Fig. 66) begonnen habe und der Reihe nach die Medien I, II, III usw. durchdringe. x_1, x_2, x_3 ... seien die Längen der in diesen Medien befindlichen Teile des Strahles, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ... die Wellenlängen und τ_1, τ_2, τ_3 ... die Zeiten, die zum

Fig. 66.



Durchlaufen der einzelnen Medien erforderlich sind, d. h. um von A nach B, von B nach C, von C nach D usw. zu gelangen. Auch hier gilt die Proportion $\frac{x_i}{\lambda_i} = \frac{\tau_i}{T}$, die wir beim Herleiten der Formel (4) auf S. 163 benutzt haben. Die Zeit werde wie früher von dem Augenblick an gezählt, wo Punkt A seine Schwingungen beginnt. Die Verrückung $y = MM'$ des Teilchens M während der Zeit t wird wie für Querschwingungen, so auch für die Längsschwingungen durch die allgemeine Formel (4) auf S. 132 bestimmt, nur ist statt t zu setzen $t - \Sigma \tau_i$, da ja das Teilchen M seine Schwingungen später als A begonnen hat, und zwar um eine Zeit $\Sigma \tau_i$, in welcher sich die Schwingungsbewegung bereits von A nach M ausgebreitet hat. Mithin ist

$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \Sigma \tau_i}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{\tau_i}{T}\right).$$

Mit Hilfe der oben erwähnten Proportion erhalten wir nun die gesuchte verallgemeinerte Strahlgleichung:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{x_i}{\lambda_i}\right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2} - \frac{x_3}{\lambda_3} - \cdots\right) \quad (10)$$

Nennt man die Zahl der Wellen, die im betrachteten Strahlabschnitte (dessen geometrische Länge $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$) sich befinden, die optische Länge des Strahles und bezeichnet sie mit m, so nimmt obige Strahlgleichung (10) die Form

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - m\right) \quad \ldots\ldots\ldots (10, a)$$

an, die mit (8) identisch ist.

Der Gleichung (10) kann man noch eine andere Gestalt geben. λ sei die Wellenlänge und v die Geschwindigkeit in einem bestimmten Medium; es kann dies eines der Medien, welche unser Strahl durchdringt oder irgendein anderes sein. Nach (1) auf S. 163 haben wir $\lambda = vT$, man kann daher (10) auch schreiben:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(vt - \frac{\lambda}{\lambda_1} x_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} x_3 - \cdots\right).$$

Führt man nun die neue Größe

$$x = \sum \frac{\lambda}{\lambda_i} x_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10, b)$$

ein, so erhält man die Strahlgleichung in folgender Form:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \quad \ldots\ldots\ldots (10, c)$$

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß die Amplitude a in allen Punkten des Strahles den gleichen Wert besitzt. Es kommt aber vor, daß die Amplitude mit wachsendem x kleiner wird. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei der Fall, wo die Gleichung des Strahles in der Form

$$y = a e^{-px} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdots \cdots (10,\mathrm{d})$$

wo p eine konstante Größe ist, geschrieben werden kann. Die Gleichung gilt, wenn der Strahl, richtiger seine kinetische Energie, während der Ausbreitung allmählich absorbiert wird.

Einen anderen wichtigen Fall haben wir, wenn die Amplitude zwar in jedem gegebenen Augenblicke in allen Punkten des Strahles gleich groß ist, aber mit wachsender Zeit nach dem Gesetze der gedämpften Schwingungen (Kap. IV, § 11) kleiner wird. Entsprechend (67) S. 156 erhalten wir hierfür die Gleichung eines gedämpften Strahles in der Form

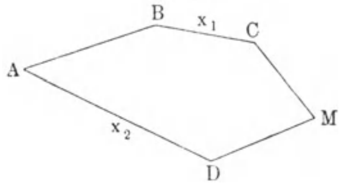
$$y = a e^{-pt} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdots \cdots (10,\mathrm{e})$$

§ 6. Interferenz von Strahlen mit gleichgerichteten Schwingungen. Unter Interferenz im weiteren Sinne des Wortes versteht man eine Erscheinung, welche auftritt, wenn zu einem und demselben Punkte M zwei Schwingungsbewegungen hingelangen oder, mit anderen Worten, wenn durch M zwei Strahlen gehen. Die Perioden der beiden Schwingungen wollen wir als gleich annehmen. Wenn zwei solche Strahlen im Punkte M „interferieren", so bewegt sich ein in M befindliches Teilchen anders, als wenn zu ihm nur der eine oder andere der interferierenden Strahlen gedrungen wäre.

Um die resultierende Bewegung zu finden, gehen wir vom Prinzip der Addition kleinster Verschiebungen aus; danach wird die wahre Entfernung $M_0 M$ des Punktes M von seiner Gleichgewichtslage M_0 im gegebenen Augenblicke nach Größe und Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms bestimmt, welches aus den beiden Verschiebungen $M_0 M_1$ und $M_0 M_2$ konstruiert ist, die der betrachtete Punkt in eben diesem Augenblicke durch die erste und die zweite zu ihm hingelangende Schwingung allein erfahren hätte. Mit anderen Worten, wir finden die gesuchte Bewegung des Punktes M, wenn wir die zu ihm gelangenden Schwingungen in der Weise addieren, wie dies ausführlich in den §§ 4 und 7 des Kap. IV auf S. 138 und 144 auseinandergesetzt worden ist.

Wie wohl bekannt, ändert ein Strahl unter gewissen Bedingungen (Spiegelung, Brechung) seine Richtung, hierbei ändert sich im allgemeinen auch die Amplitude. Ohne auf die Ursache einer solchen Erscheinung näher einzugehen, wollen wir annehmen, daß die von einem gewissen Punkte A (Fig. 67) sich nach zwei verschiedenen Richtungen ausbreitenden Schwingungen zu einem und demselben Punkte M gelangen, wo Interferenz der Strahlen erfolgt. Die Länge des Weges $ABCM$ bezeichnen wir mit x_1, die des Weges ADM mit x_2. Die Differenz

Fig. 67.



$$\delta = x_2 - x_1 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wollen wir den Gangunterschied der interferierenden Strahlen nennen. Die Amplituden seien a und b. Wir machen noch die weitere Annahme, daß die Schwingungen in beiden Strahlen ein und dieselbe Richtung haben. Die Verschiebung y_1 und y_2, welche Punkt M erfahren würde, wenn zu ihm nur der Strahl $ABCM$ oder nur der Strahl ADM gelangen würde, sind durch folgende Gleichungen bestimmt [vgl. (4) auf S. 163]:

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right); \qquad y_2 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (25) und (26) auf S. 138 und bedient sich der Formel (32) auf S. 140, so sieht man, daß die Interferenz der Schwingungen eine harmonische Schwingungsbewegung des Punktes M mit der Amplitude A hervorruft, wo

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

hier bedeutet δ den Gangunterschied der Strahlen.

Folglich stellt die Größe $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ den Phasenunterschied der interferierenden Schwingungen dar und spielt hier dieselbe Rolle wie die Größe β_1 und β_2 in (32) auf S. 140. Die Energie J der Schwingungen des Punktes M wird durch die Energien i_1 und i_2 der Schwingungen jedes der beiden Strahlen nach Formel (33) auf S. 140 ausgedrückt:

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Größe δ hat an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werte; dementsprechend hat auch der Faktor $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ alle nur möglichen zwischen -1 und $+1$ liegenden Werte. In einem Teile des Raumes, dessen Dimensionen gegen die Wellenlänge λ sehr groß sind, treffen wir auf ebensoviel positive wie negative Werte obigen Faktors, deren absoluter Betrag der gleiche ist. Hieraus geht hervor, daß der

Mittelwert J_m für die Energie der Schwingungen in diesem Raumteile gleich ist

$$J_m = i_1 + i_2 \qquad (14)$$

Die mittlere Energie ist gleich der Summe der Einzelenergien der interferierenden Schwingungen. Hierdurch bestätigt sich das Gesetz von der Erhaltung der Energie auch für die Interferenzerscheinungen; es erfolgt hierbei bloß eine Änderung in der Energieverteilung, aber keine Änderung des Gesamtvorrates an Energie.

Haben die Strahlen verschiedene Medien durchlaufen, so hat man ihre Gleichungen in folgender Gestalt zu schreiben:

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - m_1\right); \qquad y_2 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - m_2\right).$$

Es sei $m = m_1 - m_2$ die Differenz der optischen Längen der beiden Strahlen; diese unbenannte Zahl ist gleich der Differenz der Anzahl Wellenlängen, welche in jedem der Strahlen aufgeht. Ferner ist

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2m\pi \qquad (14, a)$$

Sonderfälle:

1. $a = b$; $i_1 = i_2 = i$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2a \cos \pi \frac{\delta}{\lambda} = 2a \cos m\pi \\ J &= 4i \cos^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} = 4i \cos^2 m\pi \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

2. Der Gangunterschied $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$ ist gleich einer geraden Anzahl halber Wellen; $m = n$ (eine ganze Zahl)

$$A = a + b; \qquad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \qquad (16)$$

Ist $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$; $m = n$ und $a = b$, so ist

$$A = 2a; \qquad J = 4i \qquad (17)$$

3. Der Gangunterschied $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ ist gleich einer ungeraden Anzahl halber Wellen; $m = n + \frac{1}{2}$

$$A = a - b; \qquad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \qquad (18)$$

Ist $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$; $m = n + \frac{1}{2}$ und $a = b$, so ist

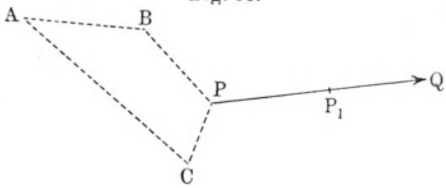
$$A = 0; \qquad J = 0 \qquad (19)$$

Zwei interferierende Strahlen ergeben die größte Amplitude, wenn ihr Gangunterschied δ gleich einer geraden Zahl halber Wellenlängen ist (oder wenn ihr optischer Gangunterschied m eine ganze Zahl ist); sie geben die kleinste Amplitude, wenn δ gleich einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen ist. Zwei interferierende Strahlen „heben sich auf", wenn δ gleich einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen ist, und die Amplituden der Strahlungen gleich sind.

Bei gleichen Amplituden schwankt die Energie zwischen $4\,i$ und 0; ihr mittlerer Wert ist $2\,i$ [vgl. Formel (14)].

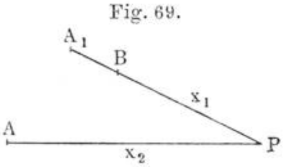
Bisweilen gehen zwei Schwingungen von demselben Punkte A (Fig. 68) aus und gelangen auf verschiedenen Wegen ABP und ACP zu ein und demselben Punkte, um sich sodann in derselben Richtung PQ fortzupflanzen. In diesem Falle hat der Gangunterschied δ für alle Punkte P_1 der Geraden PQ denselben Wert, denn es ist $\delta = ABPP_1 - ACPP_1 = ABP - ACP$. Ist $\delta = 2\,n\frac{\lambda}{2}$, so pflanzt sich längs PQ eine Schwingung mit größter Amplitude und Energie fort. Ist $\delta = (2\,n + 1)\frac{\lambda}{2}$, so haben Amplitude und Energie den kleinsten Wert; sind außerdem die ursprünglichen Amplituden a und b einander gleich, so kommt ein Strahl PQ überhaupt nicht zustande; vgl. (19).

Fig. 68.



Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die beiden sich in einem Punkte treffenden Schwingungen von einem und demselben Punkte A (Fig. 67 und 68) ausgehen. Es kann indes auch vorkommen, daß die interferierenden Schwingungen sich von verschiedenen Punkten A und A_1 (Fig. 69) ausbreiten. Zur Berechnung der Schwingungsamplitude im Punkte P können wir uns der Formel (12) auf S. 171, wo $\delta = x_2 - x_1$ ist, nur dann bedienen, wenn die Punkte A und A_1 sich in gleichen Phasen befinden. Sind die Phasen verschieden, so muß man nach der einen oder anderen Seite eines dieser Punkte, z. B. von A_1, einen solchen Punkt B suchen, der sich mit dem anderen Punkte (hier mit A) in gleicher Phase befindet. Von B aus hat man dann die Entfernung x_1, welche im Ausdruck für den Gangunterschied $\delta = x_2 - x_1$ vorkommt, zu zählen.

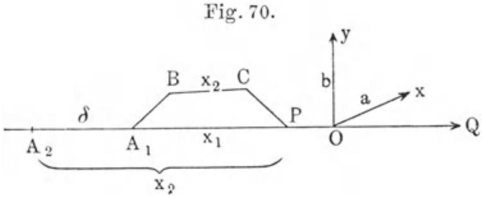
Fig. 69.



Die in diesem Paragraphen betrachtete Erscheinung der Interferenz bezieht sich in gleicher Weise auf Quer- wie auf Längsschwingungen.

§ 7. Interferenz von Strahlen, deren Schwingungen in zueinander senkrechten Ebenen erfolgen. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten nur für Querschwingungen. Längs PQ (Fig. 70) sollen sich zwei Schwingungen mit den Amplituden a und b und der gleichen Periode T fortpflanzen; die erstere erfolge in einer durch PQ und die Achse Ox ($\perp$ zur Zeichnungsebene) gebildeten Ebene, die zweite in einer Ebene, welche durch PQ und die Achse Oy geht. Der Gangunterschied beider Strahlen sei gleich δ, folglich der Phasenunterschied der beiden Schwingungen des ganzen Strahles $\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$. Die Ursache für das Auftreten zweier derartiger Schwingungen kann eine verschiedene sein: entweder es breiten sich von einem Punkte A_1 zwei Schwingungen in verschiedenen Richtungen A_1BCP und A_1P aus (welch letztere Linie übrigens keine Gerade zu sein braucht), die anfangend von P in der gemeinsamen Richtung PQ weitergehen ($\delta = x_2 - x_1 = A_1BCP - A_1P$); oder es pflanzen sich von zwei Punkten A_1 und A_2, die sich in gleicher Phase befinden, zwei Schwingungen in derselben Richtung A_2A_1PQ ($\delta = A_2A_1$) fort; oder endlich es breiten sich von einem Punkte A_1 in derselben Richtung A_1PQ zwei zueinander senkrechte Schwingungen aus, die aus gewissen Ursachen (solche kommen in der Natur tatsächlich vor) auf der Strecke A_1P verschiedene Geschwindigkeiten, folglich auch ungleiche Wellenlängen haben. Infolgedessen werden die Schwingungen im Punkte P bereits eine gewisse Phasendifferenz φ besitzen, welche für alle Punkte der Geraden PQ die gleiche ist, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Schwingungen längs dieser Geraden die gleiche ist.

Fig. 70.



In allen Punkten der Geraden PQ müssen die Teilchen gleichzeitig zwei zueinander senkrechte Schwingungen vollführen, deren Amplituden a und b, deren Phasendifferenz $\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$ ist (falls δ vorhanden). Auf diesen Fall der Addition von Schwingungen bezog sich § 7 des Kapitels IV. Formel (55) auf S. 146 zeigt uns, daß alle Teilchen des Strahles PQ sich in Ellipsen bewegen müssen. Aus Formel (56) auf S. 148 geht hervor, daß, von Q aus gesehen, die Bewegung der Teilchen gegen den Uhrzeiger zu erfolgen scheint, falls

$$0 < \varphi < \pi \quad \text{oder} \quad 0 < \delta < \frac{\lambda}{2} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

mit dem Uhrzeiger, falls

$$\pi < \varphi < 2\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{2} < \delta < \lambda \text{ ist} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Eine Kreisbewegung gegen den Uhrzeiger erhält man für

$$a = b \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{1}{4}\lambda \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Eine Kreisbewegung mit dem Uhrzeiger erfolgt für

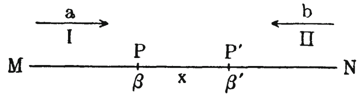
$$a = b \text{ und } \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{3}{4}\lambda \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Wenn $\varphi = n\pi$ oder $\delta = n\frac{\lambda}{2}$ ist, so breitet sich längs PQ eine einfache harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$ aus (vgl. die Sonderfälle 1 und 2 auf S. 146); die positive Schwingungsrichtung bildet mit Ox einen spitzen Winkel, wenn n gerade, einen stumpfen Winkel, wenn n ungerade ist.

Die Teilchen vollführen, wie wir gesehen haben, im allgemeinen Bewegungen in gleichen und gleich gelegenen (denn φ ist überall das gleiche) Ellipsen, deren Ebenen zu PQ senkrecht sind. Hieraus folgt, daß die Teilchen sich auf der Oberfläche eines elliptischen Zylinders, dessen Achse PQ ist, bewegen. Da sie aber allmählich nacheinander in Bewegung geraten, so sind sie offenbar in jedem Augenblicke längs einer gewissen schraubenförmigen Linie angeordnet, die für $a = b$ in eine gewöhnliche Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder übergeht. Von Q aus gesehen, scheint die auf den Beobachter zugehende Schraubenlinie den Zylinder mit oder gegen den Uhrzeiger zu umkreisen, je nachdem sich die Teilchen gegen oder mit dem Uhrzeiger bewegen.

§ 8. Interferenz sich begegnender Schwingungen. Stehende Wellen. Auf einer Geraden MN (Fig. 71) breiten sich zwei harmonische Schwingungsbewegungen von derselben Periode in entgegengesetzten Richtungen ungehindert aus: die Schwingung I von links nach rechts mit der Amplitude a und Schwingung II von rechts nach links mit der Amplitude b. Wir untersuchen nun, was für Bewegungen die auf MN liegenden Punkte ausführen werden. Zu diesem Zwecke wählen wir einen gewissen Punkt P. Haben die beiden ursprünglichen Schwingungen in diesem Punkte einen Phasenunterschied β (Phase II minus Phase I), so wird, wenn man um die Entfernung x in der Richtung nach N bis zum Punkte P geht, der Phasenunterschied β' hier ein anderer sein. Die Phase der Schwingung II ist in P' um $2\pi\frac{x}{\lambda}$ größer als in P, während die Phase der Schwingung I in P' um die-

Fig. 71.

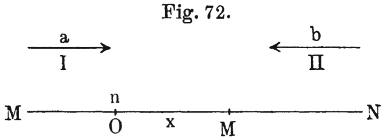


selbe Größe $2\pi\frac{x}{\lambda}$ kleiner als in P ist. Hieraus ergibt sich

$$\beta' - \beta = 4\pi\frac{x}{\lambda} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (24)$$

Der Phasenunterschied zweier Schwingungen ändert sich beim Übergange von einem Punkte zum anderen zweimal schneller als die Phase jeder der beiden Schwingungen. Wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo die Quer- oder Längsschwingungen der Richtung nach zusammenfallen. Der Phasenunterschied β beider Schwingungen ist für jeden gegebenen Punkt konstant, denn die Schwingungen haben die gleiche Periode. Die Punkte auf der Geraden MN vollführen somit harmonische Schwingungsbewegungen mit der Amplitude A, die, für verschiedene Punkte verschieden, sich innerhalb der Grenzen $a - b$ und $a + b$ ändert, vgl. (35) und (37) auf S. 141. Um es uns deutlicher zu machen, wie die Schwingungen längs MN verteilt sind, wählen wir einen solchen Punkt O (Fig. 72), für welchen der Phasenunterschied $\beta = 0$ ist. Hier hat die Schwingung ihre maximale Amplitude $A = a + b$. Im Punkte M, der um x von O absteht, ist der Phasenunterschied $\beta = 4\pi\frac{x}{\lambda}$. Wir haben gesehen (S. 141), daß $A = a + b$ ist, wenn $\beta = 2n\pi$ oder wenn $x = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}$, d. h.

Fig. 72.



$$A = a + b \text{ für } x = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \pm 2\lambda \text{ usw.} \quad . (25)$$

Das Amplitudenminimum $a - b$ gehört zum Phasenunterschied $\beta = (2n + 1)\pi$ oder zu $x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, d. h. es ist

$$A = a - b \text{ für } x = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda \text{ usw.} \quad . . . (26)$$

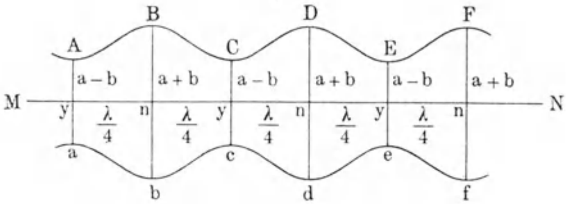
Somit bildet sich längs MN eine Schwingung aus, deren Amplitude periodisch zwischen $a + b$ und $a - b$ schwankt.

Die Punkte mit maximaler Amplitude heißen Bäuche, die mit minimaler Knoten. Die Entfernung zweier benachbarter Bäuche oder zweier benachbarter Knoten ist gleich $\lambda : 2$; die Entfernung eines Bauches von seinem benachbarten Knoten ist gleich $\lambda : 4$. Bauch und Knoten zusammen geben eine sogenannte „stehende Welle“.

Ist $a = b$, so ist die Amplitude an den Bäuchen gleich $2\,a$, die Amplitude an den Knoten gleich Null, d. h. die in den Knoten befindlichen Teilchen sind in vollständiger Ruhe.

Die beiden Linien $ABCDEF$ nnd $abcdef$, Fig. 73, zeigen uns, innerhalb welcher Grenzen die Teilchen ihre Schwingungen vollführen; die Bäuche und Knoten sind mit den Buchstaben n bzw. y bezeichnet.

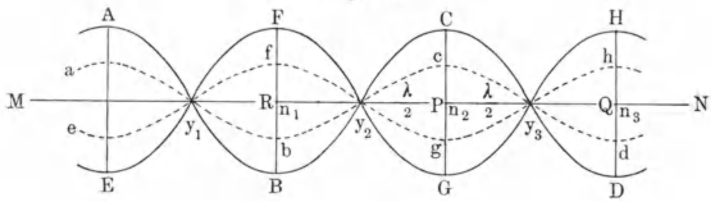
Fig. 73.



In Fig. 74 sind dieselben Grenzen für $a = b$ dargestellt; an den Bäuchen (n_i) ist die Amplitude der Schwingungen gleich $2\,a$, in den Knoten (y_i) sind die Teilchen unbeweglich.

Wir wenden uns nun der wichtigen Frage zu, in welchen Phasen sich für einen gegebenen Augenblick die Teilchen befinden, deren Schwingungen eine stehende Welle bilden; wobei wir uns auf den Fall $a = b$ (Fig. 74) beschränken. Im Schwingungsbauch n_2 ist der Phasenunterschied der gegebenen Schwingungen gleich Null, folglich ist die gesuchte Phase gleich der beiden Schwingungen gemeinsamen Phase.

Fig. 74.



In einem gewissen Augenblick sind diese Phasen gleich Null, d. h. das in der Mitte des Schwingungsbauches gelegene Teilchen P befindet sich auf der Geraden MN. Entfernen wir uns von diesem Bauche um eine beliebige Strecke x, so nimmt, wie wir gesehen haben, die Phase einer der Teilschwingungen um $2\pi\frac{x}{\lambda}$ zu, die Phase der anderen um ebensoviel ab; es entsprechen also den Teilschwingungen gleiche Verschiebungen in entgegengesetzten Richtungen. Hieraus ergibt sich, daß ein in beliebigem Abstande x vom Bauche befindliches Teilchen sich in dem Augenblick, welchen wir in Betracht gezogen haben, ebenfalls auf der Geraden MN befindet.

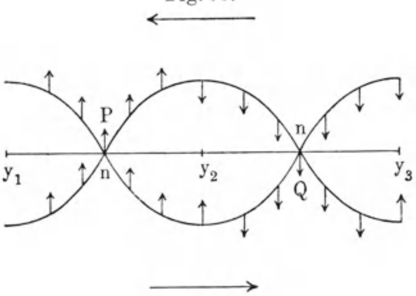
Alle Teilchen gehen gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslagen, sie erreichen daher auch gleichzeitig ihre Maximalabstände von diesen Lagen.

Die Teilchen aber, die zwei benachbarten Bäuchen angehören, befinden sich stets in entgegengesetzten Phasen, denn strebt P von P nach C, weil die gegebenen Schwingungen in diesem Augenblick von P nach C gerichtet sind, so sucht Q im selben Augenblick von Q nach D zu gelangen; da $PQ = \lambda : 2$ ist, so haben die Schwingungen in P und Q entgegengesetzte Phasen, und sind daher die zusammenzusetzenden Bewegungen in Q von Q nach D gerichtet.

Alle Teilchen, die zwischen zwei Knoten liegen, befinden sich in gleichen, die zu beiden Seiten eines Knotens gelegenen Teilchen in entgegengesetzten Phasen.

Fig. 75 möge zur Erläuterung dienen. Hier zeigen uns die beiden Kurven, wie die Teilchen für die gegebenen Schwingungen in dem Augenblick angeordnet sind, wo sich bei der resultierenden Bewegung alle Teilchen in ihren Gleichgewichtslagen befinden. Die Figur zeigt uns, daß alle Teilchen, die sich zur dargestellten Zeit zwischen y_1 und y_2 befinden, sich nach oben bewegen, alle zwischen y_2 und y_3 liegenden dagegen nach unten.

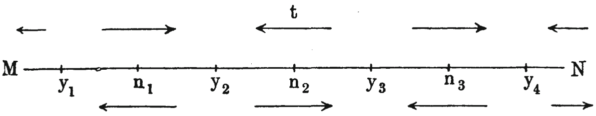
Fig. 75.



In einem gewissen Augenblick sind die Teilchen längs der Kurve $ABCD$ (Fig. 74) angeordnet; nach Ablauf der Zeit $T:2$ ist ihre Anordnung durch die Kurve $EFGH$ bestimmt. Aber der Übergang von der ersten Lage zur zweiten vollzieht sich für die Teilchen durchaus nicht in der Weise, wie bei der Ausbreitung eines Strahles. Dort entfernten sich alle Teilchen um dieselbe Strecke a aus ihrer Gleichgewichtslage und die dazwischen liegenden Anordnungen wurden geometrisch durch seitliche Verschiebungen der Wellenlinie (im ganzen um $\lambda : 2$) erhalten. Hier dagegen geht die Anordnung $ABCD$ zunächst in $abcd$, dann in die geradlinige $MRPQN$, ferner in $efgh$ und endlich in die Anordnung $EFGH$ über. Bei den stehenden Wellen haben wir es nicht mit einer in der Richtung des Strahles fortschreitenden Verschiebung irgendeines Bewegungszustandes zu tun. Bäuche und Knoten verschieben sich nicht; an ersteren geht die lebhafteste Bewegung vor sich, an letzteren herrscht vollkommene Ruhe.

Wir betrachten jetzt noch stehende Wellen bei Längsschwingungen. Auch hier wechseln miteinander Bäuche und Knoten, die voneinander um $\lambda : 4$ entfernt sind. Alle Teilchen, welche sich zwischen zwei benachbarte Knoten y_1 und y_2, y_2 und y_3 usw. (Fig. 76) befinden, haben in einem gegebenen Zeitaugenblick t eine gemeinsame Bewegung; sie ist durch die Pfeile oberhalb MN angedeutet. Am stärksten verschieben sich die in der Mitte der Bäuche liegenden Teilchen.

Fig. 76.



Aus der Zeichnung ist ersichtlich, daß sich um die Knoten y_2 und y_4 Verdichtungen, um die Knoten y_1 und y_3 Verdünnungen bilden müssen. Nach Ablauf der Zeit $T:2$ wird die Richtung dieser Bewegungen durch die unterhalb MN angebrachten Pfeile angedeutet. Alle Teilchen gehen zunächst gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage — in diesem Augenblick ist die Verteilung der Materie im Medium längs MN normal: nirgends sind Verdichtungen oder Verdünnungen vorhanden. Hierauf bilden sich Verdünnungen um die Knoten y_2 und y_4 und Verdichtungen um y_1 und y_3. Die Übertragung einer Verdichtung oder Verdünnung in der Zeit $T:2$ von einem Knoten zum anderen hat nichts mit dem Vorgang der einfachen Ausbreitung von Längsschwingungen, wie sie in Fig. 64, S. 166, dargestellt war, gemein. Dort rückte die Verdichtung allmählich von einem Ort zum anderen; hier dagegen verschwindet sie an einem Ort und tritt an einem anderen auf, ohne an den zwischenliegenden Stellen sich ausgebildet zu haben.

Es läßt sich leicht erkennen, daß an den Bäuchen die Teilchen in lebhafter Bewegung sind, die Dichte des Mediums sich aber hier nicht ändert; an den Knoten dagegen ist das Teilchen in Ruhe, doch treten hier abwechselnd Verdünnungen und Verdichtungen auf. Die Bäuche sind die Stellen mit stärkster Ortsänderung, die Knoten die Stellen mit stärkster Dichteänderung.

Die Eigenschaften der stehenden Wellen lassen sich auch mathematisch erläutern. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $a = b$ ist. In Fig. 72 sind in O die Phasen der sich begegnenden Schwingungen gleich, folglich $A = 2a$. Haben die Gleichungen der beiden Schwingungsbewegungen des Punktes O die Form $y_1 = y_2 = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, so haben wir im Punkte M, für welchen $OM = x$ ist, die beiden Schwingungsgleichungen

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right),$$

hieraus folgt

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \quad \cdot \cdot \cdot \quad (26,a)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung einer stehenden Welle. Die Amplitude ist gleich $A = \pm 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$; hier deutet das doppelte Vorzeichen an, daß man, falls der Kosinus negativ wird, für A das Minuszeichen zu wählen hat, da die Amplitude ihrem Wesen nach eine positive Größe ist. Zugleich hat man aber bei negativem Kosinus das Minuszeichen vor den Sinus zu setzen, indem man statt $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ schreibt $\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi\right)$, d. h. zur Phase den Winkel π hinzufügt, die Phase also durch die entgegengesetzte ersetzt. Gleichung (26, a) zeigt, daß $A = 0$ wird für $x = \pm \frac{2n+1}{4}\lambda$; das sind aber nach (26) die Knoten. Ferner wird $A = 2a$ für $x = \pm\frac{n}{2}\lambda$ und das sind nach (25) die Schwingungsbäuche. Für $t = nT$ haben wir $y = 0$; das zeigt uns, daß alle Punkte gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage gehen. Alle Punkte, für welche die Größe $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ positiv ist, befinden sich in gleicher Phase; alle Punkte, für welche sie negativ ist, in entgegengesetzter. Erstere liegen zwischen $x = -\frac{\lambda}{4}$ und $x = \frac{\lambda}{4}$; $x = \frac{3}{4}\lambda$ und $x = \frac{5}{4}\lambda$; $x = \frac{7}{4}\lambda$ und $x = \frac{9}{4}\lambda$ usw.; ferner zwischen $x = -\frac{3}{4}\lambda$ und $x = -\frac{5}{4}\lambda$; $x = -\frac{7}{4}\lambda$ und $x = -\frac{9}{4}\lambda$ usw. Alles dieses stimmt offenbar genau mit den vorhin erhaltenen Resultaten überein.

§ 9. **Wellenfläche und Wellenlinie; Energie und Amplitude.** Wir haben bisher nur die Fortpflanzung von Schwingungen längs einer gegebenen Geraden betrachtet. Jetzt wollen wir uns die Frage vorlegen, was eintritt, wenn die Schwingungen sich gleichzeitig von einem Punkt O aus nach verschiedenen Richtungen hin ausbreiten. Wir untersuchen diese Frage zunächst rein geometrisch und werden erst später darauf hinweisen, welche Einschränkungen zu machen sind, wenn man zur Betrachtung der physikalisch möglichen Fälle übergeht.

Gegeben sei ein Teilchen O eines isotropen Mediums, das zu schwingen beginnt und dessen Schwingungen sich nach allen Richtungen fortpflanzen. Den geometrischen Ort der Punkte, bis zu welchen sich die Schwingungen in einem gegebenen Augenblick ausgebreitet haben, wollen wir Wellenoberfläche oder einfach Wellenfläche nennen. Da sich in einem isotropen Medium die Schwingungen nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit v ausbreiten, so muß die Wellenfläche in einem isotropen Medium eine Kugelfläche sein. Ihr Radius R ist gleich vt, wenn t die Zeit ist, gerechnet vom Augenblicke, wo das zentrale Teilchen O seine Schwingungen begann. Jede einzelne Schwingung des Mittelpunktes O ruft nach Verlauf einer Zeit t eine Schwingung der Teilchen hervor, die auf der Kugeloberfläche S liegen, nach Verlauf einer Zeit t_1 eine Schwingung der Teilchen auf der Kugelfläche S_1, deren Radius $R_1 = vt_1$ ist. Auf Grund des Prinzips von der Erhaltung der Energie muß die ganze vorhandene Energie zu den Zeiten t und t_1 die gleiche sein, wenn während der Ausbreitung der Schwingungen kein Energieverlust entstanden, d. h. kein Übergang der Energie schwingender Teilchen des Mediums in irgendeine andere Energieform erfolgt ist.

Die Zahl der Teilchen auf einer Wellenfläche und folglich auch ihre gesamte Masse sind den Quadraten der Kugelradien proportional, die Schwingungsenergie der einzelnen Teilchen oder der Komplexe von Teilchen, welche sich auf der Oberflächeneinheit der Kugeln vorfinden, ist den Quadraten der Kugelradien umgekehrt proportional. Hieraus folgt, daß die Amplitude der Schwingungen der ersten Potenz des Radius umgekehrt proportional ist; vgl. Formel (24) auf Seite 137 und das sich daraus Ergebende. Wenn sich von einem Punkte O im isotropen Medium nach allen Seiten hin Schwingungen ausbreiten, so ändert sich ihre Amplitude umgekehrt proportional der ersten, die Energie umgekehrt proportional der zweiten Potenz des Abstandes von O.

Pflanzen sich die Schwingungen vom Punkte O aus nur in einer durch O gehenden Ebene fort, so heißt der geometrische Ort der Punkte, bis zu denen sich die Schwingung in einer gegebenen Zeit ausbreitet, die Wellenlinie. Im isotropen Medium ist die Wellenlinie ein Kreis; und es ist leicht einzusehen, daß, wenn sich die Wellen derartig in einer Ebene ausbreiten, die Energie der Schwingungen umgekehrt proportional der ersten Potenz, die Amplitude aber umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Punkte O ist.

Im anisotropen Medium ist die Wellenfläche keine Kugelfläche; sie kann z. B. die Oberfläche eines Ellipsoids sein.

§ 10. Das Huygenssche Prinzip. Wenn sich von irgendeinem Punkte O aus nach allen Seiten Schwingungen ausbreiten und dabei zu einem anderen Punkte M gelangen, so unterscheiden sich die Schwingungen dieses letzteren nicht wesentlich von denen des ersten Punktes O. Wenn aber die Bewegung des Punktes O nach allen Seiten sich fortpflanzende Schwingungen hervorgerufen hat, so liegt kein Grund vor, weshalb nicht auch die Bewegungen des Punktes M im umgebenden

Medium Schwingungen erzeugen, die sich von ihm wie von einem Mittelpunkte aus nach allen Seiten ausbreiten.

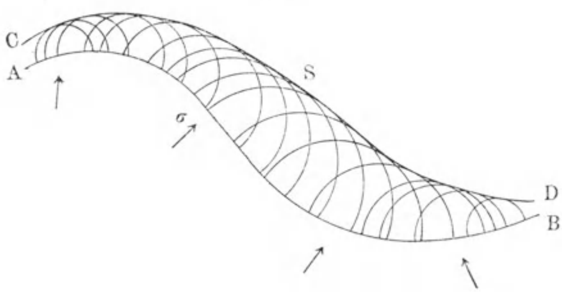
Das ist nun auch in der Tat der Fall, und können wir daraufhin die Wellenfläche S konstruieren, indem wir das Huygenssche Prinzip zu Hilfe nehmen: Nach diesem kann man die Wellenfläche für einen beliebigen Augenblick t erhalten, wenn man die vorhergehenden gleichen oder verschiedenen Zeitmomente t_0 kennt, wo die Punkte einer beliebigen Oberfläche σ zu schwingen angefangen haben. Gehört t_0 zu allen auf σ befindlichen Punkten, so ist σ offenbar die zur Zeit t_0 gehörende Wellenfläche.

Die Huygenssche Konstruktion besteht nun in folgendem: Alle Punkte M der Fläche σ hat man als neue Schwingungsmittelpunkte anzusehen, deren Schwingungen sich von dem Augenblicke t_0 an nach allen Seiten auszubreiten beginnen, wo die entsprechenden Punkte M in Bewegung geraten; man hat sogenannte elementare Wellenflächen (Kugel-, Ellipsoidflächen) um jeden Punkt M herum zu beschreiben und ihnen diejenigen Dimensionen zu erteilen, welche sie in der Zeit $t - t_0$ erlangen. Die Begrenzungsfläche (d. h. gemeinsame Berührungsfläche) aller dieser elementaren Flächen, die nach der Seite von σ liegt, nach welcher sich die Schwingungen ausbreiten, ist die gesuchte Wellenfläche S zur Zeit t.

Das Huygenssche Prinzip werden wir als geometrische Konstruktionsmethode benutzen, ohne Beweise für seine Richtigkeit zu erbringen, was übrigens auf elementarem Wege auch nicht möglich ist.

Zur Erläuterung möge Fig. 77 dienen; AB stellt die Fläche σ dar, bis zu deren Punkten in ungleichen Zeiten t_0 eine einheitliche

Fig. 77.



Schwingungsbewegung in den Pfeilrichtungen gelangt sei. Man macht nun alle Punkte der Oberfläche σ zu neuen Schwingungsmittelpunkten und beschreibt um sie Halbkugeln, deren Radien gleich $v(t - t_0)$ sind. Es möge die Schwingung zuerst die mittleren Teile der Fläche AB

erreichen. Die gemeinsame Berührungsfläche CD aller dieser Halbkugeln stellt die gesuchte Wellenfläche für den Zeitaugenblick dar. Man hat das folgendermaßen zu verstehen: nach jedem Punkte des Raumes hin gelangen Schwingungen von allen Punkten der Fläche σ. Durch Interferenz heben sich diese Schwingungen auf, erstens in allen Raumpunkten „hinter" der Fläche σ (d. h. im Raume, in welchem sich die Pfeile befinden). Die Schwingungsbewegung pflanzt sich nicht nach rückwärts fort; wir können uns daher auf Halbkugeln beschränken. Zweitens heben sich zur Zeit $t - t_0$ alle Schwingungen in den zwischen σ und S gelegenen Punkten auf; im entsprechenden Augenblicke befinden sich nur die auf der Fläche S gelegenen Teilchen in Bewegung.

Wäre das Medium ein anisotropes, so hätte man anstatt der Halbkugelflächen andere elementare Wellenflächen konstruieren müssen, z. B. Halbellipsoidflächen.

Unsere Betrachtung vereinfacht sich, wenn die Fläche σ selbst eine Wellenfläche ist, wenn t_0 allen ihren Punkten gemeinsam ist und die Halbkugeln alle denselben Radius haben. In Fig. 78 ist die Konstruk-

Fig. 78.

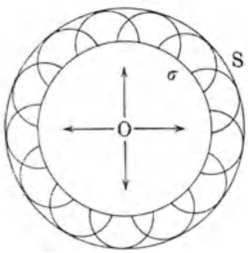
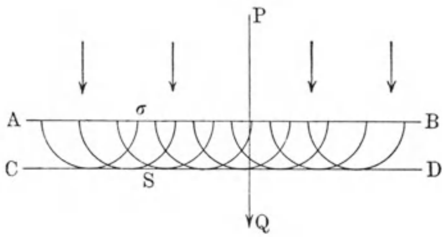


Fig. 79.



tion einer einfachen sphärischen Wellenfläche S mit dem Mittelpunkt O dargestellt, wo die Wellenfläche σ für einen früheren Zeitpunkt gegeben ist.

Befindet sich der Mittelpunkt der Schwingungen in sehr großem Abstande von dem Orte, an welchem wir die Schwingungen untersuchen, so kann ein Teil der sphärischen Wellenfläche als Ebene angesehen werden; wir wollen denselben als ebene Welle bezeichnen (obgleich dieser Ausdruck auch bisweilen für das gebraucht wird, was wir oben auf Seite 181 Wellenlinie nannten). Fig. 79 zeigt die einfache geometrische Konstruktion einer ebenen Welle $CD = S$, wobei ihre Lage $AB = \sigma$ in einer beliebigen vorhergehenden Zeit gegeben ist.

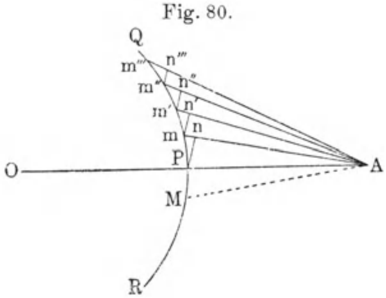
Wir merken uns noch folgenden Satz: Im isotropen Medium stellt der Strahl die Normale zur Wellenfläche dar; in Fig. 79 ist die Wellenfläche eine Ebene und PQ einer der Strahlen.

Das Huygenssche Prinzip gilt ungeändert auch für Wellenlinien. Auf diese können die Figuren 77 bis 79 bezogen werden, wenn man annimmt, daß σ und S nicht Flächen darstellen, sondern Linien, welche in der Ausbreitungsebene der Schwingungen liegen. Anstatt der Halbkugelflächen hat man dann Halbkreise vor sich usw.

§ 11. Die sogenannte geradlinige Ausbreitung der Schwingungen.

Durch Einführung des Begriffes der Wellenfläche, von deren sämtlichen Punkten sich die Schwingungen nach allen Seiten ausbreiten und der fortgesetzten Entstehung neuer Wellenflächen, die nach dem Huygensschen Prinzip konstruiert werden können, wird aus der Zahl der zu betrachtenden Erscheinungen das, was wir Strahl nannten (eine Gerade, längs welcher sich eine Schwingungsbewegung ausbreitet), vollkommen beseitigt. Man hat jetzt nach obigem die Schwingung eines beliebigen Punktes A (Fig. 80) nicht mehr als Folge eines einfachen Fortschreitens der Schwingungen von P nach A zu betrachten, wo P ein Punkt auf der Geraden OA ist, die A mit dem Ausgangspunkte O der Schwingungen verbindet; wir haben vielmehr die Schwingung des Punktes A als das Ergebnis der Interferenzen aller von den sämtlichen Punkten der Wellenfläche QR nach A gelangten Schwingungen anzusehen. Ungeachtet dessen kann man den Strahlbegriff dennoch beibehalten, wenn auch nur als ein überaus nützliches geometrisches Hilfsmittel für den Fall der freien Ausbreitung von Schwingungen im homogenen Medium. Es geschieht dies auf Grund folgender Überlegungen, die zwar keine ganz strenge Kritik vertragen, dennoch aber eine gewisse Anschauung von den hier obwaltenden Verhältnissen geben. Wir ziehen vom Punkte A aus eine Anzahl Geraden Am, Am', Am'' ..., deren Längen zusammen mit AP eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\lambda:2$ bilden, so daß also $Am - AP = Am' - Am = Am'' - Am' = \ldots = \lambda:2$ ist; dreht sich die ganze Figur um die Gerade OA, so entsteht eine Reihe von Kegelflächen, die aus der Wellenfläche QR ringförmige Zonen und eine zentrale Segmenthaube (Kalotte) mM herausschneiden. Bezeichnet man mit r_n die Länge der Seitenlinie des $n$ten Kegels, so daß $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ wird, wo $r_0 = AP$ ist, so sieht man, daß die $n$te Zone von den Kegelflächen eingeschlossen ist, deren Seitenlinien r_n und $r_{n+1} = r_n + \frac{\lambda}{2}$ sind; die nullte Zone bildet die zentrale Segmenthaube. Wir bezeichnen den Flächeninhalt der $n$ten Zone mit S_n. Aus Fig. 81

Fig. 80.



ist ersichtlich, daß $S_n = 2\pi R h$ ist, wo $h = R[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]$ ist; hieraus folgt

$$S_n = 2\pi R^2 \{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Ferner ist nach Fig. 81

$$\left(r_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (R+r_0)^2 + R^2 - 2R(R+r_0)\cos(\alpha+\beta)$$

$$r_n^2 = (R+r_0)^2 + R^2 - 2R(R+r_0)\cos\alpha.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$\lambda\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = 2R(R+r_0)\{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

Dividiert man (a) durch (b), so wird

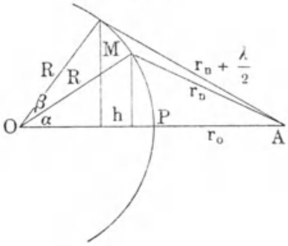
$$S_n = \frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = S_0 + n\frac{\pi R\lambda^2}{2(R+r_0)} \quad \ldots \quad (27)$$

wo $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ gesetzt und mit S_0 der Inhalt der Segmenthaube bezeichnet war, nämlich

$$S_0 = \frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\left(r_0 + \frac{\lambda}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Formel (27) zeigt, daß die Zonenflächen eine arithmetische Reihe bilden, und daß daher jede von ihnen gleich dem arithmetischen Mittel aus zwei benachbarten Zonen ist. Aus diesem Grunde kann man folgende Überlegung anstellen: Zu jedem Punkte M (Fig. 81) kann man zwei solche auf den Nachbarzonen liegende Punkte M_1 und M_2 finden, daß sich AM_2 und AM_1 von AM um $\lambda:2$ unterscheiden. Die Schwingung, welche sich von M nach A ausbreitet, wird daher von einer der Schwingungen, die von M_1 oder M_2 ausgehen, aufgehoben. Alle von der $n$ten Zone ausgehenden Schwingungen kann man sich daher durch die Schwingungen aufgehoben denken, die von der Hälfte der $(n-1)$ten und der Hälfte der $(n+1)$ten Zone ausgehen. So werden z. B. die Schwingungen der dritten Zone vernichtet durch die Schwingungen einer Hälfte der vierten und einer Hälfte der zweiten Zone; die Schwingungen der zweiten durch eine Hälfte der ersten und eine Hälfte der dritten; endlich die Schwingungen der ersten Zone durch eine Hälfte der zweiten Zone und eine Hälfte der Segmenthaube. Es bleiben daher nur die Schwingungen bestehen, welche von einer Hälfte der zentralen Segmenthaube ausgehen. Hierzu

Fig. 81.



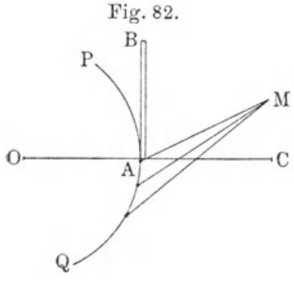
kommt noch, daß die Schwingungen, welche nach A (Fig. 80) von entfernteren Zonen sich ausbreiten, einen längeren Weg zu durchlaufen haben und (was bei einer tiefergehenden Untersuchung besonders wichtig ist) die Fläche QR gegen die Normale geneigt verlassen. Infolgedessen kann man die Schwingungen gänzlich vernachlässigen, welche nach A von Zonen hingelangen, die von der Segmenthaube weiter entfernt sind.

Nachdem wir so gesehen haben, daß die Schwingungsbewegung in A durch das Zusammenwirken aller Schwingungen zustande kommt, die von der Oberfläche der um P gelegenen Segmentfläche $S_0:2$ ausgehen, sind wir damit gewissermaßen zur Vorstellung von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen, also zur Vorstellung von Strahlen zurückgekehrt. Es haben solche Strahlen aber keinerlei reale Bedeutung, sie erweisen sich nur von großem Nutzen bei vielen geometrischen Konstruktionen (siehe Bd. II).

Die vorhergehenden Überlegungen, welche sich auf die Aufhebung der Wirkungen verschiedener Zonen bezogen, gelten offenbar nur dann, wenn die ganze Wellenfläche QR (Fig. 80) wirklich vorhanden ist, also, wenn sich die Schwingungen frei ausbreiten können.

§ 12. Diffraktion. Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, daß nur die Wellenflächen eine reale physikalische Bedeutung besitzen, während man an der Vorstellung von Strahlen nur im Falle einer allseitigen freien Ausbreitung der Schwingungen und auch dort nicht ganz ungezwungen festhalten kann. Ganz besonders gilt dies bei der unfreien Ausbreitung von Wellen, wenn nämlich eine Welle auf ihrem Wege auf irgendein Hindernis trifft, welches die weitere Ausbreitung eines ihrer Teile hemmt. Es tritt dann eine besondere Art von Erscheinungen auf, die man Diffraktion nennt; hierbei ist es ganz unmöglich, an der Vorstellung von Strahlen festzuhalten. Alle auf diese Erscheinungen bezüglichen Einzelheiten sollen erst in der Lehre vom Licht besprochen werden; an dieser Stelle wollen wir nur kurz angeben, was wir unter Diffraktion verstehen. Trifft die Wellenfläche PAQ (Fig. 82) unterwegs auf einen Schirm AB, welcher eine ihrer Hälften AP zurückhält, so wäre, wenn sich die Schwingungsbewegung vom Punkte O aus nach allen Seiten strahlenförmig ausbreitete, OAC der Grenzstrahl; die Schwingungen würden sich dann nur innerhalb des Gebietes CAQ fortpflanzen und im Gebiete CAB müßten die Teilchen in Ruhe bleiben. Etwas ganz anderes erhält man

Fig. 82.



dagegen, wenn man alle Punkte der Oberfläche AQ als neue Schwingungsmittelpunkte auffaßt. In diesem Falle können offenbar auch nach dem im Gebiete BAC gelegenen Punkte M Schwingungen hingelangen. Entsprechende Rechnungen, die indes nicht ganz einfach sind, zeigen, daß diese Schwingungen sich im allgemeinen nicht aufheben, und daß also die von O ausgehende Bewegung teilweise um den Schirm AB gewissermaßen herumbiegt. Zu den Diffraktionserscheinungen gehört nun eben dies Auftreten von Schwingungen im Gebiete BAC.

Einen zweiten hierhergehörigen Fall stellt Fig. 83 dar. Auf dem Wege, welchen die Wellenfläche PQ einschlägt, befinde sich ein kleiner Körper, etwa ein kleines kreisförmiges Scheibchen oder ein schmaler Körper (z. B. ein Draht), dessen Breite AB sei. In den Raum $CABD$ gelangen hier Schwingungen, welche von den Teilen AP und BQ der Wellenfläche ausgehen; diese heben sich speziell im zentral gelegenen Punkte M nicht auf.

Fig. 83.

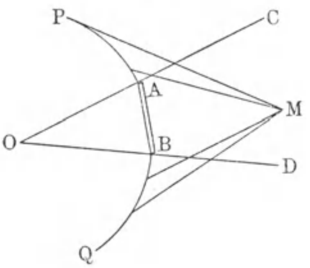
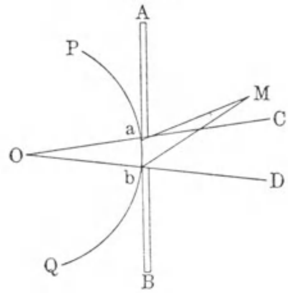


Fig. 84.



Ein dritter Fall von Diffraktion tritt ein, wenn auf dem Wege der Wellenfläche PQ (Fig. 84) sich ein Schirm AB mit sehr kleiner Öffnung ab befindet. Hier würden wir, an einer strahlenförmigen Ausbreitung der Schwingungen festhaltend, zu dem durchaus falschen Resultate gelangen, daß sich die Schwingungen nur innerhalb des Gebietes $CabD$ ausbreiten. In Wirklichkeit aber pflanzen sich die von den verschiedenen Punkten des kleinen Teiles ab der Wellenfläche ausgehenden Schwingungen nach allen Seiten fort und veranlassen dadurch Schwingungen auch solcher Punkte M, die relativ weit jenseits OC bzw. OD liegen. Aus diesem dritten Beispiel für die Diffraktion geht ganz besonders deutlich hervor, daß man von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen überhaupt nicht reden darf, und daß man daher Strahlen auch bei geometrischen Konstruktionen nur mit äußerster Vorsicht zu verwenden hat.

Diffraktionserscheinungen kommen auch bei Ausbreitung einer Wellenlinie (S. 181), welche auf ihrem Wege irgendwelchen Hindernissen begegnet, zustande.

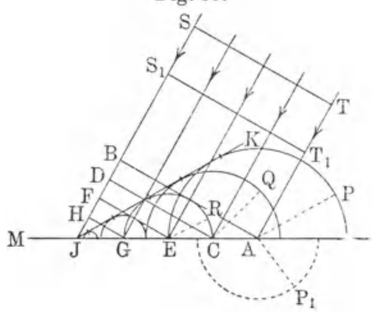
§ 13. Der physikalische Begriff der Wellenfläche. Wir gelangten zum Begriffe einer sphärischen Wellenfläche im freien isotropen Medium, indem wir voraussetzten, daß im Anfange nur ein Punkt zu schwingen beginnt, und daß sich diese Schwingungsbewegung auf alle denselben allseitig umgebenden Teilchen überträgt. Dies ist ein idealer Fall, der sich physikalisch nicht verwirklichen läßt. Denn die ursprünglichen Schwingungen gehen immer gleichzeitig von vielen Teilchen aus, die in einem gewissen, wenn auch bisweilen kleinen Teile des Raumes gelegen sind; zudem besitzen die Schwingungen verschiedener Teilchen in vielen Fällen weder dieselbe Richtung noch auch die gleiche Phase. Außerdem pflanzen sich die von jedem einzelnen Teilchen ausgehenden Schwingungen nicht in gleicher Weise nach allen Richtungen fort. Ist das Medium so beschaffen, daß sich in ihm Querschwingungen ausbreiten können, so erfolgt die Ausbreitung vorzugsweise in einer zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene; ist das Medium jedoch fähig, Längsschwingungen zu übertragen, so geht die Ausbreitung in der Richtung der ursprünglichen Schwingung vor sich. Aus allen diesen Überlegungen geht hervor, daß es eine vollständige geschlossene Wellenfläche, welche den Erregungsbezirk der ursprünglichen Bewegungen allseitig umgibt und den geometrischen Ort der Punkte darstellt, welche die Schwingungen zu derselben Zeit und in derselben Phase erreichen — in Wirklichkeit gar nicht gibt. Ein kleiner Teil einer geometrischen Wellenfläche kann indes auch die physikalische Bedeutung eines Ortes der in gleicher Phase befindlichen Punkte haben. Um die in Betracht kommenden physikalischen Erscheinungen zu erklären, muß man sich daher auf die Betrachtung von nur kleinen Teilen einer Wellenfläche beschränken, die vom Entstehungsorte der ursprünglichen Schwingungen aus jedenfalls unter sehr kleinem Winkel erscheinen. So verfährt man denn auch in der Tat.

Einfacher gestalten sich die Verhältnisse für Wellenlinien im Falle von Querschwingungen. In diesem Falle sind geschlossene Wellenlinien, deren sämtliche Punkte sich in derselben Phase befinden, physikalisch durchaus möglich (z. B. die Ringe an einer Wasseroberfläche).

§ 14. Reflexion von Wellen und Strahlen. Wenn eine Schwingungsbewegung bis zu einer Fläche gelangt, welche zwei verschiedene Medien trennt, so breitet sie sich zum Teil im zweiten Medium aus, zum Teil aber kehrt sie ins erste Medium zurück, wobei sich neue Wellenflächen bilden, die sich von der Trennungsfläche wiederum entfernen. Diese Erscheinung wird Spiegelung (Zurückwerfung, Reflexion) genannt. Das Huygenssche Prinzip setzt uns in den Stand, die reflektierte Welle zu konstruieren und für ein isotropes Medium das bekannte Gesetz von der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels der Strahlen, d. h. der zu den Wellenflächen senkrechten Geraden, abzuleiten.

MN (Fig. 85) stelle die Trennungsfläche zweier Medien dar; ST sei ein Teil einer ebenen Welle (S. 183), welcher ebenso wie auch die Ebene MN senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Die zu ST senkrechten Geraden sind Strahlen. In Fig. 79 (S. 183) war bereits gezeigt worden, in welcher Weise die Welle ST nach $S_1 T_1$ gelangt und sich zu sich selbst parallel verschiebt. In einem gewissen Zeitaugenblick gelangt der äußerste Punkt T des in Betracht gezogenen Teiles der ebenen Welle nach A zur Trennungsfläche MN. In diesem Augenblicke hat die Welle die Lage AB. Im selben Moment wird A zum neuen Schwingungsmittelpunkt, von dem aus sich ein halbkugelförmiges Wellenflächenelement zurück ins erste Medium hinein ausbreitet. Dasselbe gilt für alle Punkte der Geraden A, d. h. der durch A gehenden und zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden. Die Umhüllende der halbkugelförmigen Oberflächen ist offenbar die Oberfläche eines Halbzylinders, dessen Achse die Gerade A darstellt. Etwas später als nach A gelangt die Schwingungsbewegung zur Geraden C; in diesem Augenblick wird die Lage der ebenen Welle durch die Gerade CD bestimmt und in eben diesem Augenblicke beginnt sich um C eine halbzylindrische Wellenfläche auszubilden. Noch etwas später gelangen die Schwingungen zu den Geraden E, G usw. Zuletzt erreichen sie die Punkte der Geraden J. Bis zu diesem Augenblick hat sich schon eine unzählbare Menge halbzylindrischer Wellen um die Geraden bilden können, welche durch die verschiedenen Punkte der Geraden AJ gehen und zur Zeichnungsebene senkrecht sind. Je näher einer dieser Punkte zu J ist, desto kleiner ist der Radius des entsprechenden Halbzylinders. Dieser Radius läßt sich leicht bestimmen. Die Punkte A und B begannen gleichzeitig zu schwingen; der Halbzylinder um A hat sich in der Zeit ausgebildet, in welcher sich die Schwingungen von B nach J ausgebreitet haben; hieraus folgt, daß der Radius des um A beschriebenen Halbkreises, d. h. $AP = BJ$ ist. Ebenso ist $CQ = DJ$, $ER = FJ$ usw.

Fig. 85.



Die Trennungsfläche MN stellt einen besonderen Fall der Oberfläche $\sigma = AB$ dar (Fig. 77), an der wir das Huygenssche Prinzip erläutert haben. Die Fläche, welche alle erwähnten Halbzylinder berührt, ist die gesuchte neue Wellenfläche, die sich bei der Reflexion bildet. Wir beweisen, daß sie eine Ebene ist, welche durch J geht, oder daß die Gerade JK die gemeinsame Tangente aller in der Zeichnungsebene liegenden Halbkreise ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir Fig. 86, wo AG ein Teil einer einfallenden ebenen Welle, SA, SB, SM einfallende Strahlen sind. In dem Augenblicke, wo die Schwingungsbewegung den Punkt M erreicht, haben wir in der Zeichnungsebene um A einen Halbkreis mit dem Radius GM und um den Zwischenpunkt B einen Halbkreis mit dem Radius RM. Wir ziehen vom Punkte M aus zwei Tangenten MR' und MG' an diese Halbkreise und zeigen, daß sie zusammenfallen, d. h. daß M, R' und G' auf einer Geraden liegen. Zu diesem Zwecke verbinden wir G' mit A und R' mit B. Die Dreiecke $MG'A$ und MGA sind einander kongruent, denn es ist $\angle G' = \angle G = 90^0$ und Radius $AG' = MG$. Hieraus folgt, daß $\angle G'MA = \angle GAM$ ist. Ebenso folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $MR'B$ und MRB, daß $\angle R'MB = \angle RBM$ ist. Es sind aber $\angle GAM$ und $\angle RBM$ untereinander gleich, denn es ist $GA \parallel RB$; folglich ist $\angle G'MA = \angle R'MB$, was zu beweisen war. Die auf diese Weise gebildete ebene Welle $MR'G'$ wird sich daher parallel zu sich selbst weiterbewegen. Die Geraden $AG'S'$ und $BR'S'$ sind reflektierte Strahlen.

Aus der Konstruktion geht hervor, daß der einfallende Strahl SA, die Normale AP zur Trennungsfläche und der reflektierte Strahl AS' in einer Ebene liegen. Es erübrigt nur noch, zu beweisen, daß der Einfallswinkel SAP gleich dem Reflexionswinkel PAS' ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke $MG'A$ und MGA folgt, daß $\angle G'AM = \angle GMA = \angle SAN$ ist; folglich ist $90^0 - \angle SAN = 90^0 - \angle G'AM$, d. h. $\angle SAP = \angle PAS'$.

§ 15. Brechung von Wellen und Strahlen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schwingungsbewegungen mit gegebener Periode ist in verschiedenen isotropen Medien eine verschiedene. Diese Geschwindigkeit sei im Inneren des oberhalb der Trennungsfläche MN (Fig. 85) gelegenen Mediums gleich v_1 und im unterhalb derselben Fläche gelegenen Medium gleich v_2; wir führen noch die Bezeichnung

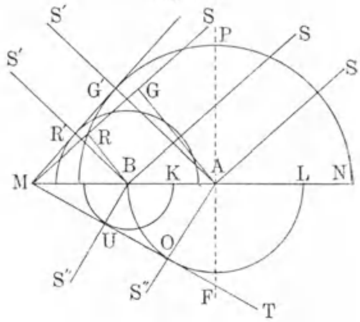
$$\frac{v_1}{v_2} = n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (29)$$

ein; wenn $v_1 > v_2$ ist, was wir annehmen wollen, so ist die Zahl n größer als Eins.

Beide Medien sollen isotrop sein. Dies muß vorausgesetzt werden, denn wie wir später sehen werden, hat man für ein anisotropes Medium zwischen einer Geschwindigkeit des Strahles und einer Geschwindigkeit der Wellen zu unterscheiden, und bedürfen daher diese Verhältnisse einer besonderen Untersuchung; der Ausdruck (29) bezieht sich dann nur auf die Geschwindigkeiten der Wellen.

Erreicht die Schwingungsbewegung den Punkt A, so wird er zum Schwingungsmittelpunkt auch für das zweite Medium, und bildet sich daher um die Gerade A (welche zur Zeichnungsebene senkrecht steht) auch im zweiten Medium eine halbzylindrische Fläche aus. In dem Augenblick aber, wo die Schwingung den Punkt J erreicht hat, und sich im ersten Medium ein Halbzylinder mit dem Grundflächenradius $AP = BJ$ ausgebildet hat, ist im zweiten Medium ein Halbzylinder mit dem Radius AP_1 entstanden, der sich zu $AP = BJ$ verhält, wie $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n}$. Ebendasselbe bezieht sich auch auf die Radien der unendlich vielen Halbzylinder, welche sich bis zu diesem Zeitaugenblick im zweiten Medium um die zu MN und zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden gebildet haben.

Fig. 86.



Wir wollen nun beweisen, daß die gemeinsame Umhüllungsfläche dieser Halbzylinder ebenfalls eine Ebene ist. Zu diesem Zwecke wenden wir uns wiederum der Fig. 86 zu. Um A ist ein Halbkreis mit dem Radius AL (der nur zufällig durch B geht) und um B ein solcher mit dem Radius BK beschrieben, wobei

$$\frac{AL}{GM} = \frac{BK}{RM} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (30)$$

ist. Von M aus ziehen wir an die beiden Halbkreise die Tangenten MU und MO und beweisen, daß sie zusammenfallen. Die Dreiecke BMU und AMO sind einander ähnlich, da $\angle\, O = \angle\, U = 90^0$ ist und die Seiten in Proportion stehen, denn aus der Zeichnung und aus (30) geht hervor, daß $\frac{AM}{BM} = \frac{GM}{RM} = \frac{AL}{BK} = \frac{AO}{BU}$ ist. Hieraus folgt, daß $\angle\, AMO = \angle\, BMU$ ist, was zu beweisen war. Die ebene Welle, die sich im zweiten Medium ausgebildet hat, bewegt sich parallel zu sich selbst weiter; offenbar stellen die Geraden AS'' und BS'' die gebrochenen Strahlen dar. Winkel $S''AF$ ist der Brechungswinkel.

Wir leiten jetzt die Brechungsgesetze ab. Zunächst ist klar, daß der Einfallsstrahl SA, die Normale PF und der gebrochene Strahl AS'' in ein und derselben Ebene liegen. Ferner ist

$$AG' = MA \sin G'MA = MA \sin GAM = MA \sin SAP;$$

außerdem ist

$$AO = MA \sin AMO = MA \sin S''AF.$$

Folglich ist

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{AG'}{AO} = \frac{GM}{AL}.$$

Die Beziehung (30) gibt

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Das heißt: Das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels für Schwingungen von gegebener Periode ist eine konstante Größe (in bezug auf zwei Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 und v_2 beträgt); dies Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeit im ersten zur Geschwindigkeit im zweiten Medium. Man nennt obiges Verhältnis den relativen Brechungsquotienten. Vergleicht man alle Medien mit einem bestimmten, willkürlich gewählten, in welchem die Geschwindigkeit v_0 beträgt, so nennt man den sich auf den Übergang der Strahlen aus diesem in irgendein anderes beliebiges Medium beziehenden den Brechungsquotienten jenes beliebigen Mediums. Seien n_1 und n_2 die Brechungsquotienten zweier Medien, in denen die Geschwindigkeiten gleich v_1 und v_2 sind, so hat man $n_1 = \frac{v_0}{v_1}$ und $n_2 = \frac{v_0}{v_2}$. Der relative Brechungsquotient n für den Übergang aus dem ersten Medium in das zweite ist

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_0}{v_2} : \frac{v_0}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Der relative Brechungsquotient beim Übergange eines Strahles aus einem Medium in ein anderes ist gleich dem Brechungsquotienten des zweiten Mediums dividiert durch den des ersten.

In Fig. 87 ist der Übergang der Strahlen aus einem Medium mit kleinerer Geschwindigkeit v_1 in ein Medium mit größerer Geschwindigkeit v_2 dargestellt. Hier ist $AF > CE$ und $BG > DE$, wobei

$$\frac{AF}{CE} = \frac{BG}{DE} = \frac{v_2}{v_1} > 1$$

ist. Wie man sieht, entfernt sich der Strahl nach seiner Brechung von der Normalen. Zieht man die Normale NN, so ist $\varphi = \angle SAN$ der Einfallswinkel und $\psi = \angle S_1AN$ der Brechungswinkel. Setzt man $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$, wobei $n > 1$ ist, so wird

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} < 1,$$

und hieraus

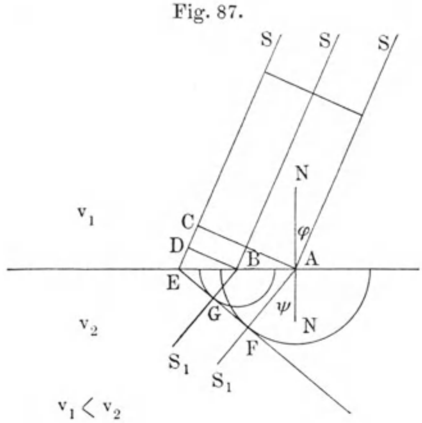
$$\sin \psi = n \sin \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Wir erhalten $\psi = 90^0$ für einen besonderen Wert Φ von φ, welcher bestimmt wird durch die Gleichung

$$\sin\Phi = \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Ist $\varphi = \Phi$, so hat der gebrochene Strahl die Richtung AE; seine Amplitude wird übrigens, wenn φ sich Φ und ψ sich 90^0 nähert, unendlich klein. Ist $\varphi > \Phi$, so ist $\sin\varphi > \frac{1}{n}$ und nach (33) $\sin\psi > 1$, was unmöglich ist. In diesem Falle wird der Strahl überhaupt nicht gebrochen, d. h. er tritt nicht in das zweite Medium ein und wird, ohne daß sich die Größe seiner Amplitude ändert, reflektiert. Man nennt diese Erscheinung totale (innere) Reflexion: sie erfolgt an der Trennungsfläche zweier Medien, und zwar innerhalb des Mediums, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen die kleinere ist. Der durch (34) bestimmbare Winkel Φ heißt der Grenzwinkel für die totale Reflexion.

Fig. 87.

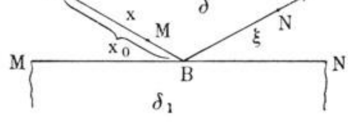


Alle Erläuterungen der letzten Paragraphen beziehen sich gleichermaßen auf Quer- wie auf Längsschwingungen.

§ 16. Verlust einer halben Wellenlänge bei der Reflexion.

Wir wollen jetzt die Phase der reflektierten Wellen untersuchen. Dabei fragt es sich zunächst, ob der reflektierte Strahl die einfache Fortsetzung des einfallenden Strahles in dem Sinne bildet, daß die Phasen sich stetig ändern oder ob an der Grenzebene zwischen den beiden Medien ein Phasensprung auftritt. AB (Fig. 88) sei der einfallende, BN der reflektierte Strahl. Die Zeit t möge von dem Augenblick an gerechnet werden, wo die Schwingungen irgendeines Punktes A beginnen. Die Entfernung y eines beliebigen Punktes M des einfallenden Strahles zur Zeit t wird nach Formel (4) auf S. 163 bestimmt durch die Gleichung:

Fig. 88.



$$y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

wo x die Entfernung dieses Punktes M von A ist. Es fragt sich nun: erhalten wir die Entfernung y zur Zeit t für den Punkt N, der auf dem reflektierten Strahle liegt, wenn wir in (35) $x = x_0 + \xi$ setzen, wo $AB = x_0$ und $BN = \xi$ ist? Die theoretische Untersuchung dieser Frage, die in vollster Strenge hier nicht ausgeführt werden kann, führt zu folgendem Ergebnis.

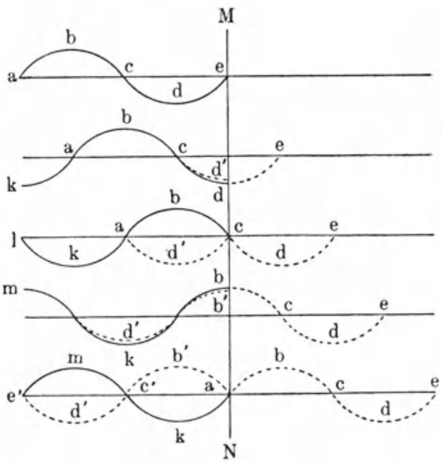
Man muß zwei Fälle unterscheiden: 1. Wenn die Dichte δ_1 des zweiten Mediums kleiner und 2. wenn sie größer als die Dichte δ des ersten Mediums ist.

I. Das zweite Medium ist das weniger dichte; $\delta_1 < \delta$. In diesem Falle ist die reflektierte Schwingung die direkte Fortsetzung der einfallenden, und die Phase im Punkte N ist genau so beschaffen, wie sie in der Entfernung ξ von B bei direkter Verlängerung des Strahles AB erhalten worden wäre. Die dem Punkte N zugehörige Verschiebung y, d. h. die Gleichung des reflektierten Strahles wird ($a_1 < a$)

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

In Fig. 89 stellt MN die Grenze zweier Medien dar; bis hierhin gelangt die Schwingungsbewegung nach einer gewissen Zeit t. In diesem Augenblick wird die Anordnung der Teilchen durch die Kurve *abcde* in Zeile 1 dargestellt (jede Schwingung beginnt mit einer Abwärtsbewegung). Die ausgezogenen Kurven in den folgenden Zeilen stellen die Anordnung der Teilchen im Einfallsstrahl für die Zeiten $t + \frac{1}{4}T$, $t + \frac{1}{2}T$, $t + \frac{3}{4}T$ und $t + T$ dar. Die Anordnung der Teilchen in der reflektierten Schwingung ist punktiert (links von MN) gezeichnet. Man erhält letztere, wenn man die Kurve für den Einfallsstrahl rechts von MN um $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ und λ verlängert und die Zeichnung um MN derart umgebogen denkt, daß die rechte Hälfte auf die linke zu liegen kommt. Die Amplituden im reflektierten Strahl sind kleiner als im einfallenden. Ein Phasenverlust bei der Reflexion tritt nicht ein.

Fig. 89.



II. Das zweite Medium ist das dichtere; $\delta_1 > \delta$. In diesem Falle geht bei der Reflexion eine halbe Wellenlänge verloren, und die reflektierte Schwingung stellt nicht mehr die direkte Fortsetzung der einfallenden Schwingung dar. Die dem Punkte N zugehörige Verschiebung y (Fig. 88) ist eine derartige, wie sie bei Verlängerung des nicht reflektierten Strahles in der Entfernung $x_0 + \xi + \frac{1}{2}\lambda$ von A erhalten würde. Die Gleichung des reflektierten Strahles ist

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi + \frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$$

oder

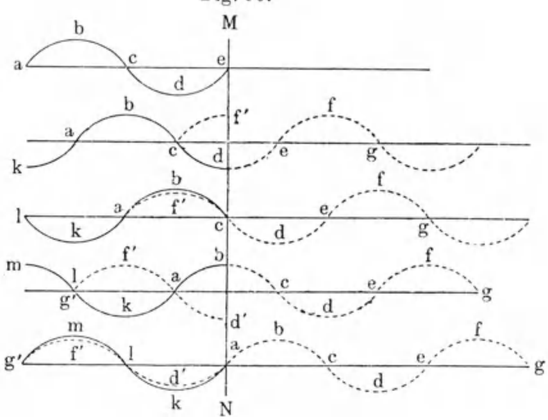
$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) \quad \ldots \ldots (37)$$

oder auch

$$y = -a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots (38)$$

Der Zeichenwechsel der Amplitude drückt aus, daß hier eine halbe Welle verloren gegangen ist; siehe Tabelle (9), Zeile 4 auf S. 164. In Fig. 90 haben die voll ausgezogenen Kurven links von MN dieselbe

Fig. 90.



Bedeutung wie in Fig. 89. Durch punktierte Kurven ist auch hier die Anordnung der Teilchen im reflektierten Strahl angedeutet. Man erhält sie, wenn man die voll ausgezogene Kurve rechts über MN hinaus verlängert, eine halbe Welle ausläßt und wiederum die rechte Hälfte der Zeichnung nach links umlegt. So ist z. B. in der zweiten Zeile (entsprechend der Zeit $t + \frac{T}{4}$) die halbe Welle *def* fortgelassen und *fg* auf der linken Seite in die Lage $f'c$ gebracht worden. In der dritten Zeile ist die halbe Welle cde vernichtet und efg nach $cf'a$ gerückt usw. Auch hier ist die Amplitude des reflektierten Strahles kleiner als die des einfallenden.

Alles, was über diese beiden Fälle der Reflexion auseinandergesetzt worden ist, bezieht sich gleichermaßen auf Quer- wie auf Längsschwingungen. Zusammenfassend erhält man also folgendes Resultat:

1. Bei Reflexion an einem weniger dichten Medium tritt kein Zeichenwechsel der Amplitude, kein Verlust einer halben Welle auf. Hat die Gleichung des einfallenden Strahles die Form

$$y = a \sin \Theta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (39)$$

wo $\Theta = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ist, so ist die Gleichung des reflektierten Strahles

$$y = a_1 \sin \left(\Theta_0 - 2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (40)$$

Hier ist $a_1 < a$ und $\Theta_0 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)$; $x_0 = AB$ (vgl. Fig. 88).

2. Bei Reflexion an einem dichteren Medium erfährt die Amplitude einen Zeichenwechsel oder, mit anderen Worten, es geht eine halbe Welle verloren. Die Gleichung des reflektierten Strahles ist hier

$$y = a_1 \sin \left(\Theta_0 - 2\pi \frac{\xi}{\lambda} - \pi\right) = - a_1 \sin \left(\Theta_0 - 2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) \quad (41)$$

Warum in einem Falle eine halbe Welle verloren geht, im anderen Falle nicht, kann erst später vollständig auseinandergesetzt werden. Die gewöhnliche, vielleicht nicht ganz befriedigende Erklärung beruht vorzugsweise auf einer gewissen Analogie, die zwischen der Reflexion von Strahlen an der Grenze zweier verschiedener Medien und den Erscheinungen beim Stoße elastischer Körper besteht. Wir werden an entsprechender Stelle sehen, daß, wenn eine elastische Kugel eine andere ruhende und ebenfalls elastische Kugel trifft, die Geschwindigkeit der ersteren ihre Richtung nicht ändert, falls die Masse der zweiten geringer ist als die der ersten; ist aber die Masse der zweiten Kugel größer, so prallt die erste Kugel zurück, d. h. ihre Geschwindigkeit ändert das Vorzeichen. In analoger Weise ändert sich die Geschwindigkeitsrichtung eines Teilchens, das sich, dem weniger dichten Medium angehörig, an der Grenze zweier Medien von verschiedener Dichte bewegt.

Wir wollen diesen Vorgang eingehender und genauer untersuchen.

Wenn sich die Schwingungsbewegung auf ihrem Wege von Teilchen zu Teilchen fortpflanzt, so muß an der Grenze zweier Medien das Folgende eintreten; A sei das letzte Teilchen des ersten, B das benachbarte, also erste Teilchen des zweiten Mediums.

Wenn A und B gleiche Masse haben, so überträgt sich die ganze Energie des Teilchens A ungeändert auf das Teilchen B.

Wenn jedoch das Teilchen B eine geringere Masse hat als A, so ist die Energieübertragung eine andere; nur ein Teil der Energie des Teilchens A geht auf Teilchen B über; B gibt sich dem von A ausgehenden Impuls sozusagen zu leicht hin. Teilchen A behält etwas von seiner Bewegung in der ursprünglichen Richtung, und diese nicht übertragene Bewegung bildet den Impuls für das Zustandekommen einer neuen Schwingung, die sich von A rückwärts ins erste Medium ausbreitet. Wenn in A ununterbrochen Schwingungen mit der Amplitude a ankommen, so wird das Teilchen A mit einer Amplitude b, welche größer als a ist, schwingen, die Amplitude des reflektierten Strahles wird dagegen $b - a$. Im Grenzfalle, wenn die Dichte des zweiten Mediums gleich Null ist, erhalten wir $b = 2a$; die Amplituden des einfallenden und des reflektierten Strahles sind einander gleich ($b - a = 2a - a = a$).

Wenn umgekehrt die Masse des Teilchens B größer ist als die des Teilchens A, so wird das erste nicht dem vom zweiten Teilchen ausgehenden Impulse unterliegen; es wird bei Querschwingungen nicht der Bewegung jenes Teilchens folgen und im Falle von Längsschwingungen sich nicht in der Strahlrichtung verschieben. Im einen wie im anderen Falle wird Teilchen A von B einen Impuls erfahren, der seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Dieser entgegengesetzte Impuls ist die Ursache für das Zustandekommen einer reflektierten Schwingung, die daher keine Fortsetzung der einfallenden Schwingungsbewegung ist. Die Amplitude b des Punktes A wird kleiner als a; die Differenz $a - b$ ist gleich der Amplitude der reflektierten Schwingung. Im Grenzfalle, wenn das Teilchen B gar nicht in Bewegung versetzt werden kann, ist $b = 0$; dann wird die Bewegung des Teilchens A von dem Nachbarteilchen B vollständig vernichtet. Auch hier sind die Amplituden des einfallenden und des reflektierten Strahles einander gleich.

§ 17. Durch Reflexion gebildete stehende Wellen. Ist der einfallende Strahl normal zur Trennungsfläche zweier Medien, so breitet sich der reflektierte Strahl in derselben Geraden wie ersterer, jedoch in entgegengesetzter Richtung aus.

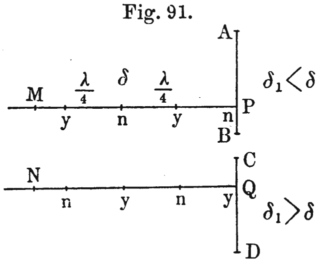
Wir haben in § 8 gesehen, daß sich in diesem Falle längs der Geraden stehende Wellen bilden müssen, wobei ein Schwingungsbauch von seinem benachbarten Knoten um $\frac{1}{4}\lambda$ abstehen muß. Derartige stehende Wellen bilden sich auch in der Tat infolge der Interferenz der einfallenden und der reflektierten Schwingungen.

Die Lage der Knoten und Bäuche ist hierbei nicht schwer zu finden. Ist das zweite Medium das weniger dichte, so muß an der Trennungsfläche ein Bauch liegen, denn, wie wir sahen, schwingt das an der Grenze liegende Teilchen A mit der Amplitude $b > a$ (im Grenzfalle $b = 2a$). Ist dagegen das zweite Medium das dichtere, so ist die Amplitude $b < a$ (im Grenzfalle ist $b = 0$), und an der Trennungsfläche muß ein Knoten auftreten.

Eine strengere Ableitung ist die folgende:

1. Reflexion am weniger dichten Medium ($\delta_1 < \delta$). Im Punkte M (Fig. 91), welcher um $MP = x$ von der Fläche AB entfernt ist, interferieren zwei Strahlen, deren Gangunterschied offenbar $MP + PM = 2x$ ist. Wir wissen, daß verstärkte Schwingungen, d. h. Bäuche, in den Punkten sich ausbilden, für welche $2x = 2n\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2}$ ist, d. h. in den Punkten $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda \ldots$ Eine Schwächung der Schwingung, d. h. Knoten, bildet sich an den Punkten, für welche der Gangunterschied $2x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ ist, d. h. für $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}$ usw.

Fig. 91.



2. Reflexion am dichteren Medium ($\delta_1 > \delta$). Ist $NQ = x$, so interferieren in N zwei Strahlen, deren Gangunterschied $2x + \frac{\lambda}{2}$ ist, denn im Punkte Q geht eine halbe Welle verloren.

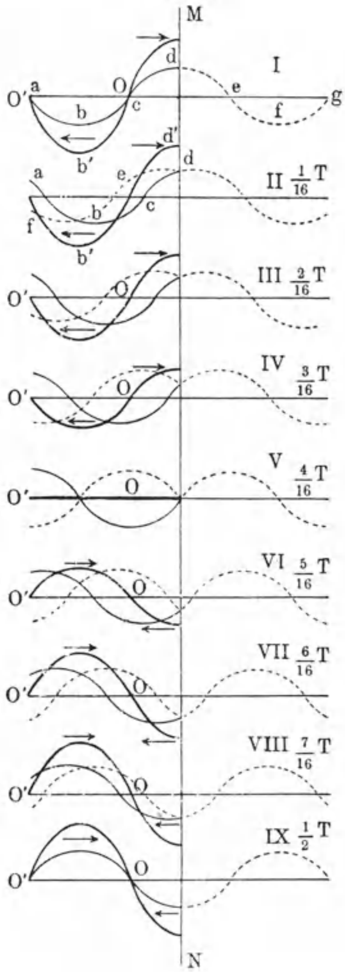
Bäuche entstehen für $2x + \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$, d. h. für $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda$ usw.; Knoten entstehen dort, wo der Gangunterschied $2x + \frac{\lambda}{2} = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2}$ ist, d. h. für $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda$ usw.

In Fig. 91 ist die Lage der Bäuche (n) und Knoten (y) für beide oben erwähnten Fälle angedeutet.

In Fig. 92 ist die Anordnung der Teilchen im einfallenden Strahle für neun aufeinanderfolgende Augenblicke t, $t + \frac{1}{16}T$, $t + \frac{2}{16}T$ usw.

bis $t + \frac{8}{16} T = t + \frac{1}{2} T$ dargestellt, und zwar durch eine dünne ausgezogene Linie (z. B. *abcd* in Zeile I und II). Durch eine punktierte Kurve ist sie ins zweite Medium hinein fortgesetzt und ohne Verlust der halben Welle ($\delta_1 < \delta$) nach links umgelegt, wo diese punktierte Kurve die reflektierte Schwingung darstellt; in Zeile I und IX fällt sie mit der Kurve für die einfallende Schwingungsbewegung zusammen. Die dickere ausgezogene Kurve zeigt die Anordnung der Teilchen in der resultierenden Schwingung; in Zeile V fällt diese Kurve mit der Geraden $O'O$ zusammen. Wir sehen, daß das an der Grenze befindliche Teilchen seine Schwingungen mit verdoppelter Amplitude ausführt, so die Punkte M und N in Zeile I und IX; hier befindet sich ein Bauch. Der Punkt O, welcher um $\lambda : 4$ von der Grenze beider Medien entfernt ist (in Zeile II muß sich der Punkt O dort befinden, wo $b'd'$ die horizontale Gerade durchschneidet), bleibt in Ruhe; hier ist ein Knoten. In b' (Zeile I und II) befindet sich wiederum ein Bauch, in O' ein Knoten.

Fig. 92.



Wir hatten bisher einen einzelnen Strahl betrachtet und festgestellt, an welchen Punkten desselben Bäuche und Knoten liegen. Hat man es dagegen mit einer einfallenden ebenen Welle zu tun, so erhält man abwechselnd Flächen stärkster Bewegung und der Ruhe; die letzteren nennt man Knotenflächen. Wenn Schwingungen sich nur nach zwei Dimensionen ausbreiten, also Wellenlinien bilden, und von einer das gegebene Medium begrenzenden Grenzlinie reflektiert werden, so bilden sich infolge von Interferenz der ursprünglichen und der reflektierten Schwingungen Gebiete lebhaftester Bewegung (Bäuche), die von Linien relativer oder sogar vollkommener Ruhe, den sogenannten Knotenlinien, begrenzt sind.

Wenn die Reflexion eine vollkommene ist, d. h. wenn die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Schwingungen gleich sind ($= a$), dann läßt sich mit Hilfe von Formel (26, a) auf S. 179 die Gleichung der stehenden Welle aufstellen. In diesem Falle ist die Amplitude an den Bäuchen $A = 2a$, an den Knoten $A = 0$. Ist das zweite Medium weniger dicht, so liegt an der Trennungsfläche ein Bauch (wie z. B. im Punkte O in Fig. 72), daher wird die Schwingungsgleichung in der Entfernung x von dieser Fläche durch Formel (26, a) auf S. 179 gegeben:

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (41, a)$$

Hier wird die Zeit t vom Beginn einer der Schwingungen des Punktes $x = 0$, oder eines der zwischen $x = 0$ und $x = \lambda : 4$ liegenden Punkte an gerechnet. Ist das zweite Medium das dichtere, so liegt an der Trennungsfläche ein Knoten. Dann ist die Schwingungsgleichung

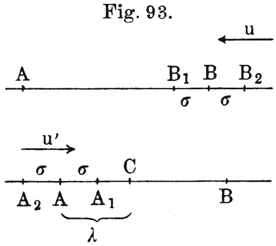
$$y = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (41, b)$$

Hier wird die Zeit t von dem Augenblicke an gerechnet, wo einer der zwischen $x = 0$ und $x = \lambda : 2$ liegenden Punkte seine Schwingungen beginnt.

§ 18. Das Dopplersche Prinzip.

Im Punkte A (Fig. 93) soll eine Kraft wirken, welche das Teilchen A des Mediums zu harmonischen Schwingungen mit der Periode T veranlaßt und diese Bewegung unausgesetzt unterhält. Die Ursache, welche die Entstehung einer solchen Kraft veranlaßt, nennen wir eine Schwingungsquelle (z. B. ein tönender Körper, ein leuchtender Körper, ein schwingender Körper, der hierbei auf eine flüssige Fläche aufschlägt usw.). Die Schwingungen breiten sich längs der Geraden AB mit der Geschwindigkeit v aus; die Wellenlänge λ, die Ausbreitungsgeschwindigkeit v und die Periode T sind untereinander durch die Gleichung (1) auf S. 163 verbunden:

Fig. 93.



$$\lambda = vT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Die Anzahl Wellen, die von A in der Zeiteinheit ausgehen, d. h. die Schwingungszahl, sei n. Formel (42) im Verein mit der Definitionsgleichung $Tn = 1$ gibt uns

$$v = n\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

[siehe Formel (3) auf S. 163, wo die Schwingungszahl mit N bezeichnet ist]. Es soll sich nun in B ein Beobachter befinden, der imstande ist, die Zahl n_1 der an ihm in der Zeiteinheit vorübergleitenden Wellen zu bestimmen, d. h. etwa bei Längsschwingungen, die sich an einer Stelle bildenden Verdichtungen zu zählen oder bei Querschwingungen zu beobachten, wievielmal ein ihm zunächst gelegenes Teilchen durch seine Ruhelage schwingt. Sowohl die Schwingungsquelle A als auch der Beobachter B sollen sich längs der Geraden AB selbständig bewegen können. Im ersten Falle heißt das: die einzelnen von der Quelle A in gleichen Intervallen T hervorgerufenen Schwingungen nehmen der Reihe nach ihren Anfang in den verschiedenen Punkten des Mediums, an welchen sich in den entsprechenden Augenblicken die Quelle selbst befindet. Wir setzen noch voraus, daß, wenn sich der Beobachter bewegt, er es nicht merkt, wie er von einem Punkt des Mediums zu anderen gelangt; er soll vielmehr bloß die Zahl der Verdichtungen oder die Zahl der Durchgänge durch die Gleichgewichtslage beobachten oder überhaupt die Zahl n_1 der in seiner Nähe in der Zeiteinheit erfolgenden Wiederholungen ein und derselben Phase bestimmen können. Schließlich nehmen wir noch an, daß die Quelle A ihre Schwingungen so frühzeitig hervorzurufen begonnen hat, daß letztere sich bereits weiter als bis zum Beobachter B haben ausbreiten können.

Es sei mit u die Geschwindigkeit des Beobachters B, mit u' die Geschwindigkeit der Schwingungsquelle A bezeichnet und beide Geschwindigkeiten seien positiv genommen, falls A und B sich einander nähern (d. h. falls AB abnimmt; siehe die Pfeile in Fig. 93).

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Zahl n_1 für verschiedene Werte von u und u' zu bestimmen.

Dabei sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Beobachter und Schwingungsquelle sind in Ruhe ($u = 0$, $u' = 0$). In diesem Falle werden offenbar alle von A nach gleichen Zeiträumen T ausgehenden Schwingungen auch Punkt B nach ebensolchen Zeitintervallen erreichen; daher ist $n_1 = n$.

II. Der Beobachter B bewegt sich mit der Geschwindigkeit u, die in der Richtung nach A positiv gerechnet wird. Im Verlaufe einer gewissen Zeit τ gelangt der Beobachter von B nach B_1, wobei er den Weg $\sigma = u\tau$ zurücklegt. In dieser Zeit begegnen ihm offenbar $n_1\tau$ Wellen. Diese Zahl ist größer als die Zahl $n\tau$ der Wellen, die an ihm vorübergeglitten wären, wenn er sich in Ruhe befunden hätte, und zwar um so viel Wellen, als Wellenlängen in der Strecke $BB_1 = \sigma$ enthalten sind, d. h. um $\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{u\tau}{\lambda}$ Wellen. Somit haben wir $n_1\tau = n\tau + \frac{u\tau}{\lambda}$, oder, wenn man nach (43) $\lambda = \frac{v}{n}$ setzt und durch τ hebt

$$n_1 = n + n\frac{u}{v} = n\frac{v+u}{v}.$$

Wäre u negativ, etwa gleich $-u_1$, und der Beobachter in der Zeit τ von B nach B_2 gelangt, so hätten wir $n_1 \tau = n\tau - \frac{\sigma}{\lambda}$, woraus sich $n_1 = n\frac{v - u_1}{v} = n\frac{v + u}{v}$ ergibt. Durch Vereinigung beider Formeln erhält man, falls sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit u bewegt (die in der Richtung auf die Schwingungsquelle zu positiv gerechnet wird):

$$n_1 = n\frac{v + u}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

III. Die Schwingungsquelle A bewegt sich mit der Geschwindigkeit u', die in der Richtung auf den Beobachter B zu positiv gerechnet wird. Sei $AC = \lambda$ die Wellenlänge. Wäre A in Ruhe, so würde der gegenseitige Abstand λ gleicher Phasen (z. B. Verdichtungen oder Durchgänge durch die Gleichgewichtslage) beim Ausbreiten der Wellen unverändert bleiben.

Wir nehmen nun an, im Verlaufe der Schwingungsdauer T sei die Schwingungsquelle von A bis nach A_1 gelangt, wo $AA_1 = \sigma = u'T$ ist. Jetzt sind die gleichen nach rechts fortschreitenden Phasen um $CA_1 = \lambda_1$ voneinander entfernt. Da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v nicht ändert, so gibt uns Formel (43) $v = n\lambda = n_1\lambda_1$, und es ist jetzt

$$n_1 = n\frac{\lambda}{\lambda_1} = n\frac{\lambda}{\lambda - \sigma} = n\frac{vT}{vT - u'T} = n\frac{v}{v - u'}.$$

Hätte die Schwingungsquelle eine negative Geschwindigkeit $u' = -u_1'$ und wäre sie in der Zeit T von A nach A_2 gelangt, so wären nach B Wellen mit größerer Länge $\lambda_1 = \lambda + \sigma$ gelangt, und wir hätten $n_1 = n\frac{v}{v + u_1} = n\frac{v}{v + u'}$. Verbindet man beide Formeln, so erhält man für den Fall der Bewegung der Schwingungsquelle mit der Geschwindigkeit u' (die in der Richtung auf den Beobachter zu positiv gerechnet wird)

$$n_1 = n\frac{v}{v - u'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

IV. Der Beobachter sowohl als auch die Schwingungsquelle bewegen sich mit den Geschwindigkeiten u bzw. u'. Infolge der Bewegung der Schwingungsquelle vergrößert sich die Zahl n der Schwingungen, welche für $u = 0$ und $u' = 0$ zum Beobachter gelangen würde, im Verhältnis von v zu $(v - u')$, weil die Wellen bei positivem u' verkürzt werden. Infolge der Bewegung des Beobachters vergrößert sich, falls u positiv ist, die Zahl der ihm begegnenden Wellen im Verhältnis von $(v+u)$ zu v. Mithin ist

$$n_1 = n\frac{v}{v-u'}\cdot\frac{v+u}{v}$$

oder

$$n_1 = n\frac{v+u}{v-u'}. \qquad (46)$$

Betrachten wir nunmehr einige Sonderfälle.

1. Der Beobachter nähert sich der Schwingungsquelle mit der Geschwindigkeit v; dann ist $u = v$ und Formel (44) ergibt $n_1 = 2n$. Für den Beobachter ist die Schwingungsdauer (Periode) halb so groß geworden.

2. Der Beobachter entfernt sich mit der Geschwindigkeit v von der Schwingungsquelle. Hier ist $u = -v$ und nach (44) $n_1 = 0$. Dem Beobachter, der sich zugleich mit irgendeiner Phase bewegt, scheint das Teilchen stille zu stehen.

3. Die Schwingungsquelle entfernt sich vom Beobachter mit der Geschwindigkeit v; hier ist $u' = -v$ und nach (45) $n_1 = \frac{1}{2}n$. Für den Beobachter hat die Schwingungsdauer sich verdoppelt.

4. Die Schwingungsquelle nähert sich dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Hier ist $u' = v$ und nach (45) $n_1 = \infty$. Zum Beobachter gelangen somit Wellen, deren Länge unendlich klein ist.

5. Die Schwingungsquelle und der Beobachter bewegen sich mit den resp. Geschwindigkeiten u und u'. Auf diesen Fall bezieht sich unsere allgemeine Formel (46).

Die drei Formeln (44), (45) und (46) zeigen uns, daß die scheinbare Änderung der Schwingungszahl nicht ausschließlich von der relativen Geschwindigkeit von Schwingungsquelle und Beobachter abhängt. Sei diese relative Geschwindigkeit mit c bezeichnet, so nimmt (46) die Form

$$n_1 = n\frac{v+u}{v+u-c}$$

oder

$$n_1 = n\frac{v-u'+c}{v-u'}$$

an. Diese Formeln drücken es deutlich aus, daß n_1 nicht bloß von c, sondern auch von u oder u' abhängt. Nur für $c = 0$ haben wir $n_1 = n$ bei jedem $u' = -u$, abgesehen vom Grenzfalle $u' = -u = v$, wo der Beobachter und die Schwingungsquelle sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Quelle nach dem Beobachter hin bewegen; dann erreichen die Schwingungen den Beobachter überhaupt nicht.

Bei gleichzeitiger Bewegung von Beobachter und Schwingungsquelle mit der Geschwindigkeit v in der Richtung BA (Fig. 93) haben wir $u = -u' = v$ und $n_1 = n$.

Sind u und u' sehr klein gegen v, so kann man (46) folgende Gestalt geben:

$$n_1 = n\left(1 + \frac{u + u'}{v}\right) = n\left(1 + \frac{c}{v}\right) \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

Sechstes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 1. **Das Gravitationsgesetz.** Alle Teile der in der Welt vorhandenen Materie, soweit sie unserer Beobachtung zugänglich sind, zeigen eine besondere Wechselwirkung, welche, rein äußerlich betrachtet, im folgenden besteht. Sind zwei Massen m und m_1 gegeben, deren Dimensionen bei vollkommen beliebiger Form außerordentlich klein sind im Vergleich zu ihrem beiderseitigen Abstande r, so lehrt die unmittelbare Beobachtung, daß die Anwesenheit jeder dieser Massen eine besondere Kraft hervorruft, die auf die andere Masse einwirkt. Beide Kräfte, von denen die eine auf m, die andere auf m_1 wirkt, sind einander gleich. Wir wollen sie mit f bezeichnen.

Der Größe nach sind die Kräfte f dem Produkte der Massen m und m_1 direkt proportional und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres gegenseitigen Abstandes. Ihr Zahlenwert wird durch die Formel bestimmt

$$f = C\frac{mm_1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist.

Die Richtung der beiden Kräfte f fällt mit der Richtung der Geraden r zusammen, dabei ist die auf m wirkende Kraft nach m_1, die auf m_1 wirkende Kraft nach m gerichtet. Hieraus folgt, daß die Kräfte f Zentralkräfte (vgl. S. 109) sind.

Die Kraft f heißt die allgemeine Schwere oder Gravitation.

Ist die Masse m frei, so erteilt die Anwesenheit der Masse m_1 ihr eine gewisse Beschleunigung w:

$$w = C\frac{m_1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die nach m_1 gerichtet ist; ebenso tritt in der Bewegung von m_1, wenn diese Masse frei ist, eine Beschleunigung

$$w_1 = C\frac{m}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

auf, die nach m gerichtet ist. Aus (2) und (3) ergibt sich

$$\frac{w}{w_1} = \frac{m_1}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

d. h. die Beschleunigungen, welche zwei Körper infolge der zwischen ihnen wirksamen allgemeinen Schwere erhalten, sind umgekehrt proportional ihren Massen. Sind die Massen nicht frei, so übt jede von ihnen einen Druck gleich f auf das Hindernis aus.

Da die auf die Massen m und m_1 wirkenden Kräfte f erstere einander zu nähern suchen, so stellt sich die Erscheinung rein äußerlich betrachtet in der Weise dar, als wenn von jeder Masse eine Kraft ausginge, welche auf die andere Masse einwirkt. Man pflegt dies durch die Worte „die Körper ziehen einander an“ auszudrücken. Man hat indessen wohl zu beachten, daß durch diesen Ausdruck die Erscheinung bloß kurz und bequem beschrieben wird, keineswegs aber hat man ihn im buchstäblichen Sinne des Wortes aufzufassen, gleich als ob die Masse etwas Aktives darstellt, das unmittelbar auf die Masse m_1 einwirkt und mit der Kraft f zu sich heranzieht. In Wirklichkeit können wir bloß sagen: das Vorhandensein der Masse m im Abstande r bedingt das Auftreten einer Kraft f, welche auf m_1 wirkt. Wir werden übrigens im § 4 auf diese Frage zurückkommen.

Die gegenseitige Anziehung zweier Körper, deren Dimensionen nicht sehr klein gegen ihre Entfernung sind, wird folgendermaßen erhalten. Man denkt sich jeden der beiden Körper in eine unendlich große Zahl unendlich kleiner Teile geteilt, deren Massen wir für den einen Körper mit μ, für den anderen mit μ_1 bezeichnen. Zwischen jedem Massenpaar μ und μ_1 wirkt eine Kraft $f = C\frac{\mu\mu_1}{r^2}$, wo r ihr Abstand ist. Alle die Kräfte f, welche auf jeden der beiden Körper einwirken, hat man schließlich zu summieren.

Die Gravitation bestimmt die Bewegung der Himmelskörper. Sie tritt auch zwischen der Erde und den nahe ihrer Oberfläche befindlichen Körpern auf — in diesem Falle heißt sie einfach Schwerkraft (Erdschwere) oder Gewicht. Auch zwischen den Körpern auf der Erdoberfläche ist sie wirksam.

Im folgenden (§ 5) wird bewiesen werden, daß eine massive, homogene Kugel oder auch eine inhomogene, aus konzentrischen homogenen

Schichten bestehende Kugel jeden außerhalb befindlichen Körper mit einer Kraft anzieht, die nach Formel (1) gefunden werden kann, falls man annimmt, daß die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt sei. In erster Annäherung kann man die Erde als eine derartige Kugel ansehen.

Bezeichnet M die Masse, R den Radius, δ die mittlere Dichte der Erdkugel, so ist

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Erde wirkt auf die Masse m, die sich in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkte befindet, mit einer Kraft f, die gleich ist

$$f = C \frac{Mm}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Beschleunigung w der Bewegung unserer Masse m ist gleich

$$w = C \frac{M}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Formel (7) lehrt, daß alle Körper, die von der Erdkugel gleichen Abstand haben, unter der Einwirkung ihrer Anziehung die gleiche Beschleunigung erfahren. Die Beschleunigung hängt nicht vom angezogenen Körper, sondern nur von der Masse des anziehenden Körpers und dem beiderseitigen Abstande ab.

Bezeichnen wir mit g den besonderen Wert von w, der an der Erdoberfläche selbst gilt — es ist das die sogenannte Beschleunigung für den freien Fall —, dann erhalten wir aus (7) und (5) die Formeln

$$g = C \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \delta C R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

d. h. alle Körper fallen auf der Erde mit derselben Beschleunigung.

Newton hat als erster das allgemeine Gravitationsgesetz (Formel 1) klar erkannt; man nennt es daher auch das Newtonsche Gravitationsgesetz. Er hat es in seinem Werke „Philosophiae naturalis principia mathematica“ veröffentlicht, das 1687 in London erschien und aller Wahrscheinlichkeit nach in den Jahren 1684 und 1685 verfaßt worden ist.

Newton glaubte, daß es ihrem Ursprunge nach ein und dieselbe Kraft sei, welche die Körper an der Erdoberfläche mit einer Beschleunigung g zu fallen veranlaßt und den Mond in seiner Bahn um die Erde mit einer Beschleunigung w zu kreisen zwingt. Ferner nahm er an, daß die Beschleunigung umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte der Erde sei und prüfte nun die aus diesen Voraussetzungen hervorgehende Gleichung, nämlich [siehe (7) und (8)]

$$\frac{g}{w} = \frac{r^2}{R^2},$$

wo r der mittlere Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkte ist. Setzt man $r = 60\,R$, so wird

$$g = 3600\,w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Nimmt man in erster Annäherung an, daß sich der Mond gleichförmig in einem Kreise mit der Geschwindigkeit v bewegt, so erhält man, nach (30) auf S. 66, $w = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$, wo T die Zeit eines vollen Umlaufes des Mondes um die Erde ist. Wählt man als Einheit der Zeit die Sekunde, als Längeneinheit das Meter und setzt $T = 27$ Tagen 7 Stunden 43 Minuten = 39 343.60 Sekunden, $r = 60\,R = 60 \times 6\,360\,000$ Metern [1]), so erhält man für die Geschwindigkeit des Mondes $v = 1020$ m pro Sekunde und für seine Beschleunigung $w = 0{,}002\,71$, wobei als Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung einer solchen Bewegung gilt, bei welcher die Geschwindigkeit sich in jeder Sekunde um einen Meter pro Sekunde vermehrt. Setzt man dies in (9) ein, so wird $g = 0{,}002\,71 \times 3600 = 9{,}76$. Die genügende Übereinstimmung dieser Zahl, die durch angenäherte Rechnung gefunden worden war, mit den Zahlen, welche sich aus den unmittelbaren Beobachtungen an der Erdoberfläche ergeben, dient als Beweis für die Richtigkeit der Grundvorstellungen und der Form des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

Man kann obiges Gesetz auch aus dem dritten Keplerschen Gesetze ableiten: die Quadrate der Umlaufszeiten (T_1 und T_2) zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen (r_1 und r_2) von der Sonne:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Nimmt man an, daß sich die Planeten gleichförmig in Kreisen bewegen, und bezeichnet man ihre Geschwindigkeit mit v_1 und v_2, ihre normalen Beschleunigungen mit w_1 und w_2, so erhält man

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}; \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}; \quad w_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2};$$

$$w_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}.$$

[1]) Der Umfang $2\,R\pi$ eines größten Kreises auf der Erde wird hier gleich 40 000 000 m angenommen, woraus $R = 6\,360\,000$ m folgt.

Hieraus folgt

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2},$$

und mit Hilfe von (10) ergibt sich

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

d. h. die Beschleunigungen der Planetenbewegungen sind umgekehrt proportional den Quadraten der Planetenabstände von der Sonne. Das ist das Newtonsche Gesetz.

§ 2. Der Proportionalitätsfaktor in der Newtonschen Gravitationsformel. In Formel (1) kommt ein Proportionalitätsfaktor C vor; sein Zahlenwert hängt bekanntlich von der Wahl der Einheiten ab, durch welche die in der Formel (1) vorkommenden Größen gemessen werden. Es sind das folgende drei verschiedenartige Größen: die Masse, die Länge (durch deren Einheit r gemessen wird) und die Kraft. Haben wir hierfür eine bestimmte Wahl getroffen, dann wird der Zahlenwert von C am einfachsten auf folgende Weise bestimmt.

Formel (1) gibt für

$$\left.\begin{aligned} m = m_1 &= 1 \\ r &= 1 \end{aligned}\right\} \dots f = C. \quad \dots \dots \quad (11)$$

Danach ist C gleich dem Zahlenwerte der Kraft, mit welcher sich zwei Einheitsmassen anziehen, die voneinander um die Längeneinheit entfernt sind. Die Massen müssen wir uns in Gestalt zweier homogener Kugeln mit dem gegebenen Abstande denken oder uns vorstellen, daß sie gewissermaßen in zwei Punkten konzentriert sind.

Die Einheiten für die Größen m, r und f kann man auf dreierlei Weise festlegen. Entweder kann man sie vollkommen willkürlich wählen, ohne daß sie voneinander abhängen, oder man kann m, r und f durch absolute Einheiten messen, oder man kann schließlich eine derartige Auswahl treffen, daß der Koeffizient C gleich Eins wird. Wir besprechen zuerst das letzte Verfahren und setzen $C = 1$, also wird

$$f = \frac{m m_1}{r^2} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

Wenn wir das Newtonsche Gravitationsgesetz durch Formel (12) ausdrücken, müssen wir stets dessen eingedenk sein, daß wir es hier nicht etwa mit absoluten Einheiten zu tun haben, sondern eine ganz besondere und eigenartige Krafteinheit einführen. Setzt man nämlich in (12) $m = m_1 = 1$ und $r = 1$, so erhalten wir für die Kraft den Wert $f = 1$. Wählt man also die Einheiten der Masse und Länge willkürlich, so muß man als Einheit der Kraft die Kraft gelten lassen, mit welcher sich zwei der gewählten Masseneinheiten anziehen, wenn ihre Entfernung gleich der zugrunde gelegten Längeneinheit ist. Die absolute Krafteinheit dagegen erteilt nach der Definition (S. 75) der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung. Diese beiden Krafteinheiten stellen somit zwei ganz verschiedene Größen dar; um sie voneinander zu unterscheiden, soll die neue Krafteinheit astronomische Krafteinheit heißen.

Wir wollen jetzt die astronomische Krafteinheit mit der absoluten vergleichen, bei welcher die Grundeinheiten der Masse und Länge Gramm und Zentimeter sind. In letzterem Falle ist die absolute Krafteinheit die Dyne (wenn gleichzeitig die Sekunde als Zeiteinheit gilt); die astronomische Krafteinheit dagegen ist, wie aus (11) hervorgeht, das in Formel (1) enthaltene C. Unsere Aufgabe kommt somit darauf hinaus, die Kraft C in Dynen auszudrücken. Zu diesem Zwecke wollen wir ein und dieselbe Kraft, nämlich das Gewicht p der Grammmasse, an der Erdoberfläche zuerst in Dynen und sodann in astronomischen Einheiten C ausdrücken.

Auf S. 75 hatten wir gefunden, daß das Gewicht p (die französische, „Gramm“ genannte Gewichtseinheit) gleich ist (vgl. S. 89)

$$p = 981 \text{ Dynen} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Andererseits ist p gleich der Kraft, mit welcher sich die Erde, deren Masse gleich $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta$ (wo R der Radius und δ die mittlere Dichte der Erde sind) ist und die Masse eines Gramms, $m = 1$, gegenseitig anziehen. Somit ergibt Formel (1)

$$p = C\frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R \delta C = \frac{2}{3}\delta \, . \, 2\pi R C \quad \ldots \quad (14)$$

Es ist $2\pi R = 40\,000\,000 \text{ m} = 4 \, . \, 10^9 \text{ cm}$; als mittlere Erddichte möge die Zahl $\delta = 5{,}51$ gelten. Vergleicht man (13) mit (14), so erhält man nach dem CGS-System, wenn man den Faktor C als Kraft betrachtet (strenggenommen ist er nur numerisch einer Kraft gleich)

$$C = \frac{3 \times 981}{2 \, . \, \delta \, . \, 2\pi R} \text{ Dyn.} = \frac{3 \times 981}{2 \times 5{,}51 \times 4 \times 10^9} \text{ Dyn.}$$

oder

$$C = \frac{1}{14\,950\,000} \text{ Dyne} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Neuere, sehr sorgfältige Messungen von Crémieu (C. R. **149**, 700, 1909) ergaben

$$C = 6{,}674 \, . \, 10^{-8} \text{ Dyn.} = \frac{1}{14\,984\,000} \text{ Dyn.} \quad \ldots \quad (15, \text{a})$$

Nimmt man also Gramm, Zentimeter und Sekunde als Einheiten für Masse, Länge und Zeit an, so ist die astronomische Krafteinheit etwa 15 millionenmal kleiner als die absolute. Mit anderen Worten heißt das: ein Gramm zieht ein anderes auf ein Zentimeter Entfernung mit einer Kraft an, die nur gleich dem 15 millionten Teil einer Dyne oder etwa gleich dem ebensovielten Teile eines Milligramms ist.

Der Koeffizient C ist, wie gesagt, der Größe nach gleich dem Zahlenwerte der Kraft, mit welcher zwei Masseneinheiten sich anziehen, wenn ihre Entfernung gleich der Längeneinheit ist. Nach Formel (1) hat C die Dimension (Kap. IX)

$$[C] = \frac{F \cdot L^2}{M^2} = \frac{L^3}{T^2 M} \cdot \quad \cdots\cdots \quad (15,\mathrm{b})$$

Statt (15, a) müßte man daher schreiben

$$C = 6{,}674 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g\,sec}^2} \cdot \quad \cdots\cdots \quad (15,\mathrm{c})$$

Die Frage, ob die gegenseitige Anziehung zweier Körper von der Temperatur abhängt, ist noch nicht endgültig entschieden. Poynting und Phyllips (Proc. R. Soc. **76**, 445, 1905) haben drei Stahlzylinder (Gewicht 58, 187, 266,17 g) bei Zimmertemperatur, bei $+100^0$ und bei -185^0 sehr sorgfältig gewogen. Sie fanden, daß bei der Erwärmung um 1^0 das Gewicht sich nicht um 10^{-9} verändert und bei der Abkühlung noch nicht um 10^{-10}. Southerns (Proc. R. Soc. **78**, 392, 1907) hat das Gewicht einer Spule aus Platindraht, die durch einen elektrischen Strom erwärmt werden konnte, bei verschiedenen Temperaturen bestimmt, die um ungefähr 35^0 auseinanderlagen. Die Gewichtsänderung für 1^0 war kleiner als 10^{-8}. Nach P. E. Shaw (Nature, engl. **96**, 143, 1915), der Versuche bis 250^0 C angestellt hat, soll dagegen die Gravitationskonstante um $^1/_{1000}$ Proz. für 1^0 C anwachsen. Genauere Angaben über die Versuchsanordnung und die Resultate liegen aber bis jetzt (1917) nicht vor.

§ 3. **Negative Dichte.** Der Begriff der negativen Dichte spielt in der Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität eine wichtige Rolle; ohne ihn läßt sich eine große Anzahl von Erscheinungen nur schwer beschreiben, und daher war es notwendig, ihn in diese Gebiete einzuführen; doch auch in der Lehre von der allgemeinen Gravitation ist er vielfach von Nutzen. Die Vorstellung von Massen mit negativer Dichte ist eine Fiktion; solche Massen gibt es in der Natur nicht. Für gewöhnlich bezeichnet man sie als „negative Massen", und obwohl dieser Ausdruck nicht glücklich gewählt ist, so wollen wir doch an ihm der Kürze halber festhalten.

Als negative Massen wollen wir also derartige gedachte Massen bezeichnen, deren Wirkung unter sonst gleichen Bedingungen der Wirkung positiver Massen entgegengesetzt ist. Wenn eine positive und eine negative Masse unter gleichen Verhältnissen Wirkungen hervorbringen, die der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, so sagen wir, die Massen seien ihrer Menge nach gleich. Nehmen wir z. B. an, die Masse m ziehe die Masse m_1 mit der Kraft f an, dann wird die gedachte Masse $-m$ an die Stelle von m gebracht, die Masse m_1 mit der Kraft f abstoßen. Läßt man auch hier das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gelten, so muß man voraussetzen, daß auch Masse m_1 die Masse $-m$ abstößt; endlich muß man der Folgerichtigkeit halber auch annehmen, daß eine Masse $-m_1$, an die Stelle von m_1 gebracht, die Masse $-m$ anzieht.

Wir wollen in diesem Abschnitte der Bequemlichkeit halber voraussetzen, daß Massen mit gleichem Vorzeichen sich anziehen, solche mit entgegengesetztem Vorzeichen dagegen sich abstoßen. Dabei ist es einfacher, die negativen Massen nicht etwa durch negative Zahlen zu bezeichnen, sondern bloß symbolisch durch einen Buchstaben (z. B. m), sowohl die positiven als auch die negativen, indem man sich denkt, der Buchstabe selbst habe das Vorzeichen. Setzt man gleichzeitig fest, daß die anziehenden Kräfte positiv, die abstoßenden negativ sind, so werden alle Fälle der Wechselwirkung zweier Massen durch die allgemeine Formel

$$f = \frac{m m_1}{r^2} \qquad (16)$$

umfaßt. Haben m und m_1 gleiches Vorzeichen (beide $+$ oder beide $-$), so ist f positiv, d. h. die Massen ziehen sich an; haben dagegen m und m_1 ungleiche Vorzeichen (eines $+$, das andere $-$), so ist f negativ, entsprechend einer Abstoßung.

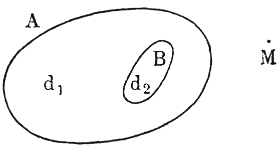
Um gewisse Aufgaben einfacher lösen zu können, führt man den Begriff der Dichte d negativer, natürlich bloß gedachter Massen ein und läßt für sie die Beziehung $m = vd$ gelten, wo v der Zahlenwert des Volumens ist. Man setzt fest, negative Massen besäßen auch eine negative Dichte und stellt sich vor, die von ihnen hervorgerufenen Kräfte hätten die entgegengesetzte Richtung wie die von Massen mit positiver Dichte hervorgerufenen.

Bisweilen ist es vorteilhaft, sich vorzustellen, daß die gegebene Dichte aus zwei Teilen d_1 und d_2 besteht, derart, daß $d = d_1 + d_2$ ist. Anstatt eines Körpers denkt man sich dann, daß im gegebenen Volumen gleichzeitig zwei Körper vorhanden seien, deren Dichte d_1 resp. d_2 ist.

Bezieht man obiges auch auf Körper mit negativer Dichte, so kann man annehmen, daß zwei Körper von ungleichnamiger Dichte $+d_1$ und $-d_2$ in ein und demselben Raume vorhanden seien oder, was dasselbe bedeutet, daß sich in diesem Raume nur ein Körper von der Dichte $d = d_1 - d_2$ befindet. Ist $d_1 = d_2$, so ist $d = 0$. Wenn ein gegebener Raum keine Masse enthält, so kann man sich demnach trotzdem vorstellen, daß in ihm zwei Massen vorhanden sind, deren Dichten der Größe nach gleich, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Die Einführung von negativen Massen ist bei Lösung vieler Aufgaben über die Anziehung der Körper von nicht geringem Nutzen. Soll die Anziehung des Punktes M durch die homogenen Körper A und B (Fig. 94) ermittelt werden, dann läßt sich diese Aufgabe zurückführen auf die Anziehung des Punktes M durch einen Körper A, welcher überall die Dichte d_1 hat, mit Ausnahme des Teiles B, der eine andere Dichte d_2 besitzt. Die Gesamtwirkung des ganzen nicht homogenen Körpers besteht nämlich offenbar aus der Summe der Wirkungen zweier homogener Körper, des Körpers A, dessen Dichte d_1, und des Körpers B, dessen Dichte $d = d_2 - d_1$ ist. Falls $d_2 = 0$ ist (sich also innerhalb A ein Hohlraum vorfindet), erhält man $d = -d_1$. Danach hat man zur Anziehung des massiv gedachten Körpers A die Abstoßung von B hinzuzufügen, um die wahre Wirkung des Körpers A, der einen Hohlraum hat, zu erhalten.

Fig. 94.



§ 4. **Actio in distans (Fernewirkung).** Der Ausdruck „Fernewirkung" — Actio in distans — steht mit einer physikalischen Lehre im Zusammenhang, die einst allgemeine Geltung hatte und einen schädlichen Einfluß ausgeübt, vielleicht sogar auf die Entwickelung der Physik hemmend eingewirkt hat. Diese Lehre beruhte auf der Vorstellung, ein Etwas (A) könne auf ein anderes Etwas (B), das sich von ihm in einer jede Berührung ausschließenden Entfernung befinde, unmittelbar einwirken.

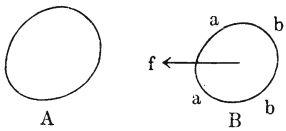
Die Lehre ist auf folgende Weise entstanden. Newton hatte entdeckt, daß die Bewegungen der Himmelskörper und der an der Erdoberfläche niederfallenden Körper so vor sich gehen, als ob sich alle Körper mit einer Kraft anziehen, deren Größe nach Formel (1) oder (12) bestimmt wird. Die Frage nach der Ursache für das Auftreten einer solchen Kraft hatte er jedoch nicht berührt, ja sogar jeglichen Versuch hierzu durch seine Worte „hypotheses non fingo" abgelehnt. Niemals und nirgends aber hat er es ausgesprochen, daß er eine actio in distans für erwiesen halte, noch auch behauptet, daß ein Körper A einen anderen Körper B unmittelbar an sich heranziehe, also dort eine Wirkung ausübe, wo er sich selbst nicht befindet. Indem Newton somit die Frage nach dem Mechanismus, der die allgemeine Gravitation zustande bringt, unberührt ließ, verlieh er dem von ihm entdeckten Gesetze einen rein beschreibenden Charakter, so daß man das Gesetz im Sinne Newtons etwa wie folgt zu fassen hätte: die Bewegungen der Körper im Weltenraume und der an der Erdoberfläche fallenden gehen derart vor sich, wie dies geschehen müßte, wenn sie sich gegenseitig anziehen würden. Cotes, ein Schüler Newtons, hat zuerst den Gedanken einer „actio in distans“, nach welcher sich die Körper unvermittelt anziehen, im Vorworte zur zweiten Auflage der „Principia“, welches Newton vor dem Drucke nicht gelesen, klar ausgesprochen. Mochte man nun einerseits glauben, der im Vorworte zu seinem Werke stehende Gedanke werde von Newton gutgeheißen, mochte andererseits die großartige Entwickelung der Himmelsmechanik, die auf dem keiner Erklärung bedürftigen, tatsächlich richtigen Gravitationsgesetze beruht, es bewirken, — kurz, es wurde vergessen, daß man in Newtons Gesetz nur eine Beschreibung vor sich habe; es wurde in demselben der endgültige Ausdruck eines in Wirklichkeit sich abspielenden physikalischen Vorganges erblickt.

Der Gedanke an eine Fernewirkung herrschte im 18. Jahrhundert unbeschränkt; er erstarkte noch und erhielt neue Nahrung, als Coulombs Versuche gegen Ende desselben Jahrhunderts zeigten, daß auch die magnetischen und elektrischen Kräfte auf die Wechselwirkung besonderer hypothetischer Stoffe (zweier Magnetismen und zweier Elektrizitäten) zurückgeführt werden können, die unmittelbar in die Ferne nach Gesetzen, welche dem Newtonschen vollkommen analog sind, wirken.

Noch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde die „actio in distans“ allgemein in der Wissenschaft angenommen. Für Faraday, einen der größten Experimentatoren, der sich zugleich auch um die Philosophie der Physik hochverdient gemacht hat, war aber die Annahme, daß ein Körper unmittelbar Kräfte und Bewegungen dort hervorrufen könne, wo er sich selbst nicht befindet, völlig widerstrebend. Ohne auf die Frage nach der Gravitation näher einzugehen, wandte er sich besonders den magnetischen und elektrischen Erscheinungen zu und wies als erster darauf hin, daß hier das Zwischenmedium, das den Raum zwischen den sich scheinbar unmittelbar beeinflussenden Körpern erfüllt, die Hauptrolle spiele. Es ist hier nicht der Ort, sich über die weitere Geschichte dieser Frage zu verbreiten; wir werden sie später kennen lernen. Es möge hier der Hinweis genügen, daß die Versuche des großen, vorzeitig dahingegangenen deutschen Forschers H. Hertz die Richtigkeit der Faradayschen Grundideen über die Bedeutung des Zwischenmediums für die magnetischen und elektrischen Erscheinungen dargetan und für alle Zeit den Gedanken an eine actio in distans aus der Lehre von diesen Erscheinungen verbannt haben.

Gegenwärtig ist man wohl allgemein zur Überzeugung gelangt, daß eine actio in distans bei keiner physikalischen Erscheinung zugegeben werden darf. Wie sie jedoch aus der Lehre von der allgemeinen Gravitation zu bannen sei, ist eine bis jetzt noch ungelöste Frage, obgleich nach dieser Richtung unzählige verschiedenartige Versuche von Forschern angestellt worden sind, die danach gestrebt haben, eine „mechanische“ Erklärung der allgemeinen Gravitation zu finden. Die Hauptrolle bei allen diesen Erklärungen spielt die Annahme eines besonderen, den Weltraum erfüllenden Mediums, dessen Wirkungen die durch Formel (2) ausgedrückte Beschleunigung bedingen. Wir wollen auf dies Gebiet, das der reinen Spekulation angehört, nicht näher eingehen, uns aber dennoch einen flüchtigen Hinweis gestatten. Wir wissen, daß, wenn ein Körper A (Fig. 95) vorhanden ist, auf den Körper B eine Kraft f in der Richtung nach A ausgeübt wird. Man kann sich nun denken, daß eine derartige Kraft auf zweierlei Art wirkt: entweder als Zug, der auf B von der Seite aa aus (als solch eine Zugkraft hat man sich die actio in distans gedacht) oder als Druck, der auf B von der Seite bb aus wirkt. Man hat nun versucht, einen solchen Druck auf die Anwesenheit des Körpers A zurückzuführen.

Fig. 95.



Zu dem Zwecke hat man angenommen, die Teilchen des Zwischenmediums befinden sich in fortwährender Bewegung nach allen Richtungen und stoßen daher von allen Seiten her auf jeden Körper. Der Körper A beschirmt aber gewissermaßen den Körper B vor den von links erfolgenden Stößen. Die Zahl der Stöße, die auf B von rechts her erfolgt, ist somit größer als die von links her und dieser Überschuß an Stößen soll die Ursache für das Auftreten der Kraft f bilden (vgl. Isenkrahe, Rätsel der Schwerkraft, 1879).

Indem wir jüngere Leser davor warnen, sich frühzeitig mit ähnlichen Spekulationen zu beschäftigen, wollen wir auf einige Schwierigkeiten hinweisen, welche dieser Vorstellung entgegentreten. Zunächst ist nichts darüber bekannt, was für ein Zwischenmedium hier gemeint ist, — ist es etwa der Äther, von welchem bereits öfter die Rede war, oder ist es ein besonderes, die Gravitation verursachendes? Schwer zu erklären ist ferner die Tatsache, daß die innerhalb des anziehenden Körpers vorhandenen Teilchen die gleiche Wirkung auf außerhalb gelegene Massen ausüben wie die an seiner Oberfläche befindlichen, und daß die Materie selbst gewissermaßen absolut durchlässig für die allgemeine Anziehungskraft der Körper ist. Eine Übersicht über die „Erklärungsversuche“ der Gravitation und die hierher gehörige Literatur findet man in dem Artikel „Über Fernwirkungen“ von Drude in der Beilage zu Wied. Ann. **62**, I—XLIX, 1897.

Verschiedene Forscher haben sich bemüht, eine Theorie der Gravitation auf den Versuchen von Bjerknes (1863—1875) zu gründen. Aus diesen Versuchen, welche wir im zweiten Abschnitt, Abt. 2, besprechen werden, geht hervor, daß pulsierende Kugeln (deren Radius abwechselnd größer und kleiner wird), die sich in einer Flüssigkeit befinden, unter gewissen Bedingungen sich scheinbar anziehen oder abstoßen können. Wir begnügen uns, ein Verzeichnis der hierher gehörigen Arbeiten zu geben:

V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes. Leipzig 1900. Rapports au Congrès Internat. de Physique **1**, 251, 1900.

Hicks, Proc. Cambr. Phil. Soc. **3**, 277, 1879.

Basset, Hydrodynamics **1**, Kap. 11.

Leahy, Cambr. Trans. **14**, 45, 1885.

Pearson, Cambr. Trans. **14**, 71, 1885. London math. Proc. **20**, 38, 1889. Amer. Journ. of Mathem. **13**, 309, 1891.

Korn, Sitzungsber. Münch. Acad. **33**, 383, 563, 1903. Atti d. IV. Congr. Intern. d. Math. Rom. **3**, 81, 1904.

Burton, Phil. Mag. (6) **17**, 71, 1909.

Im Anschluß an die Relativitätstheorie (S. 12) ist in letzter Zeit eine große Anzahl von Arbeiten über die Gravitation erschienen. Wir werden auf sie erst später (Band V) eingehen und beschränken uns hier, auf ein paar wichtige Arbeiten hinzuweisen:

A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916.

E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, J. Springer, 1917.

M. Born, Einsteins Theorie der Gravitation und der allgemeinen Relativität. Physik. Zeitschr. **17**, 51, 1916.

Dieser letzte Aufsatz gibt eine historische Darstellung der Entwickelung unserer Ideen über die Gravitation und enthält eine Übersicht über die in Betracht kommende Literatur.

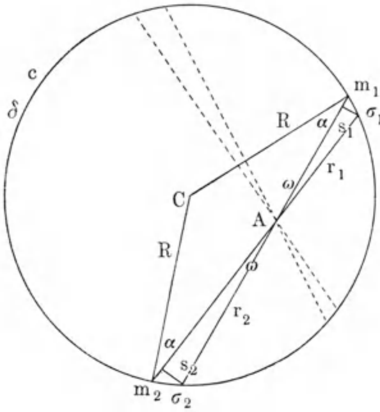
Auf S. 126 war der Gedanke ausgesprochen worden, daß es eine potentielle Energie vielleicht überhaupt nicht in der Welt gebe, sondern daß in allen Fällen, wo die Fähigkeit eines Systems von Körpern, eine gewisse Arbeit zu leisten, nur durch deren gegenseitige Lage bedingt erscheint, wir es in der Tat mit kinetischer Energie eines uns noch unbekannten Stoffes zu tun haben. Wenn wir ein Gewicht heben, so verwenden wir einen Teil der in unseren Muskeln angesammelten Energie zur Leistung einer Arbeit, als deren Ergebnis, wie wir sagen, die potentielle Energie der sich anziehenden Körper, d. h. der Erdkugel und des gehobenen Gewichtes, auftritt. Gibt es indes eine actio in distans nicht, ist vielmehr die Ursache für die scheinbare Anziehung in der Bewegung eines besonderen Mediums zu suchen, so müssen wir als direkte Folge der durch das Aufheben eines Gewichtes geleisteten Arbeit eine Vergrößerung der kinetischen Energie dieses Mediums annehmen; fällt dagegen ein Körper, so geht die Energie des Mediums in Bewegungsenergie des fallenden Körpers über.

§ 5. Anziehung einer Kugelschale und einer Kugel auf einen Punkt. Es sei eine Kugelschale von sehr geringer Dicke c, der Dichte δ und dem Radius R gegeben; seine Gesamtmasse M ist gleich

$$M = 4\pi R^2 c\delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

In Fig. 96 ist die Dicke der Schale c nicht angedeutet; ihr Durchschnitt ist vielmehr als Kreislinie gezeichnet.

Fig. 96.



Wir wollen nun ermitteln: 1. mit welcher Kraft F_i die Kugelschale auf einen in ihrem Inneren gelegenen materiellen Punkt m (dessen Masse $= m$ ist), und 2. mit welcher Kraft F_e sie auf einen außerhalb befindlichen Punkt wirkt.

1. Wir nehmen an, die Masse m befinde sich im Punkte A (Fig. 96). Konstruieren wir nach beiden Seiten den unendlich kleinen Raumwinkel ω, so schneidet er aus der Kugelschale zwei Flächenelemente σ_1 und σ_2 heraus, deren Massen $m_1 = \sigma_1 c\delta$ und $m_2 = \sigma_2 c\delta$ sind; diese ziehen die Masse m mit den Kräften f_1 und f_2 an,

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{c\delta m\sigma_1}{r_1^2} \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{c\delta m \sigma_2}{r_2^2} \quad \ldots \quad (18)$$

die nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind; r_1 und r_2 bedeuten hier die Entfernungen von A nach σ_1 bzw. nach σ_2.

Wir beschreiben ferner um A als Mittelpunkt zwei Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2; s_1 und s_2 seien die Flächenelemente, die aus ihnen durch den Raumwinkel ω herausgeschnitten sind. Offenbar ist

$$s_1 = r_1^2\omega, \quad s_2 = r_2^2\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Verbinden wir nun den Mittelpunkt C mit σ_1 und σ_2, so erhalten wir eine Figur, die sich unendlich wenig von einem gleichschenkligen Dreieck unterscheidet; $\angle\, Cm_1A = \angle\, Cm_2A = \alpha$. Der Winkel zwischen σ_1 und s_1 ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen R und r_1, d. h. $\angle\,(\sigma_1, s_1) = \alpha$ und ebenso $\angle\,(\sigma_2, s_2) = \alpha$. Aber s_1 ist die Projektion des Elements σ_1 auf die Kugelfläche (mit dem Radius r_1), und daher ist $s_1 = \sigma_1 \cos(\sigma_1, s_1) = \sigma_1 \cos\alpha$; hieraus folgt mit Rücksicht auf (19)

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{\cos\alpha} = \frac{r_1^2\omega}{\cos\alpha}; \qquad \sigma_2 = \frac{s_2}{\cos\alpha} = \frac{r_2^2\omega}{\cos\alpha}.$$

Setzt man diese Werte in Formel (18) ein, so erhält man

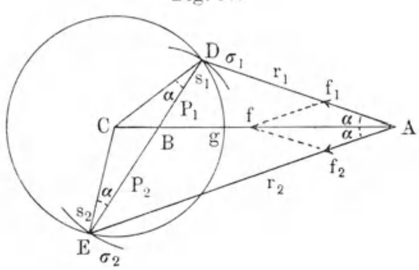
$$f_1 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}; \qquad f_2 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}.$$

Es ist also $f_1 = f_2$, d. h. die Elemente der Kugelschale, welche durch den Raumwinkel ω herausgeschnitten sind, ziehen die in A befindliche Masse m an mit Kräften, die an Größe gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind; ihre Resultante ist gleich Null. Legt man nun durch A als Scheitelpunkt nach allen möglichen Richtungen Raumwinkel, so kann man mit ihnen die ganze Kugelschale (siehe die punktiert gezeichneten Linien) in elementare Teile zerlegen, die paarweise einander gegenüberliegen und m mit gleicher Kraft anziehen. Die Kräfte, welche somit auf m wirken, heben sich paarweise auf, die ganze Kugelschale übt somit auf einen in ihrem Inneren gelegenen Punkt keinerlei Wirkung aus, d. h.

$$F_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

2. Wir gehen jetzt auf die Wirkung einer Kugelschale auf eine Masse m über, die in einem außerhalb der Schale gelegenen Punkte A (Fig. 97) sich befindet. Der Abstand des Punktes A vom Kugelmittelpunkt C sei gleich $CA = x$; R, c, δ und $M = 4\pi R^2 c\delta$ haben ihre frühere Bedeutung. Wir suchen zunächst auf CA einen solchen Punkt B, daß der Radius Cg die mittlere Proportionale zwischen $CA = x$ und $CB = a$ darstellt, daß also

Fig. 97.



$$\frac{a}{R} = \frac{R}{x} \quad . \quad . \quad (21)$$

ist. Durch B legen wir einen unendlich kleinen Raumwinkel ω, dessen Richtung in Fig. 97 nur angedeutet ist. Er schneidet aus der Oberfläche der Kugelschale zwei bei den Punkten D und E liegende Flächenelemente σ_1 und σ_2 und aus der Schale die Massen $m_1 = \sigma_1 c\delta$ und $m_2 = \sigma_2 c\delta$ heraus. Wir verbinden nun D und E mit C und A; sei ferner $\angle CDB = \angle CEB = \alpha$, $BD = p_1$, $BE = p_2$, $DA = r_1$ und $EA = r_2$. Endlich seien f_1 und f_2 die Kräfte, mit denen die in A befindliche Masse m von den Elementen m_1 und m_2 der Kugelschale angezogen wird. Wir erhalten

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{\sigma_1 c\delta m}{r_1^2}; \quad f_2 = \frac{\sigma_2 c\delta m}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Um B beschreiben wir wieder mit den Radien p_1 und p_2 zwei Kugelflächen, die durch D und E gehen. Der Raumwinkel ω möge aus ihnen die Flächenelemente s_1 und s_2 herausschneiden. Wie schon früher, ist $s_1 = p_1^2\omega = \sigma_1 \cos\alpha$; $s_2 = p_2^2\omega = \sigma_2 \cos\alpha$. Setzt man die hieraus erhaltenen σ_1 und σ_2 in (22) ein, so erhält man

$$f_1 = \frac{c\,\delta\, m\,\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2; \quad f_2 = \frac{c\,\delta\, m\,\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{p_2}{r_2}\right)^2 \quad \ldots \quad (23)$$

$\triangle\, DCB$ und $\triangle\, DCA$ sind einander ähnlich, denn Winkel C ist ihnen gemeinsam, die Seiten dieses Winkels aber stehen in Proportion; (21) gibt $CB : CD = CD : CA$. Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt, daß $\angle\, DAC = \angle\, CDB = \alpha$ und ferner, daß $\frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA}$ oder $\frac{p_1}{r_1} = \frac{R}{x}$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ECB und ECA folgt, daß $\angle\, CAE = \angle\, CEB = \alpha$ und $\frac{p_2}{r_2} = \frac{R}{x}$ ist. Setzt man die gefundenen Beziehungen in (23) ein, so ergibt sich

$$f_1 = f_2 = \frac{c\,\delta\, m\,\omega\, R^2}{x^2 \cos\alpha} \quad \ldots \quad (24)$$

Es sind also die Kräfte f_1 und f_2 einander gleich und bilden den gleichen Winkel α mit der Richtung von CA; ihre Resultante f ist nach dem Mittelpunkte gerichtet und ist gleich

$$f = 2\, f_1 \cos\alpha = \frac{2\, c\,\delta\, m\,\omega\, R^2}{x^2} \quad \ldots \quad (25)$$

Legt man durch B unendlich viele Raumwinkel, so zerlegt man dadurch die Kugelschale in Elementenpaare, von denen jedes eine resultierende, nach dem Mittelpunkte gerichtete Kraft f gibt. Die gesuchte Kraft F_e, mit welcher die ganze Kugelschale auf die Masse m anziehend wirkt, erhält man durch einfache Summation der Kräfte f, d. h.

$$F_e = \sum f = \sum \frac{2\, c\,\delta\, m\,\omega\, R^2}{x^2} = \frac{2\, R^2 c\,\delta\, m}{x^2} \sum \omega.$$

Die Summe der Raumwinkel ω, welche die ganze Kugelschale erfüllen, ist gleich 2π, da jeder von ihnen ein Doppelwinkel ist; da die ganze Masse M der Kugelschale gleich $4\pi R^2 c\,\delta$ ist, so erhält man

$$F_e = \frac{Mm}{x^2} \quad \ldots \quad (26)$$

Diese Formel lehrt uns, daß eine dünne Kugelschale auf einen außerhalb gelegenen Punkt derart wirkt, als ob die ganze Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Eine homogene Kugelschale von endlicher Dicke kann man sich in eine unendliche Zahl konzentrischer, unendlich dünner Schalen zerlegt denken. Wendet man sodann auf diese Schalen Formel (20) und (26) an, so sieht man, daß auch eine Kugelschale von endlicher Dicke auf einen innerhalb gelegenen Punkt keine Wirkung ausübt, auf einen außerhalb befindlichen dagegen so wirkt, als ob ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Eine massive homogene Kugel kann ebenfalls in konzentrische Schalen zerlegt werden, daher ist auch ihre Wirkung auf einen außerhalb gelegenen Punkt derart, als ob die Gesamtmasse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Wir haben von diesem Satze schon auf Seite 205 Gebrauch gemacht. Auf die Masse m, welche sich in der Entfernung x vom Kugelmittelpunkt befindet, wirkt eine Kraft

$$F_e = \frac{Mm}{x^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3 \delta m}{x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Liegt die Masse m auf der Kugeloberfläche selbst, so ist die Kraft

$$F = \frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3} \pi R \delta m \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Es soll nunmehr die Kraft F_i bestimmt werden, mit welcher eine massive Kugel auf eine innerhalb derselben im Abstande $x < R$ vom Kugelmittelpunkt befindliche Masse einwirkt. Wir denken uns eine mit der gegebenen Kugel konzentrische Kugelfläche konstruiert, deren Radius gleich x ist; sie wird durch m gehen und die gegebene Kugel in zwei Stücke teilen: in eine Kugelschale, innerhalb deren m liegt, von welcher es also keine Wirkung erfährt, und eine Kugel mit dem Radius x, an deren Oberfläche sich m befindet. Letztere Kugel zieht m nach ihrem Mittelpunkte mit einer Kraft, die erhalten wird, wenn man in (28) x an Stelle von R einsetzt. Wird x vom Mittelpunkt nach m hin positiv gerechnet, so hat man den Ausdruck für die Kraft F_i mit einem Minuszeichen zu versehen, um dadurch anzudeuten, daß sie zum Mittelpunkt hinwirkt, d. h. nach der negativen Seite hin:

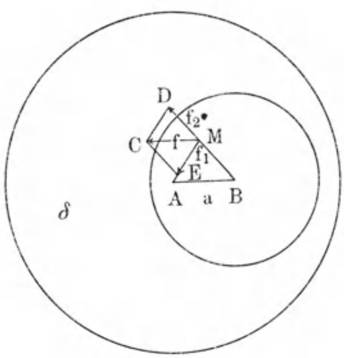
$$F_i = -\frac{4}{3} \pi \delta x m \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Hiernach ist die Anziehung einer massiven Kugel auf einen innerhalb gelegenen Punkt proportional dem Abstande des letzteren vom Kugelmittelpunkte und nach dem Mittelpunkte gerichtet.

Formel (29) ist (20) auf Seite 136 analog, nur tritt anstatt x die Größe s auf. Sonach würde die Masse m, wenn sie sich in einer durch den Mittelpunkt einer homogenen Kugel gehenden ganz engen Röhre frei bewegen könnte und nur der Anziehung dieser Kugel unterworfen wäre, eine harmonische Schwingungsbewegung ausführen. Vergleicht man Formel (29) mit der eben herangezogenen Formel (20), so darf man nicht etwa c gleich $\frac{4}{3} \pi \delta$ setzen, denn in Formel (20) ist die Kraft in absoluten, hier aber in astronomischen Einheiten ausgedrückt.

§ 6. Das homogene Kraftfeld. Gegeben sei eine homogene Kugel mit dem Mittelpunkt A (Fig. 98) und innerhalb derselben eine kugelförmige Höhlung mit dem Mittelpunkte B; es soll die Kraft f, die auf eine in der Höhlung im Punkte M befindliche Masse m wirkt, bestimmt werden. Sei δ die Dichte der größeren Kugel. Eine Kugel, in welcher sich ein Hohlraum befindet, kann man durch zwei zusammengehörige Kugeln ersetzen: eine massive mit dem Mittelpunkt A und der Dichte δ und eine andere, ebenfalls massive mit dem Mittelpunkt B und der Dichte $-\delta$ (vgl. Fig. 94 und die Darlegungen auf S. 211). Die erste dieser Kugeln zieht die Masse m mit der Kraft $f_2 = ME$ nach A hin an, welche Kraft nach (29) dem Abstande MA proportional ist. Man kann demnach $f_1 = K.MA$ setzen, wo K nur von der Dichte δ, nicht aber vom Kugelradius abhängt [vgl. (29)]. Die zweite Kugel stößt die Masse m mit der Kraft $f_2 = MD$ ab. Die Kraft f_2 ist nach B gerichtet und gleich $f_2 = K.MB$. Konstruiert man die Resultante f, so sieht man, daß $\triangle\, CDM \sim \triangle\, AMB$ ist, denn es ist $\angle\, CDM = \angle\, AMB$ und ferner

Fig. 98.



$$\frac{MD}{CD} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{K.MB}{K.MA} = \frac{MB}{MA}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt, daß $\angle\, DMC = \angle\, MBA$, folglich $MC = f$ und parallel zu BA ist. Das gleiche gilt für alle Punkte M der Höhlung. Ferner ist

$$\frac{MC}{AB} = \frac{MD}{MB}, \text{ d. h. } \frac{f}{a} = \frac{f_2}{MB} = \frac{K.MB}{MB} = K,$$

$$f = Ka \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Drückt man f in astronomischen Einheiten aus, so ist

$$K = \frac{4}{3}\pi\delta m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Formel (30) zeigt uns, daß die Kraft f der Größe nach von der Lage des Punktes M innerhalb der Höhlung unabhängig ist.

Ein kugelförmiger Hohlraum im Inneren einer homogenen Kugel stellt ein homogenes Kraftfeld (Seite 96) dar, d. h. auf eine innerhalb desselben befindliche Masse m wirkt, einerlei welchen Punkt die Masse einnimmt, ein und dieselbe Kraft, die der Verbindungsgeraden des Kugel- und

Hohlraummittelpunktes parallel und dem Abstande dieser Mittelpunkte voneinander proportional ist.

Die Intensität (Seite 96) dieses homogenen Kraftfeldes hängt nicht von den Radien der Kugel und des kugelförmigen Hohlraumes ab. Fallen die Mittelpunkte von Kugel und Hohlraum zusammen ($a = 0$), so wird die Intensität des Feldes gleich Null, und wir haben den Fall einer homogenen Kugelschale, für welche, wie wir sahen, $F_i = 0$ ist.

Die zwei Kugeln $ABCFA$ (Fig. 99) mit der Dichte $+\delta$ und $AECDA$ mit der Dichte $-\delta$ bestehen zusammengenommen aus der positiven Masse $ABCEA$, der negativen Masse $AFCDA$ und dem linsenförmigen Hohlraume $AECFA$. In derselben Weise wie vorhin finden wir, daß dieser Hohlraum ein gleichförmiges Kraftfeld darstellt, dessen Intensität der Dichte δ und dem Abstande der Mittelpunkte beider Kugeln proportional ist.

Fig. 99.

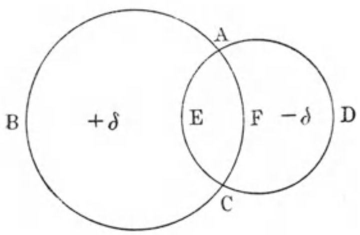
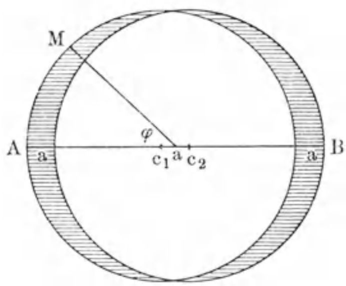


Fig. 100.



Besonders wichtig ist, wie wir sehen werden, der Fall, wo die Radien beider Kugeln gleich und ihre Mittelpunkte c_1 und c_2 (Fig. 100) einander außerordentlich nahe sind. Dann ist das homogene Kraftfeld in einem fast kugelförmigen Raume enthalten, der von zwei gleichen Wülsten (in der Figur schraffiert) von positiver bzw. negativer Masse umgeben ist. Setzt man $c_1 c_2 = a$, so ist, wie man leicht sieht, die Dicke c des Wulstes an einer beliebigen Stelle M gleich

$$c = a \cos \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

wo φ der Winkel zwischen der durch die Mittelpunkte c_1 und c_2 gehenden Geraden AB und dem von c_1 oder c_2 (für ein sehr kleines $c_1 c_2 = a$ ist dies gleichgültig) nach M gezogenen Radius ist.

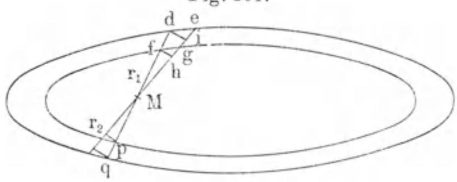
Mißt man die Kräfte in astronomischen Einheiten, d. h. geht man von Formel (12) auf Seite 208 aus, so wird die Intensität des Feldes $\psi = f : m$ gleich

$$\psi = \frac{4}{3} \pi \delta a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

wo a die größte Dicke der beiden Wülste ist.

§ 7. Anziehung einer ellipsoidischen Schale auf einen Punkt. Gegeben sei eine unendlich dünne homogene Schale (mit der Dichte δ), welche von den Oberflächen zweier ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsoide (Fig. 101) begrenzt ist. Es sind mithin die Achsen a, b, c bzw. a_1, b_1, c_1 beider Ellipsoide einander proportional, also

Fig. 101.



$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \cdot \quad \cdot \ (34)$$

In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß, wenn man durch einen beliebigen Punkt M eine Gerade zieht, die zwischen beiden Ellipsoidflächen gelegenen Abschnitte einander gleich sind, also $fd = pq = \alpha$ ist. In M befinde sich die Masse m; wir legen durch M als Scheitel einen unendlich kleinen Raumwinkel ω. Derselbe schneidet aus der Schale zwei Massen m_1 und m_2 heraus, welche die Masse m mit den Kräften f_1 bzw. f_2 anziehen, wobei

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2}; \qquad f_2 = \frac{m_2 m}{r_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (35)$$

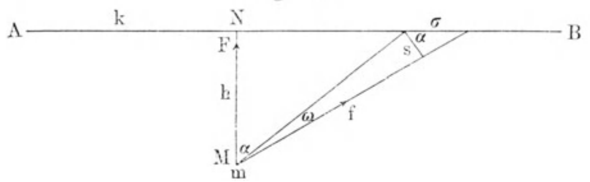
Legt man durch f und d Kugelflächen, deren Mittelpunkt M ist, so schneidet unser Raumwinkel aus der von diesen Flächen begrenzten Kugelschale das Element $fdih$ heraus, dessen Volumen sich von dem des Elementes $fdeg$ um eine im Vergleich zu den Elementen selbst verschwindende Größe unterscheidet. Man kann daher setzen $m_1 = \delta r_1^2 \omega \times fd = \delta r_1^2 \omega \alpha$; ebenso ist $m_2 = \delta r_2^2 \omega \alpha$. Setzt man diese Werte für m_1 und m_2 in Formel (35) ein, so erhält man $f_1 = f_2$.

Hieraus ergibt sich, wie vorhin für die Kugelschale: Eine von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoidflächen begrenzte Schale übt auf einen in ihrem Hohlraum gelegenen Punkt keine Wirkung aus.

§ 8. Anziehung einer unendlichen Ebene auf einen Punkt. Gegeben sei eine unendlich große, dünne Scheibe, deren Dicke c und deren Dichte δ sei. Die Masse m_1 eines Teiles dieser Scheibe, deren Oberfläche σ ist, ist gleich $m_1 = c\delta\sigma$. Stellen wir uns vor, die Dicke c nehme ab, während die Dichte δ zunimmt, so daß $c\delta = k$ konstant bleibt, so erhalten wir im Grenzfalle eine Ebene AB (Fig. 102), die mit einer Schicht eines Stoffes bedeckt ist, wobei wir jedoch die Dicke dieser Schicht vernachlässigen können. Auf dem Teile σ unserer Ebene befindet sich die Stoffmenge $m_1 = k\sigma$; wir sagen in diesem Falle, der Stoff habe die Oberflächendichte k und nennen die Massen selbst Oberflächenmassen. Die gewöhnliche (Volumen-) Dichte dieser

Massen ist unendlich groß. Es soll nunmehr die Kraft F berechnet werden, mit welcher die Ebene die in M befindliche Masse m anzieht. Ist $MN \perp AB$, so ist die Kraft F offenbar von M nach N gerichtet. Sei nun σ ein kleiner Teil der Ebene AB mit der Masse $m_1 = k\sigma$; sei ferner r die Entfernung $M\sigma$, ω der Raumwinkel, unter welchem der Teil σ unserer Ebene erscheint und endlich $\angle NM\sigma = \alpha$. Wir

Fig. 102.



beschreiben um M mit dem Radius r eine Kugelfläche, aus welcher der Raumwinksl ω das Stück s herausschneidet; dann ist $s = \sigma \cos \alpha$. Die Kraft f, mit welcher die Masse $m_1 = k\sigma$ die Masse m anzieht, ist gleich $f = \frac{m m_1}{r^2} = \frac{m k \sigma}{r^2}$. Danach folgt, daß die Resultante F aller Kräfte f gleich ist

$$F = \sum f \cos \alpha = \sum \frac{m k \sigma \cos \alpha}{r^2} = \sum \frac{m k s}{r^2} =$$
$$= \sum m k \omega = m k \sum \omega.$$

$\Sigma \omega$ ist gleich dem Raumwinkel, unter welchem die unendliche Ebene AB vom Punkte M aus erscheint; dieser Winkel ist offenbar gleich 2π, also

$$F = 2\pi k m \quad \text{. . . . . (36)}$$

Die Kraft, mit welcher eine unendliche Ebene AB einen außerhalb liegenden Punkt M anzieht, hängt vom Abstande $MN = h$ dieses Punktes M von der Ebene nicht ab. Wir haben mithin zu beiden Seiten der Ebene ein gleichförmiges Kraftfeld, dessen Intensität ψ gleich ist

$$\psi = 2\pi k \quad \text{. . . . . (37)}$$

Siebentes Kapitel.

Elemente der Potentialtheorie.

§ 1. **Punktfunktionen.** Den folgenden Elementen der Potentialtheorie müssen wir einige Worte über Punktfunktionen vorausschicken. Jede Größe, die sich auf einen bestimmten Punkt bezieht, wird Punktfunktion genannt. So ist z. B. die Temperatur eine Punktfunktion, da sich ihr Wert im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändert, und man vom Werte der Temperatur in einem gegebenen Punkte M reden kann. Sei A ein gegebener Punkt und r der Abstand eines anderen Punktes M von A, dann sind r, r^2, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\sqrt{r}}$ usw. ebenfalls Funktionen des Punktes M, da der Wert dieser Größen von der Lage des Punktes M abhängt.

Jede Funktion V eines Punktes M kann man als Funktion der Koordinaten x, y, z dieses Punktes ansehen, d. h. man kann $V = f(x, y, z)$ setzen. So ist z. B. $V = \frac{1}{r}$ eine Punktfunktion von der Form

$$V = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

wenn a, b, c die Koordinaten des Punktes A sind. Der geometrische Ort der Punkte, für welche V ein und denselben Wert C hat, stellt eine gewisse Fläche dar; ihre Gleichung lautet

$$V = f(x, y, z) = C.$$

Eine solche Fläche heißt die Niveaufläche (Iso-Fläche) der gegebenen Punktfunktion. So nennt man eine Fläche, deren sämtliche Punkte die gleiche Temperatur haben, eine isothermische Fläche. Legt man der Zahl C verschiedene Werte bei, so erhält man unendlich viele Niveauflächen; durch jeden Punkt des Raumes geht eine solche Fläche und nur eine, wenn die Funktion eindeutig ist. Durch jeden Punkt des Raumes kann man eine Kurve ziehen, welche die Niveauflächen senkrecht durchsetzt, so daß in jedem Punkte A die Kurventangente senkrecht ist zur Tangentialebene der Niveaufläche, welche durch A geht. Solche Kurven heißen orthogonale Trajektorien eines Systems von Niveauflächen.

§ 2. **Das Potential einer anziehenden Masse (eines materiellen Punktes).** In diesem Kapitel werden wir vom Ausdrucke

$$f = \frac{m m_1}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ausgehen, wo f die Kraft bedeutet, mit welcher sich zwei im Abstande r

voneinander befindliche Massen m und m_1 anziehen. Die hier zugrunde liegende Krafteinheit ist die astronomische, welche 15 Millionen mal kleiner als die CGS-Einheit, d. h. die Dyne, ist, falls man die Massen m und m_1 in Grammen, die Entfernung r in Zentimetern mißt. Für die Arbeit R wählen wir wie früher den Ausdruck

$$R = fs \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

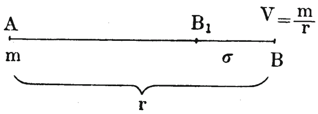
wo s der Weg ist, welchen der Angriffspunkt der Kraft f in der Richtung der letzteren durchläuft. Mißt man hierbei s in Zentimetern, so führt man eine besondere Arbeitseinheit ein, die gleich $\frac{1}{15000000}$ Erg ist (vgl. S. 104).

Es befinde sich nun im Punkte A (Fig. 103) die Masse m; in der Entfernung r wählen wir einen geometrischen Punkt B und nennen die Größe V, deren Zahlenwert durch die Formel

$$V = \frac{m}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

gegeben ist, das Potential des Punktes B oder das Potential im Punkte B. Dieses Potential wird gewissermaßen durch die Anwesenheit der Masse m in A „hervorgerufen“. In verschiedenen Punkten B ist das Potential im allgemeinen verschieden; es ist somit eine Punktfunktion. Die Niveauflächen des Potentials sind konzentrische Kugelflächen, deren Mittelpunkt A ist. Die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen sind die Radien obiger Kugelflächen, d. h. von A ausgehende Gerade. Für unendlich ferne Punkte strebt das Potential dem Grenzwerte Null zu. Geht man von B in der Richtung nach A, d. h. nach der Seite des wachsenden Potentials, um das unendlich kleine Wegstück $BB_1 = \sigma$ weiter, so findet man in B_1 für das Potential den neuen Wert $V + \Delta V$. Hier bedeutet ΔV die Änderung des Potentials, die dem Übergange von B nach B_1 entspricht. Offenbar ist

Fig. 103.



$V + \Delta V = \frac{m}{r - \sigma}$, also $\Delta V = \frac{m}{r - \sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r - \sigma)}$. Ist σ sehr klein, so kann man $r\sigma$ vernachlässigen und erhält

$$\Delta V = \frac{m\sigma}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Wenn irgendeine Masse m_1 sich von B nach B_1 bewegt, so verrichtet die zwischen m und m_1 wirkende Anziehungskraft f eine elementare Arbeit, die wir mit ΔR bezeichnen wollen. Da die Kraft f von

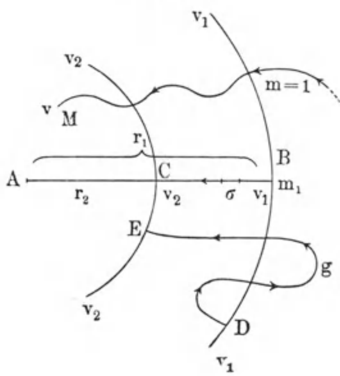
B nach A gerichtet ist, so ist $\Delta R = f\sigma = \frac{mm_1}{r^2} \cdot \sigma$. Durch Vergleichung mit (4) ergibt sich

$$\Delta R = m_1 \Delta V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d. h. die elementare Arbeit einer Anziehungskraft wird durch das Produkt aus der fortbewegten Masse und der Potentialänderung, welche dieser Fortbewegung entspricht, gemessen.

Hat die Masse m_1 die endliche Wegstrecke von B nach C (Fig. 104) zurückgelegt, so erhält man leicht die Gesamtarbeit R der Anziehungskraft, wenn man den Weg BC in Wegelemente σ zerlegt, deren jedem die kleine Arbeitsgröße ΔR entspricht, so daß $R = \Sigma \Delta R$ ist. Ist nun $AB = r_1$ und $AC = r_2$ und bezeichnen wir die Potentiale der Punkte B und C mit $V_1 = \frac{m}{r_1}$ und $V_2 = \frac{m}{r_2}$, dann ist nach (5)

Fig. 104.



$$R = \Sigma \Delta R = \Sigma m_1 \Delta V = m_1 \Sigma \Delta V.$$

$\Sigma \Delta V$ stellt die Summe der kleinen Potentialänderungen dar, die den Strecken σ, in welche wir den ganzen Weg von B nach C zerlegten, entsprechen; offenbar ist diese Summe gleich der Gesamtänderung des Potentials, d. h. $\Sigma \Delta V = V_2 - V_1$ und daher

$$R = m_1 (V_2 - V_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Arbeit einer Anziehungskraft wird durch das Produkt aus der angezogenen Masse und der Differenz der Potentiale im Anfangs- und Endpunkte des Weges gemessen.

Die Anziehungskraft gehört zu den Zentralkräften (S. 109), daher hängt die Arbeit R weder von der Form des zurückgelegten Weges, noch von der Lage des Anfangs- und Endpunktes desselben auf zwei Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2 ab, die hier Niveauflächen des Potentials sind. Formel (6) gibt mithin auch die Arbeit, die von der Kraft f bei Fortbewegung der Masse m_1 auf dem Wege DgE geleistet wird.

Die Arbeit hängt bloß von der Potentialdifferenz der beiden Punkte ab, zwischen welchen die gegebene Masse sich bewegt hat. Ist $m = 1$, so ist

$$R = V_2 - V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

d. h. die Potentialdifferenz zweier Punkte ist gleich der Arbeit, welche beim Transport der Masseneinheit von dem einen Punkte zum anderen geleistet wird. Bewegt sich die

Masse $m_1 = 1$ auf einem beliebigen Wege von einem unendlich fernen Punkte zum Punkte M (Fig. 104), dessen Potential V ist, so ist $V_1 = 0$, $V_2 = V$, und wir erhalten statt (7)

$$R = V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Das Potential eines gegebenen Punktes ist gleich der Arbeit, welche von der anziehenden Kraft geleistet worden ist bei Überführung der Masseneinheit aus der Unendlichkeit nach diesem Punkte auf beliebigem Wege. Aus (6) folgt, daß $R = 0$ ist, wenn Anfangs- und Endpunkt des zurückgelegten Weges auf derselben Niveaufläche des Potentials liegen.

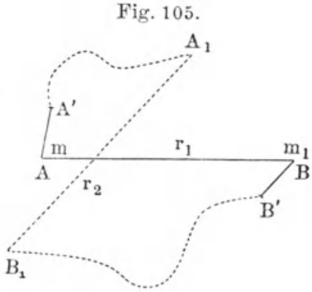
Wenn sich m_1 von A entfernt, so wird die Arbeit R' geleistet entweder auf Kosten der Bewegungsenergie von m_1 selbst oder auf Kosten eines beliebigen anderen Energievorrates. Im letzteren Falle sagt man, R' sei die Arbeit äußerer Kräfte. Der Massenverschiebung auf dem Wege CB oder EgD muß die Arbeit R' entsprechen, welche ihrem absoluten Betrage nach gleich R ist. Der Unterschied besteht nur darin, daß hier der Anfangspunkt des Weges zum Endpunkte wird und umgekehrt. Unsere Formeln (6) und (8) geben $R' = m_1(V_2 - V_1)$ und $R' = V$, d. h.: Die von äußeren Kräften geleistete Arbeit wird durch das Produkt der bewegten Masse in die Potentialdifferenz zwischen dem Anfangs- und Endpunkte des Weges gemessen.

Das Potential eines gegebenen Punktes ist gleich der Arbeit, welche von äußeren Kräften geleistet werden müßte, um die Masseneinheit auf einem beliebigen Wege von diesem Punkte aus in die Unendlichkeit zu befördern.

Die Kraft f ist in jedem Punkte des Raumes nach A (Fig. 103 und 104) gerichtet, hat also dieselbe Richtung, wie der Radius der Kugelfläche, welche die Niveaufläche des Potentials darstellt.

Hieraus ergibt sich folgender Satz: Die wirkende Kraft ist in jedem Punkte des Raumes senkrecht zur Niveaufläche des Potentials, welche durch diesen Punkt geht. Die Kraftlinien sind die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen des Potentials.

Fig. 105.



Wir wollen nun wieder annehmen, die Massen m und m_1 befinden sich in den Punkten A und B (Fig. 105) im Abstande r voneinander. Wir führen hier eine neue Größe W ein, deren Zahlenwert durch die Formel

$$W = \frac{m m_1}{r} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

bestimmt wird und die wir das Potential der Massen m und m_1 aufeinander nennen wollen. Ist V das Potential des Punktes B, welches durch Punkt A „hervorgerufen“ ist, und V_1 das durch B hervorgerufene Potential von A, d. h. ist $V = \frac{m}{r}$ und $V_1 = \frac{m_1}{r}$, so ist

$$W = \frac{m m_1}{r} = V m_1 = V_1 m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9, a)$$

Rückt m_1 von B nach B', so ist die von der Kraft f geleistete Arbeit $\varDelta R$ gleich $\varDelta R = m_1 \varDelta V = \varDelta(m_1 V) = \varDelta W$, d. h. gleich der Potentialänderung der Massen. In analoger Weise verrichtet die Kraft f der gegenseitigen Massenanziehung bei Verschiebung von A nach A' eine Arbeit, die gleich $\varDelta R = m \varDelta V_1$ ist, wo $\varDelta V_1$ die Potentialdifferenz der Punkte A und A' bedeutet. Hieraus folgt $\varDelta R = \varDelta (m V_1) = \varDelta W$. Welche von den beiden Massen ihre Lage also auch ändert, die Arbeit $\varDelta R$ ist immer gleich der Änderung von W. Wenn zuerst m von A nach A' rückt und darauf m_1 von B nach B', so ist die gesamte, durch die gegenseitige Anziehung der beiden Massen m und m_1 geleistete Arbeit offenbar gleich der totalen Änderung der Größe W. Wir hatten aber gesehen, daß die Arbeit innerer Zentralkräfte unabhängig davon ist, auf welche Weise ein System aus einer Anordnung zu einer anderen gelangt ist (S. 110), daher ist auch bei gleichzeitiger Ortsveränderung der Massen m und m_1 die Arbeit $\varDelta R$ numerisch gleich der Änderung der Größe W. Zerlegt man die endlichen Verschiebungen in ihre Elemente, so können wir hieraus leicht folgendes Ergebnis ableiten: Gelangen zwei materielle Punkte mit den Massen m und m_1 aus irgendeiner Anfangslage in A und B, bei welcher ihr Potential W den besonderen Wert W_1 hat, auf irgendeinem Wege in die neue Lage A_1 und B_1 (Fig. 105), für welche W den Wert W_2 hat, so ist hierbei die gesamte Arbeit R ihrer gegenseitigen Anziehung gleich

$$R = W_2 - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

d. h. gleich der Differenz ihrer Potentiale für die End- und Anfangslage. Ist $AB = r_1$ und $A_1 B_1 = r_2$, so ist

$$R = W_2 - W_1 = \frac{m m_1}{r_2} - \frac{m m_1}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Waren die Massen anfänglich unendlich weit voneinander entfernt und kamen sie sodann auf beliebigen Wegen in eine Lage, in welcher ihr Potential den Wert W hat, so hat man in (11) die Werte $W_1 = 0$, $W_2 = W$ einzusetzen und erhält

$$R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das Potential zweier Punkte aufeinander ist gleich der Arbeit der zwischen ihnen wirksamen Anziehungskraft, welche bei ihrem Übergange aus unendlichem gegenseitigen Abstande in die gegebene Lage geleistet worden ist. Wenn W_0 der größte Wert von W ist, der also der größtmöglichen Annäherung zweier Massen entspricht, so ist $R = W_0 - W$ die Gesamtarbeit, welche diese beiden Massen leisten können. Offenbar ist demnach $W_0 - W$ der gesamte Vorrat an potentieller Energie, den das betrachtete, aus zwei Massen bestehende System besitzt.

§ 3. Das Potential eines Systems wirkender Massen (materieller Punkte). Gegeben sei ein System materieller Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 ... (Fig. 106) und ferner der geometrische Punkt A in der Entfernung r_1 von m_1, r_2 von m_2 usw. Wir bezeichnen als das durch dieses Punktsystem m_i in A gewissermaßen hervorgerufene Potential V die Größe

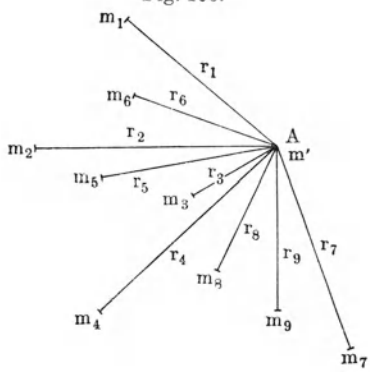
$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = \sum \frac{m}{r} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Es ist also gleich der Summe der in A durch die einzelnen Massen des Systems hervorgerufenen Potentiale. Bilden die Massen einen massiven Körper, so denken wir uns ihn in unendlich viele kleine Teile zerlegt, von denen jeder die Rolle eines der Systempunkte übernimmt; in diesem Falle ist

$$V = \int \frac{k\,dv}{r} \quad \ldots \quad (14)$$

Hier ist dv das Volumenelement, k seine Dichte und r sein Abstand vom Punkte, dessen Potential V ist. Das Zeichen $\int$ bezeichnet verkürzt das bestimmte dreifache Integral, das sich über das ganze Volumen des Körpers erstreckt.

Fig. 106.

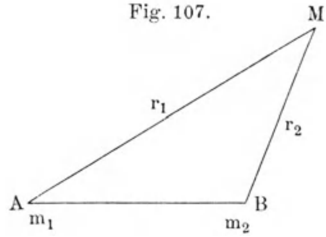


Die Größe V, vgl. (13), ist eine Punktfunktion, denn ändert sich die Lage des Punktes A, so ändern sich im allgemeinen alle Nenner r. Der geometrische Ort der Punkte mit gleichem Potential ist eine Niveaufläche des Potentials. Ihre Gleichung ist

$$V = C \quad \ldots \quad (15)$$

wo C eine Konstante ist. Je nach der Zahl und Lage der Massen m kann die Form dieser Flächen eine außerordentlich verschiedenartige sein. Haben wir im ganzen nur zwei wirkende Massen m_1 und m_2, so ist das Potential V des Punktes M

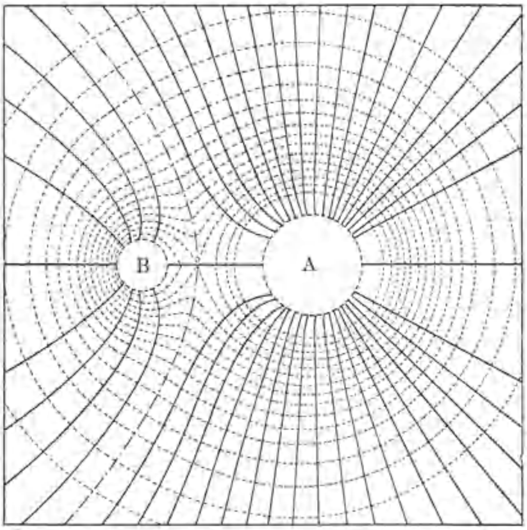
Fig. 107.



(Fig. 107) gleich $V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$ und die Gleichung der Niveauflächen ist $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C$.

In Fig. 108 sind durch punktierte Linien die Durchschnittslinien der Zeichnungsebene mit den Niveauflächen des Potentials dargestellt, und zwar für den Fall, daß sich im Punkte A die Masse m_1, im Punkte B die Masse m_2 befindet und $m_1 = 4\,m_2$ ist. Die Niveauflächen selbst sind Rotationsflächen, welche durch Rotation der Figur um die Gerade AB entstehen. Die A und B zunächst gelegenen Kurven sind Kreise

Fig. 108.



und sind fortgelassen. Die voll ausgezogenen Linien sind die orthogonalen Trajektorien (S. 224) der Niveauflächen des Potentials; ihre physikalische Bedeutung wird später dargelegt werden. Offenbar schneiden sich beide Liniensysteme (die punktierten und voll ausgezogenen) unter rechten Winkeln.

Wir nehmen jetzt an, m' (Fig. 106) rücke von A, dessen Potential V_1 gleich ist

$$V_1 = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots \qquad (16)$$

nach einem Punkte B, dessen Potential V_2 gleich ist

$$V_2 = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} + \frac{m_3}{\varrho_3} + \cdots \qquad (17)$$

ϱ_i bedeutet hier den Abstand der Masse m_i von B. Gesucht wird die Gesamtarbeit R, welche geleistet wird bei dieser Verschiebung der

Masse m' durch die Kraft F, mit der m' durch die Massen m_i des Systems angezogen wird. Die Kraft F ist die Resultierende der Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$, mit denen die einzelnen Massen m' anziehen. Bezeichnet $R_1, R_2, R_3 \ldots$ die Arbeit der Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$, so ist die Arbeit R der Kraft F, nach dem Satze von der Arbeit der Resultante (S. 106), gleich der algebraischen Summe der Arbeiten $R_1, R_2, R_3 \ldots$, also

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad (18)$$

Auf Grund des Lehrsatzes, welcher den Sinn der Gleichung (6) in Worten ausdrückt, haben wir

$$R_1 = m'\left(\frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_1}{r_1}\right); \qquad R_2 = m'\left(\frac{m_2}{\varrho_2} - \frac{m_2}{r_2}\right) \text{ usw.}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (18) ein, so ist

$$R = m'\left\{\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} + \frac{m_3}{\varrho_3} + \cdots\right\} - m'\left\{\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots\right\}$$

oder nach (16) und (17)

$$R = m'(V_2 - V_1). \qquad (19)$$

Bei einem System von wirkenden Massen wird die beim Verschieben der Masse m' geleistete Arbeit durch das Produkt dieser Masse und der Potentialdifferenz des End- und Anfangspunktes des Weges gemessen.

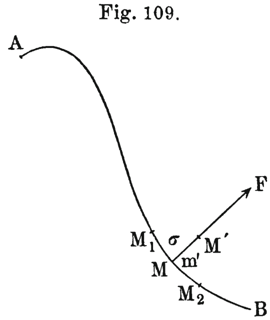
Für $m' = 1$ erhält man die mit (7) identische Formel. Wenn die Masse $m' = 1$ aus unendlicher Ferne auf beliebigem Wege zu dem Punkte gelangt, dessen Potential V ist, so gibt Formel (19), da hier $m' = 1$, $V_1 = 0$, $V_2 = V$ ist,

$$R = V. \qquad (20)$$

Dies entspricht dem Satze, welcher durch Formel (8) ausgedrückt war.

Formel (19) zeigt, daß die Arbeit R nur von den Niveauflächen des Potentials ($V = V_1$ und $V = V_2$), zwischen welchen die Verschiebung der Masse m' stattfand, abhängt; von der Form dieses Weges oder der Lage seines Anfangs- und Endpunktes auf den erwähnten Flächen ist die Arbeit unabhängig.

Fig. 109.



Durch jeden Punkt M im Raume, in welchem eine Kraft wirkt, kann man eine und nur eine Niveaufläche AB des Potentials legen (Fig. 109). Bringt man in diesen Punkt M die Masse m', so wird auf sie eine gewisse Kraft F wirken. Wir wollen deren Richtung bestimmen. Verschiebt man die Masse m' auf der Fläche AB um die unendlich kleine Strecke MM_1 oder MM_2 oder irgendeine andere, nicht in der Zeichnungsebene liegende, so ist nach Formel (19), da Anfangs- und

Endpunkt dieses Weges auf derselben Niveaufläche des Potentials liegen, die Arbeit R der Kraft F gleich Null. Hieraus folgt (S. 105), daß die Kraft F zu allen den kleinen Linien, die man von M auf der Fläche AB nach allen möglichen Richtungen ziehen kann, senkrecht steht. Somit ist die Kraft F selbst normal zur Fläche AB.

In jedem Punkte des Raumes ist die wirkende Kraft senkrecht zur Niveaufläche des Potentials, die durch diesen Punkt geht.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Kraftlinien orthogonale Trajektorien (S. 224) der Niveauflächen des Potentials sind. Die voll ausgezogenen Linien in Fig. 108 sind mithin die Kraftlinien.

Die Kraft F ist nach der Seite des wachsenden Potentials hin gerichtet. Davon kann man sich durch folgende Betrachtung überzeugen. Wenn man m um die unendlich kleine Strecke $MM' = \sigma$ (Fig. 109) in der Richtung der Kraft F verschiebt, so ist die hierbei geleistete Arbeit R einerseits gleich $F\sigma$, andererseits nach (19)

$$R = m'(V + \varDelta V - V) = m'\varDelta V,$$

falls man das Potential des Punktes M (und der ganzen Fläche AB) mit V, das Potential des Punktes M' aber mit $V + \varDelta V$ bezeichnet. Es ist also

$$F\sigma = m'\varDelta V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Hieraus ersieht man, daß $\varDelta V > 0$ und daß F nach der Seite des wachsenden Potentials hin gerichtet ist. Gleichung (21) gibt $F = m'\frac{\varDelta V}{\sigma}$. Da indes σ eine unendlich kleine Größe ist, so gilt letztere Formel nur für den Grenzfall

$$F = m' \lim \frac{\varDelta V}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Hier ist $\varDelta V$ die Potentialänderung, welche einer unendlich kleinen Verschiebung σ normal zur Niveaufläche des Potentials entspricht.

Die Richtigkeit der Formel (22) läßt sich, wenn nur ein Punkt m wirkt, leicht beweisen. Für diesen Fall ist $V = \frac{m}{r}$; die kleine Verschiebung sei $\sigma = BB_1$ (Fig. 103). Es ist

$$\varDelta V = \frac{m}{r - \sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r - \sigma)}; \quad \frac{\varDelta V}{\sigma} = \frac{m}{r(r - \sigma)}.$$

Für ein unendlich kleines σ ist $\lim \frac{\varDelta V}{\sigma} = \frac{m}{r^2}$ und (22) gibt den richtigen Ausdruck $F = \frac{m m'}{r^2}$.

§ 4. Das Potential zweier Systeme aufeinander. Gegeben seien zwei Punktsysteme A und B; m_i sei die Masse eines Punktes des Systems A, m_k die eines Punktes des Systems B und r der Abstand dieser beiden Punkte voneinander. Wir bilden die Summe W aller Größen von der Form $\frac{m_i m_k}{r}$, die durch Kombination eines jeden Punktes des Systems A mit jedem Punkte des Systems B erhalten werden. Diese Summe

$$W = \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

nennen wir das Potential der Systeme A und B aufeinander.

Wenn beide Systeme aus irgendeiner Anfangslage der Punkte, bei welcher $W = W_1$ ist, in die neue Lage, für welche $W = W_2$ ist, übergehen, so gibt die Änderung jedes Gliedes $m_i m_k : r$ die Arbeit der Kraft, welche zwischen den Punkten m_i und m_k wirkt [vgl. (11)]; daher entspricht die vollständige Änderung der Größe W, d. h. $W_2 - W_1$ der Gesamtarbeit R aller Kräfte, welche zwischen den Punkten beider Systeme wirken. Somit haben wir

$$R = W_2 - W_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Sind beide Systeme anfänglich sehr weit voneinander entfernt und gelangen sie sodann zu der Anordnung, bei welcher ihr Potential gleich W wird, so erhält man die Arbeit R der zwischen den Systemen A und B wirkenden Kräfte, wenn man in (24) $W_1 = 0$ und $W_2 = W$ setzt; demgemäß haben wir

$$R = W \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Das Potential zweier Systeme aufeinander ist gleich der Arbeit, die von den zwischen ihren Punkten wirkenden Kräften beim Übergange aus unendlichem Abstande in die Lage geleistet wird, welche sie einnehmen.

W_0 sei der Maximalwert der Größe W, der entsprechend den gegebenen Eigenschaften beider Systeme möglich ist und bei ihrer größtmöglichen Annäherung aneinander erreicht wird; dann ist

$$R = W_0 - W \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

die Gesamtarbeit, welche die beiden Systeme, deren Potential gleich W ist, noch zu leisten vermögen. Offenbar stellt daher die Größe $W_0 - W$ den Vorrat an potentieller Energie dar, den beide Systeme zusammengenommen infolge der wechselseitigen Anziehung ihrer Punkte besitzen.

§ 5. Das Potential eines Systems auf sich selbst. Es bestehe ein System aus den materiellen Punkten m_1, m_2, $m_3 \ldots m_i \ldots m_k \ldots$, und $r_{i,k}$ sei der Abstand zweier dieser Punkte m_i und m_k voneinander. Die Größe $\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$ ist das Potential der Massen m_i und m_k aufeinander (S. 227). Wir bilden nun ähnliche Brüche für alle möglichen Kombinationen zweier Massenpunkte, wobei indes jedes Paar nur einmal genommen werden darf. Ist n die Anzahl der materiellen Punkte, so ist die Zahl unserer Brüche $\frac{1}{2}n(n-1)$, wofür bei sehr großem n auch $\frac{n^2}{2}$ gesetzt werden kann. Die Summe aller solcher Brüche nennen wir das Potential des Systems auf sich selbst und bezeichnen sie mit W. Der symbolische Ausdruck für W ergibt sich leicht, wenn man durch das Symbol

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_i m_k}{r_{i,k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

die Summe aller Brüche darstellt, welche man erhält, falls man jeden einzelnen Systempunkt mit allen übrigen Punkten kombiniert. Offenbar kommt bei einem derartigen Verfahren jedes Paar m_i und m_k zweimal vor, folglich ist $W = \frac{S}{2}$. Unter Fortlassung der Indices kann man schreiben

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum \frac{m m'}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Die Größe S läßt sich umformen, indem man

$$S = \sum_i m_i \sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

schreibt. $\sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}$ ist aber der Wert V_i für das Potential unseres Systems in dem geometrischen Punkte, der von der Masse m_i eingenommen ist. Man kann folglich $S = \sum_i m_i V_i$ setzen; läßt man hier die Indices fort, so erhält man für W den Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Das Potential eines Systems auf sich selbst ist gleich der halben Summe der Produkte aus der Masse jedes der materiellen Punkte des Systems und dem Potential des von ihm eingenommenen geometrischen Punktes.

Es soll nun die gesamte „innere" Arbeit R bestimmt werden, die von allen Anziehungskräften, welche zwischen den Systempunkten wirken, geleistet werden, wenn das System aus irgendeiner anfänglichen Anordnung, bei der $W = W_1$ war, zu einer neuen, bei der $W = W_2$ ist, gelangt. Wir wissen bereits (S. 110), daß R von den Wegen unabhängig ist, auf welchen die Systempunkte aus der ursprünglichen Lage in die neue übergeführt werden.

Beim Übergange jedes Punktpaares m_i und m_k aus der ersten Lage in die neue wird von ihrer Anziehungskraft eine Arbeit $R_{i,k}$ geleistet, die gleich der Potentialänderung der beiden Punkte ist, also gleich der Änderung des ihnen entsprechenden Gliedes der Summe (28), welche uns W gibt. Die Gesamtarbeit R ist gleich der Summe aller Arbeiten $R_{i,k}$; sie ist also gleich der Summe der Änderungen, welche die Glieder von W beim Übergange des Systems aus einer Anordnung in die andere erfahren. Hiernach ist R gleich der Änderung von W, d. h.

$$R = W_2 - W_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

oder in Worten: Wenn ein System von materiellen Punkten aus einer Anordnung der Punkte in eine andere übergeht, so ist die Gesamtarbeit der inneren Kräfte gleich der Änderung seines Potentials auf sich selbst.

Wenn das System aus einem „unendlich disaggregierten" (zerstreuten) Zustande, bei dem alle Entfernungen $r_{i,k}$ unendlich groß waren, in den gegebenen Zustand gelangt, bei welchem sein Potential auf sich selbst gleich W ist, dann ist in (30) $W_1 = 0$ und $W_2 = W$ zu setzen, und es wird daher

$$R = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

d. h.: Das Potential eines Systems auf sich selbst ist gleich der Arbeit, die von inneren Kräften bei seiner Bildung aus einem unendlich disaggregierten Zustande geleistet worden ist.

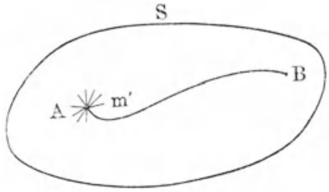
Als Folge einer solchen Arbeit muß ein äquivalenter Energievorrat entstehen, z. B. ein Vorrat an kinetischer Energie einer sichtbaren Bewegung, oder ein Vorrat an Wärmeenergie, oder endlich ein Vorrat an Energie von irgendeiner anderen Form.

Ist W_0 der Maximalwert von W, welcher der größtmöglichen Zusammenziehung des Systems entspricht, so ist offenbar $W_0 - W$ die potentielle Energie eines Systems, dessen Potential auf sich selbst gleich W ist.

§ 6. Lehrsatz vom Raum mit konstantem Potential. Hat das Potential V innerhalb eines geschlossenen Raumes überall denselben konstanten Wert $V = C$, so ist die an allen

Punkten dieses Raumes wirkende Kraft $F = 0$, und umgekehrt: ist in einem geschlossenen Raume überall $F = 0$, so ist das Potential in ihm $V = C$, d. h. konstant. Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, innerhalb der Fläche S (Fig. 110) sei $V = Const$ und denken uns in den beliebigen Punkt A die Masse m' gebracht; in welcher Richtung wir auch diese Masse aus A fortbewegen, die Arbeit der wirksamen Kraft F ist immer gleich Null, denn wir haben, um sie zu erhalten, in Formel (19) zu setzen $V_1 = V_2 = C$, woraus $F = 0$ folgt. Wir wollen jetzt umgekehrt beweisen, daß, wenn im Inneren von S überall $F = 0$ ist, das Potential konstant ist. Zu dem Zwecke wählen wir zwei beliebige Punkte A und B innerhalb S und befördern die Masse m' von A nach B. Da auf dem ganzen hierbei zurückgelegten Wege $F = 0$ ist, so ist offenbar auch $R = 0$. Für diesen Fall aber sind nach Formel (19) die Potentiale von A und B einander gleich, und da diese Punkte vollkommen willkürlich gewählt waren, so haben also alle Punkte innerhalb S ein und dasselbe Potential.

Fig. 110.



§ 7. **Das Potential einer Kugelschale und einer Kugel.** Zunächst sei hier bemerkt, daß wir uns einer doppelten Ausdrucksweise bedient haben, indem wir entweder vom „Potential des Punktes A, das durch ein System von materiellen Punkten hervorgerufen wird“, gesprochen haben, oder aber vom „Potential eines Systems im Punkte A“. Für eine dünne Kugelschale, deren Radius R, Dicke c und Dichte δ ist, kann man das äußere Potential V_e und das innere Potential V_i auf folgendem elementaren Wege finden. Da eine Kugelschale im Außenraume ebensolche Kräfte F_e hervorruft, als ob ihre Gesamtmasse M in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre (S. 218), so muß auch das Potential V_e die entsprechende Eigenschaft besitzen, d. h. im Punkte A, dessen Abstand vom Mittelpunkte $x > R$ ist, muß

$$V_e = \frac{M}{x} \quad \text{(32)}$$

sein. Offenbar gilt diese Formel auch für eine homogene Kugelschale von endlicher Dicke und für eine homogene massive Kugel. Im Innenraume ist $F_i = 0$ (S. 217); nach dem vorigen Satze in § 6 muß daher $V_i = Const$ sein, d. h. in allen Punkten innerhalb der Kugelschale muß das Potential V ein und denselben Wert haben. Der Wert V_c für das Potential im Kugelmittelpunkte läßt sich leicht finden; es muß offenbar $V_i = V_c$ sein. Zerlegen wir die Masse der Kugelschale in ihre Elemente m, die alle vom Mittelpunkte gleich weit, und zwar um R entfernt sind, dann ist das Potential

$$V_c = \sum \frac{m}{R} = \frac{\Sigma m}{R} = \frac{M}{R},$$

also

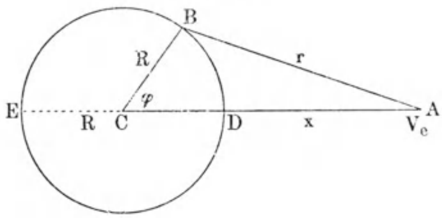
$$V_i = \frac{M}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

oder, da $M = 4\pi R^2 c\delta$ ist, so folgt

$$V_i = 4\pi R c\delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Wir wollen noch eine strengere Ableitung der Größen V_e und V_i für eine dünne Kugelschale geben. A (Fig. 111) sei ein äußerer Punkt im Abstande $CA = x$ vom Kugelmittelpunkt. Ist m die Masse eines Elementes der Kugelschale, welches sich in B befindet, und $BA = r$, so ist das gesuchte $V_e = \sum \frac{m}{r}$.

Fig. 111.



Bezeichnen $\varphi = \angle BCD$ und ψ (die Länge) die Polarkoordinaten des Punktes B, so ist $R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$ das Flächenelement um B und $m = c\delta R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$. Ferner ist $r = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}$ und daher

$$\left.\begin{aligned} V_e &= c\delta R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}} \\ &= 2\pi c\delta R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

oder

$$V_e = \frac{2\pi c\delta R}{x} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} \quad \ldots \quad (36)$$

Die Grenzen des Integrals sind symbolisch bezeichnet. Das unbestimmte Integral ist gleich $\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} = r$, und deshalb können wir symbolisch schreiben $V_e = \frac{2\pi\delta c R}{x}\left\{r\right\}_D^E$, wo D und E die

Punkte unserer Figur sind, für welche $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ ist. Daher ist

$$V_e = \frac{2\pi c \delta R}{x}\{AE - AD\}$$

$$= \frac{2\pi c \delta R}{x}\{(x+R)-(x-R)\} = \frac{4\pi R^2 c\delta}{x} = \frac{M}{x},$$

was vollkommen der Formel (32) entspricht.

Das innere Potential V_i im Punkte A (Fig. 112) wird durch dieselben Integrale (35) und (36) gegeben wie V_e; hier ist jedoch $x = CA < R$. Wir haben wiederum

$$V_i = \frac{2\pi c\delta}{x}\{AE - AD\}$$

$$= \frac{2\pi c \delta R}{x}\{(R+x)-(R-x)\} = 4\pi\delta c R = \frac{M}{R},$$

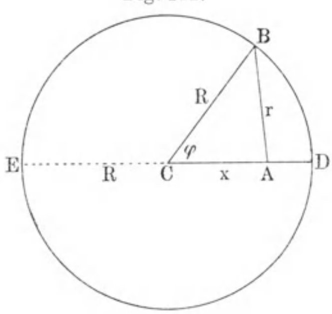
was vollkommen den Formeln (33) und (34) entspricht.

Das Potential V_i im inneren Hohlraume einer homogenen Kugelschale, die von Kugelflächen mit den Radien R_1 und R_2 begrenzt ist, wird erhalten, wenn man die gegebene Schale in unendlich dünne Schalen zerlegt und für c in Formel (34) dR einsetzt. Dann ist

$$V_i = \int_{R=R_1}^{R_2} 4\pi\delta R\,dR = 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Das Potential V im Inneren einer homogenen massiven Kugel (deren Radius R, deren Dichte δ ist) im Punkte A, dessen Entfernung vom Mittelpunkte x ist, setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste V_1 ist das Potential der massiven Kugel mit dem Radius x; an ihrer Oberfläche liegt der Punkt A, und wir erhalten nach (32) $V_1 = \frac{M}{x} = \frac{4\pi x^3 \delta}{3x} = \frac{4}{3}\pi x^2 \delta$. Der zweite Teil V_2 ist das Potential einer Kugelschale, innerhalb deren sich der Punkt A befindet; V_2 ergibt sich aus (37), wenn man $R_2 = R$ und $R_1 = x$ setzt, so daß $V_2 = 2\pi\delta(R^2 - x^2)$ wird. Addiert man nun $V_1 + V_2 = V$, so erhält man das Potential im Inneren einer massiven homogenen Kugel:

Fig. 112.



$$V = 2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3}\pi\delta x^2 = 2\pi\delta\left(R^2 - \frac{1}{3}x^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Das Potential im Mittelpunkte einer massiven Kugel ist gleich $2\pi\delta R^2$. An der Oberfläche ($x = R$) ist das Potential

$$V' = \frac{4}{3}\pi\delta R^2 = \frac{M}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38, a)$$

Aus (22) können wir jetzt die Kraft F berechnen, welche in einem gegebenen Punkte auf die Masse m' wirkt. Die Größe σ ist hier gleich Δx, wo x die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der Kugel oder der Kugelschale ist. Wir haben

$$F = m' \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = m' \frac{dV}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (38, b)$$

Mit Hilfe dieser Formel erhält man aus (32), (33), (37) und (38) leicht jene Ausdrücke für die Größe der Kraft, welche für die entsprechenden Sonderfälle im vorhergehenden Kapitel entwickelt wurden.

Wir wollen noch das Potential W einer massiven homogenen Kugel auf sich selbst berechnen. Wir bedienen uns hierzu der Formel (29)

$$W = \frac{1}{2}\Sigma m V \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Wir teilen die Kugel durch konzentrische Kugelflächen in eine unendlich große Zahl dünner Schalen; x sei der Radius, dx die Dicke einer dieser Schalen. Da V für alle Punkte der Schale sich gleich bleibt, nämlich gleich der in (38) gegebenen Größe, so können wir in (39) m gleich der Masse der Kugelschale setzen, so daß $m = 4\pi x^2 \delta\, dx$ ist. Daher erhält man nach (38)

$$W = 4\pi^2\delta^2 \int\limits_{x=0}^{R} \left(R^2 - \frac{1}{3}x^2\right) x^2\, dx.$$

Dieses Integral gibt, wenn M die Masse der ganzen Kugel ist,

$$W = \frac{16}{15}\pi^2\delta^2 R^5 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Somit ist das Potential einer Kugel auf sich selbst proportional dem Quadrate ihrer Dichte und der fünften Potenz ihres Radius. Formel (40) gibt uns die Arbeit, welche bei der Bildung einer Kugel aus unendlich zerstreuter Materie geleistet wird. Sie zeigt uns ferner, daß, wenn eine gegebene Masse M sich zu einer Kugel zusammenzieht und hierbei der Reihe nach verschiedene Radien erhält, das Potential W, folglich auch die geleistete Arbeit umgekehrt proportional dem entsprechenden Radius ist.

Wenn die Masse M, welche das Volumen einer Kugel vom Radius R erfüllte, sich derart zusammenzieht, daß sie nunmehr eine Kugel vom Radius $R_1 < R$ bildet, so ist die hierbei geleistete Arbeit der Zusammenziehung gleich

$$W_1 - W = \frac{3}{5} M^2 \left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Wir dürfen nicht vergessen, daß die Formeln (40) und (41) uns die Arbeit der Bildung bzw. der Zusammenziehung einer Kugel nicht etwa in absoluten Maßeinheiten geben. Drückt man M in Grammen, R in Zentimetern aus, so erhält man aus (40) und (41) die gesuchte Arbeit in Einheiten, die etwa $15 \cdot 10^6$ mal kleiner sind als ein Erg (vgl. S. 209).

Es ist nicht schwierig, die der geleisteten Arbeit äquivalente Wärmemenge q zu berechnen. Die in Kap. III, § 3 und § 6 gegebenen Beziehungen führen leicht zu der Formel

$$q = \frac{72\, C M^2}{5 \cdot 10^9} \left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right\} \text{ kleine Kalorien} \quad \ldots \quad (42)$$

wo C der in Kap. VI, § 2 betrachtete Proportionalitätsfaktor ist. Hat sich der Radius R um den $n$ten Teil seines Wertes verkleinert, so ist $R_1 = \frac{n-1}{n} R$ und

$$q = \frac{72\, C M^2}{5 \cdot 10^9 (n-1) R} \text{ kleine Kalorien} \quad \ldots \quad (43)$$

Führt man für C seinen Zahlenwert ein und ersetzt die kleinen Kalorien durch große, so wird

$$q = \frac{0{,}97\, M^2}{10^{18} (n-1) R} \text{ große Kalorien} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Hier müssen M in Grammen, R in Zentimetern ausgedrückt werden.

Diese Formeln setzen uns in den Stand, unter anderem die Arbeit zu berechnen, welche bei Kontraktion der Sonne geleistet wird. Nimmt man z. B. an, daß durch diese Zusammenziehung der Sonnenradius sich um 0,1 Proz. vermindere, so gibt uns Formel (44) sofort an, wieviel Wärme hierbei frei wird. Ferner könnte man berechnen, für welche Zeit diese Wärmemenge reicht, wenn auf jeden Quadratzentimeter, der sich senkrecht zu den Sonnenstrahlen in der Entfernung der Erde von der Sonne befindet, je drei kleine Kalorien pro Minute fallen sollen. Setzt man für die Wärmekapazität einer Kugel eine beliebige angenäherte Zahl ein, so kann man eine Vorstellung von der Erwärmung erhalten, die eine Kugel bei ihrer Bildung bzw. Zusammenziehung erfährt, wobei freilich vorausgesetzt werden muß, daß ein Wärmeverlust durch Ausstrahlung nicht stattfindet. Interessant ist es endlich, die Temperaturerhöhung der Sonne bei plötzlicher Verkleinerung ihres Radius, z. B. um 0,1 Proz., zu berechnen; als Wärmekapazität der Sonne kann man hierbei etwa $^1/_{20}$, $^1/_{10}$ oder gar 1 annehmen, welch letztere Zahl höchstwahrscheinlich zu hoch gegriffen ist.

Aus (40) folgt, daß bei der Entstehung einer homogenen Kugel vom Radius R aus einer unendlich zerstreuten Materie, für jede Masseneinheit die Arbeit

$$W' = \frac{3}{5}\frac{M}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

beträgt. Nach (38, a) ist aber $M:R$ die Arbeit, welche geleistet wird, wenn die Masseneinheit aus unendlicher Entfernung bis zur Oberfläche der Kugel sich bewegt. Wir erhalten daher folgenden Satz: Die bisher bei der Zusammenziehung der Sonne aus unendlich zerstreuter Materie in jeder Masseneinheit frei gewordene Wärme ist gleich 0,6 der Wärmemenge q', welche entstehen würde, wenn diese Masseneinheit jetzt aus unendlicher Entfernung auf die Oberfläche der Sonne stürzen würde. Aus (42) folgt, wenn man $R = \infty$ und $R_1 = R$ setzt,

$$q_1 = \frac{72\,CM}{5\,.\,10^9 R} \text{ kleine Kalorien.}$$

Setzt man hier C ein, berechnet die Masse M der Sonne in Gramm, so erhält man für die bei der Entstehung der Sonne bisher in jedem Gramm ihrer Masse freigewordene Wärme

$$q_1 = 29\,.\,10^6 \text{ kleine Kalorien} \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Wenn sich der Radius der Sonne um 1 : 10 000 verkleinert, so entsteht eine Wärmemenge, welche für etwa 1500 Jahre den Verlust durch Ausstrahlung decken würde.

Achtes Kapitel.

Von der Schwerkraft.

§ 1. Das homogene Kraftfeld an der Erdoberfläche. Es war bereits früher (S. 205) davon die Rede, daß die Schwerkraft, welche auf alle Körper an der Erdoberfläche wirkt, nur einen besonderen Fall der allgemeinen Gravitation bildet. Bezeichnet man die Masse der Erde mit M, ihren Radius mit R, die Beschleunigung beim freien Fall an der Erdoberfläche mit g, die Masse eines beliebigen Körpers mit m, sein

Gewicht mit p und nimmt an, daß die Anziehung der Erde wie die einer homogenen Kugel vor sich geht, so erhält man

$$p = C\frac{Mm}{R^2} = mg \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und hieraus

$$g = C\frac{M}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Obgleich das Gewicht der verschiedenen Körper verschieden ist, so ist doch die Beschleunigung g des freien Falles für alle Körper im Vakuum an der Erdoberfläche die gleiche. Formel (2) zeigt, daß die Beschleunigung g, welche überall nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist, mit Zunahme der Entfernung von ihrer Oberfläche sich vermindert.

Für kleine Teile des Raumes kann man annehmen, daß g an allen Punkten nach Größe und Richtung konstant ist. In diesem Falle stellt der in Betracht gezogene Teil des Raumes ein homogenes Kraftfeld (S. 96) dar, dessen Kraftlinien eine Richtung haben, die man als vertikale bezeichnet. Ebenen, welche senkrecht zu diesen Kraftlinien sind, heißen Horizontalebenen.

Die Methoden, den Zahlenwert von g zu bestimmen, sowie die Ergebnisse der Messungen sollen im dritten Abschnitt besprochen werden.

§ 2. **Schwerpunkt.** Im § 15 auf Seite 96 sahen wir, daß alle Kräfte, welche auf einen Körper im homogenen Kraftfelde wirken, eine Resultante haben, deren Angriffspunkt der Trägheitsmittelpunkt des Körpers heißt. Sind die Dimensionen eines an der Erdoberfläche befindlichen Körpers nicht ungewöhnlich groß, so kann man die Annahme gelten lassen, daß sich alle seine Punkte in einem und demselben homogenen Kraftfelde befinden. Der Angriffspunkt der Resultante aller Schwerkräfte, welche auf die Elemente des Körpers wirken, fällt in diesem Falle mit seinem Trägheitsmittelpunkte zusammen und wird sein Schwerpunkt genannt. Die Schwerpunktskoordinaten werden für einen inhomogenen Körper durch die Formel (31) auf Seite 97, für einen homogenen Körper durch die Formeln (32) auf derselben Seite gegeben. Da die Lage des Trägheitsmittelpunktes eines Körpers von der Lage des Körpers selbst nicht abhängt, so gilt das gleiche auch von seinem Schwerpunkt.

Beispiele für Schwerpunktsbestimmungen sollen hier nicht folgen, da solche in den Lehrbüchern der Mechanik gegeben werden. Ebenso wird auch nicht auf Fragen, die mit der Lehre vom stabilen, labilen und indifferenten Gleichgewicht von Körpern mit einem oder mehreren Stützpunkten in Zusammenhang stehen, eingegangen werden: man findet die Elemente dieser Lehre in elementaren Physikbüchern; wegen einer strengeren Untersuchung der hierhergehörigen Probleme verweisen wir auf Lehrbücher der Mechanik.

§ 3. Freie vertikale Bewegung der Körper im Vakuum. Zwar wird die vorliegende Frage bereits in den elementaren Physikbüchern behandelt, doch soll auch hier eine kurze Übersicht über die bezüglichen Formeln gegeben werden. Sieht man die Beschleunigung g als konstant an, so hat man den freien Fall der Körper im Vakuum als gleichförmig beschleunigte Bewegung, die freie Bewegung der Körper vertikal aufwärts im Vakuum als gleichförmig verzögerte Bewegung zu betrachten.

1. Fall der Körper. Sei s der durchlaufene Weg, v die Geschwindigkeit, t die Fallzeit und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit für $t = 0$, dann geben uns die Formeln (20) und (21) auf Seite 63

$$v = v_0 + gt; \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Für den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$) ist

$$v = gt; \qquad s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Geschwindigkeit wächst somit proportional der ersten, der durchlaufene Weg proportional der zweiten Potenz der Fallzeit. Für $t = 1$ folgt aus (4) $v_1 = g$; $s_1 = \frac{g}{2}$; d. h. die Geschwindigkeit nach Ablauf der ersten Zeiteinheit ist numerisch gleich dem doppelten in dieser Zeiteinheit zurückgelegten Wege. Der im Verlaufe der n ten Sekunde zurückgelegte Weg ist gleich $s_n = \frac{1}{2} g n^2 - \frac{1}{2} g (n-1)^2$ oder

$$s_n = (2n - 1)\frac{g}{2} = \frac{1}{2} g + (n-1) g = \frac{2n-1}{2} g \quad \ldots \quad (5)$$

Die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Wege wachsen um denselben Zahlenwert g, um welchen auch die Geschwindigkeiten am Ende der aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zunehmen. Diese Wege sind $s_1 = \frac{g}{2}$; $s_2 = \frac{g}{2} + g = 3\frac{g}{2}$; $s_3 = \frac{g}{2} + 2g = 5\frac{g}{2}$; $s_4 = \frac{g}{2} + 3g = 7\frac{g}{2}$ usw. Die Wege s_n verhalten sich somit wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 usw., wie dies auch aus Formel (5) ersichtlich ist. Die Formeln (4) geben, wenn man die Zeit t entfernt

$$s = \frac{v^2}{2g}; \qquad v = \sqrt{2gs} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

II. Bewegung nach aufwärts. Hier kann die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nicht gleich Null sein. Wir haben [vgl. (23) auf Seite 64]

$$v = v_0 - gt; \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Der Körper gelangt zur Ruhe im Zeitmoment T, für welchen $v = v_0 - gT = 0$ ist, hieraus folgt

$$T = \frac{v_0}{g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

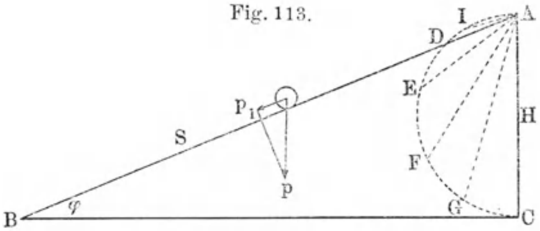
Setzt man diesen Wert in den Ausdruck für s, so erhält man die Steighöhe H

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Die Steighöhe ist also proportional dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit. Nachdem der Körper den höchsten Punkt erreicht hat, beginnt er zu fallen. Er kehrt zur Anfangslage zurück und braucht für den Rückweg die Zeit T_1, die sich aus Formel $H = \frac{1}{2} g T_1^2$ ergibt, vgl. (4); hieraus folgt $T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; mit Hilfe von (9) wird $T_1 = \frac{v_0}{g}$, d. h. $T_1 = T$ oder: für das Zurückfallen ist eine Zeit erforderlich, welche gleich der Zeit des Aufstieges ist. Die Geschwindigkeit v_1, welche der Körper in dem Augenblicke besitzt, wo er zu dem Punkt, von dem aus seine Bewegung begann, zurückgelangt, wird aus Formel (6) erhalten; sie ist $v_1 = \sqrt{2gH}$ oder mit Hilfe von (9) $v_1 = \pm v_0$. Im vorliegenden Falle ist offenbar $v_1 = -v_0$. Der Körper kehrt also zu seinen Ausgangspunkt mit einer Geschwindigkeit zurück, die ihrem absoluten Betrage nach gleich der Anfangsgeschwindigkeit beim Aufstieg ist.

III. Reibungslose Bewegung auf der schiefen Ebene. Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene AB (Fig. 113), welche mit der Horizontalebene BC den Winkel φ einschließt, so wird die Beschleunigung g_1 seiner Bewegung durch die Komponente p_1 seines Gewichtes p hervorgerufen, die parallel zur Ebene AB ist.

Fig. 113.



Da die Beschleunigungen bei gegebener Masse proportional den Kräften sind, so haben wir $\frac{g_1}{g} = \frac{p_1}{p} = \sin \varphi$, und hieraus

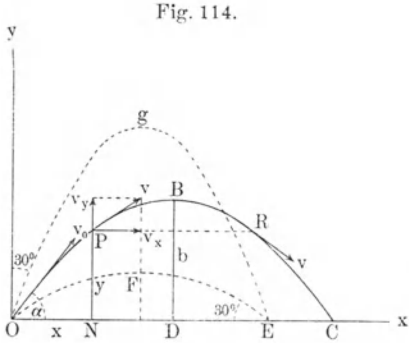
$$g_1 = g \sin \varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Alle Formeln unseres Paragraphen von (3) bis (9) behalten auch hier ihre Geltung, nur hat man statt g jedesmal $g \sin \varphi$ zu setzen. Formel (9) gibt in diesem Falle $H = \infty$ für $\varphi = 0$, was auch so sein muß, wenn nämlich keine Reibung vorhanden ist und die Bewegung im Vakuum erfolgt. Hat der Körper seine Bewegung im Punkte A ohne Anfangsgeschwindigkeit begonnen, dann erreicht er den Punkt B mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 g_1 S} = \sqrt{2 g S \sin \varphi} = \sqrt{2 g H}$, wo $AC = H$ und $AB = S$ ist. Diese Geschwindigkeit hängt somit von der Neigung φ der schiefen Ebene nicht ab und ist gleich der Geschwindigkeit, welche der Körper im Punkte C beim freien Fall von A nach C erlangt.

In einer gegebenen Zeit A durchläuft der Körper längs AB den Weg $s = \frac{1}{2} g_1 t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi$. Bezeichnet man mit T die Zeit für den freien Fall von A nach C, so wird $H = \frac{1}{2} g T^2$. In dieser selben Zeit T durchläuft der Körper längs AB den Weg H_1, der gleich ist $H_1 = \frac{1}{2} g_1 T^2 = \frac{1}{2} g T^2 \sin \varphi = H \sin \varphi$. Zieht man $CD \perp AB$ (diese Senkrechte fehlt in Fig. 113), so ist $H_1 = AD$. Der geometrische Ort aller der Punkte, bis zu welchen ein Körper in derselben Zeit T gelangt, wenn er von einem bestimmten Punkte aus, ohne Anfangsgeschwindigkeit zu besitzen und ohne Reibung zu erfahren, auf allen nur möglichen schiefen Ebenen herabfällt, ist eine Kugelfläche mit dem Durchmesser $H = \frac{1}{2} g T^2$. Die Wege AI, AD, AE, AF, AG, AC werden in gleichen Zeiten durchlaufen.

§ 4. **Bewegung schief geworfener Körper im Vakuum.** Ein gegebener Körper beginne (bei $t = 0$) seine Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 im Punkte O (Fig. 114) und in der Richtung Ov_0, die mit der Horizontalebene Ox den Winkel α einschließt; wir wollen seine Bewegung, die offenbar in der Vertikalebene Ov_0 erfolgen wird, untersuchen. Wir ziehen zu diesem Zwecke die vertikale Linie Oy, wählen Ox und Oy zu Koordinatenachsen und zerlegen die Geschwindigkeit v_0 in ihre Komponenten:

Fig. 114.



eine horizontale $v_0 \cos \alpha$ und eine vertikale $v_0 \sin \alpha$. Die Schwerkraft erteilt dem Körper die vertikale Beschleunigung g und ändert daher nur die vertikale Komponente der Geschwindigkeit, die horizontale dagegen bleibt (im Vakuum) ungeändert.

Der Körper wird sich auf einer gewissen Kurve bewegen und zur Zeit t im Punkte P, dessen Koordinaten x und y sind, befinden. Seine Geschwindigkeit in P sei gleich v; die auf die Koordinatenachsen bezogenen Komponenten der Geschwindigkeit bezeichnen wir mit v_x und v_y. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die horizontale Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$, die vertikale Bewegung dagegen eine gleichförmig veränderliche mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin \alpha$ ist. Hieraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \,.\, t \\ y &= v_0 \sin \alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Entfernt man t aus den Gleichungen (12), so wird

$$y = x \tan g\, \alpha - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel OBC mit vertikaler Achse BD. Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist gleich

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2\, g \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2\right)}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

oder nach (12)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Diese Formel lehrt uns, daß der Körper die gleiche Geschwindigkeit v besitzt, gleichgültig, ob er sich längs OB aufwärts oder längs BC abwärts bewegt, vorausgesetzt, daß er sich beidemal in derselben Höhe y befindet; so ist z. B. in den Punkten P und R die Geschwindigkeit der Größe nach die gleiche, aber natürlich von verschiedener Richtung. Formel (15) läßt sich auch aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie ableiten. Der bewegte Körper hat nämlich zur Zeit, wo seine Geschwindigkeit v ist, seit Beginn seiner Bewegung die kinetische Energie $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2$ verloren und die potentielle Energie $p y = m g y$, wo p das Gewicht des Körpers bedeutet, erworben. Nach dem erwähnten Prinzip ist $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = m g y$ und hieraus folgt unmittelbar Formel (15).

Den Augenblick T_1, in welchem der höchstgelegene Punkt B (der Scheitel der Parabel) erreicht wird, erhalten wir, wenn wir $v_y = 0$ setzen. Formel (11) ergibt dann die Zeit T_1 des Aufstieges

$$T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Setzt man in (12) T_1 an Stelle von t, so erhält man die Steighöhe $DB = b$ und die Abszisse $a = OD$ des Punktes B, nämlich

$$b = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\,g}; \qquad a = \frac{v_0^2 \sin 2\,\alpha}{2\,g} \quad \ldots \ldots (17)$$

Für $\alpha = 90^0$ bekommen wir nach (9) die Höhe $b = H$ beim vertikalen Anstieg

$$H = \frac{v_0^2}{2\,g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

Für $\alpha = 45^0$ wird $b = \frac{1}{2} H$. Die Zeit T_2 für die Rückkehr des Körpers zur Horizontalebene Ox wird aus der Gleichung

$$y = v_0 \sin \alpha \,.\, T_2 - \frac{1}{2} g\, T_2^2 = T_2 \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g\, T_2 \right) = 0$$

bestimmt. Hieraus ergibt sich nach (16)

$$T_2 = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g} = 2\, T_1 \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

Die Zeit des Abstieges BC ist also gleich der Zeit des Aufstieges OB. Die Geschwindigkeit im Punkte C ist gleich v_0, wie man aus (15) sieht. Die Abszisse $c = OC$ des Punktes C, die sogenannte Wurfweite, erhält man durch Einsetzen von T_2 an Stelle von t in den Ausdruck (12) für x; mit Berücksichtigung von (17) ergibt sich sodann

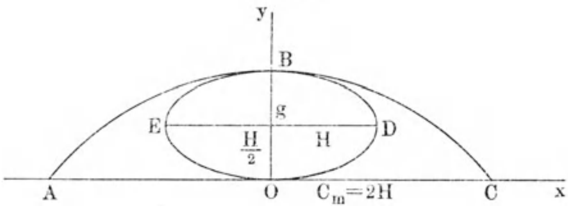
$$c = \frac{v_0^2 \sin 2\,\alpha}{g} = 2\,a \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

Hieraus folgt, daß $OC = 2\,OD$ ist. Die maximale Wurfweite c_m wird für $\sin 2\,\alpha = 1$, d. h. für $\alpha = 45^0$ erhalten und ist [vgl. (18)] gleich

$$c_m = \frac{v_0^{\,2}}{g} = 2\,H \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

Die maximale Wurfweite ist gleich der doppelten vertikalen Steighöhe (wo $\alpha = 90^0$ ist). Formel (20) lehrt uns, daß der von O mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ausgehende Körper nach jedem beliebigen auf Ox liegenden Punkte E bei zwei verschiedenen Werten von α gelangen kann, wenn nur $OE < c_m$ ist. Diese beiden Werte des Winkels α ergänzen einander zu 90^0. So wird z. B. bei $\alpha = 30^0$ die Parabel OFE, bei $\alpha = 60^0$ die Parabel OgE durchlaufen. Wir überlassen dem Leser, zu beweisen, daß die Umhüllende aller Parabeln, welche den Werten des Winkels α von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$ zugehören, ebenfalls eine Parabel ABC (Fig. 115) ist, deren Achse mit der

Fig. 115.



Achse Oy zusammenfällt und deren Scheitel über O im Abstande $OB = H = \frac{v_0^2}{2g}$ liegt; sie schneidet die x-Achse in zwei Punkten A und C, deren Koordinate $OC = OA = \pm c_m = \pm 2H$ ist. Ihre Gleichung lautet

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Ferner läßt sich leicht beweisen, daß der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller Parabeln eine Ellipse $BDOEB$ ist, deren kleine Achse mit der Achse Oy zusammenfällt; sie geht durch den Punkt O und durch den über O in der Höhe H gelegenen Punkt B, d. h. durch den Scheitel der einhüllenden Parabel (22). Die kleine halbe Achse $\frac{1}{2} BO$ ist also gleich $\frac{1}{2} H = \frac{v_0^2}{4g}$; die horizontale halbe große Achse $\frac{1}{2} ED$ ist gleich $H = \frac{v_0^2}{2g}$, so daß $ED = OA = OC$ ist. Die Gleichung unserer Ellipse ist

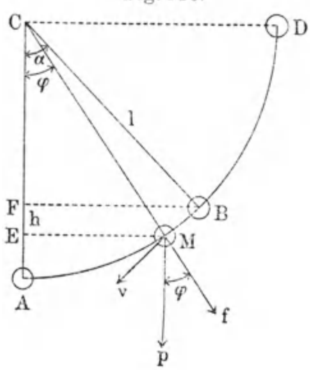
$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{v_0^2}{2g} y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann der Körper für keinen Wert von α zu einem Punkt, der außerhalb der Parabel ABC liegt, gelangen. Die Punkte innerhalb der Ellipse $BDOEB$ können sowohl beim Anstieg wie beim Abstieg erreicht werden; in jedem von ihnen schneiden sich zwei Parabeln. Die Punkte, welche zwischen der Ellipse $BDOEB$ und der Parabel ABC liegen, können vom Körper nur während seines Niederfallens erreicht werden.

§ 5. **Mathematisches Pendel.** Das mathematische Pendel besteht aus einem materiellen Punkte, dem wir die Masse m und das

Gewicht $p = mg$ beilegen und der sich an einem Ende eines idealen Stabes CM (Fig. 116) befindet, d. h. eines Stabes, der nicht ausgereckt, nicht gebogen werden kann und selbst keine Masse besitzt. Sein anderes Ende ist mit dem Punkte C, um welchen sich das ganze Pendel drehen kann, verbunden. Die Länge des Pendels bezeichnen wir mit $l = CM$; seine Ruhelage sei CA.

Fig. 116.



Wird das Pendel zur Seite bewegt und dann sich selbst überlassen, so schwingt es unter dem Einflusse der Schwerkraft. Ist $\angle ACB = \alpha$ der Ausschlagwinkel, dann nennen wir $AB = l\alpha$ den halben Ausschlag der Schwingung. Die Dauer einer vollen Schwingung, d. h. die Zeit, welche das Pendel braucht, um von seiner Grenzlage CB ausgehend, in diese Lage zurückzukehren, bezeichnen wir mit T. Wir werden nachher die Bezeichnungsweise etwas abändern. Wir wollen zunächst die Geschwindigkeit v des Pendelendes für eine Zwischenlage CM bestimmen, wo der Winkel seiner Ablenkung aus der Gleichgewichtslage $\angle ACM = \varphi$ ist. Wir fällen von B und M die Senkrechten BF und ME auf CA und setzen $EF = h$. Die Wucht $\frac{1}{2} mv^2$ des Pendels in diesem Augenblick muß gleich der Arbeit $ph = mgh$ sein, welche von der Schwerkraft beim Bewegen der Masse m von B nach M geleistet worden ist. Folglich ist $v^2 = 2gh$; $h = CE - CF = l \cos\varphi - l\cos\alpha = l(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Hieraus ergibt sich:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Für den Augenblick, wo das Pendel durch seine Gleichgewichtslage CA geht, bekommen wir die maximale Geschwindigkeit v_0 seines Endpunktes, wenn wir in (24) $\varphi = 0$ setzen, nämlich

$$v_0 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Für sehr kleine Winkel α kann man $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2l}$ setzen, so daß man für v_0 folgenden Ausdruck erhält

$$v_0 = a\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Die Spannung F des Stabes in dem Augenblicke, welchem die Lage CM und die Geschwindigkeit v entspricht, besteht aus zwei Teilen: aus der Komponente des Gewichtes p, welche in der Richtung des Stabes wirkt und gleich $p \cos \varphi$ ist, und aus der Zentrifugalkraft f, welche gleich $\frac{m v^2}{l}$ ist. Setzt man hier den Wert von v nach (24) ein, so wird:

$$f = \frac{m v^2}{l} = 2 mg (\cos \varphi - \cos \alpha) = 2 p (\cos \varphi - \cos \alpha);$$

und hieraus folgt

$$F = p \cos \varphi + f = p (3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; (27)$$

Im Augenblicke, wo $\varphi = 0$ wird, ist die Spannung gleich

$$F_0 = p (3 - 2 \cos \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

Ist $\alpha = 90^0$, d. h. ist das Pendel in die Lage CD gebracht, so erhalten wir $F_0 = 3 p$. Mithin ist für diesen Fall die Spannung dreimal so groß wie bei der Ruhelage des Pendels, wo auf den Stab nur das Gewicht einwirkt. Setzen wir $\alpha = 180^0$, dann ist für $\varphi = 90^0$, wobei das Pendel sich in der Lage CD befindet, nach (27) $F = 2 p$ und nach (28) $F_0 = 5 p$.

Sehr kleine Schwingungen. Wir wollen die Richtung AB als die positive betrachten. Die Kraft f, welche auf das Pendelende in der Richtung seiner Bewegung wirkt und die Tangentialbeschleunigung seiner Bewegung hervorruft, sei gleich $f = -p \sin \varphi$. Setzt man $p = mg$ und betrachtet φ als sehr kleinen Winkel, so ist $f = -mg\varphi$. Bezeichnet man mit s den Abstand AM des Pendelendes von seiner Mittellage, so ist $l \varphi = s$, folglich

$$f = - m \frac{g}{l} s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

Der Form nach ist dieser Ausdruck identisch mit (20) auf Seite 136, wenn man dort

$$c = \frac{g}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

setzt. Hieraus folgt, daß man bei sehr kleiner Schwingungsweite in erster Annäherung annehmen kann, daß das Pendelende eine harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude $a = AB$, jedoch nicht in gerader Linie, sondern längs eines sehr kleinen Kreisbogens ausführt. Formel (16) auf Seite 135 gibt

$$v_0 = a \sqrt{c} = a \sqrt{\frac{g}{l}},$$

was mit (26) übereinstimmt. Ferner folgt aus Formel (15) auf Seite 135 für die Zeit einer vollen Schwingung

$$T = \frac{2 \pi}{\sqrt{c}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Wir wollen indes, abweichend von dem Vorhergehenden, unter der Schwingungsdauer T eines Pendels die Hälfte der bisher als solche bezeichneten Zeit verstehen, d. h. die Zeit von einem Durchgange durch die Ruhelage bis zur folgenden, oder, was dasselbe ist, die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des Pendels in den Grenzlagen ($s = +a$ und $s = -a$). Dann ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Die Schwingungsdauer bei sehr kleinen Pendelschwingungen hängt weder von der Größe des Ausschlages ab (die Schwingungen sind isochron), noch von der am Pendelende befindlichen Masse. Sie ist proportional der Quadratwurzel aus der Länge des Pendels und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung der Schwerkraft (der Intensität des Kraftfeldes). Wie aus unserer Herleitung ersichtlich, ist Formel (31) nur angenähert richtig. In der analytischen Mechanik wird der genaue Ausdruck für T in Form folgender unendlichen Reihe abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned} T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Big[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} \\ + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots \Big] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

Für genügend kleine α kann man sich mit den beiden ersten Gliedern obiger Reihe begnügen und

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

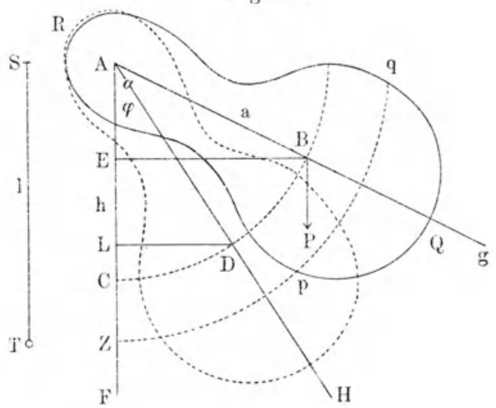
setzen oder, falls man $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\,l}$ einführt:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\frac{a^2}{l^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

§ **6. Physisches Pendel.** Physisches Pendel heißt ein Körper $R\,Q$ (Fig. 117), der um eine horizontale, nicht durch seinen Schwerpunkt gehende Achse schwingen kann. Diese Achse sei senkrecht zur Zeichnungsebene und gehe durch den Punkt A. Wenn sich der Körper in seiner Ruhelage (die in der Figur nicht dargestellt ist) befindet, so liegt sein Schwerpunkt C auf der vertikalen Geraden AF, die durch die Drehungsachse geht. Wir bezeichnen den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse mit $AB = AC = a$, die Masse des Pendels mit M, sein Gewicht mit $P = Mg$. Lenkt man das Pendel um den

Winkel $\angle FAg = \alpha$ ab, wobei sein Schwerpunkt nach B gelangt, und überläßt es sodann sich selbst, so wird es bei Abwesenheit von Luftwiderstand und Reibung um die Achse A Schwingungen nach beiden Seiten hin mit dem konstanten Ausschlagwinkel α vollführen. Seine Winkelgeschwindigkeit ω für den Augenblick, wo die Ablenkung $\varphi = \angle FAH$ ist, läßt sich folgendermaßen berechnen. Die Arbeit der Schwerkraft P, welche an den Schwerpunkt angreift, ist, während sich die Ablenkung von α bis φ ändert, gleich Ph, wo $h = EL$ ist (die Geraden BE und DL sind $\perp$ zu AF); hieraus folgt, daß die Arbeit gleich Pa $(cos\, \varphi - cos\, \alpha)$ ist. Die erworbene Wucht (Seite 102) ist $\frac{1}{2} K\omega^2$, wo K das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Drehungsachse ist. Aus der Gleichung $Pa\,(cos\, \varphi - cos\, \alpha) = \frac{1}{2} K\omega^2$ folgt

Fig. 117.



$$\omega = \sqrt{\frac{2\, Pa\, (cos\, \varphi - cos\, \alpha)}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Im Augenblick, wo das Pendel seine Gleichgewichtslage durchstreicht ($\varphi = 0$), ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_0 = 2\, sin\, \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{Pa}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Reduzierte Länge eines physischen Pendels heißt die Länge $ST = l$ eines solchen mathematischen Pendels, welches mit ersterem gleiche Schwingungsdauer hat. Lenkt man das Pendel ST um den Winkel $\alpha = \angle FAg$ ab und überläßt es sodann sich selbst, so müssen, damit beide Pendel die gleiche Schwingungsdauer haben, bei gleichen Ablenkungen φ die Winkelgeschwindigkeiten des physischen (ω) und mathematischen (ω_1) Pendels einander gleich sein. Die Größe ω ist bereits in (35) gefunden; die Geschwindigkeit v des Endpunktes T unseres mathematischen Pendels ist nach (24) gleich

$$v = \sqrt{2\, gl\, (cos\, \varphi - cos\, \alpha)}$$

Es ist aber $v = l\omega_1$ [vgl. (42) auf Seite 70], folglich

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Die Gleichung $\omega = \omega_1$ gibt mithin

$$l = \frac{K}{Ma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Diese sehr wichtige Formel gibt uns die reduzierte Länge eines Pendels. Tragen wir auf der Geraden AF die Strecke $AZ = l$ ab, so nennt man den Punkt Z den Schwingungsmittelpunkt oder das Schwingungszentrum des physischen Pendels. Dieser Punkt hat offenbar folgende bemerkenswerte Eigenschaft: wenn alle materiellen Punkte des physischen Pendels, mit Ausnahme des einen in Z vorhandenen, welcher selbst ein mathematisches Pendel darstellt, verschwänden, so würde die Schwingungsdauer dieselbe bleiben, wie sie es ist, wenn Punkt Z dem physischen Pendel angehört. Alle Punkte des physischen Pendels, welche der Achse näher liegen als Z, schwingen langsamer, die weiter liegenden schwingen schneller, als sie es tun würden, wenn sie die unteren Endpunkte mathematischer Pendel bildeten. Strenggenommen haben wir nicht einen, sondern unendlich viele Punkte Z; ihr geometrischer Ort ist ein Teil ihrer Zylinderfläche pq, deren Achse A, deren Grundflächenradius l ist. Beschränkt man sich auf die Punkte, welche in der durch die Achse A gelegten Vertikalebene AF liegen, so ist ihr geometrischer Ort der Abschnitt einer parallel zur Achse C durch Z gehenden Geraden, welcher innerhalb des Pendels liegt.

Der Schwingungsmittelpunkt Z liegt tiefer als der Schwerpunkt, d. h. es ist immer $l > a$. Um dies zu beweisen, möge das Trägheitsmoment K_A des Körpers in bezug auf seine Rotationsachse A gleich dem K in Formel (38) sein und das Trägheitsmoment in bezug auf eine parallel zu A durch den Schwerpunkt C gehende Achse möge durch K_C bezeichnet werden. Nach Formel (34) auf Seite 98 und dem entsprechenden Lehrsatz ist das Trägheitsmoment K_A eines Körpers in bezug auf eine beliebige Achse A gleich dem Trägheitsmoment K_C desselben Körpers in bezug auf die Achse C, die der ersten parallel durch den Schwerpunkt geht, vermehrt um die Größe Ma^2, d. h. vermehrt um das Produkt der Masse M des Körpers in das Quadrat der Entfernung a der beiden Achsen A und C, also

$$K_A = K_C + Ma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Setzt man dies anstatt K in (38) ein, so wird

$$l = \frac{K_C + Ma^2}{Ma} = a + \frac{K_C}{Ma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

woraus ersichtlich, daß $l > a$ ist.

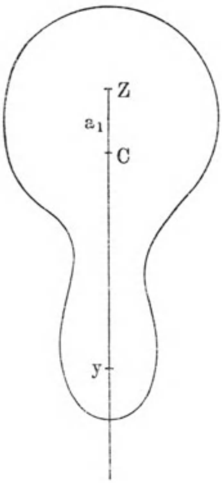
Der Drehpunkt A und der Schwingungsmittelpunkt Z besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, konjugierte Punkte zu sein, d. h. ihre Rollen vertauschen zu können. Wenn man das Pendel umkehrt und durch Z die Drehungsachse zieht (parallel zur früheren Achse A), so wird A zum Schwingungsmittelpunkt; die reduzierte Länge $l = AZ$, folglich auch die Schwingungsdauer, bleiben hierbei ungeändert.

Zum Beweise bezeichnen wir die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes vom Schwerpunkte mit $a_1 = CZ$ (Fig. 117). Es ist $a_1 = AZ - AC = l - a$, nach (39) erhält man somit

$$a_1 = \frac{K_C}{Ma} \quad \text{. . . . . (41)}$$

Wir bringen nunmehr das Pendel in die umgekehrte, in Fig. 118 dargestellte Lage; hier ist die Drehungsachse Z, der Schwerpunkt C und $CZ = a_1$. Die Entfernung des Schwingungsmittelpunkts y von der Drehungsachse ist unbekannt; wir sehen $Zy = x$ und beweisen, daß $x = l$ ist. Die Größe x erhalten wir aus (40), wenn wir a durch a_1 ersetzen:

Fig. 118.



$$x = a_1 + \frac{K_C}{Ma_1}.$$

Setzen wir hierin für a_1 seinen Wert aus (41) ein, so wird

$$x = \frac{K_C}{Ma} + \frac{K_C Ma}{MK_C} = \frac{K_C}{Ma} + a,$$

oder nach (40) $x = l$, was zu beweisen war.

Da die Schwingungsdauer eines physischen Pendels gleich der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit der nach (38) zu bestimmenden Länge l ist, so finden wir aus (31) für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels bei sehr kleinen Ausschlägen

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \text{. . . . . (42)}$$

wenn statt Mg das Gewicht P des Pendels eingeführt wird. Formel (32) gibt uns den entsprechenden genauen, Formel (33) einen angenäherten Ausdruck für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{. . . . . . (43)}$$

Schwingt das Pendel in der Luft oder ist Reibung an seiner Achse vorhanden, so sind die Schwingungen gedämpft (vgl. S. 156). Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Ausschläge gibt uns das logarithmische Dekrement der Pendelschwingungen [vgl. (76) auf S. 158]. Die allmähliche Verminderung des Winkels α hat auch eine allmähliche Abnahme der Schwingungsdauer im Gefolge, wie aus Formel (43) hervorgeht, wo das zweite Glied in der Klammer immer positiv ist. Diese Abnahme der Schwingungsdauer ist jedoch sehr klein, wenn der Anfangswinkel α klein ist und sie erfolgt sehr langsam, wenn Luftwiderstand und Reibung gering sind, d. h. wenn das logarithmische Dekrement eine kleine Größe darstellt.

Neuntes Kapitel.

Von den Dimensionen physikalischer Größen.

§ 1. Definition des Ausdruckes „Dimension“. In den vorangehenden Kapiteln dieses Abschnittes haben wir die sogenannten absoluten Einheiten gewisser physikalischer Größen kennen gelernt, soweit letztere in der Mechanik vorkamen. Wir haben dort gesehen, daß ein „Maßsystem“ mit Hilfe dreier Grundeinheiten, als welche von uns die Einheiten der Länge, Masse und Zeit angenommen wurden, aufgestellt werden kann. Setzt man die Proportionalitätsfaktoren in den Formeln, welche die Größen, deren Einheiten bereits gewählt sind, mit einer neuen Größe in Beziehung bringen, gleich Eins, so erhält man die Einheit dieser neuen Größe; auf diese Weise wird ein System von absoluten abgeleiteten Einheiten gewonnen. Je nach der Auswahl der Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit kann man eine unzählige Menge von Systemen abgeleiteter Einheiten bilden. Wir hatten insbesondere das CGS-System berücksichtigt, dessen Einheiten Gramm, Zentimeter und Sekunde sind, und in welchem die Dyne und das Erg als Einheiten der Kraft und Arbeit auftreten.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, in welcher Weise die abgeleiteten Einheiten von den Grundeinheiten abhängen. Wir wollen mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets die verschiedenartigen Größen (eigentlich ihre Zahlenwerte), mit den großen Buchstaben die entsprechenden Einheiten bezeichnen. Die Grundeinheiten sind L, M und T. Es stelle nun a irgendeine physikalische Größe dar und A sei ihre Einheit, die sich zugleich mit den Grundeinheiten L, M und T ändert.

Wenn sich bei Änderung der Grundeinheiten die abgeleitete Einheit A proportional der $p$ten Potenz der Längeneinheit L, der $q$ten Potenz der Masseneinheit M und der $r$ten Potenz der Zeiteinheit T ändert, so sagt man, die Einheit A sei nach der Längeneinheit von der $p$ten, nach der Masseneinheit von der $q$ten und nach der Zeiteinheit von der $r$ten Dimension. Übrigens spricht man der Kürze halber oft von der Dimension der physikalischen Größe selbst, z. B. von der Dimension der Arbeit, der Dimension der Bewegungsgröße usf., statt von den Dimensionen der Einheiten dieser Größen zu reden. Den erwähnten Zusammenhang zwischen den abgeleiteten und den Grundeinheiten drückt man symbolisch durch Formeln von nachstehender Form aus

$$[A] = L^p M^q T^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Schreibweise werden wir in der Folge benutzen. Oft schreibt man auch statt der großen Buchstaben kleine, also

$$[a] = l^p m^q t^r.$$

Die Exponenten p, q und r können ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein. So bezeichnet z. B. die symbolische Formel

$$[A] = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}}{T^2} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

daß die abgeleitete Einheit A irgendeiner physikalischen Größe a sich proportional der Quadratwurzel der Grundeinheit der Länge L, proportional der $\left(\frac{3}{2}\right)$ten Potenz der Masseneinheit und umgekehrt proportional dem Quadrate der Zeiteinheit ändert. Wenn z. B. zunächst das CGS-System zugrunde gelegt war und wir darauf als Grundeinheiten das Meter, Zentigramm und die Minute nehmen wollten, so würde die abgeleitete Einheit zunächst 10 mal $(\sqrt{100})$ größer, dann 1000 mal $(\sqrt{100^3})$ kleiner und zuletzt 3600 mal (60^2) kleiner, im ganzen also 360 000 mal kleiner werden. Hängt die abgeleitete Einheit A von irgendeiner Grundeinheit gar nicht ab, so sagt man, die Einheit A sei von der nullten Dimension nach dieser Grundeinheit.

Symbolische Gleichungen in der Gestalt von (1) nennt man Dimensionsformeln der entsprechenden physikalischen Größen.

In engem Zusammenhange mit der soeben erläuterten Art, die Beziehungen der abgeleiteten Einheit zu den Grundeinheiten zu bezeichnen, steht eine besondere Schreibart für die Zahlenwerte der Größen selbst. Es enthalte eine Größe a in sich n Einheiten, z. B. 7 Einheiten. Würden wir nun $a = 7$ schreiben, so würde es unbestimmt bleiben, was für 7 Einheiten in der Größe a, die man durch eine unzählige Menge absoluter Einheiten messen kann, enthalten sind. Da nun aber die abgeleitete Einheit durch die Grundeinheit vollständig bestimmt wird, so verschwindet jede Unklarheit, wenn wir dem Zahlenwert der Größe, etwa in Klammern, die Benennung der drei Grundeinheiten beifügen, auf welchen das gewählte Maßsystem beruht. So besagt z. B. der Ausdruck

$$a = 7 \text{ (Fuß, kg, Min.)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

daß in der Größe a sieben derartige Einheiten enthalten sind, wie sie sich aus den in Klammern beigefügten Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit ergeben. Ist z. B. irgendeine Arbeit $r = 10$ (cm, g, sec) Einheiten, so heißt das einfacher, sie ist gleich $r = 10$ Erg.

Es ist jedoch äußerst vorteilhaft, wenn man die Benennungen der Grundeinheiten nicht einfach nebeneinander in Klammern setzt, sondern sie in der Reihenfolge und mit den Exponenten folgen läßt, mit denen diese Einheiten in der Dimensionsformel der entsprechenden Größe auftreten, deren Zahlenwert wir hinzuschreiben haben. Nimmt man z. B. an, die Dimensionsformel der Einheit A sei von der Form (2), so schreibt man an Stelle von (3)

$$a = 7 \frac{(\text{Fuß})^{\frac{1}{2}} (\text{kg})^{\frac{3}{2}}}{(\text{Min.})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Eine solche Schreibweise bietet mancherlei Vorteile; wir sehen nicht bloß, welches die Grundeinheiten des gewählten Systems sind, sondern auch in welcher Weise die Einheit der Größe a von den Grundeinheiten abhängt. Der Hauptnutzen wird in § 3 dargetan werden.

§ 2. Dimensionsbestimmungen für die Einheiten verschiedener Größen. Für die Ableitung der Dimensionsformeln werden wir folgenden einfachen Satz brauchen:

Wenn der Zahlenwert a einer Größe gleich dem Produkte bzw. Quotienten der Zahlenwerte b und c zweier anderer Größen ist, d. h. wenn

$$a = bc \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{b}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

und die Dimensionsformeln der Einheiten B und C der Größen b und c die folgenden sind

$$[B] = M^p L^q T^r, \qquad [C] = M^x L^y T^z \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

so ist die Dimensionsformel der Einheit A der Größe a

$$\left.\begin{aligned} &[A] = M^{p+x} L^{q+y} T^{r+z} \\ \text{bzw.}\quad & \\ &[A] = M^{p-x} L^{q-y} T^{r-z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Die symbolische Dimensionsformel der Größe A entsteht also aus den symbolischen Dimensionsformeln der Größen B und C in derselben Weise, wie das Produkt bzw. der Quotient zweier algebraischer Ausdrücke, welche die Dimensionen der Einheiten von B und C bezeichnen. Beweis: Wenn $a = bc$ bzw. $a = \frac{b}{c}$ ist, so ist $a = 1$, falls $b = 1$ und $c = 1$ ist. Hieraus geht hervor, daß die Einheit A proportional B und direkt bzw. indirekt proportional C ist. Es ändert sich aber B proportional der $p$ten Potenz der Grundeinheit M und C proportional der $x$ten Potenz derselben Grundeinheit M. Ist demnach $a = bc$, so ändert sich die Einheit A proportional der $(p + x)$ten oder für $a = \frac{b}{c}$ proportional der $(p - x)$ten Potenz der Einheit M, und gerade dies ist durch die Formel (7) symbolisch ausgedrückt. Der bewiesene Satz läßt sich für $a = b^n c^m$ verallgemeinern. Symbolisch ausgedrückt haben wir

$$[A] = [B]^n [C]^m \quad \text{(7, a)}$$

Es kann nun nicht mehr schwer fallen, die Dimensionsformeln für verschiedene Einheiten aufzustellen.

Die Einheit S der Oberfläche ist proportional dem Quadrat, die Einheit O des Volumens proportional dem Kubus der Längeneinheit. Hieraus folgt

$$[S] = L^2; \quad [O] = L^3 \quad \text{(8)}$$

Beide Einheiten sind von der nullten Dimension nach M und T.

Ein Winkel wird durch das Verhältnis seines Bogens σ zum Radius ϱ gemessen; seine Einheit (der Winkel, für welchen $\sigma = \varrho$ ist, d. h. der Winkel von $57^0 17' 44{,}8''$) hängt von der Wahl der Grundeinheiten gar nicht ab. Somit ist ein Winkel von der nullten Dimension nach M, L und T.

Die Geschwindigkeit v wird durch das Verhältnis des Weges zur Zeit gemessen; hieraus folgt nach (7)

$$[V] = \frac{L}{T} = L T^{-1} \quad \text{(9)}$$

Die Einheit der Geschwindigkeit (bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurückgelegt wird) muß offenbar proportional der Längeneinheit und umgekehrt proportional der Zeiteinheit sein. Entsprechend Formel (4) haben wir demnach beispielsweise zu schreiben

$$v = 3 \frac{\text{Fuß}}{\text{Min.}}; \quad v = 15 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad \text{(10)}$$

Die tangentiale oder normale Beschleunigung w. Sowohl die eine wie die andere wird durch das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Zeit angegeben, daher ist die Dimension der Beschleunigungseinheit

$$[W] = \frac{[V]}{T} = \frac{L}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für die Normalbeschleunigung hatten wir auf S. 66 den Ausdruck $w = \frac{v^2}{R}$ gefunden, wo R eine lineare Größe ist. Das gibt

$$[W] = \frac{[V^2]}{L} = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{L}{T^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (11, a)$$

entsprechend der vorhergehenden Formel (11). Wir finden also, daß die absolute Einheit der Beschleunigung proportional der Längeneinheit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Zeiteinheit ist. So ist z. B. die (m, sec)-Einheit der Beschleunigung 3600 mal größer als die (m, Min.)-Einheit der Beschleunigung. Erstere Einheit entspricht einer Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit in einer Sekunde um „einen Meter in der Sekunde" vergrößert, die zweite einer Bewegung, bei der die Geschwindigkeit in einer Minute nur um „einen Meter in der Minute" zunimmt. Die Zahlenwerte verschiedener Beschleunigungen werden z. B. wie folgt geschrieben:

$$w = 4 \frac{\text{Fuß}}{(\text{Stunde})^2}; \quad w = 16 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hier ist die zweite Beschleunigung in CGS-Einheiten ausgedrückt. Für die Beschleunigung der Erdschwere haben wir

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Kraft ist gleich $f = mw$. Hieraus folgt die Dimension der Krafteinheit

$$[F] = M[W] = \frac{ML}{T^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nach dem Vorhergehenden bedürfen die folgenden Gleichungen keiner Erläuterung.

$$\left.\begin{aligned} f &= 8 \frac{\text{Pfund . Meter}}{(\text{Min.})^2} \\ f &= 75 \frac{\text{g cm}}{(\text{sec})^2} = 75 \text{ Dynen} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Es mögen hier zwei überaus wichtige Hinweise folgen.

I. Man hat sich ja davor zu hüten, Symbole, wie die in (10), (12) und (15) gegebenen, mit wirklichen Größen zu verwechseln, die aus Faktoren und Divisoren bestehen. Dieser grobe Fehler wird nicht selten begangen. Das, was rechts vom Zahlenwerte einer Größe steht, stellt nur ein Symbol und nichts anderes als ein Symbol dar und soll nur die Benennung der betreffenden Einheiten ersetzen, wie dies aus der zweiten Formel (15) hervorgeht.

II. Alle Glieder einer Gleichung, d. h. alle Größen, welche durch die Zeichen der Addition, Subtraktion und der Gleichheit miteinander verbunden sind, müssen von derselben Dimension sein. In der Tat können nur gleichartige Größen miteinander verglichen werden, und solche müssen natürlich von der gleichen Dimension sein. Dies liefert uns ein bequemes Mittel zur Prüfung der Richtigkeit von Formeln.

Nehmen wir ein Beispiel: Wir hatten für die Schwingungszeit t eines Pendels die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Beide Seiten dieser Gleichung müssen von derselben Dimension sein. Die linke Seite ist von der Dimension T. Auf der rechten Seite ist L die Dimension von l, $\frac{L}{T^2}$ die Dimension von g [vgl. Formel (11)]; π als unbenannte Zahl ist von der nullten Dimension. Die ganze rechte Seite hat somit die Dimension $\sqrt{\frac{L}{L : T^2}} = \sqrt{T^2} = T$, d. h. dieselbe Dimension wie die linke Seite.

Wenn zwei Größen a und b, welche nach ihrer ursprünglichen Definition voneinander verschieden sind, auf Grund irgendwelcher Herleitungen, sobald man sie in absoluten Einheiten mißt, numerisch gleich werden, so daß also $a = b$ wird, so sind notwendigerweise auch ihre Dimensionen gleich, d. h. die Abhängigkeit ihrer Einheiten A und B von den Grundeinheiten L, M und T muß die gleiche sein. Die Gleichung $a = b$ muß richtig bleiben, mit welchen absoluten Einheiten A und B sie auch gemessen werden, d. h. welches auch immer die Grundeinheiten L, M und T sein mögen. Wären die Dimensionen der Einheiten A und B nicht gleich, so müßten sie sich bei Änderung von L, M und T in verschiedener Weise ändern und es könnten daher ihre Zahlenwerte a und b nicht gleich bleiben. Wir müssen daher auf Grund der Formeln (20) auf S. 84 und (9) auf S. 111 erwarten, daß der Kraftimpuls und die Bewegungsmenge, die erlangte Wucht und die Arbeit von gleicher Dimension sind. Daß die Dimensionen der Größen $\frac{v}{t}$ und $\frac{v^2}{l}$, durch welche in verschiedenen Fällen ein und dieselbe Größe, nämlich die Beschleunigung, ausgedrückt wird, einander gleich sind [vgl. (11) und (11, a)], bestätigt das Gesagte.

Wir setzen nach diesen Abschweifungen die Herleitung der Dimensionen verschiedener Größen fort.

Die Arbeit ist gleich $r = fs$, wo f die Kraft, s der Weg ist; die Dimension der Arbeitseinheit ist daher

$$[R] = [F]\,L = \frac{ML^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Als Beispiel seien folgende Ausdrücke angeführt:

$$r = 2\,\frac{\text{kg (Meile)}^2}{(\text{Stunde})^2}; \qquad r = 8\,\frac{\text{g (cm)}^2}{(\text{sec})^2} = 8 \text{ Erg.}$$

Die Wucht ist gleich $i = \frac{1}{2}\,m v^2$; die Dimension ihrer Einheit J ist

$$[J] = M[V]^2 = \frac{ML^2}{T^2} \quad \cdots\cdots \quad (16,\text{a})$$

d. h. sie ist gleich der Dimension der Arbeit, wie wir bereits voraussehen konnten. Von derselben Dimension ist auch jede andere Energieform, z. B. die Wärme q:

$$[Q] = \frac{ML^2}{T^2} \quad \cdots\cdots \quad (16,\text{b})$$

Der Kraftimpuls ist gleich $u = ft$ und daher

$$[U] = [F]\,T = \frac{ML}{T} \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

Die Bewegungsmenge ist gleich $h = mv$; folglich

$$[H] = M[V] = \frac{ML}{T} \quad \cdots\cdots \quad (17,\text{a})$$

übereinstimmend mit (17), wie zu erwarten war.

Das Moment eines Kräftepaares ist gleich $m' = fl$, wo l der Arm des Kräftepaares ist; hier ist

$$[M'] = \frac{ML^2}{T^2} \quad \cdots\cdots \quad (18)$$

Die Dimension ist dieselbe wie die der Arbeit; es muß dies auch nach (8) auf S. 108 so sein, denn der Winkel ist von der nullten Dimension.

Die Dichte ist gleich $d = \frac{m}{o}$, wenn o das Volumen ist; folglich

$$[D] = \frac{M}{L^3} \quad \cdots\cdots \quad (19)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\varphi = \frac{\alpha}{t}$, wo α der Drehungswinkel des Körpers ist; hieraus folgt

$$[\Phi] = \frac{1}{T} = T^{-1} \quad \cdots\cdots \quad (20)$$

Die Winkelbeschleunigung ist $\psi = \frac{\varphi}{t}$; folglich

$$[\Psi] = \frac{1}{T^2} = T^{-2} \quad \cdots\cdots \quad (21)$$

Das Trägheitsmoment ist $k = ml^2$; folglich

$$[K] = ML^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist gleich $t = \pi\sqrt{\frac{k}{Pa}}$ (S. 254); die Dimension von k war soeben gefunden worden, P ist eine Kraft, a eine Länge. Die Dimension der rechten Seite der Gleichung ist $\sqrt{\frac{ML^2}{\frac{ML}{T^2}\cdot L}} = T$, wie es auch sein muß.

Schreibt man das allgemeine Gravitationsgesetz in der Form

$$f = C\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

und mißt die Kraft f in absoluten Einheiten, so hängt der Zahlenwert des Koeffizienten C von den Grundeinheiten ab, und man kann daher von der Dimension der Größe C reden. Formel (23) gibt $[F] = [C]\frac{M^2}{L^2}$, somit ist nach (14)

$$[C] = \frac{L^3}{MT^2} = M^{-1}L^3T^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Setzt man jedoch die Gravitationskonstante $C = 1$, so ist die Kraft, die wir hier zum Unterschiede mit f' bezeichnen wollen, gleich $f' = \frac{mm'}{r^2}$. Die astronomische Krafteinheit F' ist somit von der Dimension

$$[F'] = \frac{M^2}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Gilt für die Arbeit r' der Ausdruck $f's$, wo s die lineare Größe ist, so erhält man als Dimension der astronomischen Arbeitseinheit R'

$$[R'] = \frac{M^2}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Das Potential zweier Massen aufeinander $\frac{mm'}{r}$ ist, wie es sein muß, von eben dieser Dimension, vgl. (9, a) und (10) auf S. 228.

§ 3. Übergang von einem Maßsystem zum anderen. Es sei irgendeine physikalische Größe a gegeben, ihr Zahlenwert sei gleich n, falls sie durch die absolute Einheit, welche aus den Grundeinheiten λ, μ, τ abgeleitet wurde, gemessen ist. Will man nun zu einem anderen Maßsystem übergehen, so muß man den Zahlenwert n_1 derselben Größe a ermitteln, wenn sie durch die neue absolute Einheit, die von den Grundeinheiten λ_1, μ_1, τ_1 abhängt, gemessen wird. Es muß hierbei der Zusammenhang zwischen den ersten und zweiten Grundeinheiten gegeben sein, z. B. $\lambda = x\lambda_1$, $\mu = y\mu_1$, $\tau = z\tau_1$; ebenso die Dimension für die Einheit A der Größe a. Es sei z. B.

$$[A] = L^p M^q T^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Um nun n_1 zu finden, also zum neuen Maßsystem überzugehen, hat man folgende drei Verfahren vorzunehmen:

1. Man hat die Größe a nach dem Schema (4) zu schreiben, wobei das Symbol aus den ersten Grundeinheiten besteht [vgl. (27)].

$$a = n \,.\, \lambda^p \mu^q \tau^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

2. Man hat symbolisch die ersten Grundeinheiten in neue umzuwandeln:

$$a = n \,.\, (x\lambda_1)^p (y\mu_1)^q (z\tau_1)^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

3. Man hat das Symbol zeitweilig als algebraischen Ausdruck zu betrachten und die Koeffizienten herauszuschaffen, die zwischen den ersten und zweiten Grundeinheiten vermitteln.

$$a = n x^p y^q z^r \,.\, \lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn der neue Zahlenwert n_1 ist gefunden.

$$n_1 = n x^p y^q z^r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Das danebenstehende $\lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r$ ist wiederum ein bloßes Symbol der absoluten Einheit für die Größe a im neuen Maßsystem.

Diese eigentümliche Methode, die offenbar gegen den auf S. 259 gegebenen Hinweis I verstößt, kann man dennoch gelten lassen, wenn man ein für allemal zeigt, daß sie zu richtigen Resultaten führt. Zu diesem Zwecke genügt der Nachweis, daß, wenn man die Längeneinheit λ durch die neue Einheit λ_1 ersetzt, der Zahlenwert n mit x^p multipliziert werden muß (wobei p auch negativ sein kann). Wir hatten $\lambda = x\lambda_1$ gesetzt, d. h. wir hatten die Längeneinheit $x$mal verkleinert; aus Formel (27) folgt, daß die Einheit A der Größe a gerade x^pmal kleiner wird, und hieraus geht wiederum hervor, daß der Zahlenwert der Größe a gerade x^pmal größer wird. Somit ist die mit Hilfe der drei obengenannten Operationen erhaltene Formel (31) zweifellos richtig.

Beispiel: Eine gewisse Arbeit hat im [Pud, Faden, Minuten]-System[1]) den Zahlenwert 100; welchen Zahlenwert hat sie im (Pfund,

[1]) 1 Pud ist gleich 49 russ. Pfunden, 1 Faden ist gleich 3 Arschin, 1 Arschin gleich 71,12 cm.

Arschin, Sekunden)-System? Die Dimensionsformel ist nach (16)

$$[R] = \frac{ML^2}{T^2}.$$

Führen wir unsere drei oben geschilderten Verfahren aus, so erhalten wir

1. $$r = 100 \frac{\text{Pud (Faden)}^2}{(\text{Min.})^2}$$

2. $$r = 100 \frac{(40 \text{ Pfund})\ (3 \text{ Arschin})^2}{(60 \text{ Sek.})^2}$$

3. $$r = \frac{100 \,.\, 40 \,.\, 9 \text{ (Pfund) (Arschin)}^2}{3600 \text{ (Sek.)}^2}$$

oder gekürzt

$$r = 10 \frac{\text{Pfund (Arschin)}^2}{(\text{Sek.})^2}.$$

Der gesuchte neue Zahlenwert für die Arbeit ist also 10. In der Praxis brauchen wir unsere drei Verfahren nicht so streng zu sondern. Wir lassen noch einige Beispiele folgen.

I. Wieviel CGS-Einheiten der Beschleunigung, der Kraft und Arbeit sind in den entsprechenden Gaußschen Einheiten enthalten, bei welchen als Grundeinheiten Millimeter, Milligramm und Sekunde auftreten?

Die Gaußsche Beschleunigungseinheit ist $= 1 \frac{\text{mm}}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{0{,}1 \text{ cm}}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}1 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} = 0{,}1$ CGS-Einheiten der Beschleunigung.

Die Gaußsche Krafteinheit ist $= 1 \frac{\text{mm mg}}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{(0{,}1 \text{ cm})\ (0{,}001 \text{ g})}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}0001 \frac{\text{cm g}}{(\text{sec})^2} = 0{,}0001$ Dyne.

Die Gaußsche Arbeitseinheit ist $= 1 \frac{\text{mg (mm)}^2}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{0{,}001 \text{ g } (0{,}1 \text{ cm})^2}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}000\,01 \frac{\text{g (cm)}^2}{(\text{sec})^2} = 0{,}000\,01$ Erg.

II. Zwei (Meter, Kilogramm, $^1/_2$ Stunden)-Einheiten der Arbeit sollen in Erg ausgedrückt werden.

$$2 \frac{\text{kg (m)}^2}{(^1/_2 \text{ Stunde})^2} = 2 \frac{(1000 \text{ g})\ (100 \text{ cm})^2}{(1800 \text{ sec})^2} = \frac{2 \,.\, 1000 \,.\, (100)^2 \text{ g (cm)}^2}{(1800)^2 \text{ (sec)}^2}$$

$$= 6{,}17 \frac{\text{g (cm)}^2}{(\text{sec})^2} = 6{,}17 \text{ Erg}.$$

III. Die Dichte des Quecksilbers soll im (Meter, Kilogramm, Jahr)-System angegeben werden. Im CGS-System ist die Dichte des Quecksilbers 13,6, siehe S. 89 und (19) S. 261.

$$13{,}6 \frac{\mathrm{g}}{(\mathrm{cm})^3} = 13{,}6 \frac{0{,}001\,\mathrm{kg}}{(0{,}01\,\mathrm{m})^3} = \frac{13{,}6 \,.\, 0{,}001\,\mathrm{kg}}{(0{,}01)^3\,(\mathrm{m})^3} = 13\,600 \frac{\mathrm{kg}}{(\mathrm{m})^3}.$$

IV. Die Megadyne hat im (Zoll, Pfund, x Sekunden)-System den Zahlenwert 100. Es soll die Zeiteinheit für dieses System gefunden werden, wenn 1 Zoll $=$ 2,5 cm und 1 Pfund $=$ 410 g ist. Eine Megadyne ist gleich 10^6 Dynen, somit ist

$$10^6 \frac{\mathrm{cm}\,.\,\mathrm{g}}{(\mathrm{sec})^2} = 100 \frac{\text{Zoll, Pfund}}{(x\,\mathrm{sec})^2} = 100 \frac{(2{,}5\,\mathrm{cm})\,(410\,\mathrm{g})}{(x\,\mathrm{sec})^2}$$

$$= \frac{100\,.\,2{,}5\,.\,410}{x^2} \frac{\mathrm{cm\,g}}{(\mathrm{sec})^2}.$$

Der erste und letzte Ausdruck geben $10^6 = \dfrac{100\,.\,2{,}5\,.\,410}{x^2}$, woraus sich $x = 0{,}32$ ergibt; die gesuchte Zeiteinheit ist also $=$ 0,32 Sekunden.

§ 4. Absolute Maßsysteme, welche nicht auf die Grundeinheiten *L*, *M* und *T* zurückgehen. Trotzdem man, wie wir gezeigt haben, ein absolutes Maßsystem auf drei willkürlich gewählten Grundeinheiten aufbauen kann, hatten wir doch als solche immer die Einheiten der Länge (L), Masse (M) und Zeit (T) gewählt. Es wäre indes auch möglich, die Einheiten dreier anderer Größen als Grundeinheiten anzunehmen. Wir wollen in Kürze auf diesen Gegenstand eingehen, um so mehr, als man in letzterer Zeit sich wiederholt verschiedener Maßsysteme bedient hat, welche nicht auf den Einheiten M, L und T beruhen.

Die Auswahl der drei Grundeinheiten kann nicht völlig willkürlich geschehen; es müssen diese drei Einheiten voneinander unabhängig sein, d. h. es darf nicht die eine von ihnen durch die beiden anderen bestimmt werden auf Grund irgendeiner Formel, in welcher der Proportionalitätsfaktor beim Entwerfen des Maßsystems gleich Eins gesetzt wird. So können z. B. die Einheiten der Masse, Beschleunigung und Kraft oder der Länge, Kraft und Arbeit oder der Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung usw. nicht zu Grundeinheiten gewählt werden, denn in allen diesen Beispielen wird eine von den Einheiten (etwa die dritte) durch die beiden anderen bestimmt. Sind die drei Grundeinheiten festgelegt, so hat man zunächst die Dimensionen der Längen-, Massen- und Zeiteinheit, die jetzt als abgeleitete Einheiten auftreten, zu bestimmen, worauf sich dann die Dimensionen der übrigen Einheiten nach § 2 ergeben.

Erinnert man sich der Beziehungen, welche unsere Dimensionsformeln ausdrücken, so sieht man leicht ein, daß man diese Formeln zum gewünschten Zwecke wie einfache Gleichungen zu behandeln hat. Wir geben hierfür ein Beispiel zur Erläuterung.

Als Grundeinheiten seien die Einheiten der Geschwindigkeit V, der Beschleunigung W und der Kraft F gewählt. Es sollen die Dimensionen der übrigen Einheiten gefunden werden. Wir hatten die Formeln

$$[V] = L\,T^{-1};\quad [W] = L\,T^{-2};\quad [F] = M\,L\,T^{-2}.$$

Hier sind V, W und F die Grundeinheiten, L, M und T die abgeleiteten Einheiten, und deshalb geben uns dieselben Proportionalitäten, welche zwischen diesen sechs Größen bestehen, folgende Formeln:

$$[L][T]^{-1} = V;\quad [L][T]^{-2} = W;\quad [M][L][T]^{-2} = F.$$

Löst man diese symbolischen Formeln wie Gleichungen nach $[L]$, $[M]$ und $[T]$ auf, so erhält man

$$[L] = V^2 W^{-1};\quad [M] = F\,W^{-1};\quad [T] = V . W^{-1} \quad . \quad . \quad (32)$$

Ferner erhalten wir als Dimensionen für die

Einheit der Arbeit	$[R]$	$= V^2 F\,W^{-1}$
„ „ Fläche	$[S]$	$= V^4\,W^{-2}$
„ des Volumens	$[O]$	$= V^6\,W^{-3}$
„ der Winkelbeschleunigung . .	$[\Psi]$	$= V^2\,W^2$
„ „ Bewegungsmenge	$[H]$	$\left.\right\}= V F\,W^{-1}$
„ des Kraftimpulses	$[U]$	
„ der Dichte	$[D]$	$= F\,V^{-6}\,W^2$
„ des Trägheitsmomentes . . .	$[K]$	$= F\,V^4\,W^{-3}$

Zur Übung für den Leser sei hier eine Tabelle begonnen, wo dem Maßsystem die Einheiten der Kraft F, der Arbeit R und der Dichte D zugrunde liegen. Es ist

$$[L] = R\,F^{-1};\quad [M] = D\,R^3 F^{-3};\quad [T] = D^{1/2} R^2 F^{-5/2};$$
$$[W] = D^{-1} R^{-3} F^4;\quad [H] = D^{1/2} R^2 F^{-3/2}\cdot \text{ usw.}$$

Wir haben drei voneinander unabhängige Einheiten gewählt und auf ihnen das System der absoluten Einheiten aufgebaut. In Band III werden wir noch eine vierte Grundeinheit, die der Temperaturdifferenz (ein Grad, z. B. 1^0 C), und in Band IV, in der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinnngen, noch eine weitere einführen. Viele Forscher strebten danach, die Zahl der Grundeinheiten zu verringern. Ein Beispiel eines solchen Versuches ist das folgende. Wir wählen zwei beliebige Einheiten, z. B. die Einheiten der Länge und der Masse, und denken uns zwei Masseneinheiten, die um eine Längeneinheit voneinander entfernt sind und von denen die eine sich in einer Kreisbahn unter dem Einflusse der Gravitation um die andere bewegt; die Umlaufszeit der ersten nehmen wir als Zeiteinheit; letztere wird somit durch die Einheiten der Länge und der Masse bestimmt.

Lippmann (1903) hat eine auf elektrischen Vorgängen (Entladung eines Kondensators) beruhende Methode gegeben, die Zeiteinheit als abgeleitete Einheit zu definieren.

Ein sehr merkwürdiges System von absoluten Einheiten hat Planck (1900) aufgestellt, indem er vier „universelle Konstanten“ zugrunde legte, und zwar erstens die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = 3 \,.\, 10^{10} \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}};$$

zweitens die Gravitationskonstante

$$C = \frac{f r^2}{m m'} = 6{,}685 \,.\, 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g} \,.\, \mathrm{sec}^2};$$

drittens eine Größe k, welche in der Thermodynamik (Band III) auftritt und den Zusammenhang gibt zwischen der sogenannten Entropie und der sogenannten statistischen Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines Körpersystems; diese Größe hat die Dimension (Energie : Temperatur) und ist gleich

$$k = 1{,}346^{-16} \frac{\mathrm{g} \,.\, \mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}^2 \,.\, \mathrm{Grad}};$$

viertens endlich eine Größe h, welche in der neuen Theorie der Strahlung auftritt und die Dimension [Energie $\times$ Zeit] hat; eine Größe von dieser Dimension nennt man „Wirkung“, und h hat den Charakter einer kleinsten möglichen Wirkungsmenge oder eines Wirkungsatoms. Es ist

$$h = 6{,}415 \,.\, 10^{-27} \frac{\mathrm{g} \,.\, \mathrm{cm}^3}{\mathrm{sec}^2}.$$

Planck setzt nun jede von den vier Größen c, C, k und h gleich Eins und erhält dadurch ein wirklich absolutes, von menschlicher Willkür vollkommen unabhängiges oder, wie er es nennt, ein „natürliches“ Maßsystem. Die Einheiten der Länge, Masse, Zeit und Temperatur werden jetzt abgeleitete Einheiten, und zwar werden:

Die Einheit der Länge	$3{,}99 \,.\, 10^{-33}$ cm
„ „ „ Masse	$5{,}37 \,.\, 10^{-5}$ g
„ „ „ Zeit	$1{,}33 \,.\, 10^{-43}$ sec
„ „ „ Temperatur . . .	$3{,}60 \,.\, 10^{32}$ Grad C.

Planck sagt von diesem System: „Diese Größen behalten ihre natürliche Bedeutung so lange bei, als die Gesetze der Gravitation, der Lichtfortpflanzung im Vakuum und die beiden Hauptsätze der Thermodynamik in Gültigkeit bleiben; sie müssen also, von den verschiedensten Intelligenzen nach den verschiedensten Methoden gemessen, sich immer wieder als die nämlichen ergeben.“

Dritter Abschnitt.

Meßapparate und Meßmethoden.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über physikalische Messungen.

§ 1. Absolute und relative Messungen. Wir erweitern unsere Kenntnisse über die Naturerscheinungen mit Hilfe von Beobachtung und Experiment; diese führen uns zu neuen Entdeckungen und zur Feststellung der gesetzmäßigen Beziehungen, welche die verschiedenen Erscheinungen miteinander verbinden. Somit ist die Aufgabe, zu deren Lösung wir Beobachtung und Experiment anstellen, eine zweifache: sie kann entweder die qualitative oder die quantitative Seite der Erscheinung berühren. Rein qualitative Beobachtungen und Versuche werden jedoch nur verhältnismäßig selten angestellt. Fast immer schließen sich an sie mehr oder weniger eng auch quantitative Untersuchungen an; diese sollen die näheren Bedingungen feststellen, unter denen die beobachtete qualitative Seite der Erscheinung hervortritt, und sollen ferner die Größen liefern, durch welche eben diese qualitative Seite genau bestimmt wird. Die gesetzmäßigen Beziehungen aber werden, wie dies im § 7 auf S. 24 auseinandergesetzt ist, durch die Untersuchung der quantitativen Seite der Erscheinungen enthüllt, indem Messungen verschiedener Größen, welche für die Entstehungsbedingungen wichtig oder für manche Seiten der Erscheinungen bezeichnend sind, vorgenommen werden.

Demnach spielt die Messung verschiedener Größen bei physikalischen Untersuchungen eine hervorragende Rolle. Die Meßmethoden werden in zahlreichen Sonderwerken behandelt, doch sind, um sich ihrer zu bedienen, nicht bloß Kenntnisse erforderlich, sondern auch eine gewisse Fertigkeit. Natürlich kann letztere nur durch die Ausführung von Messungen selbst und während derselben erworben werden; Bücher können unmöglich alle die Winke und Hinweise enthalten, die für die Vornahme solcher Arbeiten sich als notwendig erweisen.

Gewissenhaftigkeit, Geduld und Arbeitsfreudigkeit, das sind die Eigenschaften, die ein jeder besitzen muß, der physikalische

Messungen ausführen will; dazu kommt noch äußerste Vorsicht und Umsicht. Nicht bloß handelt es sich hierbei um die gewöhnliche Vorsicht, ohne welche leicht die Apparate beschädigt, ja in manchen Fällen uns und anderen Schaden zugefügt wird; es bedarf auch ganz besonders einer weitgehenden Umsicht bei Wahl der Meßmethode, der Aufstellung der Meßapparate und schließlich bei dem Versuche, aus den erhaltenen Resultaten der Messungen irgendwelche Schlüsse zu ziehen.

Wir können in diesem Buche nicht auf alle Einzelheiten eingehen, die in den entsprechenden Lehrbüchern, welche die physikalischen Messungen zu ihrem besonderen Gegenstande haben, behandelt werden; wir müssen uns hier vielmehr auf einige Bemerkungen beschränken, die von grundlegender Bedeutung für den vorliegenden Gegenstand sind. Ebenso werden wir uns begnügen müssen mit der Beschreibung einiger der wichtigsten Methoden, die zur Messung von Längen, Winkeln, Volumina, Massen, Kräften und Zeit dienen. Gesondert werden wir sodann die Methoden zur Bestimmung der Beschleunigung g der Schwerkraft und der mittleren Erddichte behandeln.

Eine physikalische Größe messen (vgl. S. 19), heißt bestimmen, wievielmal in ihr eine als Einheit gewählte Größe derselben Art enthalten ist. Man pflegt absolute und relative Messungen zu unterscheiden. Die absoluten Messungen geben uns den Zahlenwert der zu messenden Größe in genau festgesetzten, vollkommen bekannten Einheiten, z. B. die Länge in Metern, die Kraft in Dynen, die Wärmemenge in Kalorien usw. Die relativen Messungen können von dreierlei Art sein:

1. Für die zu messende Größe wird ihr Zahlenwert in sogenannten „willkürlichen Einheiten“ ermittelt, d. h. in Einheiten, deren Größe von zufälligen Eigenschaften des Meßapparates abhängen, von seiner Aufstellung usw. Das Verhältnis zwischen diesen Einheiten und den allgemein üblichen braucht uns hierbei nicht bekannt zu sein. Messungen solcher Art können uns das Verhältnis zweier gleichzeitig zu messender Größen sehr genau liefern, ferner die relative Änderung einer von ihnen usw. Der Zahlenwert a, den man bei einer derartigen Messung der Größe erhält, ist dem Zahlenwert b, den eine absolute Messung ergeben hätte, proportional. Der Proportionalitätsfaktor C in der Formel

$$b = Ca \qquad (1)$$

heißt Reduktionsfaktor. Er ist im allgemeinen selbst für Apparate derselben Art verschieden, da diese immer gewisse Verschiedenheit gegeneinander aufweisen. Der Faktor C kann in einigen Fällen durch gesonderte oder sogar gleichzeitige Messungen irgendeiner Größe nach zwei Methoden bestimmt werden, von welchen eine ihren Zahlenwert b in bestimmten und bekannten, die andere ihren Zahlenwert a in „willkürlichen“ Einheiten ergibt. Ist der Reduktionsfaktor C einmal nach

Formel (1) ermittelt worden, so lassen sich mit Hilfe derselben Formel jedesmal die Messungsresultate, die uns die Zahlen a geben, auf das „absolute“ Maß zurückführen. Die Bestimmung von C muß von Zeit zu Zeit wiederholt werden, da unmerkliche Veränderungen am Apparat selbst, in seiner Aufstellung oder den äußeren Einflüssen eine Änderung jener willkürlichen Einheit zur Folge haben können, für welche der Apparat den Zahlenwert a gibt. Besondere Verwickelungen treten meist dann auf, wenn die erwähnte Einheit von äußeren Ursachen, z. B. von der Temperatur, abhängt.

2. Die relative Messung beschränkt sich auf eine einfache Bestimmung des Verhältnisses zweier Größen x und y, von denen eine, z. B. x, als „willkürliche Einheit“ gelten kann. Ist es möglich, eine absolute Messung der Größe x vorzunehmen, und ist man sicher, daß während dieser Messung und der Vergleichung mit y keine Änderung von x erfolgt ist, so hat man auch y in absolutem Maße gemessen.

3. Zu den relativen Messungen gehören auch die Variationsmessungen, bei denen nicht die Größe selbst gemessen wird, sondern bloß ihre Änderungen mit der Zeit, Temperatur und anderen Faktoren, von welchen die Größe abhängt. Werden außer solchen Änderungsmessungen von Zeit zu Zeit auch absolute Messungen vorgenommen, so erhält man auch für die Zwischenzeiten, in denen nur die Änderungen der Größe bestimmt wurden, deren Werte in absolutem Maße.

§ 2. Etalons und Meßinstrumente. Ein Körper, von dem eine für ihn bezeichnende physikalische Größe mit aller nur erreichbaren Genauigkeit bekannt ist, heißt, wenn er zur Vergleichung dieser Größe mit anderen Größen derselben Art dienen kann, Etalon dieser Größe. So können z. B. ein Stab, dessen in Metern ausgedrückte Länge genau bekannt ist, oder ein Draht, dessen galvanischer Widerstand in Widerstandseinheiten (in Ohms) mit größtmöglicher Sorgfalt bestimmt ist, als Etalons bei Messungen der Länge bzw. des galvanischen Widerstandes irgendeines anderen Körpers dienen. Gewöhnlich sucht man die „Größe des Etalons“ so herzustellen, daß sie entweder der Einheit selbst oder einem gewissen Vielfachen oder Teile derselben möglichst nahekommt. So hat z. B. das Etalon der Länge — der Normalmaßstab — entweder die Länge der ganzen Längeneinheit, oder eines bestimmten Vielfachen, oder eines einfachen Teiles ($^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$) derselben; das gleiche gilt vom Etalon des Widerstandes usw.

Zur Ausführung der Messungen dienen besondere Instrumente, die je nach der Art der zu messenden Größe oder der in Anwendung gebrachten Messungsmethode verschieden sind.

Man unterscheidet „absolute“, „relative“ und „Variationsinstrumente“, je nach der Art der Messung, für welche sie bestimmt sind.

Hinsichtlich der Benennungen für die verschiedenen Instrumente sei hier bemerkt, daß viele von ihnen auf die Silben „skop", „meter" und „graph" endigen.

Die Instrumente, deren Benennungen mit der Silbe **„skop"** endigen, dürften eigentlich strenggenommen nicht zu den Meßinstrumenten gezählt werden, wenngleich sie bisweilen bei Messungen, insbesondere nach der später zu erwähnenden „Nullmethode", eine wichtige Rolle spielen. Eine unmittelbare Messung irgendeiner Größe gestatten sie nicht; sie zeigen nur an, welches Vorzeichen eine gegebene Größe hat oder ob sie gleich Null oder von Null um ein Meßbares verschieden ist (z. B. das Elektroskop, Galvanoskop). Hierher gehören auch die Apparate, die bloß zum Betrachten von irgendwelchen Dingen dienen (das Mikroskop, Teleskop); solche Instrumente haben entweder gar nichts mit Messungen zu tun oder sie bilden nur gewisse Teile von wirklichen Meßinstrumenten. Apparate mit der Bezeichnung **„meter"** sind wirkliche Meßinstrumente und dienen mehr oder weniger unmittelbar zur Bestimmung des Zahlenwertes der zu messenden Größe (Elektrometer, Galvanometer, Barometer, Spektrometer, Hygrometer, Kalorimeter usw.). Apparate mit der Bezeichnung **„graph"** bilden die besondere Gruppe von „selbstregistrierenden Apparaten", die entweder ununterbrochen oder in bestimmten, meist gleichen Zeitabständen das Maß der einen oder anderen Größe aufzeichnen. Die Mehrzahl der hierher gehörigen Apparate (jedoch nicht alle) sind Variationsinstrumente: sie verzeichnen die Änderung, welche eine Größe innerhalb einer gewissen Zeit im Vergleiche zu ihrem Werte für einen bestimmten Anfangsmoment erfahren hat (Barograph, Magnetograph, Thermograph usw.). Dagegen gehört z. B. der Anemograph, welcher unmittelbar das Azimut der Windrichtung und die Windstärke (Windgeschwindigkeit) verzeichnet, offenbar nicht zu den Variationsinstrumenten.

§ 3. Das Meßverfahren. Jede Messung einer physikalischen Größe zerfällt in eine Reihe verschiedener Arbeitsstufen; diese geben zusammengenommen die Daten, aus welchen entweder unmittelbar oder durch verschiedene Verknüpfungen und Rechnungen der gesuchte Zahlenwert der zu messenden Größe entspringt. Es ist unmöglich, eine genaue Übersicht über alles zu geben, was bei Ausführung physikalischer Messungen in Betracht kommt; über diesen Gegenstand muß sich der Leser in den oben erwähnten Sonderwerken unterrichten. Bei der überwiegenden Mehrzahl physikalischer Messungen hat man es mit drei aufeinanderfolgenden Arbeitsstufen zu tun: der Aufstellung, der Beobachtung und der Ablesung.

I. Die Aufstellung besteht darin, daß man den Apparaten den rechten Ort und die rechte Stellung anweist und sie in geeigneter Weise anordnet, wobei auf äußere und innere Umstände zu achten ist, die sowohl von den Eigenschaften der benutzten Apparate, als auch von den Besonderheiten der zu beobachtenden Erscheinungen abhängen. Sehr oft muß ein Apparat so aufgestellt werden, daß eine gewisse Ebene desselben horizontal wird. Dies wird häufig unter Zuhilfenahme der Libelle durch Drehen der Fußschrauben des Apparates erzielt. Ferner muß ein Apparat so aufgestellt sein, daß die Messungen mit ihm überhaupt ausführbar und zwar bequem ausführbar sind, zu welchem Zwecke gewisse Teile desselben eine ganz bestimmte Lage haben müssen. Zu den äußeren Aufstellungsbedingungen, auf welche man ganz besonders acht zu geben hat, gehört, daß die Aufstellung eine feste sei: der Apparat darf keinen zufälligen Erschütterungen ausgesetzt sein, die z. B. seine horizontale Stellung allmählich ändern können. Dazu stellt man ihn z. B. auf besondere, an der Wand angebrachte Konsolen oder auf steinerne Pfeiler mit fester Unterlage oder auf Mauerpfosten mit gesondertem Fundament. Ferner ist bei der Aufstellung zu achten auf den Einfluß der Umgebung; hierher gehören Luftströmungen, Temperaturwechsel (durch die Nähe eines Ofens, eines Fensters, des Beobachters), Luftfeuchtigkeit (welche z. B. die Länge der Kokonfäden beeinflußt) usw.; die gegenseitige Beeinflussung der Apparate, der Einfluß von benachbarten Eisenmassen oder Leitern, auf welchen elektrische Ströme auftreten (auf magnetische Apparate) usf. — Die Aufstellung muß begleitet sein von der allergenauesten Untersuchung aller Nebenumstände, die auf die Angaben des Apparates von Einfluß sein können; solche Umstände müssen dann entweder beseitigt oder es muß die Größe ihres Einflusses in Rechnung gezogen werden.

II. Die Beobachtung besteht bei sehr vielen Messungen in einer allmählichen Verschiebung eines Apparatteiles oder in der Änderung der Lage eines außerhalb befindlichen Gegenstandes bis die gewünschte Erscheinung zutage tritt. Der Zeitaugenblick, wo dieses geschieht, wird meist durch direktes Hinsehen, bisweilen auch nach dem Gehör oder Gefühl (s. u. das Sphärometer) bestimmt. Eine solche Art von Beobachtung nennt man die „Einstellung“ dieses oder jenes Apparatteiles. Diese Operation muß möglich sein, woraus jedoch nicht folgt, daß sie einem Jeden auch gleich das erste Mal gelingt. Vielmehr gehört hierzu oft langdauernde Übung und kann daher eine genaue Messung, d. h. das möglichst richtige Auffassen des Augenblickes, wo irgendeine bestimmte Erscheinung eintritt, wie bereits früher angedeutet wurde, nur einem „geschickten“ Beobachter gelingen.

Die Verstellung eines Apparatteiles oder eines außerhalb des Apparates befindlichen Gegenstandes wird in sehr vielen Fällen durch Drehung eines Schraubenkopfes und nur selten aus freier Hand (wie bei einigen Photometern) vorgenommen. Hierbei kann man meist von zwei entgegengesetzten Seiten einstellen und dadurch, daß man zweimal dreht, das eine Mal von der einen, das andere Mal von der entgegengesetzten Seite, ein genaueres Resultat erhalten. Besonders hat man hierbei auf den sogenannten toten Gang der Schrauben zu achten; hatte man die Schrauben zuerst nach der einen Seite gedreht, wobei sich ein gewisser Teil des Apparates verschob, und dreht man sie darauf zurück, so beginnt sich der von der Schraube geführte Teil des Apparates nicht auch gleichzeitig nach der anderen Seite zu bewegen, so daß die Größe der Schraubendrehung nicht als Maß für die Verschiebung des betreffenden Apparatteiles dienen kann. Der Experimentator hat nun zu entscheiden, auf welche Weise in jedem gegebenen Falle der schädliche Einfluß des toten Ganges zu beseitigen ist; er kann entweder bei jeder Messung zwei Beobachtungen, die auf entgegengesetzten Seiten liegen, machen, d. h. die Schraube erst vorwärts, dann rückwärts drehen oder eine Reihe aufeinanderfolgender Messungen vornehmen, indem er die Schraube immer nach derselben Seite hin dreht.

Im vorhergehenden war darauf hingewiesen worden, daß die Verschiebung eines Apparatteiles so lange vorgenommen wird, bis man mit dem Auge, Ohre oder Gefühl ein gewisses, ganz bestimmtes Resultat erlangt hat. Meist besteht dies darin, daß zwei zu beobachtende Größen extensive Größen (wie Länge, Winkel) oder intensive Größen (wie Schallstärke, Helligkeitsgrad) einander gleich gemacht werden sollen. Hierher gehört auch der Fall, wo eine gleiche Färbung zweier Flächen, gleiche Höhe zweier Töne und andere qualitative Übereinstimmungen erlangt werden sollen. Wir sind eben nicht imstande, den Augenblick zu erfassen, wo zwei Größen, welche wir beobachten, sich in einem bestimmten Verhältnisse zueinander befinden, z. B. eine von ihnen gerade zweimal intensiver ist als die andere. Dagegen kann die Frage, ob zwei Größen einander gleich sind oder nicht, bei gehöriger Übung mit großer Genauigkeit entschieden werden.

Bei vielen Meßmethoden hat man den Augenblick des Verschwindens einer gewissen Erscheinung zu beobachten; solche Methoden sollen Nullmethoden genannt werden. Sie sind besonders wertvoll, denn über das Vorhandensein oder die Abwesenheit einer Einwirkung auf die Sinnesorgane kann man noch sicherer urteilen, als über die Gleichheit zweier Eindrücke. Übrigens läßt sich in bezug auf die angedeuteten Erscheinungen keine scharfe Grenze ziehen, denn oft kommt gerade das Verschwinden einer Erscheinung auf das Gleichwerden zweier Eindrücke zurück. Wird z. B. (im Photometer) ein Fleck oder Streifen auf hellem Grunde beobachtet und soll der Augenblick erfaßt werden, wo derselbe gerade verschwindet, so hat man doch eigentlich festzustellen, wann die Helligkeit des Fleckes gleich wird der des Hintergrundes, von dem er sich vorher abhob.

Bei sehr vielen Messungen hat man zwei Punkte, einen Punkt und einen Strich, oder zwei Striche zur möglichst vollkommenen Deckung zu bringen, indem man den beweglichen an den anderen festbleibenden heranbringt. Auch hierzu ist Übung erforderlich, denn der „Punkt“ oder „Strich“ ist in Wirklichkeit ein kleiner Kreis bzw. ein schmaler Streifen; zusammenfallen sollen aber ihre geometrischen Mitten.

Wir hatten die „Beobachtung“ im Sinne der genauen Einstellung eines Apparatteiles als zweite der Hauptarbeitsstufen bei jeder Messung bezeichnet. Bei einigen Messungen fehlt dieselbe gänzlich; sie wird durch eine Vorrichtung ersetzt, welche im Apparate selbst irgendeine Verschiebung oder überhaupt eine gewisse Veränderung hervorruft. So ruft z. B. die Schließung des elektrischen Stromes eine Drehung der Galvanometernadel, die Erwärmung (bei Messungen des Ausdehnungskoeffizienten, des Schmelz- und Siedepunktes) eine Bewegung des Quecksilbers hervor usw.

III. Die Ablesung kann sich entweder auf eine Länge oder auf eine Zeit beziehen. Die Ablesung der Länge wird an einer Skala ausgeführt, die entweder an einer Geraden oder einer Kreislinie angebracht ist; hier muß man den Zahlenwert der Skala bestimmen, welcher einem bestimmten Punkte derselben entspricht. Liegt dieser Punkt zwischen zwei ganzen Teilstrichen der Skala, so werden die Bruchteile nach Augenmaß geschätzt.

Die Ablesung der Zeit geschieht 1. nach dem Gehör mittels einer Vorrichtung, welche die ganzen oder halben Sekunden schlägt, wobei der Augenblick zu bestimmen ist, in welchem die zu beobachtende Erscheinung auftritt, und 2. mit Hilfe sogenannter Chronographen (s. u.), welche die Ablesung der Zeit ebenfalls auf eine Längenablesung zurückführen.

§ 4. Einige besondere Angaben über die Ausführung der physikalischen Messungen. Nachdem wir die Aufstellung, Beobachtung und Ablesung als die Hauptoperationen, aus welchen jede physikalische Messung besteht, besprochen haben, wollen wir noch einige Hinweise geben, die für Anfänger von Nutzen sein können.

1. Die Kunst, gute, d. h. genaue Messungen auszuführen, besteht darin, daß man die äußersten Grenzen dessen erreicht, was der Apparat zu geben vermag. Für grobe, angenäherte Messungen, mit denen man sich für technische Zwecke (z. B. in der Elektrotechnik) begnügt, können einfache Apparate Verwendung finden, die so bequem konstruiert sind, daß ein jeder in kürzester Zeit mit ihnen umgehen lernt. Etwas ganz anderes ist es aber bei wissenschaftlichen Untersuchungen, wo die äußerste Grenze der Genauigkeit erreicht werden muß. Hierzu ist eine eingehende Kenntnis aller Eigenschaften des Instrumentes und jene Umsicht erforderlich, von welcher

oben die Rede war. Ein geschickter Experimentator wird selbst mit einem relativ schlechten Apparate bessere Resultate erzielen, als ein ungeschickter mit einem vollkommeneren.

2. Wo es irgend möglich ist, muß jede Messung vielmals wiederholt werden. Diese Bemerkung gilt insbesondere für Anfänger, welche erfahrungsgemäß geneigt sind, sich mit nur einer Messung zu begnügen. Meist hat man viel Zeit und Mühe darauf zu verwenden gehabt, um das Resultat der ersten Messung zu erlangen; die späteren, wiederholten Messungen verlangen dagegen schon viel weniger und nicht selten immer weniger Zeit und Mühe.

3. Wenn der Einfluß irgend einer Wirkung A auf eine gewisse Größe B gemessen wird (z. B. der Einfluß einer Temperaturänderung auf den elektrischen Widerstand eines Drahtes), so muß man entweder abwechselnd Messungen bei Anwesenheit und Abwesenheit dieses Einflusses vornehmen, oder wenigstens, wenn man die Messung von B, ohne daß A vorhanden war, begonnen hatte, wieder auf den Anfangszustand zurückgehen, d. h. wieder eine Messung von B bei Abwesenheit von A vornehmen. So kann man sich davon überzeugen, ob während der Versuche am Instrumente selbst oder in der Versuchsanordnung nicht irgendwelche Veränderungen vorgegangen sind, welche auf die Angaben des Instrumentes von Einfluß sein können. Bemerkt man eine solche Veränderung, und ist sie auch nur gering, so muß man sie mit in Betracht ziehen, indem man etwa annimmt, daß sie allmählich und proportional der Zeit, welche seit der ersten Messung verflossen war, erfolgt ist.

4. Niemals darf man unterlassen, zu Beginn der Versuchsreihe aufzuzeichnen, was man mißt und nach welcher Methode man die Messung vornimmt; ferner hat man den Beobachtungsort und die Beobachtungszeit einzutragen, und zwar das genaue Datum und bei jeder Einzelmessung die Minuten, erforderlichenfalls auch die Sekunden bis auf Bruchteile. Fast immer ist auch eine Angabe der Temperatur erforderlich. Auch andere Größen, wie Luftdruck, Luftfeuchtigkeit, magnetische Deklination usw. hat man anzumerken, falls sie einen Einfluß auf das Ergebnis der Messungen haben können.

5. Die numerischen Daten, welche man bei der direkten Ablesung erhält, sind nur in seltenen Fällen den Zahlenwerten der zu messenden Größen gleich, welche man zu bestimmen wünscht. Fast immer erhält man die gesuchten Werte durch Rechnung, indem man in bestimmte Formeln die Resultate der Ablesungen einsetzt. Man muß es sich zur Regel machen, die unberechneten Beobachtungsresultate sich nicht anhäufen zu lassen, sondern sie sobald wie möglich zu berechnen, denn die Resultate der Berechnung können oftmals sehr wertvolle Winke über Mängel der angewandten Methode, über äußere

Einflüsse usw. geben. Die Berechnungen, die bisweilen mehr Zeit und Mühe erfordern als die Messungen selbst und jedenfalls eine weit weniger interessante Arbeit darstellen, muß man derart ausführen, daß sie sich leicht übersehen und nachprüfen lassen. Als Hilfsmittel können Rechenmaschinen und verschiedene Tabellen verwandt werden, wie z. B. die Barlowschen Tafeln (enthaltend die Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln der ganzen Zahlen und ihre reziproken Werte) und Crelles Rechentafeln (Multiplikationstabellen).

6. Die gewählte Meßmethode ist zunächst einer theoretischen Prüfung zu unterziehen, um die Bedingungen für ihre größtmögliche Empfindlichkeit zu finden. Letztere ist dann erreicht, wenn eine sehr kleine Änderung der zu messenden Größe eine möglichst große Änderung der Ablesung hervorruft. Allgemeine Regeln lassen sich hier nicht aufstellen, außer etwa für den Fall, daß man die kleine Änderung Δx der Größe x zu messen hat, welche durch irgendeine äußere Ursache hervorgerufen wird (z. B. die Änderung Δx des Widerstandes x eines Teiles einer galvanischen Kette durch Erwärmung oder die Änderung Δx der Lichtstärke x unter dem Einflusse magnetischer Kräfte; vgl. die magnetische Drehung der Polarisationsebene). In diesem Falle hat man darauf zu achten, daß das anfängliche x möglichst klein, womöglich gleich Null sei, oder daß die Größe x selbst ohne Einfluß auf die Ablesung sei. Letztere muß einzig von Δx abhängen. Ist der Widerstand x einer galvanischen Kette sehr groß, so ruft eine dem absoluten Betrage nach kleine Änderung Δx keine merkliche Änderung der Stromstärke hervor, folglich auch keine merkliche Änderung in den Angaben des Instrumentes (des Galvanometers); dieselbe Größe Δx bewirkt dagegen eine große Änderung in den Angaben des Instrumentes, wenn letztere von x gar nicht abhängen. Eine kleine Änderung Δx einer intensiven Helligkeit bleibt unbemerkt; die ihrem absoluten Betrage nach gleiche Lichtstärke Δx auf dunklem Hintergrunde ist dagegen äußerst merklich.

Eine wichtige Rolle in der vorliegenden Frage spielt das von Fechner aufgestellte psychophysische Gesetz. Bezeichnet man mit J die Größe eines auf unsere Sinnesorgane ausgeübten Reizes, mit ΔJ die Änderung desselben, welche eine eben noch merkbare Änderung der Empfindung hervorruft (Schwellenwert der Empfindung), so muß nach diesem Gesetz ΔJ proportional J sein. Findet man z. B. beim Heben von zwei einander fast gleichen Gewichten eben noch einen Unterschied heraus, so muß der Unterschied zweier $n$mal größerer Gewichte auch selbst $n$mal größer sein, um noch mit demselben Grade von Sicherheit erkannt zu werden. Fechner folgert hieraus, daß die Empfindungen eine arithmetische Reihe bilden, wenn die Reize in einer geometrischen anwachsen. Bekanntlich hat man die Sterne nach ihrer Helligkeit in eine Reihe eingeordnet und unterscheidet demgemäß Sterne erster, zweiter Größe usf.; dabei ordnete man sie der Empfindung nach in eine arithmetische Reihe. Durch photometrische Messungen hat man sich nun überzeugt, daß die wahre Helligkeit der Sterne aufeinanderfolgender Größenklassen eine geometrische Reihe bildet. In der Akustik werden wir sehen, daß die Schwingungszahlen der Töne, welche gleiche Intervalle miteinander bilden, eine geometrische Progression darstellen.

7. Jede theoretisch gefundene Meßmethode stellt etwas Abstraktes, ja man könnte sagen, Ideales, dar. Bei ihrer Anwendung in der Praxis tritt stets eine ganze Reihe von Nebenumständen zutage, welche die endgültige Ablesung beeinflussen und somit die theoretische Formel, die uns den gesuchten Zahlenwert der zu messenden Größe gibt, ändern. Mit Rücksicht hierauf müssen wir, um den wahren Wert der gemessenen Größe zu erhalten, an unseren Rechnungen noch gewisse Korrektionen anbringen. Eine Hauptaufgabe des Experimentators besteht somit auch darin, alle die Nebenumstände ausfindig zu machen, welche das Ergebnis der Messung beeinflussen können und die entsprechenden Korrektionen zu bestimmen.

Bei der Berechnung dieser Korrektionen muß man mit besonderer Umsicht verfahren, um nicht im Streben nach einem möglichst genauen Resultate in folgenden, leicht möglichen Fehler zu verfallen. Die verschiedenen das Ergebnis beeinflussenden Nebenumstände üben einen sehr verschieden großen Einfluß aus; einige der Korrektionen betragen vielleicht mehrere Prozent, andere nur zehntel, hundertstel oder sogar tausendstel Prozent des Resultates. Man hat sich nun durchaus vor einer unnötigen Einführung kleinster Korrektionen zu hüten, bevor nicht die relativ großen Korrektionen bereits angebracht sind. Bei Beobachtung der Schwingungen eines Wagebalkens kann man Korrektionen anbringen, die nur 0,001 Proz. des zu bestimmenden Gewichtes (und noch weniger) betragen; solche Korrektionen sind aber ganz zwecklos und führen zu einer Selbsttäuschung, wenn man nicht gleichzeitig auch die viel bedeutenderen Korrektionen, so z. B. die wegen des Gewichtsverlustes in der Luft, die 0,1 Proz. übersteigen kann, angebracht hat.

8. Beim Endresultat, das meist in Form einer Zahl mit einem Dezimalbruch erscheint, hat man die absolute Genauigkeit desselben von seiner relativen Genauigkeit zu unterscheiden. Diese und jene wird durch denjenigen Teil der erhaltenen Zahl bestimmt, für dessen Richtigkeit wir uns zu verbürgen imstande glauben. Hat sich z. B. ein Gewicht zu 125,0463 g ergeben, und wir können sicher sein, daß die vorletzte Ziffer 6 sein muß (daß also das Gewicht größer als 125,0455 g und kleiner als 125,0465 g ist), so beträgt die absolute Ge-

nauigkeit der Wägung 0,5 Milligramm, die relative Genauigkeit dagegen 0,00001. Ist die Genauigkeit nur in geringem Maße oder gar nicht von den Dimensionen der zu messenden Größe (Winkel, Temperaturdifferenz, bisweilen auch Länge und Zeit) abhängig, so spricht man nur von der absoluten Genauigkeit („genau bis auf 0,1 Bogensekunde", „bis auf $0{,}01^0$ C", „bis auf 0,001 mm", „bis auf 0,01 Sek."). In der weitaus größten Mehrzahl der Fälle hat man jedoch, wenn man von der Genauigkeit eines Messungsresultates spricht, die relative Genauigkeit im Sinne. Sie wird durch die Ordnung der von links nach rechts gezählten Ziffer bestimmt, für welche man sich noch eben verbürgen kann. Bisweilen ist das Resultat infolge der für die Messung gewählten Einheit durch einen kleinen Dezimalbruch gegeben. In diesem Falle werden die links stehenden Nullen nicht gezählt; als erste geltende Ziffer wird die erste von Null verschiedene angesehen und von ihr aus die Zählung begonnen. Ist z. B. die gemessene Größe gleich 0,001 6843 und wir können uns für die Richtigkeit der Ziffer 8 verbürgen, so heißt dies nicht etwa, daß die Genauigkeit 0,00001 beträgt, vielmehr hat man zu sagen, die Größe sei „bis auf die dritte geltende Ziffer genau" oder bis auf 0,01 genau gemessen. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die erste geltende Ziffer 9 und die folgende 5 oder darüber beträgt. Wäre beispielsweise das Resultat der Messung 0,0096843 und die Ziffer 8 verbürgt, so würde die Genauigkeit fast 0,001 betragen.

Man darf nun nicht vergessen, daß zwischen der Genauigkeit der einzelnen Messungen, die man zur Bestimmung des Zahlenwertes einer Größe vorzunehmen hat und der Genauigkeit des letzteren noch ein großer Unterschied bestehen kann. Hat man z. B., um eine gewisse Größe y (Torsionskoeffizient, vgl. sechster Abschnitt) zu messen, den Radius x eines Drahtes, der etwa 0,4 mm beträgt, zu bestimmen, und ist y proportional x^4, so kann man selbst bei der äußersten, noch erreichbaren Genauigkeitsgrenze, falls nämlich x bis auf 0,001 mm genau gemessen ist, doch einen Fehler von 1 Proz. im Zahlenwerte der Größe y erwarten. Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man sich leicht in ähnlichen Fragen zurechtfinden. Hat man im allgemeinen $y = f(x)$, wo x unmittelbar gemessen und y nach einer bestimmten Formel berechnet wird, so zieht der bei Messung von x möglicherweise auftretende Fehler Δx den relativen Fehler Δy in der Bestimmung von y nach sich; letzteren kann man hinreichend genau durch die Näherungsgleichung

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} = \Delta\, lg f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{dy}{y} = d\, lg y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2, \mathrm{a})$$

finden.

9. Eine oftmalige Wiederholung ein und derselben Messung durch ein und dieselbe Person, ohne Änderung in der Anordnung oder Methode, wird uns stets im Zweifel darüber lassen, ob sich nicht bei diesen Wiederholungen auch gewisse Fehler, die von einer falschen Aufstellung oder Fehlerhaftigkeit der Apparate, äußeren Nebenumständen herrühren oder vom Beobachter selbst begangen sind, ebenfalls wiederholt haben. Daher ist die Änderung der Meßmethode eines der hauptsächlichsten Hilfsmittel zur Erlangung genauer Resultate. Die Änderung kann sich auf gewisse Einzelheiten bei der Messung oder auf die gesamte Methode beziehen.

Die Einzelheiten der Messung muß man unbedingt, wo es nur irgend angeht, abändern; es muß dies schon aus dem Grunde geschehen, weil oftmals irgend eine Ursache A, deren Größe man nicht bestimmen kann, das Ergebnis der Messung beeinflußt. In solchem Falle muß man die Messung zweimal vorzunehmen suchen, jedoch so, daß der Einfluß von A beide Male der entgegengesetzte wird, d. h. in einem Falle das numerische Resultat vergrößert, im zweiten vermindert. Nimmt man sodann das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten, so wird dadurch „der Einfluß von A beseitigt", freilich nicht ganz, denn jene zwei entgegengesetzte Wirkungen sind im allgemeinen nicht genau gleich. Wenn möglich, muß man auch die Messungen so vornehmen, daß man zu der Größe nach wesentlich verschiedenen Angaben gelangt, die dann übereinstimmende Endresultate geben müssen.

Zweites Kapitel.

Messung von Längen und Flächen.

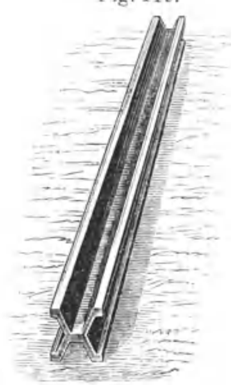
§ 1. **Maßstäbe.** Wir wollen nun kurz die Methoden behandeln, die zur Messung von Längen, Winkeln, Volumina, Massen, Kräften und Zeitabschnitten dienen; wie die weiterhin vorkommenden Größen gemessen werden, das soll an entsprechender Stelle auseinandergesetzt werden. Wir beginnen mit der Beschreibung der Messung von Längen und Flächen.

Um genaue Längenmessungen ausführen zu können, muß man die Skalen der einzelnen Instrumente mit einer sicher richtigen Skala vergleichen und zu diesem Zwecke braucht man genaue Normalmaßstäbe (Längenetalons).

Es gibt zwei Arten von Längenmaßstäben: 1. Endmaßstäbe (étalons à bout); diese besitzen geringere Genauigkeit, und wird bei ihnen die Länge bestimmt durch den Abstand zwischen den beiden Tangentialebenen, die durch die schwach abgerundeten Ecken derart gezogen werden, daß sie einander parallel und zur Achse des Maßstabes senkrecht sind (und zwar bei bestimmter Temperatur). 2. Strichmaßstäbe (étalons à trait), auf denen zwei Teilstriche senkrecht zur Achse angebracht sind; als Länge des Maßstabes gilt der Abstand zwischen diesen Teilstrichen bei bestimmter Temperatur.

Die genauesten Metermaßstäbe werden gegenwärtig in Sèvres bei Paris im Internationalen Bureau der Maße und Gewichte hergestellt, welches auf Kosten fast aller zivilisierten Nationen unterhalten wird. Diese Maßstäbe bestehen aus einer Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium und haben die Dichte 21,53; ihre Gestalt gibt Fig. 119 wieder. Der Querschnitt ähnelt einem X, und ist diese Form gewählt worden, weil eine Durchbiegung nur in geringem Maße auftritt. Die Endstriche sind auf dem Grunde der oberen Rinne in je 1 cm Abstand von jedem der beiden Enden eingeschnitten; die Fläche, auf der sie sich befinden, geht durch den Schwerpunkt des Maßstabes. Als Urprototyp des Meters gilt der Maßstab, welcher 1799 verfertigt wurde. Die internationale Kommission hat zunächst eine Kopie dieses Maßstabes hergestellt und darauf nach letzterer 31 Maßstäbe, die im Jahre 1891 durch Loos an die verschiedenen Staaten verteilt wurden, die an der Einrichtung des Internationalen Bureaus der Maße und Gewichte mitgewirkt hatten.

Fig. 119.



Dem Deutschen Reiche fiel der Stab Nr. 18 zu; seine Länge beträgt

$$1\,\mathrm{m} - 1{,}0\,\mu + [8{,}642\,t + 0{,}00100\,t^2]\,\mu,$$

wo die Temperatur t in Graden der im internationalen Dienst für Maß und Gewicht angenommenen Normalskala ausgedrückt ist und $\mu = 0{,}001$ mm bedeutet. Bei 0^0 ist die Länge also gleich $1\,\mathrm{m} - 1{,}0\,\mu$. Die Genauigkeit der Bestimmung beträgt bei mittlerer Temperatur ein bis zwei Zehntausendteile Millimeter.

Die wahre, als Längeneinheit geltende Meterlänge wird durch das Meter dargestellt, welches als internationales Prototyp in dem eben genannten Bureau der Maße und Gewichte im Pavillon de Breteuil zu Sèvres bei Paris aufbewahrt wird; für jeden einzelnen Staat gilt das in seinen Besitz übergegangene Maß als Prototyp der Längeneinheit, natürlich mit Rücksicht auf die für dasselbe geltenden, dem Maßstabe beigegebenen Korrektionen. Diese einzelnen Prototype unterscheiden sich voneinander nicht, wenigstens nicht innerhalb der Grenzen, welche für die heutige Entwickelung der Technik und der Meßmethoden gelten.

Maßstäbe, die nicht einen so hohen Grad von Unveränderlichkeit besitzen müssen, wie die Prototype, können aus verschiedenem, weniger kostbarem Material hergestellt werden. Guillaume (1903) hat vorgeschlagen, zu diesem Zwecke gewisse von ihm untersuchte Legierungen von Stahl und Nickel zu benutzen[1]). Kaye[2]) hat ein Meteretalon aus isotropem (geschmolzenem) Quarz in Form einer Röhre konstruiert (äußerer Durchmesser 19 mm, Wanddicke 1,5 mm), welche mit Wasser gefüllt werden kann. Die Vorteile dieses Maßstabes beruhen auf dem kleinen Wert des Ausdehnungskoeffizienten und der sehr geringen thermischen Nachwirkung (Bd. III).

Zum Vergleichen der verschiedenen Maßstäbe untereinander dient der sogenannte Komparator. In § 4 wird das Prinzip angedeutet werden, auf welchem seine Konstruktion beruht.

Wiederholt ist darauf hingewiesen worden, daß die aufgestellte Längeneinheit durch irgendeine gewaltige Katastrophe oder durch die allmähliche Abnutzung der Urmaßstäbe verloren gehen könnte; auch wäre es möglich, daß sie sich allmählich verändere. In diesen Fällen wäre es erwünscht, wenn man die verloren gegangene Meterlänge genau wiederfinden könnte. Daß sich dieses Ziel erreichen läßt, ist von dem amerikanischen Gelehrten Michelson gezeigt worden; dieser schlug vor, das Verhältnis der Meterlänge zu einer solchen Länge zu bestimmen, die durch Beobachtungen einer bestimmten, nur von den Grundeigenschaften des Äthers oder der Materie abhängenden Erscheinung erhalten werden kann. Diesen Bedingungen genügt die Ausbreitung der Lichtschwingungen durch Luft von bestimmter Temperatur und bestimmtem Druck oder im Vakuum. Wir haben schon wiederholt erwähnt, daß man das Licht als harmonische Schwingungsbewegung betrachten kann. Die verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums unterscheiden sich voneinander durch ihre Schwingungsdauer (Periode), und einem Lichtstrahl von gegebener Farbe (Brechbarkeit) entspricht eine ganz bestimmte Wellenlänge λ. Nach dem Vorschlage von Michelson hat man die Wellenlänge eines bestimmten Strahles unter streng festgelegten Bedingungen als ursprüngliche Längeneinheit anzusehen und ein für allemal ihr Verhältnis zur Meterlänge festzustellen. Zu diesem Zwecke wählte Michelson drei Strahlen, einen roten, einen grünen und einen blauen, welche alle von den leuchtenden Dämpfen des Kadmiums ausgesandt werden, und fand in Luft von 15^0 C und 0,76 m Quecksilberdruck

für den roten Strahl . . . . $1\,\mathrm{m} = 1553163{,}6\,\lambda_1$,
„ „ grünen „ . . . . $1\,\mathrm{m} = 1966249{,}7\,\lambda_2$,
„ „ blauen „ . . . . $1\,\mathrm{m} = 2083372{,}1\,\lambda_3$,

---

[1]) Arch. des sc. phys. et natur. 4 période, Vol. 15, p. 403, 1903.
[2]) Proc. R. Soc. **85**, 430, 1911; Instrumentenkunde **32**, 170, 1912.

wenn λ_1, λ_2 und λ_3 die Wellenlängen der betreffenden drei Strahlen sind. Hieraus folgt umgekehrt

$$\lambda_1 = 0{,}64384722\ \mu,$$
$$\lambda_2 = 0{,}50858240\ \mu,$$
$$\lambda_3 = 0{,}47999105\ \mu$$ [1]).

Mit anderen Methoden, kleine Längen mit Hilfe der Lichtwellen zu messen, werden wir uns im zweiten Bande bekannt machen.

Bei der Messung der Dimensionen fester Körper setzen wir voraus, daß diese Dimensionen von der Lage der Körper im Raume unabhängig sind. Wir werden aber sehen (Bd. II und V), daß mehrere Forscher (Fitzgerald, H. A. Lorentz) auf die Möglichkeit hingewiesen haben, daß alle Materie bei der Bewegung durch den Äther (z. B. mit der Erde) eine Dehnung in der Richtung dieser Bewegung erleidet, während die zu dieser Richtung senkrechten Dimensionen unverändert bleiben. Diese Änderung ist aber jedenfalls äußerst gering: theoretisch soll die relative Längenänderung gleich $w^2 : 2v^2$ sein, wo v die Geschwindigkeit des Lichtes und w die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers durch den Äther bedeuten.

§ 2. Nonius. Der Nonius dient dazu, die Zehntel der auf Maßstäben angebrachten Teilungen abzulesen; er ist ein kleiner Nebenmaßstab, der am Hauptmaßstabe entlang gleiten kann und gewöhnlich in zehn Teile geteilt ist, deren Gesamtlänge neun (Fig. 120) oder elf (Fig. 122) Teilungen des Hauptmaßstabes gleichkommt, so daß die Abstände seiner Teilstriche der Nebenteilung nur $^9/_{10}$ der Abstände seiner Teilstriche der Hauptteilung betragen. Im ersten Falle müssen die Noniusteilungen aufeinander nach derselben Seite folgen, wie die Teilungen am Maßstabe (Fig. 120 und 121), im zweiten Falle (Fig. 122) muß die Anordnung die umgekehrte sein. Aus Fig. 121 ist ersichtlich, wie man mit Hilfe des Nonius CD eine Länge EC am Maßstabe AB bis auf 0,1 der Teilungen des letzteren mißt. Ist der Nonius an EC

Fig. 120.

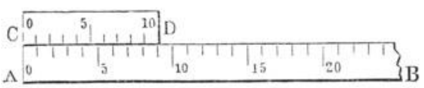


Fig. 121.

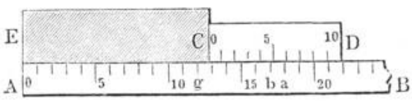
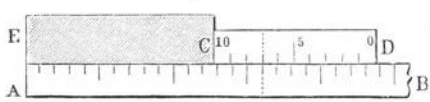


Fig. 122.



[1]) Michelson, Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, t. XI; Journ. de phys. (3) **3**, p. 5, 1894.

herangebracht, so fällt sein siebenter Teilstrich mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammen. Der sechste Teilstrich des Nonius ist vom nächsten Teilstrich (a) des Maßstabes um 0,1, der fünfte von (b) um 0,2, der vierte um 0,3 entfernt usw. Somit ist offenbar $EC = 12{,}7$ Teilungen des Maßstabes. Ebendieselbe Länge hat EC auch in Fig. 122.

Bei uns werden fast ausschließlich Nonien der ersten Form angewandt. Die ganzen Teile der Skala werden unmittelbar abgelesen, die Zahl der Zehntel ist gleich der Ordnungszahl des Noniusteilstriches, der mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammenfällt.

§ 3. **Mikrometer.** Unter diesem Namen versteht man Apparate oder Teile von Apparaten, die zum Messen sehr kleinar linearer Dimensionen dienen.

Zum Messen von mikroskopischen Körpern wendet man bisweilen folgende Methode an. Man bringt in die Fokalebene des Objektivs eines Mikroskops ein dünnes Glasplättchen, auf welchem parallele Teil-

Fig. 123.

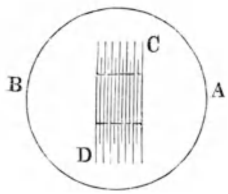


Fig. 124.

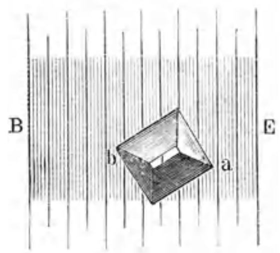
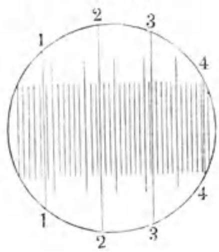


Fig. 125.



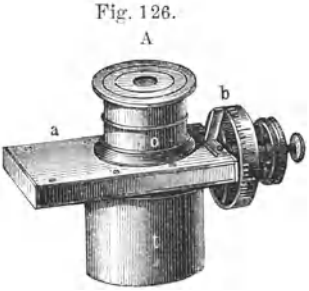
striche von ziemlich beträchtlicher Länge äquidistant eingeritzt sind (vgl. Fig. 123 und 124); es mögen n solcher Teilstriche auf 1 mm gehen. Durch das Okular sieht man gleichzeitig diese Teilstriche sowie das Bild des zu messenden Gegenstandes, welches vom Objektiv entworfen wird (Fig. 124). Auf diese Weise werden die Dimensionen jener Bilder unmittelbar gefunden. Die wahren Dimensionen des Gegenstandes sind k mal kleiner, wenn k die Vergrößerung bedeutet, die vom Objektiv bewirkt wird. Um k zu finden, betrachtet man unter dem Mikroskop eine andere feine Skala mit bekannter Teilung, von der einige Teilstriche im Gesichtsfelde erscheinen; es mögen etwa m von diesen Teilstrichen auf 1 mm gehen. Fig. 125 stellt das Gesichtsfeld mit beiden gleichzeitig sichtbaren Skalen dar, wobei 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3 die Teilstriche der Hilfsskala sind. Man bestimmt nun, wieviele Teilstriche der einen Skala auf eine bestimmte Zahl der anderen kommen und hieraus ferner, wieviele Teilstriche der Okularskala (etwa p) gleich einer Teilung des Bildes der Hilfsskala sind, deren scheinbare Größe gleich $\frac{k}{m}$ Millimeter ist. Aus der Beziehung $\frac{k}{m} = \frac{p}{n}$ wird k gefunden.

Bei einer Reihe von Mikrometern beruht die Messung darauf, daß man die Umdrehungszahl einer Schraube mit sehr feinem und regelmäßigem Schnitt bestimmt. Solche Schrauben mit der entsprechenden Schraubenmutter nennt man Mikrometerschrauben. Teile von Umdrehungen werden an dem Schraubenkopf abgelesen, welcher mit Teilungen versehen ist, neben denen sich ein unbeweglicher Zeiger oder ein Nonius befindet. Die gesuchten Dimensionen der zu messenden Körper werden hier durch die Größe der Drehung der Mikrometerschraube oder durch die Verrückung der Schraube selbst oder gewisser Teile des Apparates gemessen.

Ein sehr empfindliches elektrisches Mikrometer ist von Ph. Shaw[1]) angegeben worden. Bei der Berührung der Mikrometerschraube mit dem auszumessenden Körper wird ein sehr schwacher elektrischer Strom (0,0002 Ampere) geschlossen, wobei in einem Telephon ein Geräusch entsteht. Guillet[2]) hat eine interessante elektrische Methode angegeben, sehr kleine Längen zu messen, z. B. Deformationen fester Körper bei ihrer Dehnung oder Torsion.

§ 4. Okularmikrometer. Dieser wichtige Meßapparat wird am Okular von Mikroskopen und Fernrohren angebracht. Er befindet sich in einem flachen Gehäuse a (Fig. 126), welches die Röhre A des Okulars umgibt. Von außen sieht man nur den Kopf b der Mikrometerschraube, die dazu dient, einen oder mehrere Fäden des Okulars parallel mit sich selbst zu verschieben. Das Innere ist in Fig. 127 abgebildet. K ist das flache Gehäuse, in welchem sich der sogenannte Schlitten mit der Platte p, welche die Fäden trägt, bewegt. An dieser Platte sind drei Ansätze K_1, K_2 und K_3 befestigt. K_1 ist mit einem Schraubeneinschnitt, durch welchen die Mikrometerschraube hindurchgeht, versehen, K_2 dient nur zur Führung; die glatte Fortsetzung der Schraubenspindel geht nämlich frei durch K_2 hindurch. Dasselbe gilt für den Ansatz K_3 und den Stab F, dessen linkes Ende an der inneren Wand des Rahmens K befestigt ist. Eine starke Feder, welche den Stab F umgibt, wirkt dem Druck der Mikrometerschraube entgegen; dieselbe verhindert den toten Gang der Schraube und bewirkt bei Linksdrehen der Schraube das Zurückgehen (nach rechts) des Schlittens.

Fig. 126.



Um die Länge irgend einer Linie zu messen, ist es erforderlich, daß sie sich ganz im Gesichtsfelde befinde und zwar senkrecht zu einem

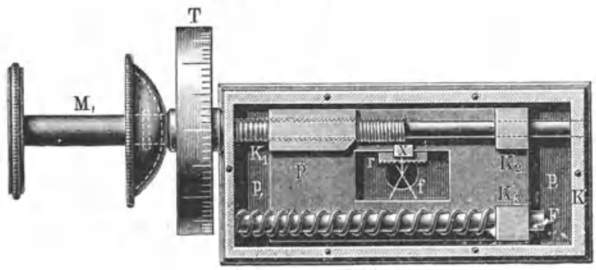
[1]) Phil. Mag. (5) **50**, 537, 1900; Phys. Rev. **16**, 140, 1903; Proc. R. Soc. **76**, 350, 1905; **77**, 340, 1906.

[2]) C. R. **146**, 465, 1908.

der Fäden. Man hat M so lange zu drehen, bis der Faden zunächst mit einem, dann mit dem anderen Endpunkte des Bildes der zu messenden Länge zusammenfällt.

Die Differenz bei den Ablesungen ergibt die Zahl der Schraubenumdrehungen, welche der Länge des Bildes entspricht. Um nun die wahre Länge der Linie zu finden, hat man den sogenannten Wert einer Schraubenumdrehung zu bestimmen, der unter anderem auch von der Entfernung des Gegenstandes vom Fernrohr abhängt. Man hat also die wahre Länge eines Gegenstandes zu ermitteln, für welchen die Länge seines Bildes im Fernrohr gleich

Fig. 127.



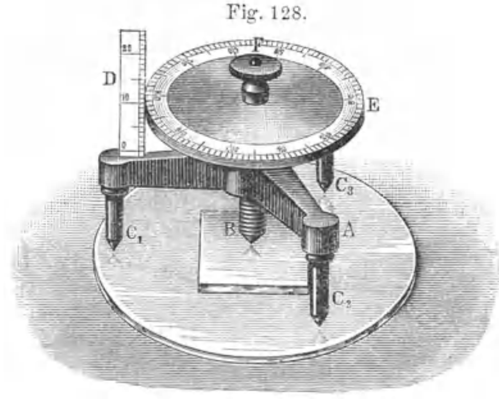
der Verschiebung des Fadens bei einer Schraubenumdrehung ist. Um diese Größe zu finden, hat man einen möglichst genauen Maßstab an die Stelle des zu messenden Gegenstandes oder in parallele Lage zu ihm zu bringen, so daß die Bilder von wenigstens zwei Teilstrichen im Gesichtsfelde erscheinen, und zwar in paralleler Lage zum Faden, den man zuerst mit dem einen und dann mit dem anderen Teilstrich zur Deckung bringt. Kennt man den wahren Abstand der Teilstriche des Maßstabes und bestimmt die entsprechende Zahl der Schraubenumdrehungen, die einer Verschiebung des Fadens um einen Teilstrich entsprechen, so läßt sich leicht die Länge am Maßstabe, welche einer Umdrehung der Mikrometerschraube entspricht, finden.

Im § 1 dieses Kapitels wurde erwähnt, daß zum Vergleichen von Maßstäben sogenannte Komparatore dienen. Ihre Konstruktion versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst. Der Brunnersche Komparator, welcher im internationalen Bureau der Maße und Gewichte gebraucht wird, hat folgende Einrichtung. Zwei mit Okularmikrometern versehene Mikroskope sind vertikal in einem Abstande von beispielsweise einem Meter aufgestellt. Jedes derselben ist auf einem gesonderten, möglichst festen Pfeiler montiert. Unter die Mikroskope wird ein länglicher Kasten gebracht, in welchem die zu vergleichenden Maßstäbe nebeneinander liegen. Dieser Kasten ist senkrecht zu seiner Länge verschiebbar, so daß er sich auf die durch die Achsen beider Mikroskope gehende Vertikalebene zubewegt. Nun werden, indem man den Kasten entsprechend verschiebt, die einzelnen Maßstäbe unter die Mikroskope gebracht und jedesmal die Endstriche derselben zur Koinzidenz mit den Meßfäden der Mikroskope gebracht. Die algebraische Differenz der mikrometrischen Verschiebungen, die nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet werden, bestimmt die gesuchte Längendifferenz je zweier Maßstäbe.

Lafay [1]) hat einen sehr genauen Komparator für Endmaßstäbe (S. 279) konstruiert. Der Komparator des Standards Departement of the board of trade in London dient hauptsächlich zur Bestimmung der Differenz zwischen einer Längennormale (Imperial Standard Yard) und Kopien davon. Seine Einrichtung beruht auf der Interferenz von Lichtstrahlen (Bd. II), und zwar ist das Okularmikrometer des einen Mikroskops durch einen Teil (beweglicher Spiegel) eines Interferometers ersetzt. Es läßt sich eine sehr große Schärfe der Einstellung erreichen, indem man die Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtet. Die Breite des Striches auf dem Imperial Standard Yard entspricht z. B. 45 Interferenzstreifen. Es muß überhaupt bemerkt werden, daß die Striche auf den alten Längenmaßen viel zu breit und unregelmäßig sind für die neuen Komparatoren. Der Australier Grayton hat eine Methode erfunden, so dünne Striche zu ziehen, daß ihrer 120 000 auf den Zoll gehen und damit ist diese wichtige Frage für die Konstruktion der Längennormalen gelöst. Der Komparator des Standard Departements ist von Tutton beschrieben worden [2]).

§ 5. **Sphärometer.** Dieser Apparat dient dazu, die Dicke von Platten zu messen, Unebenheiten auf einer ebenen Fläche zu untersuchen, sowie endlich den Krümmungsradius sphärischer Flächen, z. B. optischer Linsen, zu bestimmen. Das einfache Sphärometer (Fig. 128) besteht aus einem dreifüßigen Tischchen, in dessen Mitte sich ein Schraubengewinde zur Aufnahme der Mikrometerschraube F befindet, deren Kopf eine kreisrunde Scheibe E bildet. Letztere trägt am Rande eine Teilung, und zwar gewöhnlich 100 Teilstriche. Bei jeder vollen Umdrehung der Schraube hebt oder

Fig. 128.

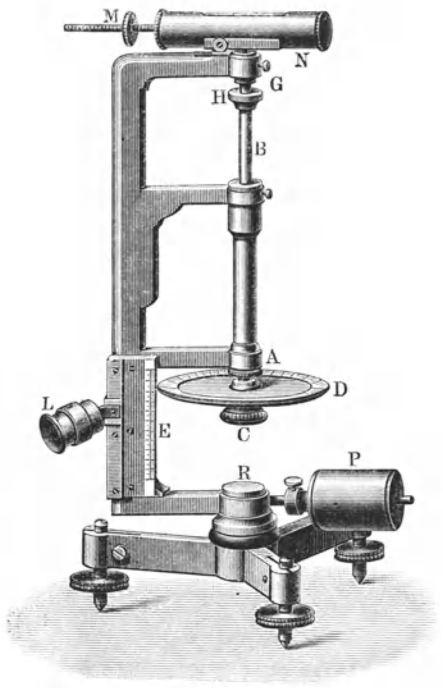


[1]) C. R. **133**, 867, 1901.

[2]) Phil. Trans. **210**, 1, 1909; Nature **82**, 338, 1910.

senkt sich E um einen Teilstrich der Skala D. Schraubt man den Kopf abwärts, so kommt schließlich das spitze Schraubenende in Berührung mit der Fläche A, auf welche der Apparat gestellt ist. Diesen Augenblick muß man nach dem Gefühl bestimmen. Liegt die Schraubenspitze noch oberhalb der Fläche, auf welcher die drei Füße stehen, so läßt sich der Apparat leicht zum Gleiten bringen, ist dagegen die Schraube zu weit hinabgeschraubt, so läßt sich der Apparat entweder um die Schraube drehen oder er schaukelt hin und her, da jetzt einer der Füße die Fläche nicht berührt. Stellt man das Sphärometer auf das Resonanzkästchen einer Stimmgabel, so lassen sich diese geringen Schwankungen des Apparates um die Schraube leicht wahrnehmen. Um den Augenblick, wo die Schraube die Unterlage berührt, festzustellen, bedarf es einiger Übung. Hat man nun die Dicke irgendeines Gegenstandes B zu bestimmen, so bringt man die Schraube zunächst in Berührung mit der Fläche A, auf welche der Apparat gesetzt ist und liest die Skala D und die Teilung des Schraubenkopfes E an dem Punkte ab, welcher der vertikalen Kante der Skala gegenübersteht. Hierauf hebt man durch Drehen die Schraube, bringt den zu messenden Gegenstand B darunter und stellt die Schraube wieder zur Berührung ein. Dann liest man wiederum ab und findet aus der Differenz beider Ablesungen die gesuchte Dicke. Je genauer man den Augenblick der Berührung zwischen dem Schraubenende und der Unterfläche bestimmt, um so genauer fällt die Messung aus.

Fig. 129.



In Fig. 129 ist das überaus empfindliche Wildsche Sphärometer abgebildet. Der Schraubenkopf D befindet sich gegenüber der Skala E; abgelesen wird mit Hilfe des Mikroskops L. Am oberen Ende der Schraube ist eine kleine Fläche H befestigt, auf welche der zu messende Körper gelegt wird. Durch einen über H befindlichen Ring führt ein kleiner Stift leicht hindurch; sein unteres Ende ist keilförmig, das obere abgerundet und stößt gegen eine empfindliche Libelle, die um eine etwas seitlich gelegene Achse drehbar ist. Abgelesen wird zweimal, zuerst ohne, dann mit dem zu messenden Körper auf H, und zwar jedesmal, wenn das Bläschen in der Mitte der Libelle einspielt. Ein ebenfalls sehr empfindliches Sphärometer stammt von Common[1]).

§ 6. **Kathetometer.** Dieser wichtige Apparat dient zur Messung des vertikalen Abstandes zweier Punkte. Man unterscheidet Kathetometer mit einem und mit zwei Fernrohren. In Fig. 130 ist ein Kathetometer der ersten Art dargestellt; Fig. 131 zeigt einen Durchschnitt durch den unteren Teil desselben, Fig. 132 einen ebensolchen durch das obere Ende. Der Apparat hat folgende Einrichtung. Auf dem Dreifuß D ist eine eiserne zylindrische Säule S befestigt; die Stellschrauben m dienen dazu, diese Säule vertikal aufzustellen. Nahe an ihrem unteren Ende ist die Säule mit einem kegelförmigen Zapfen C versehen, an ihrem oberen (Fig. 132) mit einer Vertiefung, welche die Spitze der gleich zu erwähnenden Schraube E aufnimmt. Diese ist von einem messingenen Hohlzylinder H umgeben (in Fig. 130 nicht sichtbar), welcher mit dem innen konisch abgedrehten Ringe R sich frei auf die Oberfläche des Zapfens C stützt; oben ist der Zylinder durch die Platte P geschlossen, durch welche die erwähnte Schraube E hindurchgeht. Hierdurch wird erreicht, daß der Zylinder H sich leicht um die Achse der Säule S drehen läßt. An dem Zylinder H ist der Maßstab M befestigt, welcher auf einem eingelegten Silberstreifen die Millimeterteilung trägt.

Am Maßstabe entlang läßt sich der Schlitten FF' bewegen; derselbe besteht aus zwei Teilen, welche durch die Schraube J verbunden sind. Der Teil F' kann durch die Klemmschraube K an dem Maßstabe befestigt werden, worauf eine feinere Einstellung mit Hilfe der Schraube J erfolgen kann. Eine über die Rolle T laufende Darmsaite, die das Gegengewicht Q trägt, hält den Schlitten und ermöglicht ihn bequem hinauf und herab zu bewegen. An dem oberen Teile F des Schlittens befindet sich ein Vorsprung V, welcher die horizontale stählerne Achse a des Gestelles $G'GG'$ stützt. An beiden oberen Enden trägt das Gestell, das vermittelst der Schraube o um diese Achse gedreht werden kann, in ringförmigen Lagern das Fernrohr B. L ist eine Libelle, deren Achsenrichtung durch Heben oder Senken des einen Endes, unabhängig von dem Fernrohr und dem Gestell $G'GG'$, geändert werden kann.

Bevor man eine Messung mit dem Kathetometer ausführt, muß man es zunächst richtig aufstellen. Wir wollen hier bloß die Bedingungen aufzählen, denen die Aufstellung zu genügen hat.

1. Die optische Achse des Fernrohres, welche durch den Schnittpunkt der Kreuzfäden gehen muß, soll mit der geometrischen Achse

[1]) Nature **48**, 396, 1893.

zusammenfallen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man das Fernrohr um seine Achse drehen kann, ohne daß das Bild irgendeines Punktes am beobachteten Objekt den Schnittpunkt der Fäden verläßt.

Fig. 130.

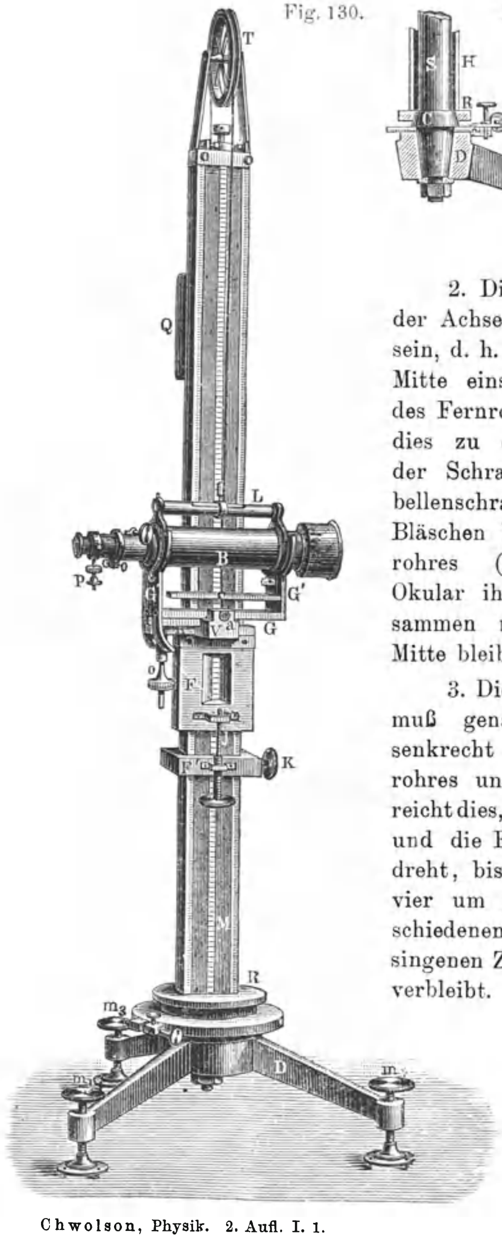


Fig. 131.

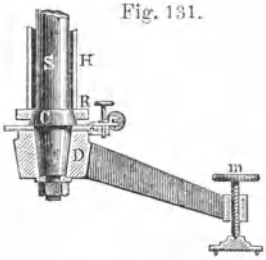


Fig. 132.

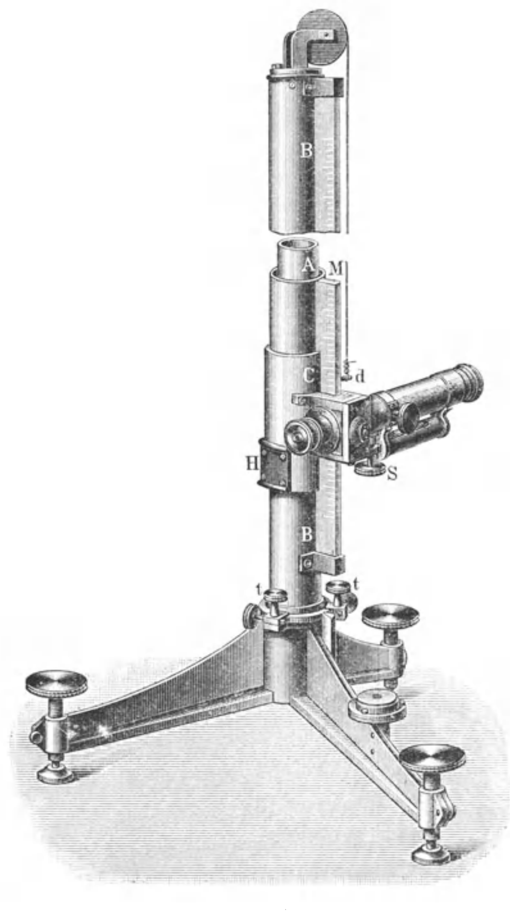
2. Die Achse der Libelle muß der Achse des Fernrohres parallel sein, d. h. das Bläschen muß in der Mitte einspielen, wenn die Achse des Fernrohres horizontal ist. Um dies zu erreichen, hat man an der Schraube *O* und an der Libellenschraube zu drehen, bis das Bläschen beim Umlegen des Fernrohres (so daß Objektiv und Okular ihre Lage vertauschen) zusammen mit der Libelle in der Mitte bleibt.

3. Die Achse des Kathetometers muß genau vertikal sein, also senkrecht zur Achse des Fernrohres und der Libelle. Man erreicht dies, indem man die Schraube *O* und die Fußschrauben *m* so lange dreht, bis das Libellenbläschen bei vier um je 90° voneinander verschiedenen Stellungen des messingenen Zylinders in der Mittellage verbleibt.

Alle ausführlicheren Hinweise auf die vorzunehmenden Handgriffe sollen hier, als nicht in den Rahmen dieses Buches gehörig, übergangen werden.

Um den Vertikalabstand zweier Punkte zu bestimmen, d. h. zu bestimmen, um wieviel der eine von zwei Punkten, welche übrigens nicht auf einer vertikalen Linie zu liegen brauchen, höher liegt als der andere, stellt man das Fernrohr in solcher Höhe fest, daß zunächst das Bild eines der Punkte mit dem Durchschnittspunkt der Fäden zusammenfällt. Hierauf liest man an der Skala unter Benutzung des bei *F* angebrachten Nonius ab. Dasselbe wiederholt man dann, nachdem man das Bild des zweiten Punktes zum Zusammenfallen mit dem Schnittpunkt der Fäden gebracht hat. Zu letzterem Zweck hat man das Fernrohr zu heben oder zu senken und außerdem, falls sich die beiden Punkte nicht auf derselben vertikalen Geraden befinden, den Zylinder um seine vertikale Achse zu drehen. Die Differenz der beiden so erhaltenen Ablesungen ergibt dann den gesuchten Vertikalabstand.

Fig. 133.



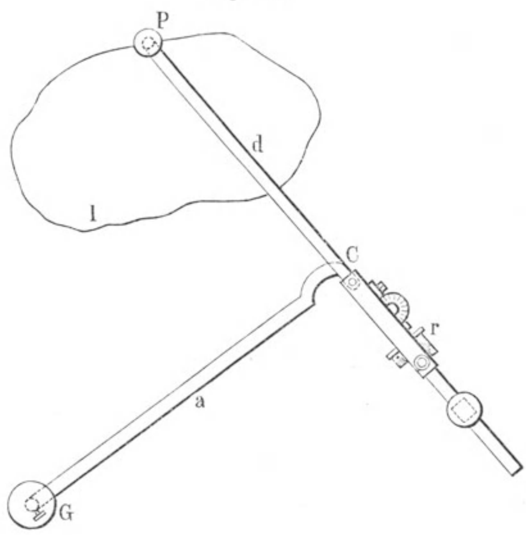
In Fig. 133 ist ein in seiner Konstruktion von dem oben beschriebenen bedeutend abweichendes Kathetometer abgebildet. Zur größeren Deutlichkeit ist der obere Teil getrennt gezeichnet. *A* ist die innere Säule, *B* der Messingzylinder. In eine flache Längsnute dieses Zylinders ist der gläserne Maßstab *M* eingelassen. Der Schlitten *C* ist an der Seite aufgeschnitten, um den Maßstab *M* hindurchzulassen; an *C* ist ein viereckiger Rahmen befestigt, welcher das Fernrohr trägt. Rahmen und Fernrohr sind gleichfalls mit Einschnitten versehen, durch welche der Maßstab *M* hindurchgeht. Die Seite des Maßstabes, welche die Teilung trägt, befindet sich im Gesichtsfelde des Fernrohrokulars, so daß der Beobachter gleichzeitig den Faden, auf welchen der zu beobachtende Punkt eingestellt wird, und die Skala sieht. Die Vorteile dieser Konstruktion liegen auf der Hand.

§ 7. Flächenmessung. Planimeter. Bisweilen hat man den Flächenraum einer gezeichneten, von mehr oder weniger unregelmäßigen Kurven begrenzten Figur zu messen. Angenähert kann man ihn finden, wenn man die Figur ausschneidet, abwägt und ihr Gewicht mit dem Gewicht eines aus demselben Papier geschnittenen Quadrates oder Kreises vergleicht.

Genauer erhält man die gesuchte Größe mit Hilfe sogenannter Planimeter. Von den zahlreichen hierher gehörigen Apparaten sollen bloß die Planimeter von Amsler und Prytz ohne Berücksichtigung der Theorie betrachtet werden:

Das Amslersche Planimeter[1]) ist in Fig. 134 schematisch dargestellt. Zwei Stäbchen GC und PCr sind in C durch ein Scharnier verbunden; in G befindet sich eine Spitze, die in einem Punkte der Ebene befestigt wird, in welcher die Zeichnung liegt. Bei r ist eine kleine Rolle angebracht, die sich um eine zu CP parallele Achse drehen und auf der Zeichnungsebene dahinrollen kann. In P befindet sich ebenfalls eine Spitze, welche man mit der einen Hand um den Umriß der zu messenden Fläche herumführt, während man mit der anderen den Stift G gegen das Papier drückt. Die Zählvorrichtung und die Teilungen der Rolle r gestatten die Zahl n der Rollenumdrehungen zu bestimmen. Während P um den Umfang herumgeführt wird, befindet sich die Rolle bald in rollender, bald in gleitender Bewegung auf der Zeichnungsebene. Der gesuchte Flächeninhalt ist schließlich gleich

Fig. 134.



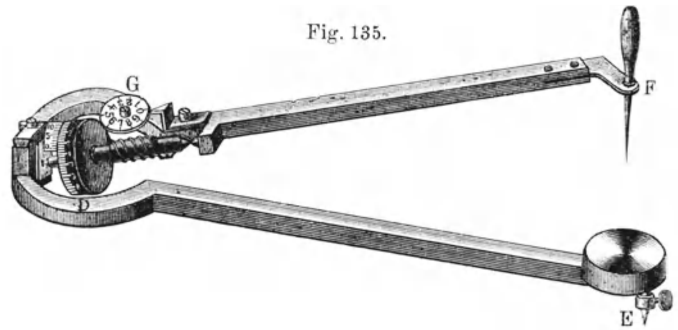
---

1) Amsler-Laffon, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, Schaffhausen 1856; siehe auch Zeitschr. f. Instr. **4**, 11, 1884.

$S = kn$, wo k einen Faktor bedeutet, der für jeden Apparat ein für allemal bestimmt werden muß und von der gewählten Flächeneinheit abhängt.

In Fig. 135 ist ein Amslersches Planimeter von etwas abweichender Form dargestellt; hier ist E der feste, F der bewegliche Stift, D die Rolle nebst dem Nonius, G die Zählvorrichtung.

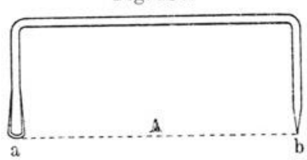
Fig. 135.



Das Planimeter von Prytz wurde 1893 erfunden; es hat eine erstaunlich einfache Konstruktion. Seine Beschreibung soll hier wörtlich nach A. L. Gerschun[1]) gegeben werden:

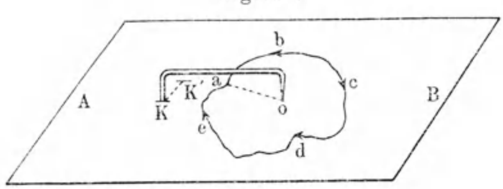
„Es besteht (Fig. 136) aus einem an beiden Enden rechtwinklig umgebogenen Stäbchen aus Stahl; das eine seiner Enden ist mit einer etwas abgerundeten, stumpfen Spitze versehen, während das andere in eine flache, ebenfalls abgerundete Schneide ausläuft. Die Entfernung der Spitze von dem tiefsten Punkte der Schneide muß ein für allemal bestimmt werden und bildet »die Konstante« des Apparates; sie sei gleich A cm.

Fig. 136.



Um den Flächeninhalt einer von einer geschlossenen Kurve $abcde$ (Fig. 137) umgrenzten Figur zu bestimmen, setzt man die Spitze des Planimeters angenähert auf deren Schwerpunkt O und verbindet O mit irgendeinem Kurvenpunkt a durch eine Gerade.

Fig. 137.



Hierauf drückt man die Schneide an irgendeiner Stelle (etwa in K) gegen die Papierfläche und bezeichnet diese Stelle hierdurch. Darauf führt man die Spitze mit einer Hand von O nach a und darauf längs des Umrisses in der Richtung $abcdea$ und

[1]) Journal „Elektritschestwo" Nr. 17, 1898.

schließlich von a zurück nach dem Ausgangspunkte O längs der Geraden aO. Unterdes beschreibt die Schneide irgendeine im allgemeinen recht verwickelte Kurve und gelangt dabei in die Endlage K', welche man wiederum durch leichtes Andrücken auf dem Papier bezeichnet. Die Entfernung KK', multipliziert mit der Konstanten des Apparates, gibt dann den von der Kurve $abcde$ umgrenzten Flächeninhalt. Ist uns, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, der Schwerpunkt der Fläche unbekannt, so setzt man die Spitze zunächst auf einen Punkt, der nach unserer Meinung dem Schwerpunkt nahe liegt und führt die Messung in der beschriebenen Weise aus. Darauf legt man das Planimeter um 180^0 um, führt die Spitze nach c, umläuft die Kurve in entgegengesetzter Richtung, kehrt nach O zurück und findet somit eine zweite Größe für den Flächeninhalt. Das arithmetische Mittel beider Bestimmungen gibt uns die wahre Größe des Flächeninhalts. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man derartige Messungen wiederholt vornehmen und aus ihnen das arithmetische Mittel wählen; noch einfacher ist es, zunächst von O nach a, dann etwa fünfmal um den Umriß herum und wieder nach O zurückzugehen; die Entfernung KK' der beiden Endlagen der Schneide, multipliziert mit den Konstanten des Apparates, gibt dann den fünffachen Flächeninhalt von $abcde$. Ist die zu messende Fläche groß, so zerlegt man sie durch Gerade in mehrere Teile und mißt diese einzeln aus; Prytz selbst schlägt vor, letzteres jedesmal vorzunehmen, wenn eine Dimension der Fläche größer als die Hälfte der Konstanten ist."

Die recht verwickelte Theorie des Prytzschen Planimeters haben F. W. Hill[1]), M. Mafiotti[2]) und Koturnizki und Kzilow[3]) entwickelt.

Zum Schluß sei hier noch auf das interessante Werk von Abdank-Abakanowicz „Les Intégraphes", Paris 1886, hingewiesen, in welchem man eine ausführliche Beschreibung von Apparaten findet, welche mit Hilfe einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Integralkurve, deren Gleichung $\eta = \int f(x)dx + l$ ist, zu zeichnen erlauben. Hierbei braucht die Gleichung $y = f(x)$ selbst nicht bekannt zu sein, da die gegebene Kurve von beliebiger Form sein kann. Eine stark veränderte und erweiterte Ausgabe dieses Buches erschien 1903 unter der Redaktion von Lossier (Zürich, Verlag von Conradi). Hierher gehört auch das Werk von Bitterei, Die Integraphen, Leipzig 1889.

Literatur.

Da wir in diesem Kapitel bei den meisten der von uns erwähnten Forscher schon angegeben haben, wo ihre in Betracht kommenden Arbeiten erschienen

[1]) Phil. Mag. **38**, 265, 1894.

[2]) Rivista di Topogr. **8**, 97; Zeitschr. f. Instr. **16**, 341, 1896.

[3]) Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. (5) **19**, 221, 1903.

sind, genügt es, wenn wir hier noch auf einige wichtige Werke aufmerksam machen.

Mechain et Deslambre, Base du système métrique décimal, Paris 1806, 1807, 1810, 3 Bände.
Bigourdan, Le système métrique des poids et mesures, Paris 1901, 2 Bde.
Guillaume, La convention du mètre et le bureau international des poids et mesures, Paris 1902; Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, S. 78.
Benoît, Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, S. 30.
Macé de Lépinay, Franges d'interférence (Scientia phys.-math. No. 14), Paris 1902; Rapp. prés. au congrès internat. de phys., Paris 1900, I, p. 115.

Drittes Kapitel.

Messung von Winkeln.

§ 1. Vernier (Kreisnonius). Zur Winkelmessung dienen im allgemeinen Apparate, die mit Teilstrichen versehene Kreise enthalten. Sie sind so gebaut, daß der gesuchte Winkel durch einen von zwei Radien dieses Kreises eingeschlossenen Winkel gemessen und durch die Differenz zweier an der Kreisteilung vorgenommenen Ablesungen gefunden wird. Zur Ablesung dient ein Index, der sich neben den Teilstrichen der Skala auf einer besonderen Scheibe (Alhidade) befindet. Es können folgende zwei Fälle vorkommen: 1. die Kreisteilung (Limbus) steht fest und die den Index tragende Scheibe dreht sich um den Mittelpunkt des ersteren; ihre Verschiebung längs der Peripherie des Kreises bestimmt den zu messenden Winkel; 2. die Scheibe mit dem Index steht fest und die Kreisteilung ist drehbar. Bisweilen tritt an Stelle jener Scheibe ein Ring, der den mit Teilungen versehenen Kreis umgibt oder aber, wenn die Teilung sich auf der ebenen Oberfläche des Kreises befindet, innerhalb desselben liegt. Im letzteren Falle sind anstatt eines Index deren zwei im Abstande von 180^0 oder gar vier im Abstande von 90^0 angebracht. Auf diese Weise werden die Beobachtungsfehler, welche durch falsche Zentrierung der Kreise entstehen könnten, vermindert.

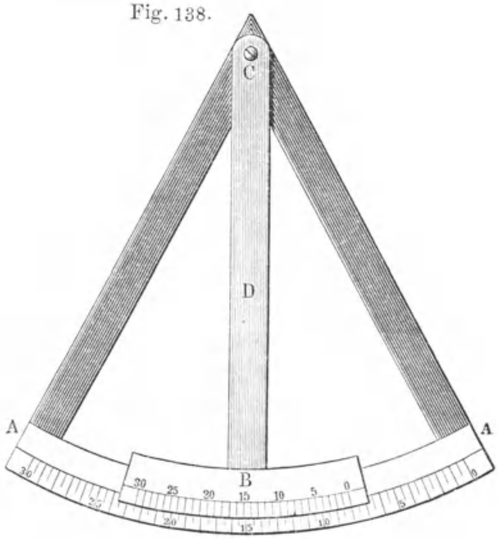
Um möglichst genaue Messungen vornehmen zu können und Bruchteile der Skalenteile abzulesen, bedient man sich gewisser Hilfsmaßstäbe, die Kreisnonien oder Verniers heißen. Zum Unterschiede vom gewöhnlichen Nonius sind hier zunächst die Teilstriche nicht auf einem geradlinigen Maßstabe aufgetragen, sondern auf einem Kreisbogen, und ferner ist die Zahl der Teilstriche im allgemeinen nicht gleich 10.

Die Kreisteilungen sind sehr verschiedenartig, indem z. B. die ganzen Grade in 2, 3, 4, 6 oder 12 gleiche Teile geteilt werden. Daher können auch die Ablesungswerte eines Teilstriches am Vernier,

d. h. die Differenz zwischen dem zu einem Teilstrich der Hauptskala und einem Teilstrich des Verniers gehörigen Winkel, sehr verschieden sein. Um sich im gegebenen Falle zurechtzufinden, hat man zunächst den Wert eines Skalenteiles zu ermitteln (der z. B. gleich p^0 sein möge) und darauf nachzusehen, wieviele Skalenteile $(n - 1)$ auf n Teile des Verniers kommen. Der Ablesungswert des Verniers ist dann gleich $\alpha = \left(\frac{p}{n}\right)^0$. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

1. Die Skala ist in halbe Grade (30′) geteilt, und 30 Teile des Verniers sind gleich 29 Teilen der Skala. Bei der Skalenablesung, d. h. wenn man die Stelle bestimmt, an welcher sich der Nullstrich des Verniers befindet, erhält man unmittelbar halbe Grade. Jeder Teilstrich des Verniers vom nullten bis zu dem, welcher mit einem Skalenstrich zusammenfällt, entspricht der Größe $\alpha = 1'$. Ein solcher Vernier ist in Fig. 138 dargestellt.

Fig. 138.



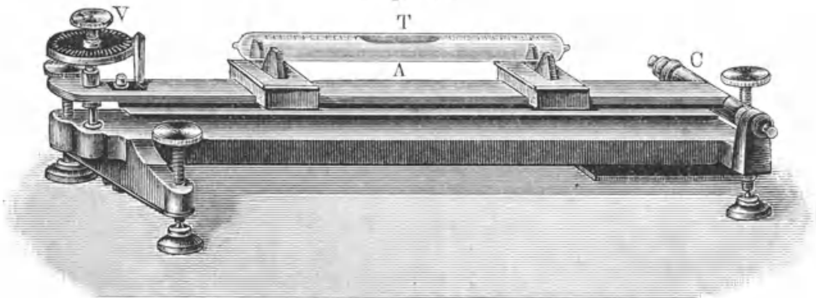
2. Die Grade sind in Drittel geteilt (also nach 20′), und 20 Teile des Verniers sind gleich 19 Skalenteilen; auch hier ist $\alpha = 1'$.

3. Die Grade sind in Viertel geteilt (15′), und 45 Vernierteile sind gleich 44 Skalenteilen; $\alpha = 20''$. In diesem Falle ist jeder dritte Teilstrich des Verniers etwas länger und entspricht einer Minute.

4. Die Grade sind in Zwölftel geteilt, also von 5 zu 5 Minuten; 60 Vernierteile kommen auf 59 Skalenteile; $\alpha = 5''$. Jeder vierte Vernierteilstrich ist von größerer Länge.

§ 2. Libelle. Eine richtige Libelle, deren Oberfläche im vertikalen Längsdurchschnitt einen Kreisbogen von großem Radius ergibt, kann zur Winkelmessung dienen, falls der Winkelwert ihrer Skalenteile bekannt ist; es ist das der Winkel, um welchen man die Libelle gegen den Horizont zu neigen hat, damit das Bläschen sich um einen Skalenteil verschiebt. Zur Bestimmung dieser Größe dient der in Fig. 139 abgebildete Apparat. Er besteht aus einer auf drei Fußschrauben montierten T-förmigen Gußeisenplatte und dem Lineal A, auf welches die Libelle T gesetzt wird und welches sich einerseits um die horizontale Achse C drehen kann, während durch das andere eine Mikrometerschraube V führt. Mit Hilfe dieser Schraube wird A und die darauf gesetzte Libelle gegen den Horizont geneigt; die ganzen Schraubendrehungen werden an der nebenan befindlichen Skala, die Bruchteile an der Teilung abgelesen, mit welcher der Schraubenkopf versehen ist. Kennt man die Höhe a des Schraubenganges und die Entfernung l vom

Fig. 139.



Stützpunkte der Schraube bis zur Achse C, so erhält man den Winkel φ, um welchen sich die Libellenachse neigt, wenn man die Schraube n Umdrehungen machen läßt, aus der Formel $sin\ \varphi = \frac{n\,a}{l}$, oder in Sekunden ausgedrückt

$$\varphi'' = \frac{n\,a}{l\ sin\ 1''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Auf diese Weise kann man den Winkelwert eines Skalenteiles bestimmen und die Libelle selbst prüfen, nämlich untersuchen, ob alle links und rechts von der Mitte gelegenen Teilstriche gleichen Neigungswinkeln entsprechen. Ist eine derartige Prüfung vorgenommen worden, so kann die Libelle zum Winkelmessen dienen, denn man kann nun einen Schluß ziehen aus der Verschiebung des Bläschens auf die Neigung der Libelle und mithin auf die Neigung der Ebene, auf welche die Libelle gesetzt ist.

Ist einmal der Wert eines Skalenteiles bekannt, so kann man die Libelle auch zur Messung kleiner linearer Größen benutzen, z. B. zur Messung von Krümmungen und Unebenheiten einer ebenen Fläche. Zeigt z. B. die Verschiebung des Bläschens eine Neigung von φ'' an und ist die Entfernung zweier Punkte an der Basis der Libelle gleich l, so gibt uns die Formel $x = l\ \varphi\ sin\ 1''$ an, um wieviel einer jener Punkte höher als der andere liegt.

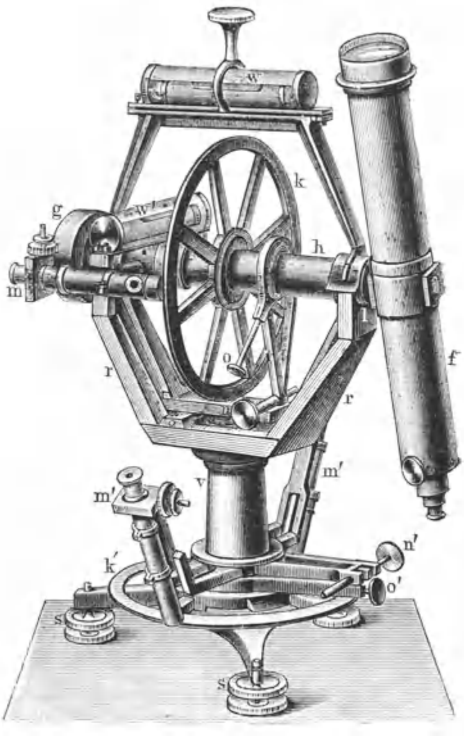
Bruns [1]), Galle [2]) und andere haben genauere Apparate angegeben.

[1]) Zeitschr. f. Instr. **6**, 198, 1886.

[2]) Ebend. **18**, 72, 1898.

§ 3. Theodolit. Der Theodolit (vgl. Fig. 140) dient zum Messen von Winkeln, die in einer horizontalen oder einer vertikalen Ebene gelegen sind, also zur Messung der Differenz zweier Azimute oder zweier Höhen. Er besteht aus folgenden Teilen. Ein Fernrohr *f* dreht sich um eine horizontale Achse *h*, welche durch den Mittelpunkt des Vertikalkreises *k* (Höhenkreis) geht. Dieses ganze System dreht sich um die vertikale Achse des Apparates, die ihrerseits durch den Mittelpunkt des Horizontalkreises *k'* (Azimutalkreis) geht. Am Kreise *k* liest man die Höhendifferenzen, am Kreise *k'* die Differenzen der Azimute ab und bedient sich hierzu der Mikroskope *m* und *m'*. Das Gegengewicht *g* verlegt den Schwerpunkt des Apparates in seine Achse, die mit Hilfe der drei Fußschrauben *s* und der Libellen *w* und *w'* vertikal gestellt wird. Einige Theodolite haben im unteren Teile noch ein besonderes Kontrollfernrohr, mit dessen Hilfe man sich überzeugen kann, daß der Apparat während der Messung seine Lage nicht geändert hat.

Fig. 140.



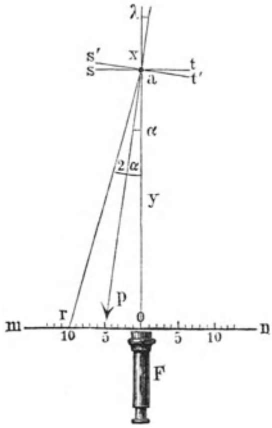
Zu den Winkelmeßapparaten gehört auch der Sextant, dessen Beschreibung indes an dieser Stelle unterbleiben soll.

§ 4. Methode der Spiegelablenkung. (Winkelmessung mit Fernrohr, Spiegel und Skala). Diese von Poggendorff 1826 vorgeschlagene Methode dient zur Messung kleiner Winkel, um welche sich (bei vertikaler, selten horizontaler Achse) die beweglichen Teile bei einigen Apparaten drehen; sie wird benutzt zur Messung der Ablenkungen von Magneten, die an dünnen Fäden aufgehängt sind, von metallenen Nadeln bei einigen Elektrometern usw. Man kann die Beobachtung subjektiv oder objektiv machen.

Wenn auch die objektive Methode vielfach angewandt wird, so ist die subjektive wohl die üblichere; sie wird auch die Methode mit

Fernrohr und Skala genannt. In Fig. 141 ist die Anordnung des Apparates in der Aufsicht gegeben. Am Körper, dessen Drehung um eine durch a gehende vertikale Achse gemessen werden soll, ist ein kleines Spiegelchen st befestigt; F ist ein Fernrohr, mn eine horizontale Skala (mit vertikal stehenden Teilstrichen), die entweder höher oder niedriger als das Fernrohr angebracht ist, und zwar derart, daß die Normale zur Oberfläche des Spiegels mitten zwischen Fernrohr und Skala hindurchführt. Der Beobachter möge im Fernrohr zuerst den Teilstrich o sehen. Hat sich der Körper um den Winkel α gedreht und hat der Spiegel dann die Stellung $s't'$, so gelangt der von r reflektierte Strahl rx ins Fernrohr. Derselbe bildet mit dem Einfallslote p den Winkel $rxp = pxo = \alpha$. Für den Beobachter hat es den Anschein, als habe sich die Skala zur Seite bewegt; er erblickt jetzt in der Mitte des Gesichtsfeldes anstatt des Teilstriches o den Teilstrich r.

Fig. 141.

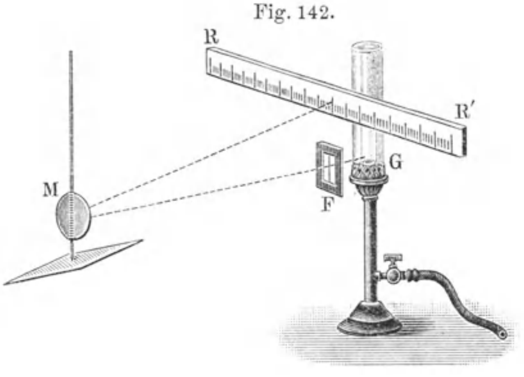


Die Länge $s = or$ läßt sich direkt an der Skala ablesen. Kennt man dann noch die Entfernung y von der Skala bis zum Spiegel, die meist etwa zwischen 2 und 4 m schwankt, so erhält man den gesuchten Winkel α der Drehung nach der Formel

$$tg\, 2\alpha = \frac{s}{y}. \qquad \qquad (2)$$

Nach dieser Methode kann man sehr kleine Drehungswinkel beobachten und messen. Ist $y = 4$ m, so läßt sich eine Drehung um nur $2''$ noch wahrnehmen; derselben entspricht die Verschiebung $s =$ 0,1 mm, welche, falls die Vergrößerung des Fernrohres hinreichend ist, noch sehr gut bemerkt werden kann.

Fig. 142.



Bei der objektiven Methode der Beobachtung mit Spiegel und Skala ist ein wenig oberhalb oder unterhalb der Skala RR' (Fig. 142) ein schmaler vertikaler Spalt F angebracht und dahinter eine Lichtquelle G, etwa ein Gasbrenner oder eine Lampe. Der Spiegel M entwirft ein scharfes Bild des Spaltes auf der Skala; zu diesem Zweck erhält der Spiegel M eine etwas konkave Oberfläche oder man bringt auf der Strecke FM eine bikonvexe Linse in solche Stellung, daß das Bild des Spaltes nach der Reflexion gerade auf die Skala RR' fällt. Dreht sich nun der Spiegel um einen Winkel μ, so sieht man, wie sich das Bild des Spaltes längs der Skala verschiebt. Häufig spannt man in der Mitte des Spaltes einen Faden parallel zum Spaltrahmen aus. Es wird dann die Verschiebung gemessen, welche das Bild dieses Fadens erfährt.

Formel (2) gilt auch hier, und bedeutet s die Zahl der Skalenteile, um welche sich das Bild des Spaltes verschoben hat, y die Entfernung von Spiegel und Skala. Für sehr kleine Winkel α kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen, so daß

$$\alpha = \frac{s}{2y} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

wird, d. h. die Zahl s der Skalenteile kann als Maß des gesuchten Winkels α gelten. Formel (3) wäre auch für größere Winkel α streng richtig, wenn die Skala nicht auf einem ebenen Maßstab, sondern auf einem Kreisbogen angebracht wäre, dessen Mittelpunkt an der Spiegeloberfläche liegt. Der strenge Ausdruck für α lautet

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{s}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{y^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{y^5} - \cdots \right)$$

Ist $\alpha < 4^0$, so kann man sich mit zwei Gliedern der Reihe begnügen und erhält

$$\alpha = \frac{s}{2y} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{s^2}{y^2} \right) \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Um α in Graden, Minuten oder Sekunden auszudrücken, muß man die rechte Seite mit $\frac{180^0}{\pi}$ multiplizieren und erhält:

$$\alpha = K \left(\frac{s}{y} - \frac{1}{3} \frac{s^3}{y^3} \right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

wobei $K = \frac{180^0}{2\pi} = 28{,}648^0 = 1718{,}88' = 103\,132{,}8''$ ist.

Bei genauen Messungen hat man Korrektionen anzubringen, da die Skala nicht genau senkrecht zur Verbindungsgeraden des Anfangspunktes der Zählung mit der Spiegelmitte ist. Ferner ist die seitliche Ablenkung der Strahlen in den Glasplatten zu berücksichtigen, welche man vor dem Spiegel anbringt, falls der Apparat zum Schutz gegen Luftströmungen etwa von einem Gehäuse aus Metall umgeben ist. Wood[1]) hat eine interessante Methode ausgearbeitet, um Torsions-

[1]) W. A. **56**, 171, 1895.

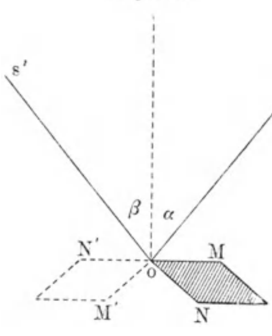
schwingungen zu beobachten. Lermantow[1]) hat die Empfindlichkeit der objektiven Methode der Winkelmessung untersucht. Wadsworth[2]), Julius[3]), Taudin Chabot[4]) u. a. haben die Poggendorffsche Methode verbessert. Marcel[5]) und Burton[6]) haben äußerst empfindliche Apparate konstruiert, um Winkel zu messen, die nicht größer sind als $0{,}5''$.

§ 5. Messung von Flächenwinkeln. Goniometer. Zur Messung der Flächenwinkel an Glas, Quarz, Steinsalzprismen usw., an Kristallen und überhaupt an Ebenen, welche das Licht regelmäßig reflektieren, dienen verschiedene Apparate, die man Goniometer nennt. Je nach der Messungsmethode, welche der Konstruktion des Apparates zugrunde liegt, unterscheidet man Kontaktgoniometer, Hebelgoniometer, Mikrogoniometer und Reflexionsgoniometer. Wir werden nur die letzteren betrachten; eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Arten von Goniometern findet man in Groth, Physikalische Kristallographie.

Wir besprechen zunächst zwei Methoden der Messung von Flächenwinkeln, welche auf dem Gesetz der Spiegelung von Strahlen an ebenen Flächen beruhen.

Die erste Methode wird durch Fig. 143 erläutert. Es sei MON der Neigungswinkel des Flächenwinkels, dessen Kante in O senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht. In einer zu dieser Kante senkrechten Ebene befindet sich ein Fernrohr, das von s' nach O gerichtet ist, und ferner die Lichtquelle. Letztere besteht gewöhnlich aus einem schmalen, zur Kante O parallelen hellen Spalt. Fernrohr und Spalt werden derart eingestellt, daß der Lichtstrahl sO, der vom Spalt kommt, nachdem er von OM in der Nähe der Kante O reflektiert worden ist, in der Richtung der Fernrohrachse Os' weitergeht. Das Bild des Spaltes muß mit einem Faden im Okular zusammenfallen, der parallel zur Kante O und zum Spalt gestellt wird. Hierauf dreht man den Körper OMN so lange um O, bis das Bild des Spaltes wieder erscheint und mit dem Okularfaden zusammenfällt. Es wird jetzt von Strahlen gebildet, die von der anderen Seite ON des Flächenwinkels, die jetzt die Lage ON' hat, reflektiert sind. Da MO und ON' in einer Ebene liegen müssen, so gilt für den zu messenden Winkel

Fig. 143.



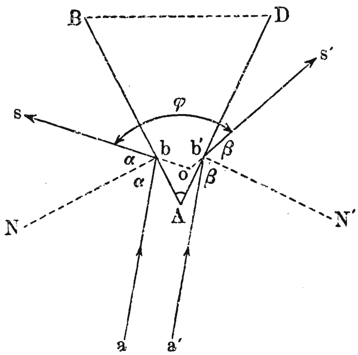
[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **22**, 261, 1890. — [2]) Phil. Mag. **44**, 83, 1897. — [3]) Zeitschr. f. Instr. **18**, 205, 1898. — [4]) Phil. Mag. **8**, 111, 1904. — [5]) C. R. **137**, 786, 1903. — [6]) Phil. Mag. **23**, 385, 1912.

$A = \angle\, MON$ und den Winkel $\varphi = \angle\, NON'$, um welchen sich der Körper gedreht hat, die Beziehung

$$A = 180^0 - \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die zweite Methode besteht im folgenden. Man bringt den Körper, dessen Flächenwinkel A (Fig. 144) gemessen werden soll, in eine feste Lage; in einer zur Kante des Flächenwinkels senkrechten Ebene dreht sich ein Fernrohr derart, daß seine Achse auf den Punkt o, der nahe bei A innerhalb des Körpers liegt, gerichtet ist. Auf diese Kante richtet man ein Bündel paralleler Lichtstrahlen ab, $a'b'$, welche zum Teil von der einen, zum Teil von der anderen Seite des Flächenwinkels reflektiert werden. Hierauf sucht man die beiden Stellungen des Fernrohres auf, bei welchen seine Achse erst mit dem reflektierten Strahle bs und darauf mit $b's'$ zusammenfällt, und mißt den Winkel $\varphi = \angle\, sos'$, um welchen das Fernrohr hierbei gedreht wurde. Man kann nun beweisen, daß der gesuchte Winkel gleich $A = \varphi : 2$ ist. Es seien $\alpha = \angle\, abN = \angle\, Nbs$ und $\beta = \angle\, a'b'N' = \angle\, N'b's'$ Einfalls- und Reflexionswinkel der beiden in Betracht kommenden Strahlen.

Fig. 144.



Aus der Figur ergibt sich

$$\angle\, abN + \angle\, a'b'N' + \angle\, NbB + \angle\, N'b'D' + \angle\, A = 360^0$$

d. h.

$$\alpha + \beta + 180^0 + A = 360^0$$

oder

$$\alpha + \beta + A = 180^0 \quad \text{und} \quad 2\alpha + 2\beta + 2A = 360^0.$$

Andererseits ist offenbar $2\alpha + 2\beta + \varphi = 360^0$. Vergleicht man diese Ausdrücke, so folgt, daß $\varphi = 2A$ ist, also

$$A = \frac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ein paralleles Strahlenbündel kann man, wie später gezeigt werden soll, künstlich erhalten; man kann jedoch auch das Bild eines sehr entfernten Punktes (einer Mire) wählen, von welchem die Strahlen ab und $a'b'$ ausgehen.

Die verschiedenen Goniometer, welche benutzt werden, um die Flächenwinkel bei Kristallen zu messen, können wir hier nicht beschreiben.

Viertes Kapitel.

Messung des Volumens.

§ 1. Bestimmung des Rauminhaltes von Gefäßen. Der Rauminhalt von Gefäßen wird dadurch gefunden, daß man zunächst das leere Gefäß und dann dasselbe, jedoch mit Flüssigkeit gefüllt, wägt, wobei die Dichte, d. h. das Gewicht der Volumeneinheit dieser Flüssigkeit für die Beobachtungstemperatur, bekannt sein muß. Bezeichnet man mit p das Gewicht der Flüssigkeit, mit δ ihre Dichte und mit v den gesuchten Rauminhalt des Gefäßes, so ist $p = v\delta$, woraus

$$v = \frac{p}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

folgt.

Als Versuchsflüssigkeit wählt man entweder Wasser oder Quecksilber, für deren Dichten δ bei verschiedenen Temperaturen genaue Tabellen vorhanden sind.

Drückt man p in Grammen aus, so erhält man das Volumen v in Kubikzentimetern.

Anstatt der Dichte δ ist es bequemer, ihren reziproken Wert, das spezifische Volumen γ, einzuführen, d. h. die Anzahl Kubikzentimeter, welche von einem Gramm Flüssigkeit eingenommen werden. Es ist dann

$$v = p\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für Quecksilber von 0^0 ist

$$\gamma = 0{,}073\,553\,2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Verwendet man Quecksilber, so hat man zu beachten, daß seine freie Oberfläche konvex ist; befindet sich diese Oberfläche in einem engen zylindrischen Gefäß aus Glas, so hat sie die Gestalt eines sogenannten Meniskus. Man kann in diesem Falle annehmen, daß das Quecksilber ein Volumen erfüllt, das von oben durch eine horizontale Ebene begrenzt ist, welche um zwei Drittel der Meniskushöhe über dem Kreise liegt, in welchem sich Glas und Quecksilber berühren.

Um das innere Volumen enger Röhren, sogenannter Kapillarröhren, zu bestimmen, legt man sie horizontal und verschiebt eine kleine Quecksilbersäule in ihnen. In genau zylindrischen Röhren bleibt die Länge der Säule überall die gleiche, sonst ändert sie sich an verschiedenen Stellen der Röhre. Bringt man die Quecksilbersäule der Reihe nach in solche Lagen, daß sie jedesmal um ihre eigene Länge weiterbewegt wird, so kann man auf diese Weise das innere Volumen in gleiche Teile zerlegen, die zudem gleich dem Volumen der benutzten Quecksilbermenge sind.

Eine genauere Untersuchung des inneren Volumens der einzelnen Teile einer mit Teilung versehenen Röhre heißt Kalibrierung. Das hierbei in Anwendung kommende Verfahren soll im dritten Bande bei der Herstellung von Thermometern beschrieben werden.

§ 2. Volumenometer von Regnault. Volumenometer heißen Apparate, die zur Volumenbestimmung von Körpern dienen, und zwar insbesondere von Körpern mit unregelmäßiger Gestalt, kleinen Kristallen, pulverförmigen Körpern usw. In Fig. 145 und 146 ist das

Fig. 145. Fig. 146.

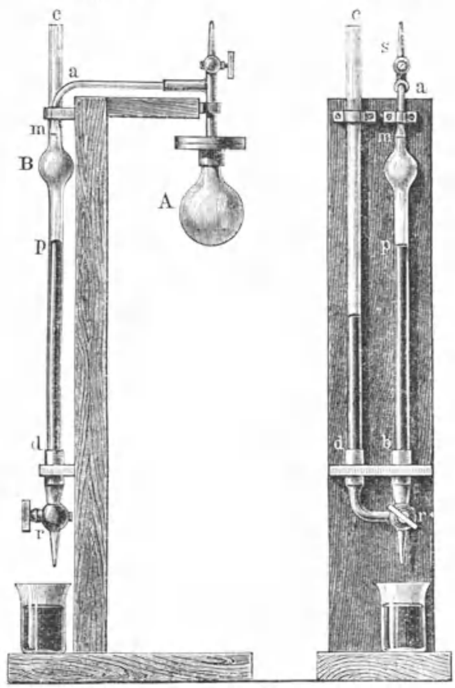


Fig. 147.

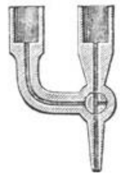
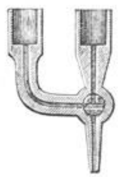


Fig. 148.



Volumenometer von Regnault abgebildet, und zwar von vorn (Fig. 146) und in der Seitenansicht (Fig. 145). An einem vertikal aufgestellten Holzbrett sind zwei parallele Glasröhren *b* und *d* befestigt, in welche Quecksilber gegossen wird. Der Hahn *r* hat zwei zueinander senkrechte Durchbohrungen von der Form ⊥; man kann daher beide Röhren untereinander verbinden (wobei die Stellung der Kanäle ⊥ ist, s. Fig. 148), oder das Quecksilber nur aus der linken Röhre (T) oder nur aus der rechten Röhre (⊢ Fig. 147) ablassen oder endlich aus beiden Röhren gleichzeitig (⊣). Die rechte Röhre hat eine kugelförmige Erweiterung; oberhalb und unterhalb derselben sind zwei Striche *m* und *p* gezogen.

Die rechte Röhre ist mit einer horizontalen Seitenröhre a (Fig. 145) verbunden, an welche sich ein kurzes, vertikales Röhrchen anschließt, das in die verjüngte Mündung s ausläuft und durch einen Hahn verschließbar ist. Unten trägt das Röhrchen eine runde Scheibe, auf welche eine zweite Scheibe geschraubt ist, die ihrerseits mit einer breiteren Röhre und dem kugelförmigen Gefäß A zusammenhängt, welche den Körper von gesuchtem Volumen aufzunehmen hat. In das offene Ende c der links befindlichen Röhre (Fig. 145) kann Quecksilber gegossen werden. Hinter dieser Röhre befindet sich auf dem ihr als Stütze dienenden Brette eine nach Millimetern geteilte Skala. Zunächst muß das Volumen v der Röhre und der Kugel f zwischen den Marken m und p bestimmt werden. Zu diesem Zweck öffnet man den Hahn bei s, verbindet durch r beide Röhren untereinander (⊥) und gießt durch c so viel Quecksilber ein, bis die horizontale Tangentialebene zur Quecksilberoberfläche durch die Marke m hindurchführt. Hierauf läßt man so viel Quecksilber aus der rechten Röhre ab, daß es bis zur Marke p sinkt. Nun wägt man das abgelassene Quecksilber und bestimmt nach Formel (1) oder (3) das Volumen v. Danach hat man noch das Volumen V der Kugel A und Röhre a bis zur Marke m zu messen. Dies geschieht auf zwei Arten: nach der ersten hat man das Quecksilberniveau zu senken, nach der zweiten zu heben.

1. Man öffnet den Hahn bei s, verbindet die Röhren a und b miteinander und läßt das Quecksilber in der linken Röhre bis zur Marke m steigen. Hierauf schließt man den Hahn und bestimmt den Luftdruck H; die eingeschlossene Luft im Apparate hat das Volumen V und die Spannung H. Jetzt läßt man durch r aus beiden Röhren so viel Quecksilber abfließen, bis es in der rechten Röhre bis zur Marke p reicht. Die Luft hat sich jetzt auf das Volumen $V+v$ ausgedehnt, ihre Spannung ist kleiner als H geworden, und das Quecksilberniveau steht daher in der linken Röhre um h Millimeter niedriger als p; die Spannung der eingeschlossenen Luft ist jetzt $H-h$. Nach dem Mariotteschen Gesetz ist

$$VH = (V+v)(H-h) \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

also

$$V = v\frac{H-h}{h} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

2. Während s geöffnet ist, bringt man das Quecksilber bis nach p; das Luftvolumen $V+v$ steht unter dem Druck H. Man schließt nun den Hahn bei s und füllt die linke Röhre mit Quecksilber, bis es in der rechten Röhre bei m anlangt; in der linken Röhre muß es hierbei um eine gewisse Höhe h_1 oberhalb m stehen, so daß die auf das Volumen V zusammengedrückte Luft sich unter dem Druck $H+h_1$ befindet.

Nach dem Mariotteschen Gesetz ist

$$(V+v)\,H = V\,(H+h_1)\,. \qquad (7)$$

also

$$V = v\,\frac{H}{h_1} \qquad (8)$$

Für V nimmt man schließlich das arithmetische Mittel aus beiden nach Formel (6) und (8) erhaltenen Werten.

Um das Volumen x irgendeines Körpers zu bestimmen, etwa eines Häufleins Kristalle oder eines pulverförmigen Körpers, schraubt man das Gefäß A ab, bringt in dasselbe den Körper und schraubt es wieder an. Hierauf wiederholt man genau die beiden vorher beschriebenen Operationen, wobei indes für h und h_1 andere Werte h' und h'_1 erhalten werden; ebenso wird der Luftdruck H jetzt einen anderen Wert H' haben. Da der Körper das Volumen x hat, so ist das Luftvolumen $V-x$ bzw. $V+v-x$, je nachdem das Quecksilberniveau bis m oder bis p reicht. Anstatt der Gleichungen (5) und (7) hat man jetzt

$$(V-x)\,H' = (V+v-x)\,(H'-h')$$

$$(V+v-x)\,H' = (V-x)\,(H'+h').$$

Diese Gleichungen geben zwei Werte für das gesuchte Volumen x, aus denen man wiederum das Mittel wählt.

Es gibt eine große Zahl von Volumenometern von verschiedener Form. Von besonderem Interesse ist ein von W. W. Lermantow konstruierter Apparat, der für Laboratoriumsarbeiten der Studierenden bestimmt ist. Bei diesem ist das Gefäß A durch ein weites Glas, die linke Glasröhre durch ein zylindrisches Gefäß ersetzt, das mit der rechts befindlichen Röhre durch einen langen Gummischlauch verbunden ist. Das Ablassen und Nachfüllen des Quecksilbers wird hier in bequemer Weise dadurch ersetzt, daß man das Gefäß mittels einer um eine Rolle geschlungenen und auf eine Welle gewickelten Schnur hebt, indem man die Welle an einem Griff dreht.

Das Volumenometer kann nicht benutzt werden, um das Volumen von Körpern zu bestimmen, welche eine vom Gasdruck abhängige Gasabsorption zeigen; hierher gehört z. B. Kohle und daher auch Schießpulver. Die Dichte solcher Körper wird durch das von ihnen verdrängte Quecksilbervolumen gemessen, nachdem sie längere Zeit im Vakuum von den absorbierten Gasen befreit wurden.

Einige neuere Volumenometer findet man in den folgenden Abhandlungen beschrieben:

Oberbeck: Wied. Ann. **67**, 209, 1899.
Zehnder: Ann. d. Phys. (4) **10**, 40, 1902; **15**, 328, 1904; Zeitschr. f. Instr. **25**, 83, 1905.
Lo Surdo: N. Cim. (5) **12**, 41, 1906.
Zeleny und McKeehan, Phys. Rev. **30**, 189, 1910.
Dobrochotow: Zeitschr. (Wremennik) d. Hauptanstalt (Palata) f. Maße u. Gewichte **8**, 91, 1907 (russ.).

Fünftes Kapitel.

Messung von Kräften und Massen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über das Messen von Kräften und Massen. Die Formel $f = mw$ liefert die Beziehung der Kraft f zur Masse m, auf welche sie wirkt, und der Beschleunigung w, die sie der Masse erteilt. Nach dieser Formel könnte man Massen messen: 1. durch Bestimmung ihrer Beschleunigungen, während auf sie eine bekannte, oder einfacher, eine konstante Kraft wirkt, oder 2. durch Bestimmung der Kraft, welche erforderlich ist, um den Massen eine uns bekannte oder besser eine konstante Beschleunigung zu erteilen. Ebenso könnte man die Kräfte durch die Beschleunigungen messen, welche sie gegebenen Massen erteilen, oder durch die Massen, deren Bewegungen sie in gegebener Weise beschleunigen. Alle diese Methoden (mit Ausnahme einer, von der im weiteren die Rede sein wird) sind jedoch praktisch nicht wohl anwendbar, da es schwer fällt, die Beschleunigung während der Bewegung zu verfolgen; man verfährt daher anders.

Kräfte werden nicht bloß durch die Beschleunigungen gemessen, die sie in freibeweglichen Körpern hervorrufen, sondern auch durch den Druck, der durch sie auf unfreie Körper ausgeübt wird. Dieser Druck veranlaßt gewisse Formenänderungen in den Körpern, sowie elastische Gegenkräfte, durch welche den wirkenden Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. Aus der Größe der Formänderung eines Körpers kann man auf die Größe der wirkenden Kraft schließen. Hierauf beruhen die sogenannten Dynamometer und unifilaren Torsionswagen, die weiter unten betrachtet werden sollen.

Ferner kann man Kräfte durch andere äußere Kräfte messen, welche ihnen das Gleichgewicht halten, z. B. durch die Schwerkraft. Dies Prinzip kommt zur Anwendung bei den bifilaren Torsionswagen, sowie bei verschiedenen magnetischen und elektrischen Apparaten; dasselbe Prinzip wird häufig bei Messung des Gasdruckes, der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, der elastischen, bei Formenänderung der Körper auftretenden Kräfte usw. angewandt.

Die wichtigste Methode, eine nach Größe und Richtung konstante Kraft aus der von ihr hervorgerufenen Bewegung zu finden, besteht darin, daß man einen Körper unter Einwirkung der gesuchten Kraft Schwingungen um eine gewisse Gleichgewichtslage ausführen läßt, die durch die Richtung dieser Kraft bestimmt wird. Aus der Schwingungsdauer läßt sich, wie wir sehen werden, das Maß für die Kraft ermitteln.

Momentane (instantane oder Stoßkräfte), d. h. sehr kurz dauernde Kräfte, werden, wie früher (S. 86) auseinandergesetzt worden ist, durch den vollen Kraftimpuls während ihrer kurzen Wirkungsdauer bestimmt; dieser Kraftimpuls ist gleich der Bewegungsmenge mv, welche der Körper erlangt. Als Maß für die momentane Kraft dient daher die Anfangsgeschwindigkeit v, welche der ursprünglich in Ruhe befindliche Körper in dem Augenblick besitzt, wo die Wirkung der Kraft aufhört. Nach diesem Prinzip werden die momentanen Kräfte gemessen, welche bei Entzündung explosibler Stoffe, beim Stoß, bei Wirkung sehr kurz dauernder Induktionsströme usw. auftreten.

Das Gewicht eines Körpers kann, als besonderer Fall einer Kraft, nach einer der angeführten Methoden bestimmt werden. Nimmt man als Gewichtseinheit das Gewicht irgendeines Körpers für den Ort, an welchem die Wägung vorgenommen wird, an, so kann man das Gewicht eines anderen Körpers bestimmen, indem man ihn an einem ein- bzw. zweiarmigen Hebel befestigt und diesen dann durch eine gewisse Zahl Gewichtseinheiten (Gewichtstücke) äquilibriert. Das Verhältnis der Hebelarme muß dabei natürlich bekannt sein. Die hierzu dienenden Apparate heißen Wagen (die gewöhnliche, die russische, die römische, die Dezimalwage usw.). Man darf jedoch nicht außer acht lassen, daß man an einer Wage das Gewicht eines Körpers nur unter der obengenannten Bedingung erhält. Bei Anwendung von Federwagen müßte man für jede Breite und jede Meereshöhe besondere Gewichtssätze verwenden, falls man als Gewichtseinheit die Dyne oder das Gramm festlegt, d. h. das Gewicht, welches in Paris die Masse eines Gramms besitzt. Im anderen Falle müssen die entsprechenden Korrektionen bekannt sein, mit deren Hilfe sich das wahre Gewicht eines Gewichtstückes berechnen läßt, das in Paris ein Gramm wiegen würde.

Es ist schon auf S. 80 darauf hingewiesen worden, daß Gewichtstücke Massenetalons sind, und daß daher die Wägung ein Verfahren darstellt, bei welchem die Masse eines Körpers durch Vergleichung seines Gewichtes mit dem Gewicht der Masseneinheit ermittelt wird. Da die Masse der Körper für einen gegebenen Ort proportional dem Gewicht ist, so erhalten wir einen richtigen Zahlenwert für die Masse, wo auch immer die Wägung vorgenommen wird, falls nur die Gewichtstücke richtige Massenetalons darstellen. Den Zahlenwert des Gewichtes kann man dagegen nur dann durch Wägung erhalten, falls das Gewicht der Etalons für den Ort bekannt ist, an welchem die Wägung vorgenommen wird.

§ 2. **Gewichtstücke** sind, wie gesagt, in Wirklichkeit Massenetalons. Im Internationalen Bureau der Maße und Gewichte ist die Urmasse des Kilogramms, und zwar aus derselben Legierung (90 Proz. Pt und 10 Proz. Ir) hergestellt worden, wie der Urmaßstab des Meters. Das

Deutsche Reich hat durch Los das Kilogramm-Urgewicht Nr. 22 erhalten. Sein Volumen (bei 0^0) und seine wahre Masse sind die folgenden:

$$\text{Volumen: } 46{,}403 \text{ ccm}; \quad \text{Masse: } 1 \text{ kg} + 0{,}053 \text{ mg}.$$

Die Genauigkeit der Massenbestimmung beträgt $\pm$ 0,002 mg. Durch eben dieselben Zahlen wie die Masse wird offenbar auch das Gewicht dieses Urmaßes, bezogen auf Paris und auf das Vakuum, ausgedrückt. Entsprechend der üblichen Ausdrucksweise werden wir im folgenden von Wägung, Gewichtstücken usw. reden, obgleich es sich hier nicht sowohl um das Gewicht als vielmehr um die Masse der Körper handelt.

Die Gewichtstücke, deren man sich für die Wage bedient, befinden sich in bestimmter Anordnung in zylindrisch oder sonstwie geformten Vertiefungen einer kleinen Holzleiste. Die besonders großen Stücke bestehen aus Gußeisen oder Schmiedeeisen, die mittleren aus — bisweilen vergoldetem — Messing, die kleineren aus Platin und die allerkleinsten zuweilen aus Aluminium. Besonders beständige Gewichtssätze werden aus Bergkristall oder der oben erwähnten Platiniridiumlegierung hergestellt. Ihrer Größe nach entsprechen sie gewöhnlich folgenden Zahlen:

1—1—1—2—5—10—10—20—50—100—100—200—500—
500—1000 usw.

so daß man durch Zusammensetzen dieser Stücke alle möglichen zwischenliegenden Gewichte erhalten kann. Die kleinste Einheit wiederholt sich dreimal, die nächst höheren (10, 100 usw.) je zweimal. Bisweilen besteht der Gewichtsatz aus Stücken mit folgendem Gewicht:

1—2—2—5—10—20—20—50—100—200—200—500—
1000—2000 usw.

D. J. Mendelejew machte 1895 den Vorschlag, die Gewichtsätze folgendermaßen zusammenzustellen:

1—2—3—4—10—20—30—40—100—200—300—400—1000 usw.,

eine Zusammenstellung, die viele Vorzüge bietet.

Die käuflichen Gewichtsätze sind nicht ganz genau. Bevor man sie in Gebrauch nimmt, muß man sie kalibrieren, d. h. das wahre Verhältnis ihrer Massen zur Masse des Etalons oder wenigstens ihr gegenseitiges Massenverhältnis feststellen. Wegen der hierbei in Anwendung kommenden Methoden sei auf die Lehrbücher der praktischen Physik verwiesen.

Der Theorie nach sollte das Kilogramm ursprünglich dem Gewicht von einem Liter reinen Wassers bei 4^0 C gleichkommen. Nach D. J. Mendelejew ist das wahrscheinlichste Gewicht eines Kubikdezimeters reinen Wassers bei 4° C im Vakuum gleich 999,847 g. Später nahm er die Zahl 999,89 g an.

Über diesen Gegenstand ist von 1896 bis 1909 in Frankreich eine Reihe von äußerst sorgfältigen Messungen ausgeführt worden, und zwar von Macé de Lépinay, Fabry, Pérot, Guillaume, Chappuis, Buisson und Benoit. Durch diese Forscher ist die Frage nach dem wahren Verhältnis zwischen Meter und Kilogramm gegenwärtig als endgültig gelöst zu betrachten. Wenn wir die Ergebnisse älterer Messungen weglassen und ebenso auch die Zahlen, welche als vorläufige publiziert wurden, so erhalten wir eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen den in letzter Zeit erhaltenen Resultaten. Es ist wohl unzweifelhaft, daß das Gewicht von 1 cdm reinen Wassers bei 4° etwas größer ist, 999,97 g. Die dritte Dezimalstelle schwankt zwischen 1 und 4 und wird auch von ein und demselben Forscher in verschiedenen Veröffentlichungen nach neuen Rechnungen oder nach Einführung neuer Korrektionen nicht ganz gleich angegeben. Wir stellen einige Zahlen zusammen:

Macé de Lépinay, Fabry und Perot (1899) . .	999,974
Buisson, Macé de Lépinay und Benoit (1905)	999,971 999,974
Chappuis (1906)	999,974
Benoit (1907)	999,972
Guillaume (1909)	999,973

Als Mittelwert können wir annehmen, daß das Gewicht von 1 cdm reinen Wassers bei 4° und normalem Druck gleich

999,973 Gramm

ist. Hieraus folgt: das Volumen von 1 kg reinen Wassers bei 4° und normalem Druck oder

1 Liter = 1,000 027 cdm.

Das internationale Kilogramm ist also um 27 mg schwerer, als es nach dem theoretischen Zusammenhang mit dem internationalen Meter sein müßte. Nimmt man das internationale Kilogramm als Grundlage, so ist das internationale Meter um 0,009 mm = 9 μ zu lang. Wir stellen einige der wichtigsten Arbeiten zusammen:

Mendelejew: Wremennik Gl. Palatij Mjer i Wjessow **2**, 162, 1895; **2**, 143, 1895; Proc. R. Soc. **59**, 143, 1896.

Macé de Lépinay: Annal. chim. et phys. (6) **10**, 68, 1887; (7) **5**, 210, 1895; **11**, 102, 1897; C. R. **122**, 595, 1896; Journ. de Phys. (3) **5**, 477, 1896.

Macé de Lépinay, Fabry und Perot: C. R. **128**, 1317, 1899; **129**, 709, 1899.

Chappuis: Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. 1897, p. 66; Arch. sc. phys. (4) **22**, 259, 1906.

Guillaume: Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. 1899, p. 143; Rapp. prés. au Congrès internat. de Phys. **1**, 78, 1900; Procès verb. des Séanc. du Com. internat. d. P. et Mes. (2) **5**, 142—171, 1909; Arch. sc. phys. (4) **24**, 382, 1907; Rev. gén. d. sc. **19**, 262, 1908.
Buisson: Journ. de Phys. (4) **4**, 669, 1905.
Benoit: C. R. **145**, 1385, 1907.

Besonders wichtig ist die zusammenfassende Darstellung von Guillaume aus dem Jahre 1909.

§ 3. **Die Einrichtung der Wage.** Der wichtigste Bestandteil der Wage ist der Wagebalken — ein gleicharmiger Hebel. In der Mitte desselben ist ein dreiseitiges Prisma befestigt, dessen eine Kante nach unten gerichtet ist; es dient als Stütze für den Balken. An den Enden des Wagebalkens befinden sich zwei weitere Prismen, die mit einer Kante nach oben gekehrt sind; auf diese stützen sich die Haken oder Fassungen, in welchen die Wagschalen hängen. Die Kanten dieser drei Prismen müssen einander parallel sein und, solange die Wage sich in Ruhe befindet, in einer horizontalen Ebene liegen. Ein langer vertikaler Zeiger, der mit dem einen Ende am Wagebalken befestigt ist, erlaubt, die Schwingungen zu beobachten; zu diesem Zweck befindet sich beim anderen Ende des Zeigers eine Skala. In der Mitte der Skala oder besser an einem Ende liegt der Nullpunkt.

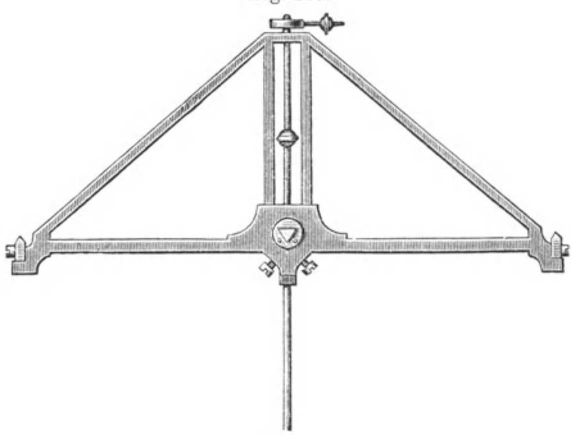
Statt des Zeigers kann man eine kleine vertikale Skala benutzen, die an einem Ende des Wagebalkens befestigt ist. Die Schwingungen beobachtet man in diesem Falle mittels eines auf diese Skala gerichteten Mikroskops.

Damit die Kanten der Prismen durch den beständigen Druck des Wagebalkens sowie der Schalen nicht stumpf werden, ist ein beweglicher Rahmen (die Arretierung) angebracht, welcher den Wagebalken und die Stützen der Wagschalen trägt, so daß die Prismen von dem auf ihn lastenden Druck befreit werden. Sobald eine Wägung vorgenommen werden soll, löst man die Arretierung und befestigt sie wieder, sobald die Wägung beendet ist.

Die Wage wird in einem mit Türen versehenen Glasgehäuse untergebracht. Um die Gewichtstücke in bequemer Weise auf die Wagschalen oder auch auf den Wagebalken legen zu können, sind sehr verschiedene Vorkehrungen getroffen worden. Während der Wägung selbst hat man die Wage auf das sorgfältigste vor den geringsten Luftströmungen und ebenso vor einer ungleichmäßigen Erwärmung der beiden Hebelarme (die z. B. durch den Beobachter selbst erfolgen kann) zu schützen.

Gegenwärtig benutzt man bei genauen Wägungen ausschließlich kurzarmige Wagen. Das theoretische und praktische Studium der Bedingungen, unter welchen der höchste Genauigkeitsgrad der Wägung erhalten werden kann, hat D. J. Mendelejew [Die Spannung der Gase (russ.). St. Petersburg 1875. § 16 und 17] zur Auffindung einer Formel geführt, aus welcher der Nutzen kurzarmiger Wagen hervorgeht, besonders wenn die Wägung bei konstanter und immer der gleichen Belastung vorgenommen wird (s. unten). Es sei hier bloß erwähnt, daß durch Verkürzung des Wagebalkens die Biegung und die Schwingungsdauer vermindert werden, was, wie im weiteren gezeigt werden soll, von hohem praktischen Wert für die Wägung ist. Der Wagebalken muß derartig konstruiert sein, daß alle seine Teile einer Durchbiegung den gleichen Widerstand entgegensetzen. Dies erreicht man leicht, indem man den Wagebalken sehr breit anfertigt; da hierdurch aber sein Gewicht groß wird, wodurch die Empfindlichkeit (s. § 4) leidet, so wird er durchbrochen, doch darf hierdurch seine Festigkeit nicht leiden. Die in verschiedenen Werkstätten verfertigten Wagebalken weichen in der Form sehr voneinander ab; Fig. 149 zeigt einen von Sartorius stammenden Wagebalken für geringe Belastung; er ist aus Aluminium mit einem Zusatz von Silber gegossen.

Fig. 149.



Die Schneiden der drei mit dem Wagebalken verbundenen Prismen müssen untereinander parallel sein, da sich im entgegengesetzten Falle die Abstände der Angriffspunkte der Belastung vom Stützpunkte ändern können. G. K. Brauer in St. Petersburg hat einen Apparat konstruiert, der speziell dazu dient, die Parallelität dieser Schneiden zu untersuchen. Dieser Apparat ist von W. Lermantow[1]) beschrieben worden.

Die drei Schneiden der Prismen müssen sich während der Wägung in einer Ebene befinden. Mendelejew schlägt vor, daß man unter Benutzung einer konstanten Belastung die Prismen derart anbringen soll, daß ihre Schneiden sich, während die Schalen belastet sind, in einer Ebene befinden. Demgemäß muß bei unbelasteter Wage die Schneide des mittleren Prismas ein wenig niedriger liegen, da sich die seitlichen Prismen durch die Belastung senken.

---

[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **9**, 326, 1877.

Die seitlichen Prismen werden oft beweglich gemacht, damit sich ihre Lage in bequemer Weise regulieren läßt. Eine solche Vorrichtung ist in Fig. 150 abgebildet. Wie ersichtlich, kann man mittels der Schraube *a* das Prisma heben bzw. senken, und mittels der Schraube *b* ein wenig nach links oder rechts rücken.

Eine andere Konstruktion zeigen Fig. 151 und 152. Das Prisma *b* ist mit Hilfe der Schrauben *v* und *v'* an den stählernen Träger *m* angeschraubt; letzterer ist mit dem Wagebalken durch die Schraube *n* verbunden. Bei Lüftung derselben kann der Träger *m* mit Hilfe der Schraube *p* in der Längsrichtung verschoben werden, wobei das mit dem Wagebalken verbundene prismatische Stück *o* zur Führung dient. Geringe Drehungen werden hierbei mit Hilfe der Schrauben *r* und *r'* ausgeführt.

Fig. 150.

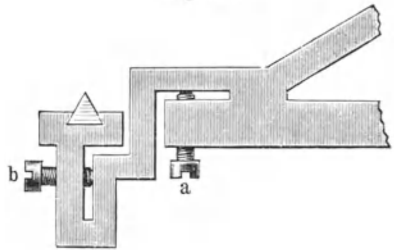


Fig. 151.

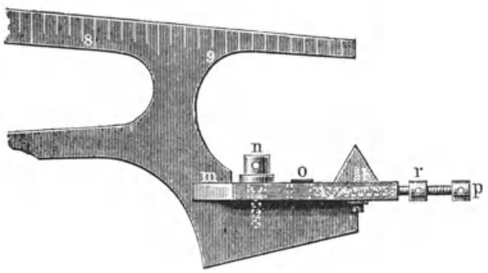
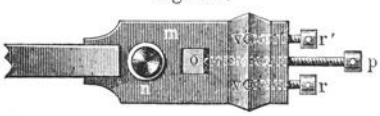


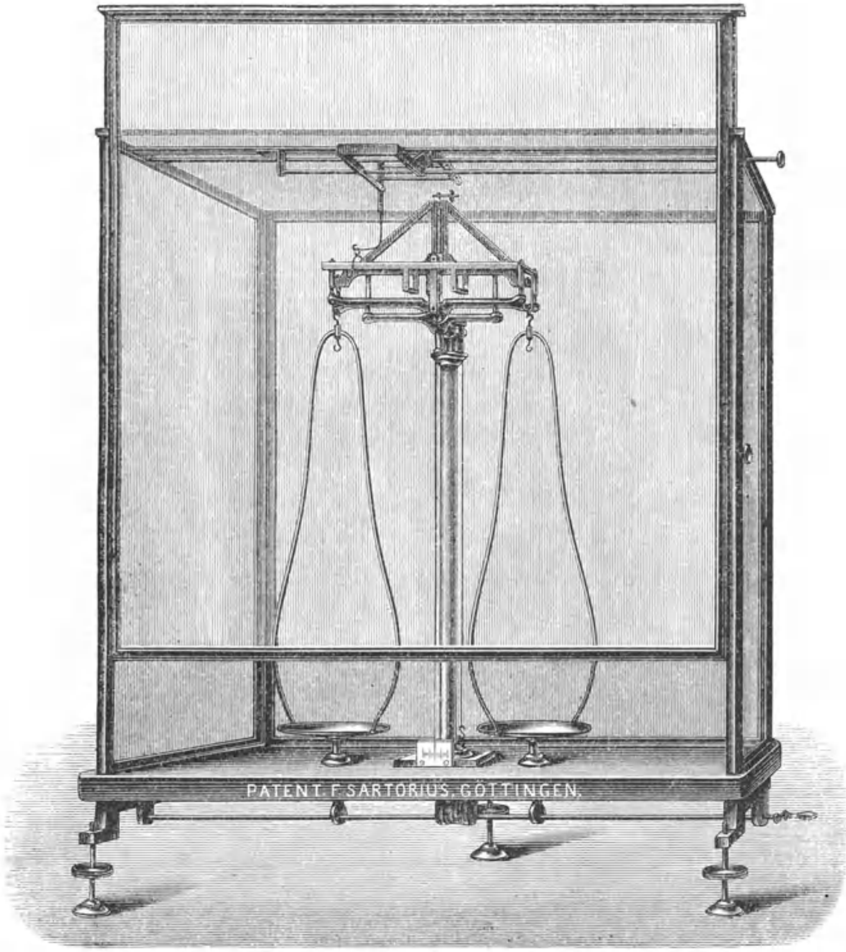
Fig. 152.



D. J. Mendelejew hat eine Arretierung des Wagebalkens vorgeschlagen, die aus zwei Hebelarmen besteht, welche sich um eine in der Verlängerung der mittleren Prismenschneide befindliche Achse drehen. Eine solche Vorrichtung arretiert den schwingenden Wagebalken, ohne auf ihm zu gleiten, da Balken und Arretierung die gleiche Drehungsachse haben. Das Gleiten der Arretierung längs der Oberfläche des Wagebalkens ruft einen schädlichen Seitendruck hervor, wodurch sich die Schneiden abstumpfen können. Nebenstehende Fig. 153 zeigt eine der kurzarmigen Wagen, welche von Sartorius in Göttingen angefertigt werden.

§ 4. Stabilität und Empfindlichkeit der Wage. Für die Stabilität der Wage ist es erforderlich. daß der Schwerpunkt des Wagebalkens ein wenig unterhalb seines Stützpunktes liegt, d. h. unterhalb der Schneide des mittleren Prismas. Die Wagschalen nebst ihrer Belastung üben keinen Einfluß auf die Stabilität aus; es würde dies nur dann der Fall sein, wenn sie mit dem Wagebalken fest zusammenhingen. Unter der Empfindlichkeit einer Wage versteht man die

Fig. 153.

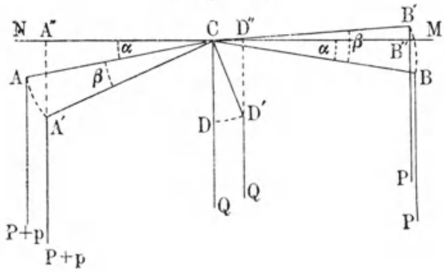


Änderung ihrer Einstellung durch ein kleines Übergewicht p, welches bei gleicher Belastung P der Wagschalen einer derselben hinzugefügt ist. Bezeichnet man den Ablenkungswinkel des Wagebalkens mit β, so gilt als Maß für die Empfindlichkeit ω die Größe

$$\omega = \frac{\beta}{p} \qquad (1)$$

Wir wollen jetzt untersuchen, von welchen Konstruktionsbedingungen diese Empfindlichkeit abhängt. Es sei NCM eine horizontale Linie (Fig. 154); AC und BC stellen die Hebelarme dar, die im allgemeinen bei gleicher Belastung der Wagschalen nicht mit jener horizontalen Linie zusammenfallen. Durch A, B und C gehen die Schneiden der drei Prismen. An A und B greifen Kräfte an, die der Belastung der Wagschalen (die Gewichte der Schalen inbegriffen) gleich sind. Es sei ferner $\angle ACN = \angle BCM = \alpha$; D der Schwerpunkt des Wagebalkens, auf den mithin die Kraft Q, nämlich das Gewicht des Wagebalkens, wirkt. Die Länge der Hebelarme bezeichnen wir mit $l = AC = BC$, den Abstand des Schwerpunktes vom Stützpunkt mit $\delta = DC$.

Fig. 154.



Wir denken uns nun, daß auf die rechte Seite des Wagebalkens das Gewicht P, auf die linke das Gewicht $P+p$ angreift, wo p also das Übergewicht bedeutet. Die Hebelarme nehmen jetzt die Lage $A'CB'$ an, der Schwerpunkt gelangt nach D'. Wir setzen

$$\angle DCD' = \angle ACA' = \angle BCB' = \beta.$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Wagebalkens in der neuen Lage unter Einwirkung der Kräfte P, $P+p$ und Q lautet

$$(P+p)\,.\,\overline{A''C} = P\,.\,\overline{B''C} + Q\,.\,\overline{D''C}$$

oder

$$(P+p)\,l\cos(\beta+\alpha) = Pl\cos(\beta-\alpha) + Q\,\delta\sin\beta.$$

Entwickelt man $\cos(\beta+\alpha)$ und $\cos(\beta-\alpha)$ und dividiert die ganze Gleichung durch $\cos\beta$, so erhält man

$$tg\,\beta = \frac{pl\cos\alpha}{(2P+p)\,l\sin\alpha + Q\delta} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

Für kleine Winkel β kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen und erhält nach (1)

$$\omega = \frac{l\cos\alpha}{(2P+p)\,l\sin\alpha + Q\delta} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Befänden sich die Schneiden der drei Prismen auf einer Geraden, d. h. wäre $\alpha = 0$, so erhielte man die einfache Formel

$$\omega = \frac{l}{Q\delta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

Der letzte Ausdruck zeigt, daß die Empfindlichkeit einer Wage direkt proportional der Länge der Hebelarme und indirekt proportional dem Gewichte des Wagebalkens und dem Abstande seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte ist. Um die Empfindlichkeit der Wage zu erhöhen, muß man also den Wagebalken möglichst leicht und bei gegebenem Gewichte möglichst lang machen und den Schwerpunkt dem Unterstützungspunkte möglichst nahe bringen.

Im idealen, der Formel (4) entsprechenden Falle hängt die Empfindlichkeit gar nicht von der Belastung P der Wage ab. Die allgemeinere Formel (3) zeigt aber, daß sich bei Vergrößerung der Belastung die Empfindlichkeit der Wage verringert, falls Winkel α positiv ist, d. h. falls der Stützpunkt des Balkens über dem der Wagschalen liegt und sich vergrößert, falls α negativ ist, d. h. falls die Schneiden der seitlichen Prismen über der des mittleren liegen. Hierbei ist noch zu beachten, daß auch der Winkel α von der Belastung P abhängt, indem diese eine Biegung des Wagebalkens, d. h. eine Zunahme des Winkels α hervorruft. Ist für $P = 0$ der Winkel α positiv, so muß sich daher die Empfindlichkeit ω bei Vermehrung der Belastung P aus zweierlei Gründen vermindern; ist dagegen der Anfangswert von α negativ, so wird bei Zunahme von P der Winkel α zunächst gleich Null und darauf positiv. In diesem Falle müßte sich die Empfindlichkeit ω der Wage bei Zunahme der Belastung P zuerst vergrößern und hierauf vermindern, was man auch in der Tat beobachten kann. Eine Verlängerung des Wagebalkens vergrößert die Biegung bei belasteter Wage und vergrößert gleichzeitig die Schwingungsdauer; dies ist der Grund, weshalb man gegenwärtig kurzarmige Wagen gebraucht.

Neuere Untersuchungen über die Empfindlichkeit der Wage findet man in den Schriften:

Carpenter a. Bisbee: Phys. Rev. **22**, 31, 1906.
Gottschalk: Western Chemist and Metallurgist **2**, 37, 55, 83, 91, 1906.
Felgenträger: Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage, Leipzig 1907 (310 Seiten).

§ 5. Beobachtung der Schwingungen des Wagebalkens. Die Wägung eines Körpers besteht darin, daß man den Wagebalken durch Auflegen der entsprechenden Gewichtstücke ins Gleichgewicht, d. h. in dieselbe Lage bringt, die er ohne Belastung inne hatte. Es zeigt sich aber nun, daß, wenn man die Arretierung entfernt, die Wage jedesmal sehr lange hin und her schwingt. Da man der Zeitersparnis wegen nicht warten will, bis sie zu völligem Stillstand gelangt, und da es genauer ist, die Wägung im schwingenden Zustand durchzuführen als in der Ruhe, so beobachtet man diese Schwingungen an der Skala und berechnet den Teilstrich der Skala, welcher der Ruhelage entspricht, d. h. welcher der Spitze des Zeigers bzw. dem horizontalen Okularfaden des zur Ablesung dienenden Mikroskopes gegenüber zu liegen kommen würde. Falls der Wagebalken sehr stark schwingt, hat man ihn zu beruhigen, indem man die Wagschalen mit einem weichen Pinsel leicht berührt. Während man die feineren Schwingungen beobachtet, dürfen sich die Wagschalen bloß heben und senken und nicht etwa seitliche Bewegungen ausführen, da durch letztere eine Zentrifugalkraft hervorgerufen wird, welche die Lage des gesuchten Ruhepunktes verändert. Um diesen Punkt zu finden, beobachtet man an der Skala drei aufeinanderfolgende Ausschläge; es seien a, b und c die beobachteten Teilstriche der Skala, wobei a und c auf der einen und b auf der anderen Seite des gesuchten Punktes der Ruhelage liegen mögen. Man nimmt nun das Mittel $\frac{a+c}{2}$ der Ablesungen auf der einen Seite und darauf das Mittel aus diesem und der Ablesung b auf der anderen Seite der Skala. Die auf diese Weise berechnete Zahl liefert alsdann den gesuchten Teilstrich n, welcher der Ruhelage entspricht. Somit ist

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2} + b\right) = \frac{1}{4}(a + 2b + c) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Beobachtet man vier Ausschläge a, b, c und d (wobei a und c auf der einen, b und d auf der anderen Seite liegen), so wird n aus folgender Formel gefunden

$$n = \frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Diese Formel wird erhalten, wenn man mit Hilfe von a, b, c und b, c, d nach (5) das Mittel aus beiden Ruhelagen berechnet; man bildet also

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(a + 2b + c) + \frac{1}{4}(b + 2c + d)\right] = \frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d).$$

Bevor man die Wägung selbst vornimmt, hat man nach derselben Methode den Skalenstrich n_0 zu bestimmen, welcher der Ruhelage der unbelasteten Wage entspricht.

Es seien beispielsweise bei unbelasteter Wage die Umkehrpunkte der Schwingungen

	links bzw. oben	rechts bzw. unten
	10,6	8,3
	10,4	
Mittel	10,5	

$$n_0 = \frac{10{,}5 + 8{,}3}{2} = 9{,}4.$$

Somit entspricht der Ruhelage der Teilstrich $n_0 = 9{,}4$. Befindet sich der Nullpunkt der Skala in der Mitte, so hat man die Ablesungen mit einem Vorzeichen zu versehen. Während der Wägung hat man wiederum die Schwingungen zu beobachten und die Summe der Gewichtstücke zu bestimmen, für welche der Teilstrich n_0 abermals der Gleichgewichtslage entspricht. Für gewöhnlich ergibt eine gewisse Belastung eine Ruhelage, die auf der einen Seite von n_0 liegt, und ruft die geringste Vermehrung der Belastung eine Verschiebung der Ruhelage nach der entgegengesetzten Seite von n_0 hervor. Man findet dann aus einer einfachen Proportion jenen Teil des kleinsten Gewichtstückes, durch welchen die Ruhelage in n_0 erreicht wird. Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern. Es sei, wie oben, $n = 9{,}4$. Die Belastung 43,765 g gibt folgende Ablesungen:

links bzw. oben	rechts bzw. unten
9,7	7,2
9,5	
Mittel 9,6	

Die Gleichgewichtslage ist $n_1 = \frac{9{,}6 + 7{,}2}{2} = 8{,}4$. Die Belastung 43,766 g gibt:

links bzw. oben	rechts bzw. unten
10,9	8,8
10,7	
Mittel 10,8	

Die Gleichgewichtslage ist jetzt $n_2 = \frac{10{,}8 + 8.8}{2} = 9{,}8$. Somit verschiebt sich durch Hinzufügen eines Milligramms die Gleichgewichtslage um $9{,}8 - 8{,}4 = 1{,}4$ Skalenteile. Das gesuchte Gewicht x, das der Minderbelastung hinzugefügt werden muß, soll eine Verschiebung um $n_0 - 8{,}4 = 9{,}4 - 8{,}4 = 1{,}0$ Skalenteile bewirken. Hieraus folgt $x = 1{,}0 : 1{,}4 = 0{,}71$; es ist daher das gesuchte Gewicht des gewogenen Körpers gleich 43,7657 g, falls die letzte Dezimale fortgelassen wird.

P. Curie hat eine aperiodische Wage konstruiert, bei welcher die Schwingungen des Wagebalkens geringe Verdichtungen oder Verdünnungen einer Luftmenge hervorrufen, die sich unterhalb der Wagschalen in besonderen Räumen befindet. Infolgedessen nehmen die Schwingungsamplituden des Wagebalkens sehr schnell ab.

Eingehenderes über die genauesten Wägungsmethoden, die Aufstellung von Wagen usw. findet man in den Arbeiten Mendelejews[1]).

[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 1895, chem. Teil, S. 509. Wremennik Glawnoj Palatij Mjer i Wjessow, Teil 3, S. 1 bis 84, 1896. Experimentalunters.

Unter Berücksichtigung aller Nebenumstände und unter Benutzung der besten Wagen kann man einen sehr hohen Genauigkeitsgrad bei der Wägung erreichen. Beispielsweise kann man ein Kilogramm bis 0,1 mg genau wägen, man kann sich also noch für diese Größe verbürgen; dies beträgt ein zehnmilliontel des gesuchten Gewichtes. Unter besonders günstigen Umständen ist es gelungen, eine Genauigkeit von 0,1 mg auf 10 kg und sogar von 0,005 mg auf 1 kg zu erreichen (d. i. ein zweihundertmilliontel des gesuchten Gewichtes). Keine andere Messung einer physikalischen Größe kann mit einem ähnlichen Genauigkeitsgrade ausgeführt werden.

§ 6. Wägungsverfahren. Es gibt drei Wägungsverfahren, welche den Einfluß der ungleichen Länge der Hebelarme und des ungleichen Gewichtes der Wagschalen beseitigen.

I. Die Gaußsche Methode der Doppelwägung. Man bringt den Körper zuerst auf die eine, dann auf die andere Wagschale und bestimmt die beiden Belastungen p_1 und p_2, durch welche er im Gleichgewicht gehalten wird. Bezeichnet man die Länge des Hebelarmes, auf welchen das gesuchte Gewicht p des Körpers zuerst wirkt, mit l_1, die Länge des anderen Hebelarmes mit l_2, so ist

$$p l_1 = p_1 l_2; \quad p l_2 = p_2 l_1 \quad \dots \dots \quad (7)$$

Durch Multiplikation erhält man

$$p^2 = p_1 p_2,$$

d. h.

$$p = \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad \dots \dots \quad (8)$$

da man, falls p_1 und p_2 nur wenig voneinander verschieden sind, ihr geometrisches Mittel dem arithmetischen Mittel gleichsetzen kann. Dividiert man die Gleichungen (7) durcheinander, so erhält man das Längenverhältnis $l_1 : l_2$ der Hebelarme, das mit λ bezeichnet werden möge:

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Ist $\frac{p_1}{p_2} = 1 + \alpha$, wo α eine kleine Größe bedeutet, so ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \quad \dots \dots \quad (9)$$

Somit erhält man bei der Methode der Doppelwägung unter anderem auch das Verhältnis der Hebelarme des Wagebalkens.

über Wageschwingungen (russ.), St. Petersburg 1898. Über Wageschwingungen, eine auf der X. allgem. Versamml. der russ. Naturforscher gehaltene Rede, Kiew 1898 (russ.), letztere ist auch im Wrem. Gl. Pal. M. i W. Teil 4, S. 33, 1899 erschienen.

II. Die Bordasche oder Tarierungsmethode. Man bringt den Körper auf eine der Wagschalen und äquilibriert ihn durch Schrot, Sand, Feilicht usw. Hierauf entfernt man den Körper und legt an seiner Stelle Gewichtstücke auf, welche dem Sand, Feilicht usw. das Gleichgewicht halten. Offenbar ist dann das gesuchte Gewicht gleich dem der Gewichtstücke, einerlei ob die Hebelarme gleich sind oder nicht.

III. Die Mendelejewsche Methode der konstanten Belastung oder der konstanten Empfindlichkeit. Wie wir sahen, hängt die Empfindlichkeit der Wage von der Größe der Belastung ab. Um daher eine Reihe von Wägungen bei gleicher Empfindlichkeit der Wage vorzunehmen, verfährt man folgendermaßen. Ist die Wage für die Maximalbelastung von beispielsweise einem Kilogramm pro Schale bestimmt, dann legt man auf die eine Schale ein Kilogrammgewicht und auf die andere eine ganze Reihe von Gewichtstücken, die zusammen 1 kg wiegen. Durch ein kleines, auf die entsprechende Seite gebrachtes Übergewicht verlegt man den Punkt der Ruhelage nach der Skalenmitte, falls der Wagebalken zu stark geneigt sein sollte. Den zu wägenden Körper legt man auf die Schalen mit den kleinen Gewichtstücken und entfernt so viele, bis Gleichgewicht eintritt. Die fortgenommenen Gewichtstücke geben das Gewicht des Körpers an.

§ 7. Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft. Nach dem Archimedischen Prinzip verliert (wie man sich auszudrücken pflegt) jeder Körper in der Luft so viel von seinem Gewicht, als das verdrängte Luftvolumen wiegt. Da die Dichte der Luft ungefähr $^1/_{700}$ beträgt, so verliert offenbar ein Körper mit der Dichte Eins gegen 0,13 Proz. seines Gewichtes, was eine außerordentlich bedeutende Größe ist, im Vergleich mit der Genauigkeit, die beim Wägen erreicht werden kann (0,000 01 Proz.). Sogar einer der dichtesten Körper — das Platin — verliert schon 0,006 Proz. seines Gewichtes in der Luft. Beim Wägen eines Kilogramms Platin beträgt dieser Gewichtsverlust 60 mg, d. h. 600 mal mehr als das kleinste auf der Wage noch wahrnehmbare Gewicht (0,1 mg).

Der Gewichtsverlust ändert sich zugleich mit der Dichtigkeit der Luft, d. h. mit dem barometrischen Druck, der Lufttemperatur und ihrer Zusammensetzung, die hinsichtlich des Dampfgehaltes sehr veränderlich ist. Hieraus folgt, daß das „scheinbare Gewicht“ der Körper eine veränderliche Größe ist. Daher wird bei jeder genauen Wägung vorausgesetzt, daß das „wahre Gewicht“, d. h. das Gewicht des Körpers im Vakuum, bestimmt ist. Die Berechnung des wahren Gewichtes aus dem beobachteten heißt die „Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft“.

Mit Änderung des Luftzustandes ändert sich auch das scheinbare Gewicht der Gewichtstücke, und daher muß ein für allemal festgelegt werden, daß sich die Benennung der Gewichtstücke (einschließlich der beim Kalibrieren gefundenen Korrektionen) auf ihr Gewicht im Vakuum bezieht.

Die Korrektion wegen des Gewichtsverlustes fällt fort, falls die Wägung im Vakuum vorgenommen wird, was auch in der Tat bisweilen geschieht (zuerst von Regnault im Jahre 1860 ausgeführt, neuerdings von Mendelejew in der Hauptanstalt für Maße und Gewichte und auch von anderen). Obige Korrektion fällt ferner fort, wenn der zu wägende Körper und die Gewichtstücke aus demselben Stoff bestehen. Die wichtigste Größe, welche bei der Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in Betracht kommt, ist das Gewicht eines Kubikzentimeters trockener Luft bei 0^0 und 760 mm Druck, d. h. bei einem Luftdruck, welcher gleich dem Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0^0 am Meeresspiegel und unter 45^0 geographischer Breite ist.

Wir wollen dieses Gewicht mit p_0 bezeichnen. Es ist für verschiedene Breiten verschieden und ist offenbar proportional der Beschleunigung g der Erdschwere. Nach Mendelejew ist

$$p_0 = 0{,}131\,844\, g \text{ mg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo g in $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sek.})^2}$ ausgedrückt ist. Nimmt man für St. Petersburg $g = 9{,}8188$ an, so erhält man für diesen Ort

$$p_0 = 1{,}294\,55 \text{ mg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die russische Hauptanstalt der Maße und Gewichte bezeichnet das Gewicht eines Liters trockener Luft unter normalen Bedingungen mit $e_0 = 1000\, p_0$. Wird die Wägung bei einer Temperatur von t^0, einem Barometerstande H ausgeführt, und ist die Spannung der in der Luft enthaltenen Wasserdämpfe h, dann ist das Gewicht p eines Kubikzentimeters Luft gleich

$$p = p_0 \frac{H - h}{760\,(1 + \alpha t)} + p_0\, \delta \frac{h}{760\,(1 + \alpha t)}$$

wo $\alpha = 0{,}00367$ der thermische Ausdehnungskoeffizient der Gase und δ die Dichte des Wasserdampfes in bezug auf Luft (etwa $^3/_8$) ist. Vereinfacht man den Ausdruck, so wird

$$p = p_0 \frac{H - {}^3/_8\, h}{760\,(1 + \alpha t)} \text{ mg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Formel (12) wird nur in Ausnahmefällen gebraucht. Für gewöhnliche, bei Zimmertemperatur vorgenommene Wägungen, wo keine große Genauigkeit erforderlich ist, kann man setzen

$$p = 1{,}2 \text{ mg} = 0{,}0012 \text{ g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Um die Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen:

Es sei P das wahre gesuchte Gewicht des Körpers, V sein Volumen, D seine Dichte; Q das bekannte wahre Gewicht der Gewichtstücke, v ihr Volumen und δ ihre Dichte. Der Gewichtsverlust des Körpers ist $pV = p\,\frac{P}{D}$; der Gewichtsverlust der Gewichtstücke $pv = p\,\frac{Q}{\delta}\cdot$ Gibt die Wage in Luft Gewichtsgleichheit für den Körper und die Gewichtstücke an, so ist

$$P - p\,\frac{P}{D} = Q - p\,\frac{Q}{\delta} \text{ oder } P\left(1-\frac{p}{D}\right) = Q\left(1-\frac{p}{\delta}\right),$$

woraus man das gesuchte wahre Gewicht des Körpers erhält

$$P = Q\,\frac{1-\frac{p}{\delta}}{1-\frac{p}{D}}\cdot$$

Wegen der Kleinheit der Korrektionen kann man hierfür setzen

$$P = Q\left(1-\frac{p}{\delta}\right)\left(1+\frac{p}{D}\right) = Q\left(1+\frac{p}{D}-\frac{p}{\delta}\right)$$

oder

$$P = Q + Qp\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right)\cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (14)$$

Setzt man hierin für p den Wert aus (13) ein, so wird

$$P = Q + 0{,}0012\,Q\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right)g\cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (15)$$

oder

$$P = Q + 1{,}2\,Q\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right)\text{mg} \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (16)$$

Das zweite Glied von (16) gibt die gesuchte Korrektion in Milligrammen; Q ist in Grammen ausgedrückt. Schreibt man (16) in der Form

$$P = Q + k\,Q,$$

so ist, wenn man zur Wägung Gewichte aus Messing ($\delta = 8{,}4$) verwendet

$$k = 1{,}2\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{8{,}4}\right)\text{mg}\cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (17)$$

und analog für Gewichte aus Platin ($\delta = 22$)

$$k = 1{,}2\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{22}\right)\text{mg}.$$

Man hat Tabellen berechnet, aus denen sich die Werte des Faktors k für verschiedene Dichten D des zu wägenden Körpers, und zwar sowohl für Messing- als auch für Platingewichte ablesen lassen.

Von allen Messungen kann das Wägen am genauesten ausgeführt werden, so daß bei entsprechender Güte der Wage und **hauptsächlich bei genügender Übung und Umsicht des Beobachters** die Genauigkeit bis auf $\frac{1}{10^7}$ der zu messenden Größe gebracht werden kann, d. h. bis auf 0,1 mg bei Wägung von einem Kilogramm (s. S. 318).

§ 8. Dezimalwage, Wage von Westphal. Mikrowagen. Wir wollen jetzt einige Apparate betrachten, die zwar ebenfalls zum Wägen dienen, sich aber durch ihre Konstruktion wesentlich von der oben beschriebenen gleicharmigen Wage unterscheiden.

I. Die Dezimalwage; sie ist in Fig. 155 dargestellt, und zwar so, daß gewisse, sich sonst verdeckende Teile sichtbar gemacht sind. Die zu wägende Last wird auf die Brücke AA, die Gewichte auf C gebracht. Brücke und Wagschale sind miteinander durch ein System von Hebeln verbunden, so daß Gleichgewicht eintritt, wenn das wahre Gewicht des Körpers zehnmal größer ist als das Gewicht der Gewichtstücke; hierbei ist es gleichgültig, auf welche Stelle der Brücke AA die Last aufgelegt wird.

Fig. 155.

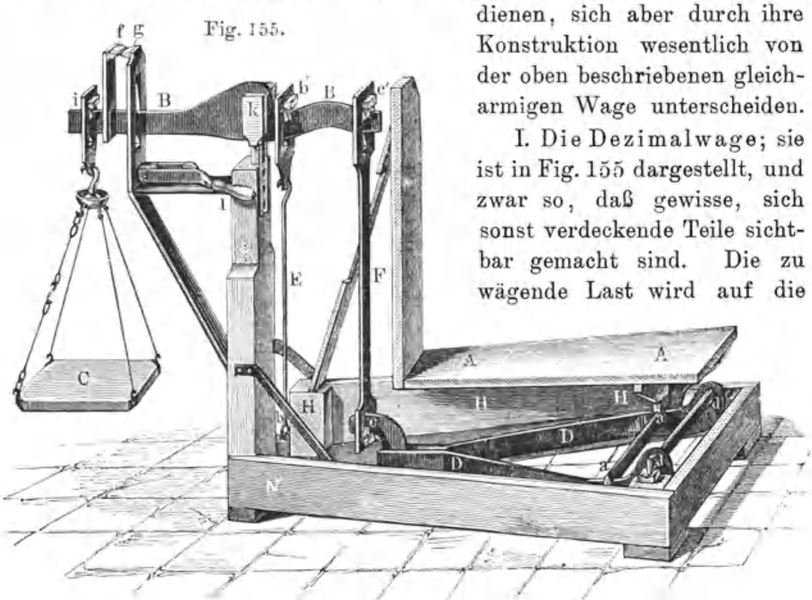
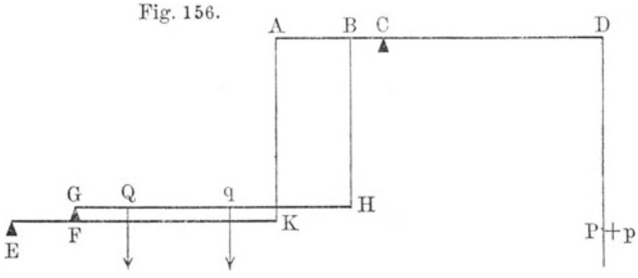


Fig. 156.



In der schematischen Fig. 156 stellt GH die Brücke dar, die sich einerseits auf den Punkt (eigentlich die Linie) F des einarmigen Hebels EK stützt, andererseits im Punkte B des zweiarmigen Hebels AD befestigt ist. Mit AB ist im Punkte A der Endpunkt K des Hebels EK verbunden und an D die Schale für die Gewichte. Q möge den Ort sowie das Gewicht des auf die Brücke gesetzten Körpers bedeuten, und P das Gewicht der Gewichtstücke auf der Wagschale. Es soll jetzt bewiesen werden, daß $Q = 10\,P$ ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$CD = 10\,BC; \quad \frac{EF}{EK} = \frac{BC}{AC} \quad \cdots\cdots \quad (18)$$

Die Last Q drückt auf G und F mit der Kraft $Q\frac{QH}{GH}$; ein Teil $\frac{EF}{EK}$ dieser Kraft wirkt auf K und A und gibt am Hebel das Moment $M_1 = Q\frac{QH}{GH}\cdot\frac{EF}{EK}\cdot AC = Q\cdot\frac{QH}{GH}BC$ (vgl. 18). Dieselbe Last wirkt auf H und B mit der Kraft $Q\frac{GQ}{GH}$ und liefert das Moment $M_2 = Q\frac{GQ}{GH}BC$. Die Summe der Momente $M_1 + M_2 = Q\frac{QH}{GH}\cdot BC + Q\frac{GQ}{GH}BC = Q\frac{BC}{GH}(QH + GQ) = Q\frac{BC}{GH}GH = Q\,.\,BC$ muß gleich dem Momente der Gewichte P sein, d. h. $Q\,.\,BC = P\,.\,CD$, woraus dann nach (18) $Q = 10\,P$ folgt.

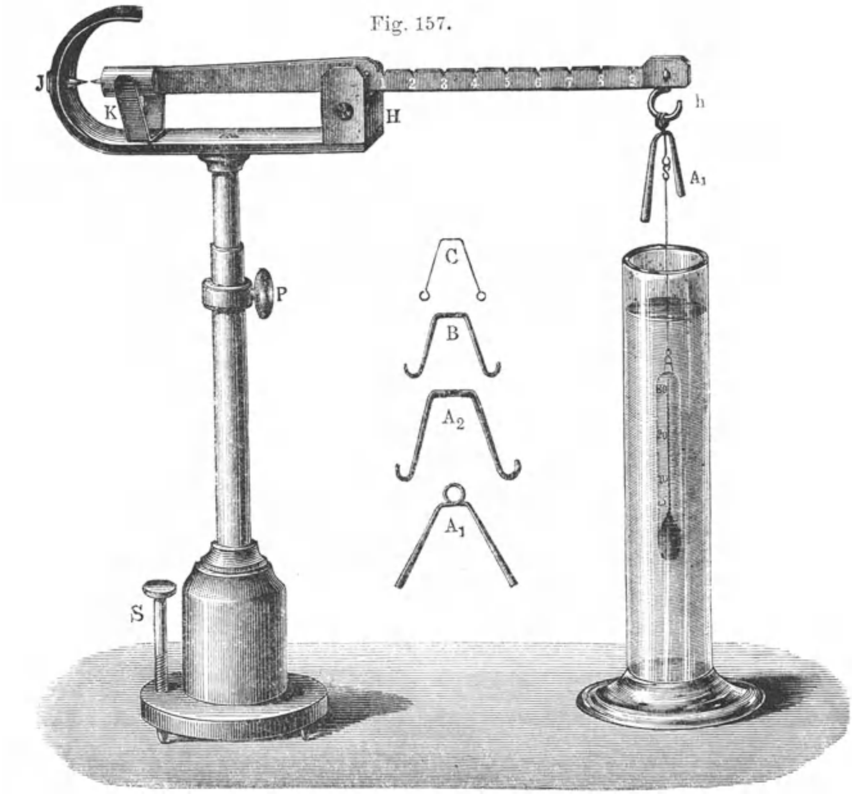
Ist das Gewicht der Brücke q das Gewicht der Wagschale p, so ist $(Q+q) = 10\,(P+p)$; da die unbelastete Wage aber im Gleichgewicht ist, so ist $q = 10\,p$, woraus wiederum $Q = 10\,P$ folgt.

Es gibt auch Wagen, bei denen $CD = 100\,BC$ ist; bei ihnen ist $Q = 100\,P$.

Die eben gegebene Beschreibung bezieht sich auf eine Dezimalwage älterer Konstruktion; auf die zahlreichen Abänderungen und Verbesserungen, welche für Zwecke der Technik und des Handels eingeführt worden sind, gehen wir nicht ein.

II. Die Westphalsche Wage, auch einarmige Wage genannt, eine Bezeichnung, die nicht zutreffend ist, dient zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeiten. Da wir später auf sie zurückkommen werden in dem Kapitel bei Besprechung der zur Messung der Dichte von Flüssigkeiten dienenden Methoden, so begnügen wir uns an dieser Stelle mit einer Beschreibung des in Fig. 157 abgebildeten Apparates. Der Hebel KHh schwingt um die Schneide eines Prismas in H. Der Arm Hh ist in 10 Teile geteilt; unmittelbar über den Teilstrichen befinden sich kleine Einschnitte, welche ebenso wie der Haken h dazu dienen, die bügelförmigen Gewichte, wie sie in A_1, A_2, B und C abgebildet sind, in bequemer Weise am Hebelarme anzubringen. A_1 und A_2 haben dasselbe Gewicht, B hat 0,1 und C 0,01 des Gewichtes von A_1.

Fig. 157.



Das Gewicht von A_1 stellt die Gewichtseinheit dar. Hiernach ist ersichtlich, daß die in Fig. 158 dargestellte Belastung 0,747, die in Fig. 159 dargestellte 1,846 Gewichtseinheiten entspricht. Der kleine Zylinder K dient als Gegengewicht; die Gleichgewichtslage wird dadurch gekennzeichnet, daß die an K befestigte Spitze der Spitze bei J genau gegenüberstehen muß. Mit Hilfe der Schraube P kann man den Wagebalken JHh höher oder niedriger stellen. Eine Fußschraube dient zur Horizontalstellung des Wagebalkens. Wir werden später sehen, wie man die Gewichte auswählt, um die Dichte von Flüssigkeiten bequem bestimmen zu können. Die Wage kann auch zur Ermittelung des Gewichtes dienen, welches dann aber durch die Einheit ausgedrückt wird, welcher das Gewicht von A_1 gleich ist. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Belastungen, welche die Wage ins Gleichgewicht bringen, einmal, wenn der Körper an *h* befestigt ist, und dann, wenn dies nicht der Fall ist. Die Differenz dieser beiden Belastungen gibt das gesuchte Gewicht des Körpers. Zur größeren Bequemlichkeit vermehrt man bisweilen die Zahl der der Wage beigegebenen Gewichtstücke.

Fig. 158.

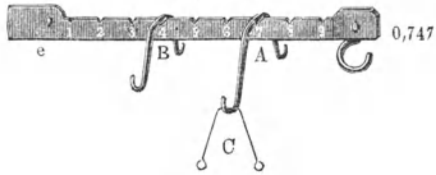
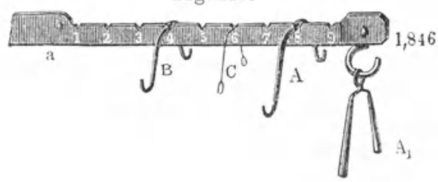


Fig. 159.



III. Mikrowagen. Apparate, welche dazu dienen, äußerst kleine Gewichte mit möglichster Genauigkeit zu messen, nennt man Mikrowagen. Solche Wagen wurden zuerst konstruiert von Warburg und Ihmori, Salvioni und von Nernst und Riesenfeld. Die Wage von Salvioni besteht aus einem dünnen horizontalen Glasfaden, der an einem Ende festgeklemmt ist; das andere Ende trägt eine Platinspitze, auf welcher ein kleiner Haken ruht, der zum Anhängen der zu messenden Gewichte dient. An dasselbe Ende ist noch ein zweiter gebogener Glasfaden angeschmolzen, der einen horizontalen Spinnwebfaden trägt. Die Größe des Gewichtes wird durch das mit Hilfe eines Mikroskopes gemessene Niedersinken des Spinnwebfadens gemessen. Mit dieser Wage hat Salvioni die Gewichtsabnahme von Moschus mit der Zeit nachgewiesen. Giesen hat diese Wage verbessert und benutzt, um die relative Dichte verschiedener Gase, das Gewicht von dünnen Wasserschichten auf Glas und Metallen und die Absorption verschiedener Gase durch Kohle zu messen. Die Mikrowage von Nernst und Riesenfeld besteht aus einem horizontal ausgespannten Quarzfaden, an welchen ein als Wagebalken dienender Platindraht ebenfalls horizontal, aber senkrecht zum Quarzfaden angekittet ist. Das eine Ende des Drahtes dient als Zeiger an einer Skala, während das andere Ende ein Schälchen trägt zur Aufnahme des zu wägenden Körpers. Während bei Salvioni die Biegung, ist es hier die Drillung eines dünnen Fadens, die zur Messung dient. Ferner haben Crémieu (1902), Brill und Bereton Evans (1908), Steele und Grant (1909) Mikrowagen konstruiert und untersucht.

Eine höchst sinnreiche Mikrowage haben Ramsay und Gray (1911) zur Bestimmung der Dichtigkeit des Nitons, d. h. der gasförmigen Radiumemanation, benutzt. Wir werden auf diese denkwürdige Untersuchung in der Lehre von den Gasen zurückkommen und begnügen uns daher hier mit einem kurzen Hinweis auf die Konstruktion der Wage, deren Idee von Steele und Grant herrührt. An das eine Ende eines sehr leichten Wagebalkens ist eine Quarzkugel (Volumen 22,2 cbmm) gehängt, an das andere der zu wägende Gegenstand. Der ganze Apparat befindet sich innerhalb eines luftdicht schließenden und mit Fenstern versehenen Kastens, welcher mit einer Luftpumpe verbunden ist. Die Einstellung der Wage geschieht durch Änderung des Luftdruckes in dem Kasten; der Druck wird durch ein Manometer gemessen. Eine Änderung des Druckes um 0,1 mm Quecksilberhöhe entspricht einer Änderung des Gewichtes um $3{,}6 \cdot 10^{-6}$ mg. Wird die Stellung des Wagebalkens mit Hilfe eines Spiegelchens beobachtet, so kann die Empfindlichkeit der Wage bis auf $2 \cdot 10^{-6}$ mg gebracht werden.

Die hier erwähnten Schriften sind an folgenden Stellen veröffentlicht:

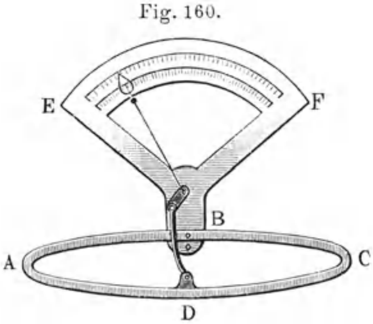
Warburg und Ihmori: W. A. **27**, 481, 1886.
Salvioni: Misura di masse comprese fra g 10^{-1} e g 10^{-6}; Sulla volati lizzazione del muschio. Atti R. Acc. Peloritana, Messina 1901.
Nernst und Riesenfeld: Chem. Ber. **36**, 2086, 1903.
Giesen: Annal. d. Phys. (4) **10**, 830, 1903.
Crémieu: Journ. de Phys. (4) **1**, 441, 1902.
Brill and Brereton Evans, Journ. Chem. Soc. **93**, 1442, 1908.
Steele and Grant: Proc. R. Soc. **82**, 580, 1909; Journ. de Phys. (4) **9**, 480, 1910.
Ramsay and Gray: Journ. de Phys. (5) **1**, 429, 1911; Stark's Jahrb. **8**, 9, 1911; **9**, 499, 1912.

§ 9. Dynamometer. Dynamometer heißen Apparate, die zur Messung von Kräften dienen; letztere wirken unmittelbar auf den Apparat ein, rufen in ihm bestimmte Formenänderungen hervor und veranlassen das Auftreten elastischer Gegenkräfte, welche die ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen suchen. Da die elastischen Gegenkräfte um so größer werden, je mehr die Gestalt des Körpers geändert wird, und letztere sich nicht weiter verändert, wenn die gesuchte, von außen wirkende Kraft die inneren elastischen Kräfte im Gleichgewicht hält, so kann die Formenänderung als Maß für die angreifende Kraft dienen.

Zur Kalibrierung des Dynamometers läßt man auf ihn eine Reihe von Kräften vou bekannter Intensität wirken oder einfacher eine Reihe von Gewichten, z. B. 1, 2, 3 Gramm bzw. Kilogramm, je nach der Beschaffenheit und Bestimmung des Dynamometers, und merkt sich die hierdurch hervorgerufenen Formenänderungen. Es ist ohne weiteres klar, daß ein kalibriertes Dynamometer auch zur Gewichtsbestimmung von Körpern dienen und somit eine Wage ersetzen kann, nur kann es sich in bezug auf die Genauigkeit seiner Angaben mit letzterer nicht vergleichen. Die gewöhnliche Federwage ist ein einfaches Dynamometer.

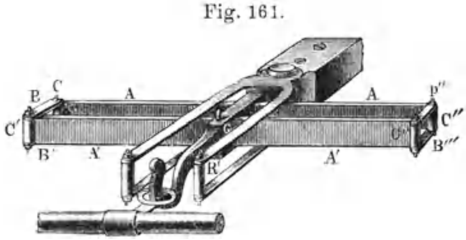
Es gibt eine sehr große Zahl verschiedenartiger Dynamometer, welche eine bogenförmige Feder enthalten; eines derselben ist in Fig. 160 abgebildet. Man läßt die Feder von der gesuchten Kraft zusammendrücken, d. h. beide Hälften ABC und ADC einander näher bringen. Wie die Figur zeigt, wirkt ADC auf den einen Arm eines gebrochenen Hebels, während der andere Arm aus einem Zeiger besteht, dessen Spitze sich längs dem Skalabogen EF bewegen kann. Die eine Hälfte der Feder muß befestigt werden. Man kann übrigens den Apparat auch in C befestigen und die Kraft auf A in der Richtung der Geraden CA wirken lassen. Entfernen sich A und C voneinander, so nähern sich B und D, und der Zeiger wird in Bewegung gesetzt. Auf dem Bogen EF sind zwei Skalen aufgetragen, entsprechend den beiden verschiedenen Gebrauchsanwendungen des Apparates.

Fig. 160.



Größere Genauigkeit erzielt man mit dem Dynamometer von Poncelet und Morin, das in Fig. 161 dargestellt ist. Zwei stählerne Lamellen AA und $A'A'$ sind miteinander durch die Scharniere C, C', C'' und C''' verbunden, um welche sich ihre Enden drehen können, wenn die Lamellen selbst sich biegen. Die Lamelle AA ist befestigt, an der anderen befindet sich ein Haken zum bequemen Anbringen der Kraft (eines Gewichtes, eines vorgespannten Pferdes usw.). Außerdem ist mit $A'A'$ ein Zeichenstift, der sich in R befindet, verbunden; dieser zeichnet auf einem Papierstreifen eine Linie, deren Länge als Maß der gesuchten Kraft dient. Da die angreifende Kraft sehr nahe proportional der Verschiebung des Punktes R ist, so hat man bloß ein für allemal zu bestimmen, welcher Länge der Verschiebungslinie eine bestimmte Kraft — etwa 100 kg — entspricht, um den Apparat ohne weiteres benutzen zu können. Ein Vorlesungsdynamometer ist von N. A. Hesehus[1]) konstruiert worden.

Fig. 161.



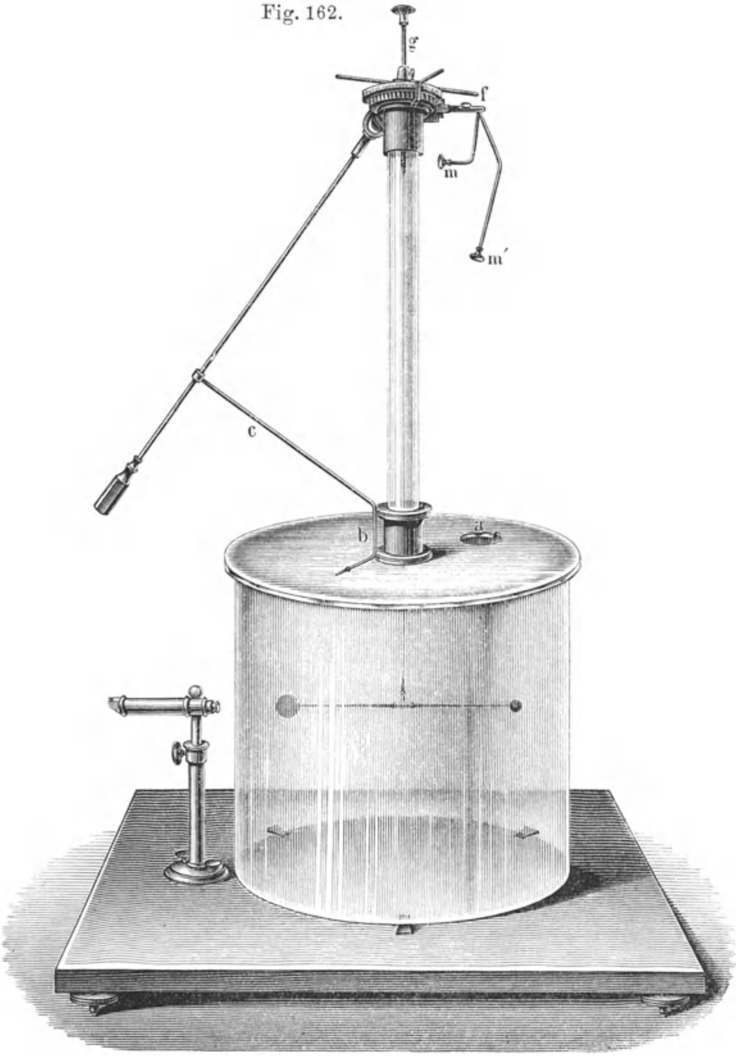
Zur Messung von Drucken dienen Apparate, die man Manometer nennt. Wir werden sie später kennen lernen. Eine besondere, sehr bemerkenswerte Art von Manometern, welche auf der Änderung des elektrischen Widerstandes von Leitern (z. B. Hg) durch Druck beruhen, werden wir im Bd. IV beschreiben.

---

[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **17**, 59, 1885.

§ 10. Unifilare Drehwage. Dieser wichtige Apparat dient zum Messen von Anziehungs- oder Abstoßungskräften (z. B. bei der allgemeinen Anziehung, Anziehung und Abstoßung von Magneten oder elektrisierten Körpern). Bisweilen bildet er keinen gesonderten Apparat,

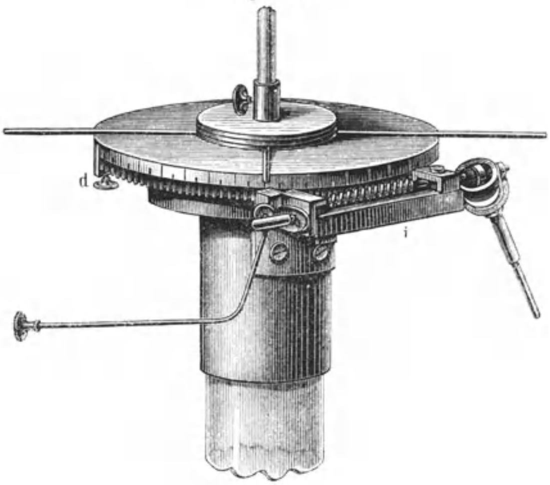
Fig. 162.



sondern bloß einen Teil anderer Instrumente. In Fig. 162 ist eine der vielen verschiedenartigen Formen dargestellt.

Der wichtigste Teil der Drehwage ist ein horizontaler Körper, gewöhnlich von der Gestalt eines Stäbchens, der an einem dünnen, oberhalb seines Schwerpunktes befestigten Faden hängt. Der letztere kann durch einen Metalldraht ersetzt sein (etwa aus Aluminium, Silber, Platin), sonst besteht er aus einem Cocon- oder Glasfaden; in letzterer Zeit benutzt man Quarzfäden (nach dem Vorschlag des englischen Physikers Boys). Der horizontale Körper selbst kann, je nach den Messungen, für welche die Drehwage bestimmt ist, sehr verschieden gestaltet sein: entweder ist er ein leichtes Stäbchen, das an einem oder beiden Enden Kügelchen trägt, oder ein Magnet oder eine flache längliche Lamelle usw.

Fig. 163.



Er befindet sich in einem viereckigen oder zylindrischen Glasgefäß, auf dessen Deckel sich ein vertikales Glasrohr erhebt, in welchem der Faden herabhängt. Im Deckel ist noch eine Öffnung *a* angebracht, durch welche man einen Körper (Magnet, elektrisiertes Kügelchen) einführen kann, dessen Abstoßung auf das horizontale Stäbchen gemessen werden soll.

Das obere Ende des Fadens ist in der Mitte des Deckels der vertikalen Röhre befestigt. Der Deckel kann um meßbare Winkel gedreht werden; außerdem ist gewöhnlich noch eine Vorrichtung zum Heben oder Senken des Fadens angebracht. In Fig. 163 ist der obere Teil der Röhre in vergrößertem Maßstabe abgebildet. Der Faden ist am Stabe *g* (Fig. 162) befestigt, welcher gehoben, gesenkt, gedreht und in gehöriger Lage mittels einer Klemmschraube, die auch in der Figur sichtbar ist, befestigt werden kann. Der obere Teil der Röhre ist von einer Messingfassung umgeben, an deren festem Teile sich der Index *d* befindet. Der Rand des beweglichen Teiles besteht aus zwei Hälften; die obere Hälfte ist in Gerade geteilt, die untere ist mit Zähnen versehen, in welche die endlose, mittels eines Hookeschen Schlüssels aus einiger Entfernung in Bewegung zu setzende Schraube hineingreift. Will man den beweglichen Teil schnell um einen größeren Winkel drehen, so rückt man die Schraube ohne Ende mit Hilfe des Griffes m, der auf eine besondere exzentrische Scheibe wirkt, vom Zahnrade ab und dreht den Deckel an den Stäben ff um den gewünschten Winkel.

Das horizontale Stäbchen dreht sich während der Messungen um den Faden. Den Winkel dieser Drehung kann man messen; zu dem Zweck ist bei einigen Apparaten ein Streifen mit Gradteilung von außen auf das Glasgehäuse geklebt oder es ist der Glasdeckel mit einer Kreisteilung versehen. Indem man von der Seite oder von oben her visiert, erhält man einen angenäherten Wert für den Drehungswinkel. Bei genaueren Meßinstrumenten ist der bewegliche Teil mit einem kleinen Spiegel versehen und wird der Drehungswinkel nach der Spiegelablenkungsmethode (vgl. S. 297) bestimmt. Kleine Drehungen können auch von außen vermittelst eines Fernrohres direkt beobachtet werden (s. Fig. 164).

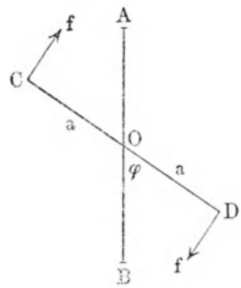
Sind Faden und Stäbchen (falls dieses keine Magnetnadel ist) sich selbst überlassen, so nimmt das Stäbchen eine bestimmte Gleichgewichtslage an, welche dem Normalzustande des Fadens, in welchem er völlig ungedrillt ist, entspricht. Wird nun ein Ende des Fadens um einen gewissen Winkel tordiert, so befindet sich derselbe nicht mehr in seinem Normalzustande — er ist eben tordiert — und es entstehen in ihm innere elastische Kräfte, die den Normalzustand wieder herzustellen suchen, d. h. das untere freie Ende und den daran hängenden Körper zurückzudrehen suchen. Auf dieses Ende und auf den Körper wirkt also nun ein Kräftepaar, dessen Moment wir mit M bezeichnen wollen. Je größer der Torsionswinkel φ ist, um so größer ist das Moment M des Kräftepaares. Für sehr dünne Drähte ist das Moment M dem Winkel proportional und bleibt diese Proportionalität für Winkel bis zu einigen Tausend Grad streng richtig. Wir können mithin setzen

$$M = C\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

wo C dem Zahlenwert entspricht, welchen das Moment des Kräftepaares annimmt, wenn das freie Fadenende um die Winkeleinheit tordiert wird. Um den Faden in dem Zustande zu erhalten, welchen er bei Drehung um den Winkel φ annimmt, muß man auf ihn ein Kräftepaar wirken lassen, dessen Moment offenbar gleich dem Moment M der elastischen Kräfte ist. Hieraus folgt, daß Formel (19) auch das Moment M des von außen wirkenden Kräftepaares bestimmt, welches man auf das freie Fadenende wirken lassen muß, damit der Faden um den Winkel φ tordiert bleibt; C ist numerisch gleich dem Moment des Kräftepaares, welches eine Torsion um die Winkeleinheit bewirkt.

Den Zahlenwert des Koeffizienten C kann man aus der Schwingungsdauer T des aufgehängten Stäbchens finden, wenn man dasselbe zur Seite dreht und darauf sich selbst überläßt. AB (Fig. 164) sei die Lage des Stäbchens, wenn der in O befestigte Faden vollkommen untordiert ist. Ist das Stäbchen um den Winkel φ gedreht und dadurch in die Lage CD gebracht, so wirkt auf dasselbe ein Kräftepaar, dessen Moment $M = C\varphi$ ist. Dieses Kräftepaar kann man durch ein beliebiges Kräftepaar ff ersetzen unter der Bedingung, daß $2fa = M$ ist, wo $a = CO = OD$ ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (19), so wird

Fig. 164.



$$f = \frac{C}{2a}\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

wo man rechts das Vorzeichen (—) setzen könnte, um anzudeuten, daß f nach der Seite der abnehmenden Winkel φ wirkt. Somit wirkt auf die Hälfte OD des Stäbchens eine Kraft f, die dem Winkel φ proportional ist. Dieser Vorgang ist also identisch mit dem, welcher bei sehr kleinen Schwingungen des physischen Pendels auftritt. Für das Pendel gilt allgemein die Beziehung $f = P \sin\varphi$, wo P sein Gewicht bedeutet; für sehr kleine Winkel φ geht diese Formel über in

$$f = P\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

(richtiger $f = -P\varphi$), welche zu dem Gesetz der isochronen Schwingungen führt. In unserem Falle ist f proportional φ auch für größere Winkel; die Torsionsschwingungen der unifilaren Drehwage stellen daher ein bemerkenswertes Beispiel von Isochronismus dar: für kleine und große Ausschläge ist die Schwingungsdauer T die gleiche, wenn nur der Faden so dünn ist, daß auch für seine Grenzlagen die Formel (19) in Geltung bleibt.

Für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels hatten wir die Formel

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Pa}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

gefunden, wo K das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Drehungsachse, P sein Gewicht und a der Abstand des Angriffspunktes der Kraft P (des Schwerpunktes) von der Drehungsachse bedeutet, vgl. (42) S. 254. Bezeichnet man nun mit K das Trägheitsmoment des ganzen Stäbchens AB in bezug auf seine Drehungsachse (die Achse des Fadens) und wendet man (22) auf die Hälfte OD des Stäbchens an, so muß man anstatt K jetzt $\frac{1}{2}K$ setzen. Nach (21) und (20) ist

$P = \frac{f}{\varphi} = \frac{C}{2a}$. Formel (22) gibt demnach

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}K}{\frac{C}{2a}a}} = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Hieraus erhält man

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

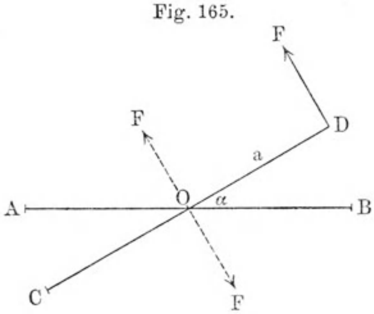
Diese überaus wichtige Formel liefert den Koeffizienten C, d. h. das Moment des Kräftepaares, welches das untere Fadenende um die Winkeleinheit tordiert. Die Methoden, das Trägheitsmoment K eines Pendels zu bestimmen, wenn dasselbe nicht aus seiner geometrischen Form berechnet werden kann (S. 98), sollen weiter unten (Kap. VI, § 4, S. 346) besprochen werden. Eine analoge Herleitung liefert K für den horizontalen Teil der Drehwage.

Mit Hilfe der unifilaren Drehwage kann die Kraft F gemessen werden, welche auf eines der Enden des Stäbchens wirkt. Das Stäbchen befinde sich anfangs in der Ruhelage bei untordiertem Faden. Wir drehen es um den Winkel α in irgendeiner Richtung; diese Richtung wollen wir als die positive bezeichnen. Tordieren wir dann auch das obere Fadenende, so rechnen wir diesen zweiten Drehungswinkel β positiv in der Richtung, welche der positiven Richtung für α entgegengesetzt ist. In diesem Falle ist die Torsion φ des Fadens gleich

$$\varphi = \alpha + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

und das Moment des Kräftepaares, welches das Stäbchen in der Ruhelage erhält, ist gleich $C\varphi = C(\alpha + \beta)$. Es sei nun AB (Fig. 165) die ursprüngliche, CD die abgelenkte Stellung des Stäbchens und $\angle\, BOD = \alpha$. Die Kraft F wirke auf den Punkt D senkrecht zum Stäbchen, wobei $OD = a$ sei. Wir denken uns bei O zwei Kräfte F angreifend, die einander gleich und parallel zu DF sind. Eine derselben, welche die Richtung der Kraft DF hat, wird vom Gewicht des Stäbchens aufgehoben und ruft nur eine kleine seitliche Verschiebung des Punktes O hervor, die andere Kraft bildet mit DF ein Kräftepaar, dessen Moment gleich Fa ist. Damit das Stäbchen im Gleichgewicht

Fig. 165.

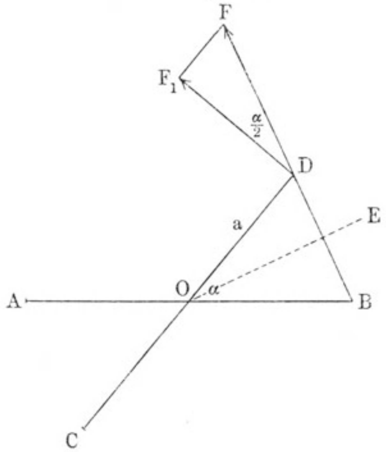


bleibt, muß $Fa = C\varphi$ sein, woraus sich ergibt

$$F = \frac{C}{a}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Einen anderen Fall haben wir vor uns, wenn die Kraft F in der Richtung der Verbindungsgeraden der Punkte B und D wirkt (Fig. 166), d. h. wenn sich in B ein Körper befindet, welcher das Ende D des Stäbchens abstößt. F_1 sei die Komponente der Kraft F, welche senkrecht zu OD wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist jetzt $F_1 a = C\varphi$; es ist aber $F_1 = F \cos\frac{\alpha}{2}$, weil $OE \perp DB$, also $\angle FDF_1 = \angle EOD$ ist, als Winkel mit zueinander senkrechten Schenkeln. Wir haben folglich $Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi$ und hiernach

Fig. 166.



$$F = \frac{C\varphi}{a\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \quad (27)$$

Soll das Verhältnis der beiden Kräfte F und F' gefunden werden, welche das Stäbchen um α und α' drehen, während die ganzen Drehungswinkel φ und φ' seien, dann haben wir außer (27) noch die Gleichung $F' = \dfrac{C\varphi'}{a\cos\frac{\alpha'}{2}}$, mithin für das Verhältnis

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Wenn das obere Fadenende nicht tordiert wird ($\beta = 0$), so ist $\varphi = \alpha$ und $\varphi' = \alpha'$. Die Formeln (26), (27) und (28) sind unter der Voraussetzung erhalten worden, daß außer der Kraft F und dem Kräftepaar, das den Faden zurückzudrehen strebt, keine weitere Kraft oder kein Kräftepaar auf das Stäbchen einwirkt. Es gibt jedoch Fälle, wo bei Drehung des Stäbchens außer dem Kräftepaar M noch ein weiteres Kräftepaar auftritt, welches ebenfalls das Stäbchen in die frühere Lage zurückzuführen sucht, und wo das Moment M' dieses zweiten Kräftepaares eine Funktion des Winkel α ist. Dies tritt z. B. ein, wenn das horizontale Stäbchen der unifilaren Drehwage eine Magnetnadel ist, also seine Ruhelage mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt.

Wir werden sehen, daß M' in diesem Falle proportional $\sin\alpha$ ist. Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des Stäbchens nimmt dann im allgemeinen folgende Gestalt an

$$Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi + M' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Man kann bei Benutzung der Drehwage den Drehungswinkel φ beliebig groß machen, indem man das obere Fadenende beispielsweise um ein Vielfaches von 360^0 dreht, wobei allerdings der Faden so dünn sein muß, daß Formel (19) auch dann noch in Geltung bleibt. Den Winkel α sucht man nicht größer als 60^0 zu machen.

Die Empfindlichkeit der Drehwage wird durch eine Größe, die umgekehrt proportional dem Koeffizienten C ist, bestimmt, denn je kleiner das Moment des Kräftepaares ist, welches eine bestimmte Drehung hervorruft, um so empfindlicher ist der Apparat. Auf hierher gehörige Einzelheiten soll an einer anderen Stelle eingegangen werden; hier sei nur bemerkt, daß die Empfindlichkeit der Drehwage um so größer ist, je länger und dünner der Faden ist und je weniger der Stoff, aus dem er besteht, sich der Drehung widersetzt.

§ 11. Die bifilare Drehwage. Von der unifilaren Drehwage unterscheidet sich dieser Apparat nur dadurch, daß das horizontale Stäbchen AB (Fig. 167) an zwei Fäden CE und DF hängt. Um den allgemeinsten Fall zu behandeln, wollen wir annehmen, daß sie einander nicht parallel sind.

Offenbar muß beim Gleichgewicht AB in einer durch E und F gehenden Vertikalebene liegen oder, was dasselbe bedeutet, AB muß

Fig. 167.

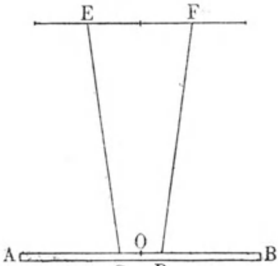
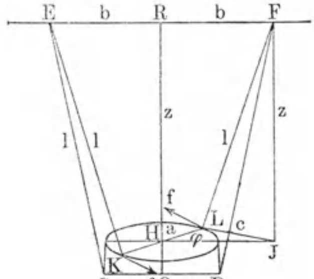


Fig. 168.



parallel EF sein. Wenn man AB um einen gewissen Winkel φ, um den Punkt O als Mittelpunkt dreht (Winkel φ heiße der Analogie halber ebenfalls der Torsionswinkel), so heben sich die Punkte D und C, denn alle Punkte des Horizontalkreises vom Durchmesser CD stehen von F weiter ab als C und D. Somit hebt sich AB bei Tordierung des Doppelfadens, und dies sucht das Gewicht P des Stäbchens zu verhindern. Das tordierende Kräftepaar, dessen Moment wir mit M bezeichnen, wird mithin vom Gewicht P im Gleichgewicht gehalten. Den Einfluß der geringfügigen Tordierung der Fäden und ihres Gewichtes kann man vernachlässigen.

Wir suchen die Gleichgewichtsbedingung für das Stäbchen AB, wenn es vom Kräftepaar M um den Winkel φ gedreht ist. In Fig. 168 ist der mittlere Teil CD des Stäbchens in normaler Stellung vergrößert dargestellt; es sei $CO = OD = a$, $ER = RF = b$, OHR eine vertikale Gerade und $CE = DF = l$ die Länge der Fäden.

Durch Einwirkung des Kräftepaares hat das Stäbchen die Lage KL erhalten, es hat sich um den Winkel $JHL = \varphi$ gedreht und um die Höhe OH gehoben. Wir ziehen nun durch F die vertikale Gerade FJ und verbinden die Punkte J und L miteinander; es sei $RH = FJ = z$ und $JL = c$; offenbar ist $HJ = b$ und daher

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos\varphi.$$

Ferner ist $\overline{FJ}^2 = \overline{FL}^2 - \overline{LJ}^2$, d. h. $z^2 = l^2 - c^2$, folglich

$$z^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2\,ab\,\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Das von außen wirkende Kräftepaar M denken wir uns durch zwei Kräfte f ersetzt, welche an L und K angreifen, und zwar senkrecht zu KL, wobei $2\,af = M$ ist. Das Stäbchen befinde sich in der Lage KL im Gleichgewicht. Um einen Zusammenhang zwischen M und φ zu finden, nehmen wir an, das Stäbchen drehe sich noch weiter um den kleinen Winkel $\Delta\varphi$ und hebe sich hierbei über H hinaus um eine minimale Größe, die wir, da sich z vermindert, mit $-\Delta z$ bezeichnen wollen. Das Kräftepaar leistet bei dieser geringfügigen Drehung eine Arbeit gleich $M\Delta\varphi$ (S. 108), welche gleich der zum Heben der Last P auf die Höhe Δz aufgewandten Arbeit sein muß. Hieraus folgt

$$M\Delta\varphi = -P\Delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Aus (30) erhält man

$$z\Delta z = -ab\,\sin\varphi \,.\, \Delta\varphi \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Hieraus entnehmen wir jetzt Δz, setzen es in (31) ein und kürzen durch $\Delta\varphi$. So erhalten wir

$$M = \frac{ab}{z} P\,\sin\varphi.$$

Die Größe OH, um welche das Stäbchen sich hebt, ist immer sehr klein, daher kann man in der letzten Formel l anstatt z setzen; dann ist

$$M = \frac{ab}{l} P\,\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

und im Falle, daß die Fäden einander parallel sind ($b = a$)

$$M = \frac{a^2}{l} P\,\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor von $\sin\varphi$, der für die gegebene Drehwage maßgebend ist, mit C, so wird

$$M = C \sin\varphi \qquad (35)$$

Vergleicht man diese Formel mit Formel (19), $M = C\varphi$, welche für die unifilare Drehwage galt, so sieht man, daß das Moment des Kräftepaares, welches das Stäbchen zurückzuführen sucht, für die unifilare Drehwage proportional dem Torsionswinkel, für die bifilare Drehwage proportional dem Sinus des Torsionswinkels ist. Im weiteren ergibt sich, daß der Proportionalitätsfaktor von der Länge und gegenseitigen Lage der Fäden und dem Gewicht des Stäbchens abhängt. Die Empfindlichkeit der bifilaren Drehwage ist um so größer, je kleiner C ist; sie ist also proportional der Länge l der Fäden, indirekt proportional dem Produkt der Abstände der Fadenenden oder dem Quadrat des Fadenabstandes bei parallelen Fäden und endlich indirekt proportional dem Gewicht des horizontalen Stäbchens.

Formel (35) zeigt, daß M zugleich mit φ bis $\varphi = 90^0$ anwächst. Weiter darf man den Doppelfaden nicht tordieren, da sich sonst das Stäbchen im labilen Gleichgewicht befindet; dann dreht es sich fast immer um den Winkel $\varphi = 180^0$, wobei die beiden Fäden einander berühren und keinen Doppelfaden mehr bilden.

Der Doppelfaden befindet sich gewöhnlich, ebenso wie der einfache Faden der unifilaren Drehwage, in einem Glasgehäuse bzw. einer Glasröhre, deren Deckel gedreht werden kann. Haben α, β und φ dieselbe Bedeutung wie früher, so ist wiederum [vgl. (25)] $\varphi = a + \beta$. Wirkt auf das Stäbchen eine Kraft F (vgl. Fig. 165), senkrecht zu demselben mit einem Angriffspunkt in der Entfernung a von der Mitte des Stäbchens [es ist dieses a nicht dasselbe, wie in (32) und (34)], so haben wir statt (26) die folgende Beziehung

$$F = \frac{C}{a} \sin\varphi \qquad (36)$$

Hat jedoch die Kraft F die Richtung der Verbindungsgeraden zwischen der Anfangslage und der neuen Lage desjenigen Punktes des Stäbchens, welches von seinem Mittelpunkte um a absteht, so haben wir an Stelle von (27)

$$F = \frac{C \sin\varphi}{a \cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (37)$$

Für das Verhältnis der beiden Kräfte erhalten wir analog (28):

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (38)$$

Der Drehungswinkel α kann, wie bei der einfachen Drehwage, gemessen werden mittels einer am Glasgehäuse oder auf dem Deckel des Gehäuses angebrachten Skala, oder nach der Methode der Spiegelablenkung. Der Koeffizient C in Formel (35) kann auch bei der bifilaren Drehwage durch Beobachtung der Schwingungsdauer T gefunden werden. Lenkt man das Stäbchen um einen gewissen Winkel aus der Ruhelage ab und überläßt es sodann sich selbst, so gerät es in Schwingungen, wobei es sich in jedem gegebenen Augenblick unter der Wirkung eines Kräftepaares befindet, dessen Moment $M = C \sin \varphi$ ist. Denkt man sich dieses Kräftepaar durch zwei Kräfte f (Fig. 164) ersetzt, wobei $2fa = M$ ist, so erhält man

$$f = \frac{C}{2a} \sin \varphi \quad \dots \dots \dots \dots \quad (39)$$

Für das Pendel war $f = P \sin \varphi$, somit ist das Schwingungsgesetz der bifilaren Drehwage identisch mit dem Schwingungsgesetz des Pendels. Hieraus folgt, daß, im Gegensatz zur einfachen Drehwage, die **Schwingungen der bifilaren Drehwage nur für sehr kleine Amplituden isochron sind.** Setzt man in Formel (22), wie früher, $\frac{K}{2}$ anstatt K und $\frac{C}{2a}$ anstatt P, vgl. (39), so erhält man wiederum

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (40)$$

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (41)$$

wo K das Trägheitsmoment des ganzen Stäbchens in bezug auf seine Drehungsachse und T die Schwingungsdauer für sehr kleine Amplituden ist. Wenn auf das Stäbchen außer dem Gewicht P, welches das Moment $C \sin \varphi$ hervorruft, noch ein Kräftepaar wirkt, welches das Stäbchen in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt und das Moment M' hat, so ist die Gleichgewichtsbedingung für die bifilare Drehwage entsprechend (29)

$$Fa \cos \frac{\alpha}{2} = C \sin \varphi + M' \quad \dots \dots \dots \quad (42)$$

Sechstes Kapitel.

Messung der Zeit.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über Zeitmessung. Die Zeitmessung kann zweierlei Art sein; entweder man hat die „wahre Zeit" zu finden, d. h. den Zeitpunkt, wo irgendeine Erscheinung auftritt, oder — die Größe des Zeitintervalls, welches zwischen zwei Augenblicken liegt. Strenggenommen bestimmen wir auch im ersten Falle ein gewisses Zeitintervall, nämlich den Abstand von einem nicht von uns gewählten und daher willkürlichen, sondern allgemein festgesetzten Zeitpunkt, von dem an die Zeitrechnung beginnt (Jahr, Monat, Tag, ferner Stunde, Minute und Sekunde von der letzten unteren Kulmination der mittleren Sonne gerechnet) bis zu dem Zeitpunkt, dessen „wahre Zeit" wir suchen. Indessen sind die Bedingungen, denen die Apparate in diesen beiden Fällen genügen müssen, durchaus verschieden. Bei den Messungen der ersten Art braucht man Uhren, welche die wahre Zeit mit großer Genauigkeit ergeben oder für welche die Korrektion bekannt ist, durch deren Anbringung man aus den fehlerhaften Angaben der Uhren die wahre Zeit finden kann. Im zweiten Falle braucht man nur eine richtige Zählvorrichtung, während die von derselben angegebene Zeit auch unrichtig sein kann. Messungen ersterer Art kommen in der Physik relativ selten vor, sie spielen eine Hauptrolle bei astronomischen Beobachtungen. In der Meteorologie wird auch die wahre Zeit registriert, doch genügen hierfür die Angaben einer „richtig gehenden" gewöhnlichen Uhr; nur selten, etwa bei Beobachtung von magnetischen Gewittern, Erdbeben usw. ist eine genaue Kenntnis der wahren Zeit erforderlich.

Als Zeiteinheit wird die Sekunde benutzt, d. h. der 86 400. Teil der Dauer eines mittleren Sonnentages. Ein Sterntag enthält nur 86 164,091 Sekunden. Zur Zeitmessung ist ein Apparat erforderlich, bei welchem irgendeine periodische Bewegung vor sich geht, deren Periodendauer entweder gleich einer Sekunde oder gleich einem einfachen Teil oder Vielfachen einer Sekunde ist. Beispiele derartiger Apparate sind die Pendeluhren, Taschenuhren, größere Uhren in horizontalen Gehäusen usw. Uhren mit besonders genauem Gang, bei denen also die Dauer einer Schwingung möglichst konstant ist, heißen Chronometer. Man unterscheidet Uhren mit Federwerk und mit Gewichten (Sonnen-, Sanduhren u. dgl. sollen hier nicht betrachtet werden). Die Uhren müssen aufgezogen werden, und man hat es sich zur Regel zu machen, die Uhren mit Federwerk in gleichen Zeitabständen aufzuziehen, etwa alltäglich um dieselbe Stunde.

Die Uhren, welche zur Zeitmessung bei physikalischen Arbeiten dienen, müssen ganze oder halbe Sekunden laut angeben. Soll das Zeitintervall zwischen zwei Vorgängen gemessen werden, so hat der Beobachter zunächst das Datum, Stunde und Minute sich zu merken, und darauf für sich die Sekunden zu zählen, während er zugleich seine Aufmerksamkeit auf den Augenblick richtet, wo zunächst die eine Erscheinung, und darauf auf den Augenblick, wo die zweite eintritt. Bei einiger Übung gelingt es, selbst Zehntel einer Sekunde nach dem Gehör zu bestimmen, falls die beobachteten Erscheinungen recht plötzlich auftreten. In diesem Falle dient die Uhr als Registrierapparat.

Es gibt besondere, recht bequeme Mechanismen, die dazu dienen, den Zeitabschnitt zwischen den Momenten A und B des Entstehens zweier Erscheinungen oder der Dauer einer Erscheinung (dann bedeutet A den Beginn, B das Ende derselben) zu bestimmen. Es sind das Taschenuhren mit einem besonderen Zeiger, der in der Minute einen vollen Umlauf um das in 300 Teile (entsprechend je 0,2 Sekunden) geteilte Zifferblatt ausführt. Beim Druck auf einen Knopf stellt sich der Zeiger auf den Nullpunkt der Kreisteilung ein; drückt man abermals (im Augenblick A), so beginnt der Zeiger sich zu bewegen, drückt man zum drittenmal (im Augenblick B), so wird er angehalten. Der von diesem Zeiger durchlaufene Weg bestimmt den gesuchten Zeitabstand. Drückt man zum viertenmal auf den Knopf, so springt der Zeiger wiederum auf den Nullpunkt der Kreisteilung zurück. Es gibt auch verwickeltere Registriervorrichtungen mit zwei Zeigern, die in gewissen Fällen von großem Nutzen sind.

Zu den Zeitzählern gehört auch das bekannte Metronom, welches bisweilen, wenn es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, auch bei physikalischen Versuchen benutzt wird.

Die zu physikalischen Arbeiten dienenden Wanduhren haben meist ein Sekundenpendel, d. h. ein Pendel, dessen Schwingungsdauer gleich einer Sekunde ist. Die Bewegungen des Pendels werden durch den Zug eines gehobenen Gewichtes aufrecht erhalten, oder durch eine aufgewickelte Feder, oder endlich durch leichte Stöße eines anderen Sekundenpendels, wobei man sich elektrischer Ströme zur Übertragung der Stöße bedient. Solche Uhren heißen elektrische.

Einen vollkommen richtigen Gang des Pendels zu erreichen, ist eine sehr schwierige Aufgabe. Unter anderen hat Lippmann (Journ. de Phys. 1896, S. 429) eine geistreiche Methode zur elektrischen Übertragung der Pendelbewegung erdacht, bei welcher keinerlei Störungen in der Bewegung des Pendels entstehen.

Die Temperatur hat einen großen Einfluß auf den Gang der Uhr; so nimmt z. B. bei Temperaturzunahme auch die Pendellänge zu, infolgedessen vergrößert sich die Schwingungsdauer (die Uhr geht nach). Um den Einfluß der Temperatur zu beseitigen (Kompensation), konstruiert man das Pendel so, daß sein Schwingungsmittelpunkt bei Temperaturänderung selbst unverändert bleibt. Ein solches Pendel heißt Kompensationspendel. In Fig. 169 ist ein oft gebrauchtes sogenanntes Rostpendel abgebildet: an der federnden Lamelle ist ein horizontaler Träger ab befestigt, an dessen Ende zwei Stahlstäbe R geschraubt sind. Diese sind unten an einem zweiten Träger fg befestigt, auf den zwei Messingstäbe T geschraubt sind. Ein dritter horizontaler Träger cd verbindet die Enden der Messingstäbe und trägt in der Mitte einen Stahlstab S, an welchem sich die Linse befindet. Nimmt die Temperatur zu, so senkt sich die Linse, da sich die drei parallelen Stahlstäbe verlängern und hebt sich zugleich durch Ausdehnung der beiden Messingstäbe. Der Koeffizient der thermischen Ausdehnung des Messings ist jedoch 1,74 mal größer als des der Stahls. Gibt man den Stäben eine entsprechende Länge, so kann man es erreichen, daß der Schwingungsmittelpunkt fast vollkommen unbeweglich bleibt, folglich auch die Schwingungsdauer sich bei Änderung der Temperatur nicht ändert. Statt Stahl und Messing können Eisen und Zink genommen werden.

Fig. 169.

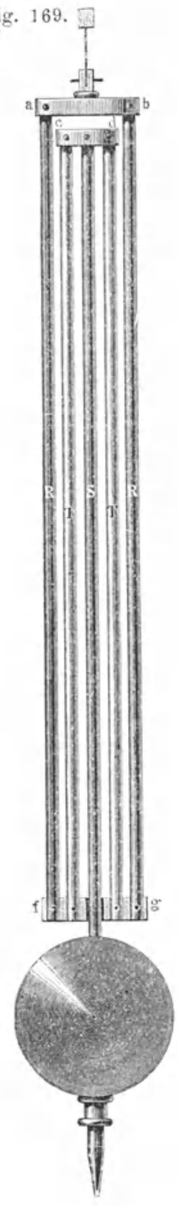
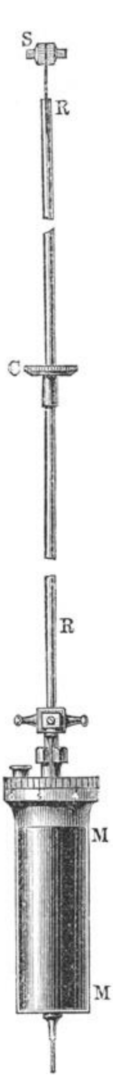


Fig. 170.



In Fig. 170 ist ein anderes Kompensationspendel abgebildet; es besteht aus einem Stabe RR, an welchem ein Glaszylinder MM mit Quecksilber hängt. Die thermische Ausdehnung des Quecksilbers ist größer als die des Glases, infolgedessen hebt sich das Niveau des Quecksilbers bei Temperatursteigerung und kompensiert auf diese Weise die Verlängerung des Stahlstabes. — Die Größe des Luftdruckes hat ebenfalls einen, wenn auch sehr geringen Einfluß auf die Schwingungsdauer des Pendels [1]).

[1]) Vgl. Tisserand, Compt. rend. **122**, 646, 1896.

§ 2. Chronographen. Chronographen nennt man Apparate, welche die Zeitpunkte für gewisse Erscheinungen angeben (registrieren), und es somit ermöglichen, die Intervalle zwischen diesen Zeitpunkten zu bestimmen. Die Registrierung erfolgt gewöhnlich auf einem Papierstreifen, der sich der Länge nach vorwärts bewegt, etwa in der Art, wie beim Morseschen Telegraphenapparat — oder auf einem rotierenden und in der Richtung der Achse fortschreitenden Zylinder. Die Bewegung des Papierstreifens bzw. der Zylindertrommel wird durch ein Uhrwerk bewirkt; bisweilen wird auch die Zylindertrommel mit der Hand gedreht. Die Zeichen auf dem Papierstreifen werden mit Hilfe einer Nadel, eines Bleistiftes oder einer Feder mit farbiger Tinte hervorgebracht, bisweilen auch durch einen Induktionsfunken, der von einer Spitze auf einen kleinen unter dem Papierstreifen befindlichen Metallstreifen überspringt und ein kleines Loch im Papierstreifen hinterläßt. Die Bewegung der Nadel usw. bewirkt ein Elektromagnet. Der Induktionsfunke wird hierbei durch plötzliches Öffnen des galvanischen Stromes, der den Elektromagneten erregt, hervorgebracht. Das Schließen und Öffnen des Stromes wird entweder vom Beobachter selbst im entsprechenden Augenblick vorgenommen oder geschieht automatisch, indem beispielsweise eine abgeschossene Flinten- oder Kanonenkugel beim Verlassen des Geschützes den stromführenden Draht zerreißt.

Die in der Regel metallische Oberfläche der Zylindertrommel schwärzt man mit einer dünnen Rußschicht, nachdem sie zuvor mit Fett oder Vaselin eingerieben worden, oder bestreut sie mit Hexenmehl. Die Zeichen auf dieser Oberfläche werden von einer Spitze oder einem elektrischen Funken hervorgebracht. Bisweilen überzieht man auch die Trommel mit einem Papierstreifen, auf welchem dann in der weiter unten angegebenen Weise Zeichen erhalten werden; den Streifen kann man nachher abnehmen und aufbewahren. Hat die Trommel bloß eine rotierende Bewegung, so muß die Schreibvorrichtung sich parallel zur Trommelachse verschieben können, damit die Zeichen nicht an derselben Stelle entstehen, wenn die Trommel einen vollen Umlauf gemacht hat. Ist dagegen die Schreibvorrichtung unbeweglich, so muß sich die Trommel auf einer Schraubenachse seitlich verschieben können, so daß die aufgezeichneten Linien oder Zeichen sich in einer schraubenförmigen Linie anordnen. Es gibt auch Chronographen, bei denen die Zylindertrommel unbeweglich ist und die Schreibvorrichtung sich um sie herumbewegt. Das Aufzeichnen mittels einer Spitze kann in verschiedener Weise geschehen:

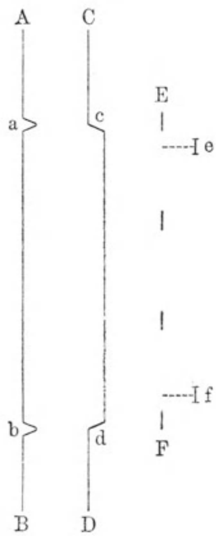
1. Der Zeichenstift steht ein wenig von der Trommelfläche ab und berührt sie nur in den zu bestimmenden Zeiten auf einen Augenblick. Dann entstehen vereinzelte Punkte oder ganz kurze Striche, deren gegenseitiger Abstand als Maß des gesuchten Zeitintervalls dient. Läßt man die Berührung während des gesuchten Zeitabstandes andauern, so

entsteht ein längerer Strich, dessen Länge das Maß für das Intervall liefert.

2. Der Stift berührt die Trommel und entfernt sich dann von ihr in bestimmten Augenblicken oder im Laufe einer gewissen Zeit; hier dienen die Lücken in der Linie zur Ermittelung des gesuchten Zeitintervalls.

3. Der Stift berührt die Trommeloberfläche und wird in bestimmten Augenblicken oder während eines gewissen Zeitraumes zur Seite bewegt. Es entstehen in diesem Falle Linien in der Art von AB oder CD (Fig. 171); das gesuchte Zeitintervall entspricht der Länge von ab bzw. cd.

Fig. 171.



Hat man nach einer der obigen Methoden auf der Zylindertrommel des Chronographen Zeichen erhalten, welche ein bestimmtes Zeitintervall anmerken, so muß man noch bestimmen, welche Entfernung der Zeichen einer Sekunde entspricht. Hierzu dienen die folgenden Methoden:

1. Ist die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel bekannt, so entspricht (wenn man die Neigung der Schraubenlinie unbeachtet läßt) einer Sekunde die Länge $2\pi n R$, wo R den Grundflächenradius und n die Zahl der Umdrehungen in einer Sekunde bedeuten.

2. Man nimmt eine Uhr mit Sekundenpendel, welche bei jeder Schwingung des letzteren einen elektrischen Strom für einen Augenblick schließt oder öffnet; dieser Strom wirkt auf einen zweiten Zeichenstift, der sich neben dem ersten befindet; dieser zweite bezeichnet auf dem Papierstreifen bzw. der Trommel nach einer der vorher beschriebenen Methoden die um je eine Sekunde voneinander abstehenden Zeitpunkte. In Fig. 171 entsprechen die vier Striche zwischen E und F den einzelnen Sekunden, die Striche e und f dagegen den gesuchten Zeitpunkten, die, wie man sieht, um $2{,}7 - 0{,}2 = 2{,}5$ Sekunden voneinander entfernt sind.

3. Auf einem rotierenden Zylinder wird durch einen an der Zinke einer Stimmgabel mit bekannter Schwingungszahl befestigten Stift eine Wellenlinie aufgezeichnet. In Fig. 172 ist der Zylinder nebst Schraubenachse und Stimmgabel K abgebildet, der Zeichenstift ist hier nicht sichtbar. Versetzt man den Zylinder in Drehung, so zeichnet der Stift, falls der Zylinder keine fortschreitende Bewegung besitzt, eine wellenförmige Kurve, wie sie in Fig. 173 dargestellt ist. Rückt dagegen der Zylinder auf seiner Achse weiter, so umgibt die Wellenlinie den Zylinder schraubenförmig, wie in Fig. 174. Zweckmäßig läßt man den Zylinder zu Beginn des Versuches bei ruhender Stimmgabel

eine Reihe von Umdrehungen ausführen; dann entsteht eine Schraubenlinie, welche die darauf mit schwingender Stimmgabel erhaltenen Wellenlinie in zwei symmetrische Hälften teilt.

Um die Stimmgabel K zum Tönen zu bringen, bringt man sie zwischen zwei Elektromagnete M und M', durch deren Bewickelung

Fig. 172.

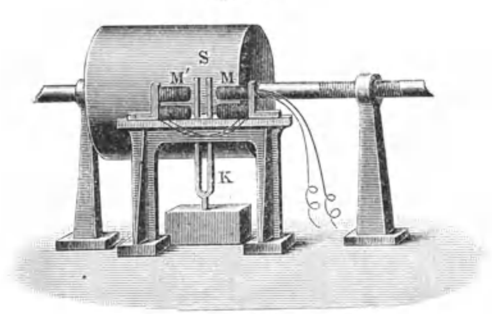
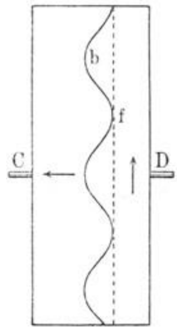


Fig. 173.



man, falls n die Schwingungszahl der Stimmgabel ist, n kurzdauernde Ströme in der Sekunde sendet. Hierzu dient die Unterbrecherstimmgabel, die in Fig. 175 dargestellt ist und ebenfalls die Schwingungszahl n hat. An Zinken der letzteren sind zwei Stifte K und O befestigt, von denen K in das Quecksilber des darunter befindlichen Ge-

Fig. 174.

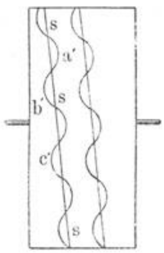
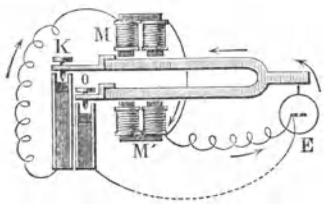


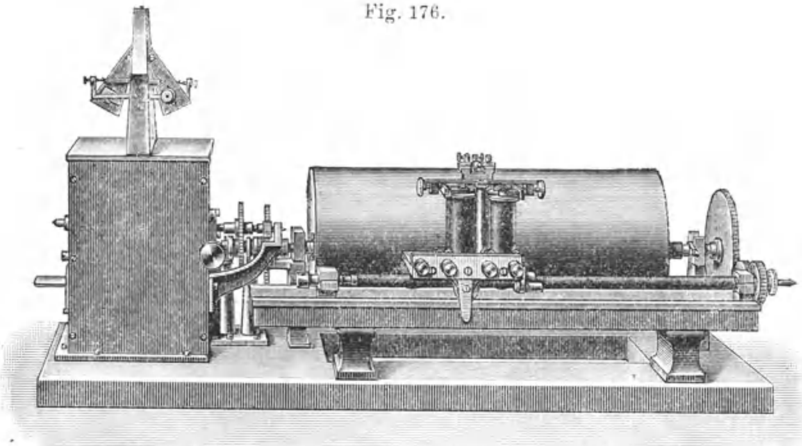
Fig. 175.



fäßes taucht, während sich O ein wenig oberhalb des Quecksilbers im rechten Gefäße befindet. Die Anordnung der Elektromagnete und Drahtleitungen ist aus der Figur ersichtlich. In der durch eine punktierte Linie angedeuteten Nebenleitung befinden sich die Elektromagnete der Stimmgabel K (Fig. 172). Ist der Strom des Elementes E geschlossen, so fließt er in der Richtung der Pfeile, und die Elektromagnete ziehen die Stimmgabel an. Hierbei hebt sich K aus dem Quecksilber und taucht O in dasselbe ein, so daß die Hauptleitung geöffnet, die Nebenleitung geschlossen wird. Der Strom geht nun zur Schreibvorrichtung (Fig. 172). Infolge der Unterbrechung der Hauptleitung verlieren die Elektromagnete M und M' ihren Magnetismus, die Zinken der Stimmgabel kehren in die Lage zurück, welche in der Figur dargestellt ist, K taucht wieder in das Quecksilber ein, während O dasselbe verläßt. Nun wird wiederum die Hauptleitung geschlossen, die Nebenleitung geöffnet, die Elektromagnete ziehen wiederum die Zinken der Stimmgabel an usw. Auf diese Weise beginnt die Unterbrecherstimmgabel (Fig. 175) zu tönen, macht n Schwingungen in der Sekunde, schließt die Nebenleitung ebensooft und versetzt die Schreibstimmgabel K (Fig. 172) in ebenfalls n Schwingungen pro Sekunde.

In Fig. 176 ist ein Chronograph der Société Genévoise abgebildet. Links befindet sich das Uhrwerk, welches den Zylinder nur in gleich-

Fig. 176.



förmige Drehung versetzt, während der vorn sichtbare Schreibapparat sich durch die gleichzeitige Drehung der horizontalen langen Schraube gleichförmig parallel der Achse des Zylinders bewegt.

Zur Messung äußerst kleiner Zeitabstände dienen verschiedene Verfahren, von denen wir einige später in Band II und IV betrachten werden. H. Abraham und L. Lemoine haben eine Methode angegeben, welche es ermöglicht, Zeitintervalle von der Größenordnung 10^{-8} bis 10^{-9} Sekunden zu messen, und zwar durch Bestimmung der Strecke, welche während dieser Zeit vom Licht zurückgelegt wird. Die Methode von Abraham und Lemoine wurde genau untersucht, angewandt und vervollkommnet durch John James (1904), Mond und Wildermann (1906) und Turpain (1905). Eine andere Methode, sehr kleine Zeitintervalle zu messen, hat Devaux-Charbonnel (1906) angegeben; sie beruht auf der Messung der in jenem Zeitintervall sich entladenden Ladung eines Kondensators.

Abraham und Lemoine: Ann. chim. phys. (7) **20**, 264, 1900; Journ. de phys. (3) **9**, 262, 1900.
John James: Annal. d. Phys. (4) **15**, 954, 1904.

Mond und Wildermann: Phil. Mag. (6) **11**, 393, 1906; Zeitschr. f. phys. Chem. **54**, 294, 1906.
Turpain: C. R. **141**, 422, 1905.
Devaux-Charbonnel: C. R. **142**, 1080, 1906.

§ 3. Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels. Wir hatten für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

gefunden, vgl. (43), S. 254, wo K das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Drehungsachse, P sein Gewicht, a die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachse und α der Ausschlagswinkel war, um den sich das Pendel aus seiner vertikalen Lage entfernt. Für unendlich kleine Schwingungen war

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

so daß

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wurde.

Es soll nun die Größe T_0 gefunden werden. Sind die Schwingungen sehr klein, so kann man annehmen, daß die beobachtete Schwingungsdauer T gleich T_0 sei. Um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen, registriert man nach einer der im § 2 beschriebenen Methoden die Augenblicke, in welchen das Pendel durch seine Gleichgewichtslage hindurchgeht. Am bequemsten ist es, wenn man zunächst den Zeitpunkt festlegt, wo das Pendel zum erstenmal durch seine Gleichgewichtslage schwingt; dies ist dann der Ausgangspunkt der Zählung. Hierauf merkt man sich den Moment des $n$ten, etwa 50ten oder 100ten Durchganges durch die Gleichgewichtslage. Sei der Zeitabstand vom nullten bis zum $n$ten Durchgang gleich τ_n, so ist für sehr kleine Schwingungen

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Der größeren Genauigkeit halber bedienen wir uns jedoch der Formel (3) und berücksichtigen dabei den Umstand, daß die Pendelschwingungen gedämpfte Schwingungen darstellen (S. 156), deren Amplitude in geometrischer Progression abnimmt. Anstatt α kann man das arithmetische Mittel aus der Anfangsamplitude α_1 und Endamplitude α_n wählen; dann ist

$$T = \frac{\tau_n}{n} = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right)$$

oder

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Die genauere Formel hat folgende Form

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_n)\sin(\alpha_1 - \alpha_n)}{32\, lg \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_n}}} \quad \ldots \quad (6)$$

wo das Zeichen lg den natürlichen Logarithmus bedeuten soll.

Die Größe des Ausschlages kann man dadurch bestimmen, daß man z. B. eine horizontale Skala hinter dem unteren Pendelende parallel zur Schwingungsebene anbringt.

§ 4. **Das Trägheitsmoment eines Pendels.** Das Trägheitsmoment K eines Pendels kann man nur in seltenen Fällen durch Rechnung finden; möglich ist dies, wenn die Gestalt und die Dimensionen des Pendels einer der auf S. 99—101 gegebenen Formeln entsprechen. Ist M die Masse des Pendels, so stellt sich K im allgemeinen in der Form $M\varrho^2$ dar; setzt man diesen Ausdruck für K und $P = Mg$ in (2) ein, so ergibt sich

$$T_0 = \pi \frac{\varrho}{\sqrt{ga}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Besteht z. B. das Pendel aus einem s e h r d ü n n e n F a d e n, d e s s e n M a s s e v e r n a c h l ä s s i g t w e r d e n k a n n, und e i n e r m a s s i v e n K u g e l vom Radius R und bezeichnet l die Entfernung des Aufhängepunktes vom Kugelmittelpunkt, so erhält man nach Formel (39) auf Seite 101 und Formel (39) auf Seite 253

$$K = \frac{2}{5} MR^2 + Ml^2 \text{ und hieraus } \varrho = \sqrt{l^2 + \frac{2}{5} R^2}.$$

Liegt der Schwerpunkt des Pendels im Kugelmittelpunkt, so ist $a = l$ und Formel (7) gibt in diesem Falle

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Größe K verfährt man folgendermaßen. Man ermittelt zunächst die Schwingungsdauer T_0 des Pendels, d. h. die Größe

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Hierauf bringt man am Pendel ein Übergewicht an (das auch aus mehreren einzelnen Teilen bestehen kann), dessen Schwerpunkt mit der Drehungsachse zusammenfällt und dessen auf diese Achse bezogenes Trägheitsmoment K_1 bekannt ist. Hierzu kann z. B. ein flacher Ring dienen, dessen Mittelpunkt auf der Drehungsachse liegt und dessen Seiten der Schwingungsebene parallel sind; vgl. Formel (36) auf Seite 100. Man erhält die neue Schwingungsdauer T_1, wenn man in Formel (9) $K + K_1$ an Stelle von K und $(P + P_1)\,a'$ an Stelle von Pa einsetzt, wobei P_1 das Gewicht des hinzugekommenen Übergewichtes, a' den Abstand des neuen Pendelschwerpunktes von der Drehungsachse bedeuten. Formel (27) gibt indessen, da der Schwerpunkt des Übergewichtes in der Drehungsachse liegt, $(P + P_1)\,a' = Pa + P_1 \,.\, 0$. Danach erhält man

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K + K_1}{Pa}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

die Formeln (9) und (10) ergeben

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{K + K_1}{K} = 1 + \frac{K_1}{K}; \qquad \frac{K_1}{K} = \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2}$$

und hieraus folgt

$$K = K_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

§ 5. Vergleichung der Schwingungsdauer zweier Pendel; Methode der Koinzidenzen. Ist die Schwingungsdauer T eines von zwei Pendeln bekannt, und unterscheidet sich die Schwingungsdauer T_1 des anderen nur wenig von T, so läßt sich die Schwingungsdauer des zweiten auf folgende Weise bestimmen. Man hängt die beiden Pendel so auf, daß ihre Schwingungen in zu einander parallelen Ebenen erfolgen. Diese Schwingungen beobachtet man mit Hilfe eines Fernrohres, dessen Achse senkrecht zur Schwingungsebene ist und durch die Gleichgewichtslage der Pendel hindurchführt.

Wenn beide Pendel in irgendeinem Augenblick gleichzeitig und in derselben Richtung durch ihre Gleichgewichtslagen gehen, so werden, falls dann T_1 nicht gleich T ist, sich die Pendel darauf wieder voneinander entfernen; man hat nun darauf zu achten, welches von ihnen schneller schwingt. Nach einiger Zeit, wenn das Pendel n' Schwingungen vollführt hat, gehen sie wieder beide gleichzeitig durch die Mitte, der sie sich von entgegengesetzten Seiten her nähern. In diesem Augenblick hat das andere Pendel $n' + 1$ oder $n' - 1$ Schwingungen vollführt. Diese Begegnung der Pendel läßt sich nicht bequem beobachten, man bestimmt daher die Zahl n von Schwingungen, welche das erste Pendel bis zu dem Augenblick vollführt, wo beide Pendel wiederum gleichzeitig, d. h. in derselben Richtung, durch die Gleichgewichtslage gehen. In diesem Augenblick hat das zweite Pendel $n + 2$ oder $n - 2$ Schwingungen ausgeführt. Die Beziehung $n\,T = (n \pm 2)\,T_1$ liefert das gesuchte Verhältnis

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{n \pm 2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Genauigkeit der Bestimmung erhöht sich, wenn man bis zur $m$ten Koinzidenz wartet und die entsprechende Zahl N der Schwingungen des ersten Pendels zählt; in diesem Augenblick beendet das zweite Pendel seine $(N \pm 2m)$te Schwingung, und es ist

$$\frac{T_1}{T} = \frac{N}{N \pm 2m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

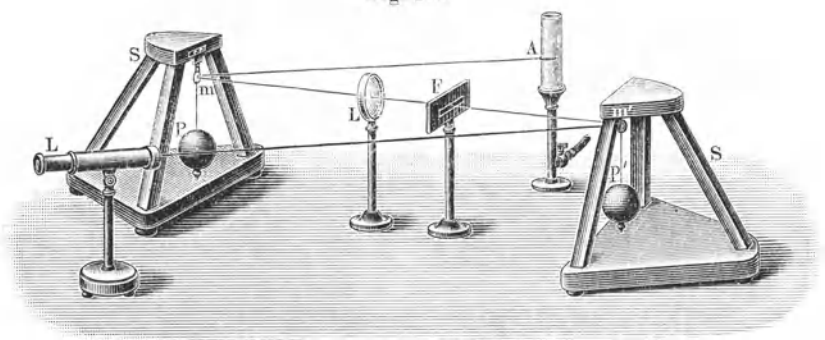
Ist das erste Pendel ein Sekundenpendel ($T = 1$), so erhält man für die Schwingungsdauer T_1 des zweiten Pendels aus (12) bzw. (13)

$$T_1 = \frac{n}{n \pm 2} \text{ Sekunden bzw. } T_1 = \frac{N}{N \pm 2m} \text{ Sekunden} \cdot \cdot \quad (14)$$

Man hat verschiedenerlei Vorkehrungen ersonnen, die einem die Beobachtung der Koinzidenzen, d. h. des gleichzeitigen Durchganges beider Pendel durch die Gleichgewichtslage, erleichtern; sie hängen von der Form der Pendel ab, und es soll davon im § 3 des folgenden Kapitels (auf S. 356) die Rede sein.

§ 6. Lippmanns stroboskopische Methode zum Vergleichen der Schwingungsdauer zweier Pendel [Journ. de phys. (2) **6**, 266, 1887]. Fig. 177 gibt ein schematisches Bild von der Anordnung der Apparate.

Fig. 177.



P und P' sind zwei Pendel, deren Schwingungsdauern nur wenig voneinander verschieden sind; sie schwingen in Ebenen, welche durch S und S' gehen. An ihnen sind zwei Spiegelchen m und m' angebracht, deren Oberflächen senkrecht zu den Schwingungsebenen sind. In A befindet sich ein heller horizontaler Spalt. Die von A ausgehenden Strahlen werden von m reflektiert und liefern nach Durchgang durch die Linse L ein Bild des ersten Spaltes an der Stelle, wo sich der horizontale Spalt der Platte F befindet. Von hier gehen die Strahlen nach m' und werden ins Fernrohr L geworfen, mit dem der Spalt F beobachtet wird. Im Okular des Fernrohres befindet sich eine vertikale, mikrometrische Skala (vgl. S. 283). Befinden sich beide Pendel in Ruhe, so erscheint im Fernrohr in der Mitte der Skala eine helle, horizontale Linie. Schwingt P' allein, so erscheint eine helle Linie, die auf- und abwärts schwingt; ist nur P in Schwingung, so leuchtet in der Skalenmitte eine Linie in den Augenblicken auf, wo das Pendel P durch seine Gleichgewichtslage geht, weil nur dann das Bild des Spaltes A auf den Spalt F fällt. Bei jeder vollen Doppelschwingung von P geschieht dies zweimal. Befinden sich endlich beide Pendel in Bewegung und ist ihre Schwingungsdauer die gleiche, so erscheinen abwechselnd zwei helle Linien, wenn P durch die Gleichgewichtslage geht; sie liegen symmetrisch ober- und unterhalb der Skalenmitte, entsprechend der zufälligen Phasendifferenz der Pendelschwingungen. Ist die Schwingungsdauer nicht genau die gleiche, so ändert sich die Lage dieser beiden Linien allmählich, und zu einer gewissen Zeit treffen sie beide in der Skalenmitte zusammen. In diesem Augenblick „koinzidieren" die Schwingungen, d. h. gehen beide Pendel gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage. Man hat nun die Zahl n der Linien, welche bis zur nächsten Koinzidenz auftreten, zu zählen; es ist dann die Dauer von n Schwingungen des Pendels P gleich der Dauer von ± 1 Schwingungen des Pendels P'.

Im Jahre 1897 hat Lippmann zwei weitere Methoden zum Vergleichen der Schwingungsdauer für Pendel angegeben, falls diese Zeiträume wenig voneinander differieren. (C. R. **124**, 125, 1897; Journ. de Phys. (5) **3**, 5, 1913).

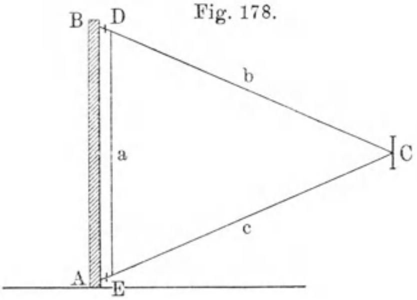
Siebentes Kapitel.

Messung der Intensität der Schwerkraft.

§ 1. Richtung der Schwerkraft. Das Gesetz der allgemeinen Anziehung lehrt, daß man die Schwerkraft in einem gegebenen Punkte als Resultante aller der Anziehungskräfte ansehen kann, die von allen Teilen der Erdkugel ausgehen. Infolge der Erddrehung tritt eine Zentrifugalkraft auf; durch diese wird die Richtung der auf die Körper an der Erdoberfläche wirkenden Kraft ein wenig geneigt. Diese Neigung ist für die Pole und den Äquator gleich Null und beträgt $11' 30''$ für 45^0 Breite. Die Richtung der Resultante aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft heißt die vertikale; sie wird durch die Richtung eines zur Ruhe gekommenen, am einen Ende befestigten Fadens bestimmt, an dessen anderem Ende ein Gewicht angebracht ist; ebenso kann man sie als die Senkrechte zur Horizontalebene definieren, wo dann letztere mit Hilfe der Libelle bestimmt wird.

Die Richtung der Vertikallinie hat man bis in die letzte Zeit hinein für unveränderlich gehalten und auf sie die Lage anderer Linien bezogen. Der hohe Genauigkeitsgrad, mit welchem man heutzutage Winkelmessungen ausführen kann, hat zur Entdeckung der Breitenschwankungen geführt, d. h. der Lageänderungen der Erdachse innerhalb der Erde selbst. Man hat sich infolgedessen auch neuerdings wieder die Frage vorgelegt, ob die Richtung der Vertikalen und mithin die Lage des Horizontes wirklich für jeden Erdort konstant sind. Hiermit hat sich als erster Zöllner (1871) beschäftigt, der ein besonderes Instrument — ein Horizontalpendel — konstruierte, mit dessen Hilfe man die kleinsten Schwankungen der Vertikallinie wahrnehmen kann. Ähnliche Apparate sind schon früher von Hengler (1832) und Perrot (1862) zu anderen Zwecken angefertigt worden. Im Jahre 1894 hat Rebeur-Paschwitz eine umfangreiche Arbeit über seine mit dem Horizontalpendel in Wilhelmshafen, Potsdam und Puerto-Orotawa (auf der Insel Teneriffa) ausgeführten Untersuchungen veröffentlicht. Die sehr einfache Grundidee des Horizontalpendels ersieht man aus der schematischen Fig. 178. An der vertikalen Achse AB ist das aus drei leichten Röhrchen a, b, c bestehende Dreieck EDC angebracht; die Befestigung ist eine derartige, daß sich das Dreieck, ohne besondere Reibung zu erfahren, um die Achse AB bewegen kann. Fällt diese Achse mit der Vertikalen zusammen, so befindet sich das Pendel DCE im indifferenten Gleichgewicht; schließt sie jedoch mit der Vertikalen einen, wenn auch noch so kleinen Winkel ein, so nimmt das Pendel eine bestimmte Gleichgewichtsstellung an, wobei sein Schwerpunkt in einer durch die Drehungsachse und die Vertikallinie gehenden Ebene zu liegen kommt. Die geringsten seitlichen Schwankungen der vertikalen Richtung führen zu Änderungen der Gleichgewichtslage des Pendels, welche dann nach der Spiegelablenkungsmethode unter Benutzung des in C angebrachten Spiegelchens beobachtet werden können. Auf diese Weise lassen sich Verschiebungen der Vertikallinie um 0,001″ wahrnehmen. Man kann zum gleichen Zweck auch einen selbstregistrierenden Apparat verwenden, dessen Einrichtung darauf beruht, daß ein vom Spiegel C reflektierter Lichtstrahl auf die Oberfläche eines horizontalen Zylinders fällt, der mit lichtempfindlichem Papier bezogen ist und langsam um seine Achse rotiert.

Fig. 178.



Derartige Pendel sind unter anderem von E. Kortazzi in Nikolajew und Lewitzki in Charkow und Jurjew (Dorpat) aufgestellt worden. Die Beobachtungen mit dem Horizontalpendel haben gelehrt, daß Schwankungen der Vertikallinie in der Tat vorhanden sind und nicht selten größer werden, als die bei Winkelmessungen möglichen Beobachtungsfehler. Man muß sie daher für genaue astronomische Beobachtungen mit in Rechnung bringen. Man hat periodische, jährliche und tägliche Schwankungen beobachtet, die von der Wirkung der Sonnenstrahlung auf die Erdrinde herrühren, und ebenso halbtägige Schwankungen, die vom Monde hervorgerufen werden. Bei derartigen Beobachtungen muß man sorgsam darauf achten, daß die Messungen nicht durch „seismische Stürme" oder vereinzelt auftretende Erdbebenstöße gestört werden, denn das Horizontalpendel ist für diese außerordentlich empfindlich. Erdbeben in Zentralasien, Japan und Südamerika senden seismische Wellen aus, die von den Horizontalpendeln in Europa noch registriert werden. Im Verlaufe eines Jahres (vom 4. August 1893 bis zum 4. August 1894) sind in Charkow nicht weniger als 124 Erdbeben verzeichnet worden; am 12. Juni 1897 wurde in Jurjew (Dorpat) eine relativ starke seismische Bewegung registriert, deren Entstehungsherd sich in Indien befand.

Gegenwärtig bildet das Horizontalpendel den wichtigsten Bestandteil der Seismographen, welche dazu dienen, die aus weiter Ferne kommenden, durch Erdbeben erzeugten Erschütterungen zu registrieren. Die vorzüglichsten dieser Apparate sind vom Fürsten Galitzin konstruiert und an verschiedenen Stellen aufgestellt worden. In zahlreichen Schriften hat er die Seismologie auf neuen, streng wissenschaftlichen Grundlagen aufgebaut. Seine neuesten Apparate ermöglichen es, aus den Aufzeichnungen an einem Ort die Lage des Erdbebenmittelpunkts mit großer Genauigkeit zu berechnen. Eine zusammenfassende Darstellung seiner theoretischen und experimentellen Arbeiten findet sich in seinem großen Werke.

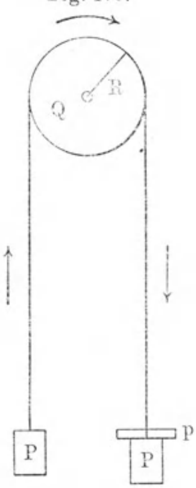
Bei den Beobachtungen mit dem Horizontalpendel muß auch auf die von Winden hervorgerufenen horizontalen Bewegungen der Erdoberfläche Rücksicht genommen werden. Nach O. Hecker (1899), der sich viel mit diesem Gegenstand beschäftigt hat, dringen diese Bewegungen viel tiefer in das Erdinnere ein, als man es vermuten könnte.

§ 2. Bestimmung von g mit Hilfe der Atwoodschen Fallmaschine und anderer Apparate, die zur Untersuchung des freien Falles der Körper dienen. Die Konstruktion der Atwoodschen Fallmaschine setzen wir als bekannt voraus, und ebenso die Art, wie man sich ihrer bedient, um die Gesetze des freien Falles der Körper experimentell abzuleiten $\left(v = gt \text{ und } s = \frac{1}{2} gt^2\right)$ und um das Grundgesetz der Bewegung (daß die Beschleunigungen direkt proportional den Kräften und indirekt proportional den Massen sind) darzutun. An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie man den genauen Ausdruck für die Beschleunigung g' ableitet, welche die Gewichte der Fallmaschine erlangen. In der Elementarphysik wird nachstehende Formel hergeleitet

$$g' = \frac{p}{2\,P + p}\,g \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

wo p das Übergewicht ist (vgl. Fig. 179) und P das Gewicht jeder der beiden Belastungen, die unmittelbar an der Schnur wirken. Die Formel (1) ist, wie wir gleich sehen werden, sehr ungenau; ja ohne einige unumgänglich notwendige Korrektionen ist es sogar unmöglich, mit ihrer Hilfe die Bewegungsgesetze überhaupt und die Fallgesetze im besonderen zu prüfen und die Beschleunigung g' zu finden. Letztere ergibt sich bekanntlich, indem man die Zeit t, innerhalb welcher sich das Gewicht p um die Strecke s senkt, mittels des Chronographen oder einer im § 1 dieses Kapitels beschriebenen Zählvorrichtung bestimmt, aus der Formel $s = \frac{1}{2} g' t^2$ bzw.:

Fig. 179.



$$g' = \frac{2\,s}{t^2} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Die Formel (1) ist ungenau, da man sie, ohne auf folgende drei verschiedene Umstände zu achten, abgeleitet hat:

1. Das Rad erfährt bei seiner Drehung eine gewisse Reibung, die man, wie wir sehen werden, wie eine Kraft f, welche die Bewegung hemmt, behandeln kann, so daß also die Bewegung nicht durch das Gewicht p, sondern durch die geringere Kraft $p - f$ bewirkt wird.

2. Die bewegende Kraft $p - f$ versetzt nicht nur die Masse $2\,M + m$, wo $M = \frac{P}{g}$ und $m = \frac{p}{g}$ ist, sondern auch die Masse μ der Schnur in Bewegung, deren Gewicht wir mit $\pi = \mu\,g$ bezeichnen wollen.

3. Dieselbe Kraft $p - f$ erteilt ferner auch dem Rad eine beschleunigte Drehung; es möge Q das Gewicht desselben, R der Radius und K das Trägheitsmoment in bezug auf seine Drehungsachse sein. Wäre das Rad massiv, so hätte man $Kg = \frac{1}{2}\,QR^2$, vgl. (37), S. 100; könnte man dagegen annehmen, daß die ganze Masse des Rades auf dessen Umfang verteilt sei, so wäre $Kg = QR^2$. Der wahre Wert von Kg liegt zwischen diesen beiden Werten, und wir können

$$Kg = \alpha\,QR^2 \text{ setzen, wo } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ ist} \quad \dots\dots \quad (3)$$

Um den genauen Ausdruck für g' herzuleiten, wollen wir uns des Satzes von der Wucht bedienen (S. 111). Für einen gegebenen Augenblick seien v die Geschwindigkeit der Gewichte nebst Schnur und ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades; offenbar ist $\omega R = v$, da die Peripheriepunkte des Rades dieselbe Geschwindigkeit wie die Schnur haben müssen. Die Wucht J des ganzen bewegten Systems ist — vgl. (1) und (3) S. 102

$$J = \frac{1}{2}(2M + m + \mu)\, v^2 + \frac{1}{2} K\omega^2;$$

da $\omega R = v$ ist, so erhält man

$$J = \frac{1}{2}\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) v^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Diese Wucht muß gleich der Arbeit $(p - f)s$ sein, wo s der durchlaufene Weg ist. Setzen wir $v = g't$ und $s = \frac{1}{2}g't^2$ ein, so erhalten wir

$$\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) g' = p - f \cdot \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit g und setzen $Kg = \alpha Q R^2$, vgl. (3); auf diese Weise wird

$$(2P + p + \pi + \alpha Q)\, g' = (p - f)g \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und hieraus folgt

$$g' = \frac{p - f}{2P + p + \pi + \alpha Q} g \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Hier ist f die Kraft der Reibung, π das Gewicht der Schnur, Q das Gewicht der Rolle und α ein Bruch, dessen Wert zwischen $^1/_2$ und 1 liegt. Vernachlässigt man f, π und αQ, so erhält man Formel (1); alle unsere drei Korrektionen wirken auf g' im selben Sinne ein. Um f zu bestimmen, hat man ein Übergewicht p_0 von solcher Größe zu finden, daß sich das ganze System, nachdem es einen Anstoß erhalten, gleichförmig weiterbewegt, also Wegstrecken durchläuft, welche der Zeit proportional sind; die Beschleunigung ist dann gleich Null und daher $f = p_0$. Die Größe π wird durch unmittelbare Wägung erhalten. Die Korrektion αQ wird durch Rechnung gefunden, nachdem man die Beschleunigungen g_1 und g_2 bei verschiedenen Belastungen P_1, p_1 und P_2, p_2 nach Formel (2) ermittelt hat. Aus Formel (7) folgt

$$g_1 : g_2 = \frac{p_1 - f_1}{2P_1 + p_1 + \pi + \alpha Q} : \frac{p_2 - f_2}{2P_2 + p_2 + \pi + \alpha Q} \quad \ldots \quad (8)$$

Aus dieser Proportion läßt sich αQ berechnen, da in ihr alle anderen Größen bekannt sind. Sind f, π und αQ gefunden, so erhält man mit Hilfe des durch Beobachtung gefundenen g' das gesuchte g nach Formel (7)

$$g = \frac{2P + p + \pi + \alpha Q}{p - f} g' \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Von anderen Apparaten, die ebenfalls zum Studium der Fallgesetze dienen und ebenso zur Bestimmung des Zahlenwertes der Beschleunigung g benutzt werden können, seien noch die folgenden erwähnt:

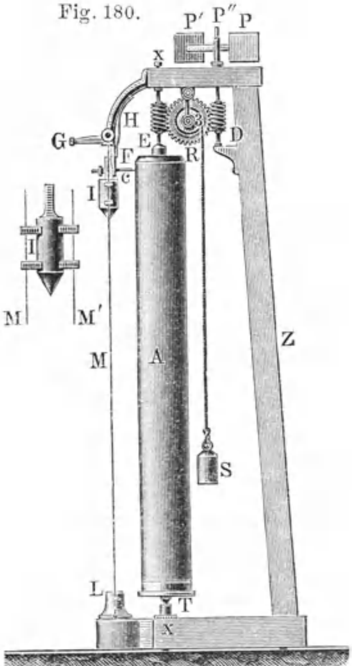
I. Die schiefe Ebene. Läßt man einen verhältnismäßig schweren Wagen auf Schienen von einer schiefen Ebene herabgleiten, so daß die Reibung nach Möglichkeit vermindert wird, so wird die Beschleunigung g' der Bewegung auf dieser Ebene mit hinreichender Genauigkeit durch die Formel

$$g' = \frac{h}{l} g = g \sin \alpha \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

dargestellt, wo h die Höhe, l die Länge und α der Winkel der schiefen Ebene mit dem Horizont ist. Bestimmt man g' nach Formel (2), so findet man danach g.

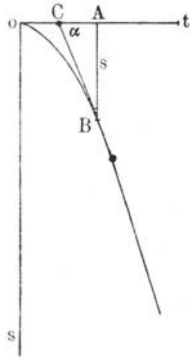
II. Die Morinsche Fallmaschine. Sie besteht aus einem vertikalen Zylinder A (Fig. 180), der mit Papier überzogen ist. Mittels des Gewichtes S kann man den Zylinder in Rotation versetzen, die gleichförmig wird, sobald S etwa zwei Drittel seines Weges zurückgelegt hat, da der Windfang PP' bei schneller Drehung wie eine Bremsvorrichtung wirkt. Neben dem Zylinder befindet sich das mit einem Zeichenstift c versehene Gewicht J, welches während des Fallens an zwei vertikal ausgespannten Drähten M und M' herabgleitet. Sobald die Rotation des Zylinders gleichförmig geworden ist, läßt man das Gewicht J fallen, wobei dann der Zeichenstift auf der Papierfläche eine gewisse Kurve aufzeichnet. Hat man den Zylinder zum Stillstand gebracht, so nimmt man das Papier herunter und untersucht die Kurve; sie hat die in Fig. 181 dargestellte Form. Zieht man nun durch den Anfangspunkt o der Kurve eine horizontale und eine vertikale Gerade — die Abszissen- und Ordinatenachse —, so stellen offenbar die Ordinate die durchlaufenen Fallräume dar und die Abszissen die Fallzeiten, da sie den Winkeln

Fig. 180.



proportional sind, um welche sich der Zylinder während des Fallens von J gedreht hat. Es ist mithin leicht, das Gesetz der Fallstrecken zu prüfen: man findet, daß die Ordinaten AB den Quadraten der Abszissen OA proportional sind. Die Gleichung der Kurve ist also von der Form $s = pt^2$, d. h. ist eine Parabelgleichung. Ist die Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders bekannt, so fällt es nicht schwer, den Weg der Abszisse OA in Sekunden, d. h. also t zu ermitteln, und dann erhält man aus $p = \frac{1}{2} g$ die gesuchte Beschleunigung g.

Fig. 181.

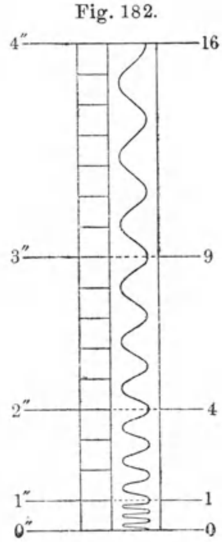


Man kann mit demselben Apparate auch das Gesetz der Geschwindigkeiten ableiten. Zu diesem Zweck zieht man durch B die Tangente BC zur Parabel; sei $\angle BCA = \alpha$. Aus den Elementen der Differentialrechnung ist bekannt, daß

$$tg\,\alpha = \frac{ds}{dt} = v \text{ ist.}$$

Auf diese Weise können wir also den Zahlenwert der Geschwindigkeit v bestimmen und uns davon überzeugen, daß v den Abszissen t proportional ist. Ermittelt man für ein und dieselbe Abszisse OA die Größe $s = AB$ und $v = tg\,\alpha$, so erhält man den Zahlenwert der Beschleunigung aus der Formel $g = \frac{v^2}{2s}$. Als Zeiteinheit dient hierbei die Zeit, die auf der t-Achse durch die Länge, nach der wir die Ordinaten s messen, dargestellt ist (nur unter dieser Bedingung ist $tg\,\alpha$ dem Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ gleich).

Fig. 182.

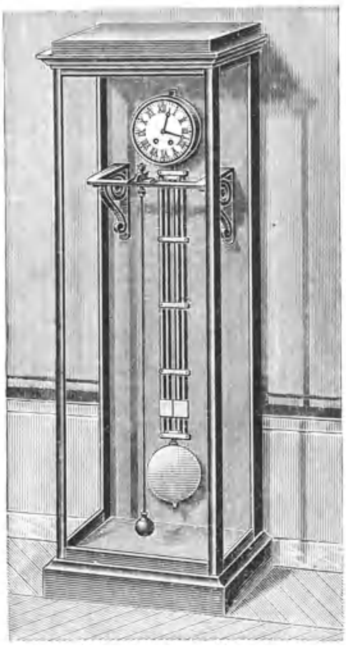


III. Aus der großen Zahl sonstiger hierhergehöriger Apparate sei nur noch auf einen hingewiesen. Sein Hauptbestandteil bildet eine Stimmgabel, die an einer der Zinken einen horizontalen Schreibstift trägt. Die Stimmgabel ist zum dauernden Tönen gebracht (vgl. S. 343) und derartig befestigt, daß die Vibrationen des Stifts in einer horizontalen Ebene erfolgen. Der Schreibstift drückt gegen die Oberfläche einer vertikalen Tafel (Fig. 182), welche parallel zur Linie, in welcher die Zinken schwingen, befestigt ist. Man läßt nun die Tafel frei fallen, während der Schreibstift auf ihrer Oberfläche eine Wellenlinie aufzeichnet. Jede Welle entspricht dem gleichen Zeitabstand T, welcher die Schwingungsdauer der Stimmgabel ist. Zieht man horizontale Linien durch jede dritte

Welle, so erhält man die Fallstrecken s, welche die Tafel in gleichen Zeiträumen durchlaufen hat. Wie aus der Figur hervorgeht, sind diese Fallstrecken den Quadraten der Fallzeiten proportional. Kennt man die Schwingungszahl der Stimmgabel, so kann man die Zeit t in Sekunden und nach Formel $g = 2\,s : t^2$ die Beschleunigung g finden.

§ 3. Bestimmung von g nach Borda durch Messung der Schwingungsdauer eines Pendels. Die Schwingungsdauer eines Pendels, das seiner Konstruktion nach dem mathematischen Pendel nahe kommt, wird nach der Methode der Koinzidenzen (Kap. VI, § 5, S. 347) durch Vergleichung mit einem Sekundenpendel bestimmt. Fig. 183 stellt den Apparat in der Form dar, in welcher er jetzt meist gebraucht wird. An der Wand des Gehäuses ist die Uhr mit dem Sekundenpendel sichtbar; davor befindet sich die an einem dünnen Draht befestigte Kugel; der Stab schwingt um eine der Kanten eines dreiseitigen Prismas. Die Schwingungsdauer dieses Pendels wird, wie erwähnt, nach der Methode der Koinzidenzen bestimmt. Um diese Koinzidenzen leichter wahrnehmen zu können, ist am Sekundenpendel ein Papierblatt, das einen vertikalen Indexstrich trägt, angebracht. Ein Fernrohr mit mäßiger Vergrößerung wird derart horizontal gerichtet, daß seine verlängerte Achse den Stab des vorderen Pendels und jenen vertikalen Index trifft, wenn beide Pendel sich in der Gleichgewichtslage befinden. Auf diese Weise ist es leicht, den Augenblick zu beobachten, wo der Stab den Index gerade überdeckt und dabei durch die Mitte des Gesichtsfeldes im Fernrohr hindurchgeht.

Fig. 183.



Für eine sehr kleine Schwingungsdauer T_0 des Pendels, das aus einem dünnen Draht und einer Kugel besteht, hatten wir bereits Formel (8) auf S. 346 abgeleitet; setzt man sie in (3) auf S. 345 ein, so erhält man für die Schwingungsdauer T die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

wo l die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Schwingungsachse, R der Kugelradius und α der mittlere Ausschlagswinkel ist. Hieraus ergibt sich

$$g = \frac{\pi^2}{T^2}\left(l + \frac{2R^2}{5l}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Da alle Größen in diesem Ausdruck bekannt sind, kann er zur Bestimmung von g dienen. Die Länge $(l - R)$ des Stabes (Drahtes) wird mit Hilfe des Kathetometers gemessen. Man muß jedoch an Formel (12) noch einige Korrektionen anbringen.

1. Wir hatten die Beschleunigung g bestimmt, mit welcher die Kugel unseres Pendels frei fallen würde; die Messung war aber im lufterfüllten Raum ausgeführt worden, wo die Kugel einen gewissen Gewichtsverlust erleidet (vgl. S. 319). Bedeutet P das wahre Gewicht der Kugel (im Vakuum), p den Gewichtsverlust, so wird die Beschleunigung g durch die Kraft $P - p$ hervorgerufen. Bezeichnet man sonach mit G die Beschleunigung für den freien Fall im Vakuum, so hat man offenbar $G : g = P : (P - p)$. Ist D die Dichte der Kugel, d die Dichte der Luft während der Beobachtung, so ist $P : p = D : d$, folglich

$$G = g\frac{D}{D - d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Besteht die Kugel aus Platin, so ist $D = 21$, während $d = 0{,}0013$ ist.

2. Der Luftwiderstand hat auf die Bewegung des Pendels einen sehr geringen Einfluß, er ändert die Schwingungsdauer um weniger als $\frac{3}{10^9}$ derselben.

3. Die Luft wird von der Kugel gewissermaßen mitgenommen und bewegt sich daher zugleich mit ihr. Poisson hat gezeigt, daß man, um eine entsprechende Korrektion anzubringen, die Größe d in (13) mit $\frac{3}{2}$ zu multiplizieren hat; es ist also

$$G = g\frac{1}{1 - \frac{3}{2}\frac{d}{D}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

4. Auch die Reibung der Luft (siehe Abt. II) hat einigen Einfluß; Stokes hat die Größe der entsprechenden Korrektion abgeleitet.

5. Während das Pendel schwingt, bleibt das Stativ nicht völlig in Ruhe; hieraus folgt, daß nicht die ganze Arbeit der Schwerkraft dazu verbraucht wird, das Pendel in Bewegung zu setzen. Dies hatten wir aber bei Herleitung der Formel (42) auf S. 254 angenommen. Eine Formel für die entsprechende Korrektion ist von Peirce hergeleitet worden.

Eine scharfsinnige Methode zur schnellen und genauen Bestimmung von g stammt von Brillouin (1897). Threefall und Pollock (1900) haben eine Gravitationswage gebaut, mit deren Hilfe g mit einem Fehler von nur 1 : 500 000 bestimmt werden kann.

Im Jahre 1905 hat Brillouin eine ebenfalls sehr genaue Methode angegeben, welche auf der Biegung einer Quarzlamelle von 0,20 mm Dicke, 5 mm Breite und 52 mm Länge beruht. Das eine Ende der horizontalen Lamelle ist eingeklemmt, das andere mit 5 g belastet. Durch Beobachtung des Biegungswinkels bis auf 0,3″ genau läßt sich g bis auf 1 : 200 000 bestimmen. Der Einfluß der Temperatur und der elastischen Nachwirkung (siehe Bd. I, Abt. II) müssen berücksichtigt werden.

Pagnini (1907) bestimmt Variationen von g, indem er die Schwingungszeit eines gewöhnlichen Pendels mit der eines horizontalen Torsionspendels (Unifilar) vergleicht. Die Schwingungszeit des letzteren hängt nur ab von dem Trägheitsmoment, also von der Masse und nicht von dem Gewicht.

Pellat (1909) benutzt ein Bifilarpendel, welches in der Ebene der Aufhängefäden schwingt; um Schwingungen senkrecht zu dieser Ebene und Torsionsschwingungen zu vermeiden, werden zum Aufhängen dünne Metallbänder benutzt.

§ 4. Bestimmung von g nach Kater mit Hilfe des Reversionspendels. Wir sahen (auf S. 252), daß die Entfernung l des Schwingungsmittelpunktes eines Pendels von seiner Schwingungsachse gleich der Länge eines mathematischen Pendels ist, das die gleiche Schwingungsdauer T hat. Kennt man T und l, so ergibt sich aus Formel (31), S. 251

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

Um l zu bestimmen, rufen wir uns den Satz ins Gedächtnis, daß Schwingungsmittelpunkt und Aufhängepunkt ihre Rolle vertauschen können (vgl. S. 254). Kehrt man also das Pendel um und führt die Schwingungsachse durch den früheren Schwingungsmittelpunkt, so ändert sich die Schwingungsdauer nicht. Hieraus folgt, daß bei einem Pendel der Abstand der beiden Schwingungsachsen, d. h. der einander zugekehrten Prismenkanten, die Größe l der Formel (15) darstellt, wenn das Pendel die gleiche Schwingungsdauer T hat, einerlei um welche der Achsen es schwingt. Auf diesem Prinzip beruht das Reversionspendel von Kater. Dasselbe hat folgende einfache Gestalt: ein Stab (Fig. 184) ist mit zwei Prismen a und b und zwei verschiebbaren Gewichten v und w versehen, deren Stellung so reguliert werden kann, daß das Pendel gleiche Schwingungsdauer (die man nach der

Methode der Koinzidenzen beobachtet) besitzt, mag es auf dem Prisma a oder b aufgehängt werden.

Hat man es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer in beiden Fällen den gleichen Wert T, reduziert auf unendlich kleine Ausschläge, hat, so hat man nur noch den Abstand l der Prismenkanten zu messen und g nach Formel (15) zu berechnen. Die anzubringenden Korrektionen sind dieselben, wie sie bereits im § 3 angeführt worden sind. In Fig. 185 ist ein Reversionspendel älterer Konstruktion dargestellt, wo sich die Prismen $\beta\beta$ in den Rahmen cc und cc befinden; a und a sind die beiden Laufgewichte, von denen das eine hohl, das andere massiv ist. In der Figur ist ein Teil des Stativs ff mit dem vorspringenden Teil L abgebildet; letzterer trägt den Stahlaufsatz l, dessen Ende eben geschliffen ist. Gegenwärtig wird das Reversionspendel oft in der Form gebraucht, welche ihm von Repsold gegeben worden ist. Eine Beschreibung desselben findet man in den Werken von Ssawitsch und Lenz, Wilkitzky, Zinger und Helmert.

Fig. 184.

Fig. 185.

Die Fig. 186 (a. f. S.) zeigt die vollständige Aufstellung eines Reversionspendels der Société Genévoise. Links befindet sich das Kathetometer mit zwei Fernrohren zur Ausmessung des Abstandes der beiden Drehungsachsen des Pendels, d. h. der Prismenschneiden.

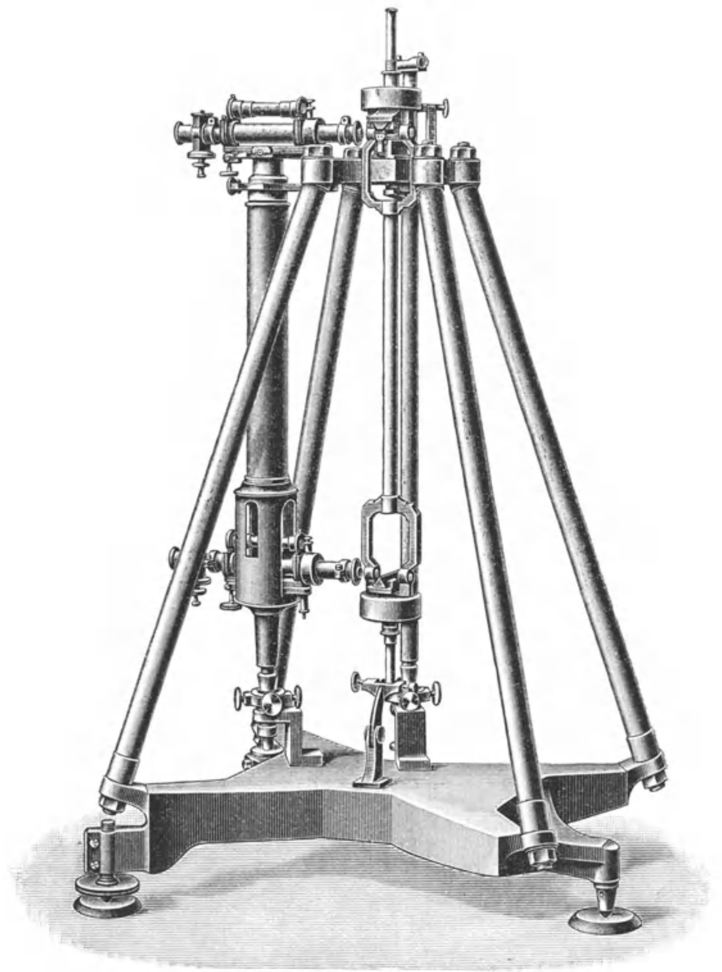
Eine völlige Gleichheit der Zeiten T_1 und T_2 ist sehr schwer oder sogar unmöglich zu erreichen. Sind sie nahezu gleich, so kann man g auf folgende Weise finden. Es sei K_0 das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf eine Achse, welche parallel zu den Prismenkanten durch den Schwingungsmittelpunkt geht, a_1 und a_2 die Entfernungen des Schwerpunktes von den Prismenkanten, $l = a_1 + a_2$ die Entfernungen der Prismenkanten voneinander und M die Masse des Pendels.

Gemäß der allgemeinen Formel (41) auf S. 254 hat man nach dem Satz auf S. 98

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_1^2}{gMa_1}} \qquad T_2 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_2^2}{gMa_2}}$$

d. h.: $T_1^2 gMa_1 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_1^2$ und $T_2^2 gMa_2 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_2^2$

Fig. 186.



Subtrahiert man die eine Gleichung von der anderen und hebt durch M, so erhält man

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1^2 - a_2^2};$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(a_1 + a_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(a_1 - a_2)} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Im ersten Gliede ist $a_1 + a_2 = l$; im zweiten Gliede stellt $T_1^2 - T_2^2$ eine kleine Größe dar, während die Differenz $a_1 - a_2$ beim Katerschen Reversionspendel keine kleine Größe ist, so daß die Kenntnis ihrer angenäherten Werte zur Berechnung des zweiten Gliedes hinreicht.

Um die Intensität der Schwerkraft an verschiedenen Orten zu vergleichen, bedient man sich eines gewöhnlichen Pendels, dessen Schwingungsdauer für die betreffenden Orte direkt bestimmt wird. Aus der Formel $g_1 : g_2 = T_2^2 : T_1^2$ findet man das gesuchte Verhältnis der Intensitäten der betreffenden Kraftfelder (S. 95) für die verschiedenen Orte. Sterneck (1887) hat einen transportablen Apparat mit mehreren Pendeln gebaut, welche nacheinander an dasselbe Stativ gehängt werden. Dieser Apparat wurde lange Zeit benutzt, z. B. Sergijewski in Pulkowo. Hecker und Borrass haben seine Konstruktion verbessert. Der zu früh verstorbene Hansky hat den Heckerschen Apparat auf Spitzbergen (1889—1901) benutzt. Benutzt man zwei Pendel, die an zwei Orten schwingen, und mißt man die Zeit mit einer Uhr, welche alle Sekunden elektrische Signale nach beiden Beobachtungsorten sendet, so kann man relativ leicht und bequem das Verhältnis der Beschleunigungen $g_1 : g_2$ für die beiden Beobachtungsorte finden. Selbstverständlich müssen die Schwingungsdauern beider Pendel zuvor unter gleichen Bedingungen miteinander verglichen worden sein.

Unter der Länge eines Sekundenpendels versteht man die Länge L eines mathematischen Pendels, für welches die Dauer unendlich kleiner Schwingungen gleich einer Sekunde ist. Aus Formel (15) erhält man, wenn man $T = 1$ und $l = L$ setzt

$$L = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Somit ist die Länge des Sekundenpendels proportional der Beschleunigung g.

§ 5. Abhängigkeit der Beschleunigung g von der Höhe und geographischen Breite des Beobachtungsortes. Man pflegt die Beschleunigung g in CGS-Einheiten auszudrücken; demnach hätte man für 45° Breite (nach Helmert)

$$g = 980{,}597 \frac{\text{cm}}{(\text{sek})^2}$$

zu schreiben; da jedoch die Sekunde immer als Zeiteinheit gewählt wird, so schreibt man gewöhnlich bloß $g = 980{,}597$ cm. Im folgenden soll selbst die Bezeichnung der Längeneinheit fortgelassen werden.

Der Wert von g ändert sich mit der vertikalen Erhebung und der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Ist R der Erdradius und seien g und g_h auf das Meeresniveau bzw. auf die Höhe h über dem Meeresspiegel und über der Erdoberfläche bezogen, so gilt

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{1}{1+2\frac{h}{R}} = 1 - 2\frac{h}{R},$$

falls man die höheren Potenzen von $\frac{h}{R}$ fortläßt. Es ist also

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

Ist h in Zentimetern gegeben, so ist

$$g_h = g\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h) \cdot \quad \cdots\cdots \quad (19)$$

Setzt man im zweiten Gliede $g = 981$, so ist

$$g_h = g - 0{,}000\,003\,h \cdot \quad \cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

Einer Erhebung um $h = 100\,\mathrm{m} = 10\,000\,\mathrm{cm}$ entspricht also eine Abnahme von g um 0,03 cm = 0,3 mm. Vorausgesetzt wird hierbei, daß man sich in der freien Luft bzw. auf einem Turm, bis zu der entsprechenden Höhe erhebt. So ist z. B. auf der Höhe des Eiffelturmes zu Paris ($h = 30\,000$ cm) der Wert von g beinahe um 1 mm kleiner, als am Fuße. Richarz und Krigar-Menzel haben den Wert der Differenz $g - g_h$ in Spandau für $h = 226$ cm bestimmt; sie fanden $g - g_h = 0{,}000\,652\,\frac{\mathrm{cm}}{(\mathrm{sek})^2}$, während nach der Theorie 0,000 697 zu erwarten war.

Genaue Messungen von Scheel und Diesselhorst haben gezeigt, daß sich das Gewicht von 1 kg bei jedem Meter Erhöhung um 0,295 mg (für Charlottenburg bei Berlin) verringert. Auf einem Hochplateau mit der Höhe h ist

$$g_h = g\,(1 - 0{,}000\,000\,001\,96\,h) \cdot \quad \cdots\cdots \quad (21)$$

Hansky fand auf dem Gipfel des Montblanc $g = 9{,}794\,72$ und in Chamounix $g = 9{,}799\,99$. Weitere theoretische Untersuchungen über die Reduktion der auf der Oberfläche der Erde beobachteten Schwerebeschleunigung auf ein gewisses Niveau sind in letzter Zeit von Brillouin, H. Poincaré und Helmert ausgeführt worden.

Die Beschleunigung g ändert sich ferner mit der geographischen Breite des Ortes, und zwar aus zweierlei Gründen. Erstens wirkt die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde der Schwerkraft entgegen; sie ist am Äquator am größten und für die Pole gleich Null. Zweitens ist die Erdgestalt (das Geoid) nahezu die eines abgeplatteten

Rotationsellipsoids, infolgedessen die Beschleunigung g ebenfalls von den Polen zum Äquator hin abnehmen muß. Unter Berücksichtigung aller dieser Umstände erhält man für die Beschleunigung g in der Höhe h über dem Meeresspiegel (und über der Erdoberfläche) und der geographischen Breite φ nach Helmert (1901) folgende Formel

$$g = 980{,}665\,(1 - 0{,}002\,648 \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h). \quad (22)$$

An der Erdoberfläche selbst erhält man in der Meereshöhe h

$$g = 980{,}665\,(1 - 0{,}002\,648 \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,001\,96\,h) \quad (22, a)$$

Hier ist h überall in Zentimetern ausgedrückt.

Die Zahl $g = 980{,}665$ bezieht sich auf $h = 0$ und $\varphi = 45^0$.

Später gab Helmert die folgende sehr genaue Formel (wir unterdrücken den von h abhängigen Faktor):

$$g = 978{,}046\,(1 + 0.005\,302 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi \;.\;. \quad (23)$$

Als Grundlage diente ihm hierbei die im Geographischen Institut zu Wien ausgeführte absolute Messung von g, welche $g = 980{,}876$ cm ergeben hat. Kühnen und Furtwängler (1898—1906) haben jedoch eine neue sehr genaue Messung von g im Potsdamer Geodätischen Institut ausgeführt und daselbst $g = 981{,}274$ cm gefunden. Dies führt zu der Formel

$$g = 978{,}030\,(1 + 0{,}005\,302 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi) \;.\;. \quad (24)$$

Die Grenzwerte von L und g in Zentimetern sind, wenn $h = 0$ ist,

für den Pol . . . . . $\varphi = 90^0$ $L = 99{,}61$ $g = 983{,}11$
für den Äquator . . . $\varphi = 0^0$ $L = 99{,}10$ $g = 978{,}10$

Für einige wichtige Städte folgen hier die Werte von φ, h und der Wert von g, wenn $g_{45^0} = 1$ gesetzt wird, sowie die Länge des Sekundenpendels.

	φ	h	g	L
Berlin	52° 30′	40,0 m	1,0006625	0,994235 m
London	51° 31′	5,5 m	1,0005815	0,994140 „
Paris	48° 50′	67,0 m	1.0003322	0,993882 „
St. Petersburg. .	59° 56′	11,0 m	1,0012798	0,994876 „

In der Art, wie Intensität und Richtung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche verteilt sind, treten besondere Unregelmäßigkeiten, sogenannte Anomalien auf. Defforges fand, daß g auf Inseln im allgemeinen den Mittelwert, welcher der gleichen Breite entspricht, übertrifft. Im Innern von Festländern bleibt g hinter diesem Mittelwert zurück. Bemerkenswerte Anomalien treten in der Umgegend von Moskau auf; in Moskau selbst ist die Lotlinie um 10,6″ nach Norden abgelenkt. Unter dem ganzen Moskauer Gouvernement ziehen sich offenbar unterirdische Hohlräume oder Schichten von geringerer Dichte in der Richtung von WSW nach ONO hin.

Wichtige Untersuchungen über derartige Anomalien wurden in letzter Zeit von Collet, Ricco, Lapparent und Platania veröffentlicht.

Koch (1904) hat darauf hingewiesen, daß die Größe der Schwerkraft an einem gegebenen Orte vielleicht im Laufe der Zeit Änderungen erleidet. Für die Differenz der Werte von g in Karlsruhe und Stuttgart fand er im Juni 1900 und im März 1904 zwei Größen, deren Unterschied fünfmal größer war, als der wahrscheinliche mittlere Fehler.

R. v. Eötvös hat sowohl die Verteilung der Erdschwere als auch die Form einer solchen Fläche S untersucht, welche normal zur Richtung der Schwere für den gegebenen Beobachtungsort ist. Die von ihm hierbei benutzten Apparate besaßen einen erstaunlich hohen Empfindlichkeitsgrad. Sie bestanden in einer unifilaren Drehwage mit sehr großer Schwingungsdauer (bis zu 20 Minuten). Die Schwingungen des horizontalen Stäbchens wurden in zwei zu einander senkrechten Ebenen beobachtet, woraus sich, wie die Theorie lehrt, die Größen der Hauptkrümmungsradien der Fläche S berechnen lassen. Ein anderer Apparat, bei welchem die Belastung des einen Stabendes niedriger angebracht ist (an das Stäbchen gehängt ist), ermöglicht die Änderung der Schwerkraft längs der Fläche S zu bestimmen; hierbei wird die Torsion des Aufhängefadens bei verschiedenen Lagen der durch die Achse des Stäbchens gehenden Vertikalebene gemessen; diese Torsion ändert sich bei Drehung des ganzen Apparates um eine vertikale Achse.

Wäre die Erde eine homogene Kugel vom Radius R, so wäre der Wert von g' im Innern der Erdkugel direkt proportional dem Abstande r des betreffenden Punktes vom Erdmittelpunkt (vgl. S. 219) und man hätte die einfache Beziehung $g = \frac{r}{R} g$. In der Tat sind aber (vgl. das folgende Kapitel) die inneren Erdschichten dichter als die der Erdoberfläche näheren; infolgedessen wächst g' zunächst, wenn man sich dem Erdmittelpunkt nähert. Unter der Voraussetzung, daß die Erddichte d eine Funktion von r von folgender Form $d = d_0 - \alpha r^2$ sei, wo d_0 die Erddichte im Mittelpunkt und α ein Zahlenkoeffizient ist, hat Roche folgende Formel hergeleitet:

$$g' = 1{,}92 \frac{r}{R}\left(1 - \frac{12\, r^2}{25\, R^2}\right) g \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (25)$$

Nach dieser Formel wächst g' zunächst bei Annäherung an den Erdmittelpunkt bis $r = \frac{5}{6} R$, wo $g' = \frac{16}{15} g$ wird, um dann bis auf Null für $r = 0$ abzunehmen. Beobachtungen von Airy in einem 383 m tiefen Schacht bestätigen die Richtigkeit obiger Formel. Nimmt man an, daß $d = d_0 - \alpha r$ ist, so entspricht das Maximum $g' = 1{,}055\, g$ dem Wert $r = 0{,}814\, R$.

Literatur.

Zu § 1. Das Horizontalpendel.

Messerschmidt: Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. Sammlung: „Die Wissenschaft“, Nr. 27. Braunschweig 1908. 158 S.
Hengler: Dinglers polytechnisches Journal 1832.
Perrot: Compt. rend. **54**, 728, 1862.
Zöllner: Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1869.
Rood: Amer. J. of Sc. **9**, 1875.
Chaplin: Trans. of the Seism. Soc. of Japan. **4**.
Gray: Phil. Mag. (4) **12**, 1881.
Rebeur-Paschwitz: Das Horizontalpendel, Halle 1882; Gerlands Beiträge zur Geophysik **2**, 1895.
Hecker: Instr. **16**, 2, 1896; **19**, 261, 1899; Beiträge zur Geophysik **4**, 64, 1889.
Lentz: Progr. Realgymnasium, Karlsruhe 1898.
Fürst B. Galitzin: Vorlesungen über Seismometrie. St. Petersburg 1912. 654 Seiten (russ.).

Zu § 2.

Atwood: On the rectilinear motion and rotation of bodies. Cambridge 1784.
Morin: Mémoires des savants étrangers VI, 641, 1838.

Zu § 3.

Die klassischen Arbeiten sind zusammengestellt in den „Mémoires sur le pendule“, s. „Collection des Mémoires relatifs à la Physique, publiés par la Société de Physique“, Bd. IV u. V, Paris 1891.
Borda: Mémoire sur la mesure du pendule 1792 (Mesure de la méridienne).
Brillouin: Compt. rend. **125**, 292, 1897.
Threefall und Pollock: Phil. Trans. **193**, 215, 1900.
Brillouin: Verh. d. 14. allgemeinen Konferenz der Internat. Erdmessung **2**, 456, Berlin 1905.
Pagnini: Journ. de Phys. (4) **6**, 128, 1907.
Pellat: C. R. **149**, 773, 980, 1909.

Zu § 4.

Kater: Phil. Trans. 1818.
Sterneck: Instr. **8**, 157, 1888.
Helmert: Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Leipzig 1898.
Bessel: Länge des einfachen Sekundenpendels. Ostw. Klass. Nr. 7.
Hecker: Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Instituts, neue Folge, Nr. 11. Berlin 1903.
Hansky: Intensité de la pésanteur, St. Pétersbourg 1905 (Missions Scientif. au Spitzberg. Mission Russe, tome I, section V).
Borrass: Verh. d. 16. allgem. Konferenz der Internat. Erdmessung, III. Teil. Berlin 1911.

Zu § 5.

Richarz und Krigar-Menzel: Wied. Ann. **51**, 559, 1894.
Scheel und Diesselhorst: Instr. 1896, 2.
Hansky: Compt. rend. **127**, 942, 1898.
Helmert: Berl. Ber. 1901, S. 329.
Poincaré: Bull. astr. 1901, S. 5.

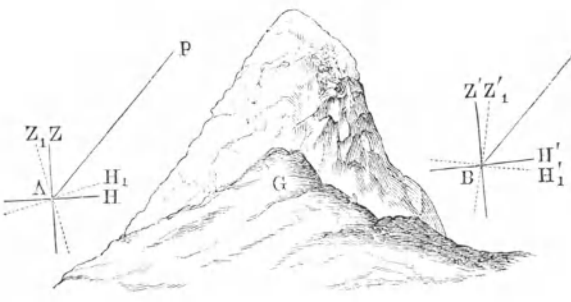
Kühnen und Furtwängler: Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Instituts, neue Folge, Nr. 27. Berlin 1906.
Ricco: Rendic. Acc. dei Lincei **12**, 483, 1903.
Collet: Compt. rend, **135**, 956, 1903.
Lapparent: Compt. rend. **137**, 827, 1903.
Platania: Compt. rend. **138**, 859, 1904.
Koch: Annal. d. Phys. (4) **15**, 146, 1904.
Defforges: Compt. rend. **117**, 205.
R. v. Eötvös: W. A. **59**, 354, 1896; Rapp. prés. au Congr. internat. de Phys. **3**, 371, 1900; Verh. d. 15. allgem. Konf. d. Intern. Erdmessung, I, Berlin 1903; ebenfalls der 16. Konferenz I. Berlin 1910.
Hecker (Wage von v. Eötvös): Verh. d. 16. allgem. Konferenz der Intern. Erdmessung II. Berlin 1911.

Achtes Kapitel.

Messung der mittleren Erddichte.

§ 1. Messungen von Maskelyne. (1775.) Unter mittlerer Erddichte D versteht man die Dichte eines homogenen Körpers, der die gleiche Masse und das gleiche Volumen wie die Erde selbst hat [vgl. Formel (25) auf S. 45]. Zu ihrer Bestimmung sind zahlreiche Messungen nach sehr verschiedenen Methoden angestellt worden; wir wollen zunächst die Maskelyneschen Messungen erwähnen. Diese sind nach einer von Bouguer vorgeschlagenen Methode ausgeführt worden,

Fig. 187.



welche darauf beruht, daß man die Anziehung der Erde mit der eines sehr großen Körpers von bekannter Masse vergleicht. Als solcher diente der sich isoliert erhebende Berg Shehallien in Schottland, dessen Volumen und mittlere Dichte angenähert bekannt waren. Die Masse des Berges sei m und die Masse der Erde $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D$, wo R der Radius ist. Die Anziehung des Berges lenkt die Lotrichtungen Z und Z' (Fig. 187), die man beobachten würde, falls jene Anziehung nicht wirkte, derart ab, daß man statt ihrer die Richtungen Z_1 und Z'_1 erhält. Die Punkte A und B lagen zu beiden Seiten des Berges auf demselben Meridian; in diesem Falle haben die Ablenkungen der Lotlinien sowie der Horizontalebenen (H_1 und H'_1 anstatt H und H') an den Punkten A und B den entgegengesetzten Sinn. Die Breitendifferenz λ der Punkte A und B wurde aus ihrer Entfernung durch geodätische Messungen gefunden; AP und BP bedeuten die Richtung der Himmelsachse. Wäre der Berg nicht vorhanden, so erhielte man für die Differenz der Polhöhen $\angle PBH' - \angle PAH$ den Wert λ. Bei der Messung erhält man jedoch diese Polhöhen nicht, sondern in Wirklichkeit die Winkel PBH'_1 und PAH_1. Ihre Differenz λ_1 sei um ε größer als λ, so daß also $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$ ist. Die Beobachtung ergab $\varepsilon = 11{,}66''$. Offenbar ist $\varepsilon = \angle H'BH'_1 + \angle HAH_1$, d. h. der Winkel, um welchen der Berg die Vertikallinie ablenkt, ist gleich $\frac{1}{2}\varepsilon$, falls sich A und B im selben Abstande r vom Berge befinden. Bedeutet F die Anziehung der Pendelmasse μ durch die Erde, f die Anziehung seitens des Berges, so ist offenbar

$$tg\,\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{f}{F} = \frac{\frac{m\mu}{r^2}}{\frac{M\mu}{R^2}} = \frac{mR^2}{Mr^2} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R D r^2}$$

und hieraus folgt

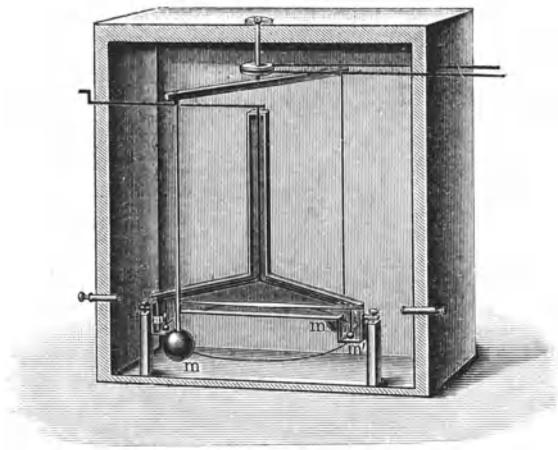
$$D = \frac{3m}{4\pi R r^2 tg\,\frac{\varepsilon}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Maskelyne fand $D = 4{,}8$. Ähnliche Messungen führten James und Clarke (1855) am Berge Arthurs Seat in Schottland ($D = 5{,}32$) und E. D. Preston (1887) am Berge Habakab auf der zum Hawaiiarchipel gehörigen Insel Marui aus ($D = 5{,}13$).

§ 2. Messungen von Cavendish. (1798.) Cavendish führte seine Messungen mittels der in Fig. 188 abgebildeten unifilaren Drehwage aus. An den Enden eines langen, leichten Stäbchens hingen zwei Metallkugeln m' und m', von denen jede 730 g wog. Die Gleichgewichtslage derselben wurde an einer horizontalen Skala mittels zweier in unserer Figur sichtbaren Fernrohre abgelesen. Zwei große Bleikugeln m und m konnten den Kugeln m' derart von zwei Seiten her genähert werden, daß sich ihre auf letztere ausgeübten Anziehungen summierten und die Wage um einen gewissen sehr kleinen Winkel drehten. Dadurch, daß man die horizontale, die Bleikugel tragende Stange um die mittlere Achse des ganzen Apparates (wie durch eine

Linie in der Figur angedeutet) drehte, konnte man die Bleikugeln den Kugeln m' von der entgegengesetzten Seite her nähern und eine Drehung der Wage im entgegengesetzten Sinne hervorrufen. Da man ferner die Länge $2l$ des Wagebalkens und den Wert δ eines Skalenteiles

Fig. 188.



kannte, konnte man aus der Zahl n der Skalenteile, um welche sich die Gleichgewichtslage der Kugeln verschob, den Winkel φ bestimmen, um den sich die Wage dank der wechselseitigen Anziehung der beiden Kugelpaare gedreht hatte. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{n\delta}{l} \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Die Drehung der Wage um den Winkel φ wird durch das Kräftepaar hervorgerufen, dessen Moment gleich $C\varphi$ ist; vgl. (19), S. 330. Bezeichnet man mit F die Kraft der gegenseitigen Anziehung jedes einzelnen Kugelpaares m und m', so hat man

$$2Fl = C\varphi = C\frac{n\delta}{l} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

Der Koeffizient C wird durch Messung der Schwingungsdauer T der Drehwage erhalten; wir sahen, vgl. (23), S. 332, daß

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{C}} \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

ist, wo K das Trägheitsmoment des Stäbchens samt den Kugeln m' in bezug auf die Drehungsachse bedeutet. Vernachlässigt man die Masse des Stäbchens selbst, so ist $K = 2m'l^2$ und man erhält nach Formel (4)

$$C = \frac{2m'l^2\pi^2}{T^2}.$$

Setzt man diesen Wert in Formel (3) ein, so erhält man

$$F = \frac{\pi^2 n \delta m'}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ist m' in Grammen und T in Sekunden ausgedrückt, so erhält man die Anziehungskraft F nach dieser Formel in Dynen. Sei ferner ϱ der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln m und m', während sie die Anziehung F aufeinander äußern, r der Radius, d die Dichte der Bleikugeln m, R der Erdradius, D die Erddichte, M die Masse der Erde und endlich P das Gewicht der kleinen Kugeln m', so haben wir dann

$$F = c\,\frac{mm'}{\varrho^2}; \qquad P = m'g = c\,\frac{Mm'}{R^2} \quad \ldots \quad (6)$$

wo c derselbe Koeffizient ist, der in Formel (1) auf S. 204 mit C bezeichnet war. Die Formeln (6) geben, wenn man $m = \frac{4}{3}\pi r^3 d$ und $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D$ setzt

$$\frac{F}{P} = \frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{M\varrho^2} = \frac{r^3 d}{\varrho^2 R D},$$

und hieraus folgt

$$F = \frac{r^3 d g m'}{\varrho^2 R D} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Setzt man (5) und (7) einander gleich, so erhält man

$$D = \frac{g T^2 r^3 d}{\pi^2 n \delta \varrho^2 R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Cavendish benutzte zu seinen Messungen zwei verschiedene Fäden; für den dünneren war $T = 840$ Sek., für den dickeren $T = 420$ Sek. Als Mittel aus 29 Messungen fand er

$$D = 5{,}45.$$

§ 3. Neuere Messungen nach der Methode von Cavendish. Die Größe D ist sowohl in früherer, als auch in neuerer Zeit von vielen Seiten nach der oben angegebenen Methode mittels der Drehwage bestimmt worden. Reich (1837—1852) hat zuerst diese Messungen nach einer Methode, die genauer war als die von Cavendish gegebene, wiederholt; er fand endgültig (1852)

$$D = 5{,}58,$$

Baily (1842) erhielt $D = 5{,}67.$

In den Jahren 1870 bis 1878 führten Cornu und Baille eine Reihe bemerkenswerter Messungen aus, wobei sie alle nur erdenklichen Vorsichtsmaßregeln beobachteten und die neuesten und genauesten Meßmethoden in Anwendung brachten. Um die Erschütterungen zu vermeiden, welche bei der Lagenänderung der schweren Kugeln so gut wie unvermeidlich sind, brachten sie vier gußeiserne Hohlkugeln (von 12 cm Durchmesser) paarweise in symmetrische Lage zu den kupfernen Kugeln der Drehwage. Letztere wogen je 109 g. Jedes Paar der einander übers Kreuz gegenüberliegenden Kugeln wurde abwechselnd mit Quecksilber gefüllt, welches aus dem einen Paar in das andere übergeführt wurde. Cornu und Baille fanden (1878)

$$D = 5{,}56.$$

Sehr genaue Messungen haben ferner Boys (1893) und C. Braun (1896) ausgeführt. Boys benutzte zum Aufhängen die von ihm erfundenen Quarzfäden. Die anziehenden Bleikugeln hatten Durchmesser von 4,25 und 2,25 Zoll; die Durchmesser der angezogenen Goldkugeln betrugen 0,2 bzw. 0,25 Zoll. Die Versuche wurden im Kellerraum des Laboratoriums (Clarendon) zu Oxford ausgeführt. Boys fand $D = 5{,}527$. Braun hing einen kupfernen Querbalken an einem sehr dünnen Messingdraht auf; die Enden des ersteren trugen zwei vergoldete Kugeln von 55 g Gewicht. Als anziehende Massen dienten mit Quecksilber gefüllte gußeiserne Hohlkugeln. Die Drehwage selbst befand sich unter einem Rezipienten, aus welchem die Luft ausgepumpt war.

Burgess (1902) hat eine Drehwage mit sehr dünnem Quarzfaden konstruiert. Mit dem drehbaren Arm ist ein vertikaler Zylinder starr verbunden, dessen Achse in der Verlängerung des Fadens liegt, und der in Quecksilber taucht. Durch den hydrostatischen Auftrieb wird das Gewicht des drehbaren Systems fast vollständig kompensiert, wodurch eben die Möglichkeit geboten wird, einen äußerst dünnen Faden zu benutzen.

§ 4. Andere Methoden zur Bestimmung der mittleren Erddichte. Airy (1866) bestimmte die mittlere Erddichte D, indem er die Beschleunigung g an der Erdoberfläche mit der Beschleunigung g' in einer Tiefe h unter der Erdoberfläche verglich. Unter der Voraussetzung, daß der Erdradius gleich $r + h$ ist und die Erde selbst aus einer Kugel mit dem Radius r und der Dichte D und aus einer Kugelschicht von der Dicke h und der Dichte d besteht, sieht man leicht ein, daß für die Erdoberfläche

$$g = k \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{(r+h)^2} + k \frac{\frac{4}{3}\pi [(r+h)^3 - r^3] d}{(r+h)^2}$$

ist, wo k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Vernachlässigt man das Quadrat des Bruches $\frac{h}{r}$, so erhält man

$$g = \frac{4}{3}\pi k [(r - 2h) D + 3hd].$$

Ferner ist, wie leicht ersichtlich

$$g' = k \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3}\pi k r D.$$

Hieraus folgt

$$D = \frac{d}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right)\frac{r}{3h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Bestimmungen von g und g' wurden nach der Methode von Borda ausgeführt, wobei die eine Uhr mit dem Sekundenpendel sich an der Erdoberfläche, die andere Uhr unter der Erdoberfläche befand. Beide Uhren waren miteinander elektrisch verbunden, so daß sie einen genau gleichen Gang hatten. Zur Bestimmung von D muß man jedoch offenbar die mittlere Dichte d der Oberflächenschicht kennen, worin ein Nachteil der Methode besteht. Airy nahm $d = 2{,}5$ an; ferner $\frac{r}{h} = 16000$ und fand $1 - \frac{g}{g'}$ gleich $\frac{1}{19200}$. Diese Zahlen geben $D = 6{,}57$. Haughton verbesserte später die Airyschen Rechnungen und fand $D = 5{,}48$. R. Sterneck fand $D = 5{,}52$, indem er g an der Erdoberfläche und in einer Tiefe von 1100 m miteinander verglich. Carlini (1824), Mendenhall (1880) und E. D. Preston (1892) beobachteten die Pendelschwingungen auf dem Gipfel hoher Berge (ersterer auf dem Mont Cenis, der zweite auf dem Berge Fusiama bei Tokio, letzterer auf dem Berge Mauna Kea auf der Insel Hawaii); Carlini fand $D = 4{,}837$, Mendenhall $D = 5{,}77$, E. Preston $D = 5{,}13$.

Wilsing (1885 bis 1887) beobachtete die durch eine anziehende Masse bewirkte seitliche Ablenkung eines überaus empfindlichen Pendels und fand zunächst $D = 5{,}594$, darauf nach Anbringung verschiedener Verbesserungen des Apparates $D = 5{,}579 \pm 0{,}012$.

Jolly (1881) maß die Anziehung einer beträchtlichen kugelförmigen Bleimasse von 5775 kg Gewicht auf einen auf der Wagschale befindlichen Körper und fand $D = 5{,}692$.

Ferner bestimmten A. König und Richarz die Größe D auf folgende Weise: Unmittelbar über einem großen Bleiklotz befand sich das eine Paar Wagschalen, während das andere mit dem obigen durch 226 cm lange Stangen, die durch den Bleiklotz hindurchführten, verbunden und genau unterhalb des ersteren angebracht war. Der Körper wurde dann beispielsweise zuerst auf die linke obere Wagschale, die Gewichte auf die rechte untere gebracht; darauf der Körper auf die linke untere, die Gewichte auf die rechte obere. Durch Wiederholung derselben Manipulation, jedoch ohne den Bleiklotz (um die Wirkung auszuschließen, welche durch die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe hervorgebracht war), konnte man die Größe der Anziehung dieser Masse und hieraus die mittlere Erddichte D finden.

Endgültige Resultate veröffentlichten Richarz und Krigar-Menzel im Jahre 1903. Sie fanden:

$$D = 5{,}507 \pm 0{,}009.$$

Für den Koeffizienten C in der Newtonschen Formel, vgl. (1) auf S. 204, also für die in Dynen ausgedrückte Größe der gegenseitigen Anziehung zweier Grammassen, die sich in der Entfernung von 1 cm befinden, geben die genannten Autoren folgende Zahl

$$C = (6{,}682 \pm 0{,}011) \,.\, 10^{-8}.$$

Die benutzte Bleimasse hatte ein Gewicht von mehr als 100000 kg. Take (1903) hat diese Arbeit kritisch untersucht. Poynting (1890) hängt an die Enden eines Wagebalkens Kugeln, deren Einzelgewicht etwa 21,57 kg betrug. Eine Kugel von 153,41 kg Gewicht wurde dann abwechselnd unter die eine oder andere der obigen Kugeln gebracht und die hierdurch bewirkte Änderung der Gleichgewichtslage beobachtet. Poynting fand hierbei $D = 5{,}4934$. Berget untersuchte die Anziehung einer Wasserschicht an der Oberfläche eines Sees, dessen Niveau um 1 m geändert werden konnte; er erhielt $D = 5{,}41$.

Die Ergebnisse der verschiedenen Messungen für D weichen beträchtlich voneinander ab. Am meisten Zutrauen verdienen die folgenden Werte:

	D
Cornu und Baille (1878)	5,56
Boys (1893)	5,527
Braun (1896)	5,527
Poynting (1890).	5,493
Richarz und Krigar-Menzel (1896) . . .	5,507

Als wahrscheinlichsten Wert können wir gegenwärtig annehmen

$$D = 5{,}5136,$$

d. h. eine Zahl, die kleiner ist, als die früher angenommene $D = 5{,}55$.

A. L. Gerschun hat 1899 eine neue Methode zur Bestimmung der mittleren Erddichte vorgeschlagen, die auf folgender Idee beruht. Nähert man der horizontalen Oberfläche einer Flüssigkeit von oben her eine Kugel vom Radius r und der Dichte δ, so wird die Oberfläche konvex, wobei die Vertikalebenen, welche durch den Kugelmittelpunkt gehen, diese Fläche in Kurven schneiden. Der Krümmungsradius ϱ dieser Kurven im höchsten Punkte, der mit dem Kugelmittelpunkt auf der gleichen Vertikale liegt, wird aus folgender Gleichung bestimmt

$$\frac{R}{\varrho} = 1 + \frac{\delta}{D}\left(\frac{r}{h}\right)^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo R der Erdradius, D die Erddichte und h die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Wie Formel (10) zeigt, hängt bei gegebenem δ (wenn also das Material der Kugel bekannt ist) der Radius ϱ nur vom Verhältnis $r:h$ ab und hieraus geht hervor, daß man zweckmäßig eine kleine Kugel von möglichst großer Dichte verwendet, die man der Flüssigkeitsoberfläche so nahe als möglich bringt. Für eine Platinkugel vom Radius $r = 0{,}9\,h$ erhält man als Krümmungsradius $\varrho = 1650$ km. Gerschun hat auch eine optische Methode zur Messung solcher großen Krümmungsradien angegeben, die im zweiten Bande (vgl. sphärische Aberration bei der Reflexion) besprochen werden soll. Hat man ϱ bestimmt, so berechnet man D nach Formel (10). A. Sella hat diese Methode einer kritischen Besprechung unterworfen; ausgeführt wurde sie bisher noch nicht.

Die Dichte der Erdrinde ist, wie bekannt, im Mittel nicht größer als 2,3; hieraus folgt, daß das Erdinnere eine sehr viel größere Dichte besitzen muß. Roche gab für den Wert der Erddichte in der Entfernung x vom Erdmittelpunkt die Formel

$$d = 10{,}6\left(1 - 0{,}8\,\frac{x^2}{R^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

in der R den Erdradius bedeutet. Diese Formel gibt für den Erdmittelpunkt $d_0 = 10{,}6$, für die Erdoberfläche $d = 2{,}1$. Wiechert nimmt an, die Erde bestehe aus einer Kugel, deren Radius gleich 0,8 des Erdradius ist und aus einer Oberflächenschicht von 1400 km Dicke. Der Erdkern besteht nach seiner Meinung größtenteils aus Eisen. Licondès hat vorgeschlagen, in der Formel von Roche anstatt der Zahlen 10,6 und 0,8 die Werte 10 und 0,75 zu substituieren.

Es seien an dieser Stelle einige Worte über die bemerkenswerten Apparate von Eötvös hinzugefügt, obgleich sie offenbar nicht zur Messung der Größe D bestimmt waren. Einer derselben bestand aus einer unifilaren Drehwage, die zwischen zwei Säulen aus Blei angebracht war. Die Schwingungsdauer des Stäbchens war gleich 641 Sek., wenn die Gleichgewichtslage mit der die Säulen verbindenden Geraden zusammenfiel, und gleich 860 Sek., wenn die Gleichgewichtslage senkrecht zu dieser Geraden war. Hieraus erhält man für den Koeffizienten C in der Gravitationsformel, d. h. für die Kraft, mit der sich zwei um einen Zentimeter voneinander entfernte Grammassen anziehen,

$$C = 6{,}65 \,.\, 10^{-8}.$$

Ein anderer Apparat (der Gravitationskompensator) zeigte die Anziehung einer 300 kg schweren Masse in 5 m Entfernung vom Apparat an. Bei einem dritten Apparat (dem Gravitationsmultiplikator) brachte Eötvös die anziehenden Massen bald auf die eine, bald auf die andere Seite des Stäbchens; es gelang ihm auf diese Weise, das Stäbchen in Schwung zu bringen und damit Ablenkungen zu erhalten, welche die bei einfacher Anziehung derselben Massen 150 mal übertrafen.

Wir wollen nun noch kurz einige weitere hierher gehörige Untersuchungen besprechen.

Austin und Thwing (1897) haben zuerst mit der von Boys konstruierten Drehwage untersucht, ob die Anziehung zwischen zwei Körpern durch andere, zwischen ihnen befindliche Körper verändert wird. Sie fanden kein positives Resultat, als sie dicke Platten zwischen die Körper schoben, deren Anziehung gemessen wurde. Bei dieser Anordnung entsteht eine Komplikation durch die Anziehung, welche die Platten ihrerseits ausüben.

Lager (1904) benutzte hohle Zylinder, welche die Kugeln umgaben; doch ist auch in diesem Falle die direkte Wirkung des Zwischenkörpers nicht gleich Null. Kleiner (1905) hat daher die beweglichen Kugeln mit Hohlkugeln umgeben, deren Wirkung für den Innenraum Null ist (S. 217). Hohlkugeln aus Cu, Fe und Pb hatten keine merkbare Wirkung auf die Anziehung der Bleikugeln. Das gleiche Resultat erhielt Erisman (1908), als er die beweglichen Kugeln mit doppelwandigen Hohlkugeln umgab, welche Wasser, Quecksilber oder Paraffinöl enthielten.

Crémieu (1905—1909) hat mehrere sehr empfindliche Drehwagen konstruiert, wobei er besonders die Bedingung einer möglichst vollständigen Symmetrie des Apparates berücksichtigte. Die anziehenden Kugeln ersetzte er durch Hohlzylinder, die mit Hg gefüllt werden konnten. Die beweglichen Kugeln machte er gleichfalls hohl und füllte sie mit Wasser oder Quecksilber.

Eine plötzliche Entfernung des anziehenden Körpers (Bleimasse), welcher auf eine Kugel wirkte, die an einer sehr empfindlichen Wage hing, erzeugte keine momentane Vergrößerung der Anziehung, wie Crémieu erwartet hatte.

Ferner hat Crémieu (1905) Ölkugeln in einer Mischung von Wasser und Alkohol sehr langsam in die Höhe steigen lassen. Eine einzelne Kugel stieg genau vertikal in die Höhe. Befinden sich aber zwei oder mehr Ölkugeln in der Flüssigkeit, so bewegen sie sich in gekrümmten Bahnen, welche einer gegenseitigen Anziehung entsprechen.

Besonders wichtig ist seine Untersuchung über den Einfluß eines umgebenden Mittels auf die Anziehung. Es gelang ihm, die Drehwage und die anziehenden Zylinder vollständig mit Wasser zu umgeben und zu zeigen, daß auch hierbei sehr genaue Messungen möglich sind. Es sei δ die Ablenkung der beweglichen Kugeln in Luft, δ' — im Wasser; ferner sei d die Dichte der beweglichen Kugeln, d' die Dichte der umgebenden Flüssigkeit. Dann wäre zu erwarten:

$$\delta' = \delta \frac{d - d'}{d}.$$

Die Versuche ergaben aber für δ' stets einen um etwa 5 Proz. zu großen Wert. Crémieu folgert hieraus, daß feste Körper im Wasser, außer dem hydrostatischen Druck und der Gravitation noch dem Einfluß einer unbekannten Kraft unterworfen sind.

Literatur.

Maskelyne und Hutton: Phil. Trans. 1775 und 1778.
Cavendish: Phil. Trans. **83**, 388, 1798; Gilb. Ann. **2**.
E. D. Preston: Sill. Journ. (3) **36**, 305, 1888; Bull. of the phys. Society of Washington **12**, 1892 bis 1894; Ref. Journ. de phys. (2) **8**, 188, 1889: (3) **6**, 542, 1897.
Reich: Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde. Freiberg 1838; Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. I, 1852.
Baily: Mem. of the R. Astron. Soc. London **14**, 1843; Ann. chim. et phys. (3) **5**, 338, 1842.
Cornu und Baille: Compt. rend. **76**, 954, 1873; **86**, 571, 699, 1001, 1878.
Airy: Phil. Trans. 1856.
R. Sterneck: Wien. Ber. **108**, 697, 1900.
Wilsing: Berl. Sitzungsber. 1885, S. 13; Publik. d. astrophys. Observ. zu Potsdam, Nr. 22, VI, 2, S. 35, 1887; Nr. 23, VI, S. 133, 1889.
Jolly: Abhandl. d. Bayr. Akad., 2. Kl., 13 u. 14; Wied. Ann. **14**, 331, 1881.
König und Richarz: Wied. Ann. **24**, 664, 1885; Berl. Ber. 1884, S. 1203; Anhang zu Berl. Abhandl. 1898, S. 1; Zeitschr. f. Instr. **19**, 40, 1899; Phys. Zeitschr. **2**, 135, 1901; Marb. Ber. 1903, Nr. 5, S. 27; Nr. 9, S. 97; Trav. du Congrès Internat. de Phys. **4**, 73, 1901.
Richarz und Krigar-Menzel: Berl. Ber. 1896, S. 1305; Wied. Ann. **51**, 570, 1894; **66**, 177, 1898; Instr. **19**, 40, 1899.
Berget: Compt. rend. **116**, 1501, 1893.
Poynting: Phil. Trans. **182** (A), 565, London 1891; gesondert erschien: The mean density of the earth. London 1894.
Boys: Nature (engl. Zeitschrift) **50**, 330, 366, 417; Proc. R. Soc. **46**, 296; **56**, 131; Phil. Trans. **186**, 1, London 1895.
C. Braun: Denkschrift d. math.-naturw. Klasse d. Wiener Akad. **64**, 187, 1896; Beibl. **21**, 561, 1897.
Wiechert: Verh. d. Ges. d. Naturf. Frankfurt, 1897, S. 42; Beibl. **21**, 592, 1897.
Licondès: Compt. rend. **128**, 160, 1899.
Guillaume: Séances Soc. fr. de Phys. 1893, p. 238.
R. v. Eötvös: Wied. Ann. **59**, 385, 1896.
A. L. Gerschun: Compt. rend. **129**, 1013, 1899.
A. Sella: Arch. sc. phys. (4) **10**, 322, 1900.
Take: Ann. de Phys. (4) **15**, 1010, 1904; Diss. Marburg 1903.
Burgess: Phys. Rev. **14**, 247, 257, 1902.
Kleiner: Arch. sc. phys. (4) **20**, 420, 1905.
Lager: Diss. Zürich, 1904.
Erisman: Vierteljahrsschr. d. naturf. Ges. Zürich **53**, 157, 1908.
Crémieu: Compt. rend. **140**, 80, 1905; **141**, 653, 713, 1905; **143**, 887, 1906; **148**, 1161, 1909; **149**, 700, 1909; **150**, 863, 1910; Journ. de Phys. (4) **5**, 25, 1906; **6**, 284, 1909; Revue gén. d. Sc. **18**, 7, 1907.

Namenregister

der im Text zitierten Autoren.

Sachregister.

Siehe auch unter Z.